

# 数值分析与算法 大作业 1

罗云鹏 自 64 2016011470

2018 年 11 月 15 日

## 目录

1	需求分析	2
2	方案设计	2
3	方案基本原理	2
4	误差分析	2
4.1	舍入误差 . . . . .	2
4.2	最近邻插值 . . . . .	3
4.2.1	舍入误差 . . . . .	3
4.2.2	方法误差 . . . . .	3
4.3	双线性插值 . . . . .	3
4.3.1	舍入误差 . . . . .	3
4.3.2	方法误差 . . . . .	3
4.4	双三次插值 . . . . .	4
4.4.1	舍入误差 . . . . .	4
4.4.2	方法误差 . . . . .	4
5	程序使用及结果	5

## 1 需求分析

给定人脸图片，及其 68 个关键点坐标，设计程序，将一个图片中人脸变形，匹配到另一个人脸的关键点上。

## 2 方案设计

使用薄板样条模型，得到一个图像到另一个图像的变形函数。对于一个空白图像的每一个点，使用变形函数，即可获得此点在原图中的对应坐标。再使用最近临插值、双线性插值或者双三次插值，即可计算得到此点的值。

## 3 方案基本原理

为对人脸进行变形，首先应当得到从原始坐标到目标图像坐标的变形函数

$$(x', y') = f(x, y)$$

由于人脸关键点较多，两图像关键点间一一对应，使得图形的变形过程较为复杂，难以用显式的数学公式表达。使用薄板样条模型，寻找一个通过所有控制点的光滑曲面  $f(x, y)$ ，使能量函数

$$I_f = \iint_{R^2} \left( \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy$$

取得最小，此时  $f(x, y)$  可作为一个变形函数。具体计算过程在 PPT 中已经给出，此处不再赘述。

可将图片看作一个关于坐标的二元函数  $I(x, y)$ 。若有人脸图像 A 与 B 以及其特征点坐标文件，欲对 A 图进行变形，使得特征点位置符合 B 图位置。先建立一个空白图像 C，并求得由 B 图到 A 图的变形函数。对于空白图像 C 中每一个像素点，将其坐标  $(x, y)$  代入变形函数，求得其 A 图中对应的坐标  $(x', y')$ 。应当注意的是，此处求得的  $(x', y')$  并不是整数值，故应当使用插值的方法，根据图 A 中  $(x', y')$  附近的像素点通过插值求得此点的值  $I^*(x', y')$ 。最后，将结果赋予图 C 中  $(x, y)$  位置的像素。

插值过程中，可采用最近邻、双线性、双三次的方法，不同方法带来的误差也会不同。

## 4 误差分析

### 4.1 舍入误差

计算过程中主要使用整型与浮点数（double）两种变量。整型的舍入误差为  $\Delta_i \leq 0.5$ ，double 类型浮点数的有效数字为 10 位，舍入误差相对小得多，可忽略。对于三种插值方法的舍入误差具体分析见后。

## 4.2 最近邻插值

### 4.2.1 舍入误差

最近邻插值在计算时，直接取最近像素点的值，故舍入误差  $\epsilon = \Delta_i \leq 0.5$ 。

### 4.2.2 方法误差

令坐标  $(x', y') = (i + u, j + v)$ ，其中  $i, j$  为整数， $u, v \in (-0.5, 0.5)$ ，则  $I^*(i + u, j + v) = I(i, j)$ 。

由二元函数的中值定理，

$$\begin{aligned} |e^*| &= |I^*(i + u, j + v) - I(i + u, j + v)| \\ &= |I(i, j) - I(i + u, j + v)| \\ &= \left| \frac{\partial I}{\partial x}(i + \theta u, j + \theta v)u + \frac{\partial I}{\partial y}(i + \theta u, j + \theta v)v \right| \end{aligned}$$

