



華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

网络安全数学基础(二)

沈佳辰

jcshen@sei.ecnu.edu.cn



華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

网络安全数学基础

第八章 多项式环



- 定义8.1 设 R 是一个环，则系数都是 R 中元素的多项式，即给定多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ，若对 $i = 0, 1, \dots, n$ ，都有 $a_i \in R$ ，且 $a_n \neq 0_R$ ，则称 $f(x)$ 是 R 上的多项式， a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数。



- 定义8.1 设 R 是一个环，则系数都是 R 中元素的多项式，即给定多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ，若对 $i = 0, 1, \dots, n$ ，都有 $a_i \in R$ ，且 $a_n \neq 0_R$ ，则称 $f(x)$ 是 R 上的多项式， a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数。
- n 称为 $f(x)$ 的次数，记作 $\deg f$ 。



- 定义8.1 设 R 是一个环，则系数都是 R 中元素的多项式，即给定多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ，若对 $i = 0, 1, \dots, n$ ，都有 $a_i \in R$ ，且 $a_n \neq 0_R$ ，则称 $f(x)$ 是 R 上的多项式， a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数。
- n 称为 $f(x)$ 的次数，记作 $\deg f$ 。
- 若 $a_n = 1_R$ ，则称 $f(x)$ 为首一多项式。



- 定理8.1 设 R 是一个环, 在 R 上的多项式全体组成的集合 $R[x]$ 上定义加法和乘法: 对任意 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$,

$$(f + g)(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i,$$

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k,$$

其中未定义的 a_i 和 b_i 都为0, 即若 $n > m$, 则 $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$, 若 $n < m$, 则 $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = 0$, 此时 $R[x]$ 关于加法和乘法构成环。



证明：对任意 $f(x), g(x) \in R[x]$ ，显然有 $(f + g)(x), (fg)(x) \in R[x]$ ，因此 $R[x]$ 对加法和乘法都封闭。对任意 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, h(x) = \sum_{i=0}^l c_i x^i \in R[x]$ ，因此

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i \right) + \sum_{i=0}^l c_i x^i = \\ &= \sum_{i=0}^{\max(n,m,l)} ((a_i + b_i) + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{\max(n,m,l)} (a_i + (b_i + c_i)) x^i = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{\max(m,l)} (b_i + c_i) x^i \right) = (f + (g + h))(x), \end{aligned}$$

因此加法有结合律，类似可证乘法也有结合律，所以 $R[x]$ 对加法和乘法都构成半群。



又因为 $(f + g)(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (b_i + a_i)x^i$
 $= (g + f)(x)$, 因此加法有交换律。显然 $0(x) = 0 \in R[x]$, 且
 $(0 + f)(x) = (f + 0)(x) = f(x)$, 所以 $0(x)$ 是 $R[x]$ 的加法单位元,
令 $(-f)(x) = \sum_{i=0}^n (-a_i)x^i$, 则有 $(f + (-f))(x) = ((-f) + f)(x)$
 $= 0 = 0(x)$, 因此 $(-f)(x)$ 是 $f(x)$ 的加法逆元, 所以 $R[x]$ 关于加
法构成交换群。可验证 $((f + g)h)(x) = (fh + gh)(x)$ 以及
 $(f(g + h))(x) = (fg + fh)(x)$, 所以 $R[x]$ 关于加法和乘法满足
分配律, 因此 $R[x]$ 关于这两种运算构成环。



- 事实上，还可验证 $1(x) = 1 \in R[x]$ 是 $R[x]$ 的乘法单位元，因此 $R[x]$ 是含幺环。



- 事实上，还可验证 $1(x) = 1 \in R[x]$ 是 $R[x]$ 的乘法单位元，因此 $R[x]$ 是含幺环。
- 若 R 是交换环，则 $R[x]$ 也是交换环。



