

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

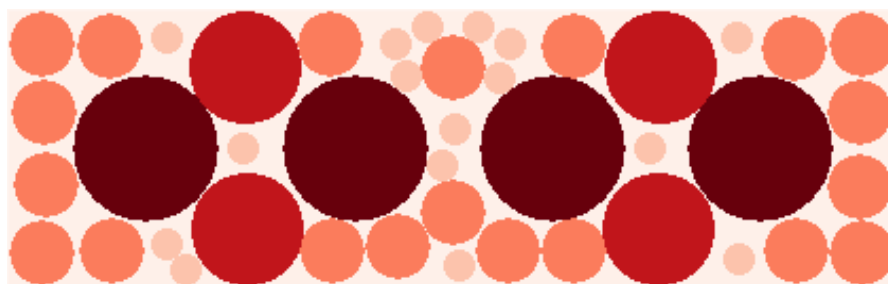
LICENCE 3

PROJET MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE

Squelette et chirurgie aux rayons gamma

Roumier Clémence
Tresse Caroline
Lefort Tanguy

Encadrement
M. Chouly
M. Dupuis



6 mai 2019

Remerciements

Nous tenons à remercier Mme Moser-Jauslin pour son aide concernant la liaison entre le calcul différentiel et la géométrie et le temps qu'elle nous a accordé. Nous remercions également M. Chouly pour nous avoir guidé tout au long de ce projet avec ses conseils et sa méthodologie. Enfin, nos remerciements vont à M. Dupuis pour son aide et son écoute par rapport à la partie informatique de ce projet.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Définition et construction du squelette	4
2.1	Définitions	4
2.2	Caractérisation à partir du gradient	5
2.3	Application au rectangle	8
3	Mathématiques pour l'algorithme	10
3.1	Géométrie discrète et r -squelette	10
3.2	Flux d'un champ de vecteurs et théorie des graphes	12
4	Conclusion	16
	Bibliographie	17

1 Introduction

Depuis 1964 la morphologie mathématique est un domaine de recherche en expansion. Initialement étudiée par Georges Matheron et Jean Serra dans le cadre de l'exploitation minière, elle s'est rapidement révélée utile dans d'autres champs d'applications tels que le traitement de l'image, la biologie ou encore la vision industrielle. Nous nous intéresserons en particulier à son application à l'imagerie médicale avec la chirurgie aux rayons gamma.

Utilisée contre certaines tumeurs, la chirurgie aux rayons gamma est basée sur l'émission de doses de différents diamètres sur la zone à traiter. Le passage d'un diamètre à l'autre nécessite la mise en place d'une logistique importante et pénible pour le patient.

Notre but est donc de trouver une solution acceptable au problème en le comparant à celui du recouvrement d'une région par des boules : comment recouvrir la plus grande surface possible en un nombre fini de boules ?

Pour ce faire nous commencerons par introduire la notion de squelette ainsi que ses propriétés. Nous étudierons également sa construction notamment à travers l'exemple du rectangle. Enfin nous nous intéresserons à la partie théorique permettant l'implémentation d'un algorithme capable de répondre au problème posé. Nous traiterons pour cela de la géométrie discrète, de la notion de r -squelette ainsi que du flux d'un champ de vecteurs tout en nous appuyant sur la théorie des graphes.

2 Définition et construction du squelette

La construction du squelette d'une région semble *a priori* très simple. Elle consiste à réduire une forme géométrique en une structure contenant assez de ses propriétés pour pouvoir ensuite la reformer à l'aide de données complémentaires. Nous allons tout d'abord définir mathématiquement le squelette et trouver des caractérisations. Nous appliquerons ensuite cela à la construction du squelette d'un rectangle.

2.1 Définitions

Définition 2.1. Une région \mathcal{R} est un sous-ensemble ouvert du plan ou de l'espace (ici \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3). Notons $\partial\mathcal{R}$ sa frontière. En particulier $\partial\mathcal{R} \not\subset \mathcal{R}$.

Définition 2.2. Le squelette $\Sigma(\mathcal{R})$ d'une région \mathcal{R} est l'ensemble des points suivants :

$$\Sigma(\mathcal{R}) = \left\{ X \in \mathcal{R}, \exists X_1, X_2 \in \partial\mathcal{R} \text{ tels que } X_1 \neq X_2 \right. \\ \left. \text{et } |X - X_1| = |X - X_2| = \min_{Y \in \partial\mathcal{R}} |X - Y| \right\}.$$

Proposition 2.1. Soit $X \in \mathcal{R}$. Soient $B(X, d)$ la boule ouverte de centre X et de rayon d et $S(X, d)$ la sphère de même centre et de même rayon. Posons $d = \min_{Y \in \partial\mathcal{R}} |X - Y|$. Alors :

- (i) d est le rayon maximal tel que \mathcal{R} contienne $B(X, d)$,
- (ii) X appartient au squelette $\Sigma(\mathcal{R})$ si et seulement si :
 1. $B(X, d) \subset \mathcal{R}$,
 2. $S(X, d) \cap \partial\mathcal{R}$ contient au moins deux points.

