数值分析与算法　大作业 1

罗云鹏　自 64　2016011470

2018 年 12 月 25 日

目录

1 采用数值方法求 π

由微积分知识可知

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

使用数值积分方法求 $4 \times \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$ 即可求得 π 的值。

使用复化梯形公式求积分，计算公式如下

$$\pi = 4 \times \frac{h}{2}\left[f(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(kh) + f(1)\right]$$

其中 $h = \frac{1}{n}$。

1.1 计算代价和收敛速度

在计算过程中，浮点数乘法相对于加法的计算代价大得多，故只分析乘法的次数。在计算 $2 \times \frac{1}{x^2+1}$ 时，共有 4 次乘法，而一共约有 n 次计算，故乘法次数约为 $4n$。若取 $n = 10^6$，那么乘法次数约为 4×10^6 次。

算法空间代价为 $O(1)$。

1.2 误差分析

1.2.1 截断误差

算法的截断误差限为 $R[f] = -\frac{(b-a)^2}{12}h^2 f''(\xi)$，又有积分范围为 $[0, 1]$，$f''(x) \leq 2$，则有

$$R[f] \leq \frac{1}{6}h^2$$

1.2.2 存储误差

使用双精度浮点数，有效数字为 15 位。计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 时，存储误差来源为：

- x 本身存储误差 0.5×10^{-15}。
- 计算 x^2 时，上一步累积误差及结果存储误差，共 1.5×10^{-15}。
- 计算 $1 + x^2$ 时，上一步累积误差及结果存储误差，共 $1.5 \times 10^{-15} + 0.5 \times 10^{-14} = 0.65 \times 10^{-14}$。
- 计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 时，上一步累积误差及结果存储误差，共 $0.65 \times 10^{-14} \times \max\limits_{x\in[0,1]} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' + 0.5 \times 10^{-15} \leq 1 \times 10^{-14}$。

求和后，易分析得存储误差小于 1×10^{-13}。

若取 $n = 10^6$，则总误差满足 $\Delta \leq 2.4 \times 10^{-13}$。

2 采用数值方法求 $\ln(\pi)$

对 $\ln(x)$ 在 $x = 1$ 处进行泰勒展开，可得

$$\ln(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{(x-1)^i}{i}$$

若取前 n 项进行计算，收敛域为 $x \in (1, 2)$，则有公式

$$\ln(x) \approx \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{(x-1)^i}{i}$$

根据对数特性，把计算 $\ln(\pi)$ 化为计算 $\ln(\frac{\pi}{1.25^4}) + 4\ln(1.25)$。使用上述公式分别计算 $\ln(\frac{\pi}{1.25^4})$ 和 $\ln(1.25)$，即可求得 $\ln(\pi)$。

2.1 计算代价和收敛速度

对于 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{(x-1)^i}{i}$ 中的第 i 项，需要计算 $i+2$ 次乘法，对于整个计算过程来说，则总共有 $\frac{n(n+5)}{2}$ 次乘法。若取 $n = 24$，那么乘法次数为 348 次。

算法空间代价为 $O(1)$。

2.2 误差分析

2.2.1 截断误差

截断误差为

$$R = \sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{(x-1)^i}{i} \leq \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

取 $n = 24$，又有 $\frac{\pi}{1.25^4}, 1.25 < 1.3$，则可得

$$R < \frac{0.3^{25}}{25} < 3.4 \times 10^{-15}$$

2.2.2 存储误差

使用双精度浮点数，有效数字为 15 位。计算 $\frac{1}{i}(x-1)^i(-1)^{i-1}$ 时，存储误差来源为:

- $x - 1$ 存储误差为 0.5×10^{-15}。
- 计算 $\frac{1}{i}(x-1)^i(-1)^{i-1}$ 时，上一步存储误差累计为 $\left(\frac{1}{i}(x-1)^i(-1)^{i-1}\right)' \times 0.5 \times 10^{-15} \leq 0.5 \times 10^{-15}$

