Functional Analysis I

第1讲

泛函分析 → 无穷维线性空间及其上线性算子理论

主要对象 → Banach空间

记号

$f \lesssim g$: 存在与f.g均不相关的常数 $C>0$ s.t. $f \leq Cg$

若C依赖于M. 记为 $f \lesssim_M g$

Banach空间基本理论

Def (度量空间) X是一个集合, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ 称 (X,d) 是一个度量若

(i) $\forall x,y \in X$, $d(x,y) \geq 0$ 且 $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (正定)

(ii) $\forall x,y \in X$ $d(x,y)=d(y,x)$ (对称)

(iii) $\forall x,y,z \in X$. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (三角不等式)

例 $\mathbb{R}^n$, $d(x,y)=|x-y|$;

也可以定义为 $d(x,y)=\max_i |x_i-y_i|$

但有定理证明 $\mathbb{R}^n$ 中任两个范数等价

$C([0,1])$ $d(x,y)=\sup_{t\in[0,1]} |x(t)-y(t)|$

度量 $\longrightarrow$ 拓扑   开球 $\longrightarrow$ 拓扑基

<u>定义</u> U是开集 $\Longleftrightarrow$ U可以写成若干(不必可数)个开球之并

$$U = \bigcup B(x,r) \qquad B(x,r) = \{y\in X,\ d(x,y)<r\}$$

V是闭集 $\Longleftrightarrow$ V的补集是开集.

<u>定义</u> 称 X 是完备的度量空间 $\Longleftrightarrow$ X中任何一个Cauchy列一定收敛到X中唯一极限.

<u>例</u> 不完备的度量空间: $X = C([0,1])$

其中 $d(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt$

令 $x_n = (1-nt)\,\mathbb{1}_{\{t\leq \frac{1}{n}\}}(t)$, 此时

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \delta_{0} \notin C([0,1])$$

但 $d(x_n,x_m) = \int_0^1 \left|(1-mt)\mathbb{1}_{\{t\leq\frac{1}{m}\}}(t) - (1-nt)\mathbb{1}_{\{t\leq\frac{1}{n}\}}(t)\right| dt$
$(m>n)$

$$= \int_0^{\frac{1}{m}} |(1-mt)-(1-nt)|\,dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |1-nt|\,dt$$

$$= \frac{m-n}{2m^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - n\,\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}}{2}$$

$1-nt$ $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty$$

是Cauchy列 □

<u>定义</u> (完备化)

定义 对度量空间 (X,d)，若存在 (X',d') 使得

(i) (X,d) 可以等距嵌入 (X',d')

(ii) (X',d') 是满足(i)的最小者，即若 $(X,d) \hookrightarrow (X'',d'')$

则 $(X',d') \hookrightarrow (X'',d'')$.

则称 (X',d') 为 (X,d) 的完备化.

Thm 任何一空间 (X,d) 都有等距同构意义下唯一的完备化.

证明：设 (X,d) 中所有 Cauchy 列记为 $\mathscr{C}$.

等价关系 $\sim$：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$

当且仅当 $\forall \varepsilon>0, \exists N.\ s.t.$

$d(x_n,y_n)<\varepsilon \quad (n>N)$.

$X' \triangleq \mathscr{C}/\sim$

在 X' 中定义

$d'(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,y_n)$. （先证 d' 良定）

指等价类

下面依次证明 d' 是 X' 上一个度量且 (X',d') 完备

(i) 显然 $d'(\{x_n\},\{y_n\}) \geq 0$

当 $d(\{x_n\},\{y_n\})=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,y_n)=0$

也即 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$.

(ii) 对称性：显然

(iii) 三角不等式.

$d'(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \left(d(x_n,z_n)+d(y_n,z_n)\right)$

$= d'(\{x_n\},\{z_n\}) + d'(\{z_n\},\{y_n\})$

d' 良定：要证 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为 Cauchy 列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ 存在

注意到 $|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|$

$$\le |d(x_n,y_n)-d(x_n,y_m)|+|d(x_n,y_m)-d(x_m,y_m)|$$

$$\le d(y_n,y_m)+d(x_n,x_m) \longrightarrow 0 \quad as\ m,n\to\infty$$

故 $\{d(x_n,y_n)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一个 Cauchy 列.

