BSM206 Mantıksal Devre Tasarımı

1. Hafta – Giriş, Lojik Kapılar, Boole Cebri ve Boole Fonksiyonları

Dr. Öğr. Üyesi Onur ÇAKIRGÖZ
onurcakirgoz@bartin.edu.tr

ANAHAT

- İkili Lojik
- Temel Lojik İşlemler
- İkili Lojik Değerler için Sinyal Seviyeleri
- Lojik Kapılar (Logic Gates)
- Boole Cebri (Boolean Algebra)
- Boole Fonksiyonları ve Doğruluk Tabloları
- Boole Fonksiyonu ve Lojik Devre Diyagramı
- Boole Fonksiyonlarının Basitleştirilmesi

İkili Lojik (Binary Logic) Nedir?

- **İkili lojik**, ikili (binary) değişkenler ve lojik işlemlerden oluşur.
- Sadece 1 veya 0 değerlerini alabilecek olan her bir değişkene A, B, C, w, x, y vb. gibi harfler atanır.
- Üç temel lojik işlem vardır:
  - VE (AND)
  - VEYA (OR)
  - DEĞİL (NOT)

Temel Lojik İşlemler

- VE (AND):
  - Bu işlem bir noktayla veya hiçbir işaret konulmadan temsil edilir.
  - Örneğin, x . y = z veya xy = z
  - ‘x VE y eşittir z’ şeklinde okunur.
- VEYA (OR):
  - Bu işlem artı (+) işaretiyle temsil edilir.
  - Örneğin, x + y = z
  - ‘x VEYA y, z’ye eşittir’ şeklinde okunur.
- DEĞİL (NOT):
  - Bu işlem bir üssü işaretiyle veya bir üst çizgiyle temsil edilir.
  - Örneğin, x’ = z veya $\bar{x}$ = z
  - ‘x in DEĞİLİ z ye eşittir’ şeklinde okunur. z, x’in tersidir anlamını taşır.

Temel Lojik İşlemler

- İkili lojik ikili aritmetiğe benzer.
- VE ve VEYA işlemleri sırasıyla çarpma ve toplama işlemlerine benzer.
- Fakat, ikili lojik ikili aritmetikle karıştırılmamalıdır.
- Lojik bir değişken sadece 1 veya 0 değerini alır. Aritmetik bir değişken ise birçok haneden oluşabilen bir sayıyı gösterir.
- Örneğin ikili aritmetikte 1 + 1 = 10’dur (okunuşu ‘bir artı bir ikiye eşittir’)
- Öte yandan, ikili lojikte 1 + 1 = 1’dir (okunuşu ‘bir VEYA bir bire eşittir’)

Temel Lojik İşlemlerin Doğruluk Tabloları (Truth Tables of Logical Operations)

- Doğruluk tablosu, değişkenlerin alabileceği değerlerle işlemin sonucu arasındaki ilişkiyi gösteren bir tablodur.
- Doğruluk tabloları, değişkenlerin ikili olarak tüm olası değerlerinin listelenmesiyle elde edilir.
- Her bir kombinasyon için işlem sonucu ayrı bir sütunda alt alta listelenir.

Truth Tables of Logical Operations

AND

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

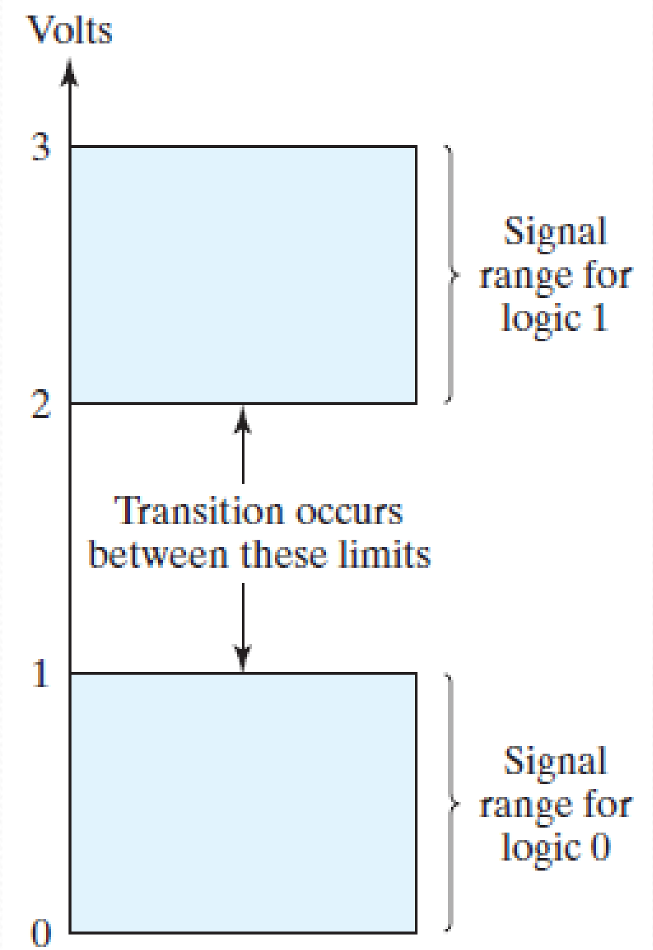
x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