Démonstration. Soient \mathcal{R} une région, $X \in \mathcal{R}$ et d le rayon associé à X .

- (i) Soit $r > d$ un réel. Montrons qu'il existe un point de $B(X, r)$ qui n'est pas dans \mathcal{R} . Par définition de d , il existe un point X_1 appartenant à la frontière $\partial\mathcal{R}$ de la région tel que

$$|X - X_1| = d < r.$$

Il existe un point Z appartenant à l'intersection de la demi-droite $[XX_1)$ avec le complémentaire de \mathcal{R} . Donc $B(X, r)$ n'est pas contenue dans \mathcal{R} .

Ainsi, d est le rayon maximal tel que $B(X, d)$ soit incluse dans \mathcal{R} .

- (ii) Raisonnons par double implication. Supposons que le point X est dans le squelette. Par définition, il existe deux points distincts X_1 et X_2 de $\partial\mathcal{R}$ appartenant à la sphère $S(X, d)$. Donc $S(X, d) \cap \partial\mathcal{R}$ contient au moins deux points.

Il reste à montrer que $B(X, d) \subset \mathcal{R}$. Soient Z un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ et P le point d'intersection du segment $[XZ]$ avec $\partial\mathcal{R}$. On a l'inégalité suivante :

$$d = \min_{Y \in \partial\mathcal{R}} |X - Y| \leq |X - P| \leq |X - Z|.$$

Donc Z n'appartient pas à la boule ouverte $B(X, d)$. Ainsi $B(X, d) \subset \mathcal{R}$.

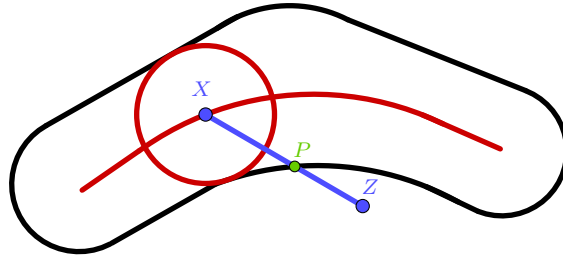


FIGURE 1 – Visualisation de la situation ci-dessus

Réciproquement, supposons que $B(X, d) \subset \mathcal{R}$ et $S(X, d) \cap \partial\mathcal{R}$ contient au moins deux points. Le point X appartient à la région car il appartient à $B(X, d)$. Il existe deux points distincts $X_1, X_2 \in \partial\mathcal{R} \cap S(X, d)$. Ainsi, par définition de la frontière, $X \in \Sigma(\mathcal{R})$.

□

Définition 2.3. Soient \mathcal{R} une région du plan (ou de l'espace) et X un point du squelette $\Sigma(\mathcal{R})$. Le rayon maximal de la boule ouverte $B(X, d(X))$ est

$$d(X) = \min_{Y \in \partial\mathcal{R}} |X - Y|.$$

Notre objectif étant d'implémenter un algorithme utilisé dans le cadre de la chirurgie aux rayons gamma, nous avons besoin d'une autre caractérisation du squelette.

2.2 Caractérisation à partir du gradient

Définition 2.4. Soient γ_1 et γ_2 deux courbes paramétrées telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Ces courbes ont un contact d'ordre au moins p si :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \gamma_1^{(k)}(0) = \gamma_2^{(k)}(0) \text{ et } \gamma_1^{(p+1)}(0) \neq \gamma_2^{(p+1)}(0),$$

où $\gamma^{(k)}$ est la dérivée k -ième de γ .

2. DÉFINITION ET CONSTRUCTION DU SQUELETTE

Lemme 2.2. Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et de rayon r . Prenons (D) une droite passant par un point P de \mathcal{C} . Si (D) n'est pas la tangente au cercle en P alors un segment de (D) est inclus dans le disque de centre O et de rayon r .

Lemme 2.3. La normale à une courbe de niveau a la direction du gradient.