由$\mathbb{R}$的完备性 $\Rightarrow$ $\{d(x_n,y_n)\}$ 收敛. d 良定!

还要证明 (X',d') 是完备的.

设 $\{\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}\}_{m=1}^{\infty}$ 是 X' 中一 Cauchy 列. 即

$$d'(\{x_k^{(n)}\},\{x_k^{(m)}\}) \longrightarrow 0 \quad as\ n,m\to\infty$$

显示结构为　　　　每行都是一个 Cauchy 列

$$\begin{array}{llll} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \cdots \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \cdots \\ x_1^{(3)}, & x_2^{(3)}, & x_3^{(3)} & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \\ & & & \ddots \end{array}$$

我们证明 $\{x_k^{(n)}\}$ 的极限是 $\{x_m^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. 因为 $\{x_k^{(n)}\}$ 是 Cauchy 列

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当 $m,n>N_1$ 时

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k^{(n)},x_k^{(m)}) = d'(\{x_k^{(n)}\},\{x_k^{(m)}\}) < \varepsilon$$

⑤

~~对这个 ε，对 $m>N$（固定 m），取 N_1 使 $n>N_1$ 时~~

~~$\lim_{k\to\infty} d(x_k^{(m)}, x_k^{(n)})$~~

也即存在 N_2，当 $k>N_2$ 时

$$d(x_k^{(n)}, x_k^{(m)}) < 2\varepsilon$$

Rmk：我们取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，现在我们已经证明了

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $k, m, n > N$ 时

$$d(x_k^{(n)}, x_k^{(m)}) < 2\varepsilon$$

对 $t, s>N$

$$d(x_t^{(t)}, x_s^{(s)}) < 2\varepsilon$$

于是 $\boxed{\{x_k^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \text{ 是一个 Cauchy 列}}$ 故 $d'(\{x_n^{(m)}\}, \{x_n^{(n)}\})$ 可定义

最后，$\forall \varepsilon>0$，取 $M\in\mathbb{N}$，当 $n, m>M$ 时

$$d(x_n^{(m)}, x_n^{(n)}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n^{(m)}, x_n^{(n)}) \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow d'(\{x_n^{(m)}\}, \{x_n^{(n)}\}) \le \varepsilon$$

从而 $\{x_n^{(m)}\} \longrightarrow \{x_n^{(n)}\}$，故 (X', d') 是完备的。

取等距嵌入 $x \longleftrightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $y_n \equiv x$。

还要说明 (X', d') 是最小的。

若还有 (X'', d'') 为 (X, d) 的完备化

$$\begin{tikzcd} (X,d) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & (X'',d'') \\ (X',d') \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

其中φ. ψ为等距嵌入

对$\{x_n\} \in X'$ 为一Cauchy列，考虑数列$\{\varphi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

由X''的完备性，知 $\varphi(x_n) \longrightarrow x'' \in X''$

其嵌入 $f: \{x_n\} \longleftrightarrow x''$

下证：f是等距嵌入，对$\{y_n\} \overset{f}{\longleftrightarrow} y''$

$d''(x'',y'') = \lim d(x_n,y_n) = d'(\{x_n\},\{y_n\})$ □

下面便可将$\mathbb{R}^n$中其它相关概念推广到(X,d)上

开→拓扑　闭、紧　下总是以(X,d)表示度量空间

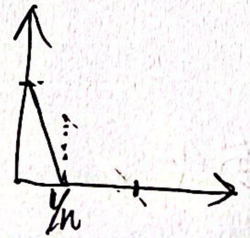
Def 设$K \subset X$，称K为$\boxed{\text{列紧}}$的，若任何K中序列都有子列收敛到K中某一点。称K是$\boxed{\text{紧集}}$若K的任何开覆盖都有有限子覆盖

$\mathbb{R}^n$中，列紧$\Longleftrightarrow$紧$\Longleftrightarrow$有界闭集　但一般(X,d)不一定！

反例 $C([0,1])$中 取 $d(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)-y(t)|$

