现代几何学导论

——微分几何课程笔记

唐嘉琪

2025 年 6 月 21 日

编译时间 2025 年 6 月 21 日

纸张大小: A4
书本主页:www.cnblogs.com/TangJiaqiMath/p/18888723
唐嘉琪 | 上海立信会计金融学院
个人主页:www.cnblogs.com/TangJiaqiMath
期末试题见书本主页.

前言

本笔记初稿完成于 2025 年春季, 以上海立信会计金融学院韦康老师在春季开设的微分几何课程内容为主体. 其内容大多取自老师的课堂板书. 课程的教材选取为

陈省身, 陈维桓:《微分几何讲义》(第二版),(北京大学出版社).

考虑到该课程内容重要 (对分析学, 代数学起到进一步的理解). 笔者在以板书为主体下, 以自己的理解与所习惯的语言重新进行整理, 并对一些必要的地方进行了补充与修正, 对整体起到梳理作用. 考虑到该课程在大二, 大三开设, 课程难度与抽象程度均较大. 笔者尽量在该笔记中提供了对知识点的回忆与理解, 虽然这使得内容 (字数, 页数) 看上去较课本反而多了些许.

笔者在这里提醒: 韦康老师虽按照一次一节内容进行推进 (本笔记也将按照这个顺序进行推进). 但应当注意, 老师并非严格基于课本, 即大体与课本内容相符, 但细节到具体的 "引出" 与 "记号" 并不保持完全一致[1], 因此笔者是基于课堂内容而非基于课本 (虽然笔者参考了老师的记号, 但仍可以在该笔记中找到许多笔者的记号习惯[2]). 这使得这本笔记与微分几何的教材别具一格, 有着自己的风味.

由于笔者学力不够, 该笔记的深度与广度[3]均有所欠缺. 同时由于时间的仓促以及笔者精力有限, 笔记中不免出现些许笔误 (包括但不限于标点符号的不规范, 用词的不规范, 错字漏字, 数学符号未严格按 LaTeX 规范, 或是数学符号的笔误等等), 这里将认为读者已经拥有了自适应的修改模式.

此外, 由于该笔记的特殊性质, 笔者没法基于所有命题与定理于证明 (甚至思路), 这是由于有些是显然的, 有些则已超出该课程的范围, 读者有兴趣者可以自行查阅相关书籍. 对于相对重要的 (包括老师认为重要的, 应掌握的) 内容, 大多数都给有了证明或理解.

本门课程的先修知识为数学分析, 高等代数学, 一般拓扑学, 及代数学 (I) 的相关理论. 本门课程将在假定上述先修知识点的情况下, 尽可能的做到自包含.

学习时可以参考用书如下[4]：

1. Warner, Frank W: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. GTM94;
2. Wells, Raymond O: Differential Analysis on Complex Manifolds. GTM65;

[1]大体上的顺序是参考了 Warner 的 GTM94, 然而记号并未沿用.

[2]笔者对于某些记号不能明确区分表示歉意, 例如表示运算顺序的 "[运算]", 表示等价类的 "$[\cdot]$", 表示 Lie 括号的 "$[\cdot,\cdot]$" 和表示需要当作一个整体的 "$[f: X \to Y]$" 等, 则需要读者自行判断.

[3]由于这是笔者第一遍学习时所写, 内容与逻辑可能有所欠缺 (混乱), 尤其是第一章, 笔者在有时间的情况下会对之前的笔记进行补充与修订.

[4]灰色为中文教材, 笔者写这本笔记时用的很少

3. Shigeyuki Morita: Geometry of differential forms. 201. American Mathematical Soc.,2001;

4. Lee.Introduction to smooth manifolds. GTM218;

5. 陈维桓:《微分流形初步》(第二版);

6. 彭家贵, 陈卿:《微分几何》(第二版);

7. 忻元龙: 黎曼几何讲义;

一些想说的话

陈省身先生曾说过:

"流形是 20 世纪数学有代表性的基本观念, 数学至少几何学的研究对象就是流形."

梅加强老师的著作 流形与集合 的前言也有一句话:

以流形为研究对象的几何学常称为现代几何学.

可见从纯数学的角度来看, 流形重要性不必多说.

流形同为几何学和拓扑学的研究对象, 这一点已经成为大家的共识, 微分拓扑, 微分动力系统等等很多方向, 都是以流形为基础进行学科交叉的产物, 至于广义相对论等物理相关的方向, 重要性不必多言.

从引用数学与计算数学的角度来看, 流形可以看成是一种比线性结构或凸结构更宽泛的结构, 在面对很多非线性的 PDE 问题, 或者非凸的优化问题时, 虽然失去了线性或凸结构, 可往往具有流形结构, 于是便可以借助流形相关的理论去眼界实际问题中参数的几何结构了. 经典信息几何理论将概率密度函数全体看做一个统计流形, 用 Fisher 信息矩阵定义统计流形上的 Riemann 度量, 在此基础上构建了 Riemann 流形. 因为概率分布全体是弯曲的流形, 所以可以研究各种概率分布的几何性质, 这个理论衍生出的对偶联络的概念, 也已经成了一个纯几何的研究对象.

笔者本意乃将其作为研习之笔记, 以便于日后回溯重温. 其内容大抵取材于课堂所授之精华以及书本蕴含之要义, 近乎是一番精心整理的结晶. 其间, 笔者还融入了个人的独到见解, 使之别具一格. 与此同时, 笔者亦满怀热忱地期望这份笔记, 能够为那些于几何领域萌生兴趣的读者点亮一盏求知的明灯, 助力他们在探索几何奥秘的道路上稳步前行.

2023 级数学与应用数学 1 班
唐嘉琪 (231330131)
2025 年 6 月 21 日于上海

一些固定的符号说明

$\simeq$ 表示同构.

$\langle\cdot\rangle$, $\langle\cdot\rangle_R$ 表示张成, 表示由其内集合生成的环 R 上的双边理想.

$\dim_F$ 表示在数域 F 下的基.

M^m,N^n 表示 m 维流形 M, n 维流形 N.

T_M, $T^\star_M$ 表示流形 M 的切丛, 余切丛.

$T_{M,p}$, $T^\star_{M,p}$ 表示流形 M 在 p 处的切空间, 余切空间.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{S}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ 表示 n 阶可逆, 对称, 正定阵全体.

$(\cdot,\cdot)$ 表示笛卡尔积, 双线性函数.

$[\cdot]$ 表示等价类, 或用于标记一个整体.

$[\cdot,\cdot]$ 表示 Lie 括号.

$V\otimes W$ 表示张量积.

$\mathrm{Hom}(V,W)$ 表示向量空间 V 到向量空间 W 的线性映射全体.

$\mathrm{End}(V)$ 表示自同态 $\mathrm{Hom}(V,V)$.

$V^\star$ 表示向量空间 V 的对偶空间 $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$.

$V^{\otimes k}$ 表示 $\displaystyle\bigotimes_{i=1}^{k} V_i$, 当 $V_i=V,\forall i$.

$\mathbb{R}^{\oplus S}$ 表示 $\displaystyle\bigoplus_{s\in S}\mathbb{R}$.

${}_\infty S_p(M,\mathbb{R})$ 表示 M 的 p-奇异链群.

$H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}),H^p_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R})$ 表示第 p 个 M 的 de Rham 上同调群, 奇异上同调群.

$H_p(M,\mathbb{R})$ 表示第 p 个 M 的同调群.

$\mathfrak{g}$ 表示 Lie 群 G 赋有的典范 Lie 代数.

目录

第一章　流形

微分流形是一种性质很好的, 可以看作局部欧式的几何对象. 下图是本质.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \varphi_U(U\cap V) \arrow[dd, bend right, "\varphi_V\varphi_U^{-1}"'] & \subseteq & \varphi_U(U)\subseteq\mathbb{R}^m \\
M & \supseteq & U\cap V \arrow[ur, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\varphi_V"'] & & & \\
 & & & \varphi_V(U\cap V) \arrow[uu, bend right, "\varphi_U\varphi_V^{-1}"'] & \subseteq & \varphi_V(V)\subseteq\mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

这表明了要说明一个拓扑流形是 C^k-微分流形, 只要给出其上一组 C^k-相容的微分结构即可. 并指明了光滑映射, 光滑同胚, 光滑函数, 积流形等内容. 给出了流形上简明但重要的例子.

第二节从 R^n 上的切向量, 切空间入手 (不利用坐标), 增加可读性[1], 从而给出了光滑函数层 (茎, 芽) 的概念. 进一步对点 p 处光滑函数茎 (芽环) 为 Noetherian 环. 随后指出流形在点 p 处的切向量 (是一个映射) 可以是导子限制在点 p 的结果[2]. 而切向量全体可以视作一个 $\mathbb{R}$-向量空间. 这蕴含着在流形的局部可以等同于一个向量空间.

随后对切空间进行进一步研究, 关键在于证明 $T^{\star}_{M,x_0} \simeq \mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2$. 关键在于找其上分别一组基. 接着给出了坐标之间的转换, 并定义了切映射 (推前映射) 与拉回映射 (微分的拉回). 指出同一诱导下的拉回与推前互为对偶.

最后给出了从直线段 (刻度) 打到流形上曲线的一些结论.

第三节主要内容是子空间 (各种子空间), 重点在于理解满射或单射带来的 "……的一部份是坐标","……是坐标的一部份". 关键在于通过复习 Euclid 空间的隐函数定理 (resp. 反函数定理), 引入流形上的反函数定理 (resp. 隐函数定理).

第四节主要介绍了向量场, 积分曲线,Lie 括号等实用性概念与工具. 重点是各种概念与性质.

第五节课上先介绍了积分曲线的存在唯一与可微[3]. 然后介绍了单参数变换群, 流, 局部光滑扩张.

[1]这部分是笔者所补充的, 由于直接从流形出发对于初学者较为难以理解, 笔者也是从 $\mathbb{R}^n$ 上开始学习. 课上直接给出流形上的……

[2]这是一种基于导数算子的定义, 此外还有基于曲线, 坐标卡等方式来定义切向量.

[3]这部分的证明我放在第四节中了, 主要是基于 ODE 理论, 本节中只是再做一个回顾.

第六节[4]的主题是 Frobenius 可积性定理. Frobenius 定理是对之前积分曲线的存在性定理的高维推广. 积分曲线可以看作是沿着一个向量场摆放的曲线, 而如果在流形的每一点的切空间处都选择一个平面, 就可以问是否有曲面在每一点都沿着这些平面摆放?

[4]这节内容是与第五节一同上的, 但考虑其重要性, 笔者单开一节. 老师课上没给出详细的证明, 笔者基于 AMS201 给出了证明

1.1 拓扑流形与微分流形

1.1.1 拓扑流形

回忆 1.1.1. 度量空间都可以自然的看成具有度量拓扑的拓扑空间.

回忆 1.1.2 (Hausdorff 空间)**.** 拓扑空间 $(M,\mathscr{T})$ 称为 *Hausdorff* 空间, 若满足: $\forall p,q\in M$, $\exists p\in U\subseteq\mathscr{T}, q\in V\subseteq\mathscr{T}$, 满足 $V\cap U=\varnothing$.

定义 1.1.3 (拓扑流形)**.** 设 M 是 *Hausdorff* 空间. 称 M 为一个 m 维流形 (拓扑流形), 若 $\forall x\in M$, 都存在 $x\in M$ 中的一个邻域 U 满足 U 同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集.

注 1.1.4. 一个等价定义: 设 M 是一个 *Hausdorff* 和第二可数的拓扑空间, 若 M 的每个点 p 都有一个开邻域 $U\subseteq M$, 使得 U 和 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开子集是同胚的, 则称 M 是一个 n 维拓扑流形.

定义 1.1.5 (局部坐标系)**.** M 是一个拓扑空间, 若 $U\subseteq M$ 是 M 的一个开子集, $\varphi_U\colon U\to\varphi_U(U)\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个**同胚**, 则称 (U,φ_U) 是 M 的一个局部 (n 维) 坐标系 (坐标卡).

常记 $u^i(y):=(\varphi_U(y))^i$, $y\in U$, $i=1,\cdots,m$. 称 $u^i(y)(1\leqslant i\leqslant m)$ 为点 $y\in U$ 的局部坐标.

1.1.2 微分流形

下图阐了两个坐标卡 (U,φ_U) 与 (V,φ_V) 的相容性. 具体到所有映射都为同胚.

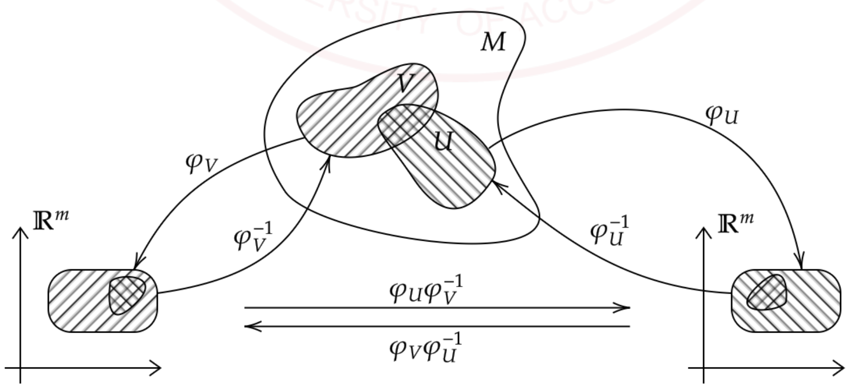

图 1.1: 微分流形

用代数一点的话说是

$$\varphi_V\varphi_U^{-1}\big|_{\varphi_U(U\cap V)}:=\varphi_U(U\cap V)\to\varphi_V(U\cap V)$$

定义 1.1.6 (光滑相容). 称两个坐标卡 (U,φ_U) 与 (V,φ_V) 是光滑相容的, 若 $U\cap V=\varnothing$ 或当 $U\cap V\neq\varnothing$ 相应的坐标变换函数 (具体到 i 个分量) 是 C^∞ 连续的.

定义 1.1.7 (光滑 (微分) 结构, 光滑 (微分) 流形). M 为 m 维流形. $\mathscr{A}:=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ 给出了 M 上的一簇坐标卡. 称 M 为**光滑微分流形**, $\mathscr{A}$ 为 M 的一个 光滑微分结构, 如果:

- $\mathscr{A}$ 中的坐标卡覆盖了 M;
- $\mathscr{A}$ 中任意两个坐标卡都是光滑相容的;
- $\mathscr{A}$ 是极大的, 即任何与 $\mathscr{A}$ 中坐标卡**均**相容的坐标卡都在 $\mathscr{A}$ 中.

注 1.1.8 (微分流形). 上述光滑 (C^∞ 连续) 改为 C^r 连续, 可定义 C^r-微分结构, 同时称具有 C^r-微分结构的流形 M 为**C^r-微分流形**.

改为解析的, 可类似定义解析流形及其相关结构.

例 1.1.9 ($\mathbb{R}^m$). $M=\mathbb{R}^m$, 取 $(U,\varphi_U)=(M,\mathrm{id})$, 显然这样的 $\{(U,\varphi_U)\}$ 覆盖了 M, 并确定了其上的光滑结构, 称 $\mathbb{R}^m$ 为标准微分结构.

例 1.1.10 ($\mathbb{S}^m$). 先考虑球面 $\mathbb{S}^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}$.

定义 $U_z^+=\{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\mid z>0\}$, 定义 $\varphi_z^+\colon U_z^+\to\mathbb{R}^2$, $\varphi_z^+(x,y,z)=(x,y)$.

容易看出 φ_z^+ 是连续双射, 且逆映射连续, 即这是同胚. 于是 (U_z^+,φ_z^+) 是一个坐标卡.

同理可以定义 (U_z^-,φ_z^-), (U_x^+,φ_x^+), (U_x^-,φ_x^-), (U_y^+,φ_y^+), (U_y^-,φ_y^-).

这六个坐标卡构成 M 的一组开覆盖, 于是 $\mathbb{S}^2$ 是一个拓扑流形.

类似地, $\mathbb{S}^m$ 也是拓扑流形.[5]

回忆 1.1.11. 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间, Y 是一个集合, $f\colon X\to Y$ 是一个满射. 在集合 Y 上定义一个拓扑 $\mathscr{T}_Y$ 如下: $U\subseteq Y$ 是开集当且仅当 $f^{-1}(U)\subseteq X$ 是开集, 这个拓扑 $\mathscr{T}_Y$ 就称为 Y 上由 f 诱导的商拓扑, $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 称为商空间.

例 1.1.12 (实射影空间 $\mathbb{RP}^m$). 参见陈维桓《微分流形初步》, 第 59 页; 陈省身《微分几何讲义》, 第 5 页.

$$\mathbb{RP}^m:=\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}/\sim$$

其中 $\sim$ 指等价关系, 其中 $u,v\in\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$:

$$u\sim v \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}^\times s.t.\ u=\lambda v \tag{1.1.1}$$

给出典型投影

[5] 但是如果要进一步证明其为微分流形, 计算量便变得较为庞大了, 这是可以考虑用 "球极投影". 这在一般的拓扑参考书上都见得到.

$$\begin{aligned}\pi\colon \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{RP}^m\\ v &\longmapsto \langle v\rangle\end{aligned}$$

在 $\mathbb{RP}^m$ 中取由 π 诱导的商拓扑. 那么我们可以断言 $\mathbb{RP}^m$ 是 *Hausdorff* 空间.

设 $\langle u\rangle,\langle v\rangle\in\mathbb{RP}^m$ 且 $\langle u\rangle\neq\langle v\rangle$, 意味着 $u,v\in\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$ 是不共线的非零向量. 自然可以取到开集 $V_u\ni u$ 和 $V_v\ni v$ 使得 π 限制在 V_u 和 V_v 上的像空间不相交, 即

$$\operatorname{im}(\pi|_{V_u})\cap\operatorname{im}(\pi|_{V_v})=\varnothing$$

这就给出了 $\mathbb{RP}^m$ 是 *Hausdorff* 空间的一种证明.

类似的如果将上述等价关系*1.1.1*记作 $\sim_{\langle\cdot\rangle}$, 再给出一个 $\mathbb{S}^m$ 上的等价关系 $\sim_{\mathbb{S}}$,

$$u\sim_{\mathbb{S}}v\iff u+v=0\in\mathbb{R}^{m+1}.$$

若 v 的 $\sim_{\mathbb{S}}$ 等价类记为 $[v]$, 那么有同胚

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}/\sim_{\langle\cdot\rangle}=\mathbb{RP}^m &\longrightarrow \mathbb{S}^m/\sim_{\mathbb{S}}\\ \langle v\rangle &\longmapsto [v]\end{aligned}$$

而 $\mathbb{S}^m/\sim_{\mathbb{S}}$ 是 *Hausdorff* 空间是显然 *(*参见拓扑学讲义*)* 的.

现在我们来证明这是一个流形.

$$U_\alpha:=\left\{\left\langle\left(x^1,\cdots,x^{m+1}\right)\right\rangle\colon \left(x^1,\cdots,x^{m+1}\right)\in\mathbb{R}^{m+1},x^\alpha\neq0\right\}$$

那么由于纤维

$$\pi^{-1}(U_\alpha)=\left\{\left(x^1,\cdots,x^{m+1}\right)\in\mathbb{R}^{m+1}\colon x^\alpha\neq0\right\}$$

给出了开集. 故 U_α 给出了 $\mathbb{RP}^m$ 上的开集, 且给出了开覆盖:

$$\bigcup_{\alpha=1}^{m+1}U_\alpha=\mathbb{RP}^m$$

例 1.1.13 (复射影空间 $\mathbb{CP}^m$)**.** 在 $\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}$ 中定义一个等价关系: 设 $u,v\in\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}$, 则 u 与 v 等价（记为 $u\sim v$）当且仅当存在非零复数 λ 使得 $u=\lambda v$. 定义 $\mathbb{CP}^m=(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\})/\sim$.

$$U_i:=\left\{x=\left[z^0,z^1,\cdots,z^m\right]\in\mathbb{CP}^m\colon \left(z^0,z^1,\cdots,z^m\right)\in\mathbb{C}^{m+1}\text{且}z^i\neq0\right\}$$

下面给出一个同胚

$$\begin{aligned}\varphi_i\colon U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^m\\ \left[z^0,z^1,\cdots,z^m\right] &\longmapsto \left(\frac{z^0}{z^i},\cdots,\frac{z^{i-1}}{z^i},\frac{z^{i+1}}{z^i},\cdots,\frac{z^m}{z^i}\right)\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{CP}^m$ 是拓扑流形.

注 1.1.14. *上述流形 $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{S}^m$, $\mathbb{RP}^m$, $\mathbb{CP}^m$ 都是光滑的，且解析的.(给出并证明转移坐标是光滑且解析的)*

定义 1.1.15 (光滑映射)**.** *设 M^m, N^n 是两个光滑流形 (resp. 复流形), 设 $f: M \to N$ 是从 M 到 N 的映射. 对 M 上一点 $p \in M$, 若存在 p 的局部坐标系 (U, φ) 和 $q = f(p) \in N$ 点的局部坐标系 (V, ψ), 使得*

$$\tilde{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

是光滑的 (resp. 解析的), 则称 f 在点 p 是光滑的 (resp. 解析的).

若 f 在 M 上处处光滑 (resp. 解析), 则称 f 是光滑映射 (resp. 解析映射).

$$\begin{array}{ccccccc} M^m & \supseteq & U & \xrightarrow{f} & V & \subseteq & N^n \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \\ & & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

注 1.1.16. *我们需要检查定义的合理性, 即需验证定义不依赖于局部坐标系的选择. 这个验证是简单的, 作光滑函数的复合即可.*

注 1.1.17. *我们把微分同胚 (解析同胚) 的对象等同, 特别是嵌入子流形.*

定义 1.1.18 (光滑同胚)**.** *设 M, N 是两个光滑流形 (resp. 复流形), 设 $f\colon M \to N$ 是双射, 若 f 和 f^{-1} 均光滑 (resp. 解析), 则称 M 和 N 光滑同胚 (resp. 解析同胚).*

例 1.1.19. 在 $\mathbb{R}$ 上定义坐标卡 $(\mathbb{R}, \varphi)$,$\varphi(x) = x$, 记这个坐标卡生成的光滑结构为 $\mathscr{D}_1$, 记光滑流形 $M_1 = (\mathbb{R}, \mathscr{D}_1)$.

在 $\mathbb{R}$ 上定义坐标卡 $(\mathbb{R}, \psi)$,$\psi(x) = x^3$, 记这个坐标卡生成的光滑结构为 $\mathscr{D}_2$, 记光滑流形 $M_2 = (\mathbb{R}, \mathscr{D}_2)$.

考虑映射 $f\colon M_1 \to M_2$, 使得 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\forall x \in M_1$, 则有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

这表明 f 是一个光滑同胚, 即 M_1 与 M_2 光滑同胚.

定义 1.1.20 (光滑函数)**.** *M 是光滑流形, 若 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 是光滑映射, 则称之为光滑函数. M 是复流形, 若 $f\colon M \to \mathbb{C}$ 是解析映射, 则称之为解析函数.*

定义 1.1.21 (积流形)**.** *拓扑积空间 $M \times N$ 上由 C^∞-相容的坐标覆盖*

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{\alpha \in A, \beta \in B}$$

*决定的光滑流形结构使 $M \times N$ 成为 $m + n$ 维光滑流形. 该流形称为 M 和 N 的***积流形***.*

注 1.1.22. 一些特例:

- 存在拓扑流形上没有微分结构 (M.A.Kervaire,1960);
- 同一拓扑流形上存在不同微分结构.
  $\mathbb{S}^7$ 上: J.Milnor,1956. $\mathbb{R}^4$ 上: S.K.Donaldson,1983;
- 若拓扑流形上存在 C^1 微分结构, 则存在 $C^k\,(k \geqslant 1)$, C^∞ 的微分结构.

1.2 (余) 切向量,(余) 切空间,(余) 切映射

本节主要用不依赖于坐标的观点定义 $\mathbb{R}^n$ 的切向量, 并推广到流形上.

1.2.1 $\mathbb{R}^n$ 的切向量

$$\mathbb{R}^n = \left\{\left(p^1, p^2, \cdots, p^n\right) : p^i \in \mathbb{R}\right\}, \quad p \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ 在 p 点处的切空间定义为:

$$T_{\mathbb{R}^n,p} := \{(p,v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

$T_{p,\mathbb{R}^n}$ 中元素 (p,v) 称为 p 点处的一个切向量.

注 1.2.1. 需要注意的是

1. $T_{p,\mathbb{R}^n}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 同构. 事实上有同构

$$\begin{aligned}\mathscr{A} : T_{\mathbb{R}^n,p} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \\ (p,v) &\longmapsto v\end{aligned}$$

2. 在同构 $\mathscr{A}$ 下, 称 $\{e_i = (0,\cdots,0,\underbrace{1}_{\text{第 } i \text{ 个}},0,\cdots,0) : i = 1,\cdots,n\}$ 为 $T_{\mathbb{R}^n,p}$ 的标准基. 但不同点处 e_i 的意义不同, 因为它们起点不同.

曲线的相切

设 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一条曲线, $(\mathbb{R}^n, \varphi; x^i)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个坐标. 称 $\boldsymbol{r}(t) := \varphi \circ \gamma(t)$ 为 γ 的一个**参数表示**.

命题 1.2.2. 能否称 $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 为 $\gamma(t)$ 在 $p_0 := \gamma(o)$ 处的切向量?

答案是否定的.

1. $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 依赖与参数 t 的选取:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0};$$

2. $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 依赖于 $\mathbb{R}^n$ 的坐标选取.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \cdot \left[\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{x_0}\right].$$

定义 1.2.3 (相切)**.** 设 $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 为两条光滑曲线. $(\mathbb{R}^n, \varphi; x^i)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个局部坐标, $\boldsymbol{r}_i := \varphi \circ \gamma_i$, $(i = 1, 2)$. 若 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 满足

1. $\boldsymbol{r}_1(0) = \boldsymbol{r}_2(0) = x_0$;

2. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$.

称曲线 γ_1 与 γ_2 **相切**于 $\varphi^{-1}(x_0)$.

注 1.2.4 (切向量). 对于上述定义需要注意

- “相切”与参数选取, 坐标变换无关;
- $\Gamma_p := \{\gamma \colon \gamma$ 是过 p 点的光滑曲线.$\}$.
  在 Γ_p 中定义等价关系:
  $$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1 \text{ 与 } \gamma_2 \text{ 在 } p \text{ 点相切}.$$
- $\Gamma_p/\sim$ 中的元素 $[\gamma]$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 在 p 点处的**一个切向量**, 记为 $X := [\gamma]$

方向导数

定义 1.2.5 (局部 C^∞). 设 $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$. 若存在 p 的领域 U 使得 $f|_U$ 上是 C^∞ 的, 称 f 在 p 点是**局部 C^∞ 的**.

记 $C_p^\infty := \{f \colon f$ 在 p 点局部 $C^\infty\}$.

注 1.2.6 (C_p^∞ 上的线性性质). 若 $f, g \in C_p^\infty$, 则 $f+g, fg \in C_p^\infty$.

定义 1.2.7 (方向导数). 设 $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma(t)$ 为过 $p = \gamma(o)$ 的光滑曲线, $f \in C_p^\infty$. 称 $\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{t}}\Big|_{t=0}$ 为 f 在 p 点**沿曲线 γ 的方向导数**.

注 1.2.8. 对上述定义需要注意:

1. 对 $\forall \widetilde{\gamma} \in [\gamma]$ 有
   $$\frac{\mathrm{d}f(\widetilde{\gamma}(t))}{\mathrm{t}}\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{t}}\Big|_{t=0}.$$
   因此, 可以定义
   $$X(f) = [\gamma](f) := \frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{t}}\Big|_{t=0}$$

2. $X = [\gamma]$ 满足
   - $\mathbb{R}$-线性:
     $$X(af+bg) = aX(f) + bX(g), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ f, g \in C_p^\infty;$$
   - *Leibniz* 规则:
     $$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

定义 1.2.9 (方向导子). 如果算子 $X\colon C_p^\infty \to \mathbb{R}$ 满足 $\mathbb{R}$-线性与 *Leibniz* 规则, 称 X 为p **点的一个方向导子**.

所有方向刀导子全体构成一个 $\mathbb{R}$-线性空间.

例 1.2.10 (偏导数算子). $(\mathbb{R}^n, \varphi; x^i)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的局部坐标, $p \in \mathbb{R}^n$. 定义

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\colon C_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \frac{\partial}{\partial x^i}(f) := \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_p$$

易知 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 p 点的一个方向导子, 也称为 *(在坐标 x 下的)* **偏导数算子**.

定理 1.2.11. $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \cdots, n\right\}$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 中 p 点方向导数空间的一组基.

证明. 分两部分, 线性组合与线性无关性.

1. 线性组合: 对任意的 $f \in C_p^\infty$, 存在 x_0 的领域 U 使得 $f\circ\varphi^{-1}|_U$ 上是 C^∞ 的. $\forall x \in U$, $x(t) := x_0 + t(x - x_0)$, 由微积分基本定理有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + f(x_0) \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x(t))(x^i - x_0^i)\mathrm{d}t + f(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x(x))\mathrm{d}t + f(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) f_i(x) + f(x_0), \quad f_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   对于任意一个方向导子 X, 有 $X(c) = 0$, c 是常数. 从而

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X(x^i - x_0^i) f_i(x_0) = \sum_{i=1^n} X(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \left(\sum_{i=1}^n X(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f.$$

   由 f 的任意性,

$$X = \sum_{i=1}^n X(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

2. 线性无关性: 若 $X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$, 那么对任意 $f \in C_p^\infty$, $X(f) = 0$.
   特别的, 取 $f = x^i \circ \varphi$, $X(f) = X(x^i) = a^i = 0$, 即 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \cdots, n\right\}$ 线性无关.

□

注 1.2.12. 对于上述定理，注意

1. 在基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 下，X 由其在坐标函数 x^i 上的作用唯一确定;
2. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的点 p，有两个线性空间：切向量空间方向导子空间．若给出对应

$$e_i = (0, \cdots, 0, \underset{\text{第 } i \text{ 个}}{1}, 0, \cdots, 0) \xleftrightarrow{1:1} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

这就给出了切向量与方向导子之间的一一对应．

3. 方向导子的定义没有用到局部坐标，只用到了局部 C^∞ 这一概念．因此，切向量的定义可以推广到微分流形上．

1.2.2 流形上 (余) 切向量 (resp. 空间, 映射)

定义 1.2.13 (光滑函数层)**.** M 是光滑流形，

$$\mathcal{A}_M^0 := \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}$$

注 1.2.14 (定义在点 p 的一个开领域上的光滑函数全体)**.**

$$C_p^\infty := \{f \in \mathcal{A}_M^0 : p \in V \overset{\text{开}}{\subseteq} M,\ f \in \mathcal{A}_V^0\}$$

定义 1.2.15 (函数芽 (germ))**.** $\forall x \in M$，给出 C_x^∞ 上的等价关系：

$$f \sim g \iff \exists x \in H \overset{\text{开}}{\subseteq} M, \text{ s.t. } f|_H = g|_H$$

等价类用 $[f]$ 表示．那么

$$\mathcal{A}_{M,x}^0 := C_x^\infty / \sim$$

称为光滑函数层在 $x \in M$ 处的**茎** *(stall)*．$\mathcal{A}_{M,x}^0$ 中的元素 $[f]$ 称为光滑函数层在 $x \in M$ 处的 C^∞-**函数芽** *(germ)*．

命题 1.2.16. $[f], [g] \in \mathcal{A}_{M,x}^0$，$\alpha \in \mathbb{R}$．给出 $\mathcal{A}_{M,x}^0$ 上的运算：

$$[f] + [g] = [f + g],\ [\alpha f] = \alpha[f].$$

那么 $\mathcal{A}_{M,x}^0$ 是一个无穷维实线性空间．

$$\mathbf{0}_{\mathcal{A}_{M,x}^0} = \left[\mathbf{0}_{C_x^\infty} : M \to \{0_\mathbb{R}\}\right],\ \mathbf{1}_{\mathcal{A}_{M,x}^0} = \left[\mathbf{1}_{C_x^\infty} : M \to \{1_\mathbb{R}\}\right]$$

回忆 1.2.17 (理想)**.** 设 R 是一个环，I 是 R 的一个非空子集．如果 I 满足以下两个条件，则称 I 是 R 的一个理想：

- 对于任意的 $a, b \in I$，都有 $a - b \in I$;
- 对于任意的 $r \in R$ 和 $a \in I$，都有 $ra \in I$ 且 $ar \in I$.