求和后，存储误差为 $n \times 0.5 \times 10^{-15} = 1.2 \times 10^{-14}$。

2.2.3 之前计算结果误差累计

计算 $\ln(\frac{\pi}{1.25^4})$ 时，会受到来自上一步的误差影响。$\Delta'_\pi = \Delta(\frac{\pi}{1.25^4}) < \Delta_\pi + 0.5\times 10^{-14} < 2\Delta_\pi$。那么累积误差为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{(x-1)^i}{i}\right)' \times \Delta'_\pi \le \frac{(x-1)^1}{1}\times\Delta'_\pi \le \Delta_\pi$$

综上，总误差为

$$\Delta_{\ln(\pi)} = 5\times 3.4\times 10^{-15} + 5\times 1.2\times 10^{-14} + 2.4\times 10^{-13} \le 3.2\times 10^{-13}$$

3 采用数值方法求 π^x

由第二步，已经求得 $\ln(\pi)$，则计算 $e^{x\ln(\pi)}$ 即可得到 π^x 的值。

有 $(e^x)' = e^x$，则可使用求解常微分方程的方法计算结果。采用改进的欧拉法，

$$\begin{aligned}\bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n)\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})\right]\end{aligned}$$

其中 $h = \frac{x}{n}, y_0 = 1$。有 $f(x_n, y_n) = e^{x_n} = y_n$，整理上式后有

$$y_{n+1} = (1 + h + \frac{h^2}{2})y_n$$

3.1 计算代价和收敛速度

计算前，将 $(1 + h + \frac{h^2}{2})$ 预先计算并存储，迭代时作为一个常量。每次迭代时需要计算一次乘法。若取 $n = 10^7$，那么共需要计算 10^7 次乘法。

算法空间代价为 $O(1)$。

3.2 误差分析

3.2.1 方法累积误差

改进欧拉法的方法误差满足

$$\Delta_{n+1} \le (1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2)\Delta_n + (\frac{LM}{4} + \frac{T}{12})$$

其中 $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \le M$，$|y^{(2)}(x)| \le L$，$|y^{(3)}(x)| \le T$。根据 $f(x,y) = e^x$，可取 $M = 1, L = T = 10^5 < \max\limits_{x\in(1,10)} e^x$。

可将方法误差求出

$$\Delta_n \le \left((1 + h + \frac{h^2}{2})^n - 1\right)(\frac{2Lh^2}{6+3h}) \le \frac{2}{3}Lh^2 = \frac{2}{3}\times 10^5 h^2$$

3.2.2 存储误差

在程序中使用 __float128 类型的浮点数，其十进制有效位数为 34 位。

由于 $y_n < 10^5$，在计算 $y_{n+1} = (1 + h + \frac{h^2}{2})y_n$ 时，每步可能会产生 0.5×10^{-28} 大小的存储误差。使用与方法误差相同的分析方法，可求出 $\delta_n < (1 + h + \frac{h^2}{2})^n(\frac{0.5 \times 10^{-28}}{h + \frac{1}{2}h^2}) < \frac{3 \times 0.5 \times 10^{-28}}{h}$。

3.2.3 累积误差

显然有

$$x\Delta_{\ln(\pi)} \le 10\Delta_{\ln(\pi)} \le 3.2 \times 10^{-12}$$

那么使用相似的方法，可以计算得到

$$\Delta \le (1 + h + \frac{h^2}{2})^n \times x\Delta_{\ln(\pi)} \le 3 \times 10 \times 3.2 \times 10^{-12} \le 10^{-10}$$

总误差为

$$\Delta \le \frac{2}{3} \times 10^5 h^2 + \frac{0.15 \times 10^{-28}}{h} + 10^{-10}$$