令 $x_n(t) = (1-nt)\, 1_{\{t \le \frac{1}{n}\}}(t)$.　$|x_n(t)| \le 1$

$x_n(t)$图象为



注意到 $\sup\limits_{t\in[0,1]}^{n\ge m\text{时}} |x_n(t) - x_m(t)| = 1 - \frac{n}{m}$

$\Rightarrow \{x_n\}$不能有Cauchy子列

Thm 若X是完备的度量空间，则对任何$K\subset X$，TFAE：

(1) K列紧

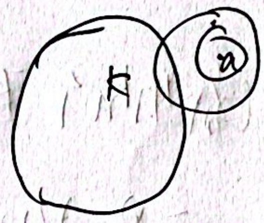
(2) K紧

(3) K为闭集且全有界：$\forall \varepsilon>0$，$\exists$有限个点 $x_1,\dots,x_n\in K$，

s.t. $K\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$

证明：

"(1)$\Rightarrow$(3)"

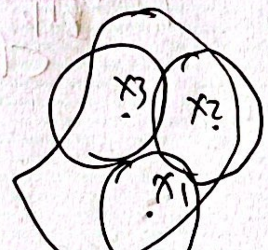


由K是列紧知K是闭集（为什么？）

（只须证K^c是开集，对$a\in K^c$，反设没有$B(a,r)\subset K^c$，则可以取出一列$B(a,\frac{1}{n})$，每个中都有$k_n\in K$，于是$\{k_n\}\subset K$，但$k_n\to a$，与K列紧矛盾）。

再证K是全有界的，否则，对某个$\exists\,\varepsilon_0>0$ 使得对任何$x_1\in K$

$\exists x_2\in K\setminus B(x_1,\varepsilon_0)$，$\exists x_3\in K\setminus\left(B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)\right)$



每次根据前n个 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 找到 x_{n+1}

使 $x_{n+1}\in K\setminus\left(B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)\cup\cdots\cup B(x_n,\varepsilon_0)\right)$

反证假设告诉我们，这个序列一定会无穷找下去

得一个无穷序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，它满足 $d(x_n,x_m)\geq\varepsilon_0$，

它不可能收敛，矛盾！

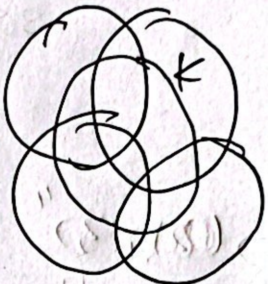
"(1)$\Rightarrow$(2)"

则要证明K成立有限开覆盖性质，反证

设存在开覆盖 $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$，任何有限子覆盖都盖不住K

已证：K全有界 即 $\forall n \in \mathbb{N}$ (对 $\varepsilon = \frac{1}{n}$) 存在 $x_1^{(n)}, x_2, \ldots, x_{k_n}^{(n)}$ 使得

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i^{(n)}, \frac{1}{n})$$



(都有 k_n 个直径 $< \frac{1}{n}$ 的球盖住K)

于是 $\forall n$，$\exists\, y_n = x_{i_n}^{(n)}$ 使得 $B(y_n)$ 不能被有限个 U_i 覆盖

得到一个序列 $\{y_n\}$，由K列紧

$\Rightarrow \exists \{y_{n_k}\}$ 子列 $y_{n_k} \longrightarrow y \in K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

y 一定在某 U_{i_0} 中，又 U_{i_0} 是开集，$\exists \delta$，$B(y, \delta) \subset U_{i_0}$。

而 $y_{n_k} \longrightarrow y$，即某个N之后 $\begin{cases} y_{n_k} \in B(y, \frac{\delta}{2}) \\ \frac{1}{N} < \delta/2 \end{cases} \Rightarrow B_{\frac{1}{n_k}}(y_{n_k}) \subset U_{i_0}$

与 ~~~~ 有限个 U_i 覆盖矛盾！

$B(y_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ 不能覆盖

"(2) ⟹ (1)"

设K是紧集，先证K是闭集，即证 K^c 是开集

$\forall x_0 \in K^c$，令 $r_x = \frac{1}{3} d(x, x_0)$

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x) \quad \text{是开覆盖}$$

$\Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$，令 $\delta = \min_{1 \le i \le n} \{r_{x_i}\}$