回忆 1.2.18 (Noetherian 环). 满足理想升链条件的环, 即对于该环的任意理想升链 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$, 总存在正整数 n, 使得当 $m \geqslant n$ 时, $I_m = I_n$.

这意味着 *Noetherian* 环中不会有无穷严格递增的理想序列, 也等价于每个理想都是有限生成 (f. g.) 的.

回忆 1.2.19 (极大理想). 设 R 是一个环, I 是 R 的一个理想, 若 $I \neq R$, 且不存在 R 的理想 J, 使得 $I \subsetneq J \subsetneq R$, 则称 I 是 R 的一个极大理想.

回忆 1.2.20 (局部环 (local ring)). 有且仅有一个极大理想的交换幺环. 在局部环 R 中, 这个唯一的极大理想通常记为 $\mathfrak{m}$, 且 $R \setminus \mathfrak{m}$ 中的元素都可逆.

给出一个等价定义: 在一个交换环 R 中, 如果所有非可逆元素构成一个理想, 那么这个环 R 就是局部环, 且这个由非可逆元素构成的理想就是该局部环唯一的极大理想.

回忆 1.2.21 (Noetherian 局部环 (Neotherian local ring)). 满足 *Noetherian* 环和局部环定义的环.

命题 1.2.22. *$\mathcal{A}^0_{M,x}$ 为 Noetherian 局部环.*

命题 1.2.23. *$\mathcal{A}^0_{M,x}$ 有唯一极大理想*

$$\mathfrak{m}_x = \{[f] \in \mathcal{A}^0_{M,x} \colon f(x) = 0\}$$

注 1.2.24. 从现在开始, 为了方便描述, 我们用 $U(x)$ 表示点 x 在流形 M 中的一个开领域.

证明. 若 $f(x) \neq 0$, 则 $\exists U(x)$ s. t. $f|_{U(x)} \neq 0$. 故 $[f]^{-1} = [1/f]$(此处开领域取到 $U(x)$). 利用1.2.20给予的局部环的等价定义, 立即得证. □

命题 1.2.25.

$$\mathfrak{m}_x^k := \left\{ \sum_{\text{有限线性组合}} f_1 \cdot \cdots \cdot f_k \colon f_i \in \mathfrak{m}_x \right\},$$

则

$$\mathcal{A}^0_{M,x} \supseteq \mathfrak{m}_x \supseteq \mathfrak{m}_x^2 \supseteq \cdots.$$

定义 1.2.26 (导数算子, 切空间, 切向量). x 为流形 M 上一点, 所谓 M 在点 x 的**切向量** *(tangent vector)* 是指映射

$$v_x \colon \mathcal{A}^0_{M,x} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto v_x(f)$$

满足

- *($\mathbb{R}$-线性)* 对 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{A}^0_{M,x}$, 有

$$v_x(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 v_x(f) + \lambda_2 v_x(g);$$

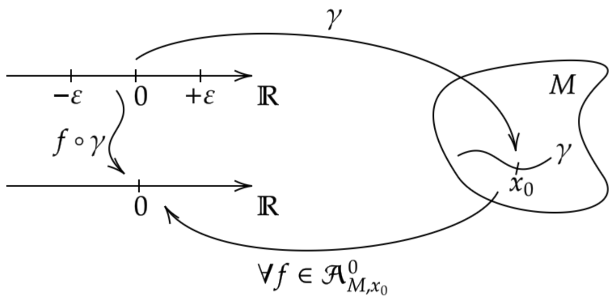

图 1.2: 切向量

- *(Leibniz 法则)* 对 $\forall f,g\in\mathcal{A}^0_{M,x}$, 有

$$v_x(f\cdot g)=f(x)\cdot v_x(g)+v_x(f)\cdot g(x).$$

注 1.2.27. 上述 $\mathcal{A}^0_{M,x}$ 可以换成 C^∞_x.

注 1.2.28. 对于上述定义, 还有一种写法:

$$v\colon \mathcal{A}^0_M \longrightarrow C^\infty$$
$$f \longmapsto v(f).$$

在这种写法下, 具体到点 x 处可以写成下述形式:

$$v|_x\colon \mathcal{A}^0_{M,x} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto v(f)|_x$$

这种意义下 $v_x=v|_x$. $v|_x$ 也称为 $\mathcal{A}^0_{M,x}$ 上**导数** *(derivation)*.

注 1.2.29. 切向量可以局部的看作方向导数算子. 黑话是称 v 为**导子**.

例 1.2.30. $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是光滑流形 M 中过 x_0 的一条光滑曲线, $\gamma(0)=x_0$, 则曲线 γ 确定了一个映射 $v|_{x_0}\colon\mathcal{A}^0_{M,x_0}\to\mathbb{R}$, 定义

$$v(f)|_{x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0},\ \forall f\in\mathcal{A}^0_{M,x_0},$$

其中 t 为曲线 γ 的自变量 (参数), $-\varepsilon<t<\varepsilon$. 如图*1.2*给出直观的理解.

命题 1.2.31.

$$\mathrm{Der}(\mathcal{A}^0_{M,x}):=\{M\text{ 在点 }x\text{ 的切向量 }v_x\}$$

在 $\forall v_x,w_x\in\mathrm{Der}(\mathcal{A}^0_{M,x})$ 上定义

- $(v_x+w_x)(f)=v_x(f)+w_x(f)$;

- $(\lambda v_x)(f) = \lambda v_x(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

于是 $\mathrm{Der}(\mathcal{A}^0_{M,x})$ 在上述运算下构成 $\mathbb{R}$-线性空间. 记作 M 上 x 处的**切空间** *(tangent space)*, 用记号 $T_{M,x}$ 来表示.

定义 1.2.32 (切丛)**.** 称

$$T_M := \bigcup_{x\in M} T_{M,x}$$

为光滑流形 M 上的**切丛** *(tangent bundle)*. 其上元素在每一点 x 处为 v_x(或记 $v|_x$), 且光滑依赖于 x, 称为 M 上的**切向量场** *(tangent vector field)*.

命题 1.2.33. 若 $v_x \in T_{M,x}$, 则 $v_x(\boldsymbol{c}) = 0$.

证明. $v_x(\boldsymbol{c}) = v_x(c\cdot\mathbf{1}) = cv_x(\mathbf{1})$. 又由于 $v_x(\mathbf{1}) = v_x(\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}) = \mathbf{1}(x)v_x(\mathbf{1}) + v_x(\mathbf{1})\mathbf{1}(x) = 2v_x(\mathbf{1})$, 这说明了 $v_x(\mathbf{1}) = 0$. 那么 $v_x(\boldsymbol{c}) = 0$ 是显然的. □

引理 1.2.34. 设 $x_0 \in M$ 为流形上一点.

- $\forall f \in \mathcal{A}^0_{M,x_0}$ 有 $v(f - f(x_0))|_{x_0} = v(f)|_{x_0}$ 且 $f - f(x_0) \in \mathfrak{m}_{x_0}$;
- $\forall f_1 f_2 \in \mathfrak{m}^2_{x_0}$ 有 $v_{x_0}(f_1 f_2) = 0$.

证明. $\forall f \in \mathcal{A}^0_{M,x_0}$, 考察 $f - f(x_0)$ ($f(x_0)$ 可以视作 $\mathcal{A}^0_{M,x_0}$ 上的常值函数).

$$v_{x_0}(f - f(x_0)) = v_{x_0}(f) - v_{x_0}(f(x_0)) = v_{x_0}(f)$$

对于第二部分

$$(f - f(x_0))(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

故 $f - f(x_0) \in \mathfrak{m}_{x_0}$.

对 $\forall f_1 f_2 \in \mathfrak{m}^2_{x_0}$, 有

$$v_{x_0}(f_1 f_2) = [v(f_1)f_2(x_0) + f_1(x_0)v(f_2)]|_{x_0} = 0.$$

□

引理 1.2.35.

$$T^\star_{M,x_0} \simeq \mathfrak{m}_{x_0} / \mathfrak{m}^2_{x_0} .$$

证明. $\forall f \in \mathcal{A}^0_{M,x_0}$ 在 x_0 处使用带有 Lagrange 余项的 Taylor 展开.

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_0} \left(x^i - x^i_0\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\xi} \left(x^i - x^i_0\right)\left(x^j - x^j_0\right).$$

其中 ξ 是介于 x 和 x_0 之间的一个数.

若 $f \in \mathfrak{m}_{x_0}$, 则 $f(x_0)=0$. 此时将 $v_x \in T_{M,x_0}$ 作用在 f 上, 注意到

$$\begin{aligned}
&v_{x_0}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\xi}\left(x^i-x_0^i\right)\left(x^j-x_0^j\right)\right]\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\xi}\left[v_{x_0}\left(x^i-x_0^i\right)\left(x^j-x_0^j\right)+\left(x^i-x_0^i\right)v_{x_0}\left(x^j-x_0^j\right)\right]\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\xi}\left[0\cdot\left(x^j-x_0^j\right)+\left(x^i-x_0^i\right)\cdot 0\right]=0
\end{aligned}$$

这样一来

$$v_{x_0}(f)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_0}\cdot v_{x_0}\left(x^i-x_0^i\right)\right]$$

首先应当明确 $x^i-x_0^i \in \mathfrak{m}_{x_0}$. 因而显然

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\xi}\left(x^i-x_0^i\right)\left(x^j-x_0^j\right)\in \mathfrak{m}_{x_0}^2$$

设

$$\begin{aligned}
g(x)=&\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_0}\left(x^i-x_0^i\right)\\
h(x)=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{\xi}\left(x^i-x_0^i\right)\left(x^j-x_0^j\right)
\end{aligned}$$

那么

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

且 $h(x)\in\mathfrak{m}_{x_0}^2$. 这样一来 $f\sim_{\mathfrak{m}_{x_0}^2} g$, 记等价类为 $[f]=[g]$. 从而 $\forall f\in\mathfrak{m}_{x_0}^2$ 的等价类都可以表示为

$$\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_0}\left[x^i-x_0^i\right]$$

从而令 $x\to x_0$

$$\mathfrak{m}_{x_0}\Big/\sim_{\mathfrak{m}_{x_0}^2}=\mathfrak{m}_{x_0}\big/\mathfrak{m}_{x_0}^2=\left\langle\left[x^i-x_0^i\right]_{i=1}^{n}\right\rangle_{\mathbb{R}}\simeq\left\langle\left[\left.\mathrm{d}x^i\right|_{x_0}\right]_{i=1}^{n}\right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

下面我们来证明 $\left\{\left[\left.\mathrm{d}x^i\right|_{x_0}\right]\right\}_{i=1}^{n}$ 是 $T_{M,x_0}^{\star}=\operatorname{Hom}\left(T_{M,x_0},\mathbb{R}\right)$ 的一组基.

先回顾一些事实, x^i 不仅可以作为一个坐标分量 (实数), 更是一个函数, 选取局部坐标卡 $(U,\varphi=(x^1,\cdots,x^n))$

$$x^i: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto x^i(p)$$

这样定义

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^i\colon T_{M,x_0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_{x_0} &\longmapsto v_{x_0}(x^i) = \sum_{j=1}^n v_{x_0}^j \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right|_{x_0} = \sum_{j=1}^n v_{x_0}^j \delta_i^j = v_{x_0}^i. \end{aligned}$$

这样简明的证明了

$$\mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2 = \left\langle [x^i - x_0^i]_{i=1}^n \right\rangle_{\mathbb{R}} \simeq \left\langle \left[\mathrm{d}x^i\big|_{x_0} \right]_{i=1}^n \right\rangle_{\mathbb{R}} = T_{M,x_0}^\star.$$

□

定义 1.2.36. 称上述空间 $T_{M,x_0}^\star$ 为流形 M 上 x_0 处**余切空间** *(cotangent space)*.

定义 1.2.37. 自然可以定义**余切丛** *(cotangent bundle)*:

$$T_M^\star := \bigsqcup_{x\in M} T_{M,x}^\star.$$

命题 1.2.38. *n 维流形在点 x 处的 (余) 切空间都是 n 维 $\mathbb{R}$-向量空间.*

考虑 $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_{M,x_0}$, 则

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathrm{d}x^j\right)\right| = \delta_i^j.$$

那么 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1}^n$ 为 T_{M,x_0} 的一组基, 即

$$T_{M,x_0} = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{x_0}, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{x_0} \right\rangle.$$

对任意 $v_{x_0} \in T_{M,x_0}$ 有

$$v_{x_0} = \sum_{i=1}^n v_{x_0}^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}$$

另取坐标 $\{y^i\}_{i=1}^n$(即是由另一个坐标卡的坐标映射又到处的坐标 (映射)), 则对于函数 $f \in \mathcal{A}_M^0$ 在新旧坐标基的作用下有关系:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y^i}\right|_{x_0} = \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_{x_0} \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{x_0}$$

注 1.2.39. 矩阵形式为分析学中所提及的 *Jacobi* 矩阵.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

命题 1.2.40. 在 $T^{\star}_{M,x_0}$ 上，任意函数 f 有

$$\mathrm{d}f|_{x_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\bigg|_{x_0}$$

另取基 $\{y^i\}_{i=1}^n$，有

$$\mathrm{d}y^i\big|_{x_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\bigg|_{x_0}$$

对应矩阵为

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}y^1 & \cdots & \mathrm{d}y^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{d}x^1 & \cdots & \mathrm{d}x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

命题 1.2.41. (1.2.1)和(1.2.2)中的转换矩阵是互逆的.

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix} = \mathbf{1}_{n\times n} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

我们现在讨论两个 n 维流形 M, N. 给出一个光滑映射:

$$\begin{aligned}\varphi\colon M &\longrightarrow N\\ x_0 &\longmapsto \varphi(x_0)\end{aligned}$$

如果下图交换

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & N \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

那么我们可以定义由光滑映射 $\varphi\colon M \to N$ 在点 x_0 处诱导的映射.

定义 1.2.42 (切映射). 光滑映射 φ 在点 x_0 所诱导的**切映射** *(tangent mapping)* 是指

$$\begin{aligned}\varphi_{\star,x_0}\colon T_{M,x_0} &\longrightarrow T_{N,\varphi(x_0)}\\ v_{x_0} = \sum_{j=1}^{m} v^j_{x_0}\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{x_0} &\longmapsto \varphi_{\star,x_0}(v_{x_0}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} v^j_{x_0}\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\bigg|_{x_0}\right)\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{\varphi(x_0)}.\end{aligned}$$

类似的我们还可以定义余切空间之间所谓的“微分的拉回”.

定义 1.2.43 (拉回映射). 由 φ 在点 x_0 诱导, M 到 N 的**拉回映射** *(pullback)* 是指

$$\begin{aligned}\varphi^\star_{x_0}\colon T^\star_{N,\varphi(x_0)} &\longrightarrow T^\star_{M,x_0}\\ \mathrm{d}f|_{\varphi(x_0)} &\longmapsto \mathrm{d}(f\circ\varphi)|_{x_0} = \mathrm{d}f|_{x_0}\end{aligned}$$

假定 M 上 x_0 处坐标 $\{x^i\}_{i=1}^n$; N 上 $\varphi(x_0)$ 处坐标 $\{y^j\}_{j=1}^n$. 那么

$$\mathrm{d}f|_{x_0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j\bigg|_{\varphi(x_0)}.$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi^\star_{x_0}\left(\mathrm{d}f|_{\varphi(x_0)}\right) =& \varphi^\star_{x_0}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j\bigg|_{\varphi(x_0)}\right) = \sum_{j=1}^n \varphi^\star_{x_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j\bigg|_{\varphi(x_0)}\right)\\ =& \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}\bigg|_{\varphi(x_0)} \varphi^\star_{x_0}\left(\mathrm{d}y^j|_{\varphi(x_0)}\right)\\ =& \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}\bigg|_{\varphi(x_0)} \left[\mathrm{d}\left(y^j\circ\varphi\right)\big|_{x_0}\right]\\ =& \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\bigg|_{\varphi(x_0)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \mathrm{d}x^i\big|_{x_0}\right)\\ =& \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}\bigg|_{\varphi(x_0)} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \mathrm{d}x^i\big|_{x_0}\\ =& \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \mathrm{d}x^i\big|_{x_0} = \mathrm{d}f|_{x_0}\end{aligned}$$

注 1.2.44. *微分 1-形式 (全微分) 在坐标变换下不变, 即*

$$\int_M \mathrm{d}f = \underbrace{\int_M \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i}_{(M,\varphi=(x^1,\cdots,x^n))} = \underbrace{\int_M \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j}_{(M,\psi=(y^1,\cdots,y^n))}$$

命题 1.2.45. *拉回与推前互为对偶, 即,*

$$(f_{\star,p}(v_p))(\mathrm{d}g|_p) = (v_p)(f^\star_p(\mathrm{d}g|_p)) = v_p(\mathrm{d}(g\circ f)|_p).$$

定理 1.2.46. *设 $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ 分别是光滑流形 X, Y, Z 之间的光滑映射. 则复合映射 $g\circ f\colon X\to Z$ 诱导的切映射和余切满足:*

$$\begin{aligned}(g\circ f)_{\star,p} =& g_{\star,f(p)}\circ f_{\star,p}\colon T_{X,p}\longrightarrow T_{Z,g\circ f(p)}, \forall p\in X;\\ (g\circ f)^\star_p =& f^\star_p\circ g^\star_p\colon T^\star_{Z,g\circ f(p)}\longrightarrow T^\star_{X,p}, \forall p\in X.\end{aligned}$$

考虑映射 σ 将直线段映为流形 M 上的光滑曲线, 即

$$\begin{aligned} \sigma\colon (a,b) &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \sigma(t). \end{aligned}$$

考虑在 t_o 处由 σ 诱导的切映射:

$$\begin{aligned} \sigma_{\star,t_0}\colon T_{(a,b),t_0} &\longrightarrow T_{M,\sigma(t_0)} \\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} &\longmapsto \sigma_{\star,t_0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right). \end{aligned}$$

其中

$$\sigma_{\star,t_0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\sigma(t_0)}.$$

1.3　子流形

1.3.1　浸入, 嵌入, 子流形

定义 1.3.1. 给出一个光滑映射 $\varphi\colon M^m \to N^n, (m \leqslant n)$.

1. 若 φ 是单的, 称 (M, φ) 为 N 的**子流形** *(submanifold)*.
2. $\forall p \in M$, $\varphi_{\star,p}$ 非奇异[6], 即

$$\varphi_{\star,p}\colon T_{M,p} \longrightarrow T_{N,\varphi(p)}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x^m} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^m} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

其中

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{m\times n} = m.$$

那么称 φ 为光滑流形 M 在 N 中的**浸入**[7] *(immersion)*. 如果 φ 还是单的, 那么称 (φ, M) 为 N 的一个 m 维光滑浸入子流形.

3. 若 φ 是同胚 *(homeomorphism)*, 则 $\varphi\colon M \to N$ 称为**嵌入** *(embedding)*. 同样的, 如果 φ 还是单的 (即 (M, φ) 是 N 的子流形), 那么称 (M, φ) 是 N 的嵌入子流形.
4. **光滑同胚**. 见定义1.1.18.

例 1.3.2. 图1.3给出三个简单的例子.

其中 φ_1 是一个浸入, 但 (φ_1, M_1) 构不成一个子流形; φ_2 不是一个嵌入, 但 (φ_2, M_2) 构成一个子流形; φ_3 则给出了一个嵌入.

1.3.2　反函数定理

定理 1.3.3 ((Euclid 版本) 反函数定理)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开集, 给出一个光滑映射:

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \triangleq (x^1, \cdots, x^n) \longmapsto f\left(f^1(x), \cdots, f^n(n)\right)$$

[6] 代数上就是指 $\ker(\varphi_{\star,p}) = \{0\}$. 即 $\varphi_{\star,p}$ 是单的.

[7] 如果 $\varphi_{\star,p}$ 是满的, 称浸没.

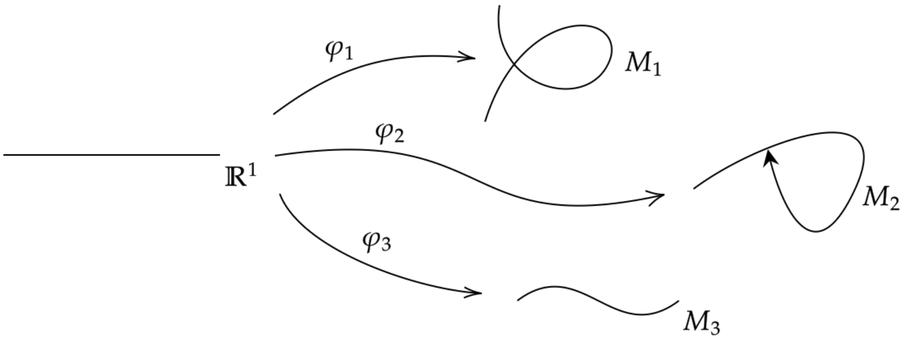

图 1.3: 嵌入, 浸入, 子流形.

若 *Jacobi* 阵 $\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_{n\times n}$ 在 p 处非奇异, 则存在 p 的一个开领域 $U(p)$ 满足 $f|_{U(p)}$ 是一个光滑同胚.

下面阐述一个现象:

命题 1.3.4 (流形上的反函数定理). *若 $\varphi\colon M \to N$ 是光滑同胚, 则对于任何 $p \in M$, 有 $\varphi_{\star,p}$ 是一个同构; 反之, 若存在 $p_0 \in M$, 使得 $\varphi_{\star,p_0}$ 是一个同构, 那么 φ 在 p_0 的某个小领域 (存在一个领域) 上是光滑同胚.*

我们证明后半部份:

证明. 由于同构

$$\varphi_{\star,p}\colon T_{M,p} \xrightarrow{\sim} T_{N,\varphi(p)}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \longmapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\varphi(p)}$$

那么其 Jacobi 阵是可逆的, 即

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n)$$

给出下图

$$\begin{tikzcd} U(p) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "x"] & \varphi(U(p)) \arrow[d, "y"] \\ x(U(p)) \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[r, "y\circ\varphi\circ x^{-1}"] & f(\varphi(U(p))) \subseteq \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

由反函数定理1.3.3有

$$y\circ\varphi\circ x^{-1}\text{为光滑同胚.}$$

□

推论 1.3.5. 若 $\dim_{\mathbb{R}} M = m$, $\{y^i\}_{i=1}^m$ 为光滑函数, 且 $\{\mathrm{d}y^i\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关的, 那么 $\{y^i\}_{i=1}^m$ 为 p 处的光滑坐标.

证明. 定义

$$\begin{aligned} y\colon U(p) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ q &\longmapsto (y^1(q),\cdots,y^n(q)) \end{aligned}$$

选取一组光滑坐标 $\{x^i\}_{i=1}^n$, 则

$$\begin{aligned} y\circ x^{-1}\colon x(U(p)) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1(q),\cdots,x^n(q)) &\longmapsto (y^1(x(q)),\cdots,y^n(x(q))) \end{aligned}$$

其中

$$\big(y^1(x(q)),\cdots,y^n(x(q))\big) = \big(y^1((x^1(q),\cdots,x^n(q))),\cdots,y^n((x^1(q),\cdots,x^n(q)))\big)$$

由于 $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{n\times n}$ 在 p 处可逆, 故由反函数定理1.3.3, 有 $y\circ x^{-1}$ 是光滑同胚, 有由于 x 是一个光滑同胚, 那么 y 光滑同胚, 即光滑坐标. □

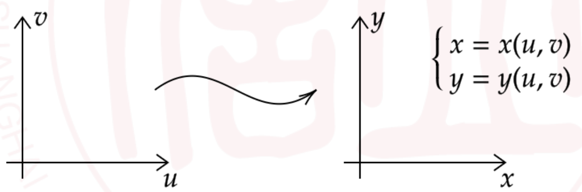

图 1.4: 坐标变换

例 1.3.6. 对于坐标变换, 图*1.4*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

有

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = (x_u\mathrm{d}u + x_v\mathrm{d}v)\wedge(y_u\mathrm{d}u + y_v\mathrm{d}v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

又因为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}u & \mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$$

因此 $\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$ 线性无关, 从而 $\{x,y\}$ 为坐标.

推论 1.3.7. 若 $\{\mathrm{d}y^i\}_{i=1}^m$ 在 p 处 $\mathbb{R}$-线性无关, 那么 $\{y^i\}_{i=1}^m$ 为坐标的一部分.

证明. 选取 p 处坐标 $\left\{\mathrm{d}x^i\right\}_{i=1}^n$, 由于 $\left\{\mathrm{d}y^i\right\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关的.

那么可以从原坐标 $\left\{\mathrm{d}x^i\right\}_{i=1}^n$ 中选取 $\left\{\mathrm{d}x^k\right\}_{k=m+1}^n$, 与 $\left\{\mathrm{d}y^i\right\}_{i=1}^m$ 组合形成

$$\left\{y^1,\cdots,y^m,x^{m+1},\cdots,x^n\right\}.$$

从而 $\left\{y^i\right\}_{i=1}^m$ 为坐标的一部分得证. □

推论 1.3.8. *$\varphi\colon M^m\to N^n$ 是光滑映射, 且 $\varphi_{\star,p}$ 是满射, 若 $\left\{\mathrm{d}y^i\right\}_{i=1}^m$ 是 $\varphi(p)$ 处的坐标, 那么 $\left\{\mathrm{d}y^i\circ\varphi\right\}_{i=1}^m$ 为 M 上坐标的一部份.*

证明. 由于 $\varphi_{\star,p}\colon T_{M,p}\twoheadrightarrow T_{N,\varphi(p)}$ 是一个满射, 即对任意 $w\in T_{N,\varphi(p)}$, 都存在 $v\in T_{M,p}$ 使得 $\varphi_{\star,p}(v)=w$.

考虑 $\varphi_p^\star\colon T_{N,\varphi(p)}^\star\to T_{M,p}^\star$.

若 $w^\star\in T_{N,\varphi(p)}$, 满足 $\varphi_p^\star\left(w^\star\right)=0\in T_{M,p}^\star$. 那么对于任意的 $w\in T_{N,\varphi(p)}$, 有

$$w^\star(w)=w^\star\left(\varphi_{\star,p}(v)\right)=\varphi_p^\star\left(w^\star\right)(v)=0(v)=0$$

所以 $w^\star=0$, 即 $\varphi_p^\star$ 是一个单射.

若 $\left\{y^i\right\}_{i=1}^m$ 是坐标, 那么 $\left\{\mathrm{d}y^i\right\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}$-线性无关的. 从而

$$\left\{\varphi_p^\star\left(\mathrm{d}y^i\right)\right\}=\left\{\mathrm{d}\left(y^i\circ\varphi\right)\right\}\text{是 }\mathbb{R}\text{-线性无关的.}$$

由推论1.3.7, 有 $\left\{\mathrm{d}y^i\circ\varphi\right\}_{i=1}^m$ 为 M 上坐标的一部份得证. □

推论 1.3.9. *若 $\left\{\mathrm{d}y^i\right\}_{i=1}^m$ 为 $T_{M,p}^\star$ 的一组基, 那么 $\left\{y^i\right\}_{i=1}^m$ 的一部份为坐标.*

证明. $\left\{y^i\right\}_{i=1}^m$ 不一定 $\mathbb{R}$-线性无关. □

引理 1.3.10. *若 $\varphi\colon M\to N$ 光滑, $\varphi_{\star,p}$ 是单的, 那么 $\varphi_p^\star$ 是满的.*

引理的证明是作业, 下给出读者自己的证明

证明. $\varphi_p^\star=\varphi_{\star,p}^\top$, 现只需证明: 若 $f\colon V^n\to W^m$ 是单的, 那么 $f^\top\colon W^\star\to V^\star$ 是满的, 即 $\operatorname{im}(f^\top)=V^\star$.

f 是单的, 则 $\ker(f)=\{0\}$, 从而

$$\dim_{\mathbb{R}}V=\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{kef}(f))+\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(f))=\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(f)).$$

考察核 $\ker(f^\top)$.

$$w\in\operatorname{kef}(f^\top)\iff\forall v\in f\ \text{ s. t. } f^\top(w)(v)=0$$

从而 $f^\top(w)(v)=w(f(v))=0\Longrightarrow w|_{\mathrm{im(f)}}=0$

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{im}(f))=\left\{w\in W^\star\colon w|_{\operatorname{im}(f)=0}\right\}$$

那么

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f^{\top})) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ann}(\mathrm{im}(f))) = \dim_{\mathbb{R}}(W^{\star}) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(f)) = m - n.$$

由于

$$\dim_{\mathbb{R}}(W^{\star}) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(f^{\top})) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(f^{\top}))$$

从而

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(f)) = \dim_{\mathbb{R}}(V^{\star}) \Longrightarrow \mathrm{im}(f^{\top}) = V^{\star} \Longrightarrow f^{\top} \colon W^{\star} \twoheadrightarrow V^{\star}.$$

□

推论 1.3.11. *若 $\varphi\colon M \to N$ 光滑, $\varphi_{\star,p}\colon T_{M,p} \hookrightarrow T_{N,\varphi(p)}$ 是单射, $\left\{y^i\right\}_{i=1}^n$ 是 $\varphi(p) \in N$ 处坐标, 则 $\left\{y^i \circ \varphi\right\}_{i=1}^n$ 为 $p \in M$ 处坐标的一部分.*

证明. $\varphi_{\star,p}$ 是单的, 则引理 1.3.10 告诉我们 $\varphi_p^{\star}$ 是满的.

由于 $\left\{y^i\right\}_{i=1}^n$ 是 $\varphi(p) \in N$ 处坐标, 则 $\left\{\mathrm{d}y^i\right\}_{i=1}^n$ 是 $T^{\star}_{N,\varphi(p)}$ 的一组基.

从而 $\left\{\varphi_p^{\star}\left(\mathrm{d}y^i\right)\right\} = \left\{\mathrm{d}\left(y^i \circ \varphi\right)\right\}$ 为 $p \in M$ 处坐标的一部分. □

定理 1.3.12. *$\psi\colon N \to M$ 是光滑映射, (P, φ) 是 M 的子流形, 满足*[8]

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\psi_0"'] & M \arrow[dr, "x"] & \\
P \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[dr, "\tau"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi"] \\
& \mathbb{R}^p &
\end{tikzcd}$$

则若 φ 是单的 (浸入), 那么 ψ_0 存在且唯一; 若 $\exists \psi_0$ 连续, 则 ψ_0 光滑.

"若 φ 是单的 (浸入), 那么 ψ_0 存在且唯一" 这部分的内容证明是显然的, 现证第二部分.

证明. 假设 ψ_0 连续, 只要证任意 P 上的光滑坐标 τ 有 $\tau \circ \psi_0$ 是 N 上光滑坐标.

对任意的 $p \in P$, 令 (V, x) 为 $\varphi(p)$, 那么存在投射 π, 使得 $\tau = \pi \circ x \circ \varphi$, 则由图直接有

$$\tau \circ \psi_0|_{\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}(V)} = \pi \circ x|_V$$

从而得证 $\tau \circ \psi_0$ 光滑. □

用一句话来总结: 假若 (N, φ) 是 M 的子流形, 即

1. $\varphi(N) \subseteq M$ 为 M 的子空间;

2. $\varphi\colon N \to M$ 诱导 N 上的几何结构.

[8]这里笔者直接把证明所需一同画了出来.

特别的, 若 N 上结构由 M 上结构唯一确定, 那么 $\varphi\colon N\to M$ 是一个嵌入.

