i-VisionGroup@Tsinghua

数值分析第一次大作业
人脸图像变形

任亮亮

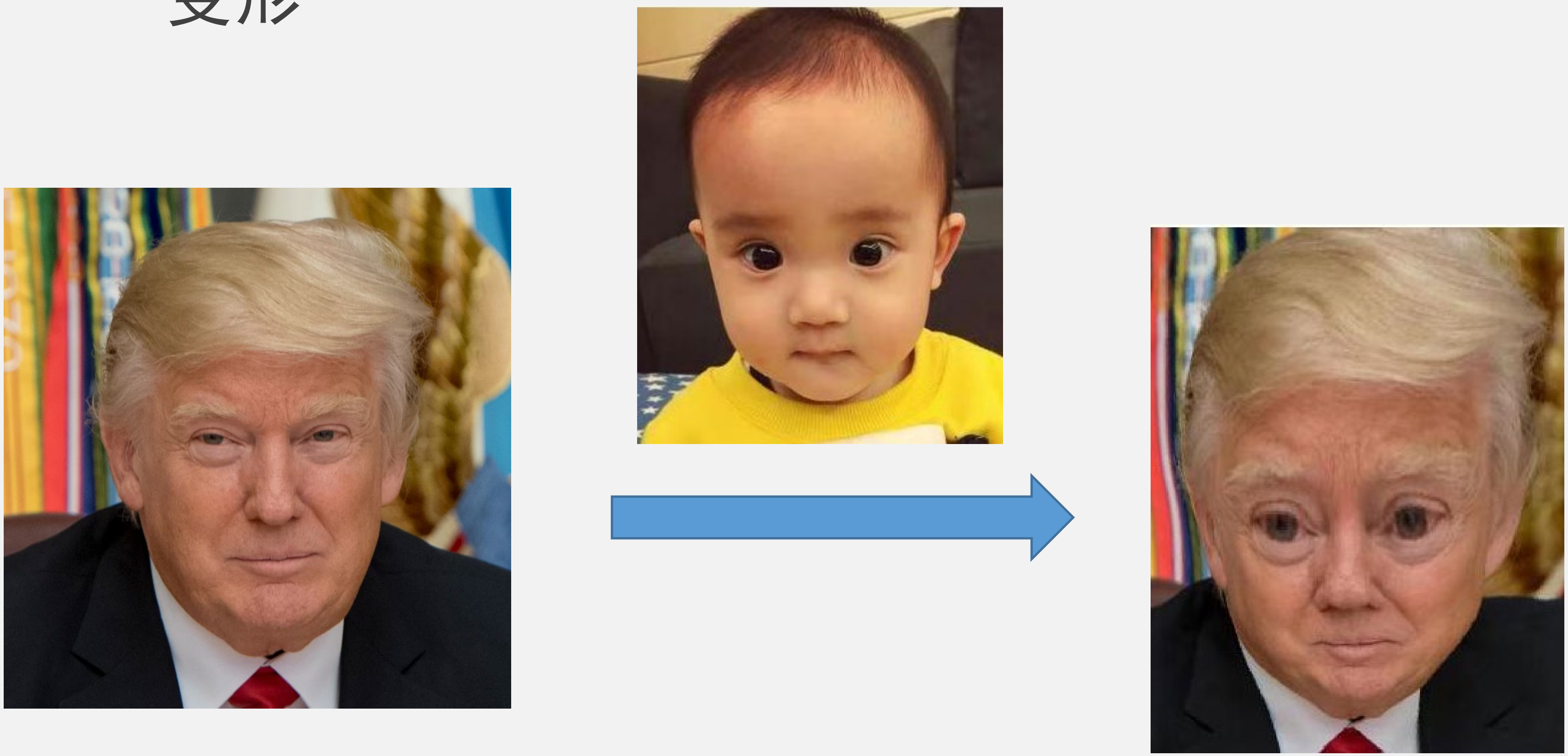
人脸图像变形

目标

- 编写扭曲变形程序，可以对人脸图像进行扭曲变形

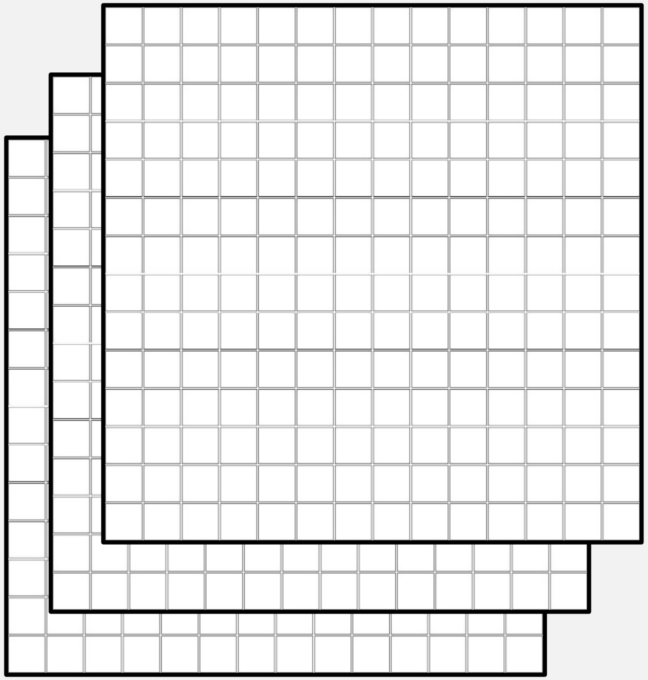
目标

- 编写扭曲变形程序，可以对人脸图像进行扭曲变形



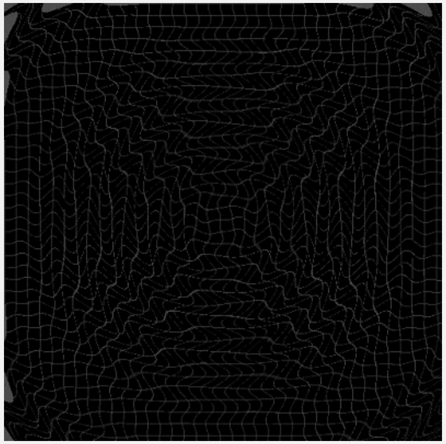
图像数据

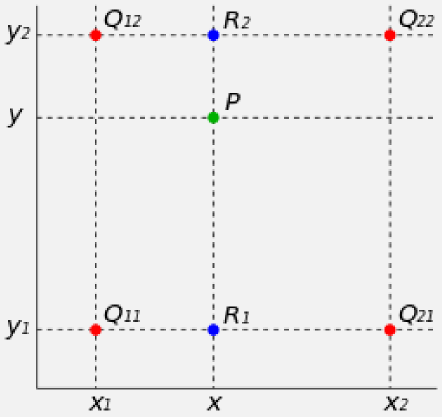
➢ 512*512*3的矩阵



图像扭曲流程

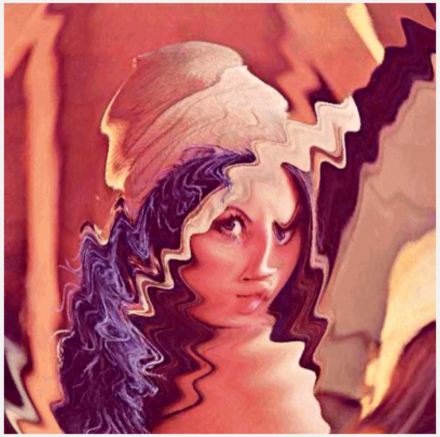
- ➢ 变形函数





$$(x^*, y^*) = f(x, y)$$