则 $B(x_0, \delta) \cap B(x_i, r_{x_i}) = \emptyset \quad \Rightarrow K^c$ 是开

证明很巧妙

现在来证K列紧 反证 存在 $\{x_n\}\subset K$ 无收敛子列

$\Rightarrow$ 无子列为 Cauchy 列　设 x_n 两两不同，则 $\{x_n\}$ 各点都是孤立点

X 是完备

令 $A_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_{n+1},\cdots\}$

则 A_n 都是闭集．$X\setminus A_n$ 是开集

另一方面 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(X\setminus A_n)\supset K$ 是开覆盖

取有限子覆盖 $\bigcup\limits_{n=1}^{N}(X\setminus A_n)\supset K$．

由 $x_{N+1}\in K$．$x_{N+1}\notin\bigcup\limits_{n=1}^{N}(X\setminus A_n)$ 矛盾！

"(3) ⇒ (1)" 对K中一序列

在(3)中依次取 $\varepsilon=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$

每个 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，都可以在上一个子列中找到有限个 $y_1^{(n)},\cdots,y_{k_n}^{(n)}$

$\bigcup\limits_{m=1}^{k_n}B(y_m^{(n)},\frac{1}{n})\supset K$

故存在一个 $B(y_m^{(n)},\frac{1}{n})$ 包含了 $\{x_n\}$ 一个无穷子列 $\{x_n^{(k)}\}$

即：　再在 $\{x_n^{(k)}\}$ 找 $\{x_n^{(k+1)}\}$

$x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)},\cdots$ 包含于 $B(y_1,1)$

$x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)},\cdots$ 包含于 $B(y_2,\frac{1}{2})$

$\vdots$

$x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)},\cdots x_k^{(k)}\cdots$ 包含于 $B(y_k,\frac{1}{k})$

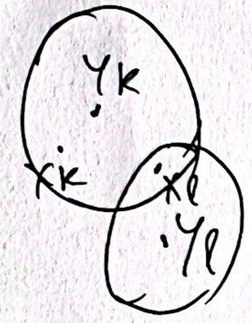
⑩ 且满足 $x_l^{(l)} \subset B(y_k, \frac{1}{k})$ $(k<l)$

取对角线 $\{x_k^{(k)}\}_{k\geq 1}^{\infty}$ 则 k.l 充分大时

$$d(x_k^{(k)}, x_l^{(l)}) \leq d(x_k^{(k)}, y_k) + d(x_l^{(l)}, y_l) + d(y_k, y_l)$$

$$\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)$$

$$= \frac{2(k+l)}{kl} \longrightarrow 0 \quad \text{as } l, k \to \infty$$



故 $\{x_k^{(k)}\}$ 为 Cauchy 列. 故由完备性其收敛到 x_0 X中.

但K是闭集，由前述类似讨论知 $x_0 \in K$ □

<u>定义</u>（稠密子集）设X是一个度量空间，$K \subset X$. 称K是X的稠密子集若

$$\forall \text{开球 } B_r(x) \cap K \neq \emptyset$$

<u>定义</u>（可分）. 若X存在一个至多可数的稠密子集则X可分

接下来考虑紧的度量空间 (X,d) 上全体实值函数组成的 $C(X)$ 集合.

<u>命题</u> $\forall f \in C(X)$, $\sup\limits_{x \in X} |f(x)| < +\infty$ （紧集上连续函数有最大最小值）

所以可以定义

$$d'(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)| \qquad \forall f,g\in C(X)$$

$(C(X),d')$ 是一度量空间

命题 $(C(X),d')$ 为一完备的度量空间

证明：设 $\{f_n\}$ 是 $(C(X),d')$ 中一列 Cauchy 列，$\forall x\in X$

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)| \to 0 \qquad \text{as } n,m\to\infty$$

显然有 $\forall x\in X$，$|f_n(x)-f_m(x)|\to 0$ as $n,m\to\infty$

$\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上 Cauchy 列 故 $f_n(x)$ 收敛，定义

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

则 $\forall x$，$f_n(x)\to f(x)$ 下证 $f\in C(X)$，$\forall \varepsilon>0$，(用 $\frac{\varepsilon}{3}$ 法)

$$|f(x)-f(y)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_n(y)|$$

取 m 使 $n>m$ 时 $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

且 δ 使 $|x-y|<\delta$ 时 $|f_m(x)-f_m(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$