取 $n = 10^7$，那么 $h = \frac{x}{n} \in [10^{-7}, 10^{-6}]$，则有

$$\Delta \le 0.7 \times 10^{-7} < 0.5 \times 10^{-6}$$

满足要求。

4 程序框图

程序三步分别编写为函数，其程序框图如1

5 实验结果及分析

实验结果如图2。

计算结果和用其他方式计算所得参考值对比如表1。可以看到，计算值保证了小数点后六位有效数字，当 x 偏大时，计算结果小数点后第七位可能存在一定误差。

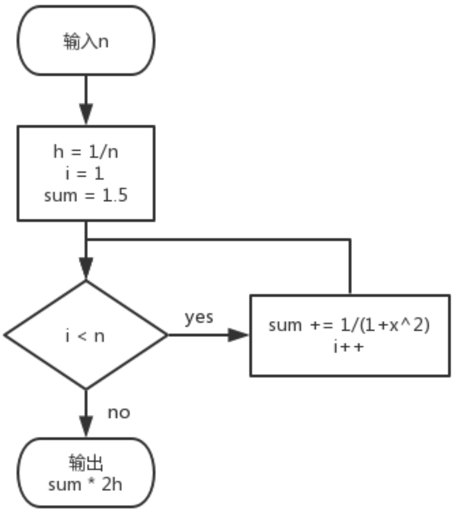
通过随机生成 $[1, 10)$ 范围内的值，对程序进行验证，其结果如下。

其中每一组数据第一排为 x 的值，第二排为计算值，第三排为参考值。第二、三排中，第一个数字为保留 14 位有效数字结果，第二个为保留 6 为有效数字结果。可以看出程序能保证小数点后六位有效数字。

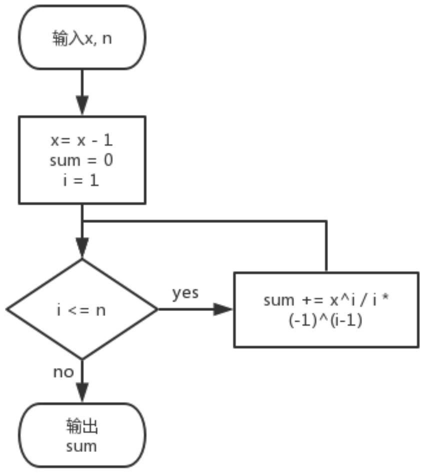
```
x: 5.76910518173045
piX: 738.09099476180279 738.090995
ref: 738.09099476216204 738.090995

x: 1.84960356634137
piX: 8.30864450439564 8.308645
ref: 8.30864450439579 8.308645

x: 8.74524037194331
piX: 22268.71399912982451 22268.713999
ref: 22268.71399916724113 22268.713999

x: 7.00720211116823
piX: 3045.29687973216005 3045.296880
ref: 3045.29687973480304 3045.296880

x: 9.29482649812191
piX: 41775.51478477752244 41775.514785
ref: 41775.51478486174892 41775.514785

x: 1.44493448253779
piX: 5.22816149276552 5.228161
ref: 5.22816149276556 5.228161

x: 8.84771431217119
piX: 25040.32976354816856 25040.329764
ref: 25040.32976359175518 25040.329764
```

```
x: 9.74532974730918
piX: 69966.38624496127886 69966.386245
ref: 69966.38624512389651 69966.386245

x: 4.55604811954777
piX: 184.09362207184105 184.093622
ref: 184.09362207188551 184.093622

x: 4.65018426339604
piX: 205.03996287955232 205.039963
ref: 205.03996287960493 205.039963

x: 9.28771226308450
piX: 41436.68169173444039 41436.681692
ref: 41436.68169181791745 41436.681692

x: 9.72056943663780
piX: 68011.10921280583716 68011.109213
ref: 68011.10921296276501 68011.109213

x: 1.94281836259017
piX: 9.24425467590977 9.244255
ref: 9.24425467590996 9.244255

x: 1.54575880058889
piX: 5.86777957311966 5.867780
ref: 5.86777957311973 5.867780

x: 8.45496319219541
piX: 15972.90374813009475 15972.903748
ref: 15972.90374815438736 15972.903748

x: 4.24560908845848
piX: 129.03395763379606 129.033958
ref: 129.03395763382133 129.033958

x: 3.41381869578876
piX: 49.79428836268647 49.794288
```