其中  $\theta \in [0, 1]$ 。不妨假设  $\max \frac{\partial I}{\partial x}(i + \theta u, j + \theta v) = M_1$ ， $\max \frac{\partial I}{\partial y}(i + \theta u, j + \theta v) = M_2$ ，则有

$$\epsilon^* \leq 0.5M_1 + 0.5M_2$$

## 4.3 双线性插值

### 4.3.1 舍入误差

双线性插值公式为

$$I(i + u, j + v) = \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(i, j) & I(i, j + 1) \\ I(i + 1, j) & I(i + 1, j + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

其中  $u, v \in [0, 1]$ 。

则有

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_i & \Delta_i \\ \Delta_i & \Delta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} \\ &= \Delta_i [uv + (1 - u)v + (1 - v)u + (1 - u)(1 - v)] \\ &= \Delta_i \leq 0.5 \end{aligned}$$

### 4.3.2 方法误差

不妨设图像值函数二阶可导，且  $M_x$  为此区域图像在  $x$  轴方向上的二阶偏导最大绝对值， $M_y$  为此区域图像在  $y$  轴方向上的二阶偏导最大绝对值。

双线性插值可认为是先在  $x$  轴方向上做线性插值，再在  $y$  轴方向上做线性插值，则有

$$I^*(i + u, j + 1) = uI(i + 1, j + 1) + (1 - u)I(i, j + 1)$$

$$I^*(i + u, j) = uI(i + 1, j) + (1 - u)I(i, j)$$

不妨设

$$I^*(i+u, j) = I(i+u, j) - R_{x1}$$

$$I^*(i+u, j+1) = I(i+u, j+1) - R_{x2}$$

两点处插值余项满足

$$R_x \leq \left| \frac{M_x}{2!} (x-i)(x-i-1) \right| \leq \frac{M_x}{8}$$

则有

$$\begin{aligned} I^*(i+u, j+v) &= vI^*(i+u, j+1) + (1-v)I^*(i+u, j) \\ &= v[I(i+u, j+1) - R_{x2}] + (1-v)[I(i+u, j) - R_{x1}] \\ &= vI(i+u, j+1) + (1-v)I(i+u, j) - vR_{x2} - (1-v)R_{x1} \\ &\leq |vI(i+u, j+1) + (1-v)I(i+u, j)| + |R_x| \\ &\leq \frac{1}{8}M_x + \frac{1}{8}M_y \end{aligned}$$

#### 4.4 双三次插值

##### 4.4.1 舍入误差

双三次插值的公式为

$$\begin{aligned} I^*(i+u, j+v) &= ABC^T \\ A &= \begin{bmatrix} S(u+1) & S(u) & S(u-1) & S(u-2) \end{bmatrix} \\ B &= I(i-1:i+2, j-1:j+2) \\ C &= \begin{bmatrix} S(v+1) & S(v) & S(v-1) & S(v-2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$S(x) = \begin{cases} 1 - 2|x|^2 + |x|^3 & |x| \leq 1 \\ 4 - 8|x| + 5|x|^2 - |x|^3 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

因为

$$S(u+1) + S(u) + S(u-1) + S(u-2) = 1$$

易得

$$\epsilon = \Delta_i \leq 0.5$$

##### 4.4.2 方法误差

不妨设图像值函数四阶可导，且  $M_x$  为此区域图像在  $x$  轴方向上的四阶偏导最大绝对值， $M_y$  为此区域图像在  $y$  轴方向上的四阶偏导最大绝对值。双三次插值过程可看作先在  $x$  轴方向上做三次样条插值，再利用计算出的结果在  $y$  轴方向上做三次样条插值。由教材结论，有