则 $\forall n>m$

$$|f_n(x)-f_n(y)|$$

$$\le |f_n(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f_m(y)|+|f_m(y)-f_n(y)|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

□

⑫ 接下来讨论 $C(X)$ 上列紧集的刻画， 注意这里 $C(X)$

定理（Arzela-Ascoli）. 设 X 为紧度量空间，$K\subset C(X)$ 为 $C(X)$ 的一个闭子集，则 K 为列紧集当且仅当

(i) K 一致有界： $\sup\limits_{f\in K, x\in X}|f(x)| = M < +\infty$

(ii) K 等度连续： $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$ 使得当 $x_1, x_2\in X$，且 $d(x_1,x_2)<\delta$ 时，

$$\sup_{f\in K}|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

Rmk 等度连续比一致连续要强，理解为一致一致连续

证明：

"$\Rightarrow$" K 列紧 $\Rightarrow$ K 全有界 $\Rightarrow$ K 一致有界 （$C(X)$ 完备）

再证 K 等度连续.（"$\frac{\varepsilon}{3}$ 法"）

$\forall\varepsilon>0$. 存在 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}\subset K$. 使

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \frac{\varepsilon}{3})$$

代入我们定义的度量，也就

$$\forall f\in K,\ \exists f_i,\ 使\ \sup_{x\in X}|f(x)-f_i(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

要证 f 等度连续，则"$\frac{\varepsilon}{3}$ 分解"

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f_i(x_1)|+|f_i(x_1)-f_i(x_2)|+|f_i(x_2)-f(x_2)|$$

$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$

所以取 δ 使 $|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \varepsilon \quad \forall i$.

只要 $d(x_1, x_2) < \delta$

"$\Leftarrow$" 证明: 等度连续 + 一致有界 $\Rightarrow$ 列紧

回顾定理 K 列紧 $\overset{C(X)\text{完备}}{\Longleftrightarrow}$ K 闭且全有界, 又已知 K 闭, 只须证 K 全有界. $\forall \varepsilon > 0$ (给定)

如何找 $\{f_i\}_{i=1}^n$, $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon)$

"$\frac{\varepsilon}{3}$法" 等度连续性

对这个 ε, 取 $\delta > 0$ 使当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时

$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ 对所有 $f \in K$ 成立

由于 X 紧 $\Rightarrow$ X 全有界, 可取 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$

$X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$

希望什么: $\forall x \in X$, $\forall f \in K$. $\exists f_i$, $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$

通过 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 标准来估计, 某 x_k. $|x - x_k| < \delta$

$|f(x) - f_i(x)| \le |f(x) - f(x_k)| + |f_i(x_k) - f(x_k)| + |f_i(x_k) - f_i(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{3}$ (等度) ? $< \frac{\varepsilon}{3}$ (等度连续)

⑭ 如何选 $f_1, f_2, \dots f_m$ 使 $|f_i(x_k) - f(x_k)|$ 可以估计? 在像集中找

※考虑: $F: K \to \mathbb{R}^n \quad F(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$

由 f 一致有界 $\Rightarrow F(K)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中有界 $\Rightarrow \underset{\text{闭包}}{\overline{F(K)}}$ 全有界

取 $f_1 \dots f_m$ 使

$$F(K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(F(f), \tfrac{\varepsilon}{3})$$

故 $\forall k \; |f_i(x_k) - f(x_k)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ □

接下来讨论 Banach 空间.

把范数结构应用到线性空间 E → 赋范线性空间

我们在线性代数中已学过范数的定义, 这里回忆一下

$\|\cdot\|$: 正定性、齐次性、三角不等式

有范数就有度量 $d(x,y) = \|x-y\|$

现在来定义 Banach 空间.