x	x'
0	1
1	0

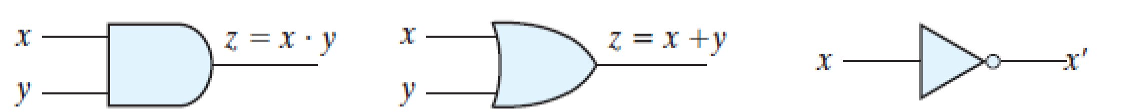
İkili Lojik Değerler için Sinyal Seviyeleri

- Gerilim ve akım gibi elektriksel işaretler tüm sayısal sistemde iki belirli değerden birini alır.
- Gerilimle çalıştırılan devrelerde, lojik-1 veya lojik-0 a eşit iki değişkenle temsil edilebilen iki farklı gerilim seviyesi vardır.
- Örneğin, bir sayısal sistem lojik-1'i 3 voltluk bir nominal değer, lojik-0'ı ise 0 voltluk bir nominal değer olarak tanımlayabilir.
- Her bir gerilim seviyesinin nominalden kabul edilebilir bir sapması vardır.

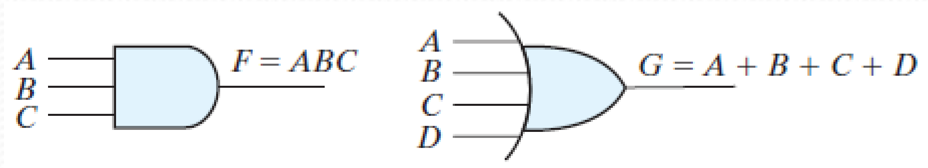


Lojik Kapılar (Logic Gates)

- VE, VEYA, DEĞİL lojik işlemlerini gerçekleştiren lojik devrelerine ilişkin semboller aşağıda gösterilmiştir: VE (a), VEYA (b), DEĞİL (c)
- *Kapı (Geçit)* adı verilen bu devreler girişteki lojik koşullar sağlandığında Lojik-1 veya Lojik-0 işaretlerini oluşturan donanım gruplarıdır.
- DEĞİL kapısı ikili bir işaretin tersini aldığından *evirici devre* diye de adlandırılır.



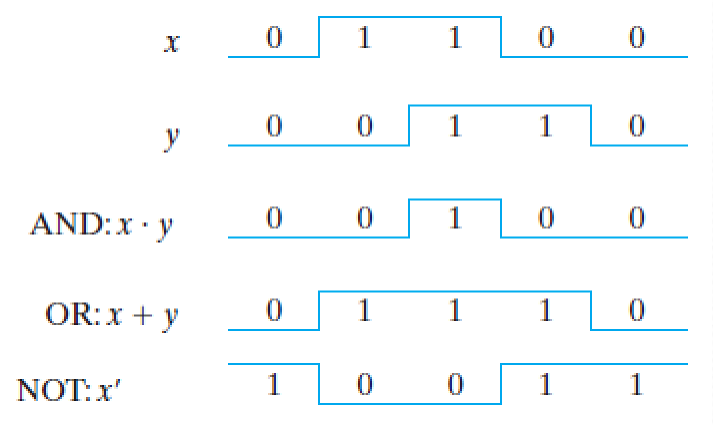
(a) Two-input AND gate (b) Two-input OR gate (c) NOT gate or inverter

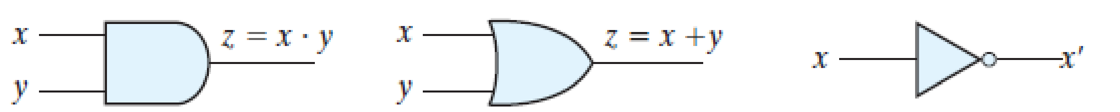


( ) Three-input AND gate ( ) Four-input OR gate

Lojik Kapılar için Giriş-Çıkış Sinyalleri

- İki girişli kapılarda giriş işaretleri x ve y dört olası durumdan birini alabilir: 00, 10, 11 veya 01.
- Yandaki zaman diyagramları her bir devrenin olası dört ikili giriş kombinasyonundan her birine cevabı göstermektedir.