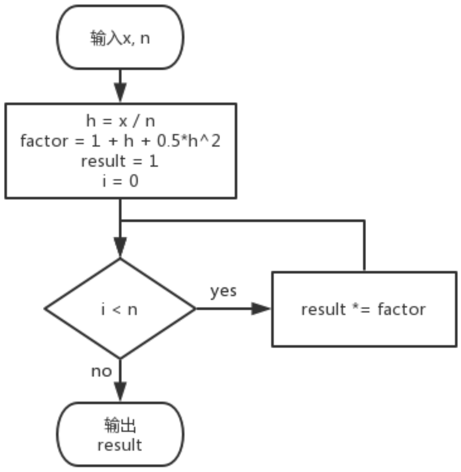
```
ref: 49.79428836269162 49.794288

x: 1.74333627891460
piX: 7.35697718310097 7.356977
ref: 7.35697718310108 7.356977

x: 7.96395510227736
piX: 9104.98564121447453 9104.985641
ref: 9104.98564122603966 9104.985641

x: 1.89479036886399
piX: 8.74973279910574 8.749733
ref: 8.74973279910590 8.749733
```



(a) 计算 π



(b) 计算 ln



(c) 计算 e^x

图 1: 程序框图

x	2.33	9.99	1.00001
计算值	14.3998910	92582.1427933	3.1416286
参考值	14.3998910	92582.1427935	3.1416286

表 1: 计算值和参考值的对比

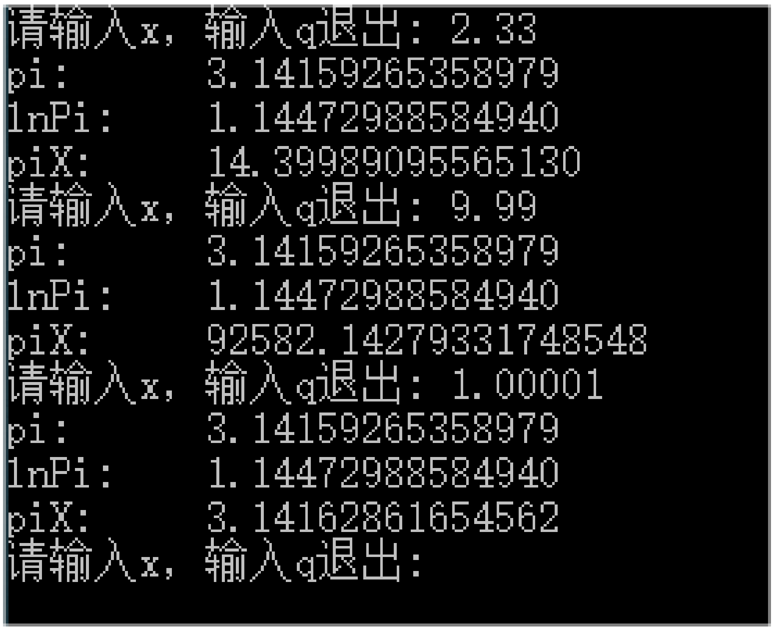

请输入x，输入q退出：2.33
pi: 3.14159265358979
lnPi: 1.14472988584940
piX: 14.39989095565130
请输入x，输入q退出：9.99
pi: 3.14159265358979
lnPi: 1.14472988584940
piX: 92582.14279331748548
请输入x，输入q退出：1.00001
pi: 3.14159265358979
lnPi: 1.14472988584940
piX: 3.14162861654562
请输入x，输入q退出：

图 2: 实验结果