- ➢ 插值



变形函数

- 目标

- 数学描述

水波纹主要是利用正弦变换近似实现，具体的变换公示为：

α, r为原始坐标(x^*, y^*)的极坐标表示

ρ, ϕ为水波纹参数

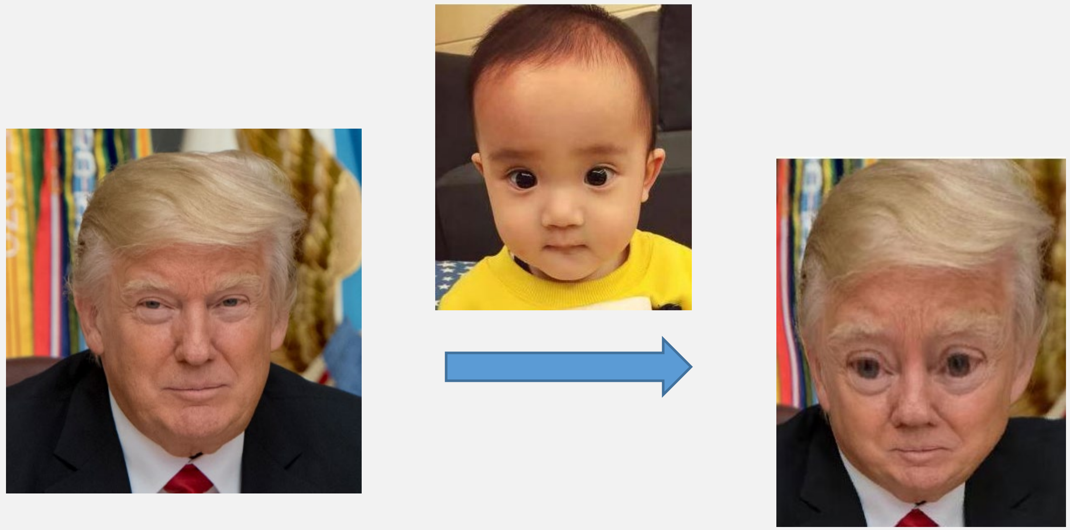
R是最大变换范围

$$\mathrm{x} = \mathrm{r} * \sin\left(\alpha + \sin\left(\frac{r}{R} * \rho + \phi\right)\right) + R$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{r} * cos\left(\alpha + \sin\left(\frac{r}{R} * \rho + \phi\right)\right) + R$$