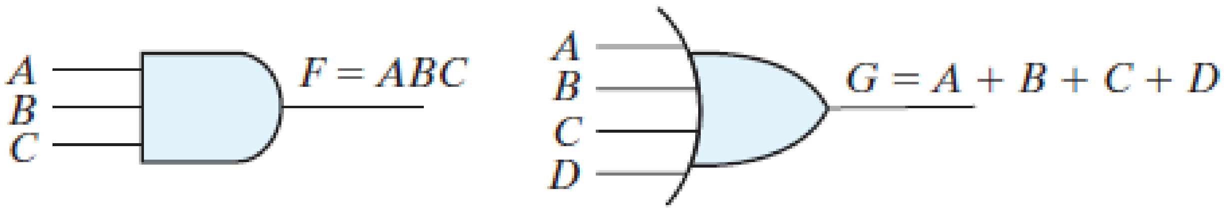




(a) Two-input AND gate (b) Two-input OR gate (c) NOT gate or inverter

Lojik Kapılar (Logic Gates)

- VE ve VEYA kapılarının ikiden fazla girişi olabilir.
- Aşağıda 3 girişli bir VE kapısı ve 4 girişli bir VEYA kapısı gösterilmiştir:
- 3 girişli VE kapısı, üç giriş işaretinin **her biri** lojik-1 olduğunda lojik-1 cevabını verir.
- 4 girişli VEYA kapısı, girişlerden **herhangi biri** lojik-1 ise lojik-1 cevabını verir.



( ) Three-input AND gate ( ) Four-input OR gate

Boole Cebri ve Lojik Kapılar
Boolean Algebra and Logic Gates

- Günümüz dijital bilgisayarları ve dijital aygıtların tamamında **ikili lojik** kullanılmaktadır.
- Bu sebeple, dijital cihazlarda bulunan lojik devrelerin **maliyeti**, tasarımcılar açısından çok önemli bir faktördür.
- Aynı işi yapan fakat daha ucuz ve daha basit lojik devreler, dijital aygıtların toplam maliyetini önemli derecede düşürebilir.
- Kısacası, lojik devrelerin tasarımı önemli bir konudur ve lojik devreleri basitleştirmeye yarayan matematiksel yöntemler temel olarak **boole cebrine** dayanmaktadır.
- Milyonlarca lojik kapıdan oluşan karmaşık lojik devreleri optimize eden algoritmalar boole cebrini kullanmaktadır.

Boole Cebrinin Özellikleri

- **Dualite (Duality):**
  - İkili işlemler (+ ve .) ve birim elemanları (0 ve 1) kendi aralarında değiştirilerek, cebirsel bir ifadenin **duali** elde edilebilir.
  - Cebirsel bir ifadenin **duali** istendiğinde, VEYA ve VE işlemleri değiştirilir, 0'lar yerine 1, 1'ler yerine 0'lar konur.
- **İşlem Önceliği (Operator Precedence):**
  - Boole ifadelerinin değerlendirilmesinde gözönüne alınan işlem öncelik sırası 1-parantez, 2-DEĞİL, 3-VE, 4-VEYA şeklindedir.

Boole Cebrinin Temel Teoremleri

- Aşağıdaki tabloda Boole cebrine ilişkin altı teorem ve dört postulat yer almaktadır. (a) ve (b) şıkları birbirinin dualidir.
- Postulatlar cebirsel yapıların temel aksiyomlarıdır ve kanıtlanmasına gerek yoktur. Teoremler postulatlardan ispatlanır.

Postulate 2	(a)	$x + 0 = x$	(b)	$x \cdot 1 = x$
Postulate 5	(a)	$x + x' = 1$	(b)	$x \cdot x' = 0$
Theorem 1	(a)	$x + x = x$	(b)	$x \cdot x = x$
Theorem 2	(a)	$x + 1 = 1$	(b)	$x \cdot 0 = 0$
Theorem 3, involution		$(x')' = x$		
Postulate 3, commutative	(a)	$x + y = y + x$	(b)	$xy = yx$
Theorem 4, associative	(a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	(b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulate 4, distributive	(a)	$x(y + z) = xy + xz$	(b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Theorem 5, DeMorgan	(a)	$(x + y)' = x'y'$	(b)	$(xy)' = x' + y'$
Theorem 6, absorption	(a)	$x + xy = x$	(b)	$x(x + y) = x$

