考研数学——函数的极限

定义、说明、定理

定义

$$\begin{aligned} limf(x) &\iff \text{在}x\text{的某运动变化过程中，}f(x)\text{无限趋于常数}A\text{。} \\ &\iff \forall\varepsilon>0,\exists\text{时刻，使得此时刻之后恒有}|f(x)-A|<\varepsilon \end{aligned}$$

说明

(1)

过程	n->∞	x->∞	x->+∞	x->-∞	x->x0	x->x0+	x->x0-
时刻	N	X>0	X>0	X>0	δ>0	δ>0	δ>0
时刻之后	n>N	|x|>X	x>X	x<-X	|x-x0|<δ	x-x0<δ	x-x0>-δ

(2)

$$\text{在多维空间中的极限：如}P\to P_0\text{的过程中，有时刻}\delta>0,\text{使得}|PP_0|<\delta\text{成立时恒有}|f(P)-A|<\delta$$

(3)

$$\text{不管}x\text{在过程中趋近路线、途径、方式如何，}f(x)\text{都趋向于同一常数}A$$

定理

(1)

$$\begin{aligned} (1)\ \lim_{x\to x_0}f(x)=A &\iff \lim_{x\to x_{0+}}f(x)=A=\lim_{x\to x_{0-}}f(x) \\ (2)\ \lim_{x\to\infty}f(x)=A &\iff \lim_{x\to+\infty}f(x)=A=\lim_{x\to-\infty}f(x) \end{aligned}$$

(2)子列收敛性

性质

1. **唯一性**：极限存在必唯一
2. **局部有界性：**在过程中的某时刻后|f(x)|<M
3. **局部不等式性质（保号性）：**

$$\lim f(x)=A,\text{且}B<A<C,\text{则在某时刻后}B<f(x)<C$$
$$\text{特别的，当}B\text{或者}C\text{是}0\text{时，该性质又叫保号性。}$$

4. **子列收敛性**

计算极限的方法

1. **先观察再用定义证明，** 如：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0(k\text{为整数})$$
$$\lim_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}=0$$
$$\lim_{n\to\ x_0}C=C$$
$$\lim_{n\to\ x_0}x=x_0$$
$$\lim_{n\to\ x_0}sinx=sinx_0$$

2. **运算法则，** 如：四则运算和复合运算
3. **洛必达法则：**

$$(1)\text{适用于}“\frac{0}{0}”\text{型或}“\frac{\infty}{\infty}”(\frac{\Delta}{\infty})$$
$$(2)\text{要求}\lim\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}\text{存在或者}\infty\text{，洛必达不是万能的}$$
$$(3)\text{结合运算法则，等价无穷小},\text{使用洛必达}$$
$$(4)\text{求}\lim_{n\to\infty}f(n),\text{先求}\lim_{x\to+\infty}f(x)\quad[\text{子列极限}]$$

4. **泰勒公式（麦克劳林公式）**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + \cdots + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + o(x^3)$$
$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + o(x^4)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + o(x^3)$$

5. **用导数定义**

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

6. **∞/∞**型

$$(1)\text{约掉造}\infty\text{因子}$$
$$(2)\text{洛必达法则}$$

7. **其他未定式**

$$(1)\ "\ 0 * \infty\ "\ \text{型} \Rightarrow "\ \frac{\infty}{\frac{1}{0}}\ "\ \text{或者} “\frac{0}{\frac{1}{\infty}}”$$
$$(2) “\infty + \infty” \text{型：}$$
$$1. \Rightarrow \left(\text{通分或者有理化}\right) “\frac{0}{0}” “\frac{\infty}{\infty}”$$
$$2.\text{泰勒公式}$$
$$(3)\ "\ 0^0 \text{或者}\ "\ \infty^0\ "\ \text{型} \Rightarrow e^{0ln0}\text{或者} e^{0ln\infty}$$
$$(4)\ "\ 1^\infty\ "\ \text{型}$$
$$1. \Rightarrow e^{\infty * ln1}$$
$$2.\text{公式：当} \Delta \to 0 (\Delta \neq 0)\text{时，} (1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} \to e$$

8. **夹逼准则**
9. **单调有界准则**

- 证明单调性方法

$$
\begin{gathered}
1.x_n - x_{n+1} < 0(> 0) \\
2.If \quad x_n > 0, \text{用} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1(< 1) \\
3.\text{记} x_n = f(n), \text{证明} f(x)(x > 1) \text{的单调性} \\
4.\text{数学归纳法}
\end{gathered}
$$

- 证明{Xn}有界方法

$$
\begin{gathered}
1.\text{数学归纳法} \\
2.\text{基本}(\text{重要})\text{不等式}
\end{gathered}
$$

10. **前n项和的数列的极限**

$$
\begin{gathered}
1.\text{先求先} n \text{项和，再求极限} \\
2.\text{夹逼准则} \\
3.\text{定积分定义}
\end{gathered}
$$