- 事实上，还可验证 $1(x) = 1 \in R[x]$ 是 $R[x]$ 的乘法单位元，因此 $R[x]$ 是含幺环。
- 若 R 是交换环，则 $R[x]$ 也是交换环。
- 若 R 无零因子，则 $R[x]$ 也没有零因子。因此若 R 是整环，则 $R[x]$ 也是整环。



- 定义8.2 设 R 是一个整环, $f(x), g(x) \in R[x], g(x) \neq 0$, 若存在 $q(x) \in R[x]$, 使得 $f(x) = g(x)q(x)$, 则称 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除, 或者 $g(x)$ 能整除 $f(x)$, 记作 $g(x)|f(x)$, 否则称 $f(x)$ 不能被 $g(x)$ 整除, 或者 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 记作 $g(x) \nmid f(x)$ 。



- 定义8.2 设 R 是一个整环, $f(x), g(x) \in R[x], g(x) \neq 0$, 若存在 $q(x) \in R[x]$, 使得 $f(x) = g(x)q(x)$, 则称 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除, 或者 $g(x)$ 能整除 $f(x)$, 记作 $g(x)|f(x)$, 否则称 $f(x)$ 不能被 $g(x)$ 整除, 或者 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 记作 $g(x) \nmid f(x)$ 。
- 若 $g(x)|f(x)$, 称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式。



- 定义8.3 给定 $f(x) \in R[x]$, 若存在 $g(x) \in R[x]$, 使得 $g(x)|f(x)$, 则称 $f(x)$ 是合式, 若不存在这样的多项式, 则称 $f(x)$ 是既约多项式。



- 例 因为 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, 所以 $(x - 1) | (x^3 - 1)$, $x - 1$ 是 $x^3 - 1$ 的因式。



- 例 因为 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, 所以 $(x - 1) | (x^3 - 1)$, $x - 1$ 是 $x^3 - 1$ 的因式。
- 例 在 Z_2 上, $x^2 + 1 = (x + 1)^2$, 所以 $(x + 1) | (x^2 + 1)$, $x^2 + 1$ 是 $x + 1$ 的倍式, 因此 $x^2 + 1$ 在 Z_2 上不是既约多项式。



- 例 因为 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, 所以 $(x - 1) | (x^3 - 1)$, $x - 1$ 是 $x^3 - 1$ 的因式。
- 例 在 Z_2 上, $x^2 + 1 = (x + 1)^2$, 所以 $(x + 1) | (x^2 + 1)$, $x^2 + 1$ 是 $x + 1$ 的倍式, 因此 $x^2 + 1$ 在 Z_2 上不是既约多项式。
- $x^2 + 1$ 不可用于从 F_2 生成 F_4 。



- 定理8.2 对任意域 F 上两个多项式 $f(x), g(x)$, $g(x) \neq 0$, 则存在唯一 $q(x), r(x) \in F[x]$, $\deg r < \deg g$, 使得 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 。 $q(x)$ 称为 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的不完全商, $r(x)$ 称为 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的余式。



证明：若 $\deg f < \deg g$ ，令 $r(x) = f(x), g(x) = 0 \in F[x]$ ，则有 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 且 $\deg r < \deg g$ ，因此这样的 $q(x), r(x)$ 存在。



证明：若 $\deg f < \deg g$ ，令 $r(x) = f(x), g(x) = 0 \in F[x]$ ，则有 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 且 $\deg r < \deg g$ ，因此这样的 $q(x), r(x)$ 存在。若 $\deg f \geq \deg g$ ，令 $n = \deg f - \deg g \geq 0, q(x) = ab^{-1}x^n, r(x) = f(x) - q(x)g(x)$ ，其中 a, b 分别为 $f(x), g(x)$ 的首项系数，则 $\deg(qg) = \deg q + \deg g = \deg f - \deg g + \deg g = \deg f$ ，观察 qg 的首项系数为 $ab^{-1}b = a$ ，因此 $\deg r = \deg(f - qg) < \deg f$ ，因此存在这样的 $q(x), r(x)$ 。