Boole Fonksiyonları

- İkili bir değişken (örneğin *x*) 0 veya 1 değerini alabilir.
- Boole fonksiyonu ise ikili değişkenler, VEYA ve VE ikili işlemleri, DEĞİL birli işlemi, parantez ve eşitlik işaretinden oluşur.
- Belirli değişken değerleri için fonksiyonun değeri sadece 0 veya 1 olur.
- Örneğin, aşağıdaki F_1 fonksiyonunu ele alalım. x 1'e eşitse veya hem y' hem de z 1'e eşitlerse, F_1 fonksiyonunun değeri 1 olur. Diğer durumlarda F_1 fonksiyonunun değeri 0 olur.

$$F_1 = x + y'z$$

Boole Fonksiyonları ve Doğruluk Tabloları

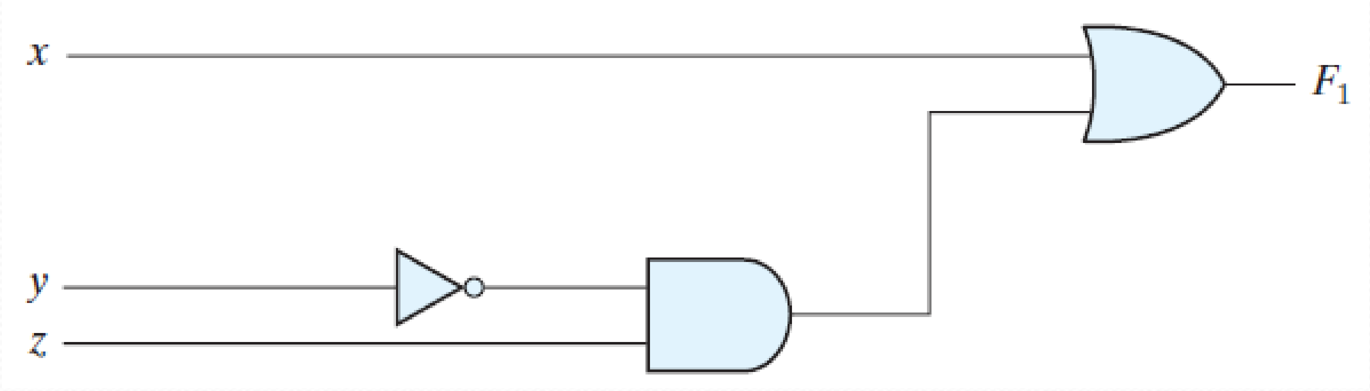
- Bir boole fonksiyonu doğruluk tablosu şeklinde de ifade edilebilir.
- n, fonksiyondaki değişkenlerin sayısını göstermek üzere, doğruluk tablosundaki satırların sayısı 2^n dir.
- 0 dan $2^n - 1$ e kadar olan ikili (binary) sayılar, yani 2^n tane kombinasyon, doğruluk tablosunun satırlarını oluşturur.

$$F_1 = x + y'z$$

x	y	z	F_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Boole Fonksiyonu ve Lojik Devre Diyagramı

- Bir boole fonksiyonu, cebirsel ifadeden birbirine bağlı lojik kapılardan oluşan devre diyagramına dönüştürülebilir.
- F_1 fonksiyonuna ilişkin lojik devre diyagramı aşağıda verilmiştir:



$$F_1 = x + y'z$$

Boole Fonksiyonlarının Basitleştirilmesi

- Boole cebrinin kurallarını kullanarak, bazen bir boole fonksiyonu için daha basit bir ifade elde etmek olasıdır.
- Boole fonksiyonunu basitleştirmek demek, lojik devredeki kapıların sayısını ve/veya girdilerin (değişkenler) sayısını azaltmak demektir.
- **Literal:** Bir literal, bir term içersinde bulunan, tümleyeni alınmış veya tümleyeni alınmamış bir değişkendir.
- Term (terim) ve literal kavramları: Aşağıdaki F_2 fonksiyonu 3 term'e ve 8 literal'e sahiptir.
- Term sayısını azaltarak, literal sayısını azaltarak veya her ikisini de azaltarak devre basitleştirilebilir.

$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$$

Boole Fonksiyonlarının Basitleştirilmesi

- Ancak, her zaman her ikisini birden (hem term hem literal) aynı anda en aza indirgemek mümkün olmayabilir.
- Boole cebri ile fonksiyon basitleştirmede, sonucu garantilemek üzere izlenecek **kesin kurallar** yoktur. Tek çare, deneme-yanılma ve tecrübedir.
- İlerki bölümde, harita (map) yöntemi ile en fazla 5 değişkenli fonksiyonlar basitleştirilebilecek.
- Tasarımcılar, basitleştirme ile lojik devrenin maliyetini düşürmeyi hedeflerler. Basitleştirme için bilgisayar programları mevcuttur. Milyonlarca kapı içeren lojik devreleri basitleştirebilmektedirler.