Démonstration. Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $f(x, y) = k$ une courbe de niveau. On peut trouver une paramétrisation telle que

$$f(x(t), y(t)) = k.$$

On applique ensuite la règle de dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

C'est-à-dire $\langle \nabla f, (x'(t), y'(t)) \rangle = 0$. Cela traduit le fait que le gradient est orthogonal au vecteur tangent. Ainsi la normale à une courbe de niveau a la direction du gradient. \square

Théorème 2.4. Si \mathcal{R} est une région ayant une frontière $\partial\mathcal{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , alors la fonction distance à la frontière définie par $d(X) = \min_{Y \in \partial\mathcal{R}} |X - Y|$ est de classe \mathcal{C}^1 aux points de $\mathcal{R} \setminus \Sigma(\mathcal{R})$. Le champ $\nabla d(X)$ est continu sur $\mathcal{R} \setminus \Sigma(\mathcal{R})$.

Remarque. L'idée de la démonstration suivante est issue de [3].

Démonstration. Soient $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{R} \setminus \Sigma(\mathcal{R})$ et $X_1 = (x_1, y_1) \in \partial\mathcal{R}$ tels que $d(X_0) = |X_0 - X_1|$. Montrons que $d(X)$ est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de X_0 .

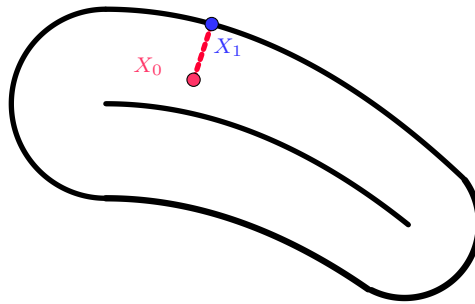


FIGURE 2 – Représentation schématique de la situation

Soient $X = (x, y) \in \mathcal{R}$ et $Y = (\bar{x}, \bar{y}) \in \partial\mathcal{R}$ tels que $d(X) = |X - Y|$. Supposons que la frontière soit une courbe de niveau notée $f_1(Y) = 0$ avec $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

2. DÉFINITION ET CONSTRUCTION DU SQUELETTE

une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

La distance entre X et un point de la frontière est minimale si ce point est le projeté orthogonal de X sur la frontière, c'est-à-dire si le vecteur \overrightarrow{XY} est normal à la frontière en Y . D'après le lemme précédent, la normale à la frontière a la direction de $\nabla f_1(Y)$, donc \overrightarrow{XY} doit être colinéaire à $\nabla f_1(Y)$. Ceci se traduit par :

$$f_2(\bar{x}, \bar{y}, x, y) = \begin{vmatrix} \bar{x} - x & \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}(Y) \\ \bar{y} - y & \frac{\partial f_1}{\partial \bar{y}}(Y) \end{vmatrix} = 0.$$

On pose $F = (f_1, f_2)$. On cherche donc les solutions de $F(\bar{x}, \bar{y}, x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$. En développant le déterminant f_2 on obtient :

$$\begin{aligned} J_{(x_1, y_1, x_0, y_0)} F &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix} [x_1, y_1, x_0, y_0] \\ &= {}^t \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}(X_1) & \frac{\partial f_1}{\partial \bar{y}}(X_1) - (y_1 - y_0) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \bar{x}^2}(X_1) + (x_1 - x_0) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}(X_1) \\ \frac{\partial f_1}{\partial \bar{y}}(X_1) & -\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}(X_1) + (x_1 - x_0) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \bar{y}^2}(X_1) - (y_1 - y_0) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}(X_1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites il faut que $\det(J_{(X_1, X_0)} F)$ soit non nul. Montrons que celui-ci ne s'annule que lorsque la sphère de centre X_0 et de rayon $|X_1 - X_0|$ a un contact d'ordre supérieur à 1 avec $f_1(x, y) = 0$ en X_1 .

Supposons que $f_1(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - f(\bar{x})$. La sphère $S(X_0, |X_1 - X_0|)$ a pour équation cartésienne $(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2 = r^2$ avec $r^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$ c'est-à-dire

$$\bar{y} = g(\bar{x}) = \sqrt{r^2 - (\bar{x} - x_0)^2} + y_0.$$

On a $f(x_1) = g(x_1) = y_1$ et $f'(x_1) = g'(x_1)$ d'après le lemme 2.2 page 6. Il reste à montrer que $f''(x_1) = g''(x_1)$. Par un calcul direct on obtient

$$g''(x_1) = \frac{-((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2)}{(y_1 - y_0)^3}.$$