定义 1.3.13 (叶). (U,x) 为 M^m 上的一个坐标卡, 定义

$$S := \left\{p\in U\colon x^i(p)=a^i \text{为常数}, \forall i=n+1,\cdots,m\right\}$$

则称 S 为 M 中 p 处的**叶** *(slice)*.

这里 "p 处的" 指 (U,x) 是 p 处的坐标卡.

命题 1.3.14. 若 $\psi\colon M\to N$ 是浸入, 则对任意 $p\in M$, 都存在坐标卡 $(U(\psi(p)),y)$ 使得 $\psi|_{U(p)}$ 是单的, 且 $\psi(U(p))$ 为 N 中 $\psi(p)$ 处的叶.

证明. 定义 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 满足

$$x^i=\begin{cases} y^i, & i=1,\cdots,m;\\ y^i-y^i\circ\psi\circ(\pi_m\circ y\circ\psi)^{-1}\circ(\pi_m\circ y), & i=m+1,\cdots,n.\end{cases}$$

即

$$\mathrm{d}x^i=\begin{cases}\mathrm{d}y^i, & i=1,\cdots,m;\\ \mathrm{d}y^i-\sum\limits_{j=1}^m a_j^i\mathrm{d}y^j, & i=m+1,\cdots,n.\end{cases}$$

这表明 $\{\mathrm{d}x^i\}_{i=1}^n$ 构成了 $T^\star_{N,\psi(p)}$ 的一组基, 同时说明了 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 是 $\psi(p)$ 处的坐标. 那么

$$\begin{aligned}\psi|_{U(p)}\colon U(p) &\longrightarrow \psi(U(p))\\ (x^1,\cdots,x^m) &\longmapsto (x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)\end{aligned}$$

从而得证 $\psi(U(p))$ 是 N 中 $\psi(p)$ 处叶. 下图道尽一切.

$$\begin{tikzcd} M^m \arrow[r, "\text{浸入}\psi"] \arrow[dr, "\pi_m\circ y\circ\psi"'] & N^n \arrow[d, "y"] \\ & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m} \arrow[loop below, "\pi_m"] \end{tikzcd}$$

$\square$

1.3.3　隐函数定理

定理 1.3.15 ((Euclid 空间版本) 隐函数定理). 设 $U\subseteq\mathbb{R}^{n-m}\times\mathbb{R}^m$, 给出一个光滑映射 $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ 满足存在 $(x_0,y_0)\in U$, 其中 $x_0=\left(x_0^1,\cdots,x_0^{n-m}\right)$, $y_0=(y_0^1,\cdots y_0^m)$ 使得

1. $f(x_0,y_0)=0$;
2. $\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\right)_{m\times m}$ 在 (x_0,y_0) 处不为 0.

则存在光滑映射

$$g\colon U(x_0) \longrightarrow U(y_0)$$
$$x = (x^1, \cdots, x^{n-m}) \longmapsto g(x)$$

满足 $f(x, y) = 0$, 即 $y = g(x)$.

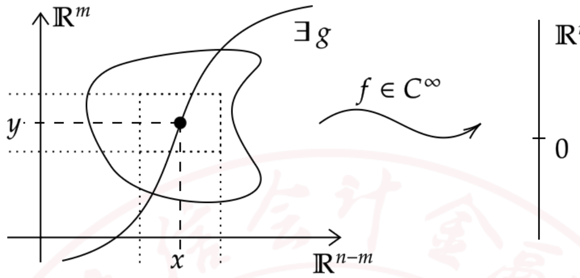

图 1.5: 隐函数定理

定理 1.3.16. 给出光滑映射 $\psi\colon M^m \to N^n$, 对于 $q \in N$, 记 P 为 q 处纤维 $P = \psi^{-1}(q)$.

若对任意 $p \in P \subseteq M$, 都有 $\psi_{\star,p}$ 是满的, 那么 (P, i) 是 M 的嵌入子流形. 这里 i "原汁原味" 地将 P 打入 M.

证明. 给出 q 处坐标 $\{x^i\}_{i=1}^n$. 由于 $\psi_{\star,p}\colon T_{M,p} \twoheadrightarrow T_{N,\psi(p)}$ 是一个满射, 由推论1.3.8直接有 $\{x^i \circ \psi\}_{i=1}^n$ 为 M 上 p 处坐标的一部分, 我们将其补全为 p 处坐标

$$\{x^1 \circ \psi, \cdots, x^n \circ \psi, y^{n+1}, \cdots, y^m\}$$

那么纤维 $P = \psi^{-1}(q)$ 附带有局部坐标 $(0, \cdots, 0, y^{n+1}, \cdots, y^m)$ 为 M 在 p 处的叶. 从而 (P, i) 为 M 上的嵌入子流形, $\dim_{\mathbb{R}} P = m - n$. □

例 1.3.17. 光滑映射

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$$
$$(x^1, \cdots, x^n) \longmapsto \textstyle\sum_i (x^i)^2$$

考察其诱导的切映射:

$$f_{\star,x}\colon T_{\mathbb{R}^n,x} \simeq \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\mathbb{R}^1,f(x)} \simeq \mathbb{R}^1$$
$$\textstyle\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \longmapsto \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial f} = \sum_i 2x^i v^i \frac{\partial}{\partial f} \neq 0$$

由于 $T_{\mathbb{R}^1,f(x)} \simeq \mathbb{R}^1$ 维数是 1. 因此 $f_{\star,x}$ 是满的. 那么我们给定

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

$$(x^1,\cdots,x^n) \longmapsto 1=\textstyle\sum_i (x^i)^2$$

从而纤维 $f^{-1}(1)$ 是球面 $\mathbb{S}^{n-1}$, i 为 "原汁原味" 的嵌入 $i\colon \mathbb{S}^{n-1}\hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S}^{n-1} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^1 = n-1$.

映射 f 将 $\mathbb{R}^n$ 压缩到一维实数轴上, 但通过纤维 $f^{-1}(1)$ 恢复出高维结构 S^{n-1}.

例 1.3.18.

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &:= \{A\in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\ \mathrm{rk}(A)=n\}\\ \mathrm{S}(n) &:= \{A\in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\ A\ \text{对称}\}\\ \mathrm{O}(n) &:= \left\{A\in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\ AA^\top = I_n\right\}\end{aligned}$$

给出

$$\psi\colon\ \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{S}(n)$$

$$A \longmapsto AA^\top$$

存在简单的单射

$$i\colon\ \mathrm{O}(n)\hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

我们定义一个右作用 $(\sigma\in \mathrm{O}(n))$

$$r_\sigma\colon\ \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto A\sigma$$

其逆为

$$(r_\sigma)^{-1} = r_{\sigma^{-1}}\colon\ \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto A\sigma^{-1}$$

由于矩阵乘法光滑, 因此 r_σ 与其逆均光滑, 那么 r_σ 是一个光滑同胚, 我们注意到 $\psi\circ r_\sigma=\psi$. 因此有

$$\psi_\star = (\psi\circ r_\sigma)_\star = \psi_\star\circ(r_\sigma)_\star$$

又由于微分同胚诱导的切映射具有同构性, 即 $(r_\sigma)_\star$ 同构, 则有

$$\psi_{\star,I}\text{满的} \iff \psi_{\star,\sigma}\text{满的}.$$

理解这点的关键在于在 I 处有

$$\psi_{\star,r_\sigma(I)}\circ(r_\sigma)_{\star,I} = \psi_{\star,\sigma}\circ(r_\sigma)_{\star,I} = \psi_{\star,I}.$$

把 ψ 看作 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上的变换, 即

$$\psi\colon\ \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto AA^{\top}$$

现在来看切映射，记 $X_p^q=(AA^{\top})_p^q=\sum_{s=1}^n A_s^q A_p^s$，其中 $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. 此处上下标 p,q 为行列指标.

$$\psi_{\star,I}\colon T_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),I}\simeq\mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow T_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),I}\simeq\mathbb{R}^{n^2}$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial A_i^j}\right|_I \longmapsto \sum_{p,q=1}^n \left.\frac{\partial X_p^q}{\partial A_i^j}\right|_I \left.\frac{\partial}{\partial X_p^q}\right|_I = 2\left.\frac{\partial}{\partial X_i^j}\right|_I$$

先来算

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial X_p^q}{\partial A_i^j}\right|_I &= \left.\frac{\partial \sum\limits_{s=1}^n A_s^q A_p^s}{\partial A_i^j}\right|_I = \sum_{s=1}^n\left.\left(\frac{\partial A_s^q}{\partial A_i^j}A_p^s + A_s^q\frac{\partial A_p^s}{\partial A_i^j}\right)\right|_I\\
&=\sum_{s=1}^n\left.\left(\delta_j^q\delta_s^i A_p^s + A_s^q\delta_j^s\delta_p^i\right)\right|_I = \sum_{s=1}^n\left(\delta_i^s\delta_j^q\delta_p^s + \delta_s^q\delta_i^p\delta_j^s\right)\\
&=\delta_j^q\delta_p^i+\delta_i^p\delta_j^q = 2\delta_j^q\delta_p^i.
\end{aligned}$$

再来算

$$\psi_{\star,I}\left(\left.\frac{\partial}{\partial A_i^j}\right|_I\right) = \sum_{p,q=1}^n \left.\frac{\partial X_p^q}{\partial A_i^j}\right|_I \left.\frac{\partial}{\partial X_p^q}\right|_I = \sum_{p,q=1}^n 2\delta_j^q\delta_p^i \left.\frac{\partial}{\partial X_p^q}\right|_I = 2\left.\frac{\partial}{\partial X_i^j}\right|_I$$

这样就可以说 $\psi_\star=2i_\star$ 是满的. $(n)\overset{i}{\hookrightarrow}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 给出了嵌入子流形所需的映射.

1.4 向量场

1.4.1 向量场

定义 1.4.1 (光滑向量场). M 是光滑流形, $U \overset{\text{开}}{\subseteq} M$, 若 X 满足:

- $\forall p \in U$, 有 $X(p) \in T_{M,p}$;
- $\forall f \in C^\infty(U)$, 有 $X(f) \in C^\infty(U)$.

称 X 是 U 上的**光滑向量场**.

注 1.4.2. 向量场即在 U 上每点指定一个切向量.

命题 1.4.3. 切丛 $T_M = \bigsqcup_{p\in M} T_{M,p}$ 是 $2m$ 维流形.($M = M^m$)

定义 1.4.4 (一个等价的定义). M 是光滑流形, $U \overset{\text{开}}{\subseteq} M$, 若光滑映射 $X\colon U \to T_M$ 满足 $\pi \circ X = \mathrm{id}_U$, 称 X 是 U 上的**光滑向量场**. 这里 $\pi\colon T_M \to M, v_p \mapsto p$. 是自然投影.

定义 1.4.5 (截面). 映射 $f\colon M \to T_M$ 若满足 $\forall p \in M, \pi(f(p)) = p$, 则称其为 π 的截面. 在语境中清楚时, 也可以直接说是 T_M 的截面. 所有 (光滑) 截面的集合记作 $\Gamma(M, T_M)$. 类似地也有 $\Gamma(M, T_M^\star)$.

由于切空间上的向量空间结构, 截面可以逐点相加, 也可以乘上一个光滑函数 $g \in C^\infty(M)$. 这使得全体截面 $\Gamma(M, T_M)$ 构成 $C^\infty(M)$-模. 特别地, 它构成 $\mathbb{R}$-向量空间.

为什么取“截面 (section)”这个名字呢? 考虑你的头发构成的三维空间 E 与头发构成的二维空间 B. 头发上的每一点映射到发根处就得到映射 $\pi : E \to B$. 每一根头发 $F_p = \pi^{-1}(p)$ 称作这个映射的纤维 (fiber). 如果在每根头发上选择一点, 并且使得在相邻头发之间这个选择是光滑的, 那么就得到了头发丛的光滑截面.

命题 1.4.6. M 是光滑流形, $U \overset{\text{开}}{\subseteq} M$, X 是 U 上的光滑向量场 $\iff$ 在局部坐标下 X 的分量是 C^∞ 函数.

证明. 不妨 $(U, \varphi; x^i)$ 是局部坐标, $\varphi_\star(X) = \sum_{i=1}^m a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$. $\forall f \in C^\infty(U)$,

$$X(f) \in C^\infty(U) \iff \varphi_\star(X)(f \circ \varphi^{-1}) \in C^\infty(\varphi(U)).$$

- $(\Longleftarrow)$: 显然;
- $(\Longrightarrow)$: $\forall f \in C^\infty(\varphi(U))$, $\varphi_\star(X)(f) = \sum_{i=1}^m a^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}$.
  特别的, 取 $f = x^k$, $\varphi_\star(X)(x^k) = \sum_{i=1}^m a^i(x)\frac{\partial x^k}{\partial x^i} = a^k(x)$.

□

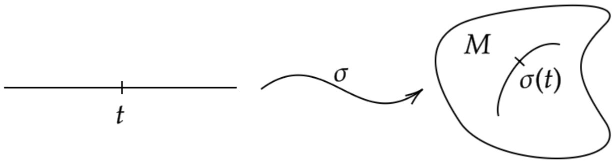

图 1.6: 曲线 σ

以下考虑沿特定曲线的向量场, 即向量场限制在一个曲线上:

我们先定义一个映射 σ.(图1.6)

$$\sigma\colon (a,b) \longrightarrow M$$
$$t \longmapsto \sigma(t)$$

定义 1.4.7 (切场)**.** 称

$$X\colon (a,b) \longrightarrow T_M$$
$$t \longmapsto X|_{\sigma(t)}$$

*为**切场** (vector field). 就是一个 "沿曲线 σ 的向量场.*

注意与一般的向量场的区别 (定义1.4.1). 本定义只想研究沿特定曲线的向量场.

命题 1.4.8. *如下三个光滑性是等价的*

1. *X 光滑;*
2. *X 关于 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 的系数为光滑函数;*
3. *对任意的 $f \in C^\infty$, 都有 $X(f)$ 光滑.*

证明. 给出提示:

1) 推 2) 在于在局部坐标下, $X + \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$;

2) 推 3) 在于 $X(f) = \sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$;

3) 推 1) 取 $p \in M$, 在局部坐标卡 (U, x^i) 下, 取光滑坐标函数 $f = x^j$, 那么 $X(x^j) = X^j$, 再利用 3) 得到整体光滑. □

1.4.2 积分曲线

设 $\gamma\colon \mathbb{R} \to U \overset{\text{开}}{\subseteq} M$ 是光滑曲线, 则 $\gamma_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 是沿着 $\gamma(t)$ 的切向量场.[9]

思考这样一个问题: 给定 U 上的光滑向量场 X, $\forall p \in U$, 能否找到一条光滑曲线过 p 点且 $\gamma_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = X|_{\gamma(t)}$?

[9]读者可以先跳过这部分, 在下文中 "再论积分曲线" 部分将这一子节作为参考学习.

定义 1.4.9 (积分曲线)**.** 设 X 是 $U \overset{\text{开}}{\subseteq} M$ 上的光滑向量场, $p \in U$, 若曲线 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ 满足:

- $\gamma(0) = p$;
- $\gamma_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = X|_{\gamma(t)}$

称 $\gamma(t)$ 为 X **过 p 点的积分曲线**.

定理 1.4.10. X 是 U 上向量场, 则 X 过 U 上任意一点有且仅有一条积分曲线.

证明. 不妨设 $(U, \varphi; x^i)$ 是局部坐标, $\varphi(p) = x_0$, $\varphi_{\star, X} = \sum_{i=1}^m a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$.

设 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ 是一条曲线

$$(\varphi \circ \gamma)_\star\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^m \frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

考虑常微分方程组:

$$(E): \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t} = a^i(x(t)) \\ x^i(0) = x_0^i \end{cases}$$

其满足解的存在唯一性条件, 故 (E) 存在唯一解. □

定义 1.4.11 (奇点, 零点)**.** X 是 U 上向量场, $p \in U$. 若 $X(p) = 0$, 称 p 是 X 的**奇点或零点**.

注 1.4.12. 向量场在零点的形态较为复杂.

向量场在非奇点处的形态较好, 即

定理 1.4.13. 设 X 是 $U \overset{\text{开}}{\subseteq} M$ 上的向量场. $p \in U$, $X(p) \neq 0$. 那存在 p 点处的局部坐标系 $(V, \psi; t^i)$ 使得 $\psi_\star(X|_V) = \frac{\partial}{\partial t^1}$.

证明. 不妨设 $(U, \varphi; t^i)$ 是 M 的局部坐标

$$\varphi_\star(X) = \sum_{i=1}^m a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^1(x_0) \neq 0.$$

考虑常微分方程组

$$(O): \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^i(t^1)}{\mathrm{d}t^1} = a^i(x(t^1)), & 1 \leqslant i \leqslant m; \\ x^1(0) = 0, \quad x^\alpha(0) = t^\alpha, & 2 \leqslant \alpha \leqslant m \end{cases}, \quad (t^\alpha \text{ 为参数})$$

根据常微分方程解的存在唯一性, 局部有解 $x^i = x^i(t^1; t^2, \cdots, t^m)$ 且光滑地依赖于参数 t^α.

注意到 Jacobian 矩阵

$$J = \left.\left(\frac{\partial x^i}{\partial t^j}\right)\right|_{t^1=0} = \begin{pmatrix} a^1 & \star \\ 0 & I_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$$

因此 $(t^1, \cdots, t^m) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} (x^1, \cdots, x^m)$ 是坐标变换, 记 $\psi := \widetilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$, 则 $\psi_\star(X) = \frac{\partial}{\partial t^1}$. □

1.4.3 Lie 括号

定义 1.4.14 (李括号). *$X, Y \in T_M$, 给出李括号 (Poisson 括号) 的运算方式:*

$$[X, Y] := XY - YX$$

命题 1.4.15 (李括号的三个性质). *给出切场上李括号的三个性质.*

1. *反对称性:$[X, Y] = -[Y, X]$;*
2. *函数线性性:$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$;*
3. *Jacobi 恒等式:$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$;*
4. *$\forall f \in C^\infty(U)$, $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$*

证明. 前三项的证明是作业, 现给出.

1. $[Y, X] = YX - XY = -(XY - YX) = -[X, Y]$;
2. 设 $X = \sum\limits_{i=1}^n X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum\limits_{j=1}^n Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, 按李括号定义展开即可

   关键在于光滑可以交换偏导顺序, 即

   $$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n fX^i gY^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n gY^j fX^i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} = 0$$

   详细计算见本节最后.
3. 逐项展开相加.
4. 展开计算.

□

命题 1.4.16. *设 (M, F) 是 N 的浸入子流形, X, Y 是 M 上的向量场, 则*

$$F_\star[X, Y] = [F_\star(X), F_\star(Y)]$$

证明. 设 $(U, \varphi; x^i)$, $(V, \psi; y^A)$ 分别是 M, N 的局部坐标, $F(U) \subseteq V$.

在 U 上, $X = \sum_{i=1}^m a^i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\quad Y = \sum_{i=1}^m b^i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. 那么有

$$F_\star[X, Y] = \sum_{i=1}^m c^i F_\star\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{A=1}^n c^i \frac{\partial y^A}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^A}, \quad c^i = X(b^i) - Y(a^i).$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
[F_\star(X), F_\star(Y)] &= \left[\sum_{i=1}^m a^i(x)\frac{\partial y^A}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^A}, \sum_{i=1}^m b^i(x)\frac{\partial y^A}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^A}\right] \\
&= \sum_{A=1}^n \left\{\sum_{i,j=1}^m a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\left[b^j(x)\frac{\partial y^A}{\partial x^j}\right] - \sum_{i,j=1}^m b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\left[a^j(x)\frac{\partial y^A}{\partial x^j}\right]\right\}\frac{\partial}{\partial y^A} \\
&= \sum_{A=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^m a^i(x)\frac{\partial b^j}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^m b^i(x)\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right]\frac{\partial y^A}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^A} \\
&= \sum_{A=1}^m \sum_{j=1}^m c^j \frac{\partial y^A}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^A}.
\end{aligned}
$$

因此 $F_\star[X, Y] = [F_\star(X), F_\star(Y)]$. □

李括号的局部计算:

$$X=\sum_{i=1}^{m}a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\sum_{j=1}^{m}b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}.\quad \forall f$$

$$\begin{aligned}
[X,Y](f)=&X(Y(f))-Y(X(f))\\
=&\sum_{i=1}^{m}a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sum_{j=1}^{m}b^j(x)\frac{\partial f}{\partial x^j}\right]-\sum_{j=1}^{m}b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\sum_{i=1}^{m}a^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\right]\\
=&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a^i(x)\frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}b^j(x)\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}\\
=&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a^j(x)\frac{\partial b^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}b^j(x)\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}\\
=&\sum_{i=1}^{m}\left[X(b^i)-Y(a^i)\right]\frac{\partial f}{\partial x^i}\\
=&\sum_{i=1}^{m}c^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i},\quad c^i(x):=X(b^i)-Y(a^i)
\end{aligned}$$

注 1.4.17.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0,\quad \forall f$$

$$
\begin{aligned}
[fX,gY] =&(fX)(gY)-(gY)(fX)\\
=&\left(\sum_{i=1}^{n} fX^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} gY^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-\left(\sum_{j=1}^{n} gY^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} fX^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} fX^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(gY^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} gY^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(fX^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\
=&\sum_{i,j} fX^i\left[\frac{\partial(gY^j)}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right]-\sum_{i,j} gY^j\left[\frac{\partial(fX^i)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right]\quad(\text{二阶导数项抵消})\\
=&\sum_{i,j} fX^i\left(\frac{\partial g}{\partial x^i}Y^j+g\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}-\sum_{i,j} gY^j\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}X^i+f\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\\
=&\sum_{j}\left[f(Xg)Y^j+fg\sum_i X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right]\frac{\partial}{\partial x^j}\\
&-\sum_{i}\left[g(Yf)X^i+fg\sum_j Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right]\frac{\partial}{\partial x^i}\\
=&f(Xg)Y+fg\sum_{i,j}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)-g(Yf)X\\
=&f(Xg)Y-g(Yf)X+fg\sum_j\left(\sum_i X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\quad(\text{交换指标})\\
=&f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y].
\end{aligned}
$$

1.5 积分曲线与单参数变换群

1.5.1 再论积分曲线

我们首先回顾1.4.2所阐述的积分曲线.[10]

定义 1.5.1 (积分曲线). *对于向量场 $X \in \Gamma(M, T_M)$ 与曲线 $\gamma\colon (a, b) \to M$, 如果曲线在每一点的速度向量 $\gamma'(t) \in T_{M,\gamma(t)}$ 恰好等于 X 在某一点的向量 $X(\gamma(t))$, 就称 γ 为 X 的一条积分曲线.*

可以想象 X 为某种流体在每一点的速度, 而积分曲线则是这种流体里放的一粒灰尘运动的轨迹.

例 1.5.2. *向量场 $X = \frac{\partial}{\partial x}$, 那么它的一条积分曲线就是 $\gamma(t) = t$.*

如果我们选定局部坐标 (U, φ), 那么在这个坐标上展开上面的要求, 就得到

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(t) = X^i(\gamma(t))$$

其中 $X^i(p)$ 是向量 $X(p)$ 的分量, $x^i(t)$ 则是 $\gamma(t)$ 的坐标分量. 这是 n 元一次常微分方程组.

定理 1.5.3. *给定常微分方程组*

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = f_i(x^1, x^2, \cdots, x^n),$$

如果 f_i 都是某个开集 U 上的光滑函数, 那么总是有:

- *存在性: 对于任何初始条件 $x^i(0)$, 总是在 0 的某个开集上存在光滑的解.*
- *唯一性: 如果在 $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ 与 $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ 上分别有一组解, 并且它们在 $t = 0$ 时相等, 那么它们在定义域中也是非零.*
- *可微性: 对于任何初始条件 $\boldsymbol{x}(0) \in U$, 都存在 $\boldsymbol{x}(0)$ 的开集 $V \subseteq U$ 与 $\varepsilon > 0$ 使得该取任何任意 V 中的点作为初始条件, 都会在 $(-c, c)$ 内有光滑解. 并且如果将这个解看成是 t 与初始条件的函数 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to U$, 那么这就是光滑函数.*

由这些对局部的常微分方程的刻画, 我们可以对积分曲线进行全局的刻画. 如同条不重合的积分曲线不能相交, 严格来说就是:

推论 1.5.4. *如果有 $\gamma_1\colon (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to M$ 与 $\gamma_2\colon (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to M$, 并且 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, 那么在定义域内他们相等.*

[10]这里可以视作回忆. 读者学习时可以已这部分为主, 需要证明的时候回到前文, 两部分的语言方式略有不同, 但本质是一样的.

证明. 考虑 $K = \{t\colon \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. 我们只需要证明它既是开集又是闭集. 它是闭集, 因为在 Hausdorff 空间中 $\{(t,t)\colon t\}$ 是闭集, 而在连续函数 $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ 下的原像就是 K. 而如果 $t_0 \in K$, 那么考虑 $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ 附近的一组坐标 (U, φ). 在坐标上展开后就得到一组常微分方程. 由定理1.5.3的唯一性得到 t_0 附近有一个开区间上 $\gamma_1 = \gamma_2$. 因此对于任何 $t_0 \in K$, 都有在一个开邻域 $t_0 \in I \subseteq K$. 因此 K 是开集. □

对于一条积分曲线, 一个自然的问题是它是否能一直延拓下去. 这里 "延拓" 指的就是存在定义域包含函数的积分曲线, 使得在原定义域上两者相等. 由于前面的结论, 我们知道延拓一旦存在就在其定义域上唯一. 因此我们可以考虑所有延拓的并, 这样得到的积分曲线就无法进一步延拓了. 我们假设这样的积分曲线为**极大积分曲线**, 是否所有极大积分曲线的定义域都是 $\mathbb{R}$ 呢?

例 1.5.5. *考虑 $\mathbb{R}$ 上的向量场 $X(u) = \frac{u^3}{2}\frac{\partial}{\partial u}$. 则其积分曲线需要满足的微分方程是*

$$\gamma'(t) = \frac{1}{2}\gamma(t)^3$$

积分得到

$$\gamma(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{c-t}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

因此如果 $\gamma(0) = 1$, 那么它的所有延拓都不会超过 $t = 1$, 可以看做是在这个向量场中运动的点速度越来越快, 在有限的时间内达到了 "无穷远". 此时极大积分曲线的定义域是 $(-\infty, 1)$.

1.5.2 单参数变换群

如果每条积分曲线都能延拓到 $\forall t \in \mathbb{R}$, 那么就称向量场是**完备的**. 此时对于每个 t 与 $p \in M$, 考虑在时间 0 时经过 p 的积分曲线 γ_p. 那么 $\gamma_p(t)$ 就是一个映射 $M \times \mathbb{R} \to M$. 我们可以换一个视角, 把 "为每个点 $p \in M$ 赋予一条曲线 $\gamma_p : \mathbb{R} \to M$" 看成 "给每个实数 $t \in \mathbb{R}$ 赋予一个映射 $M \to M$", 记作 $\varphi_t(p)$. 我们有:

$$\varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_{t+s}(p)$$

直观上看, 这就是因为一个点在向量场中运动时, 先运动 s 时间, 再运动 t 时间, 一定会到达直接运动 $s+t$ 时间的位置.

更进一步说, 此时 φ_t 是从流形到自身的光滑同胚. 根据定理1.5.3的可微性结论, φ_t 在每一点附近都有一个邻域光滑, 因此是光滑函数. 而:

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \mathrm{id}$$

因此是光滑同胚. 考虑所有光滑同胚 $M \to M$ 在复合下构成的群 $\mathrm{Diff}(M)$, 则每个 φ_t 都给出其中一个群元素, 并且群运算对应着参数 t 的加法运算. 因此这给出了一个单参数变换群, 也就是 $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ 的同态.

我们可以把这种现象抽象出来:

定义 1.5.6 (流). *如果有光滑映射 $\theta_t(p)\colon \mathbb{R}\times M \to M$, 使得 $\theta_0(p)=p$, 并且 $\theta_t(\theta_s(p))=\theta_{t+s}(p)$, 那么就称 θ 为***流***.*

定理 1.5.7. *紧流形上的任何向量场都是完备的.*

证明是 GTM94 上的习题, 现给出

证明. 对于任何一个点 p, 考虑在 $t=0$ 时经过 p 的极大积分曲线 γ_p, 设它的定义域是区间 I_p.

为了方便讨论, 定义:

$$W=\{(p,t)\colon t\in I_p\}\subseteq M\times\mathbb{R}$$

由之前的讨论知道, 对于任何 $p\in M$, 都存在一个开邻域 $U_p\ni p$ 与 $\varepsilon_p>0$ 使得 $U_p\times(-\varepsilon_p,\varepsilon_p)\subseteq W$. 由于 M 紧, 存在有限个 U_{p_k} 覆盖 M. 因此我们取 $\epsilon=\min\{\varepsilon_k\}$, 那么对任何点 $p\in M$, 经过它的积分曲线都可以前后延拓 ϵ 的时间. 我们得到积分曲线 $\gamma_p:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 后, 又知道经过 $p'=\gamma_p(\varepsilon/2)$ 的积分曲线可以继续延拓 ε 的时间, 由积分曲线唯一性就得到了 $(-\varepsilon,3\varepsilon/2)$ 上的延拓, 重复这个过程就得到了整个 $\mathbb{R}\to M$ 的积分曲线. 综上,$W=M\times\mathbb{R}$. □

定义 1.5.8 (局部 (C^∞) 扩张). *令 $\psi\colon M\to N$ 是光滑的. $\forall p\in M$, 存在 p 处领域 U, 与 $\varphi(p)$ 处领域 V 满足 $\psi(U)\subseteq V$. 若 $X\in\Gamma(M,T_N)$(参考定义1.4.5, $\pi\circ X=\psi$), 那么存在 V 上光滑向量场 $\widetilde{X}$, 满足*

$$\widetilde{X}\circ\psi\Big|_U=X|_U.$$

*称 $\widetilde{X}$ 为 X 的***局部光滑扩张***.*

$$\begin{tikzcd}
T_M \arrow[r, "\psi_\star"] & T_N \arrow[d, bend right, "\pi"'] \\
M \arrow[u] \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "\psi"] & N \arrow[u, dashed, bend right, "\widetilde{X}"']
\end{tikzcd}$$

应当注意, 只有当 $\psi_\star$ 是非奇异, 即 $\ker(\psi_\star)=\{0\}$ 时, 才能保证 $\widetilde{X}$ 的存在性.

$$\psi_{\star,p}\colon T_{M,p}\longrightarrow T_{N,\psi(p)}$$

$$X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\longmapsto\sum_{i,j}X^i\frac{\partial\psi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\psi^j}$$

则

$$\widetilde{X}=\sum_{i,j}X^i\frac{\partial\psi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\psi^j}$$

定理 1.5.9. [11] 对于两个向量场 X, Y, 它们分别有单参数群 φ_t, ψ_t. 以下说法等价:

1. $[X, Y] = 0$, 即 X, Y 交换.
2. $(\varphi_t)_* Y = Y$, 这是给上下两个条件建立关系的桥梁.
3. $\varphi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_s$, 即 φ, ψ 交换.

证明. 参考 [Morita. Geometry of differential forms, 命题 2.18] □

定义 1.5.10 (φ-相关). $\varphi\colon M \to N$, 若 $X \in T_M$, $Y \in T_N$, 满足 $\varphi_\star(X) = Y$, 称 X 与 Y 是φ-**相关**的.

命题 1.5.11. 若 X_1 与 Y_1, X_2 与 Y_2 是 φ-相关的. 那么 $[X_1, X_2]$ 与 $[Y_1, Y_2]$ 是 φ-相关的

证明. 展开计算 $\varphi_\star([X_1, X_2])|_p(f)$, 并利用 X_1 与 Y_1, X_2 与 Y_2 的 φ-相关性将 X_1, X_2 换成 Y_1, Y_2. □

[11]这个定理应该基于后文 Lie 导数, 但我们先给出, 这是由于下一节 Frobenius 定理的证明中需要它. 读者第一遍可以直接接受这个定理, 在学完 Lie 导数后再来回顾.