人脸变形的数学描述

- 目标



- 数学描述？

无法用一个显式的数学公式表达

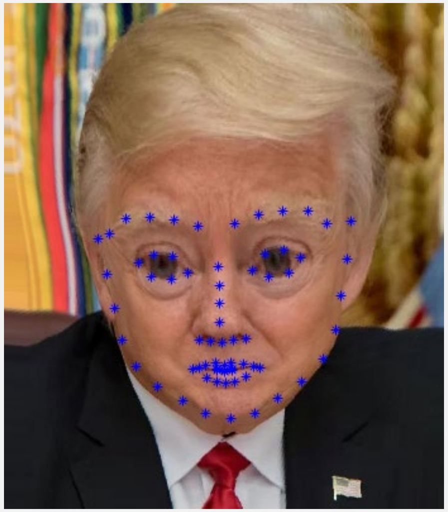
人脸关键点

- 人脸的68个关键点

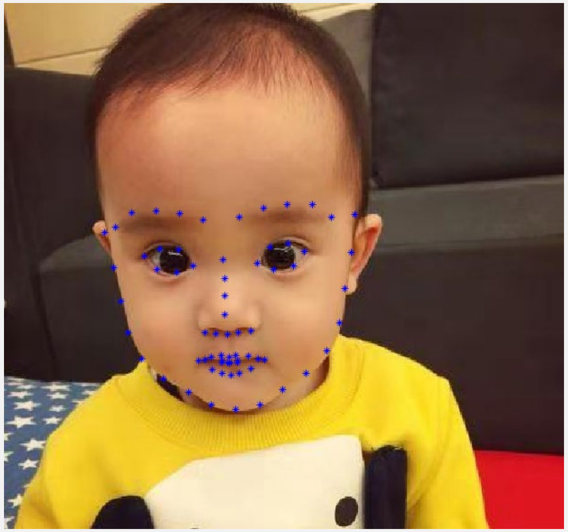
人脸关键点

- 通过匹配关键点来实现人脸的变换

待修改人脸



修改后人脸



目标人脸

人脸关键点

- 本次大作业提供9张人脸图片和关键坐标，具体见作业附件。

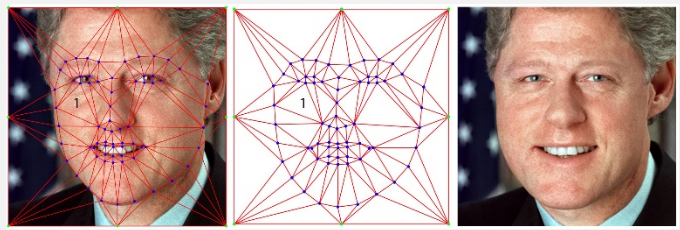




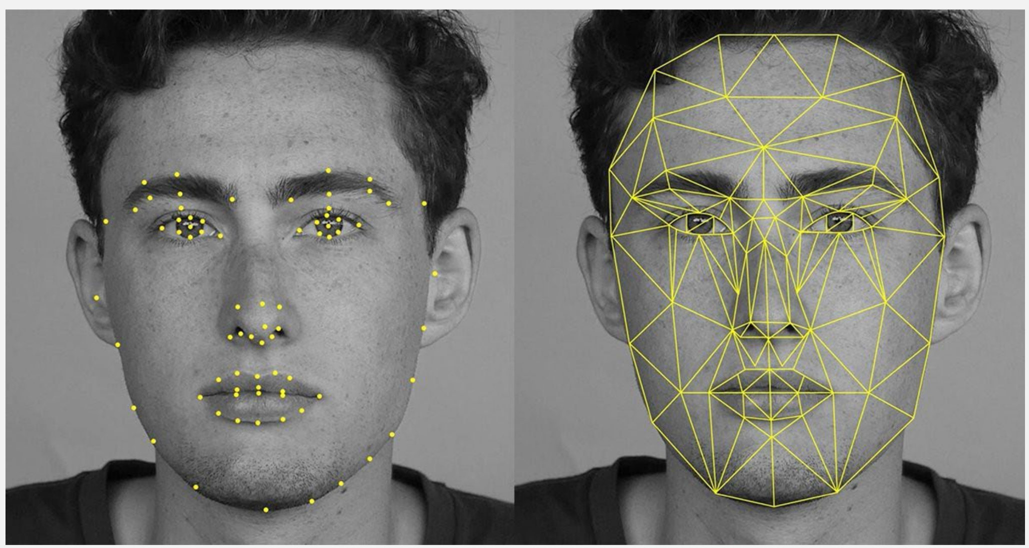


自主实现人脸关键点检测-附加题

- opencv相关的人脸关键点检测算法

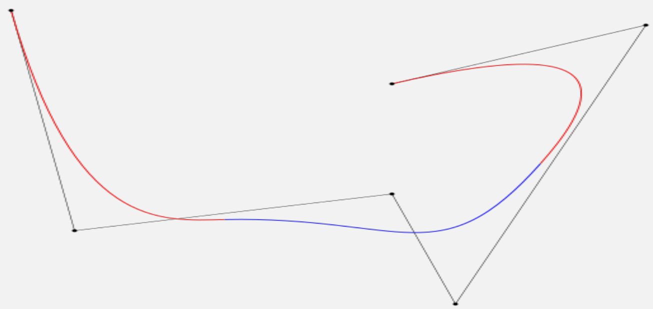


- 基于深度学习的人脸检测算法

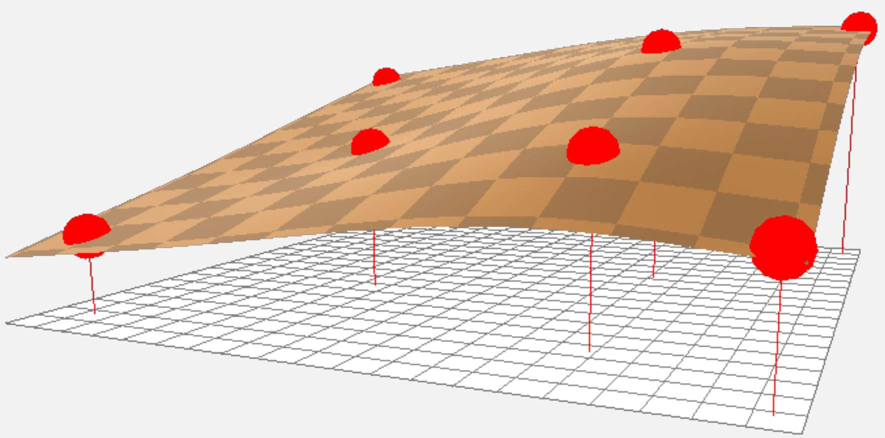


常见变形函数

- B样条变形



- TPS(Thin plate spline)变形



- ……

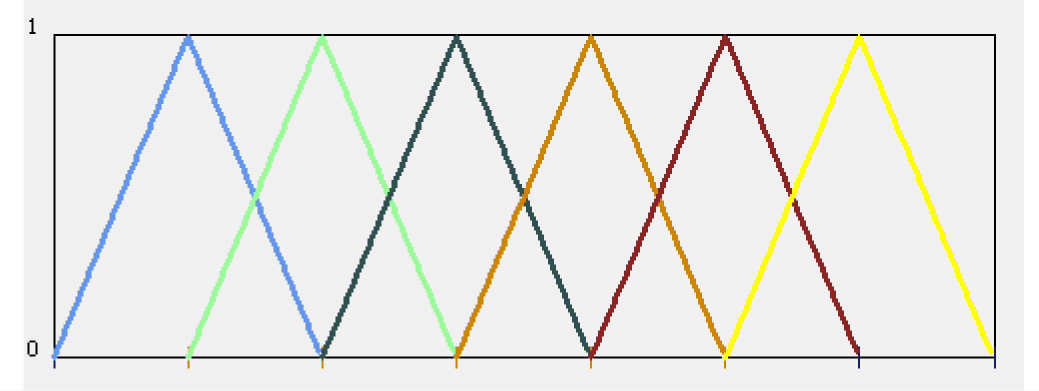
B样条变形

给定m+n+1个平面或空间$P_i(i=0,1,\cdots,m+n)$，称n次参数曲线段：

$$P_{k,n}(t)=\sum_{i=0}^{n}P_{i+k}G_{i,n}(t),\qquad t\in[0,1]$$

为第k段n次B样条曲线段（k=0，1，…，m），这些曲线段的全体称为n次B样条曲线，其顶点Pi（i=0，1，…，n+m）所组成的多边形称为B样条曲线的特征多边形。其中 $G_{i,n}(t)$ 称为基函数。

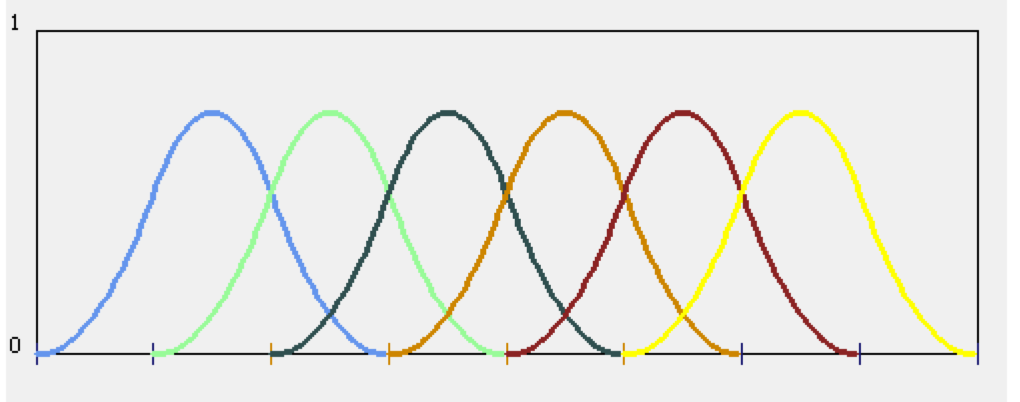
B样条基函数



一次B 样条曲线的基函数

$G_{i,p}(t)$仅在区间 $[u_i, u_{i+p+1})$上非零。

