

《算法分析与设计》第 4 次作业 *

姓名: 唐珞鑫 学号: 71117106 成绩: _____

算法分析题

题目1: Toyota (丰田)公司在过去的 n 个月中生产的汽车数分别是 $A[1], A[2], \dots, A[n]$ 。我们希望知道是否其中有一段时间, 该公司生产的汽车总数正好等于 M 。也就是说, 能否找到 i 和 $j, 1 \leq i \leq j \leq n$, 使得 $\sum_{k=i}^j A[k] = M$ 。请用贪心法设计一个 $O(n)$ 算法找出 i 和 j , 或者报告不存在。

答: 从 $A[0]$ 开始往后加, 若和小于 M 则继续往后加一个, 若加一个 $A[i]$ 后和大于 M , 则从开头减去一个, 若仍大于则继续减。以此类推, 直至整个数组循环结束或者找到符合要求的 i 和 j 。当然这样做时间复杂度不符合要求, 但我没能想出正确的方法

题目2: 假设有 n 个活动 a_1, a_2, \dots, a_n 须要使用同一个礼堂。第 i 个活动($1 \leq i \leq n$)须要连续使用 t_i 时间。这些活动没有定死的开始或终止时刻, 但都希望从 $t = 0$ 开始。如果在时刻 $t > 0$ 开始, 那么必须要付出额外的开销。这个开销与开始时刻 t 成正比。为简单起见, 就把开始时刻 t 作为开销。请设计一算法来找到一个最佳调度使总的开销最小。也就是说, 如果活动 a_i 开始时刻是 s_i , 算法要找到一个两两兼容的调度使 $\sum_{i=1}^n s_i$ 最少。请证明算法正确性和分析复杂度。

答: 由题意知: 活动的额外开销在数值上等于它的等待时间, 第一个开始的活动等待时间是0, 第二个开始的活动等待时间是 t_1 , 第三个开始的活动等待时间是 $t_1 + t_2$ 。所以, n 个活动的等待总时间是 $T = (n-1) * t_1 + (n-2)t_2 + (n-3) * t_3 + \dots + t_{n-1}$, 想要使总时间最短, 要使系数大的活动持续时间短。此时的总开销最少。

贪心算法的策略是: 每次选择时, 选择当下剩余活动中持续时间最短的活动。对算法的正确性证明如下:

贪心选择性证明: 采用反证法。设 $T_1 = (n-1) * t_1 + (n-2)t_2 + (n-3) * t_3 + \dots + t_{n-1}$ 是问题的最优解。设存在另一 $T_2 = (n-1) * t_i + (n-2)t_2 + (n-3) * t_3 + \dots + t_{n-1}$ 有 $t_i < t_1$ 。则 $T_1 - T_2 = (n-1) * [t(1) - t(i)] + (n-i)[t(i) - t(1)] > 0, T_1 > T_2$, 这与 T_1 是最优解存在矛盾。故该问题符合贪心选择性。

*要求: 1、分析题请用书面化语言给出详细分析过程; 2、实现题请先写出算法思想, 其次用伪代码描述, C++源码采用在线提交, 尽量AC, Nike name统一使用学号-姓名的格式; 3、作业提交PDF文件。

最优子结构性证明：进行了贪心选择之后，原问题 A 变成了 $n-1$ 个活动最小开销子问题 A' ，如果 T 是原问题 A 的最优解，则 T' 是子问题 B 的最优解。假设 T' 不是子问题的最优解，则有 $T'' < T'$ 是子问题的最优解，则有 $T_b = T'' + (n-1)*t_1 < T' + (n-1)*t_1 = T$ ，这与 T 是原问题最优解矛盾，所以 T' 是子问题 B 的最优解。所以问题满足最优子结构性。

时间复杂度为 $O(n)$ 。

算法实现题

题目3：一酸奶工厂制造世界闻名的Yucky Yogurt酸奶。在接下来的 N ($1 \leq N \leq 10,000$)周内，牛奶价格和劳动力的成本将会每周波动，这样它将花费公司 C_i ($1 \leq C_i \leq 5,000$)美分来生产一个单位的酸奶。Yucky的工厂设计精良，每周可以生产任意数量的酸奶。

Yucky Yogurt拥有一个仓库，可以以固定的价格存储未使用的酸奶，每周每单位酸奶的存储固定费用为 S ($1 \leq S \leq 100$)美分。幸运的是，酸奶不会变质。Yucky Yogurt的仓库非常庞大，因此它可以容纳任意数量的酸奶。

Yucky希望找到一种方法，每周向其客户交付 Y_i ($0 \leq Y_i \leq 10,000$)单位的酸奶(Y_i 是第 i 周的交货数量)。帮助Yucky在整个 N 周期间降低成本。第 i 周生产的酸奶以及已储存的酸奶可用于满足Yucky这一周的需求。

题目内容细节见 <https://vjudge.net/contest/292022>

答：根据题意和输出结果提示，运用贪心算法：第一周单位成本为直接生产用户所需所有酸奶的单位成本。计算第二周单位成本的时候，比较两种情况 ①这些酸奶全部在第一周生产，将其成本计算在第二周账上，则单位成本是第一周单位成本+存储一周的单位成本 ②这些酸奶全部在第二周生产，则单位成本为第二周单位成本，比较这两种情况，选取成本较小者存入第二周单位成本记录之中。第三周情况与第二周类似，比较 ①这些酸奶全部在第一、二周生产，将其成本计算在第三周账上，这些成本为第一、二周单位成本（取第二周记录中的那个较小成本） ②这些酸奶全部在第三周生产，则成本为第三周单位成本，将较小者存入第三周单位成本记录之中。以此类推，得到每周的最小单位成本，将其与每周需求量一一相乘，相加后得到最终的最小总成本。

伪代码：

```
long long int C[10000]
long long int Y[10000]
long long int cost[10000]
while(cin >> N >> S)
int i = 0;
cin >> C[i] >> Y[i];
For(i to N){
```

$IF(i == 0)cost[i] = C[0];$
 $IF(cost[i - 1] + S < C[i])cost[i] = C[i - 1] + S;$
 $IF(cost[i - 1] + S >= C[i])cost[i] = C[i];$
 $sum = sum + cost[i] * Y[i];$