算法分析与设计

Analysis and Design of Algorithm

Lesson 04

要点回顾

- 第一章总结
  - 理解算法的概念
  - 理解算法、数据结构和程序的区别和联系
  - 掌握描述算法的方法
  - 掌握算法的计算复杂性概念
  - 掌握算法渐近复杂性的数学表述
  - 了解NP类问题的基本概念（P、NP、NPC、NPHard）

课程内容

NP完全性理论与近似算法	算法高级理论
随机化算法 / 线性规划与网络流	高级算法
递归分治 / 动态规划 / 贪心算法 / 回溯与分支限界	基础算法
算法分析与问题的计算复杂性	算法基础理论

第二章 递归与分治策略

学习要点

- 理解分治和递归的概念。
- 掌握设计有效算法的分治策略。
- 通过下面的范例学习分治策略设计技巧。
  - 二分搜索技术；
  - 大整数乘法；
  - Strassen矩阵乘法；
  - 棋盘覆盖；
  - 合并排序和快速排序；
  - 线性时间选择；
  - 最接近点对问题；
  - 循环赛日程表。

分治法的初衷

- 任何一个问题的求解时间都与其规模有关。
- 例子：
  - n个元素排序：

    当n=1，不需计算；

    当n=2，只作一次即可；

    当n=3，两次or三次？ …

显然，随着n的增加，问题也越难处理。

分治法

- 分治法的设计思想是：将一个难以直接解决的大问题，分割成一些规模较小的相同问题，以便各个击破，分而治之。
- 如果问题可分割成k个子问题，且这些子问题都可解，利用这些子问题可解出原问题的解，此时，分治法是可行的。
- 由分治法产生的子问题往往是原问题的较少模式，为递归提供了方便。

递归

- **定义：直接/间接调用自身的算法**

阶乘函数

$$n! = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ n \times (n-1)! & , \quad n > 0 \end{cases}$$

```
int Factorial(int n){
   if (n==0) return 1;
   return n×Factorial(n-1)
}
```

递归第一式给出函数的初值，非递归定义。每个递归须有非递归初始值。

第二式是用较小自变量的函数值表示较大自变量。

递归

- 前面提到的 **Fibonacci数列**

$$F(n)=\begin{cases}1 & , \quad n=0\\ 1 & , \quad n=1\\ F(n-1)+F(n-2) & , \quad n>1\end{cases}$$