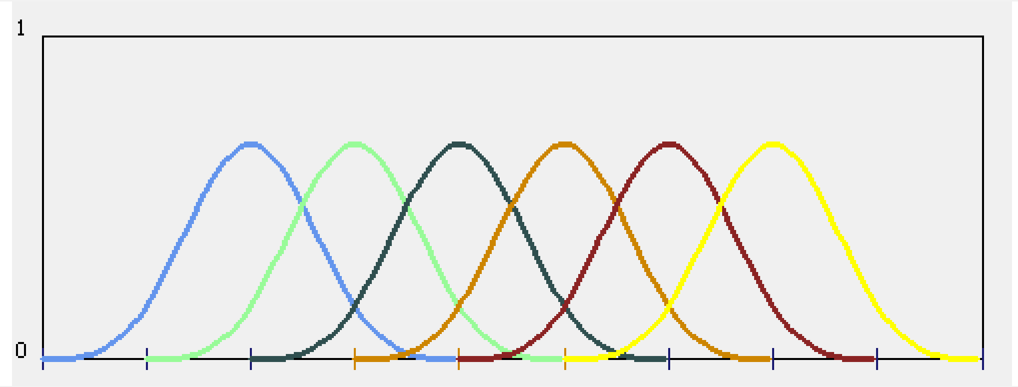
$$\begin{cases} G_{0,1}(t) = 1 - t \\ G_{1,1}(t) = t \end{cases}, t \in [0,1]$$



二次B 样条曲线的基函数

$$\begin{cases} G_{0,2}(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2 \\ G_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(-2t^2 + 2t + 1) \quad , t \in [0,1] \\ G_{2,2}(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

B样条基函数



三次B 样条曲线的基函数

$$\begin{cases} G_{0,3}(t) = \dfrac{1}{6}(-t^3+3t^2-3t+1), \\ G_{1,3}(t) = \dfrac{1}{6}(3t^3-6t^2+4), \\ G_{2,3}(t) = \dfrac{1}{6}(-3t^3+3t^2+3t+1), \\ G_{3,3}(t) = \dfrac{1}{6}t^3, \end{cases} \qquad t \in [0,\ 1]$$

移动控制点

假设$C(t)$ 是一段n次B样条曲线 $C(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i G_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$

设控制点 $\boldsymbol{P}_i$ 被移动到新的位置 $\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{v}$ ，则新曲线为