1.6　Frobenius 定理

本节内容主要参考 Shigeyuki Morita. Geometry of differential forms. 201. American Mathematical Soc.,2001

Frobenius 定理是对之前积分曲线的存在性定理的高维推广. 积分曲线可以看作是沿着一个向量场摆放的曲线, 而如果在流形的每一点的切空间处都选择一个平面, 就可以问是否有曲面在每一点都沿着这些平面摆放. 当然, 既然我们是在光滑流形上, 肯定希望只考虑 "光滑" 选定的平面, 这由以下的定义刻画:

定义 1.6.1 (r 维分布). *对于微分流形 M, 考虑某个切丛的子丛 $\mathscr{D} \subseteq T_M$, 使得在每个点上 $\mathscr{D}_p = T_{M,p} \cap \mathscr{D}$ 都是 $T_{M,p}$ 的一个 r 维子空间, 并且在任何一个点附近都有开邻域 U, 使得存在 U 上的 r 个光滑向量场, 在每个点 $q \in U$ 上的向量构成 $\mathscr{D}_q$ 的一组基. 此时我们称 $\mathscr{D}$ 为 r* **维分布** *(dimension-r distribution)*[12].

定义 1.6.2 (积分流形). *如果有子流形 $N \subseteq M$ 使得在每一点处 $T_{N,p} = \mathscr{D}_p$, 那么称 N 为 $\mathscr{D}$ 的***积分流形** *(integral manifold).*[13]

定义 1.6.3 (完全可积). *如果在 M 的每一点都存在经过它的积分流形, 就称 $\mathscr{D}$* **完全可积** *(completely integrable).*

例 1.6.4. *给定一个向量场, 则它在每个点上张成的一维子空间构成一维的分布. 每条积分曲线给出的子流形都是积分流形. 但是需要注意的是积分曲线与一维积分流形相比多了参数化的信息, 即积分流形只记录了运动的方向, 而积分曲线还记录了运动的速度.*

设 $X, Y \in \Gamma(M, \mathscr{D})$, 即每个点上的向量都落在 $\mathscr{D}$ 中的向量场. 我们可以计算其 Lie 括号.

定义 1.6.5 (对合分布). *如果 $\Gamma(M, \mathscr{D})$ 在 Lie 括号下封闭, 则称 $\mathscr{D}$ 为***对合分布** *(involutive distribution).*

定理 1.6.6 (Frobenius). *一个分布完全可积当且仅当其对合.*

证明. 该定理在 [Morita. Geometry of differential forms, 定理 2.17].

先证明充分性. 已知任何一点 p 都有经过它的子流形 N 是 $\mathscr{D}$ 的积分流形. 因此存在局部坐标 $(x^1, \ldots, x^n)$, 使得 p 的坐标是 $(0, \ldots, 0)$, 并且 N 是坐标上满足 $x^{r+1} = \cdots = x^n = 0$ 的子流形. 在这个邻域中的每一点 q , $\mathscr{D}_q = T_{N,q}$ 由 $\frac{\partial}{\partial x^i}(1 \leqslant i \leqslant r)$ 张成.(注意对于在 N 以外的点 q , 我们不知道 $\mathscr{D}_q$ 如何.)

[12] r 维分布英语为 rank-r distribution. 在 [Morita. Geometry of differential forms] 中称做 dimension-r distribution.

[13] 老师课上称这个为流, 这里不在称流, 为了与之前所定义的流1.5.6区分.

考虑两个向量场 X, Y ，如果 X, Y 的取值都在 $\mathscr{D}$ 中, 在 N 上我们知道这意味着它们的分量 $X^i = Y^i = 0, (r < i \leqslant n)$. 因此对其求偏导数得到在 p 点处有

$$\left.\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right|_p = 0,\ (j > r, i \leq r)$$

对 Y 同理. 因此计算 p 点处的 Lie 括号

$$[X, Y] = \left[X_i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y_i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right] \frac{\partial}{\partial x^j}$$

当 $j > r$ 时, 对指标 i 是否大于 r 做分类讨论得到求和的每一项都是零, 因此 $[X, Y]$ 在 p 点处所有 $> r$ 的分量都是零, 从而在 $\mathscr{D}$ 中. 由于分布完全可积, p 可以取任何一点, 因此在任何一点处 $[X, Y]$ 都在 $\mathscr{D}$ 中.

接下来证明必要性. 任给点 $p \in M$ ，我们需要构造经过它的积分流形. 为此, 取它的某个开邻域, 使得 $\mathscr{D}$ 在邻域内由 r 个向量场 Y_i 张成. 此时由对合条件知道 $[Y_i, Y_j]$ 都可以用 Y_k 的线性组合表示. 接下来自然就要展开成坐标分量进行操作, 即 $Y_i = Y_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. 注意这里 i 的取值是 1 到 r , 而 j 则是 1 到 n .

这些坐标有些复杂, 但是注意 Y_i 只是一组能张成 $\mathscr{D}$ 的向量场, 我们完全有选择另一组向量场的自由. 因此可以利用这份自由选择一组最方便操作的向量场. 注意在每个点处 Y_i 都是线性无关的, 即 Y_i^j 组成的 r 行 n 列的矩阵满秩. 故 (如有必要, 调换这个矩阵的顺序) 在 p 点处, 这个矩阵的前 r 列构成的方阵判别式不为零. 由于光滑性, 我们知道在 p 点的一个邻域上判别式也不为零. 在这个邻域里这个矩阵的逆 θ_i^j 也光滑, 即 $\theta_i^j Y_j^k = \delta_i^k$ (注意这里仍然是 $1 \leqslant k \leqslant r$). 考虑向量场 $X_i = \theta_i^j Y_j$, 那么由刚才的构造,

$$X_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \theta_i^j Y_j^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

当 $k \leqslant r$ 时, $\theta_i^j Y_j^k = \delta_i^k$, 因此

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k > r} \theta_i^j Y_j^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

这样,X_i 至少前 r 个分量就非常简洁. 接下来容易地计算 Lie 括号. 注意 $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$, 因此由双线性性就能化简. 特别地, 注意到这样计算出来 $[X_i, X_j]$ 的前 r 个分量都是零.

另一方面, X_i 仍然张成整个 $\mathscr{D}$, 此时再利用对合的条件, 得到 $[X_i, X_j]$ 可以被 X_k 的线性组合表示. 把这些线性组合的系数设出：

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k$$

其中 f_{ij}^k 是光滑函数, $1 \leq i, j, k \leqslant r$. 但是上面我们计算出了 $[X_i, X_j]$ 的前 r 个分量都是零, 并且 X_k 的第 k 个分量必然不是零. 因此我们得到 f_{ij}^k 全部为零, 即

$\{X_i\}$ 交换. 上面这一套构造说明了对合性的本质是存在一组交换的向量场构成基底 (至少在局部).

根据我们在定理1.5.9中对交换的向量场的刻画, 此时它们对应的单参数群 (在有定义时) 交换. 因此我们可以把它们 "拉直". 设 X_i 对应的单参数群是 $\varphi_{i,t}$, 那么这 r 个单参数群就给出了一个映射

$$\varphi : (t_1, t_2, \ldots, t_r) \mapsto \varphi_{1,t_1}(\varphi_{2,t_2}(\cdots \varphi_{r,t_r}(p)))$$

注意根据单参数群的定义, $\frac{\partial \varphi_{i,t}}{\partial t} = X_i$. 因此在 p 点处,

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=\cdots=0} = X_1(p)$$

由于各个单参数群交换, 对于其他 t_i 求导, 可以先将对应的 φ_{i,t_i} 交换到最外侧, 那么同理得到

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right|_{t_1=\cdots=0} = X_i(p)$$

它们线性独立. 而由于 φ 光滑, 得到它们在一个小邻域内都线性独立, 即 φ 在一个邻域内是浸入. 因此可以取一个更小的开邻域 $U \subseteq \mathbb{R}^r$, 使得 $\varphi\colon U \to M$ 是嵌入, 故给出一个子流形 N (紧集上浸入有局部嵌入性. 直观的理解是单参数群的流在短时间内不会相交, 因为每个流由唯一的积分曲线生成, 而交换性保证了流的复合顺序不影响结果, 避免了自相交). 我们只需要 N 是积分流形. 把上面的求偏导操作在 N 的任意一点 q 处重复, 就得到 $T_{N,q}$ 被 r 个向量 $X_i(q)$ 张成. 而由条件知道这张成的空间正是 $\mathscr{D}_q$. □

第二章　张量与微分形式

这一章是较为代数的内容, 相交于前一章, 几何直观并不强, 但这张内容十分重要, 张量与微分形式的具体计算在具体流形以及后续积分, Lie 群, Lie 代数等方面都极为重要, 是后续研究的基本运算工具.

第一节张量与外代数是很代数的定义, 定义外积空间的时候是用 $V^{\otimes k}$ 直接商去双边理想和 $V^{\otimes k}$ 的交空间. 这很代数, 读者在学习的时候应该理解这样定义的 $\Lambda^k(V)$ 里元素具体是什么样的.

第二节的重点是计算, 注意区分丛与丛截面.

第三节是导数在向量场上的推广, 读者在学习的时候因该结合图形.

笔者在这里指明, 这里的 Lie 导数在物理上的应用也是极其广泛的. 如 Hamilton 向量场:

$$X_H := \omega^{\sharp}(\mathrm{d}H) \in \Gamma(T^{\star}_M, T_{T^{\star}_M})$$

其中 $\omega = \sum_i \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$ 为余切空间上的典范 2-形式, $H \in C^{\infty}(T^{\star}_M)$ 为 Hamilton 量 $H(q,p)$. 考虑沿着 Hamilton 向量场的积分曲线, 在局部坐标下展开就可以得到熟悉的运动方程

$$q^i = +\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

其上有性质 $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$, 证明就是利用 Cartan 魔法公式:

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = i_{X_H}\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(i_{X_H\omega}).$$

2.1　张量与外代数

2.1.1　张量代数

定义 2.1.1 (张量积). V 与 W 的张量积是指商空间

$$V \otimes W := (V \times W)/I(V,W) = \mathbb{R}^{\oplus(V\times W)}/I(V,W)$$

其中

$$I(V,W) := \left\{ \begin{array}{r|r} (v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w) & a \in \mathbb{R} \\ (v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2) & v,v_1,v_2 \in V \\ (av,w)-a(v,w) & w,w_1,w_2 \in W \\ (v,aw)-a(v,w) & \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\oplus(V\times W)} \tag{2.1.1}$$

$I(V,W)$ 在 $V\times W$ 中的陪集记作 $v\otimes w$.

命题 2.1.2. 从(2.1.1)中显然有下列等式:

$$\begin{aligned} (v_1+v_2)\otimes w &= v_1\otimes w + v_2\otimes w, \\ v\otimes(w_1+w_2) &= v\otimes w_1 + v\otimes w_2, \\ a(v\otimes w) &= av\otimes w = v\otimes aw. \end{aligned}$$

上面的构造略微有些抽象, 但是一般来说不需要考虑张量积中具体有些什么, 只需要构造对应的双线性映射, 然后使用定理中的性质就可以了. 这种性质称作**泛性质** (universal property).

命题 2.1.3 (泛性质). 令 $\varphi\colon V\times W\to V\otimes W, (v,w)\mapsto v\otimes w$, 则当 U 是一个向量空间且 $\alpha\colon V\times W\to U$ 是双线性映射, 则存在唯一一个线性映射 $\widetilde{\alpha}\colon V\otimes W\to U$ 使得下图表**交换**.[1]

$$\begin{tikzcd} V\otimes W \arrow[drr, dashed, "\widetilde{\alpha}"] & & \\ V\times W \arrow[u, "\varphi"] \arrow[rr, "\alpha"] & & U \end{tikzcd}$$

命题 2.1.4 (标准同构).

$$\begin{aligned} V\otimes W &\simeq W\otimes V, \\ V\otimes(W\otimes U) &\simeq (V\otimes W)\otimes U. \end{aligned}$$

回忆 2.1.5 (对偶空间).

$$V^\star = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}).$$

[1]由 $V\otimes W$ 和 α 组成的偶 $(V\otimes W,\alpha)$ 称作解以 $V\otimes W$ 为定义域的双线性映射的泛映射问题.

定理 2.1.6. 对于有限维向量空间 V, W, 有

$$\begin{aligned} S\colon \operatorname{Hom}(V,W) &\xrightarrow{\ \sim\ } W\otimes V^\star \\ \alpha &\longmapsto \sum_{i,j}\alpha_i^j f_j\otimes e^i \end{aligned}$$

证明. 取 V 上基 $\{e_i\}_{i=1}^m$, W 上基 $\{f_j\}_{j=1}^n$, 则对任意 $\alpha\in\operatorname{Hom}(V,W)$,

$$\alpha\colon V \longrightarrow W$$

$$\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_m\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\alpha(e_1)\\ \vdots\\ \alpha(e_m)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^n\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_m^1 & \cdots & \alpha_m^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}$$

取 $V^\star$ 中 (对偶) 基 $\{e^i\}_{i=1}^m$ 满足 $e^i(e_j)=\delta_j^i$, 则

$$\alpha \xleftrightarrow{1:1} \sum_{i,j}\alpha_i^j f_j\otimes e^i.$$

其上线性性质是易证的. □

另一种直观证明可以基于

$$\operatorname{Hom}(V,W)\simeq \mathrm{M}_{n\times m}\simeq \mathrm{M}_{m\times n}\simeq W\otimes V^\star$$

推论 2.1.7. 关于张量积还有性质:

1. $\dim V\otimes W = (\dim V)(\dim W)$;
2. 令 $\{e_i\}_{i=1}^c$ 和 $\{f_j\}_{j=1}^d$ 分别是 V 和 W 的基, 那么 $\{e_i\otimes f_j\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant c\\ 1\leqslant j\leqslant d}}$ 是 $V\otimes W$ 的基.

定义 2.1.8 ((r,s)-型张量)**.**

$$V_r^s := \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{V^\star\otimes\cdots\otimes V^*}_{s\text{个}}$$

称为 V 上 (r,s)-型张量.

命题 2.1.9.

$$\operatorname{Hom}(V,V)=\operatorname{End}(V)\simeq V\otimes V^\star.$$

即 V 上自同态与 V 上 $(1,1)$-型张量同构.

命题 2.1.10.

$$(V\times V)^\star = \operatorname{Hom}(V\times V,\mathbb{R})\simeq V^\star\otimes V^\star.$$

即 V 上双线性函数全体同构于 V 上 $(0,2)$-型张量.

证明. 证明的关键在于“线性函数完全依赖于其在基上的作用”

$$f \xleftrightarrow{1:1} \sum_{i,j} f(e_i, e_j) e^i \otimes e^j.$$

然后证明其线性性质 □

注 2.1.11. *V 上对称, 正定, 双线性函数称为 V 上二次型.*

2.1.2 外代数

回忆 2.1.12 (双边理想)**.** *在环论中, 对于环 R, 设 I 是 R 的非空子集, 若满足:*

1. *I 关于加法构成 Abel 群;*
2. *对任意 $r \in R, a \in I$, 都有 $ra, ar \in I$.*

*则称 I 为 R 的**双边理想 (two-sided ideal)**.*

定义 2.1.13 (外代数)**.**

$$\text{张量代数}\, C(V) := \sum_{\substack{r \geqslant 0 \\ \text{有限和}}} V_r^0 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}, \quad V_0^0 = \mathbb{R}$$

$$I(V) := \left\langle \left\{ v \otimes v \in V^{\otimes 2} \colon v \in V \right\} \right\rangle_{C(V)}$$

那么分次代数 (graded algebra)

$$\Lambda(V) := C(V)/I(V)$$

*称为 V 上**外代数 (exterior algebra)**.*[2]

定义 2.1.14 (外积空间)**.**

$$\Lambda^k(V) := V_k^0 / (I(V) \cap V_k^0) = V^{\otimes k} / \left(I(V) \cap V^{\otimes k} \right), \quad k \geqslant 2.$$

命题 2.1.15.

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Lambda^k(V).$$

在 $\Lambda(V)$ 上自然有 $0 = (u+v) \otimes (u+v) = u \otimes v + v \otimes u$, 即 $u \otimes v = -v \otimes u$, 记作

$$u \wedge v = -v \wedge u \tag{2.1.2}$$

很显然的一件事是 $\Lambda^k(V)$ 是由所有形如 $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k, (v_i \in V)$ 的线性组合构成的子空间, 且满足(2.1.2)式.

[2]张量代数 $C(V)$ 是张量代数 $T(V) := \bigoplus_{r,s \geqslant 0} V_r^s$ 的子代数. 外代数也称 Grassmann 代数 (Grassmann algebra).

命题 2.1.16. 若 V 是 $\mathbb{R}$-n 维向量空间，则

$$\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^k(V) = \binom{n}{k} \qquad\qquad \dim_{\mathbb{R}} \Lambda(V) = 2^n.$$

其上基为

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \colon 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\}, \quad \langle e_i \rangle_{i=1}^n = V.$$

且很自然的

$$\Lambda^n(V) \simeq \mathbb{R} \qquad\qquad \Lambda^{n+j}(V) = \{0\}, j \in \mathbb{Z}_{>0}$$

定义 2.1.17 (交错多线性映射 (函数))**.** 多重线性映射

$$h\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{个}} \to W$$

如果对于 r 个字母上的置换群 $\mathfrak{S}_r$ 中的所有置换 π，都有

$$h(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(r)}) = (\operatorname{sgn} \pi) h(v_1, \cdots, v_r) \quad (v_1, \cdots, v_r \in V)$$

则称 h 是**交错的**.

其中置换群的同态 $\mathfrak{S}_r \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，此同态记作 sgn.

所有交错多线性函数 $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{个}} \to \mathbb{R}$ 构成的向量空间记作 $A_r(V)$.[3]

命题 2.1.18 (泛映射性)**.** 令 φ 表示 $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{个}}$ 到 $\Lambda^k(V)$ 中的映射

$$(v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$$

则 φ 是一个交错的多重线性映射. 于是对于 $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{个}}$ 到向量空间 W 中的每个交错多重线性映射 h，唯一存在一个线性映射 $\widetilde{h}\colon \Lambda^k(V) \to W$ 使得 $\widetilde{h} \circ \varphi = h$.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^k(V) \arrow[dr, dashed, "\widetilde{h}"] & \\
V^k \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "h"] & W
\end{tikzcd}$$

命题 2.1.19. 在上述交换图中取 $W = \mathbb{R}$，则有自然同构

$$\Lambda^k(V^\star) \simeq \left(\Lambda^k(V)\right)^\star \simeq A_k(V)$$

第一个同构是显然的，第二个同构将交换图中 h 与 $\widetilde{h}$ 一一对应.

[3] 令 $A_0(V) := \mathbb{R}$.

例 2.1.20. 对任意 $v^\star \in \Lambda^r(V^\star)$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ 任意 $v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_r} \in \Lambda^r(V)$, 有

$$v^\star(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_r}) = \frac{1}{r!} \sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in\mathfrak{S}_n} v_{i_1\cdots i_r} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_r}) \tag{2.1.3}$$

对归一化系数定为 $1/r!$ 作如下说明: 首先

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}(e_{j_1 \wedge \cdots \wedge e_{j_r}}) = \begin{vmatrix} e^{i_1}(e_{j_1}) & \cdots & e^{i_r}(e_{j_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i_1}(e_{j_r}) & \cdots & e^{i_r}(e_{j_r}) \end{vmatrix}$$

这样一来

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r!} \sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in\mathfrak{S}_n} v_{i_1\cdots i_r} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) \\ =& \frac{1}{r!} \sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in\mathfrak{S}_n} v_{i_1\cdots i_r} \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_1}_{j_r} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_r} \end{vmatrix} \\ =& \frac{1}{r!} \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_r)\in\mathfrak{S}_n \\ \{i_1,\cdots,i_r\}=\{j_1,\cdots,j_r\}}} (-1)^{\sigma\binom{i_1\cdots i_r}{j_1\cdots j_r}} v_{j_1\cdots j_r} \cdot (-1)^{\sigma\binom{i_1\cdots i_r}{j_1\cdots j_r}} \mathbf{1} \\ =& \frac{1}{r!} \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_r)\in\mathfrak{S}_n \\ \{i_1,\cdots,i_r\}=\{j_1,\cdots,j_r\}}} v_{j_1\cdots j_r} = \frac{1}{r!} \cdot r! \cdots v_{j_1\cdots j_r} = v_{j_1\cdots j_r} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} v_{i_1\cdots i_r} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) \\ =& \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} v_{i_1\cdots i_r} \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_1}_{j_r} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_r} \end{vmatrix} \\ =& \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n \\ \{i_1,\cdots,i_r\}=\{j_1,\cdots,j_r\}}} (-1)^{\sigma\binom{i_1\cdots i_r}{j_1\cdots j_r}} v_{j_1\cdots j_r} \cdot (-1)^{\sigma\binom{i_1\cdots i_r}{j_1\cdots j_r}} \mathbf{1} \\ =& \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n \\ \{i_1,\cdots,i_r\}=\{j_1,\cdots,j_r\}}} v_{j_1\cdots j_r} = v_{j_1\cdots j_r} \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

比较(2.1.4)与(2.1.5)立刻有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r!} \sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in\mathfrak{S}_n} v_{i_1\cdots i_r} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) \\ =& \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} v_{i_1\cdots i_r} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) \end{aligned}$$

现在让我们回到(2.1.3), 并将归一化系数 (用选取组合的方式) 消去, 有

$$
\begin{aligned}
(2.1.3) &= \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\\ 1\leqslant k_1,\cdots,k_r\leqslant n}} v_{i_1\cdots i_r} e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_r}\left(v_{j_1}^{k_1}e_{k_1}\wedge\cdots\wedge v_{j_r}^{k_r}e_{k_r}\right)\\
&= \sum_{k_1,\cdots,k_r=1}^{n}\prod_{s=1}^{r} v_{j_s}^{k_s}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} v_{i_1\cdots i_r} e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_r}(e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_r})\\
&\overset{(2.1.5)}{=} \sum_{k_1,\cdots,k_r=1}^{n} v_{k_1\cdots k_r}\prod_{s=1}^{r} v_{j_s}^{k_s}
\end{aligned}
$$

定义 2.1.21 (($(V^\star)_r^s$ 与 V_r^s 的非奇异配对)**.** $(V^\star)_r^s$ 与 V_r^s 的非奇异配对. 这个配对是一个双线性映射:

$$
\begin{aligned}
(V^\star)_r^s\times V_r^s &\longrightarrow \mathbb{R}\\
\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{r} u^{\star,i}\right)\otimes\bigotimes_{j=1}^{s} u_j, \left(\bigotimes_{i=1}^{r} v_i\right)\otimes\bigotimes_{j=1}^{s} v^{\star,j}\right) &\longmapsto \prod_{i=1}^{r} u^{\star,i}(v_i)\cdot\prod_{i=1}^{s} v^{\star,i}(u_i)
\end{aligned}
$$

例 2.1.22. 特别的如果定义[4]

$$
\begin{aligned}
(\cdot,\cdot)\colon \Lambda^r(V^\star)\times\Lambda^r(V) &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(v^\star, v) &\longmapsto (v^\star, v) = \det(v^{\star,j}(v_i))_{n\times n}
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
v^\star &= v^{\star,1}\wedge\cdots\wedge v^{\star,r}\\
u &= u_1\wedge\cdots\wedge u_r
\end{aligned}
$$

那么

$$
(v^\star, u) = \begin{vmatrix} v^{\star,1}(u_1) & \cdots & v^{\star,r}(u_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v^{\star,1}(u_r) & \cdots & v^{\star,r}(u_r)\end{vmatrix}
$$

[4]注意区分笛卡尔积 $(\cdot,\cdot)$ 与双线性函数 $(\cdot,\cdot)$. 详见 Warner, Page61: 2.12

2.2　张量场与微分形式

2.2.1　张量场

定义 2.2.1. M 是一个微分流形, 定义

$$
\begin{aligned}
(T_M)^s_r &:= \bigcup_{p\in M}(T_{M,p})^s_r = \bigcup_{p\in M}\left[T_{M,p}^{\otimes r}\otimes (T^\star_{M,p})^{\otimes s}\right] && \text{称为 } (r,s)\text{-型张量丛.}\\
\Lambda^k(T^\star_M) &:= \bigcup_{p\in M}\Lambda^k(T^\star_{M,p}) && \text{称为 } M \text{ 上外 } k\text{-形式丛.}\\
\Lambda^\star(M) &:= \bigcup_{p\in M}\Lambda(T_{M,p}) && \text{称为 } M \text{ 上外代数丛.}\\
\mathcal{A}^k_M &:= \left\{\omega\in\Lambda^k(T^\star_M)\colon \omega \text{ 是光滑的}\right\} && \text{称为 } M \text{ 上光滑 } k\text{-形式丛.}
\end{aligned}
$$

这里光滑是指在 M 的任意局部坐标卡 $(U,\varphi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ 下, ω 在 U 上的限制 $\omega|_U$ 可以表示为

$$\omega|_U = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} a_{i_1\cdots i_k}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

其中系数函数 $a_{i_1\cdots i_k}(x)$ 是 U 上关于局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的光滑函数 (即具有任意阶连续偏导数).

定义 2.2.2 (张量丛截面)**.** 若 $\alpha\colon M\to (T_M)^s_r, p\mapsto \alpha|_p$ 满足 $\pi\circ\alpha=\mathrm{id}$, 那么称 α 为 $(T_M)^s_r$ 的光滑整体截面, 记 $\alpha\in\Gamma(M,(T_M)^s_r)$. 其中 π 是丛射影.

注 2.2.3. 定义2.2.2是对一般张量丛的截面, 而定义1.4.5是对切丛或余切丛的截面, 是张量丛截面的特例. 其均通过丛射影条件 $\pi\circ f=\mathrm{id}_M$ 定义截面, 本文通用光滑性要求与截面记号 $\Gamma(M,\cdot)$.

例 2.2.4. 自然的我们有表2.1

表 2.1: 常见光滑 (整体) 截面

丛类型	截面名称	直观含义 (随点连续)
切丛 T_M	向量场	给每个点分配一个切向量
余切丛 $T^\star_M$	1-形式场	给每个点分配一个余切函数
外 k-形式丛	k-形式场	给每个点分配一个反对称 k 阶张量
张量丛 $(T_M)^s_r$	张量场	给每个点分配一个 (r,s)-型张量

约定实光滑流形上一个记号 $\mathcal{A}^k(M):=\Gamma(M,\Lambda^k(T^\star_M))$. 在没有歧义的时候可以简写为 $\mathcal{A}^k$.

例 2.2.5. 那么显然有 $\mathcal{A}^0(M)=C^\infty(M)$. 如果对于一般流形上的 0-形式 $\Omega^0(M):=\Gamma(M,\Lambda^k(T^\star_M))$, 应该有如下关系

$$\begin{aligned}
\Omega^0(M)=&\text{实光滑函数层 }\mathcal{O}(M)=C^\infty(M) && M\text{ 实光滑流形}\\
\text{光滑复值函数 }\Omega^0(M)\supset&\text{全纯函数层 }\mathcal{O}(M) && M\text{ 复流形}\\
\Omega^0(M)=&\mathbb{C} && M\text{ 单点流形}
\end{aligned}$$

单点流形指零维且连通流形[5].

回忆 2.2.6 (C^∞-模). *M 为光滑流形, C^∞-模 (C^∞-Module) 是光滑流形上系数为光滑函数的线性代数结构.*

命题 2.2.7. *若我们定义 $\mathcal{A}^k(M)=\Gamma(M,\mathcal{A}^k_M(M))$ 上的计算如下:*

$$\forall\alpha,\beta\in\mathcal{A}^k(M)\ \text{s.t.}\begin{cases}(\alpha+\beta)|_p:=\alpha|_p+\beta|_p\\(k\alpha)|_p:=k\cdot\alpha|_p\end{cases}$$

那么 $\mathcal{A}^k(M)$ 为 C^∞-模, 从而 $\mathcal{A}^k(M)$ 为向量空间.

取 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 为 $\mathfrak{X}(M):=\Gamma(M,T_M)$ 上基, $\{e^j\}_{j=1}^m$ 为其对偶基, $m=\dim M$. 那么

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^k(M)\ni\alpha=&\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\alpha_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\\=&\frac{1}{k!}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in\mathfrak{S}_n}\alpha_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\end{aligned}$$

从而 $\forall\alpha\in\mathcal{A}^k(M)$ 可以看作 k 重线性, 反称函数.

对 $\forall X_1,\cdots,X_k\in\mathfrak{X}(M)=\Gamma(M,T_M)$, 定义

$$\alpha(X_1,\cdots,X_k):=\alpha(X_1\wedge\cdots\wedge X_k)\tag{2.2.1}$$

令 $X_j=\sum\limits_{\beta_j=1}^m x_j^{\beta_j}e_{\beta_j}\in\mathfrak{X}(M)$, 则

$$\begin{aligned}(2.2.1)=&\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\1\leqslant\beta_1,\cdots,\beta_k\leqslant m}}\alpha_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\left(x_1^{\beta_1}e_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge x_k^{\beta_k}e_{\beta_k}\right)\\&=\sum_{\beta_1,\cdots,\beta_k=1}^m\alpha_{\beta_1\cdots\beta_k}\prod_{s=1}^k x_s^{\beta_s}.\end{aligned}$$

注 2.2.8. 实际上命题2.2.7中的计算可由下图道尽一切.

$$\begin{tikzcd}\Lambda^k T_M \arrow[drr, "\exists!\tilde{\alpha}"] & & \\ \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{k\text{个}} \arrow[u] \arrow[rr, "\alpha"] & & C^\infty(M)\end{tikzcd}$$

[5] 自然是紧的.

2.2.2 微分形式

定义 2.2.9 (光滑 1-形式). 光滑 1-形式 *(smooth 1-form)* 定义为流形 M 上余切丛 $T_M^\star$ 的光滑截面 $\Gamma(M,T_M^\star)$ 上的元素.

一般的, 对于 $f\in\Gamma(M,\mathcal{A}_M^0)=C^\infty(M)$, 记 $\mathrm{d}f\in\mathcal{A}^1$ 为 f 的光滑 1-形式.

定理 2.2.10. 存在唯一算子 $\mathrm{d}\colon\Gamma(M,\mathcal{A}_M^k)\to\Gamma(M,\mathcal{A}_M^{k+1})$ 满足:

1. $\mathrm{d}^2=0$
2. $f\in C^\infty(M)$, 则 $\mathrm{d}f$ 为 f 的微分.[6]

证明. 只需要证明其与坐标的选取无关和 $\mathrm{d}^2=0$, 设 $\dim M=m$.

$$\forall\alpha=\frac{1}{k!}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in\mathfrak{S}_m}\omega_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha=&\frac{1}{k!}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in\mathfrak{S}_m}\sum_{i_0=1}^{m}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^{i_0}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\\ =&\sum_{\substack{1\leqslant i_0\leqslant m\\ i_0\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^{i_0}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\\ =&\sum_{1\leqslant i_0<i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\sum_{\alpha=0}^{k}(-1)^\alpha\frac{\omega_{i_0\cdots\widehat{i_\alpha}\cdots i_k}}{\partial x^{i_\alpha}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\\ =&\frac{1}{(k+1)!}\sum_{(i_0,\cdots,i_k)\in\mathfrak{S}_m}\sum_{\alpha=0}^{k}(-1)^\alpha\frac{\omega_{i_0\cdots\widehat{i_\alpha}\cdots i_k}}{\partial x^{i_\alpha}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\end{aligned}$$

现在说明 $\mathrm{d}\alpha$ 与坐标选取无关, 另取坐标 $\{y^j\}_{j=1}^m$. 则

$$\begin{aligned}\alpha=&\sum_{(j_1,\cdots,j_k)\in\mathfrak{S}_m}\omega'_{j_1\cdots j_k}\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}\\ =&\frac{1}{k!}\sum_{(j_1,\cdots,j_k)\in\mathfrak{S}_m}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m}\omega'_{j_1\cdots j_k}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_k}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.\end{aligned}$$

从而[7]

$$\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{m}\omega'_{j_1\cdots j_k}\prod_{s=1}^{k}\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}=\sum_{i_1\cdots i_k=1}^{m}\omega_{i_1\cdots i_k}.\tag{2.2.2}$$

[6] 即 $\mathrm{d}f(v)=v(f)$, 对任意 $v\in T_{M,p}$.