Def Banach 空间 = 完备的 ~~赋~~ 赋范 线性 空间

例 $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ $\quad L^p$ 空间 $\quad \|f\|_{L^p} = \left(\int_E f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

测度与积分中已证 L^p 空间完备性，于是它是 Banach 空间
证明略

例 $L^p(X,\mu)$ 中　μ 等分布且 $X=\mathbb{Z}$ 时 记其为 ℓ^p

$x=(x_1,x_2,\cdots)$

$$\|x\|_{\ell^p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\begin{cases} X=\Omega\subset\mathbb{R}^n \text{ 时 (可测)} \\ d\mu=dm \end{cases}$ 简记为 $L^p(\Omega)$

例 考虑 $X=C^k(\overline{\Omega})$ 定义范数 $\|f\|^2_{H^k(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega|\partial^\alpha f|^2dx$

对 f 所有 $\le k$ 阶偏导数

命题 $(C^k(\overline{\Omega}),\|\cdot\|_{H^k(\Omega)})$ 不是完备的 (其完备化通常叫 Sobolev 空间)
后会讨论

命题 有限维线性空间上任两个范数等价，即 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$
$\exists\, C_1, C_2$.

$$C_1\|x\|_2\le\|x\|_1\le C_2\|x\|_2\qquad\forall x\in X$$

证明：记 $n=\dim X$.　X 一组基为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$
以 $\|\cdot\|_2$ 为标准范数

对 $x=\sum_{k=1}^{n}x_ke_k$ 有 $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}$

对 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\Rightarrow p(y)=\left\|\sum_{k=1}^{n}y_ke_k\right\|$

易证 $p(y)$ 是齐次连续的. $|y|=a$

连续函数在紧集上有最大最小值 于是

$\exists C_1, C_2$ $C_1|y| \le p(y) \le C_2|y|$ 范 赋范

由于 $p(y)$ 连续性, 以上例子表明 维数相同的线性空间 代数上和拓扑上都等价

推论 任何有限维线性空间一定是 Banach 空间

命题 若赋范线性空间 X 上单位球面 $\{\|x\|=1\}$ 是紧集 则 X 有限维

~~还是用反证法. 设 X 有无穷个线性无关的单位向量~~ $e_1, e_2,$

对 S 上若干线性无关的向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ (有限)

记 $M=\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$

若 $M \neq X$. 取 $x \in X \setminus M$. 则 $\forall y=(y_1, \cdots, y_n) \in K^n$

令 $p(y)=\|x-\sum_{j=1}^{n} y_k e_k\|$ >0

易证: $p(y)$ 是 K^n 上连续函数

接下来估计 $p(y)$

$p(y) \ge \|\sum_{k=1}^{n} y_k e_k\| - \|x\| \longrightarrow +\infty$ as $|y| \to \infty$

于是 $\exists y_0$ $=(y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 使 $p(y)$ 在 y_0 处取最小值(极小值) >0

令 $\frac{1}{p(y_0)}(x-\sum_{j=1}^{n} y_j^0 e_j)=e_{n+1} \in S$

而且

对 $\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$

$$\|e_k-e_{n+1}\|=\|x-\sum_{j=1}^{n}y_j^{0}e_j-p(y_0)e_k\|/p(y_0)$$

$$=\|x-\sum_{j\neq k}y_j^{0}e_j-(y_k^{0}+p(y_0))e_k\|/p(y_0)$$

它是 $p(y_1^0,\cdots,y_{k-1}^0,y_k^0+p(y_0),\cdots,y_n^0)\geq p(y_0)$

故利用 $p(y_0)$ 最小性，上式 ≥ 1

如此下去 得一无穷序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $\|e_m-e_n\|\geq 1$ $\forall m\neq n$

得到 ~~收~~ 非列紧.（这里需要完备性）

Hilbert 空间

已有: 收敛性: (Cauchy 列)

长度: 范数

增加结构: 角度

可认为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$

一般对第2个共轭线性,这里还是用第1个

Def 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle: H\times H\longrightarrow K$

1. 共轭线性 $\langle a_1x_1+a_2x_2,y\rangle=\bar{a}_1\langle x_1,y\rangle+\bar{a}_2\langle x_2,y\rangle$

   $\langle x,a_1y_1+a_2y_2\rangle=a_1\langle x,y_1\rangle+a_2\langle x,y_2\rangle$

2. 共轭对称性 $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$

3. 正定性: $\forall x\in H$, $\langle x,x\rangle\geq 0$ 成立"=" iff $x=0$

内积空间 = 有内积结构的线性空间

例 $\overset{K}{\overset{\|}{\mathbb{C}}}^{n}$, $H=L^2(X,d\mu)$ $(f,g)=\int_X\bar{f}g\,d\mu$