Boole Fonksiyonlarının Basitleştirilmesi

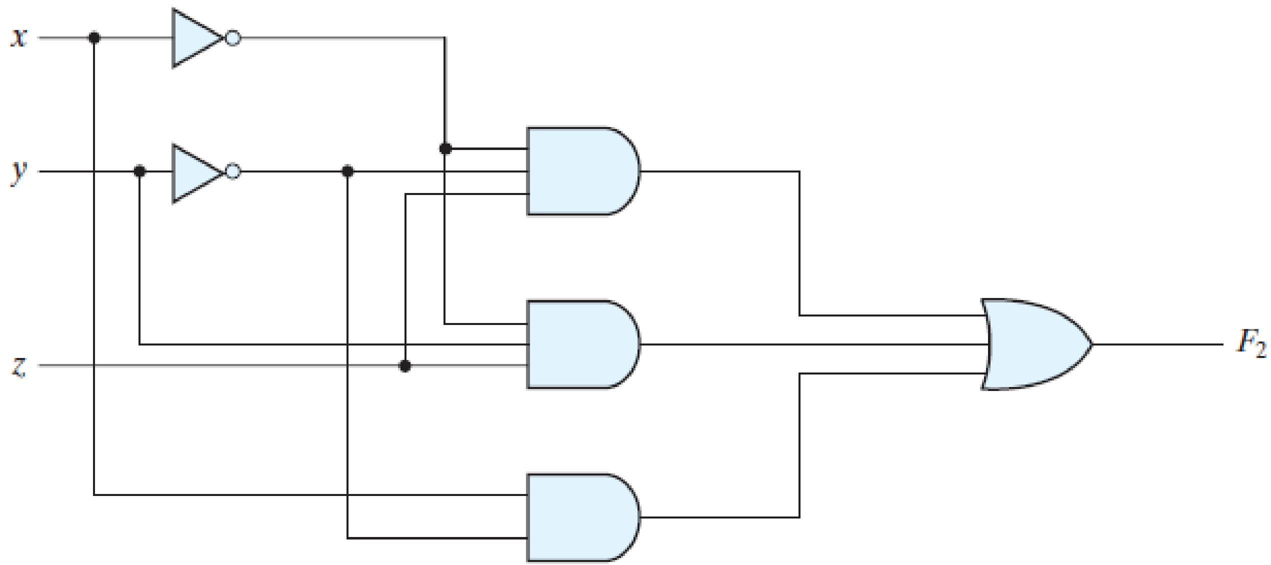
- Örneğin, aşağıdaki F_2 boole fonksiyonunu ele alalım. F_2 fonksiyonu için daha basit bir ifade elde edebilir miyiz?

$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$$

$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy' = x'z(y' + y) + xy' = x'z + xy'$$

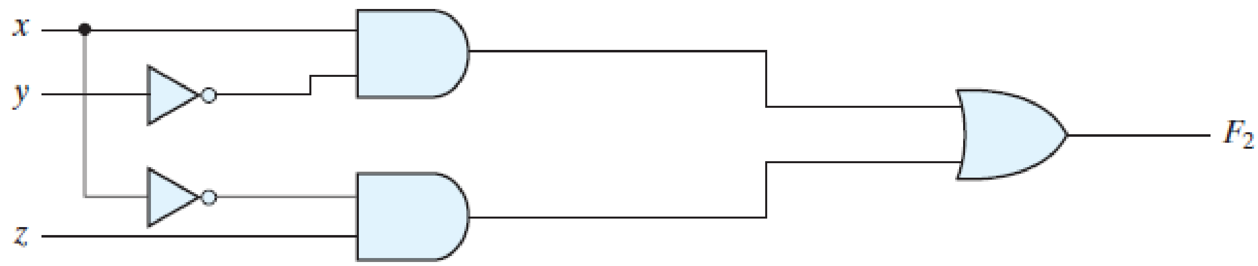
Boole Fonksiyonlarının Basitleştirilmesi

Karmaşık Devre =>



(a) $F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$

Basitleştirilmiş Devre =>



(b) $F_2 = xy' + x'z$

Boole Fonksiyonlarının Basitleştirilmesi

- Boole cebrini kullanarak aşağıdaki fonksiyonları basitleştiriniz.

1. $x(x' + y) =$ **?**

2. $x + x'y =$ **?**

1. $x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy.$

2. $x + x'y = (x + x')(x + y) = 1(x + y) = x + y.$