[7] 这里我们说求和遍历指标集 $(j_1,\cdots,j_k)\in\mathfrak{S}_m$ 和 $1\leqslant j_1,\cdots,j_k\leqslant m$ 一致, 因为相同指标会使得 $\mathrm{d}y^{j_\alpha}\wedge\mathrm{d}y^{j_\beta}=0,\quad(j_\alpha=j_\beta)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha =&\mathrm{d}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{m}\omega'_{j_1\cdots j_k}\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}\right)\\
=&\frac{1}{k!}\sum_{j_0,j_1,\cdots,j_k=1}^{m}\frac{\partial\omega'_{j_1\cdots j_k}}{\partial y^{j_0}}\mathrm{d}y^{j_0}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}\\
=&\frac{1}{k!}\sum_{j_0,j_1,\cdots,j_k=1}^{m}\frac{\partial\omega'_{j_1\cdots j_k}}{\partial y^{j_0}}\sum_{i_0=1}^{m}\frac{\partial y^{j_0}}{\partial x^{i_0}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}\\
=&\frac{1}{k!}\sum_{i_0,j_1,\cdots,j_k=1}^{m}\frac{\partial\omega'_{j_1\cdots j_k}}{\partial x^{i_0}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}\\
\overset{(2.2.2)}{=}&\frac{1}{k!}\sum_{\substack{1\leqslant i_0,i_1,\cdots,i_k\leqslant m\\1\leqslant l_1,\cdots,l_k\leqslant m}}\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}\left(\omega_{i_1\cdots i_k}\prod_{s=1}^{k}\frac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{j_s}}\right)\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\prod_{t=1}^{k}\frac{\partial y^{j_t}}{\partial x^{l_t}}\mathrm{d}x^{l_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{l_k}
\end{aligned}\tag{2.2.3}
$$

对 $\dfrac{\partial}{\partial x^{i_0}}\left(\omega_{i_1\cdots i_k}\prod_{s=1}^{k}\dfrac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{j_s}}\right)$ 展开, 则上式有

$$
\begin{aligned}
(2.2.3)=&\frac{1}{k!}\sum_{\substack{1\leqslant i_0,i_1,\cdots,i_k\leqslant m\\1\leqslant l_1,\cdots,l_k\leqslant m}}\left(\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^{i_0}}\prod_{s=1}^{k}\frac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{j_s}}+\sum_{\alpha=1}^{k}\omega_{i_1\cdots i_k}\frac{\partial^2 x^{i_\alpha}}{\partial x^{i_0}\partial y^{j_\alpha}}\prod_{\substack{1\leqslant s\leqslant k\\s\neq\alpha}}\frac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{j_s}}\right)\\
&\cdot\prod_{\beta=1}^{k}\frac{\partial y^{j_\beta}}{\partial x^{l_\beta}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}x^{l_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{l_k}.
\end{aligned}\tag{2.2.4}
$$

注意到 $\dfrac{\partial^2 x^{i_\alpha}}{\partial x^{i_0}\partial y^{j_\alpha}}=0$, 那么

$$
\begin{aligned}
(2.2.4)=&\frac{1}{k!}\sum_{\substack{1\leqslant i_0,\cdots,i_k\leqslant m\\1\leqslant l_1,\cdots,l_k\leqslant m}}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^{i_0}}\prod_{s=1}^{k}\frac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{j_s}}\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{l_s}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}x^{l_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{l_k}\\
=&\frac{1}{k!}\sum_{\substack{1\leqslant i_0,\cdots,i_k\leqslant m\\1\leqslant l_1,\cdots,l_k\leqslant m}}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^{i_0}}\prod_{s=1}^{k}\delta^{i_s}_{l_s}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}x^{l_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{l_k}\\
=&\frac{1}{k!}\sum_{i_0,\cdots,i_k=1}^{m}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^{i_0}}\mathrm{d}x^{i_0}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.
\end{aligned}
$$

这就说明了 $\mathrm{d}\alpha$ 与坐标选取无关.

现在再来证明这样定义的外微分算子恒有 $\mathrm{d}^2=0$, 首先考察 d^2 作用在 $\Gamma(M,\mathcal{A}^0_M)=C^\infty(M)$ 上, 对任意 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f=&\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)=0
\end{aligned}
$$

在经一步考察 d^2 作用在 $\mathcal{A}^k=\Gamma(M,\mathcal{A}^k_M)$ 上之前, 先证明一个引理:

若 $\alpha\in\mathcal{A}^k$, $\beta\in\mathcal{A}^l$, 则

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge\mathrm{d}\beta.$$

这个引理的证明也是显然的[8], 现给出: 设

$$\begin{aligned}\alpha=&\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^m\alpha_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\\ \beta=&\frac{1}{l!}\sum_{j_1,\cdots,j_l=1}^m\beta_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\end{aligned}$$

那么

$$\alpha\wedge\beta=\frac{1}{k!l!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^m\sum_{j_1,\cdots,j_l=1}^m\alpha_{i_1\cdots i_k}\beta_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=&\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant m}}\mathrm{d}\alpha_{i_1\cdots i_k}\wedge\beta_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\\&+\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant m}}\alpha_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}\beta_{j_1\cdots j_l}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\\=&\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\mathrm{d}\alpha_{i_1\cdots i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\\&\wedge\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant m}\beta_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\right)\\&+\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\alpha_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\\&\wedge(-1)^k\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant m}\mathrm{d}\beta_{j_1\cdots j_l}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\right)\\=&\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge\mathrm{d}\beta\end{aligned}$$

现在经一步考察 d^2 作用在 $\mathcal{A}^k$ 上: 对任意

$$\alpha=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^m\omega_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\in\mathcal{A}^k.$$

[8]留作了作业.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2\alpha =&\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k}^{m} \mathrm{d}\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}\right)\\
=&\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m}\Bigg(\mathrm{d}^2\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}\\
&+\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha}\mathrm{d}\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}^2x^{i_\alpha}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}\Bigg)
\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

注意到 $\mathrm{d}^2\omega_{i_1\cdots i_k}=\mathrm{d}^2x^{i_\alpha}=0,\quad \forall\alpha$. 那么 (2.2.5) = 0 □

定义 2.2.11 (外微分算子). *上述定理2.2.10中的算子* $\mathrm{d}\colon \Gamma(M,\mathcal{A}_M^k)\to\Gamma(M,\mathcal{A}_M^{k+1})$ *称为 M 上**外微分算子 (exterior diff. operator)**.*

将上述定理2.2.10证明中提炼出如下两个引理

引理 2.2.12 (Poincáre). *d 为 M 上外微分算子, 那么 $\mathrm{d}^2=0$.*

引理 2.2.13. *d 为 M 上外微分算子, 若 $\alpha\in\mathcal{A}^k$, $\beta\in\mathcal{A}^l$, 则*

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge \mathrm{d}\beta.$$

定义 2.2.14 (缩并). *假定 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 那么 X 诱导一个**缩并 (contraction)** 为一个 -1 阶反导数算子 $i_X\colon\mathcal{A}^k\to\mathcal{A}^{k-1}$ 使得对 $\forall V_2,\cdots,V_k\in\mathfrak{X}(M)$ 满足*

$$i_X(\alpha)(V_2,\cdots,V_k)=\alpha(X,V_2,\cdots,V_k).$$

具体的, 对于 $\alpha=\dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m}\alpha_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}\in\mathcal{A}^k(M)$

$$\begin{aligned}
i_{\sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x^j}}(\alpha)=&\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m}\alpha_{i_1\cdots i_k}\sum_{\beta=1}^{k}(-1)^{\beta+1}X^{i_\beta}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{i_\beta}}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}\\
=&\frac{1}{k!}\sum_{\beta,i_1,\cdots,i_k=1}^{m}(-1)^{\beta+1}\alpha_{i_1\cdots i_k}X^{i_\beta}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{i_\beta}}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}\\
=&\frac{1}{k!}\sum_{\beta,i_1,\cdots,i_k=1}^{m}X^{i_\beta}\alpha_{i_\beta\, i_1\cdots\widehat{i_\beta}\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{i_\beta}}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}\\
=&\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i_0,\cdots,i_{k-1}=1}^{m}X^{i_0}\alpha_{i_0\cdots i_{k-1}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_{k-1}}
\end{aligned}$$

命题 2.2.15. *对任意光滑 $\psi\colon M\to N$, 有*

1. *$\psi^\star\colon\Gamma(M,\mathcal{A}_N^k)\to\Gamma(M,\mathcal{A}_M^k)$ 是同态;*

2. *$\psi^\star$ 与 d 可交换;*

3. 对任意 $X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, 有

$$\psi^\star(\alpha)(X_1, \cdots, X_k) = \alpha(\psi_\star X_1, \cdots, \psi_\star X_k)$$

现在我们来证明上述三个性质, 先证明性质 (1)

证明. 对任意 $\alpha = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \in \mathcal{A}^k$, $\beta = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^l \in \mathcal{A}^l$, 有

$$\begin{aligned}\psi^\star(\alpha \wedge \beta) =& \psi^\star(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \wedge \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^l) \\ =& \psi^\star(\alpha^1) \wedge \cdots \wedge \psi^\star(\alpha^k) \wedge \psi^\star(\beta^1) \wedge \cdots \wedge \psi^\star(\beta^l) \\ =& \psi^\star(\alpha) \wedge \psi^\star(\beta)\end{aligned}$$

这说明了 $\psi^\star \colon \Gamma(M, \mathcal{A}^k_N) \to \Gamma(M, \mathcal{A}^k_M)$ 是同态. □

再证明性质 (2)

证明. 对任意 $f \in C^\infty(N)$, 有 $\psi^\star(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f \circ \psi) = \mathrm{d}(\psi^\star f)$.

对任意 $\alpha = \dfrac{1}{k!} \sum\limits_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{m} \alpha_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \in \mathcal{A}^k$, 有

$$\begin{aligned}\psi^\star(\mathrm{d}\alpha) =& \psi^\star\left(\frac{1}{k!} \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{m} \mathrm{d}\alpha_{i_1 \cdots i_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\right) \\ =& \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{m} \mathrm{d}(\alpha_{i_1 \cdots i_k} \circ \psi) \wedge (x^{i_1} \circ \psi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(x^{i_k} \circ \psi) \\ =& \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{m} \mathrm{d}(\psi^\star \alpha_{i_1 \cdots i_k}) \wedge \mathrm{d}(\psi^\star \mathrm{d}x^{i_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(\psi^\star \mathrm{d}x^{i_k}) \\ =& \mathrm{d}\left(\psi^\star\left(\frac{1}{k!} \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{m} \alpha_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\right)\right) = \mathrm{d}(\psi^\star \alpha).\end{aligned}$$

这就说明了 $\psi^\star$ 与 d 可交换. □

最后来证明性质 (3)

证明. 令 $\alpha = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \in \mathcal{A}^k$, 那么

$$\begin{aligned}\psi^\star(\alpha)(X_1, \cdots, X_k) =& \psi^\star\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \psi^\star\alpha^k(X_1, \cdots, X_k) \\ =& \begin{vmatrix} \psi^\star(\alpha^1)(X_1) & \cdots & \psi^\star(\alpha^k)(X_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^\star(\alpha^1)(X_k) & \cdots & \psi^\star(\alpha^k)(X_k) \end{vmatrix} \\ =& \begin{vmatrix} \alpha^1(\psi_\star X_1) & \cdots & \alpha^k(\psi_\star X_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^1(\psi_\star X_k) & \cdots & \alpha^k(\psi_\star X_k) \end{vmatrix} \\ =& \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k(\psi_\star X_1, \cdots, \psi_\star X_k) \\ =& \alpha(\psi_\star X_1, \cdots, \psi_\star X_k)\end{aligned}$$

$\square$

引理 2.2.16 (Cartan). 令 $\omega^1, \cdots, \omega^r$ 为线性无关的 1-形式, $\theta^1, \cdots, \theta^r$ 为 1-形式. 若满足 $\sum_{i=1}^{r} \theta^i \wedge \omega^i = 0$, 那么存在 $A^i_j \in C^\infty(M)$ 满足 $A^i_j = A^j_i$, 且 $\theta^i = \sum_{j=1}^{r} A^i_j \omega^j$.

证明. 对任意 $p \in M$, $\omega^1, \cdots, \omega^r$ 在 p 处线性无关, 那么可以将其补充成 $T^\star_{M,p}$ 上一组基 $\omega^1, \cdots, \omega^r, \omega^{r+1}, \cdots, \omega^m$. 其中 $m = \dim M$, 则

$$\theta^i = \sum_{j=1}^{r} \theta^i_j \omega^j + \sum_{\alpha=r+1}^{m} \theta^i_\alpha \omega^\alpha, \quad \theta^i_j, \theta^i_\alpha \in C^\infty_{M,p}.$$

由于

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=1}^{r} \theta^i \wedge \omega^i = \sum_{i,j=1}^{r} \theta^i_j \omega^j \wedge \omega^i + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha=r+1}^{m} \theta^i_\alpha \omega^\alpha \wedge \omega^i \\ = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \left(\theta^i_j - \theta^j_i\right) \omega^j \wedge \omega^i + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha=r+1}^{m} \theta^i_\alpha \omega^\alpha \wedge \omega^i \end{aligned}$$

由于 ω^i 的无关性, 这表明 $\theta^i_j - \theta^j_i = 0$, $\theta^i_\alpha = 0$,

$$\text{i. e.} \begin{cases} \theta^i_j = \theta^j_i, & \forall 1 \leqslant i, j \leqslant r; \\ \theta^i_\alpha = 0, & \forall 1 \leqslant i \leqslant r < \alpha \end{cases}$$

令 $A^i_j = \theta^i_j$, 那么 $\theta^i = \sum_{j=1}^{r} A^i_j \omega^j$. $\square$

2.3　Lie 导数

定义 2.3.1. *对流形 M 上固定一个切向量场 $X \in \Gamma(M, T_M) = \mathfrak{X}(M)$ 用 X_t 表示与 X 相伴的单参数变换群*[9]

定义 2.3.2. *对于光滑流形 M, N 与微分同胚 $f\colon M \to N$, 可以逐点定义*

$$(f_\star X)(q) = f_\star(X(p)).$$

其中 $q = f(p)$, $X \in \mathfrak{X}$.

这样就将每个切空间上的推出操作推广到了向量场上. 可以计算推出后的向量场对于函数的作用.

引理 2.3.3. *我们有*

$$(f_\star X)h = \underbrace{\overbrace{X(h \circ f)}^{C^\infty(M)} \circ f^{-1}}_{C^\infty(N)}, \quad h \in C^\infty(M).$$

这说明了上面住店定义确实给出了光滑的向量场.

但要注意对一般的光滑映射 $f\colon M \to N$. 我们没有办法把 M 上的向量场推出到 N 上. 对于 $N \setminus \operatorname{Im} f$ 上的区域, 没有什么办法选择 N 上的切向量, 而如果 f 不是单的, 也难以从多个推出的切向量中选择; 即使 f 既单又满, 选出来的切向量也很难保证形成一个光滑向量场.

前面提及的 X_t 就是一个微分同胚, 因此可以沿其推出. 这允许我们对函数和向量场分别给出 **Lie 导数 (Lie derivative)** 的定义.

定义 2.3.4. *对于 $f \in C^\infty(M)$ 和 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 定义 f 在 p 关于 X 的 Lie 导数:*

$$(\mathcal{L}_X f)(p) := \lim_{t\to 0} \frac{(X_t^\star f)(p) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_t(p)) - f(p)}{t}.$$

定理 2.3.5. *对任意 $f \in C^\infty(M)$ 与 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 有 $\mathcal{L}_X f = X(f)$.*

证明. 回忆 $X_t(p) = \gamma_p(t)$, 代入定义有

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma_p(t)) - f(\gamma_t(0))}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma_p) = (Xf)(p).$$

□

定义 2.3.6. *对向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 定义 Y 在 p 关于 X 的 Lie 导数为*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)(p) &= \frac{((X_{-t})_\star Y)(p) - Y(p)}{t} = \frac{(X_{-t})_\star(Y(X_t(p)) - Y(p))}{t} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (X_{-t})_\star(Y|_{X_t(p)}).\end{aligned}$$

[9] 也称 X 上流, 具体可以回顾之前的定义.

定理 2.3.7. *对任意两个向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 若 $\forall f$ 满足 $Xf = Yf$, 那么 $X = Y$.*

证明. 对每个点 $p \in M$ 取开领域 U 上坐标 φ, 在这个坐标上有

$$[X^i(p) - Y^i(p)] \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_p = 0.$$

取 $f(p)$ 为 $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ 第 j 个分量, 再使用鼓包函数延拓得到 $\widehat{f}\colon M \to \mathbb{R}$ 使得再 p 的一个领域内 $\widehat{f} = f$. 那么在 p 点处偏导数即为

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j.$$

代入求和得到

$$\sum_i [X^i(p) - Y^i(p)]\delta_i^j = X^j(p) - Y^j(p) = 0.$$

因此 X, Y 在每个点处的每个分量都相等, 因此作为向量场也想等. □

上述定理说明了向量场完全由它确定的导子决定. 而相反的, 任何一个导子也确定一个向量场, 这是因为刀子在每一点附近满足切向量的定义. 因此在每一点都确定了一个向量, 可以进一步证明这样确定的向量场是光滑的. 这说明纯几何的向量场的概念实际上也可以表述为纯代数的 $C^\infty(M)$-导子的概念.

定理 2.3.8. *对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 有 $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.*

这解释了为什么之前用 $[\cdot, \cdot]$ 这个记号.

证明. 由定理2.3.7知只需证明 $\forall f$ 被 $\mathcal{L}_X Y$ 与 $[X, Y]$ 分别作用相等. 对于前者

$$(\mathcal{L}_X Y)f = \lim_{t \to 0} \frac{((X_{-t})_\star Y)f - Yf}{t}$$

由引理2.3.3知

$$((X_{-t}) \star Y)f = \underbrace{Y(f \circ X_{-t})}_{C^\infty(M)} \circ X_{-t}^{-1} = Y(f \circ X_{-t}) \circ X_t.$$

定义 $g_1(t) = Y(f \circ X_{-t}) \circ X_t$, $g_2(t) = Yf \circ X_t$, $g_3(t) = Yf$.

故只需分别计算 $\dfrac{g_1(t) - g_2(t)}{t}$, $\dfrac{g_2(t) - g_3(t)}{t}$, 在相加即可.

对于前者, 用线性性得

$$\lim_{t \to 0} \left. \frac{g_1(t) - g_2(t)}{t} \right|_p = \lim_{t \to 0} \left. \frac{Y(f \circ X_{-t} - f)}{t} \right|_{X_t(p)} = Y \left(\lim_{t \to 0} \frac{f \circ X_{-t} - f}{t} \right) \Bigg|_{X_t(p)}.$$

而内侧的极限为 $-\mathcal{L}_X f$ 的定义, 故此极限为 $-Y(Xf)$.

另一个方面, 由定义立刻有

$$\lim_{t \to 0} \frac{g_2(t) - g_3(t)}{t} = \mathcal{L}_X(Yf) = X(Yf).$$

从而定理得证. □

回忆 2.3.9. 这里再次给出定理*1.5.9.*

对于两个向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, T_M)$. 分别伴随单参数变换群 X_t 与 Y_t. 下列说法等价:

1. $[X, Y] = 0$. 即 X, Y 可交换: $[X, Y] = [Y, X]$.
2. $(X_t)_\star Y = Y$. 这是给上下建立关系的桥梁.
3. $X_s \circ Y_t = Y_t \circ X_s$. 即 $X_\clubsuit$ 与 $Y_\spadesuit$ 可交换.

这个定理允许我们对向量场什么时候交换做几何上的解释. 从一个点 p 出发, 考虑 $(s, t) \mapsto X_s(Y_t(p))$. 这给出了一个二维曲面, 而 (s, t) 是其上坐标. 由于两个单

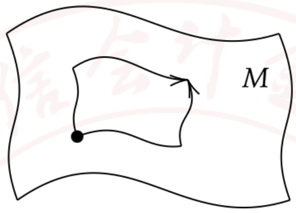

图 2.1: 流所给出的二维曲面

参数群交换. 我们也可以先应用 X_s 再应用 Y_t. 结果是一样的. 这使得沿着两个向量场的流构成类似二维坐标系的结构. 进一步, 如果有 r 组互相垂直的向量场, 就可以构造出一个 r 维坐标系. 在这个坐标系下, 这 r 个向量场就被拉直了.

定义 2.3.10. 对于 $X \in \mathfrak{X}(M)$. 伴有单参数变换群 X_t. 定义 k-形式 $\omega \in \mathcal{A}^k$ 关于 X 的 *Lie* 导数为 k-形式:

$$\mathcal{L}_X \omega = \lim_{t \to 0} \frac{X_t^\star \omega - \omega}{t}.$$

0-形式 (即 C_M^∞) 的 *Lie* 导数与之前定义的定义*2.3.4*相同.

定理 2.3.11. 对于 k-形式 $\omega \in \mathcal{A}^k$, 有

$$(\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \cdots, X_k) = X \underbrace{\omega(X_1, \cdots, X_k)}_{C^\infty(M)} - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \cdots, \overbrace{[X, X_i]}^{\text{替换 } X_i}, \cdots, X_k).$$

即

$$\mathcal{L}_X(\omega(X_1, \cdots, X_K)) = (\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \cdots, X_k) + \sum_{i=1}^{k} \omega(x_1, \cdots, \underbrace{\mathcal{L}_X X_i}_{\text{替换 } X_i}, \cdots, X_k).$$

定理 2.3.12. 对任意 $\alpha \in \mathcal{A}^k$, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha(X_1, \cdots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

定理 2.3.13 (Cartan magic formula). 以下恒等式成立

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X &= i_{[X,Y]}. \\ \mathcal{L}_X &= i_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i_X. \end{aligned}$$

证明. 只需定理2.3.11, 2.3.12. 详见[Morita. Geometry of differential forms, 定理 2.11] □

用上述 Cartan 魔法公式可直接推得其他恒等式, 下面直接给出

定理 2.3.14. 有下恒等式成立

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) =& (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta. \\ \mathrm{d}(\mathcal{L}_X \alpha) =& \mathcal{L}_X(\mathrm{d}\alpha). \\ \mathcal{L}_{[X,Y]}\alpha =& \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \alpha) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \alpha). \end{aligned}$$

第三章　流形上的积分

前两节的重点都是计算.

第一节定向问题是对于 R^n 中定向的自然推广, 考虑 n 次外幂 $\omega \in \Lambda^n(V)$, 其从 + 到 − 必然经过 $\mathbf{0}$, 自然的就可以对 $\Lambda^k(V) \setminus \{0\}$ 做讨论. 定向为后续流形上的积分提供了基础.

第二节是流形上的积分, 重点是 Stokes 定理.

第三节是 de Rham 上同调. 这一节内容较为代数, 但也是 R^n 中曲线曲面积分与路径无关的根本原因. 介绍了 de Rham 上同调, 计算了一些简单的上同调群. de Rham 上同调是光滑流形上一个非常重要的概念, 其赋予微分形式以代数结构. 这里指出 de Rham 上同调不想本文介绍的如此简单基础. 笔者本想在这一起给出复流形的相应概念: Doubeault 上同调, 其中将涉及到 Hodge 定理, Kähler 流形等复几何的基本知识. 但复几何相关内容笔者想专写一本笔记. (大概率是手写的, 即不是 LaTeX 排版的, 很大一部分原因是学校并不开设这门课, 笔者自学. 以后如果有休闲时间会整理部分.)

3.1 定向

定义 3.1.1 (定向). *对于光滑流形 M, $\dim M = m$. 非零光滑 m-形式全体*[1]*$\mathcal{A}^m \setminus \{0\}$ 有两个连通分支, 则称 M 是***可定向的** ***(orientable)***.

上述定义很显然地给出了可定向的含义, 即可将其中一个连通分支中的 k-形式定义为与流形定向一致的, 另一个定位相反的.

对于不同坐标之间的转移函数可以化简. 假设两组坐标 x^i, y^i 之间的转移函数为 f, 那么

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^m = \bigwedge_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j.$$

按反对称展开有

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{m} \frac{\partial y^{\sigma(i)}}{\partial x^i} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m.$$

换句话说

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^m = \det \mathrm{Jac}(f) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m.$$

因此 m-形式丛也称为**行列式线丛**[2].

下面给出另一种定向的等价定义

定义 3.1.2 (定向). *若存在 $\omega \in \mathcal{A}^m$ 使得其在每一点都不为零, 则称 M 为***可定向流形** ***(orientable manifold)***.

对于 $\omega \in \mathcal{A}^k$, ω 逐点乘以一个正函数 $f \in C^\infty_M = \mathcal{A}^0$, 它仍满足条件[3]. 若 $\omega' = f \cdot \omega$, 则记 ω, ω' 等价. 那么这给出了 M 上所有非零 m-形式上的等价关系 $\sim$.

定义 3.1.3 (定向流形). *集合 $\mathcal{A}^M \setminus \{0\}/\sim$ 称为 M 的定向集.*

*一个可定向流形选择了一个具体的定向后, 称为***定向流形** ***(oriented manifold)***.

[1]这是 1 维的.

[2]这里线丛的意思是其纤维都是一维的

[3]每一点都不为零.

3.2 流形上的积分

定义 3.2.1 (标准 p 单形). 对于每一个 $p \geqslant 1$, 令

$$\Delta^p := \left\{(a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{R}^p \colon \sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant 1, a_i \geqslant 0\right\}$$

并称 Δ^p 为 $\mathbb{R}^p$ 中标准 p 单形. 对于 $p=0$, 令 $\Delta^0 = \{0\}$.

定义 3.2.2 (边缘算子). 定义如下:

$$\partial \colon \Delta^p \longrightarrow \Delta^{p-1}$$

$$\sigma = (x^1, \cdots, x^p) \longmapsto \begin{cases} \sigma^0 = \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{p-1} x^i, x^1, \cdots, x^{p-1}\right), \\ \sigma^i = (-1)^i (x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \cdots, x^p) \end{cases}$$

例 3.2.3. 当 $p=2$, 有下图3.1

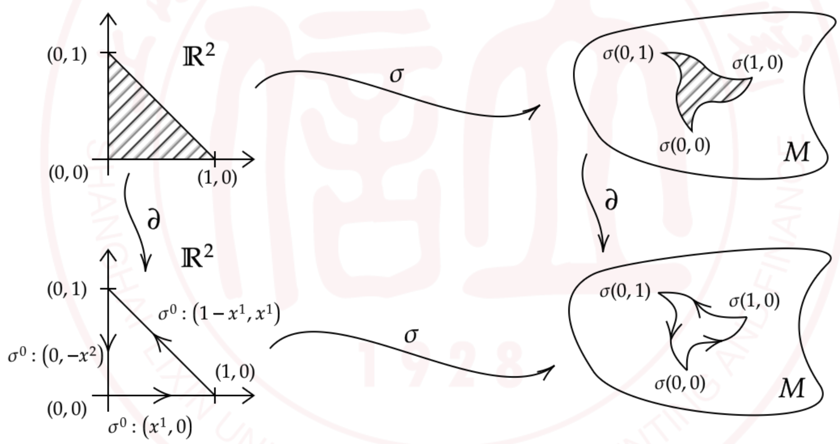

图 3.1: 2 单形与边缘算子

定理 3.2.4 (Stokes). C 为 p-单形, $\omega^{(p-1)} \in \mathcal{A}^{p-1}$ 为光滑 $(p-1)$-形式, 则

$$\int_{\partial C} \omega^{(p-1)} = \int_C \mathrm{d}\omega^{(p-1)}.$$

证明. 当 $p=1$ 时, $\partial \Delta^1 = \{0, 1\}$, $\omega^{(0)} \in \mathcal{A}^0 = C^\infty(M)$. 即为微积分基本定理.

$$\omega^{(0)}(1) - \omega^{(0)}(0) = \int_{t=0}^{1} \mathrm{d}\omega^{(0)} = \int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}\omega^{(0)}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t.$$

当 $p \geqslant 2$ 时, 令

$$\omega^{(p-1)} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} a^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p.$$

其中 a^i 源于 $C=\Delta^p$. 那么

$$\begin{aligned}\int_{x\in\Delta^p}\mathrm{d}\omega^{(p-1)}&=\int_{x\in\Delta^p}\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}a^i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p\right)\\&=\int_{x\in\Delta^p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p\\&=\int_{x\in\Delta^p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial a^i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_{x\in\sigma^0}\omega^{(p-1)}&=\int_{(x^1,\cdots,x^{p-1})}\omega\left(1-\sum_{j=1}^{p-1}x^j,x^1,\cdots,x^{p-1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\int_{(x^1,\cdots,x^{p-1})}a^i\left(x^1,\cdots,x^{i-1},1-\sum_{j=1}^{p-1}x^j,x^i,\cdots,x^{p-1}\right)\\&\quad\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{p-1}.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

对任意 $1\leqslant i\leqslant p$, 有

$$\int_{x\in\sigma^i}\omega^{(p-1)}=\int_{(-1)^i(x^1,\cdots,x^{p-1})}a^i(x^1,\cdots,x^{i-1},0,x^i,\cdots,x^{p-1})\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{p-1}\tag{3.2.2}$$

将上式相加

$$\begin{aligned}(3.2.1)+(3.2.2)=&\sum_i\int_{(x^1,\cdots,x^{p-1})}(-1)^{i-1}\Bigg(a^i\left(x^1,\cdots,x^{i-1},1-\sum_{j=1}^{p-1}x^j,x^i,\cdots,x^{p-1}\right)\\&-a^i(x^1,\cdots,x^{i-1},0,x^i,\cdots,x^{p-1})\Bigg)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{p-1}\\=&\sum_i\int_{(x^1,\cdots,x^{p-1})}\int_{x^i=0}^{1-\sum\limits_{j=1}^{p-1}x^j}\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{p-1}\\=&\sum_i\int_{(x^1,\cdots,x^{p-1})}(-1)^{i-1}\int_{x^i=0}^{1-\sum\limits_{j\neq i}x^j}\frac{\partial a^i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p.\end{aligned}$$

□

3.3 de Rham 上同调

M 为光滑流形. 如我们所见. $\mathrm{d}\colon \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k+1}$ 是一个线性映射, 使得对于任何的 k 以及任意的 $\omega \in \mathcal{A}^k$, 有 $\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$, 于是我们得到一个 "de Rham 复形".

$$0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^m \xrightarrow{\mathrm{d}} 0, \quad m = \dim M.$$

我们下文用 $\alpha^{(p)}$ 表示光滑 p-形式, 即 $\alpha^{(p)} \in \mathcal{A}^p$.

定义 3.3.1. *对 p-形式做如下定义:*

1. *若 $\mathrm{d}\alpha^{(p)} = 0$, 则 p-形式 $\alpha^{(p)}$ 为***闭的 (closed)**.
2. *若存在一个 $(p-1)$-形式 $\beta^{(p-1)}$ 使得 $\alpha^{(p)} = d\beta^{(p-1)}$, 则 p-形式 $\alpha^{(p)}$ 为***恰当的 (exact)**.

