VAR

ベクトル自己回帰（VAR）モデル：自己回帰モデルを多変量に拡張したものVARを用いる目的

* 複数の変数を用いて予測精度の向上を測ること
* 変数間の動学的関係の分析を行うこと

# 弱定常ベクトル過程

多変量への拡張

時刻におけるn次元の時系列データを

として、以下のような多変量への拡張を行う。

* ベクトル期待値  
  ベクトルの期待値（ベクトル）は、以下で定義される。
* k次自己共分散行列  
  ベクトルのk次自己共分散行列は、以下で定義される。
* k次自己相関行列  
  ベクトルのk次自己相関行列は、以下で定義される。  
  また、を用いて以下のように表すこともできる。
* ベクトルホワイトノイズ  
  ベクトルホワイトノイズは弱定常性であり、自己相関を持たない。

弱定常性

期待値と自己共分散行列が時刻に依存しないとき、ベクトル過程は弱定常（共分散定常）と言われる。

# VARモデル

VAR(p)モデルはを定数と自身のp期の過去の値に回帰したモデルである。

VARモデルの定常性

VARモデルのAR多項式の行列式を0とおいた  
というAR特性方程式の全ての解の絶対値が1より大きいことがVARモデルの定常条件となる。

VARモデルの期待値と自己共分散行列

VARモデルの期待値

自己共分散行列(以下の行列版ユール・ウォーカー方程式を解く)

VARモデルの推定

VARモデルは見かけ上無関係な回帰(SUR)モデルであり、その中でもすべての回帰式が同一の説明変数をもつという特徴を持っているため、

各方程式を個別にOLSによって推定した係数推定量は漸近性有効性を持つ

ことが知られている。

# グレンジャー因果性

経済分析の目的の１つは経済変数間の因果性の有無を判断すること  
→グレンジャー因果性

定義4.1グレンジャー因果性

現在と過去のの値だけに基づいた将来のの予測と、現在と過去のとの値に基づいた将来のの予測を比較して、後者のMSEの方が小さくなる場合、からへの**グレンジャー因果性**が存在すると言われる。

定義4.2一般的なグレンジャー因果性

とをベクトル過程とする。との現在と過去の値を含む、時点において利用可能な情報の集合をとし、から現在と過去のを取り除いたものをとする。このとき、に基づいた将来のの予測と、に基づいた将来のの予測を比較して、後者のMSEのほうが小さくなる場合、からへのグレンジャー因果性が存在すると言われる。ここで、MSEの大小は行列の意味での大小であることに注意されたい。

つまり、  
との情報のみを用いた将来の予測 vs の情報のみを用いた将来の予測  
→前者のMSEが小さくなる場合、からへのグレンジャー因果性が存在

具体的な検定方法

まず、以下の2変量VAR(2)モデルを考える。

このとき、からへのグレンジャー因果性が存在しないと言うことは、ということと同値になる。

そのため、を検定する。

まず、

をOLSで推定し、その残差平方和をとする。

次に、制約を課したモデル

をOLSで推定し、その残差平方和をとする。このとき、F統計量は

で定義され、2Fは漸近的にに従うことが知られている[[1]](#footnote-1)。

したがって、となる場合、帰無仮説は棄却され、からへのグレンジャー因果性が存在すると結論する

変量VARモデルにおけるグレンジャー因果性検定の手順

1. VARモデルにおけるのモデルをOLSで推定し、その残差平方和をとする。
2. VARモデルにおけるのモデルに制約を課したモデルをOLSで推定し、その残差平方和をとする。
3. F統計量を  
   で計算する。ここで、はグレンジャー因果性検定に必要な制約の数である。
4. をの95%点と比較し、のほうが大きければ、ある変数(群)からへのグレンジャー因果性は存在し、小さければグレンジャー因果性は存在しないと結論する。

Sims(1972)による分布ラグモデルからの解釈

ある時系列が別の時系列と期待値の誤差項を用いて、

という形で表現できるとき、はの分布ラグモデルに従うと言われている。

分布ラグモデルの特徴として、  
説明変数であるがどの時点を考えても誤差項と無相関  
↓  
において、に関する情報が含まれる部分は、  
完全に現在と過去ので記述される  
↓  
は将来のに関して現在と過去のが持つ以上の情報は持たない

したがって、からへのグレンジャー因果性が存在しないための必要十分条件は、がの分布ラグモデルで表現できることとなる。

グレンジャー因果性のメリデメ

* 長所
  + 定義が非常に明確であること
  + データを用いて容易に検定ができること
* 短所
  + 通常の因果性とは異なること  
    グレンジャー因果性が存在通常の因果性が存在という関係性のため、通常の因果性の方向とグレンジャー因果性の方向が一致しないことがある。  
    グレンジャー因果性はXがYを引き起こすかどうかを検定するのではなく、XによってYを予測できるかどうかを検定するものということに注意する必要がある。
  + 定性的概念であり関係の強さが測れない

1. 通常の回帰モデルでは、が正規分布に従う場合、F統計量は正確に自由度(2,T-5)のF分布に従う。しかし、VARモデルの場合は説明変数に過去の被説明変数が含まれているため、漸近的にのみ正当化させることに注意されたい。 [↑](#footnote-ref-1)