En remplaçant les dérivées partielles de f_1 par leurs valeurs respectives dans $\det(J_{(X_1, X_0)} F) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) &= -f'(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) &= 1, \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial \bar{y}^2}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \bar{x}^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= -f''(\bar{x}), \end{aligned}$$

on obtient $f''(x_1) = g''(x_1)$. Donc la sphère $S(X_0, |X_1 - X_0|)$ a un contact d'ordre supérieur à 1 avec la frontière en X_1 . Un tel point X_0 correspond à une extrémité du

2. DÉFINITION ET CONSTRUCTION DU SQUELETTE

squelette. Ainsi, si $X_0 \in \mathcal{R} \setminus \Sigma(\mathcal{R})$, $J_{(X_1, X_0)}F$ est inversible, on peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites qui garantit l'existence d'une unique fonction g de classe \mathcal{C}^1 telle que $Y = g(X)$. On a donc $d(x, y) = |X - g(X)|$ de classe \mathcal{C}^1 et ∇d est continu. \square

Remarque. Cette proposition nous sera utile dans la partie programmation puisqu'elle permet de trouver les points du squelette comme étant les points de discontinuité du gradient de la fonction distance.

2.3 Application au rectangle

Lemme 2.5. 1. Soient deux demi-droites issues d'un même point O formant une région angulaire \mathcal{R} . Le squelette de cette région est la bissectrice de l'angle formé par les deux demi-droites.

2. Soient deux droites parallèles (D_1) et (D_2) non confondues. Ces deux droites forment une bande \mathcal{R} dont le squelette est la droite parallèle équidistante à (D_1) et (D_2) .



FIGURE 3 – Squelette d'un angle et d'une bande

Démonstration. 1. Soient \mathcal{R} une région angulaire et P un point appartenant à son squelette. Prenons A le projeté orthogonal de P sur l'un des côtés et B le projeté orthogonal sur l'autre. Par définition, P est à égale distance des deux côtés qui délimitent le région donc $|PA| = |PB|$, $\widehat{OAP} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{OBP} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi les triangles PAO et PBO sont rectangles de même hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore :

$$|OA| = \sqrt{|PO|^2 - |PA|^2} = \sqrt{|PO|^2 - |PB|^2} = |OB|$$

Donc : $|OA| = |OB|$, $|PA| = |PB|$ et $\widehat{OAP} = \widehat{OBP}$ et les triangles PBO et PAO sont congrus. Il y a égalité des angles homologues : $\widehat{POA} = \widehat{POB}$. Le point P est bien situé sur la bissectrice de la région angulaire \mathcal{R} .

2. DÉFINITION ET CONSTRUCTION DU SQUELETTE

2. Soit \mathcal{R} la région délimitée par deux droites parallèles (D_1) et (D_2) non confondues. Soit P un point appartenant au squelette de cette région. Alors il existe $A \in (D_1)$ et $B \in (D_2)$ tel que $|PA| = |PB|$. Comme la distance est minimale, A est le projeté orthogonal de P sur (D_1) et B est le projeté orthogonal de P sur (D_2) . Donc P se trouve sur la droite (D') équidistante des droites (D_1) et (D_2) .

□

Présentons maintenant la construction du squelette d'un rectangle. Considérons les bissectrices des quatre angles ainsi que la droite parallèle et équidistante aux côtés verticaux et celle par rapport aux côtés horizontaux.

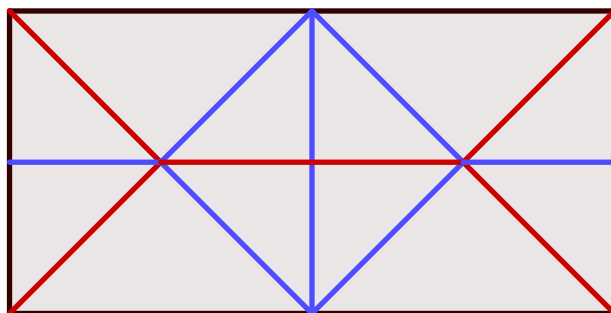


FIGURE 4 – Segments pouvant contenir les points du squelette du rectangle

D'après ce qui précède, le squelette est contenu dans les segments de droites tracés ci dessus. Posons a et b les longueurs des côtés du rectangle avec $a < b$. Sur les bissectrices descendantes, on exclut les points d'ordonnées inférieures à $\frac{a}{2}$. En effet, la sphère de rayon maximal centrée en un tel point n'a qu'un seul point de contact avec la frontière. On applique un raisonnement similaire aux deux autres bissectrices. On exclut également les points de la droite horizontale situés à une distance inférieure à $\frac{a}{2}$ des côtés verticaux pour les mêmes raisons. Quant à la droite verticale, le seul point pouvant appartenir au squelette est le point d'intersection avec la droite horizontale. Effectivement, une sphère de rayon maximal centrée en un tel point intersecte la frontière aux points $(a, \frac{b}{2})$ et $(0, \frac{b}{2})$. Le squelette final est représenté sur la figure ci-dessous.