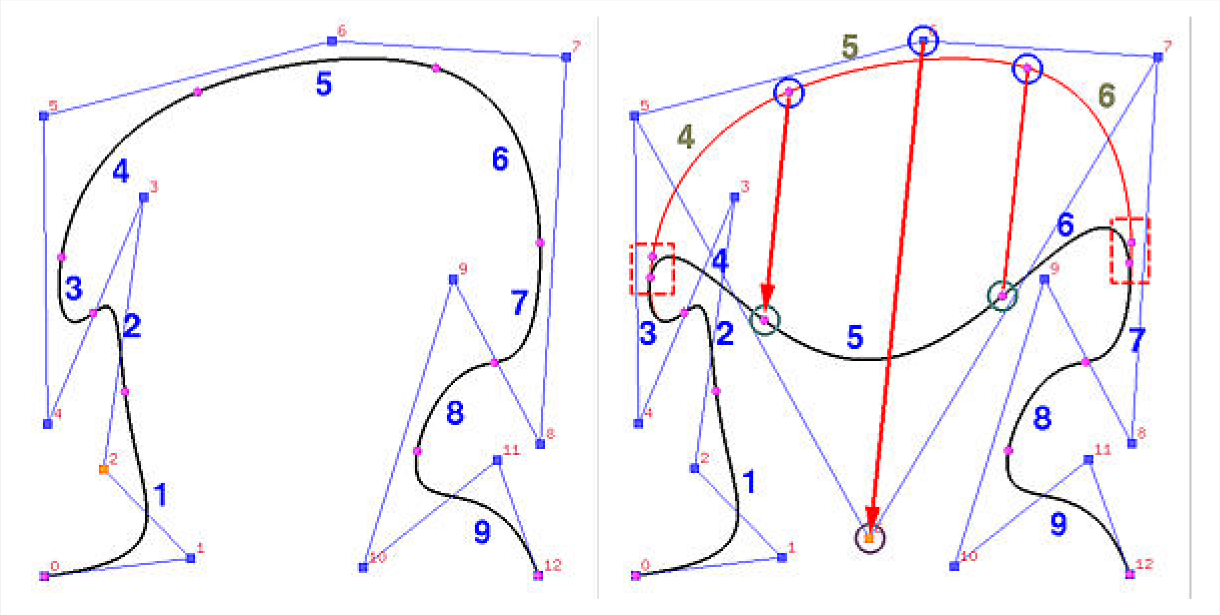
$$D(t)=\sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{P}_i G_{i,n}(t)+\left(\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{v}\right) G_{k,n}\left(t\right)+\sum_{i=k+1}^{n} \boldsymbol{P}_i G_{i,n}(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{P}_i G_{i,n}(t)+\boldsymbol{v} G_{k,n}\left(t\right)$$

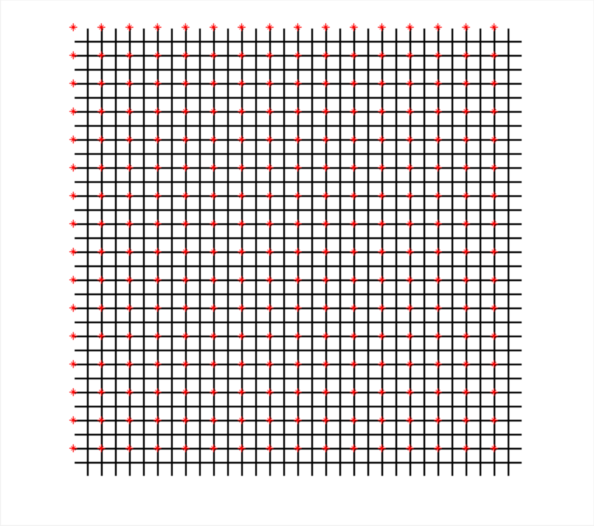
$$=C\left(t\right)+\boldsymbol{v} G_{k,n}\left(t\right)$$

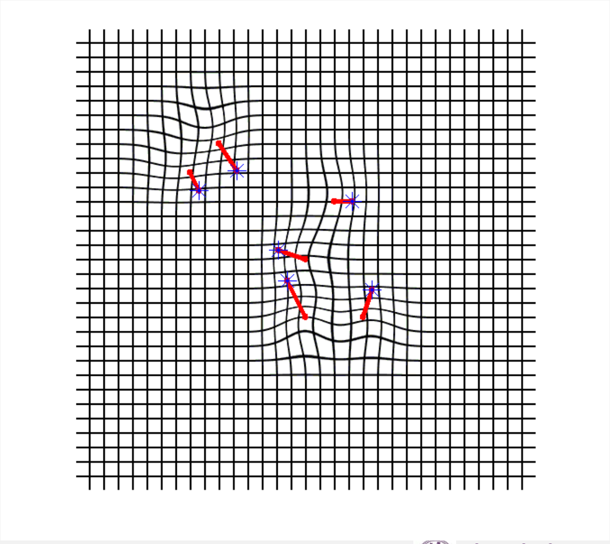
可见，只在$G_{k,n}(t)$ 不为零的区间内曲线改变了，其他部分曲线没有改变。

示意图



示意图





TPS(Thin plate spline)变形

薄板样条是一种常见的插值模型，目标是寻找一个通过所有控制点的光滑曲面 $f(x,y)$，使得能量函数I_f最小。

$$I_f = \iint_{R^2} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dxdy$$

可以证明该问题有解析解。

TPS求解

给定n个控制点 $P_1=(x_1,y_1),\cdots,P_n=(x_n,y_n)$，记

$$K=\begin{bmatrix} 0 & U(r_{12}) & \cdots & U(r_{1n}) \\ U(r_{21}) & 0 & \cdots & U(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U(r_{n1}) & U(r_{n2}) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} K & P \\ P^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

假设目标点为 $P_1'=(x_1',y_1'),\cdots,P_n'=(x_n',y_n')$，记

$$V=\begin{bmatrix} x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \end{bmatrix} \qquad Y=\left(V\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right.\right)^T$$