我们用 $Z^p(M,\mathbb{R})$ 表示闭 p-形式的集合, 用 $B^p(M,\mathbb{R})$ 表示恰当 p-形式的集合.

$$\begin{aligned} Z^p(M,\mathbb{R}) &:= \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\colon \mathrm{A}^p \to \mathcal{A}^{p+1}) = \{\alpha^{(p)} \in \mathcal{A}^p = \Gamma(M,\mathcal{A}^p_M) \colon \mathrm{d}\alpha^{(p)} = 0\} \\ B^p(M,\mathbb{R}) &:= \mathrm{Im}(\mathrm{d}\colon \mathcal{A}^{p-1} \to \mathcal{A}^p) = \{\alpha^{(p)} = \mathrm{d}\beta^{(p-1)} \in \mathcal{A}^p = \Gamma(M,\mathcal{A}^p_M)\} \end{aligned}$$

显然 $Z^p(M,\mathbb{R})$ 与 $B^p(M,\mathbb{R})$ 都是 $\mathcal{A}^p = \Gamma(M,\mathcal{A}^p_M)$ 的向量子空间, 此外由于 $\mathrm{d}^2 = 0$, 我们有 $B^p(M,\mathbb{R}) \subseteq Z^p(M,\mathbb{R})$, $B^p(M,\mathbb{R})$ 是 $Z^p(M,\mathbb{R})$ 的一个加法子群.

定义 3.3.2 (de Rham 上同调)**.** *商群 $H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) := Z^p(M,\mathbb{R})/B^p(M,\mathbb{R})$ 称为 M 的***第 p 个 de Rham 上同调群 (p th de Rham cohomology group of M)**.

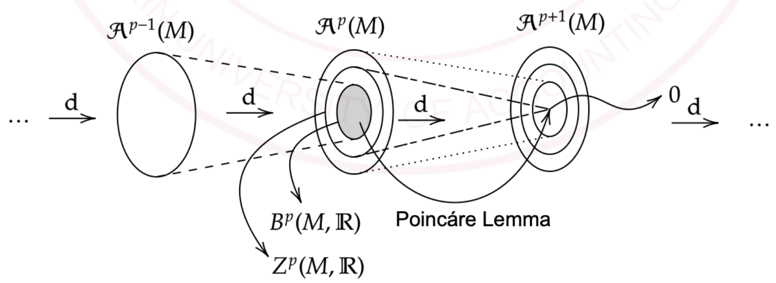

图 3.2: de Rham 上同调

对于任意 $\alpha^{(p)} \in Z^p(M,\mathbb{R})$. 我们用 $[\alpha^{(p)}]_{\mathrm{dR}}$ 表示对应的上同调类.

注 3.3.3. 对于 $p > m = \dim M$, $B^p(M,\mathbb{R}) = Z^p(M,\mathbb{R}) = \{0\}$, 故 $H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) = \{0\}$.

定义 3.3.4. *在 $\dim H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) < \infty$ 的情况下. 我们称数*

$$b_p(M) = \dim H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$$

为 M 的**第 p 个 *Betti* 数 *(p th Betti number)***. 称数

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k b_k(M)$$

为 M 的 ***Euler* 示性数 *(Euler characteristic)***.

回忆 3.3.5 (同伦)**.** *设 X, Y 为拓扑空间, $f, g\colon X \to Y$ 为两个连续映射. 若存在连续映射 $H\colon X \times [0,1] \to Y$ 使得对于任何 $x \in X$ 满足:*

1. $H(x,0) = f(x)$,
2. $H(x,1) = g(x)$.

*则称 f 与 g 是**同伦的 (homotopic)**. 映射 H 被称为从 f 到 g 的**同伦 (homotopy)**.*

直观的来说, 同伦描述了连续映射 f 可以通过连续的方式逐渐变形为连续映射 g.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow H"] & Y \end{tikzcd}$$

定义 3.3.6. *若存在光滑映射 $\varphi\colon M \to N$ 与 $\psi\colon N \to M$ 使得 $\varphi \circ \psi$ 同伦与 id_N, 且 $\psi \circ \varphi$ 同伦与 id_M, 则称这两个流形 M, N 是同伦等价的.*

注 3.3.7. *若 M 是紧的 (在至少同伦等价的意义下), 那么它的所有 de Rham 上同调群都是有限维的. 另一方面, 构造一个具有无限为的 de Rham 上同调群并不难, 例如流形 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$, 其上 de Rham 上同调群是无穷维的.*

推论 3.3.8. *若 M 是单连通的, 那么 $H^0_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$. 更一般的, 若 M 有 m 个连通分支, 那么 $H^0_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^m$*

例 3.3.9. *对于 $M = \mathbb{R}$, 有 $H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.*

对于 $k \geqslant 2$, 有 $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$.

例 3.3.10. *对于 $M = \mathbb{S}^1$, 有 $H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$. 这里注意:*

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \simeq \frac{\{f \in C^\infty(\mathbb{R})\colon f \text{ 是以 } 2\pi \text{ 为周期的}\}}{\left\{g \in C^\infty(\mathbb{R})\colon g \text{ 是以 } 2\pi \text{ 为周期的, 且 } \int_0^{2\pi} g(\theta)\mathrm{d}\theta = 0\right\}}$$

对于 $k \geqslant 2$, 有 $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) = \{0\}$.

定义 3.3.11. *对于 $f\colon M^m \to N^n \in C^\infty(M, N)$, 自然对 $\forall p$ 有*

$$\begin{aligned} f^\star\colon \mathcal{A}^p|_N &\longrightarrow \mathcal{A}^p|_M \\ \alpha^{(p)} &\longmapsto \alpha^{(p)}\circ f \end{aligned}$$

考虑如下

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{p-1}|_N \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "f^\star"] & \mathcal{A}^p|_N \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "f^\star"] & \mathcal{A}^{p+1}|_N \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "f^\star"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{p-1}|_M \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^p|_M \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{p+1}|_M \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

那么自然有

$$\begin{aligned} f^\star|_{H^p_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})}\colon H^p_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R}) &\longrightarrow H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \\ [\alpha^{(p)}]_{\mathrm{dR}} &\longmapsto [\alpha^{(p)}\circ f]_{\mathrm{dR}} \end{aligned}$$

特别的, 若还有 $g\colon N\to X\in C^\infty(N,X)$. 那么有

$$\begin{aligned} H^p_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{R}) &\xrightarrow{g^\star} H^p_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R}) \xrightarrow{f^\star} H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \\ [\alpha^{(p)}]_{\mathrm{dR}} &\longmapsto [\alpha^{(p)}\circ g]_{\mathrm{dR}} \longmapsto [\alpha^{(p)}\circ g\circ f]_{\mathrm{dR}} \end{aligned}$$

显然 $f^\star$ 是一个群同态. 容易验证:

- $(g\circ f)^\star = f^\star\circ g^\star$.
- $\mathrm{id}^\star = \mathrm{id}$.

由此我们看到, de Rham 上同调是一个光滑不变量.

进一步, 当 $f\colon M\to N$ 为一个光滑同胚, 有下图交换:

$$\begin{tikzcd} H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \arrow[d, "(f^{-1})^\star"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ H^p_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R}) \arrow[r, "f^\star"] & H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

这样一来有下述定理

定理 3.3.12 (微分同胚不变性). *若 $f\colon M\to N$ 为一个微分同胚, 那么对于所有的 p,*

$$f^\star\colon H^p_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})\to H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$$

为一个线性同构.

特别的对于所有的 p, 有 $b_p(N)=b_p(M)$ 且 $\chi(N)=\chi(M)$.

定义 3.3.13 (上积). *设 M 是一个光滑流形, 对于 $\alpha\in H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$, $\beta\in H^q_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$.*

若 ω 是代表 α 的 p 次闭形式, η 是代表 β 的 q 次闭形式, 则 α 与 β 的 ***上积 (cup product)*** *$\alpha\cup\beta\in H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$ 定义为 $\alpha\cup\beta=[\omega\wedge\eta]_{\mathrm{dR}}$.*

注 3.3.14. 对于任意 $\varphi\colon M \to N \in C^\infty(M,N)$, 上积使得

$$H^\star_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$$

成为一个分次环, 并且 $\varphi^\star$ 实际上是 $H^\star_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})$ 到 $H^\star_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$ 的一个环同态. 这是因为 $\varphi^\star(\alpha\wedge\beta) = (\varphi^\star\alpha)\wedge(\varphi^\star\beta)$. 所以若 φ 是微分同胚, 那么 $\varphi^\star\colon H^\star_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R}) \to H^\star_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$ 为一个环同构.

定理 3.3.15 (de Rham 上同调群的同伦不变性)**.** 若 M 同伦等价与于 N, 则对任意的 k, 有

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \simeq H^p_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})$$

为了证明 de Rham 上同调群的同伦不变性, 先证明函子同伦不变性:

定理 3.3.16 (函子同伦不变性)**.** 设 $f,g \in C^\infty(M,N)$ 是同伦的, 则

$$f^\star = g^\star\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R}) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}).$$

证明是构造如下图所示的上链同伦

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k-1}(N) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[dl, dashed, "h_{k-1}"'] \arrow[d, shift right, "g^\star"'] \arrow[d, shift left, "f^\star"] & \mathcal{A}^{k}(N) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[dl, dashed, "h_{k}"'] \arrow[d, shift right, "g^\star"'] \arrow[d, shift left, "f^\star"] & \mathcal{A}^{k+1}(N) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[dl, dashed, "h_{k+1}"'] \arrow[d, shift right, "g^\star"'] \arrow[d, shift left, "f^\star"] & \cdots \arrow[dl, dashed, "h_{k+2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k+1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定义 3.3.17 (上链同伦)**.** 设 $f,g \in C^\infty(M,N)$ 是同伦的. 若是一列映射 $h_k\colon \mathcal{A}^k(N) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ 满足

$$g^\star - f^\star = \mathrm{d}_M h_k + h_{k+1}\mathrm{d}_N.$$

则称映射列 $h = (h_k)$ 是 $f^\star$ 和 $g^\star$ 之间的一个**上链同伦**.

先假设上链同伦存在, 我们证明函子同伦不变性. 对任意 $[\omega]_{\mathrm{d}R} \in H^k_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})$, 有

$$g^\star\omega - f^\star\omega = (\mathrm{d}h + h\mathrm{d})\omega = \mathrm{d}(h\omega) \in B^k(M,\mathbb{R}).$$

因此 $f^\star([\omega]_{\mathrm{dR}}) = [f^\star\omega]_{\mathrm{dR}} = [g^\star\omega]_{\mathrm{dR}} = g^\star([\omega]_{\mathrm{dR}})$.

最后构造上链同伦, 工具是使用特定向量场生成的流, 先证明一个引理

引理 3.3.18. 设 X 为 M 上完备向量场, X_t 为 X 生成的流, 则存在线性算子 $Q_k\colon \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$ 使得对任意的 $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ 有

$$X_1^\star\omega - \omega = \mathrm{d}Q_k(\omega) + Q_{k+1}(\mathrm{d}\omega).$$

首先, 直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_t^\star\omega = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} X_{t+s}^\star\omega = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} X_s^\star X_t^\star\omega = \mathcal{L}_X(X_t^\star\omega) = \mathrm{d}i_X(X_t^\star\omega) + i_X\mathrm{d}(X_t^\star\omega),$$

于是对于 $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, 若令 $Q_k(\omega) = \int_0^1 i_X(X_t^\star\omega)\mathrm{d}t$, 则 $Q_k\colon \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$, 且

$$X_1^\star\omega - \omega = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_t^\star\omega\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}Q_k(\omega) + Q_{k+1}(\mathrm{d}\omega).$$

现在利用该引理完成函子同伦不变性证明的最后一步, 即构造上链同伦 $h_k\colon \mathcal{A}^k(N) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$: 设 $W = M \times \mathbb{R}$, 则 $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$ 是 W 上的完备向量场, 且它生成的流是

$$X_t(p, a) = (p, a + t).$$

由引理, 存在线性算子 $Q_k\colon \mathcal{A}^k(W) \to \mathcal{A}^{k-1}(W)$ 使得

$$X_1^\star\omega - \omega = \mathrm{d}Q_k(\omega) + Q_{k+1}(\mathrm{d}\omega).$$

在根据流形上的反函数定理, 任意两个同伦的光滑映射都是光滑同伦. 设 $F\colon W \to N$ 是 f 和 g 之间的光滑同伦, 并设 $\iota\colon M \hookrightarrow W$ 是包含映射 $\iota(p) = (p, 0)$, 则

$$f = F \circ \iota \quad 且 \quad g = F \circ X_1 \circ \iota,$$

由此对任意 $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$ 有

$$g^\star\omega - f^\star\omega = \iota^\star X_1^\star F^\star\omega - \iota^\star F^\star\omega = \iota^\star(\mathrm{d}Q_k + Q_{k+1}\mathrm{d})F^\star\omega = (\mathrm{d}\iota^\star Q_k F^\star + \iota^\star Q_{k+1}F^\star\mathrm{d})\omega.$$

所以如果记 $h_k = \iota^\star Q_k F^\star$, 则 $h_k\colon \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(N)$ 满足

$$g^\star\omega - f^\star\omega = (\mathrm{d}h_k + h_{k+1}\mathrm{d})\omega,$$

从而这些 h_k 就是所需的上链同伦.

定理 3.3.19 (连续函数的 Whitney 逼近定理)**.** *设 M, N 是光滑流形, $g \in C^0(M, N)$ 是连续映射. 则存在同伦于 g 的光滑映射 $f \in C^\infty(M, N)$. 此外, 若 g 在闭子集 $A \subset M$ 上光滑, 则可以使得 $f|_A = g|_A$.*

到这里已经成功证明了定理 (函子同伦不变性), 现用其证明 de Rham 上同调群的同伦不变性: 设 $\varphi\colon M \to N$ 和 $\psi\colon N \to M$ 是连续映射且满足 $\varphi \circ \psi \sim \mathrm{id}_N$ 和 $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{id}_M$. 根据连续映射的 Whitney 逼近定理, 光滑流形之间的任意连续映射都与某个光滑映射同伦, 故存在 $\varphi_1 \in C^\infty(M, N)$ 和 $\psi_1 \in C^\infty(M, N)$ 使得 $\varphi_1 \sim \varphi$ 且 $\psi_1 \sim \psi$. 因此 $\varphi_1 \circ \psi_1$ 和 $\psi_1 \circ \varphi_1$ 都是光滑映射, 而且 $\varphi_1 \circ \psi_1 \sim \mathrm{id}_N$, $\psi_1 \circ \varphi_1 \sim \mathrm{id}_M$. 于是利用函子性并应用函子同伦不变性可得

$$\varphi_1^\star \circ \psi_1^\star = \mathrm{id}\colon H_{\mathrm{dR}}^k(M, \mathbb{R}) \to H_{\mathrm{dR}}^k(M, \mathbb{R})$$
$$\psi_1^\star \circ \varphi_1^\star = \mathrm{id}\colon H_{\mathrm{dR}}^k(N, \mathbb{R}) \to H_{\mathrm{dR}}^k(N, \mathbb{R})$$

所以 $\varphi^\star$ 和 $\psi^\star$ 是线性同构.

到这里我们完成了对 de Rham 上同调群的同伦不变性的证明. □

定义 3.3.20 (星形区域). Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点的开区域, 若 $\forall x \in \Omega$, 有 $tx \in \Omega, \forall t \in [0,1]$, 则称 Ω 为**星形区域** ***(star-shaped region)***.

引理 3.3.21 (Poincáre). 若 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的星形区域, 则对于 $\forall k \geqslant 1$, 有 $H_{\mathrm{dR}}^k(U,\mathbb{R}) = 0$. 特别的, 对对于 $\forall k \geqslant 1$, 有 $H_{\mathrm{dR}}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = 0$.

证明. 设 ω 是任意闭的 k-形式 $(k \geqslant 1)$, 只需证明 ω 是恰当的. □

推论 3.3.22 (拓扑不变性). 若 M 于 N 同胚, 则对 $\forall k$, 有

$$H_{\mathrm{dR}}^k(M,\mathbb{R}) \simeq H_{\mathrm{dR}}^k(N,\mathbb{R})$$

定义 3.3.23 (奇异链群). 设 M 为光滑流形, 标准 p-单形 Δ^p. 那么 M 的 p-奇异链群 ${}_\infty S_p(M,\mathbb{R})$ 定义为以从 Δ^p 到 M 的连续映射 $\sigma\colon \Delta^p \to M$ 为基的自由 *Abel* 群, 即

$${}_\infty S_p(M,\mathbb{R}) := \left\{ \sum_{i=1}^n n_i\sigma_i \,\middle|\, n_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i \in C(\Delta^p, M), n \in \mathbb{N} \right\}$$

同时存在边缘算子

定义 3.3.24. 边缘算子

$$\begin{aligned} \partial_p\colon {}_\infty S_p(M,\mathbb{R}) &\longrightarrow {}_\infty S_{p-1}(M,\mathbb{R}) \\ \sigma &\longmapsto \partial_p\sigma \end{aligned}$$

其中

$$\partial_p\sigma := \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ k_i^{p-1}.$$

其中

$$\begin{aligned} k_i^{p-1}\colon \Delta^{p-1} &\longrightarrow \Delta^p \\ (x^1,\cdots,x^{p+1}) &\longmapsto \begin{cases} \left(1-\sum\limits_{j=1}^{p-1} x_j, x_1, \cdots, x_{p-1}\right), & i=0. \\ (x_1,\cdots,x^{i-1},0,x^i,\cdots,x^{p-1}), & i \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

自然有 $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$. 这样有一个链复形:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+2}} {}_\infty S_{p+1}(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_{p+1}} {}_\infty S_p(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_p} {}_\infty S_{p-1}(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots$$

定义 3.3.25 (同调群). 注意到有 $\operatorname{Ker}\partial_p \supseteq \operatorname{Im}\partial_{p+1}$. 商群 $H_p(M,\mathbb{R}) := \operatorname{Ker}\partial_p / \operatorname{Im}\partial_{p+1}$ 称为第 p 个 M 的**同调群** ***(homology group)***.

定理 3.3.26. *同调群与上同调群有关系:*

$$(H_p(M,\mathbb{R}))^\star \simeq H^p_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}).$$

若 ${}_\infty S^p(M,\mathbb{R})$ 定义为 ${}_\infty S_p(M,\mathbb{R})$ 的对偶群, 即

$${}_\infty S^p(M,\mathbb{R}) := \operatorname{Hom}\left({}_\infty S_p(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}\right)$$

定义上边缘算子 $\delta^n\colon {}_\infty S^p(M,\mathbb{R}) \to {}_\infty S^{p+1}(M,\mathbb{R})$.

同样类似有 $\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0$, 从而有奇异下链复形:

$$\cdots \xleftarrow{\delta^{n+1}} {}_\infty S^{p+1}(M,\mathbb{R}) \xleftarrow{\delta^n} {}_\infty S^p(M,\mathbb{R}) \xleftarrow{\delta^{n-1}} {}_\infty S^{p-1}(M,\mathbb{R}) \xleftarrow{\delta^{n-2}} \cdots$$

定义 3.3.27 (奇异上同调群). *奇异上同调群 $H^k_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R})$ 定义为商群:*

$$H^k_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R}) := \frac{\operatorname{Ker}\left(\delta^n\colon {}_\infty S^p(M,\mathbb{R}) \to {}_\infty S^{p+1}(M,\mathbb{R})\right)}{\operatorname{Im}\left(\delta^{n-1}\colon {}_\infty S^{p-1}(M,\mathbb{R}) \to {}_\infty S^p(M,\mathbb{R})\right)}$$

定理 3.3.28 (de Rham). *对 $\forall k$, 有*

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \simeq H^k_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R}).$$

第四章 Lie 群初步

在 Lie 之前, 数学家研究的群大多是有限群, 比如一个正三角形通过怎样的变换可以和原三角形完全重叠. 这种变换仅限 6 种. 那么如果在二维平面上一个正三角形可以通过任意保持图形间任意两点间距离的变换出现在新的位置, 那么这些变换是否也构成一个群? 答案是肯定的. 因为这种变换也满足群公理[1], 只是这些变换是无限且连续的. 这与之前研究的有限且离散的群不同, 这相当于将数学分析引入到了群论种. 这样的连续变换群就是李群. 更重要的是 Lie 找到了一种看待几何的新方法:

几何是由在群变换下保持不变的东西来定义的.

故上述变换被称之等距变换, 用几何的观念称之为等度量 (isometry).

更准确的说, 克莱因受到 Lie 影响, 提出 "埃尔朗根纲", 强调几何由变换群下的不变量定义, 等距变换对应度量几何 (如欧氏几何) 的不变量 (距离、角度).

[1]封闭性, 结合律, 单位元存在, 逆元存在.

4.1　Lie 群与 Lie 代数

4.1.1　Lie 群

首先给出 Lie 群的定义. 简单的说, Lie 群就是 “赋有光滑流形结构与群结构, 且二者相容” 的数学对象

定义 4.1.1 (Lie 群). *G 为光滑流形, 且为一个群[2], 满足映射:*

$$\begin{aligned} G\times G &\longrightarrow G \\ (\sigma,\tau) &\longmapsto \sigma\cdot\tau^{-1} \end{aligned}$$

*是光滑的, 则称 G 为一个 **Lie 群 (Lie group)**.*

一种等价定义是:

定义 4.1.2. *设 G 是一个群. 如果 G 上还赋有一个光滑流形结构, 且群乘法*

$$\begin{aligned} \mu\colon G\times G &\longrightarrow G \\ (g_1,g_2) &\longmapsto g_1\cdot g_2 \end{aligned}$$

*是一个光滑映射, 则称 G 是一个 **Lie 群**.*

这与之前定义的差异在于求逆运算, 故在考虑相容性时, 自然也应该要求它是光滑的. 在上述 Lie 群定义中没有直接要求这一点, 是因为在命题4.1.18中指出: 只要乘法运算是光滑的, 求逆运算自动光滑.

例 4.1.3. *$\mathbb{R}^n$ 是一个 Lie 群. 定义4.1.1中的光滑映射取为:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((a^1,\cdots,a^n),(b^1,\cdots,b^n)) &\longmapsto (a^1-b^1,\cdots,a^n-b^n) \end{aligned}$$

例 4.1.4. *$\mathbb{C}$ 中可逆元全体 $\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 为一个 Lie 群. $\mathbb{C}^\times$ 对加法不封闭, 故群乘法取数乘, 定义4.1.1中的光滑映射取为:*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^\times &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ (z_1,z_2) &\longmapsto z_1/z_2. \end{aligned}$$

例 4.1.5. *球面 $\mathbb{S}^1$ 为 Lie 群. 定义4.1.1中的光滑映射取为:*

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}) &\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

[2]单位元本文记作 e

例 4.1.6. *矩阵 Lie 群 (群乘法取矩阵乘法) 是 Lie 群的最终要的例子. 矩阵 Lie 群有很多, 最简单的矩阵 Lie 群有*

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) =& \{X \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon \det X \neq 0\}, \quad (\text{一般线性群}) \\
\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) =& \{X \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon \det X = 1\}, \quad (\text{特殊线性群}) \\
\mathrm{O}(n) =& \{X \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon XX^\top = I_n\}, \quad (\text{正交群}) \\
\mathrm{U}(n) =& \{X \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon X\overline{X}^\top = I_n\}, \quad (\text{酉群})
\end{aligned}$$

事实上, Lie 群的一个重要结果是: 任意紧 Lie 群都可以被实现为矩阵的 Lie 群.

定理 4.1.7 (紧 Lie 群的矩阵表示)**.** *对任意的紧 Lie 群 G, 存在单的群同态 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 使得 $\rho(G)$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的一个闭子群.*

证明. Peter - Weyl 定理 □

写到这里, 我们自然好奇: Lie 群的乘积、Lie 群的子群等对象是否仍为 Lie 群?

例 4.1.8. *Lie 群 G 与 Lie 群 H 的乘积 $G\times H$ 为一个 Lie 群. 定义4.1.1中的光滑映射取为:*

$$\begin{aligned}
(G\times H)\times(G\times H) &\longrightarrow G\times H \\
((\sigma_1,\tau_1),(\sigma_2,\tau_2)) &\longmapsto (\sigma_1\cdot\sigma_2^{-1}, \tau_1\cdot\tau_2^{-1})
\end{aligned}$$

例 4.1.9. *环面[3]$\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1}_{n\text{ 个}}$ 为一个 Lie 群.*

例 4.1.10. *$\mathbb{R}^1$ 上仿射变换群[4]为一个 Lie 群.*

定义仿射变换

$$(s,t)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto sx+t.$$

那么其上群乘法自然的定义为映射的复合, 取定义4.1.2中的光滑映射为:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^\times\times\mathbb{R} \\
((s_1,t_1),(s_2,t_2)) &\longmapsto (s_1s_2, s_1t_2+t_1)
\end{aligned}$$

例 4.1.11. *$\mathbb{R}^n$ 上仿射变换群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n$ 为一个 Lie 群.*

定义仿射变换

$$(A,v)\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, \quad \alpha\mapsto A\alpha+v.$$

那么其上群乘法自然的定义为映射的复合, 取定义4.1.2中的光滑映射为:

[3] 实的

[4] $\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}$ 为仿射变换群, 其中 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中全体可逆元.

$$\begin{aligned}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n)\times(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n\\ ((A_1,v_1),(A_2,v_2)) &\longmapsto (A_1A_2, A_1v_2+v_1)\end{aligned}$$

到这里, 一些简单但重要的 Lie 群例子便已经给出了, 现在我们不得不思考这样一个问题: 是不是每个光滑流形都能赋有一个 Lie 群结构? 这个问题的研究将追寻到 1900 年 Hilbert 提出的 23 个问题, 其中的第五个问题:

如所周知, Lie 借助于连续变换群的概念⋯⋯Lie 假设了定义群的函数必须可微⋯⋯可微性假设是否确实必不可少呢? 它会不会就是群概念本身和其他公理的推论?

用现代的语言来说, Hilbert 第五问题就是在问: 底空间是拓扑流形的拓扑群, 是否具有光滑结构使之成为 Lie 群? 该问题最终在 1950 年代被 A. Gleason 以及 D. Montgomery, L. Zippin 解决, 其答案是肯定的: 设 G 为任意一个底空间是拓扑流形的拓扑群, 那么 G 上存在一个光滑结构使得它成为李群.

注 4.1.12. *这样我们可以回答之前的问题: 不是每个光滑流形都能赋有一个 Lie 群结构. 例如在所有球面 $\mathbb{S}^n$ 中, 仅有 $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$ 和 $\mathbb{S}^3$ 可以带有 Lie 群结构.*

注 4.1.13. *Lie 群将满足一些简单的拓扑性质:*

1. *Lie 群的底空间必须是可定向的.*
2. *连通 Lie 群 G[5]的基本群 $\pi_1(G)$ 一定是 Abel 群.*
3. *李群 G 的切丛 T_G 都是平凡的: $T_G \simeq G\times\mathbb{R}^{\dim G}$.*

实际上, 我们是通过证明 $T_{\mathbb{S}^2}\not\simeq\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$ 来证明 $\mathbb{S}^2$ 上没有 Lie 群结构. 结合上述拓扑障碍可知, 在所有二维闭流形中, 唯一带有 Lie 群结构的是 $\mathbb{T}^2=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$.

定义 4.1.14 (左 (resp. 右) 乘法)**.** *设 G 是一个 Lie 群, 对任意 $a,b\in G$, 存在两个自然映射:* ***左乘运算 (左平移)***

$$L_a\colon G\to G,\quad g\mapsto a\cdot g.$$

与 ***右乘运算 (右平移)***

$$R_b\colon G\to G,\quad g\mapsto g\cdot b.$$

如果记

$$\begin{aligned} j_a\colon G\hookrightarrow G\times G,&\quad j_a(g)=(a,g);\\ i_b\colon G\hookrightarrow G\times G,&\quad i_b(g)=(g,b).\end{aligned}$$

那么

$$L_a=\mu\circ j_a,\quad R_b=\mu\circ i_b.$$

[5]或者是更一般的连通拓扑群.

命题 4.1.15. *L_a 与 R_b 都是光滑的. 此外显然*

$$L_a^{-1} = L_{a^{-1}}, \quad R_b^{-1} = R_{b^{-1}}.$$

从而 L_a 与 R_b 都是微分同胚. 且有 L_a 与 R_b 可交换:

$$L_a R_b = R_b L_a.$$

命题 4.1.16 (Lie 群切丛的拓扑)**.** *对任意 m 维 Lie 群 G, 其切丛 T_G 微分同胚与 $G \times \mathbb{R}^m$.*

现在来说明定义4.1.2中的逆的光滑性:

首先说明左右乘法可以用于计算群乘法 μ 的微分:

引理 4.1.17 (Lie 群乘法映射的切映射)**.** *乘法映射 $\mu\colon G \times G$ 的微分为*

$$\mu_{\star,(a,b)}(X_a, Y_b) = (R_b)_{\star,a}(X_a) + (L_a)_{\star,b}(Y_b), \quad \forall (X_a, Y_b) \in T_{G,a} \times T_{G,b} \simeq T_{G\times G,(a,b)}.$$

证明. 对任意光滑函数 $f \in C^\infty(G)$, 有

$$\begin{aligned}(\mu_{\star,(a,b)}(X_a, Y_b))(f) &= (X_a, Y_b)(f \circ \mu) = X_a(f \circ \mu \circ i_b) + Y_b(f \circ \mu \circ j_a)\\ &= X_a(f \circ R_a) + Y_b(f \circ L_a) = (R_b)_{\star,a}(X_a)(f) + (L_a)_{\star,b}(Y_b)(f)\end{aligned}$$

□

现在证明求逆运算自动是光滑的, 并给出其微分的计算.

命题 4.1.18 (Lie 群求逆运算的光滑性)**.** *对任意由定义4.1.2 所定义的 Lie 群 G, 群的求逆运算*

$$\iota\colon G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}.$$

是光滑的, 并且

$$(\iota)_{\star,a}(X_a) = -(L_{a^{-1}})_{\star,e}(R_{a^{-1}})_{\star,a}(X_a), \quad \forall X_a \in T_{G,a}.$$

证明. 思路是将求逆运算 i 写成一些光滑映射的复合. 为此考虑光滑映射

$$f\colon G \times G \to G \times G, \quad (a, b) \mapsto (a, ab).$$

显然这是双射. 由引理4.1.17知 f 的微分是

$$\begin{aligned} f_{\star,(a,b)}\colon T_{G,a} \times T_{G,b} &\longrightarrow T_{G,a} \times T_{G,ab}\\ (X_a, Y_b) &\longmapsto (X_a, (R_b)_{\star,a}(X_a) + (L_a)_{\star,b}(Y_b))\end{aligned}$$

因为 $(R_b)_\star$, $(L_a)_\star$ 都是可逆线性映射, 所以 $f_{\star,(a,b)}$ 是一个可逆线性映射. 由反函数定理可知 f 在任意 (a,b) 附近都是局部微分同胚. 但由于 f 本身是可逆映射, 所以他是一个整体微分同胚, 从而他的逆

$$f^{-1}\colon G\times G\to G\times G,\quad (a,c)\mapsto (a,a^{-1}c).$$

是一个微分同胚. 因此群的求逆运算 i, 作为以下光滑映射的复合,

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{i_e} & G\times G & \xrightarrow{f^{-1}} & G\times G & \xrightarrow{\pi_2} & G \\ a & \longmapsto & (a,e) & \longmapsto & (a,a^{-1}) & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

自然也是光滑的. 进一步, 我们计算它的微分:

$$\begin{aligned}(\iota)_{\star,a}(X_a) = (\pi_2)_\star\circ (f^{-1})_{\star,(a,e)}\circ (i_e)_{\star,a}(X_a) =& (\pi_2)_\star(X_a, -(L_{a^{-1}})_{\star,e}(R_{a^{-1}})_{\star,a}(X_a)) \\ =& -(L_{a^{-1}})_{\star,e}(R_{a^{-1}})_{\star,a}(X_a)\end{aligned}$$

□

这样一来, 我们便说明了定义4.1.1与定义4.1.2是等价的.