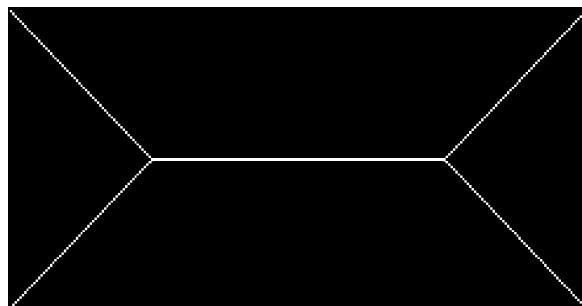


FIGURE 5 – Squelette du rectangle

3 Mathématiques pour l'algorithme

Dans cette partie, notre but est d'étudier des éléments mathématiques qui nous permettront d'implémenter notre algorithme de squelettisation.

3.1 Géométrie discrète et r -squelette

Nous ne considérons ici que des régions \mathcal{R} connexes et sans trou dites simplement connexes.

La manière la plus intuitive (et celle que l'on utilisera par la suite) pour discrétiser une région dans un plan est de lui appliquer un masque sous la forme d'un pavage régulier. Choisissons un pavage standard à partir de carrés de côté 1.

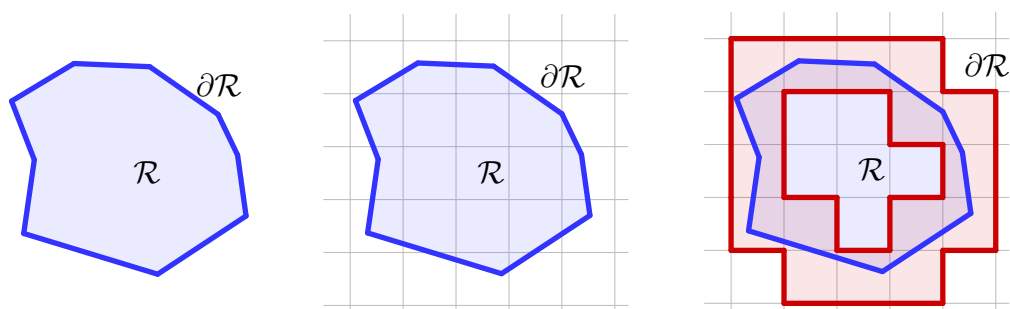


FIGURE 6 – Procédé de discrétisation de $\partial\mathcal{R}$

En général, on peut se restreindre au cas où la frontière ne passe pas exactement par le sommet conjoint de quatre carrés. En effet, plaçons-nous dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité associé à l'expérience “On trace $\partial\mathcal{R}$ et on regarde dans quelles régions du pavé $[a, b] \times [c, d]$ contenant \mathcal{R} la courbe passe” avec la mesure

3. MATHÉMATIQUES POUR L'ALGORITHME

de Lebesgue λ_2 . On note X le vecteur aléatoire (X_1, X_2) tel que $X_1 \sim \mathcal{U}([a, b])$ et $X_2 \sim \mathcal{U}([c, d])$ où \mathcal{U} est la loi uniforme. Il est clair que X_1 et X_2 sont indépendantes. Si on choisit un point quelconque du pavé que l'on note $Y = (x_0, y_0)$ on a alors

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X_1 = x_0) \mathbb{P}(X_2 = y_0) = 0.$$

Ainsi la probabilité que la courbe passe par un point spécifique du pavé est nulle. En particulier elle est nulle pour le sommet conjoint de quatre carrés.

Cependant, on aurait pu construire $\partial\mathcal{R}$ de façon à passer par ce sommet spécifique. Dans ce cas, on obtient au moins une zone formant un carré de côté 2. Dans l'optique de ne pas irradier une zone saine de rayons gamma, on décide alors d'enlever les sous-carrés les plus éloignés de \mathcal{R} .

On sait que le squelette d'une région connexe est lui-même connexe. Traitons donc la notion de connexité en géométrie discrète en nous basant sur l'exemple des droites discrètes d'après la caractérisation de Réveillès de 1991.