是H

⑱

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. $H=L^2((X,d\mu);\mathbb{C})$, $(f,g)=\mathrm{Re}\int_X \bar{f} g \, d\mu$ 是H

$H=C^k(\bar{\Omega})$, $(f,g)=\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega \partial^\alpha \bar{f}\, \partial^\alpha g \, d\mu$ 不是 Hilbert

命题 (Cauchy-Schwarz) 不等式. 内积空间 H

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

不再证明了

内积结构 $\Longrightarrow$ 范数结构

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

范数结构 $\not\Rightarrow$ 内积结构 (当然要求内积诱导的范数与原来相同)

命题 设 X 是一个赋范线性空间, TFAE

(i) X 有上内积结构 $(\cdot,\cdot)$ 使 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ $\forall x\in X$

(ii) X 上范数满足平行四边形法则. $\forall x,y\in X$

$2\|x\|^2+\|y\|^2 = \|x+y\|^2+\|x-y\|^2$

(i) $\Rightarrow$ (ii) 容易

(ii) $\Rightarrow$ (i). "反向定义"

$$(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) & \mathbb{K}=\mathbb{R}\\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)\end{cases}$$

□

(Rmk Stein教材上增加了可分性，其实大部分Hilbert空间都是可分的)

<u>Def</u> Hilbert空间 = 内积空间 + 其诱导范数下Banach
(传统的)
= 完备的内积空间

有内积 就有角度

$$\theta(x,y) = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} \quad \in(-1,1)$$

有角度可定义 正交

<u>Def</u> $x,y\in H$. x,y 正交 $\Leftrightarrow$ $(x,y)=0$

有正交就有正交补

M的正交补 $M^{\perp}$ (与线性代数中相应概念一样)

以下 H 总表示 Hilbert空间

<u>回顾</u>

正交基. 与ON系(规范正交集)
$\to S=\{e_k, k\in K\}$. $\|e_k\|=1$ 且两两正交

<u>Def</u> ON系是完备的 iff $S^{\perp}=\{0\}$

<u>例</u> 在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中. $(\cdots 0, 0, \cdots, 1, 0 \cdots)$ ← 仅一个位置上有1
构成 ON 系

<u>Rmk</u> Hilbert空间. $f_n\to f$ 意思是 $\|f_n - f\|\longrightarrow 0$
H的

<u>定理</u> 设 $S=\{e_k, k\in K\}$ 为ON系, 则 TFAE.

(i) (S封闭). $\forall x\in H$. 存在至多可数个 $e_k\in S$.
使 $(e_k,x)\neq 0$ 且 $\sum_{k\in K}(e_k,x)e_k$ 在H范数下收敛到 x

(2) S 是完备的

(3) Parseval 等式成立

$$\forall x \in H, \ \|x\|^2 = \sum_{k \in K} |(e_k, x)|^2$$

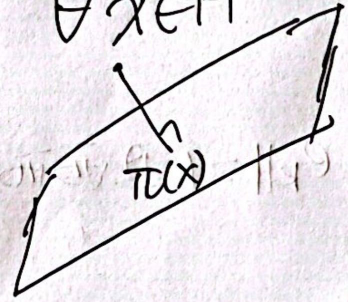
测度与积分课程已证过一遍. 在此我们只复习 Bessel不等式:

$$\sum_{k \in K} |(e_k, x)|^2 \le \|x\|^2$$

正交投影.

$$|x - \pi(x)| = \inf_{y \in V} |y - x|$$

$\mathbb{R}^n$ 中 $\forall x \in H$



V子空间

$\mathbb{R}^n$ 中可以做到. 在一般 Hilbert 空间也可做到

Thm $V \subset H$ 是一闭子空间, 则存在唯一的线性映射

$$\pi: H \longrightarrow V$$

使 $\|x - \pi(x)\| = \inf\limits_{y \in V} \|x - y\|$ 且此时 $(\pi(x) - x) \perp V$