则 $f(x,y)=\left[f_x(x,y),f_y(x,y)\right]^T=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{w}_i U\left(\left|P_i-(x,y)\right|\right)$

其中 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_x,\boldsymbol{a}_y,\boldsymbol{w}$ 为线性方程组 $L\left[\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_x,\boldsymbol{a}_y\right]^T=Y$ 的解。

TPS求解

- 径向基函数

$$f(x,y)=\left[f_x(x,y),f_y(x,y)\right]^T=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{w}_i U\left(\left\|P_i-(x,y)\right\|\right)$$

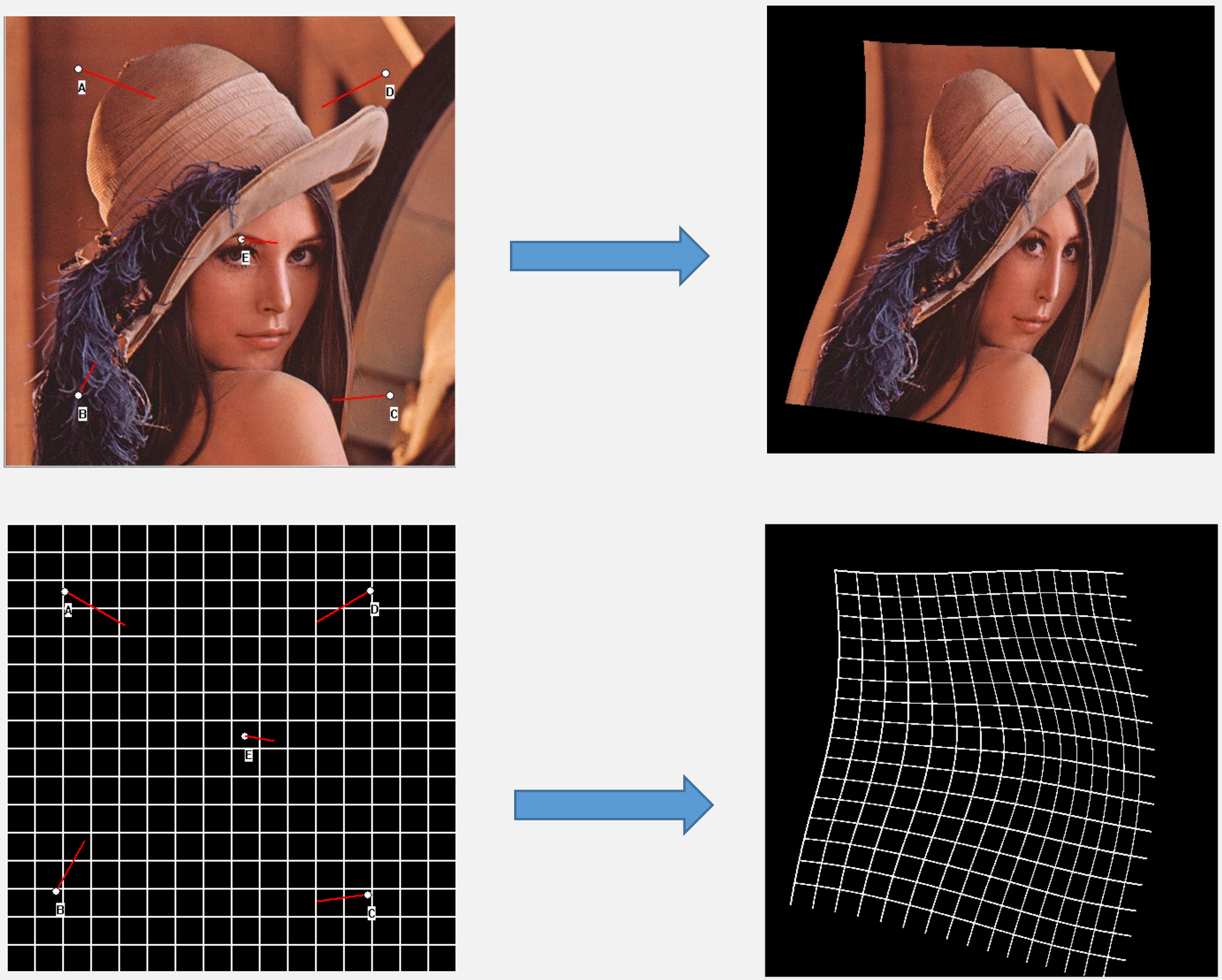
其中

$$U(r)=\begin{cases} r^2\log\left(r^2\right), r\neq 0 \\ 0, \qquad r=0 \end{cases}$$