Définition 3.1. Une droite discrète \mathcal{D} est définie par le quadruplet $(a, b, \mu, \omega) \in \mathbb{Z}$, où $b \neq 0$, ω est son épaisseur et $\frac{a}{b}$ est la pente de \mathcal{D} de borne inférieure μ . Un point (x, y) appartient à \mathcal{D} si

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega.$$

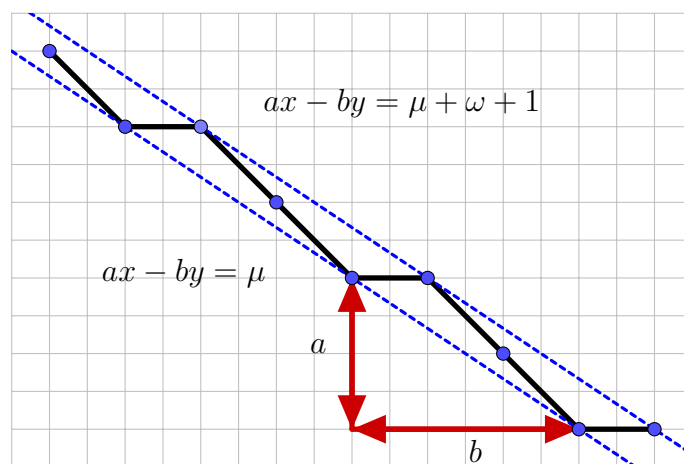


FIGURE 7 – Exemple de droite discrète

Théorème 3.1. Soit $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ une droite discrète, on a alors :

- si $\omega < \max(|a|, |b|)$ la droite est déconnectée,
- si $\omega = \max(|a|, |b|)$ la droite est 8-connexe, dite naïve,

- si $\max(|a|, |b|) < \omega < |a| + |b|$ la droite présente de la 8 et 4-connexité, dite *-connexe,
- si $\omega = |a| + |b|$ la droite est 4-connexée, dite standard,
- si $\omega > |a| + |b|$ la droite est épaisse.

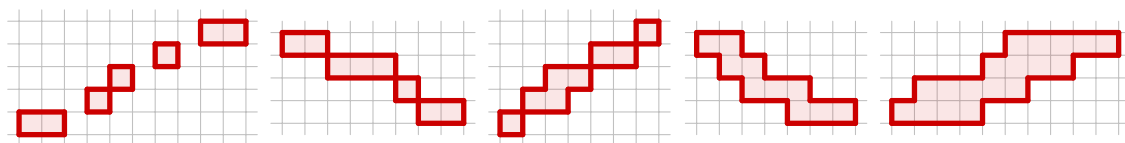


FIGURE 8 – De gauche à droite : droite déconnectée, droite naïve, droite *-connexe, droite standard et droite épaisse

Le fait de discrétiser l'espace nous mène aussi à une nouvelle version du squelette. En effet, regardons en particulier le squelette d'un rectangle dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Plaçons-nous en un des angles du rectangle, nous pourrions toujours trouver au moins deux points du squelette arbitrairement proche de la frontière. Dans un espace discrétisé nous perdons cette précision. C'est pourquoi nous avons besoin de la notion de r -squelette.

Définition 3.2. Soient \mathcal{R} une région, $\Sigma(\mathcal{R})$ son squelette et $r \geq 0$ un réel arbitraire. L'ensemble des points de $\Sigma(\mathcal{R})$ ayant une distance à la frontière d'au moins r est le r -squelette, noté $\Sigma_r(\mathcal{R})$:

$$\Sigma_r(\mathcal{R}) := \{X \in \Sigma(\mathcal{R}), d(X) \geq r\}.$$

En particulier $\Sigma_0(\mathcal{R}) = \Sigma(\mathcal{R})$.

Le r -squelette va jouer un rôle central dans l'algorithme de la chirurgie : nous avons un nombre fini de tailles de rayons pour les disques et il ne faut pas irradier une région qui n'est pas tumorée.

3.2 Flux d'un champ de vecteurs et théorie des graphes

Maintenant que nous avons discrétisé notre région \mathcal{R} en un ensemble de pixels, il nous faut une condition pour déterminer si un pixel appartient ou non au squelette. Pour cela nous allons utiliser le théorème 2.4.

Prenons un point $X_0 \in \mathcal{R} \setminus \Sigma(\mathcal{R})$ et X_1 l'unique point de tangence entre $S(X_0, d(X_0))$ et $\partial\mathcal{R}$. Alors une conséquence directe du théorème est que $\nabla d(X_0)$ a la même direction que la droite (X_1X_0) . Ainsi le champ de vecteurs $V(X)$ est le gradient $\nabla d(X)$.