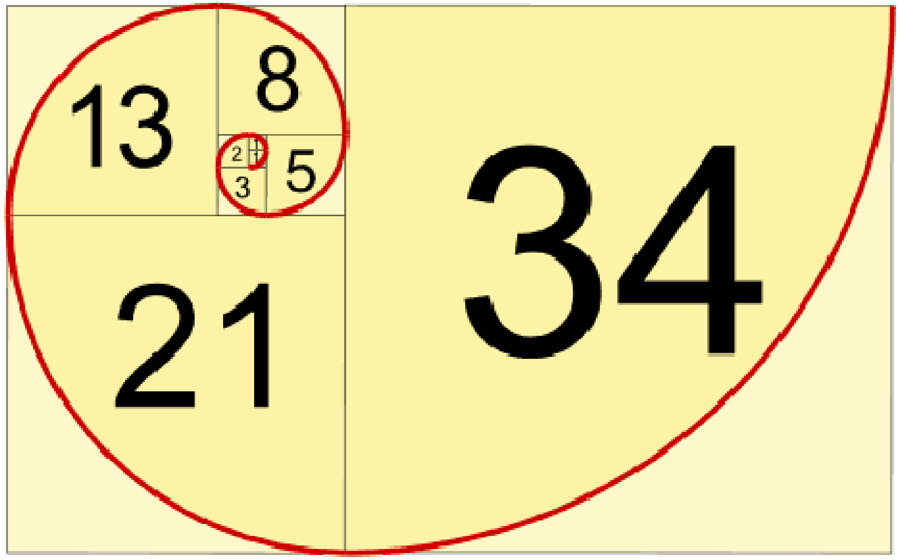
意大利数学家
Fibonacci
1170-1240

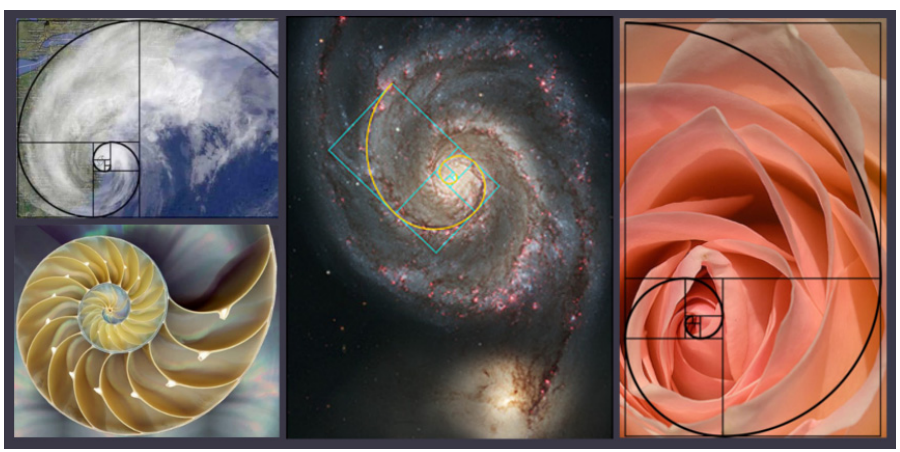
上述函数也可用非递归方式定义：

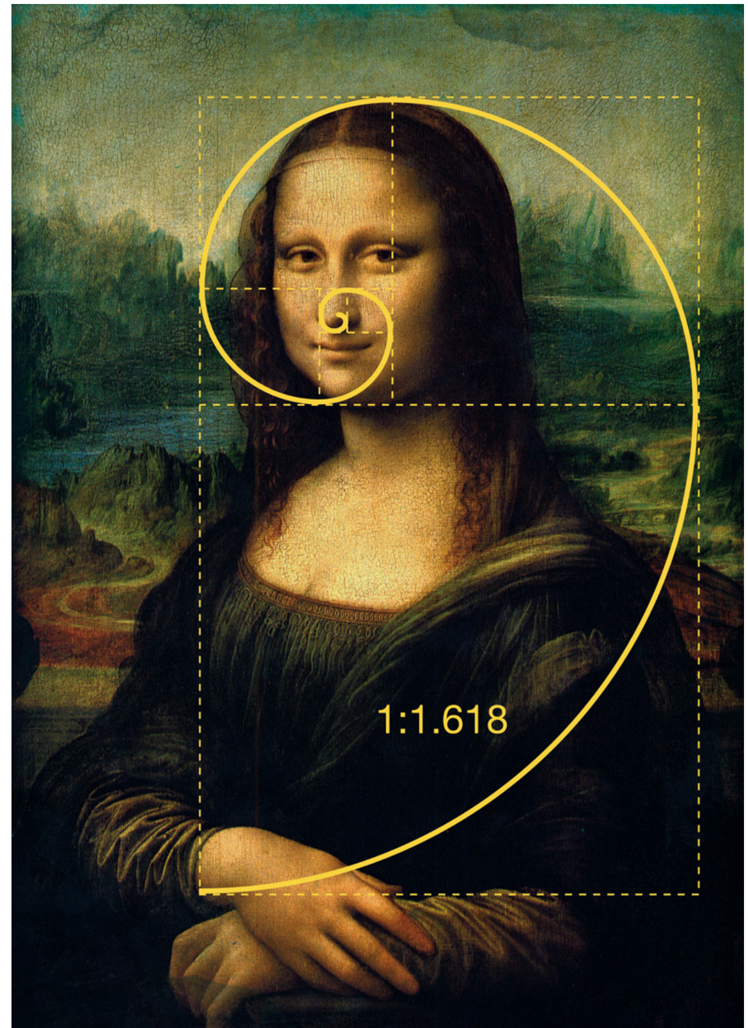
$$n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n$$