$$R_x \leq \frac{5}{384}M_x$$

则在  $x$  轴方向上做三次样条插值后, 有结果

$$I^*(i+u, y) = I(i+u, y) + R_x$$

因此, 与双线性插值的误差分析类似, 在  $(i+u, j+v)$  处插值余项满足

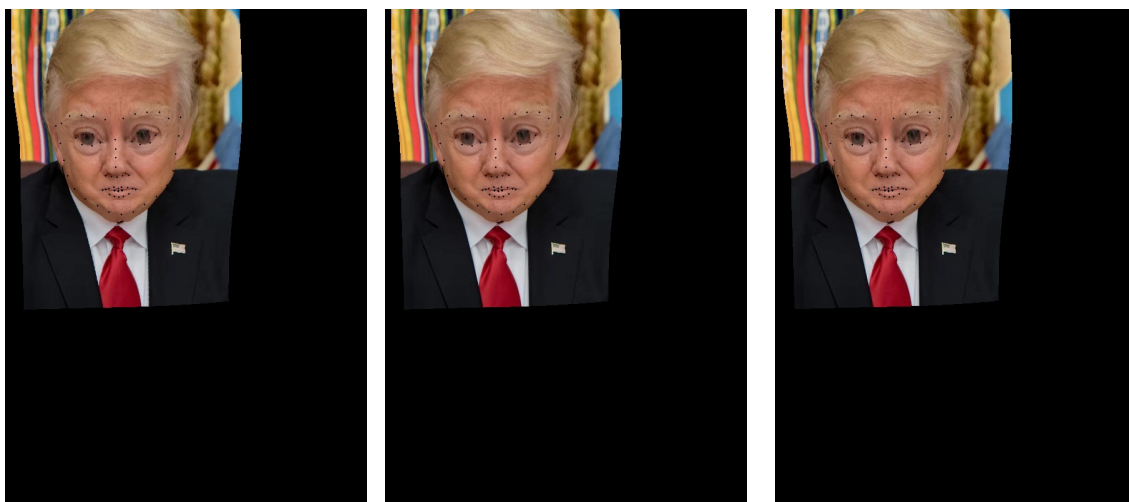
$$\begin{aligned} R(i+u, j+v) &\leq |I^*(i+u, j-2)S(v+1) + I^*(i+u, j-1)S(v) \\ &\quad + I^*(i+u, j)S(v-1) + I^*(i+u, j+1)S(v-2)| \\ &= |I(i+u, j-2)S(v+1) + I(i+u, j-1)S(v) \\ &\quad + I(i+u, j)S(v-1) + I(i+u, j+1)S(v-2) \\ &\quad + [S(v+1) + S(v) + S(v-1) + S(v-2)] M_x| \\ &\leq \frac{5}{384}(M_y + M_x) \end{aligned}$$

## 5 程序使用及结果

程序使用说明见./picture/README.md

效果如下, 在输出图片中标出了特征点位置 (使用给出的特征点数据, 以及使用特征点识别算法)

```
./FaceMatch.exe -s 8.jpg -t 6.jpg -l 8.txt -2 6.txt -ap
```



(a) 最近邻插值

(b) 双线性插值

(c) 双三次插值



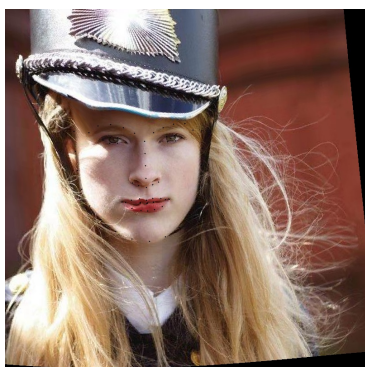
(d) 原图



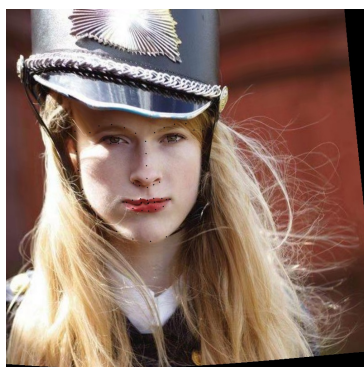
(e) 目标图像

图 1: 8.jpg 到 6.jpg, 使用给出的坐标点

```
./FaceMatch.exe -s test.jpg -t 8.jpg -1 anything -2 anything -apd
```



(a) 最近邻插值



(b) 双线性插值



(c) 双三次插值



(d) 原图



(e) 目标图像

图 2: test.jpg 到 8.jpg, 使用特征点检测算法