为径向基函数，实际上定义了控制点周围的变形插值函数。

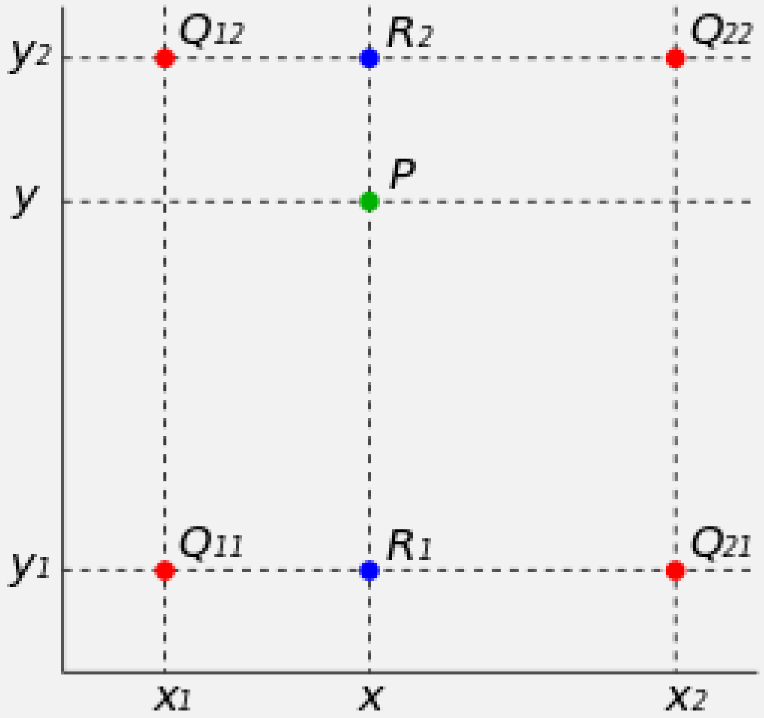
基于上述模型，对于平面/图像上的任一点，都可以得到对应的目标点。

示意图



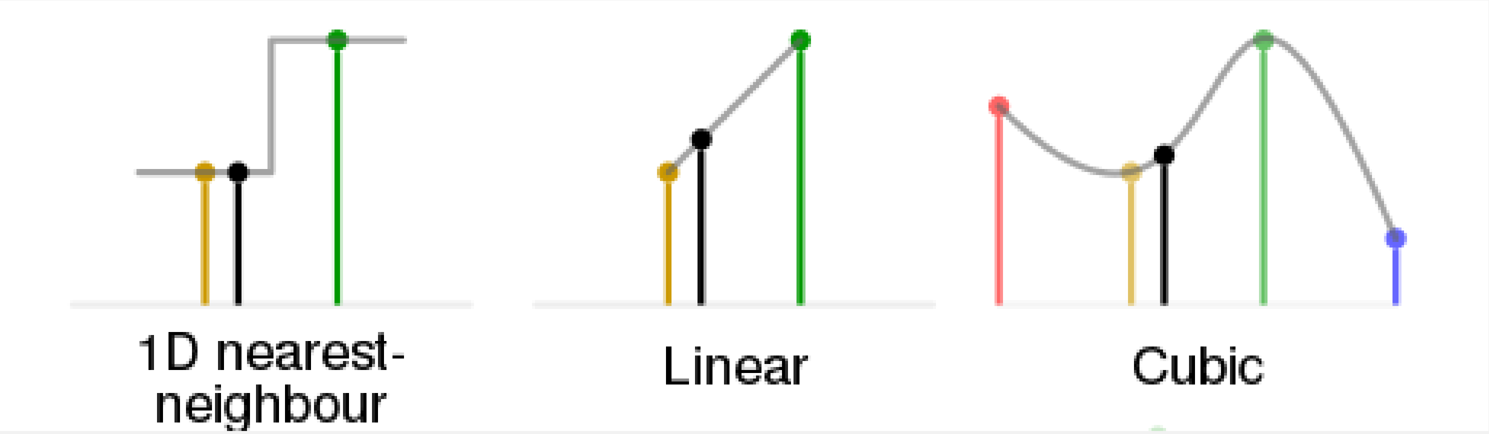
插值

- 变形函数：$(x^*, y^*) = f(x, y)$



一维插值回顾

- 最近邻、线性、三次插值

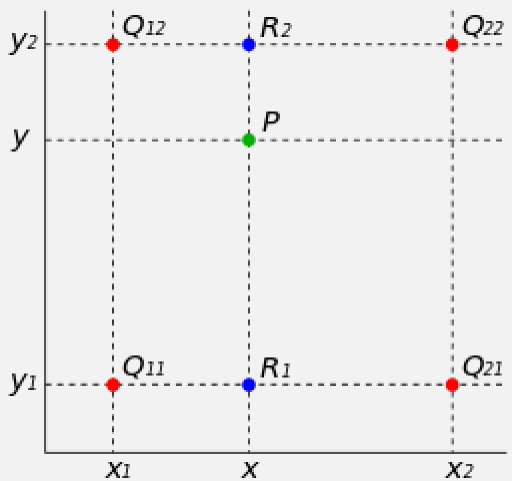


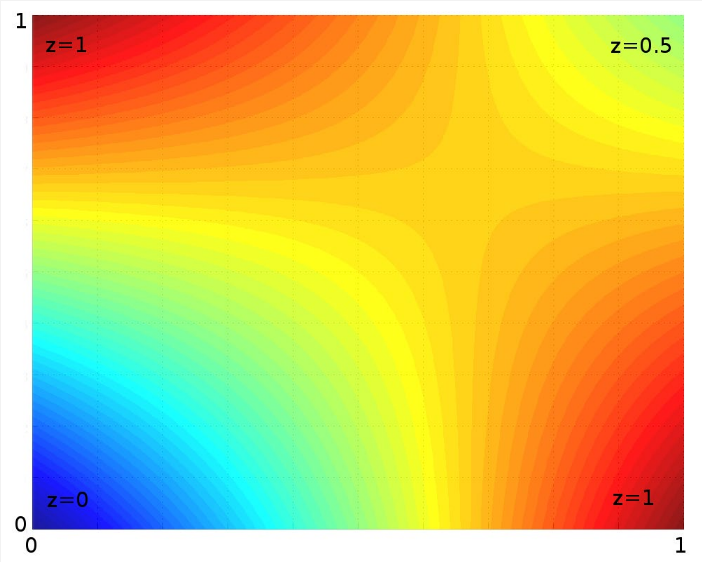
- 其他多项式插值……

插值方法比较

- 最近邻插值
- 双线性插值（bilinear）

$$f(i+u, j+v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(i,j) & f(i,j+1) \\ f(i+1,j) & f(i+1,j+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$