Définition 3.3. Soit $S = S(X_0, r)$ la sphère paramétrée avec $\theta \in [0, 2\pi[$ par $X(\theta) = X_0 + r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ telle que $B(X_0, r)$ soit dans \mathcal{R} . On note $N(\theta)$ le vecteur normal à S en $X(\theta)$, $N(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. On définit le flux I d'un champ de vecteurs $V(X)$ comme :

$$I := \int_0^{2\pi} \langle V(X(\theta)), N(\theta) \rangle d\theta.$$

Proposition 3.2. Le flux d'un champ de vecteurs $V(X)$ constant est nul le long de tout cercle S défini comme précédemment.

Démonstration. Soit S la sphère paramétrée en $X_0 \in \mathcal{R} \setminus \Sigma(\mathcal{R})$. Soit $V(X)$ un champ de vecteurs constant : $V(X) = (a, b)$. Calculons le flux de V .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \langle V(X(\theta)), N(\theta) \rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a \cos(\theta) + b \sin(\theta) d\theta = \left[a \sin(\theta) - b \cos(\theta) \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le flux de V est nul. □

Utilisons cette propriété pour enlever les points qui ne sont pas dans le squelette d'une région discrète. Pour cela, commençons par calculer en tout $x \in \mathcal{R}$ le gradient $\nabla d(X)$. Ensuite, notons $(X_i)_{i \in \llbracket 1; 8 \rrbracket}$ les points dans le 8-voisinage de X et N_i le vecteur normal à $S(X, 1)$ en X_i (le 1 vient du fait que l'on discrétise avec une grille de pixels de côté 1). Cela nous permet d'écrire une version discrétisée du flux :

$$I(X) = \frac{2\pi}{8} \sum_{i=1}^8 \langle \nabla d(X_i), N_i \rangle.$$

Si la quantité $|I(X)|$ est grande, alors le cercle de centre X contient un point du squelette. Sinon, le point n'appartient pas au squelette. Cette méthode nécessite donc de décider d'un seuil à l'avance qui peut être déterminé expérimentalement.

Un risque avec ce seuil est de retirer trop de points et d'obtenir ainsi un squelette n'ayant pas les mêmes propriétés topologiques que sa région, notamment la connexité. Pour résoudre ce problème, il suffit de regarder le 8-voisinage de chaque pixel. Si en enlevant le pixel central cela crée un trou ou que le squelette restant n'est plus en un seul morceau alors le pixel n'aurait pas dû être enlevé. Pour cela utilisons des éléments de la théorie des graphes.

Définition 3.4. Un graphe G sans boucles en ses sommets est défini par l'ensemble de ses sommets $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, celui de ses arêtes $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ avec $n, m \in \mathbb{N}^*$ et une fonction γ qui associe un couple de sommets à toute arête.

$$\begin{aligned} \gamma : \quad A &\longrightarrow S \times S \\ a_k &\longmapsto (s_i, s_j)_{1 \leq i < j \leq n} \end{aligned}$$

Notons simplement par la suite $G(S, A)$.

Remarque. Un graphe est dit non vide à partir du moment où il admet au moins un sommet. Ainsi, $G(\{s\}, \emptyset)$ est un graphe.

Définition 3.5. Soit $G(S, A)$ un graphe non orienté et sans boucles en tout sommet. Notons \mathcal{E} la caractéristique d'Euler :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \quad G &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (S, A) &\longmapsto |S| - |A| \end{aligned}$$

De plus si p est le nombre de composantes connexes on peut alors définir le nombre cyclomatique de G noté $\nu(G)$, comme étant le nombre de cycles dans G :

$$\nu(G) = |A| - |S| + p.$$

Proposition 3.3. 1. Un graphe connexe est un arbre si et seulement si sa caractéristique d'Euler vaut 1.

2. Un graphe sans cycle est connexe si et seulement si sa caractéristique d'Euler est 1.

Démonstration. Soit G un graphe doté de m arêtes et n sommets.

1. Si G est un graphe connexe : $p = 1$.

\Rightarrow Supposons que G est un arbre, donc G est sans cycle : $\nu(G) = 0$, donc $m - n + 1 = 0$ et $\mathcal{E} = n - m = 1$. La caractéristique d'Euler vaut 1.

\Leftarrow Supposons que $\mathcal{E} = n - m = 1$. Donc $\nu(G) = m - n + 1 = -1 + 1 = 0$. Le nombre cyclomatique est nul donc G est un graphe connexe sans cycle : G est un arbre.