若存在 $q'(x), r'(x) \in F[x]$, $\deg r' < \deg g$, 使得 $f(x) = q'(x)g(x) + r'(x)$, 则有 $q'(x) = q(x), r'(x) = r(x)$ 。事实上若 $q'(x) \neq q(x)$, 则 $\deg((q' - q)g) = \deg(q' - q) + \deg g \geq 0 + \deg g = \deg g$, 而 $\deg(r - r') \leq \max(\deg r, \deg r') < \deg g$, 因此 $\deg(r - r') < \deg((q' - q)g)$, 但由 $q'(x)g(x) + r'(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 可知 $(q' - q)(x)g(x) = (r - r')(x)$, 矛盾, 所以 $q'(x) = q(x)$, 由此可得 $r'(x) = f(x) - q'(x)g(x) = f(x) - q(x)g(x) = r(x)$, 唯一性得证。



- 定义8.4 给定环 R 上两个多项式 $f(x), g(x)$, 若 $d(x) \in R[x]$ 满足 $d(x)|f(x), d(x)|g(x)$, 且对任意 $h(x) \in R[x]$, 若 $h(x)|f(x), h(x)|g(x)$, 则有 $h(x)|d(x)$, 那么称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式。



- 定义8.4 给定环 R 上两个多项式 $f(x), g(x)$, 若 $d(x) \in R[x]$ 满足 $d(x)|f(x), d(x)|g(x)$, 且对任意 $h(x) \in R[x]$, 若 $h(x)|f(x), h(x)|g(x)$, 则有 $h(x)|d(x)$, 那么称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式。
- 若 $d(x)$ 和 $d'(x)$ 都是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式, 则显然 $d(x)|d'(x)$ 且 $d'(x)|d(x)$ 。



- 若 R 是域，设 a 和 a' 分别为 $d(x)$ 和 $d'(x)$ 的首项系数，则显然 $a^{-1}d(x)$ 也是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，且 $a'a^{-1}d(x) = d'(x)$ ，所以 $f(x), g(x)$ 的最大公因式在忽略非零常数因子的意义下是唯一的，一般将这些最大公因式中首项系数为1的作为它们的代表，记作 $(f(x), g(x))$ 。



- 定义8.5 给定域 F 上两个多项式 $f(x), g(x)$, 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素。



- 例 取 F_2 上多项式 $f(x) = x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$, $g(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$, 由辗转相除法可求得 $(f(x), g(x)) = 1$ 。



- 辗转相除法

对任意域 F 上多项式 $f(x), g(x), \deg g \geq 1$, 令 $r_0 = f(x), r_1 = g(x)$, 反复使用带余除法, 则有

$$r_0(x) = r_1(x)q_1(x) + r_2(x), \quad 0 \leq \deg r_2 < \deg r_1$$

$$r_1(x) = r_2(x)q_2(x) + r_3(x), \quad 0 \leq \deg r_3 < \deg r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_{n-1}(x) + r_n(x), \quad 0 \leq \deg r_n < \deg r_{n-1}$$

$$r_{n-1}(x) = r_n(x)q_n(x) + r_{n+1}(x), \quad r_{n+1}(x) = 0$$

经过有限次带余除法后, 必然可得 $r_{n+1}(x) = 0$, 则
 $(f(x), g(x)) = a^{-1}r_n(x)$, 其中 a 为 $r_n(x)$ 的首项系数。



- 类似于整数上的辗转相除法，我们有
- 定理8.3 对任意域 F 上多项式 $f(x), g(x), \deg g \geq 1$ ，存在 $s(x), t(x) \in F[x]$ ，使得
$$s(x)f(x) + t(x)g(x) = (f(x), g(x))$$



- 例 上例中，对 F_2 上多项式 $f(x) = x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$, $g(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ ，已求得 $(f(x), g(x)) = 1$ ，由辗转相除法进一步可求得 $s(x) = x^5 + x^3$, $t(x) = x^{10} + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ，使得 $s(x)f(x) + t(x)g(x) = (f(x), g(x)) = 1$ 。