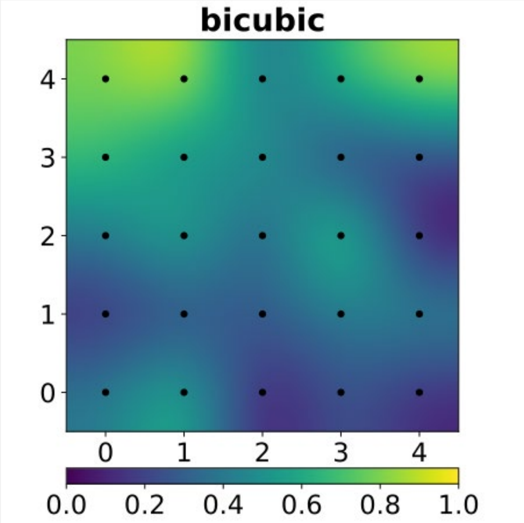


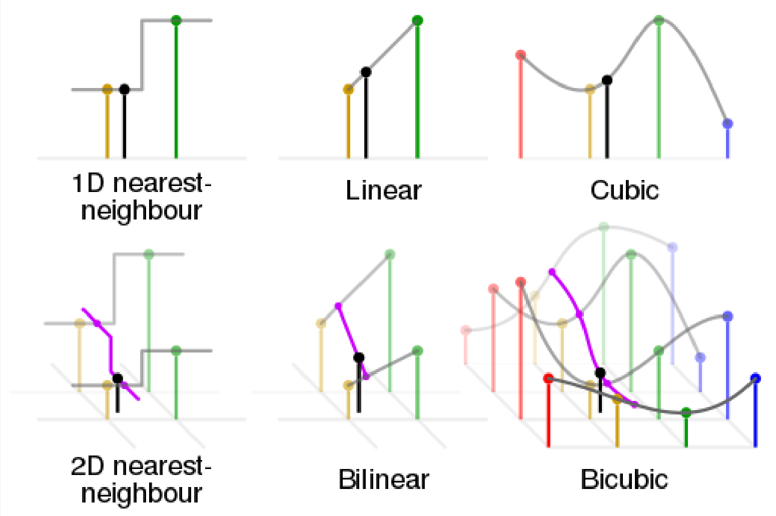
插值方法比较

- 双三次插值（bicubic）

$$f(i+u, j+v) = ABC^T$$
$$A = \left[S(u+1) \quad S(u) \quad S(u-1) \quad S(u-2)\right]$$
$$C = \left[S(v+1) \quad S(v) \quad S(v-1) \quad S(v-2)\right]$$
$$B = f(i-1:i+2, j-1:j+2)$$

$$S(x) = \begin{cases} 1-2|x|^2+|x|^3 & |x| \le 1 \\ 4-8|x|+5|x|^2-|x|^3 & 1<|x|<2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$





大作业基本要求

- 作业需要提交的内容有：
  - 实验报告
  - 程序源代码和可执行程序（具体要求见第 3 部分）
  - 必要的测试集（输入文件）和输出结果
- 将需要提交的所有文件放到一个文件夹内，然后打包，命名格式为：学号_姓名_班级_大作业一
- 打包前请删除预编译的头文件（Pre-Compiled Header），IntelliSense数据库文件（如果有的话）。充分减少压缩包的大小

对实验报告的要求

- 使用中文撰写报告；
- 报告内需署名（班级、姓名、学号）；
- 报告需提交 PDF 格式；
- 报告内不要贴代码；
- 报告内容主要包括题目的需求分析，方案设计，方案基本原理及误差分析。关于程序的相关讨论可以撰写独立的技术报告，但这不是必须的。
- 根据学校要求，报告会查重，重复比例超过10%本次作业记零分

对实验程序的要求

- 程序可以使用如下语言和环境进行实现
  - Windows: Visual Studio 2010 及以后的版本(C++, C#)
  - Linux: GCC4 以上（仅限 Linux 环境下，C++）
  - 不能使用python或者matlab
- 无论选择何种语言和环境，都需提供
  - 适度注释
  - README 文件，说明程序运行所需的环境、库及如何进行操作
- 需要提交源代码，且需保证可以编译；
- Linux 需要提供 Makefile；

对实验程序的要求

- 保证程序在一般的操作系统上可以正常运行，程序依赖的库需要自行提供；
- 程序运行崩溃、异常退出及明显的内存泄露会被扣分；
- 可以使用的第三方库仅限 OpenCV，OpenCV 版本限定为 2.4.10 以后版本，且只能使用 OpenCV 完成图像读取、存储的工作，核心算法部分必须完全由自己实现。
- 代码会进行查重（包含之前年级的作业），核心算法重复本次作业记零分

关于作业评分

- 共两次大作业，每次 20 分；
- 缺交作业记为 0 分；
- 严禁抄袭，抄袭和被抄袭者作业直接记为 0 分；
- 因参加重要活动（如毕业汇演，电子设计大赛等），其他考试（TOEFL，GRE）等原因，确实无法按期提交作业的，可以申请延期提交，延期申请需在当次作业截止时间点前至少 48 小时提出（例如 11 月 15 日 0:00 截止的作业，延期申请需在 11 月 13 日 0:00 以前提出）。没有在此时间前提出的延期申请是无效的。延期的最长期限是 2 周。延期申请要发到助教的信箱，说明申请延期的理由。延期的作业成绩评定不受影响。延期后仍未提交的，按照缺交计算。不可对已经延期提交的作业，申请继续延期提交。
- 期末可以对平时缺交的作业进行补交，但最终分数按照评判分数的 60%计算。具体补交方式以后通知。

注意：

- 建议程序用VS编写，详见大作业要求；
- 可参考本书讲授方法，也可采用其它方法；
- 自行编写全部算法，图像读写函数可使用现成的；
- 鼓励创新，严禁抄袭。

截止时间：2018-11-15

欢迎大家加入i-VisionGroup

http://ivg.au.tsinghua.edu.cn/