2. Si G est un graphe sans cycle : $\nu(G) = 0$.
 \Rightarrow Supposons que G est connexe. Le fait que $p = 1$ et $\nu(G) = m - n + 1 = 0$ implique que $n - m = 1$ et donc $\mathcal{E} = 1$.
 \Leftarrow Supposons que $\mathcal{E} = n - m = 1$. Le fait que $\nu(G) = m - n + p = 0$ implique que $p = n - m = 1$. Ainsi G est connexe.

□

Une manière de garder la connexité est de construire un graphe dont on supprime les cycles dans le 8-voisinage de X . On n'enlève X que si ce graphe est un arbre et que tous les voisins de X ne sont pas dans la région à affiner. En pratique on construit une matrice d'adjacence. Celle-ci sera symétrique car le graphe est non orienté. A partir de cette matrice et du 8-voisinage on obtient le nombre d'arêtes et de sommets ce qui est suffisant pour calculer la caractéristique d'Euler et faire notre décision quant à l'appartenance de X au squelette. On peut résumer cette décision en trois cas comme décrits ci-dessous.

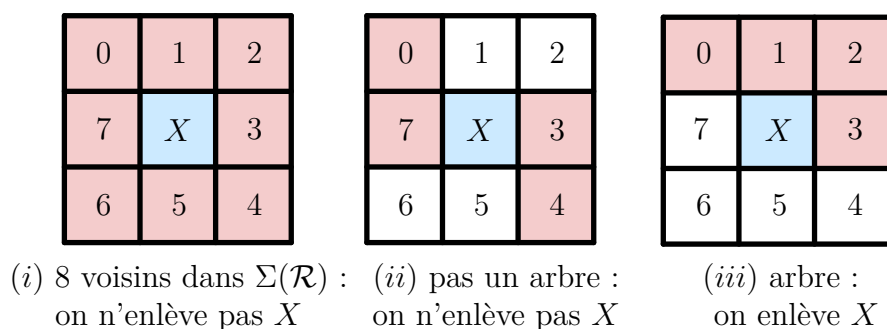


FIGURE 9 – Prise de décision pour enlever le point

Cette méthode permet d'avoir un squelette avec une connexité au moins naïve et au plus standard. Ainsi on ne crée pas de déconnexions et on affine les zones épaisses pixel par pixel.

Une implémentation directe de cet algorithme est présente dans le notebook jupyter.

4 Conclusion

Nous avons retracé les différentes étapes de la construction du squelette et utilisé ses propriétés afin de permettre l'implémentation d'un algorithme répondant à notre problème de départ : recouvrir une région à l'aide de boules. Nous avons pour cela fait appel à divers champs des mathématiques : topologie, calcul différentiel, géométrie... Ce problème simple en apparence est riche et concret, comme le prouve son application à la chirurgie aux rayons gamma.

Il est important de souligner qu'il existe de nombreuses méthodes de squelettisation. Ainsi il pourrait être intéressant de comparer deux approches différentes, pour constater les avantages et inconvénients de chacune d'elles, notamment le temps de calcul nécessaire pour obtenir le squelette.

Bibliographie

- [1] Alexander Muacevic Berndt Wowra, Stefan Zausinger and Jörg-Christian Tonn. Radiosurgery for spinal malignant tumors. *Deutsches Ärzteblatt International*, pages 106–112, 2009-02.
- [2] Harry Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. *Symp. on Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380, 1964-11.
- [3] Yvan Saint-Aubin Christiane Rousseau. *Mathématiques et Technologie*, chapter 4. Springer-Verlag New York, 2009.
- [4] David Coeurjolly. *Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces*. PhD thesis, Université Lumière - Lyon II, 2002.
- [5] Peter W. Hawkes. *Advances in Imaging and Electron Physics*, volume 135, chapter 1. Elsevier, 2005-07.
- [6] Stephen Pizer Kaleem Siddiqi. *Medial Representations : Mathematics, Algorithms and Applications*, chapter 4. Springer Science and Business Media, 2008-09.
- [7] Michel Minoux Michel Gondran. *Graphes et Algorithmes*. Eyrolles, 1995.
- [8] Jean-Philippe Rolin. Cours de calcul différentiel. <http://rolin.perso.math.cnrs.fr/calcdiff/L3%20-%20Cours%20de%20Calcul%20Differentiel%20-%202017-2018.pdf>.
- [9] Robin Strand. Digital geometry in 3d and applications using distance transforms. https://www.it.uu.se/edu/course/homepage/bild2/ht11/Lectures/bildan2_11_robin_F2.pdf. Lecture presentation.