注意到 $(L_e)_\star=(R_e)_\star=\mathrm{id}$, 于是有

推论 4.1.19 (单位元处群乘法与求逆运算的微分)**.** 对任意 $X_e,Y_e\in T_{G,e}$, 有

$$(\mu)_{\star,(e,e)}(X_e,Y_e)=X_e+Y_e,\quad (\iota)_{\star,e}(X_e)=-X_e.$$

4.1.2 Lie 代数

先给出代数上的定义:

定义 4.1.20 (Lie 代数)**.** *V 是 $\mathbb{R}$-向量空间*[6]*, 上面有一个二元括号运算*

$$[\cdot,\cdot]\colon V\times V\to V,$$

使得对任意的 $u,v,w\in V$, 以及 $a,b\in\mathbb{R}$, 都有

1. *(反对称性)$[u,v]=-[v,u]$,*
2. *(线性性)$[au+bv,w]=a[u,w]+b[v,w]$,*
3. *(Jacobi 恒等式)$[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$,*

则称 $(V,[\cdot,\cdot])$ 是一个 ***Lie 代数 (Lie algebra)****$[\cdot,\cdot]$ 为该 Lie 代数的* ***Lie 括号****.*

例 4.1.21. *$\mathbb{R}^3$ 在向量叉乘运算下形成一个 Lie 代数.*

[6] 可以在更一般的域中定义, 这里考虑 $\mathbb{R}$.

例 4.1.22. *$M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 在交换子运算:*

$$[A,B] := AB - BA$$

下形成一个 Lie 代数.[7]

事实上, 对每一个 Lie 群 G, 都关联一个典范的 (canonical)Lie 代数 $\mathfrak{g}$. 从任意向量 $X_e \in T_{G,e}$ 开始, 构造一个 G 上的光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(G)$ 如下:

$$X_a(f) = X_e(f \circ L_a) = (L_a)_{\star,e}(X_e)(f), \quad \forall f \in C^\infty(G). \tag{4.1.1}$$

这样构造出来的光滑向量场有一个十分重要的事实: X 在任意左平移下仍是其本身.

$$(L_a)_{\star,b}(X_b) = (L_a)_{\star,b} \circ (L_b)_{\star,e}(X_e) = (L_{ab})_{\star,e}(X_e) = X_{ab}.$$

我们这样的向量场称为左不变向量场:

定义 4.1.23 (左不变向量场). *若 Lie 群 G 上光滑向量场 X 满足*

$$(L_a)_{\star,b}(X_b) = X_{ab}, \quad \forall a,b \in G,$$

*则称它是 G 上的一个***左不变向量场***.*

记 G 上全体左不变向量场的集合为 $\mathfrak{g}$, 即

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(G) = \Gamma(G, T_G) \colon X \text{ 是左不变的}\}.$$

显然 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{X}(G)$ 上一个线性子空间. 那么我们自然会思考 $\mathfrak{g}$ 作为线性空间, 其维数是怎么样的?

首先, Lie 群 G 在单位元 e 处的切向量 $X_e \in T_{G,e}$ 决定了 G 上一个左不变向量场 $X \in \mathfrak{g}$. 反之, 由(4.1.1)式知, G 上任意左不变向量场 $X \in \mathfrak{g}$ 都被其在 e 处的值 X_e 唯一确定. 这样一来, 对应关系 $X_e \in T_{G,e} \rightsquigarrow X \in \mathfrak{g}$ 是线性同构. 于是作为线性空间, $\mathfrak{g} \simeq T_{G,e}$, 从而 $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

现在回到之前, 来说明每个 Lie 群都有一个典范的 Lie 代数. 我们证明 $\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数

命题 4.1.24 (Lie 括号保持左不变性). *如果 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 那么 $[X,Y] \in \mathfrak{g}$.*

证明. 设 X 与 Y 都是 G 上的左不变向量场. 注意到

$$Y(f \circ L_a)(b) = Y_b(f \circ L_a) = (L_a)_{\star,b}(Y_b)f = Y_{ab}f = (Yf)(L_a b) = (Yf) \circ L_a(b),$$

[7] 一般的, 结合代数在换位子运算 $[a,b] = ab - ba$ 下都形成 Lie 代数.

对任意光滑函数 $f \in C^\infty(G)$ 都成立. 这说明了 Y 作用在 $f \circ L_a$ 上与 Yf 作用在左平移上的点是一致的. 因此

$$X_{ab}(Yf) = (L_a)_{\star,b}(X_b)(Yf) = X_b((Yf) \circ L_a) = X_b Y(f \circ L_a).$$

类似的 $Y_{ab}(Yf) = Y_b X(f \circ L_a)$. 于是

$$(L_a)_\star([X,Y]_b)f = X_b Y(f \circ L_a) - Y_b X(f \circ L_a) = X_{ab}(Yf) - Y_{ab}(Xf) = [X,Y]_{ab}(f).$$

□

于是 G 上全体左不变向量场 $\mathfrak{g}$, 在向量场的 Lie 括号 $[\cdot,\cdot]$ 下, 构成了一个 Lie 代数[8].

定义 4.1.25 (Lie 群的 (典范)Lie 代数). *Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 被称为* ***Lie* 群 G 的 *(*典范*)Lie* 代数**.

例 4.1.26. *向量加法群 $G = \mathbb{R}^n$ 的 Lie 代数是 n 维平凡 Lie 代数[9]$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$.*

例 4.1.27. *$\mathbb{S}^1$ 的 Lie 代数是 1 维平凡 Lie 代数 $\mathbb{R}^1$.[10]*

例 4.1.28. *在例4.1.10中已经给出了 $\mathbb{R}^1$ 的仿射变换群 $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^1$ 在群运算*

$$\mu((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1)$$

下是一个 2 维非交换 Lie 群. 对左乘[11]求微分有

$$(L_{(x_1,y_1)})_\star\left(v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y}\right) = x_1v_1\frac{\partial}{\partial x} + x_1v_2\frac{\partial}{\partial y}.$$

特别的, 我们取 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x}$ 与 $Y = x\dfrac{\partial}{\partial y}$ 维两个左不变向量场, 那么他们够成该 Lie 群 Lie 代数的一组基. 其 Lie 括号由

$$[X,X] = [Y,Y] = 0, \quad [X,Y] = \left[x\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}\right] = x\frac{\partial}{\partial y} = Y.$$

给出.[12]

例 4.1.29. *之前已经指出了 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是一个 n^2 维非紧 Lie 群. 注意到 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的 Lie 代数的底空间, 即 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 在单位元 $e = I_n$ 处的切空间, 就是 $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

其上 Lie 括号就是矩阵换位子 $[A,B] = AB - BA$.

[8]而且是无穷为 Lie 代数 $\mathfrak{X}(G)$ 的一个 m 维子 Lie 代数.

[9]平凡 Lie 代数指其中心 $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ 的 Lie 代数.

[10]唯一的 1 维 Lie 代数是平凡 Lie 代数.

[11]$L_{(x_1,y_1)}\colon (x,y) \mapsto (x_1x, x_1x + y_1)$.

[12]给出了唯一的 2 维非平凡 Lie 代数.

对于 Lie 群 G 上的一个形式 ω, 如果对每一个 $\sigma \in G$, 都有 $L_\sigma^\star \omega = \omega$, 则称之为左不变的. $E_{l\,\mathrm{inv}}^p(G)$ 表示 G 上左不变 p 形式构成的向量空间. 令

$$E_{l\,\mathrm{inv}}^\star(G) = \bigoplus_{p=0}^{\dim G} E_{l\,\mathrm{inv}}^p(G).$$

左不变形式有以下性质:

- 左不变形式是光滑的.
- $E_{l\,\mathrm{inv}}^\star(G)$ 是由 G 上的所有光滑形式构成的代数 $E^\star(G)$ 的一个子代数. 而且映射 $\omega \mapsto \omega(e)$ 是从 $E_{l\,\mathrm{inv}}^\star(G)$ 到 $\Lambda(G_e^\star)$ 上的一个代数同构, 其中 $\Lambda(G_e^\star)$ 为 $G_e^\star$ 的外代数. 特别的, 这个映射给出 $E_{l\,\mathrm{inv}}^1(G)$ 到 $G_e^\star$, 因而也是 $\mathfrak{g}^\star$ 的一个自然同构. 以这种方式把 $E_{l\,\mathrm{inv}}^1(G)$ 看做 G 的 Lie 代数的对偶空间.
- 如果 ω 是一个左不变的 1 形式而 X 是一个左不变的向量场, 那么 $\omega(X)$ 是 G 上的一个常函数.
- 如果 $\omega \in E_{l\,\mathrm{inv}}^1(G)$ 且 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 那么 $\mathrm{d}\omega(X,Y) = -\omega[X,Y]$.
- 令 $\{X_1, \cdots, X_d\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个基, 并且以 $\{\omega_1, \cdots, \omega_d\}$ 作为 $E_{l\,\mathrm{inv}}^1(G)$ 的对偶基, 那么存在 G 关于 $\mathfrak{g}$ 的基 $\{X_i\}_{i=1}^d$ 的结构常数 c_{ij}^k 使得 $[X_i, X_j] = \sum\limits_{k=1}^d c_{ij}^k X_k$, 且满足

$$\begin{cases} c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0, \\ \sum\limits_r (c_{ij}^r c_{rk}^s + c_{jk}^r c_{ri}^s + c_{ki}^r c_{rj}^s) = 0. \end{cases}$$

  ω_i 的外导数由 Maurer-Cartan 方程 $\mathrm{d}\omega_i = \sum\limits_{j<k} c_{jk}^i \omega_k \wedge \omega_j$ 给出.

参考文献

[1] Frank W.Warner. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups[M]. Springer, 1983.

[2] S.S.Chern, W.H.Chen, K.S.Lam. Lectures on Differential Geometry[M]. Springer, 2000.

[3] John M.Lee. Introduction to Smooth Manifolds[M]. Springer, 2012.

[4] Shigeyuki Morita. Geometry of Differential Forms[M]. American Mathematical Soc., 2001.

[5] 李文威. 代数学方法. 第一卷, 基础架构 [M]. 高等教育出版社,2019.

[6] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析-第 2 版 [M]. 高等教育出版社,2004.

2025 微分几何期末复习题

唐嘉琪

2025 年 6 月 20 日

题目 1. 给出光滑流形的定义.

解答. M 为 m 维流形. $\mathscr{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ 给出了 M 上的一簇坐标卡. 称 M 为**光滑微分流形**, $\mathscr{A}$ 为 M 的一个 光滑微分结构, 如果:

- $\mathscr{A}$ 中的坐标卡覆盖了 M;
- $\mathscr{A}$ 中任意两个坐标卡都是光滑相容的;
- $\mathscr{A}$ 是极大的, 即任何与 $\mathscr{A}$ 中坐标卡均相容的坐标卡都在 $\mathscr{A}$ 中.

称两个坐标卡 (U, φ_U) 与 (V, φ_V) 是光滑相容的, 若 $U \cap V = \varnothing$ 或当 $U \cap V \neq \varnothing$ 相应的坐标变换函数 (具体到 i 个分量) 是 C^∞ 连续的.

题目 2. 证明, 球面 $\mathbb{S}^m$ 是一个光滑流形.

解答. m 维单位球面 $\mathbb{S}^m$ 定义为

$$\mathbb{S}^m := \left\{ (a_1, \cdots, a_{m+1}) \in \mathbb{R} \colon \sum_{i=1}^{m+1} a_i^2 = 1 \right\}.$$

令 $p = (0, \cdots, 0, 1)$ 为北极, $q = (0, \cdots, 0, -1)$ 为南极. 开集 $U(p) = \mathbb{S}^m \setminus \{p\}$ 和 $U(q) = \mathbb{S}^m \setminus \{q\}$ 之并覆盖 $\mathbb{S}^m$. 下面定义映射 φ 和 ψ, 使得 $(U(p), \varphi)$ 和 $(U(q), \psi)$ 是覆盖 $\mathbb{S}^m$ 的两个 C^∞ 坐标图. 映射 φ 和 ψ 由球极投影确定.

对 $\forall a \in U(p)$, 记 λ 是由点 p 和 a 确定的直线, π 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 内由 $x_{n+1} = 0$ 确定的超平面, $\pi(a)$ 表示 $\mathbb{R}^{m+1}$ 内直线 λ 和 π 相交的点. 当 $a = (a_1, \cdots, a_{m+1})$ 时, 易得 $\pi(a) = (x_1, \cdots, x_m, 0)$, 这里 $x_i = a_i/(1 - a_{m+1})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. 令

$$\varphi(a) = (x_1, \cdots, x_m) = \left(\frac{a_1}{1 - a_{m+1}}, \cdots, \frac{a_m}{1 - a_{m+1}} \right),$$

φ 是 $U(p)$ 到 $\mathbb{R}^m$ 上的一个同胚. 因为如果 $(x_1, \cdots, x_m)$ 已知, 则由计算可得

$$a = \left(\frac{2x_1}{1 + \sum\limits_{i=1}^m x_i^2}, \frac{2x_2}{1 + \sum\limits_{i=1}^m x_i^2}, \cdots, \frac{2x_m}{1 + \sum\limits_{i=1}^m x_i^2}, \frac{\sum\limits_{i=1}^m x_i^2 - 1}{1 + \sum\limits_{i=1}^m x_i^2} \right).$$

类似的, 定义

$$\psi \colon U(q) \to \mathbb{R}^m, \quad (a_1, \cdots, a_{m+1}) \mapsto (y_1, \cdots, y_m),$$

这里 $y_i = a_i/(1+a_{m+1})$. 如果 $(y_1,\cdots,y_m)$ 已知, 则

$$a=\left(\frac{2y_1}{1+\sum\limits_{i=1}^m y_i^2},\frac{2y_2}{1+\sum\limits_{i=1}^m y_i^2},\cdots,\frac{2y_m}{1+\sum\limits_{i=1}^m y_i^2},\frac{1-\sum\limits_{i=1}^m y_i^2}{1+\sum\limits_{i=1}^m y_i^2}\right).$$

由于

$$\begin{aligned}U(p)\cap U(q)&=\mathbb{S}^m\setminus(\{p\}\cup\{q\}),\\ \forall a\in U(p)\cap U(q),\quad \varphi(a)&=(x_1,\cdots,x_m),\\ \psi(a)&=(y_1,\cdots,y_m),\end{aligned}$$

而

$$y_i=\frac{a_i}{1+a_{m+1}}=\frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\quad x_i=\frac{a_i}{1-a_{m+1}}=\frac{y_i}{\sum\limits_{i=1}^m y_i^2},$$

因此 $\psi\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\psi^{-1}$ 都是 C^∞ 的, 于是 $\mathbb{S}^m$ 是一个 m 维光滑流形. □

题目 3. 证明, $f\colon \mathbb{S}^m\hookrightarrow\mathbb{R}^{m+1}$ 为一个嵌入.

解答. 只要证明 f 是一个一一浸入, 且是一个到内的同胚即可.

我们继续沿用上一题的记号, 在球极投影下有 (我们选择一个, 另一个是一样的)

$$f(x^1,\cdots,x^m)=\left(\frac{2x_1}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\frac{2x_2}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\cdots,\frac{2x_m}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\frac{\sum\limits_{i=1}^m x_i^2-1}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2}\right).$$

在不会引起歧义的时候, 为了方便, 后文将 $\sum\limits_{i=1}^m$ 简写为 $\sum$.

考察切映射 $f_{\star,s}\colon \mathrm{T}_{\mathbb{S}^m,s}\to\mathrm{T}_{\mathbb{R}^{m+1},f(s)}$ 的 Jacobi 阵.

先计算前面 m 个分量的偏导数,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{2x_j}{1+\sum x_i^2}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\1\leqslant k\leqslant m}}.$$

当 $j=k$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2x_j}{1+\sum x_i^2}\right)=\frac{2(1+\sum x_i^2)-2x_j\cdot 2x_j}{(1+\sum x_i^2)^2}=\frac{2(1+\sum x_i^2-2x_j^2)}{(1+\sum x_i^2)^2}.$$

当 $j\neq k$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{2x_j}{1+\sum x_i^2}\right)=2x_j\frac{-2x_k}{(1+\sum x_i^2)^2}=\frac{-4x_jx_k}{(1+\sum x_i^2)^2}.$$

再计算第 $(m+1)$ 个分量的偏导数,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\sum x_i^2-1}{1+\sum x_i^2}\right)_{1\leqslant k\leqslant m}=\frac{2x_k(1+\sum x_i^2)+(1-\sum x_i^2)\cdot 2x_k}{(1+\sum x_i^2)^2}=\frac{4x_k}{(1+\sum x_i^2)^2}$$

现在我们来看 $\mathrm{Jac}(f_{\star,s})$

$$
\mathrm{Jac}(f_{\star,s})=\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_1}{1+\sum x_i^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_1}{1+\sum x_i^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_m}{1+\sum x_i^2}\right)\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_2}{1+\sum x_i^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_2}{1+\sum x_i^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{2x_2}{1+\sum x_i^2}\right)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_m}{1+\sum x_i^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_m}{1+\sum x_i^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{2x_m}{1+\sum x_i^2}\right)\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sum x_i^2-1}{1+\sum x_i^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sum x_i^2-1}{1+\sum x_i^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\sum x_i^2-1}{1+\sum x_i^2}\right)
\end{bmatrix}_{(m+1)\times m}
$$

$$
=\frac{1}{(1+\sum x_i^2)^2}\begin{bmatrix}
2(1+\sum x_i^2-2x_1^2) & -4x_1x_2 & \cdots & -4x_1x_m\\
-4x_2x_1 & 2(1+\sum x_i^2-2x_2^2) & \cdots & -4x_2x_m\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-4x_mx_1 & -4x_mx_2 & \cdots & 2(1+\sum x_i^2-2x_m^2)\\
4x_1 & 4x_2 & \cdots & 4x_m
\end{bmatrix}
$$

我们记上式这个矩阵为 Λ, 即 $\mathrm{Jac}(f_{\star,s})=(1+\sum x_i^2)^{-2}\cdot\Lambda$. 对 Λ 进行初等变换, 有

$$
\Lambda\to\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1\\
x_1 & x_2 & \cdots & x_m
\end{bmatrix}
$$

这足以说明 $\mathrm{rk}(f_{\star,s})=\mathrm{rk}(\Lambda)=m$, 即 $f_{\star,s}$ 非退化.

f 的单性是显然的, 这说明了 f 是一个一一浸入, 同时注意到上述球极投影是一个经典的到内同胚, 从而 $f\colon\mathbb{S}^m\hookrightarrow\mathbb{R}^{m+1}$ 是一个嵌入. □

题目 4. 给出外微分算子 d 的定义.

解答. 存在唯一的算子 $\mathrm{d}\colon\Gamma(M,\mathcal{A}_M^k)=\mathcal{A}^k\to\Gamma(M,\mathcal{A}_M^{k+1})=\mathcal{A}^{k+1}$ 称为 M 上**外微分算子**, 若满足:

1. $\mathrm{d}^2=0$
2. $f\in C^\infty(M)$, 则 $\mathrm{d}f$ 为 f 的微分, 即 $\mathrm{d}f(v)=v(f)$, 对任意 $v\in\mathrm{T}_{M,p}$.

题目 5. 证明 Poincáre 引理: 若 d 为 M 上外微分算子, 那么 $\mathrm{d}^2f=\mathrm{d}^2\omega=0$. 其中 $f\in C^\infty(M)$, $\omega\in\mathcal{A}^k$.

解答. 首先考察 d^2 作用在 $\Gamma(M,\mathcal{A}_M^0)=C^\infty(M)$ 上, 对任意 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2f=&\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)=\sum_{i,j=1}^m\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)=0
\end{aligned}
$$

在经一步考察 d^2 作用在 $\mathcal{A}^k=\Gamma(M,\mathcal{A}^k_M)$ 上之前, 先证明一个引理:

若 $\alpha\in\mathcal{A}^k$, $\beta\in\mathcal{A}^l$, 则

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge\mathrm{d}\beta.$$

这个引理的证明也是显然的: 设

$$\begin{aligned}\alpha=&\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m}\alpha_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\\ \beta=&\frac{1}{l!}\sum_{j_1,\cdots,j_l=1}^{m}\beta_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\end{aligned}$$

那么

$$\alpha\wedge\beta=\frac{1}{k!l!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_l=1}^{m}\alpha_{i_1\cdots i_k}\beta_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=&\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant m}}\mathrm{d}\alpha_{i_1\cdots i_k}\wedge\beta_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\\&+\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant m}}\alpha_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}\beta_{j_1\cdots j_l}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\\=&\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\mathrm{d}\alpha_{i_1\cdots i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\\&\wedge\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant m}\beta_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\right)\\&+\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\alpha_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\\&\wedge(-1)^k\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant m}\mathrm{d}\beta_{j_1\cdots j_l}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_l}\right)\\=&\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge\mathrm{d}\beta\end{aligned}$$

现在经一步考察 d^2 作用在 $\mathcal{A}^k$ 上: 对任意

$$\omega=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m}\omega_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\in\mathcal{A}^k_M.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\omega=&\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k}^{m}\mathrm{d}\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\\=&\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m}\Bigg(\mathrm{d}^2\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\\&+\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha}\mathrm{d}\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}^2x^{i_\alpha}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\Bigg)\end{aligned}\tag{1}$$

注意到 $\mathrm{d}^2\omega_{i_1\cdots i_k}=\mathrm{d}^2x^{i_\alpha}=0,\quad\forall\alpha$. 那么 $(1)=0$. □

题目 6. 证明, $\mathrm{T}^{\star}_{M,p} \simeq \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$.

解答. 认为 M 是 n 维光滑流形. $\forall f \in \mathcal{A}^0_{M,p}$ 在 p 处使用带有 Lagrange 余项的 Taylor 展开.

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \left(x^i - p^i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_\xi \left(x^i - p^i\right)\left(x^j - p^j\right).$$

其中 ξ 是介于 x 和 p 之间的一个数.

若 $f \in \mathfrak{m}_p$, 则 $f(p) = 0$. 此时将 $v_x \in \mathrm{T}_{M,p}$ 作用在 f 上, 注意到

$$\begin{aligned}
&v_p \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_\xi \left(x^i - p^i\right)\left(x^j - p^j\right)\right] \\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_\xi \left[v_p\left(x^i - p^i\right)\left(x^j - p^j\right) + \left(x^i - p^i\right)v_p\left(x^j - p^j\right)\right] \\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_\xi \left[0 \cdot \left(x^j - p^j\right) + \left(x^i - p^i\right)\cdot 0\right] = 0
\end{aligned}$$

这样一来

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \cdot v_p\left(x^i - p^i\right)\right]$$

首先应当明确 $x^i - p^i \in \mathfrak{m}_p$. 因而显然

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_\xi \left(x^i - p^i\right)\left(x^j - p^j\right) \in \mathfrak{m}_p^2$$

设

$$\begin{aligned}
g(x) =& \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \left(x^i - p^i\right) \\
h(x) =& \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_\xi \left(x^i - p^i\right)\left(x^j - p^j\right)
\end{aligned}$$

那么

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

且 $h(x) \in \mathfrak{m}_p^2$. 这样一来 $f \sim_{\mathfrak{m}_p^2} g$, 记等价类为 $[f] = [g]$. 从而 $\forall f \in \mathfrak{m}_p^2$ 的等价类都可以表示为

$$\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \left[x^i - p^i\right]$$

从而令 $x \to p$

$$\mathfrak{m}_p \Big/ \sim_{\mathfrak{m}_p^2} = \mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2 = \left\langle \left[x^i - p^i\right]_{i=1}^{n} \right\rangle_{\mathbb{R}} \simeq \left\langle \left[\left.\mathrm{d}x^i\right|_p\right]_{i=1}^{n} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

下面我们来证明 $\left\{\left[\left.\mathrm{d}x^i\right|_p\right]\right\}_{i=1}^{n}$ 是 $\mathrm{T}^{\star}_{M,p} = \mathrm{Hom}\left(\mathrm{T}_{M,p}, \mathbb{R}\right)$ 的一组基.

先回顾一些事实, x^i 不仅可以作为一个坐标分量 (实数), 更是一个函数, 选取局部坐标卡 $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$

$$\begin{aligned}
x^i : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longmapsto x^i(p)
\end{aligned}$$

这样定义

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x^i\colon\ \mathrm{T}_{M,p} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
v_p &\longmapsto v_p(x^i)=\sum_{j=1}^{n} v_p^j \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right|_p=\sum_{j=1}^{n} v_p^j\delta_i^j=v_p^i.
\end{aligned}
$$

这样简明的证明了

$$
\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2=\left\langle\left[x^i-p^i\right]_{i=1}^{n}\right\rangle_{\mathbb{R}}\simeq\left\langle\left[\mathrm{d}x^i\big|_p\right]_{i=1}^{n}\right\rangle_{\mathbb{R}}=\mathrm{T}^{\star}_{M,p}.
$$

□

题目 7. 对于任意 $\omega\in\mathcal{A}^1$, 任意 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)=\Gamma(M,\mathrm{T}_M)$, 证明:

$$
\mathrm{d}\omega(X,Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega X))-\omega([X,Y]).
$$

解答. 设 M 有局部坐标 $(M;x^1,\cdots,x^m)$. 在不引起歧义的情况下, 用 $\sum\limits_i$ 代替 $\sum\limits_{i=1}^{m}$. 从而

$$
X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j},\quad \omega=\sum_k\omega_k\mathrm{d}x^k.
$$

先计算 $\omega(Y)$ 与 $\omega(X)$,

$$
\begin{aligned}
\omega(Y)&=\sum_k\omega_k\mathrm{d}x^k\left(\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_k\omega_k\left(\sum_j Y^j\delta_j^k\right)=\sum_k\omega_kY^k,\\
\omega(X)&=\sum_k\omega_k\mathrm{d}x^k\left(\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_k\omega_k\left(\sum_i X^i\delta_i^k\right)=\sum_k\omega_kX^k.
\end{aligned}
$$

计算 $X(\omega(Y))$ 与 $Y(\omega(X))$,

$$
\begin{aligned}
X(\omega(Y))&=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_k\omega_kY^k\right)=\sum_{i,k}X^i\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}Y^k+\omega_k\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right),\\
Y(\omega(X))&=\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_k\omega_kX^k\right)=\sum_{j,k}Y^j\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x^j}X^k+\omega_k\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\right).
\end{aligned}
$$

先计算 $[X,Y]$,

$$
\begin{aligned}
[X,Y]&=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&=\sum_{i,j}X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\right)-\sum_{i,j}Y^j\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}+X^i\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^i}\right)\\
&=\sum_{i,j}X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-\sum_{i,j}Y^j\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right).
\end{aligned}
$$

从而

$$\begin{aligned}
\omega([X,Y]) &= \sum_k \omega_k \mathrm{d}x^k \left(\sum_{i,j} \left(X_i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) \\
&= \sum_{i,j,k} \omega_k \left(X_i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \delta_j^k - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \delta_i^k \right) \\
&= \sum_{i,j,k} \omega_k \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right).
\end{aligned}$$

我们整理 $X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$ 有

$$\begin{aligned}
& X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \\
=& \sum_{i,k} X^i \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} Y^k + \omega_k \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \right) - \sum_{j,k} Y^j \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} X^k + \omega_k \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) \\
& - \sum_{i,j,k} \omega_k \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) \\
=& \sum_{i,k} X^i \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} Y^k + \sum_{i,k} X^i \omega_k \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - \sum_{j,k} Y^j \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} X^k \\
& - \sum_{j,k} Y^j \omega_k \frac{\partial X^k}{\partial x^j} - \sum_{i,k} \omega_k X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_{j,k} \omega_k Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \\
=& \sum_{i,k} X^i \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} Y^k - \sum_{j,k} Y^j \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} X^k.
\end{aligned}$$

最后来计算 $\mathrm{d}\omega(X,Y)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X,Y) &= \sum_{k,l} \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^k (X,Y) = \sum_{k,l} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_l} \begin{vmatrix} \mathrm{d}x^l(X) & \mathrm{d}x^l(Y) \\ \mathrm{d}x^k(X) & \mathrm{d}x^k(Y) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} (X^l Y^k - X^k Y^l) = \sum_{k,l} \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} \right) X^l Y^k \\
&= \sum_{i,k} X^i \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} Y^k - \sum_{j,k} Y^j \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} X^k.
\end{aligned}$$

于是命题得证. □

题目 8. 利用 Stokes 公式, 证明:

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

解答. 令 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega =& \mathrm{d}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + P \wedge \mathrm{d}^2 x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + Q\mathrm{d}^2 y \\
=& (P_x \mathrm{d}x + P_y \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (Q_x \mathrm{d}x + Q_y \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y \\
=& P_x \mathrm{d}^2 x + P_y \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + Q_x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + Q_y \mathrm{d}^2 y = (Q_x - P_y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

代入 $\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$ 得证. □

题目 9. 设 $\varphi\colon M\to N, \psi\colon N\to X$ 为光滑流形 M,N,X 之间的光滑映射, 给出 $\varphi_\star,\psi_\star,\varphi^\star,\psi^\star$ 的定义, 并证明:

$$(\psi\circ\varphi)_\star=\psi_\star\circ\varphi_\star,\quad (\psi\circ\varphi)^\star=\varphi^\star\circ\psi^\star.$$

解答. $\varphi_{\star,p}\colon \mathrm{T}_{M,p}\to\mathrm{T}_{N,\varphi(p)},\quad v\mapsto\varphi_{\star,p}(v)$, 满足对任意 $f\in C^\infty(N)$, 有

$$\varphi_{\star,p}(v)(f)=v(f\circ\varphi).$$

$\varphi_p^\star\colon \mathrm{T}^\star_{N,\varphi(p)}\to\mathrm{T}^\star_{M,p},\quad \omega\mapsto\varphi_p^\star(\omega)$, 满足对任意 $v\in\mathrm{T}_{M,p}$, 有

$$\varphi_p^\star(\omega)(v)=\omega(\varphi_{\star,p}(v))$$

对于 $\psi_{\star,\varphi(p)}$ 与 $\psi^\star_{\varphi(p)}$ 的定义是类似的.

我们约定

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N & \xrightarrow{\qquad\psi\qquad} & X \\ m & \longmapsto & n=\varphi(m) & \longmapsto & x=(\psi\circ\varphi)(m) \end{array}$$

对于任意 $v\in\mathrm{T}_{M,m}$, $f\in C^\infty(X)$, 有

$$(\psi\circ\varphi)_{\star,m}(v)(f)=v(f\circ\psi\circ\varphi)=(\varphi_{\star,m}(v))(f\circ\psi)=\psi_{\star,n}(\varphi_{\star,m}(v))(f).$$

对任意 $\omega\in\mathrm{T}^\star_{X,x}$, $v\in\mathrm{T}_{M,m}$, 有

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)^\star_m(\omega)(v)&=\omega((\psi\circ\varphi)_{\star,m}(v))=\omega(\psi_{\star,n}(\varphi_{\star,m}(v)))\\&=\psi_n^\star(\omega)(\varphi_{\star,m}(v))=\varphi_m^\star(\psi_n^\star(\omega))(v)\end{aligned}$$

从而我们证明了结论 $(\psi\circ\varphi)_{\star,m}=\psi_{\star,n}\circ\varphi_{\star,m},\quad(\psi\circ\varphi)^\star_m=\varphi^\star_m\circ\psi^\star_n.$ □

题目 10. 给出同伦的定义, 并证明:

- 若流形 M 与 N 是同伦等价的, 那么其上同调群是同构的.
- 若 M 是同伦可缩的, 则其 de Rham 上同调群 $H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})=\begin{cases}\{0\}, & k\geqslant 1,\\ \mathbb{R}, & k=0.\end{cases}$.

解答. 设 X,Y 为拓扑空间, $f,g\colon X\to Y$ 为两个连续映射. 若存在连续映射 $H\colon X\times[0,1]\to Y$ 使得对于任何 $x\in X$ 满足:

1. $H(x,0)=f(x)$,
2. $H(x,1)=g(x)$.

则称 f 与 g 是**同伦的 (homotopic)**. 映射 H 被称为从 f 到 g 的**同伦 (homotopy)**.

若存在光滑映射 $\varphi\colon M\to N$ 与 $\psi\colon N\to M$ 使得 $\varphi\circ\psi$ 同伦于 id_N, 且 $\psi\circ\varphi$ 同伦于 id_M, 则称这两个流形 M, N 是**同伦等价**的.

为了证明 de Rham 上同调群的同伦不变性, 先证明函子同伦不变性:

定理 1 (函子同伦不变性). 设 $f,g\in C^\infty(M,N)$ 是同伦的, 则

$$f^\star=g^\star\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})\to H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}).$$

证明是构造如下图所示的上链同伦

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k-1}(N) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "g^\star"', "f^\star"] \arrow[dl, dashed, "h_{k-1}"'] & \mathcal{A}^{k}(N) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "g^\star"', "f^\star"] \arrow[dl, dashed, "h_{k}"'] & \mathcal{A}^{k+1}(N) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "g^\star"', "f^\star"] \arrow[dl, dashed, "h_{k+1}"'] & \cdots \arrow[dl, dashed, "h_{k+2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \mathcal{A}^{k+1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

先假设上链同伦存在, 我们证明函子同伦不变性. 对任意 $[\omega]_{\mathrm{d}R}\in H^k_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})$, 有

$$g^\star\omega-f^\star\omega=(\mathrm{d}h+h\mathrm{d})\omega=\mathrm{d}(h\omega)\in B^k(M,\mathbb{R}).$$

因此 $f^\star([\omega]_{\mathrm{dR}})=[f^\star\omega]_{\mathrm{dR}}=[g^\star\omega]_{\mathrm{dR}}=g^\star([\omega]_{\mathrm{dR}})$.

最后构造上链同伦, 工具是使用特定向量场生成的流, 先证明一个引理

引理 1. 设 X 为 M 上完备向量场, X_t 为 X 生成的流, 则存在线性算子 $Q_k\colon\mathcal{A}^k(M)\to\mathcal{A}^{k-1}(M)$ 使得对任意的 $\omega\in\mathcal{A}^k(M)$ 有

$$X_1^\star\omega-\omega=\mathrm{d}Q_k(\omega)+Q_{k+1}(\mathrm{d}\omega).$$

首先, 直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_t^\star\omega=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}X_{t+s}^\star\omega=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}X_s^\star X_t^\star\omega=\mathcal{L}_X(X_t^\star\omega)=\mathrm{d}i_X(X_t^\star\omega)+i_X\mathrm{d}(X_t^\star\omega),$$

于是对于 $\omega\in\mathcal{A}^k(M)$, 若令 $Q_k(\omega)=\int_0^1 i_X(X_t^\star\omega)\mathrm{d}t$, 则 $Q_k\colon\mathcal{A}^k(M)\to\mathcal{A}^{k-1}(M)$, 且

$$X_1^\star\omega-\omega=\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_t^\star\omega\right)\mathrm{d}t=\mathrm{d}Q_k(\omega)+Q_{k+1}(\mathrm{d}\omega).$$

现在利用该引理完成函子同伦不变性证明的最后一步, 即构造上链同伦 $h_k\colon\mathcal{A}^k(N)\to\mathcal{A}^{k-1}(M)$: 设 $W=M\times\mathbb{R}$, 则 $X=\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是 W 上的完备向量场, 且它生成的流是

$$X_t(p,a)=(p,a+t).$$

由引理, 存在线性算子 $Q_k\colon\mathcal{A}^k(W)\to\mathcal{A}^{k-1}(W)$ 使得

$$X_1^\star\omega-\omega=\mathrm{d}Q_k(\omega)+Q_{k+1}(\mathrm{d}\omega).$$

在根据流形上的反函数定理, 任意两个同伦的光滑映射都是光滑同伦. 设 $F\colon W\to N$ 是 f 和 g 之间的光滑同伦, 并设 $\iota\colon M\hookrightarrow W$ 是包含映射 $\iota(p)=(p,0)$, 则

$$f=F\circ\iota\quad \text{且}\quad g=F\circ X_1\circ\iota,$$

由此对任意 $\omega\in\mathcal{A}^k(N)$ 有

$$g^\star\omega-f^\star\omega=\iota^\star X_1^\star F^\star\omega-\iota^\star F^\star\omega=\iota^\star(\mathrm{d}Q_k+Q_{k+1}\mathrm{d})F^\star\omega=(\mathrm{d}\iota^\star Q_kF^\star+\iota^\star Q_{k+1}F^\star\mathrm{d})\omega.$$

所以如果记 $h_k=\iota^\star Q_kF^\star$, 则 $h_k\colon\mathcal{A}^k(M)\to\mathcal{A}^{k-1}(N)$ 满足

$$g^\star\omega-f^\star\omega=(\mathrm{d}h_k+h_{k+1}\mathrm{d})\omega,$$

从而这些 h_k 就是所需的上链同伦.

到这里已经成功证明了定理 (函子同伦不变性), 现用其证明 de Rham 上同调群的同伦不变性: 设 $\varphi\colon M\to N$ 和 $\psi\colon N\to M$ 是连续映射且满足 $\varphi\circ\psi\sim \mathrm{id}_N$ 和 $\psi\circ\varphi\sim\mathrm{id}_M$. 根据连续映射的 Whitney 逼近定理, 光滑流形之间的任意连续映射都与某个光滑映射同伦, 故存在 $\varphi_1\in C^\infty(M,N)$ 和 $\psi_1\in C^\infty(M,N)$ 使得 $\varphi_1\sim\varphi$ 且 $\psi_1\sim\psi$. 因此 $\varphi_1\circ\psi_1$ 和 $\psi_1\circ\varphi_1$ 都是光滑映射, 而且 $\varphi_1\circ\psi_1\sim\mathrm{id}_N$, $\psi_1\circ\varphi_1\sim\mathrm{id}_M$. 于是利用函子性并应用函子同伦不变性可得

$$\varphi_1^\star\circ\psi_1^\star=\mathrm{id}\colon H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})\to H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$$
$$\psi_1^\star\circ\varphi_1^\star=\mathrm{id}\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})\to H^k_{\mathrm{dR}}(N,\mathbb{R})$$

所以 $\varphi^\star$ 和 $\psi^\star$ 是线性同构.

到这里我们证明了 de Rham 上同调群的同伦不变性, 而对于题目后半部分 "若 M 是同伦可缩的, 则其 de Rham 上同调群 $H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})=\{0\},k\geqslant 1;=\mathbb{R},k=0.$" 则是 de Rham 上同调群的同伦不变性的直接推论. □

题目 10 的注记.

定义 1 (上链同伦)**.** *设 $f,g\in C^\infty(M,N)$ 是同伦的. 若是一列映射 $h_k\colon\mathcal{A}^k(N)\to\mathcal{A}^{k+1}(M)$ 满足*

$$g^\star-f^\star=\mathrm{d}_M h_k+h_{k+1}\mathrm{d}_N.$$

*则称映射列 $h=(h_k)$ 是 $f^\star$ 和 $g^\star$ 之间的一个***上链同伦***.*

定理 2 (连续函数的 Whitney 逼近定理)**.** *设 M, N 是光滑流形, $g\in C^0(M,N)$ 是连续映射. 则存在同伦于 g 的光滑映射 $f\in C^\infty(M,N)$. 此外, 若 g 在闭子集 $A\subset M$ 上光滑, 则可以使得 $f|_A=g|_A$.*

题目 11. 给出 Lie 群, Lie 代数的定义, 并证明:

- 向量加法群 $\mathbb{R}$ 是一个 Lie 群, 其上典范的 Lie 代数为 1 维平凡李代数 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}$.
- 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 为一个 n^2 维非紧 Lie 群, 其上典范 Lie 代数是 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})=\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

解答. 设 G 是一个群, 如果 G 上还赋有一个光滑流形结构, 满足映射 $G\times G\to G,\quad (g_1,g_2)\mapsto g_1\cdot g_2^{-1}$ 是光滑的, 则称 G 为一个 **Lie 群**.

V 是 $\mathbb{R}$-向量空间 (可以在更一般的域中), 上面有一个二元括号运算 $[\cdot,\cdot]\colon V\times V\to V$, 使得对任意的 $u,v,w\in V$, 以及 $a,b\in\mathbb{R}$, 都有

1. (反对称性)$[u,v]=-[v,u]$,
2. (线性性)$[au+bv,w]=a[u,w]+b[v,w]$,
3. (Jacobi 恒等式)$[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$,

则称 $(V,[\cdot,\cdot])$ 是一个 **Lie 代数 (Lie algebra)**$[\cdot,\cdot]$ 为该 Lie 代数的 **Lie 括号**.

Lie 代数 $\mathfrak{g}:=\{G,$全体左不变向量场$\}$ 被称为 **Lie 群 G 的 (典范的)Lie 代数**.

现在来分别证明命题:

显然 $\mathbb{R}^1$ 在向量加法运算下是一个 Lie 群, 这是因为映射 $(x,y)\mapsto x-y$ 是光滑的. 不仅如此, 对任意 $a\in\mathbb{R}$, 左平移 L_a 是 $\mathbb{R}^1$ 上的平移映射, 故左不变向量场实际上就是常值向量场

$$X=\lambda\frac{\partial}{\partial x^1},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

注意到 $\mathfrak{g}=\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial x^1}\colon \lambda\in\mathbb{R}\right\}$ 与 $\mathbb{R}^1$ 在 Lie 括号下完全一致, 自然有同构 $\mathfrak{g}\simeq\mathbb{R}^1$, 又有任意两个左不变向量场的 Lie 括号为 0, 对应为任意两个 R^1 中的元素 Lie 括号为 0. 换而言之, 向量加法群 $\mathbb{R}^1$ 的 Lie 代数就是 1 维平凡 Lie 代数 $\mathbb{R}^1$.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是一个 n^2 维的非紧 Lie 群, 它是不连通的, 而且恰有两个连通分支, 即

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})=&\{X\in\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\ \mathrm{X}>0\},\\ \mathrm{GL}_-(n,\mathbb{R})=&\{X\in\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\ \mathrm{X}<0\}.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{M}_{n\times n}\simeq\mathbb{R}^{n^2}$ 的一个开子集, 所以 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的 Lie 代数的底空间 (即 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 在 $e=I_n$ 处的切空间), 就是集合 $\mathrm{M}_{n\times n}(n,\mathbb{R})$ 自身,

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})=\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

为了求出 Lie 括号运算, 任取矩阵 $A=(A_ij)_{n\times n}\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, 并记 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上的全局坐标系维 (X^{ij}). 那么跟 A 相应的在 $\mathrm{T}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),I_n}$ 处向切的切向量是 $\sum A_{ij}\frac{\partial}{\partial X^{ij}}$, 而它生成的左不变向量场在矩阵 $X=(X^{ij})$ 处的向量为 $\sum X^{ik}A_{kj}\frac{\partial}{\partial X^{ij}}$. 从而矩阵 $A,B\in\mathfrak{g}$ 之间的 Lie 括号 $[A,B]$ 是对应于向量场

$$\begin{aligned}\left[\sum X^{ik}A_{kj}\frac{\partial}{\partial X^{ij}},\sum X^{pq}B_{qr}\frac{\partial}{\partial X^{pr}}\right]=&\sum X^{ik}A_{kj}B_{jr}\frac{\partial}{\partial X^{ir}}-\sum X^{pq}B_{qr}A_{rj}\frac{\partial}{\partial X^pj}\\ =&\sum X^{ik}(AkrB_{rj}-B_{kr}A_{rj})\frac{\partial}{\partial X^{ij}}.\end{aligned}$$

的矩阵. 换而言之, $\mathfrak{g}$ 上的 Lie 括号就是矩阵换位子 $[A,B]=AB-BA$.

题目 12. 对于 Lie 群 G 上的一个形式 ω, 如果对每一个 $\sigma\in G$, 都有 $L_\sigma^\star\omega=\omega$, 则称之为左不变的. $E^p_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ 表示 G 上左不变 p 形式构成的向量空间. 令

$$E^\star_{l\,\mathrm{inv}}(G)=\bigoplus_{p=0}^{\dim G}E^p_{l\,\mathrm{inv}}(G).$$

证明:

- 左不变形式是光滑的.
- $E^\star_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ 是由 G 上的所有光滑形式构成的代数 $E^\star(G)$ 的一个子代数. 而且映射 $\omega\mapsto\omega(e)$ 是从 $E^\star_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ 到 $\Lambda(G_e^\star)$ 上的一个代数同构, 其中 $\Lambda(G_e^\star)$ 为 $G_e^\star$ 的外代数. 特别的, 这个映射给出 $E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ 到 $G_e^\star$, 因而也是 $\mathfrak{g}^\star$ 的一个自然同构. 以这种方式把 $E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ 看做 G 的 Lie 代数的对偶空间.
- 如果 ω 是一个左不变的 1 形式而 X 是一个左不变的向量场, 那么 $\omega(X)$ 是 G 上的一个常函数.
- 如果 $\omega\in E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ 且 $X,Y\in\mathfrak{g}$, 那么 $\mathrm{d}\omega(X,Y)=-\omega[X,Y]$.

- 令 $\{X_1, \cdots, X_d\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个基, 并且以 $\{\omega_1, \cdots, \omega_d\}$ 作为 $E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ 的对偶基, 那么存在 G 关于 $\mathfrak{g}$ 的基 $\{X_i\}_{i=1}^d$ 的结构常数 c^k_{ij} 使得 $[X_i, X_j] = \sum\limits_{k=1}^d c^k_{ij} X_k$, 且满足

$$\begin{cases} c^k_{ij} + c^k_{ji} = 0, \\ \sum\limits_r (c^r_{ij} c^s_{rk} + c^r_{jk} c^s_{ri} + c^r_{ki} c^s_{rj}) = 0. \end{cases}$$

ω_i 的外导数由 Maurer-Cartan 方程 $\mathrm{d}\omega_i = \sum\limits_{j<k} c^i_{jk} \omega_k \wedge \omega_j$ 给出.

解答. 对 1,3,4,5 点作证明.

- 若 $\omega \in \mathcal{A}^r(G)$. 只需证明对 G 上所有光滑 $X_i \in \mathfrak{X}(G), (1 \leqslant i \leqslant r)$ 有 $\omega(X_1, \cdots, X_r)$ 是光滑的, 注意到有

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \cdots, X_r)(\sigma) =& \omega_\sigma(X_1|_\sigma, \cdots, X_r|_\sigma) = (L^\star_{\sigma^{-1}} \omega_e)(X_1|_\sigma, \cdots, X_r|_\sigma) \\ =& \omega_e(L_{\star,\sigma^{-1}} X_1|_\sigma, \cdots, L_{\star,\sigma^{-1}} X_r|_\sigma) \end{aligned} \tag{2}$$

所以只需验证(2)是光滑的.

另设 $\widetilde{\omega} \in \mathcal{A}^r(G)$ 满足 $\widetilde{\omega}_e = \omega_e$. 对于 $\varphi\colon G \times G, (a,b) \mapsto ab.$, 有 $\varphi^\star \widetilde{\omega}$ 是光滑的. 此外, $[0, X_i] \in \mathfrak{X}(G \times G)$, 且 $\iota\colon G \to G \times G, \tau \mapsto (\tau^{-1}, \tau)$ 是光滑的. 因此

$$\varphi^\star \widetilde{\omega}([0, X_1], \cdots, [0, X_r])(\iota(\sigma))$$

关于 σ 是光滑的. 但

$$\begin{aligned} \varphi^\star \widetilde{\omega}([0, X_1], \cdots, [0, X_r])(\iota(\sigma)) =& \varphi^\star \widetilde{\omega}_{(\sigma^{-1},\sigma)}([0, X_1]_{(\sigma^{-1},\sigma)}, \cdots, [0, X_r]_{(\sigma^{-1},\sigma)}) \\ =& \widetilde{\omega}_e(\varphi_\star [0, X_1]_{(\sigma^{-1},\sigma)}, \cdots, \varphi_\star [0, X_r]_{(\sigma^{-1},\sigma)}) \end{aligned} \tag{3}$$

此外,

$$\begin{aligned} \varphi_\star [0, X_i]_{(a,b)}(f) =& [0, X_i]_{(a,b)}(f \circ \varphi) = 0|_a (f \circ \varphi \circ \iota^1_b) + X_i|_b (f \circ \varphi \circ \iota b^2) \\ =& X_i|_b (f \circ L_a) = L_{\star,a} X_i|_b(f) \end{aligned}$$

从而 $(3) = \omega_e(L_{\star,\sigma^{-1}} X_1|_\sigma, \cdots, L_{\star,\sigma^{-1}} X_r|_\sigma)$.

- $\omega(X)(\sigma) = \omega_\sigma(X|_\sigma) = (L^\star_{\sigma^{-1}} \omega)(X|_\sigma) = \omega_e(L_{\star,\sigma^{-1}} X|_\sigma) = \omega_e(X|_e) = \omega(X)(e)$.

- $\mathrm{d}\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega[X, Y] = -\omega[X, Y]$.

- $\mathfrak{g}$ 在 Lie 括号下封闭 $\Longrightarrow$ c^k_{ij} 的存在性.

  由 Lie 括号性质 $\Longrightarrow \begin{cases} c^k_{ij} + c^k_{ji} = 0, \\ \sum\limits_r (c^r_{ij} c^s_{rk} + c^r_{jk} c^s_{ri} + c^r_{ki} c^s_{rj}) = 0. \end{cases}$.

  由于 $L^\star_\sigma$ 与 d 可交换, $\mathrm{d}\omega_i \in E^2_{l\,\mathrm{inv}}(G)$, 且 $\mathrm{d}\omega_i(X_j, X_k) = -\omega[X_j, X_k]$, 推得

$$\mathrm{d}\omega_i = \sum_{j<k} c^i_{jk} \omega_k \wedge \omega_j + \omega'.$$

  其中 $\omega'(X, Y) = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$, 但由于 $E^2_{l\,\mathrm{inv}}(G) \xrightarrow{\sim} \Lambda^2(G_e) \simeq \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ 为同构, 从而 $\omega' = 0$.

题目 13. 计算一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的结构常数.

解答. $\dim \mathrm{GL}(\mathrm{n},\mathbb{R}) = n^2$, 其上有标准基 $\{E_{ij}\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, 其中 E_{ij} 表示第 (i,j) 元为 1, 其余为 0 的矩阵. 我们注意到 $E_{ij}E_{kl} = \delta_j^k E_{il}$, 这样以来,

$$\begin{aligned}[E_{ij}, E_{kl}] =& E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_j^k E_{il} - \delta_l^i E_{kj}\\ =& \sum_{m,n} \delta_j^k \delta_i^m \delta_l^n E_{mn} - \sum_{m,n} \delta_l^i \delta_k^m \delta_j^n E_{mn}.\end{aligned}$$

由于结构常数满足 $[E_{ij}, E_{kl}] = \sum\limits_{m,n} c_{(ij)(kl)}^{(mn)} E_{mn}$. 比较两式便得

$$c_{(ij)(kl)}^{(mn)} = \delta_j^k \delta_i^m \delta_l^n - \delta_l^i \delta_k^m \delta_j^n.$$

2025 微分几何期末 A 卷

唐嘉琪

2025 年 6 月 20 日

题目 1. 试证明:

- 实 1 维单位球面 $\mathbb{S}^1$ 为一个实 1 维光滑流形.
- 包含映射 $i\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ 为嵌入, 其中 $\mathbb{R}^2$ 为实 2 维欧氏空间.

解答. 这里给出更一般的证明, 试题只是 $m=1$ 的特例.

- m 维单位球面 $\mathbb{S}^m$ 定义为

$$\mathbb{S}^m := \left\{(a_1,\cdots,a_{m+1}) \in \mathbb{R}\colon \sum_{i=1}^{m+1} a_i^2 = 1\right\}.$$

令 $p=(0,\cdots,0,1)$ 为北极, $q=(0,\cdots,0,-1)$ 为南极. 开集 $U(p)=\mathbb{S}^m\setminus\{p\}$ 和 $U(q)=\mathbb{S}^m\setminus\{q\}$ 之并覆盖 $\mathbb{S}^m$. 下面定义映射 φ 和 ψ, 使得 $(U(p),\varphi)$ 和 $(U(q),\psi)$ 是覆盖 $\mathbb{S}^m$ 的两个 C^∞ 坐标图. 映射 φ 和 ψ 由球极投影确定.

对 $\forall a\in U(p)$, 记 λ 是由点 p 和 a 确定的直线, π 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 内由 $x_{n+1}=0$ 确定的超平面, $\pi(a)$ 表示 $\mathbb{R}^{m+1}$ 内直线 λ 和 π 相交的点. 当 $a=(a_1,\cdots,a_{m+1})$ 时, 易得 $\pi(a)=(x_1,\cdots,x_m,0)$, 这里 $x_i=a_i/(1-a_{m+1})$ $(1\leqslant i\leqslant m)$. 令

$$\varphi(a)=(x_1,\cdots,x_m)=\left(\frac{a_1}{1-a_{m+1}},\cdots,\frac{a_m}{1-a_{m+1}}\right),$$

φ 是 $U(p)$ 到 $\mathbb{R}^m$ 上的一个同胚. 因为如果 $(x_1,\cdots,x_m)$ 已知, 则由计算可得

$$a=\left(\frac{2x_1}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\frac{2x_2}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\cdots,\frac{2x_m}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\frac{\sum\limits_{i=1}^m x_i^2-1}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2}\right).$$

类似的, 定义

$$\psi\colon U(q)\to\mathbb{R}^m,\quad (a_1,\cdots,a_{m+1})\mapsto(y_1,\cdots,y_m),$$

这里 $y_i=a_i/(1+a_{m+1})$. 如果 $(y_1,\cdots,y_m)$ 已知, 则

$$a=\left(\frac{2y_1}{1+\sum\limits_{i=1}^m y_i^2},\frac{2y_2}{1+\sum\limits_{i=1}^m y_i^2},\cdots,\frac{2y_m}{1+\sum\limits_{i=1}^m y_i^2},\frac{1-\sum\limits_{i=1}^m y_i^2}{1+\sum\limits_{i=1}^m y_i^2}\right).$$

由于

$$\begin{aligned}U(p)\cap U(q)&=\mathbb{S}^m\setminus(\{p\}\cup\{q\}),\\ \forall a\in U(p)\cap U(q),\quad \varphi(a)&=(x_1,\cdots,x_m),\\ \psi(a)&=(y_1,\cdots,y_m),\end{aligned}$$

而

$$y_i=\frac{a_i}{1+a_{m+1}}=\frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\quad x_i=\frac{a_i}{1-a_{m+1}}=\frac{y_i}{\sum\limits_{i=1}^m y_i^2},$$

因此 $\psi\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\psi^{-1}$ 都是 C^∞ 的, 于是 $\mathbb{S}^m$ 是一个 m 维光滑流形.

- 只要证明 i 是一个一一浸入, 且是一个到内的同胚即可.

  我们继续沿用上一题的记号, 在球极投影下有 (我们选择一个, 另一个是一样的)

$$i(x^1,\cdots,x^m)=\left(\frac{2x_1}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\frac{2x_2}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\cdots,\frac{2x_m}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2},\frac{\sum\limits_{i=1}^m x_i^2-1}{1+\sum\limits_{i=1}^m x_i^2}\right).$$

  在不会引起歧义的时候, 为了方便, 后文将 $\sum\limits_{i=1}^m$ 简写为 $\sum$.

  考察切映射 $i_{\star,s}\colon \mathrm{T}_{\mathbb{S}^m,s}\to\mathrm{T}_{\mathbb{R}^{m+1},i(s)}$ 的 Jacobi 阵.

  先计算前面 m 个分量的偏导数,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{2x_j}{1+\sum x_i^2}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\1\leqslant k\leqslant m}}.$$

  当 $j=k$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2x_j}{1+\sum x_i^2}\right)=\frac{2(1+\sum x_i^2)-2x_j\cdot 2x_j}{(1+\sum x_i^2)^2}=\frac{2(1+\sum x_i^2-2x_j^2)}{(1+\sum x_i^2)^2}.$$

  当 $j\neq k$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{2x_j}{1+\sum x_i^2}\right)=2x_j\frac{-2x_k}{(1+\sum x_i^2)^2}=\frac{-4x_jx_k}{(1+\sum x_i^2)^2}.$$

  再计算第 $(m+1)$ 个分量的偏导数,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\sum x_i^2-1}{1+\sum x_i^2}\right)_{1\leqslant k\leqslant m}=\frac{2x_k(1+\sum x_i^2)+(1-\sum x_i^2)\cdot 2x_k}{(1+\sum x_i^2)^2}=\frac{4x_k}{(1+\sum x_i^2)^2}$$

现在我们来看 $\mathrm{Jac}(i_{\star,s})$

$$\mathrm{Jac}(i_{\star,s})=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_1}{1+\sum x_i^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_1}{1+\sum x_i^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_m}{1+\sum x_i^2}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_2}{1+\sum x_i^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_2}{1+\sum x_i^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{2x_2}{1+\sum x_i^2}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_m}{1+\sum x_i^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_m}{1+\sum x_i^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{2x_m}{1+\sum x_i^2}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sum x_i^2-1}{1+\sum x_i^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sum x_i^2-1}{1+\sum x_i^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\sum x_i^2-1}{1+\sum x_i^2}\right)\end{bmatrix}_{(m+1)\times m}$$

$$=\frac{1}{(1+\sum x_i^2)^2}\begin{bmatrix}2(1+\sum x_i^2-2x_1^2) & -4x_1x_2 & \cdots & -4x_1x_m\\ -4x_2x_1 & 2(1+\sum x_i^2-2x_2^2) & \cdots & -4x_2x_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -4x_mx_1 & -4x_mx_2 & \cdots & 2(1+\sum x_i^2-2x_m^2)\\ 4x_1 & 4x_2 & \cdots & 4x_m\end{bmatrix}$$

我们记上式这个矩阵为 Λ, 即 $\mathrm{Jac}(i_{\star,s})=(1+\sum x_i^2)^{-2}\cdot\Lambda$. 对 Λ 进行初等变换, 有

$$\Lambda\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m\end{bmatrix}$$

这足以说明 $\mathrm{rk}(i_{\star,s})=\mathrm{rk}(\Lambda)=m$, 即 $f_{\star,s}$ 非退化.

i 的单性是显然的, 这说明了 i 是一个一一浸入, 同时注意到上述球极投影是一个经典的到内同胚, 从而 $i\colon\mathbb{S}^m\hookrightarrow\mathbb{R}^{m+1}$ 是一个嵌入.

题目 2. 假定 M 为实 2 维光滑流形, $f\in C^\infty(M)$ 为光滑流形 M 上光滑函数, 记 d 为外微分算子. 试证明:

- $\mathrm{d}f$ 与 M 上局部光滑坐标选取无关.
- $\mathrm{d}^2f=0$.

解答.

- 选取两组光滑坐标 $\{x^1,x^2\},\{y^1,y^2\}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f=&\frac{\partial f}{\partial y^1}\mathrm{d}y^1+\frac{\partial f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2=\frac{\partial f}{\partial y^1}\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\right)+\frac{\partial f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\right)\\ =&\left(\frac{\partial f}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\right)\mathrm{d}x^1+\left(\frac{\partial f}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x^2=\frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2\end{aligned}$$

- 局部光滑坐标记为 $\{x^1,x^2\}$.

$$\mathrm{d}^2f=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^2\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)=\sum_{i,j=1}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)=0$$

题目 3. 假定 D 为 2 维实空间 $\mathbb{R}^2$: $\{x,y\}$ 上有界区域. ∂D 为 D 的边界, 其上定向由 D 上定向诱导. 又 $P=P(x,y), Q=Q(x,y)$ 为 D 上光滑函数. 利用流形上 Stokes 公式, 试证明:

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

解答. 令 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega=&\mathrm{d}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x+P\wedge\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y+Q\mathrm{d}^2y\\=&(P_x\mathrm{d}x+P_y\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x+(Q_x\mathrm{d}x+Q_y\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}y\\=&P_x\mathrm{d}^2x+P_y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+Q_x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+Q_y\mathrm{d}^2y=(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

代入 $\int_{\partial D}\omega=\int_D\mathrm{d}\omega$ 得证.

题目 4. 已知光滑流形间的光滑映射 $\varphi\colon M\to N$ 可以诱导其光滑微分 p-形式间的拉回映射.

- 试问: 以下那个选项实拉回映射的正确表达形式.

$$(A)\quad \varphi^\star\colon \mathcal{A}^p(M)\to\mathcal{A}^p(N)\qquad\qquad (B)\quad \varphi^\star\colon \mathcal{A}^p(N)\to\mathcal{A}^p(M)$$

- 试证明: 外积运算 $\wedge$ 与拉回映射 $\varphi^\star$ 可交换.

解答.

- (B)
- 对任意 $\alpha=\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^p\in\mathcal{A}^p(N)$, $\beta=\beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^q\in\mathcal{A}^q(N)$.

$$\begin{aligned}\varphi^\star(\alpha\wedge\beta)=&\varphi^\star(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^p\wedge\beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^q)\\=&\varphi^\star(\alpha^1)\wedge\cdots\wedge\varphi^\star(\alpha^p)\wedge\varphi^\star(\beta^1)\wedge\cdots\wedge\varphi^\star(\beta^q)=\varphi^\star(\alpha)\wedge\varphi^\star(\beta)\end{aligned}$$

题目 5. 实系数 2 阶一般线性群定义为

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})=\left\{A=\begin{bmatrix}a_1^1 & a_1^2\\ a_2^1 & a_2^2\end{bmatrix}:\ \det A\neq 0,\quad a_i^j\in\mathbb{R},\quad i,j=1,2\right\},$$

其中 $\det A$ 为 2×2 矩阵 A 的行列式.

- 试证明: $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 关于矩阵乘法为一个 Lie 群.
- 试求: $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 上, 在单位矩阵 I_2 处切空间 $\mathrm{T}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}),I_2}$ 上取值为 $\left.\dfrac{\partial}{\partial a_1^1}\right|_{I_2}$ 的左不变向量场 ω_1^1.

解答.

- $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 是一个 4 维光滑流形, 且其关于矩阵乘法是一个群. 其满足映射

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}),(A,B)\mapsto AB^{-1}.$$

是光滑的, 从而证明 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 关于矩阵乘法为一个 Lie 群. 其中只需证明 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 确实是一个 4 维光滑流形即可.

用 M_2 表示 2×2 的实矩阵全体, 对任意 $A\in\mathrm{M}_2$, $A=\begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix}$, 令 $\varphi(A)=(a_1^1,a_1^2,a_2^1,a_2^2)$. 其中 $a_i^j\in\mathbb{R}$, 于是 φ 是 M_2 到 $\mathbb{R}^4$ 的一个 1-1 对应.

在 M_2 上赋予拓扑, M_2 的一个集合 U 称为是开集当且仅当 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个开集.

于是 φ 为 M_2 到 $\mathbb{R}^4$ 上的一个同胚. (M_2,φ) 就是覆盖 M_2 的一个 C^∞-图册, 从而 M_2 是一个 4 维微分流形.

有 $\det\colon M_2\to\mathbb{R}\in C^\infty$. 易知 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})=\mathrm{M}_2\setminus\det^{-1}\{0\}$, 从而 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 是 M_2 的一个开子集, 从而 $(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\varphi)$ 是覆盖 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 的一个 C^∞-图册, 从而 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 是一个 4 维微分流形.

- $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{M}_2\simeq\mathbb{R}^4$ 的一个开子集, 所以 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 的 (典范的)Lie 代数的底空间, 即 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 在 I_2 处切空间 $\mathrm{T}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}),I_2}$, 就是 M_2 自身, 即 $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})=\mathrm{M}_2$.

  对任意 $A=(A_i^j)\in\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$, 并记 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 上全局坐标系为 (a_i^j), 那么 A 相应的在 $\mathrm{T}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}),I_2}$ 处的切向量就是 $\sum A_i^j\dfrac{\partial}{\partial a_i^j}$. 这说明了 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 而其生成的左不变场在 $X=(a_i^j)$ 处向量为 $\sum a_i^k A_k^j\dfrac{\partial}{\partial a_i^j}=\sum\limits_i a_i^1\dfrac{\partial}{\partial a_i^1}$, 即 $\omega_1^1=a_1^1\dfrac{\partial}{\partial a_1^1}+a_2^1\dfrac{\partial}{\partial a_2^1}$.