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Fibonacci数列







双递归函数

- 一个函数与它的一个变量是由函数自身定义。

Ackerman函数

$$A(n,m):\begin{cases} A(1,0)=2 & \\ A(0,m)=1 & m\geq 0 \\ A(n,0)=n+2 & n\geq 2 \\ A(n,m)=A(A(n-1,m),m-1) & n,m\geq 1 \end{cases}$$

1. $m=0,\ A(n,0)=n+2$
2. $m=1,\ A(n,1)=A(A(n-1,1),0)=A(n-1,1)+2 \qquad \therefore A(n,1)=2n$
3. $\left.\begin{array}{l} m=2, A(n,2)=A(A(n-1,2),1)=2A(n-1,2) \\ \because A(1,2)=A(A(0,2),1)=A(1,1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow A(n,2)=2^{n}$

双递归函数

4. $m=3,\ A(n,3)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ ，其中2的层数n

5. $m=4$, $A(n, 4)$的增长速度非常快，以至于没有适当的数学式子来表示这一函数。

- **部分书上减少Ackerman函数的变量，如：**

$$A(n) \overset{\Delta}{=} A(n,n)$$

$$A(4)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$$ **(其中2的层数为65536)**

这个数非常大，无法用通常的方式来表达它！

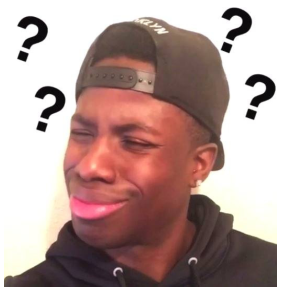
整数划分问题

- 将正整数n表示成一系列正整数之和：
  - $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，其中$n_1\geq n_2\geq\ldots\geq n_k\geq 1$，$k\geq 1$。
- 正整数n的这种表示称为正整数n的划分。
  - 问题：求正整数n的不同划分个数。
- 例如，正整数6有如下11种不同的划分：

  6;
  5+1;
  4+2，4+1+1;
  3+3，3+2+1，3+1+1+1;
  2+2+2，2+2+1+1，2+1+1+1+1;
  1+1+1+1+1+1。

整数划分问题

- 仅仅考虑一个自变量：
  - 设$p(n)$为正整数n的划分数，但难以找到递归关系



- 考虑两个自变量：
  - 将最大加数n_1不大于m的划分个数记作$q(n, m)$。

整数划分问题

- 可以建立$q(n, m)$的如下递归关系。

(1) $q(n,1)=1,\ n\geqslant 1$;

当最大加数n_1不大于1时，任何正整数n只有一种划分形式

(2) $q(n, m)=q(n, n),\ m\geqslant n$;

最大加数n_1实际上不能大于n。因此，$q(1, m)=1$。

(3) $q(n, n)=1+q(n, n-1)$;

正整数n的划分由$n_1=n$的划分和$n_1\leq n-1$的划分组成。

(4) $q(n, m)=q(n-m, m)+q(n, m-1),\ n>m>1$;

正整数n的最大加数n_1不大于m的划分由$\boxed{n_1=m\text{的划分}}$和$\boxed{n_1\leq m-1}$的划分组成

整数划分问题

- 可以建立$q(n, m)$的如下递归关系。

$$q(n,m)=\begin{cases} 1 & n=1,m=1 \\ q(n,n) & n<m \\ 1+q(n,n-1) & n=m \\ q(n,m-1)+q(n-m,m) & n>m>1 \end{cases}$$

正整数n的划分数$p(n)=q(n, n)$

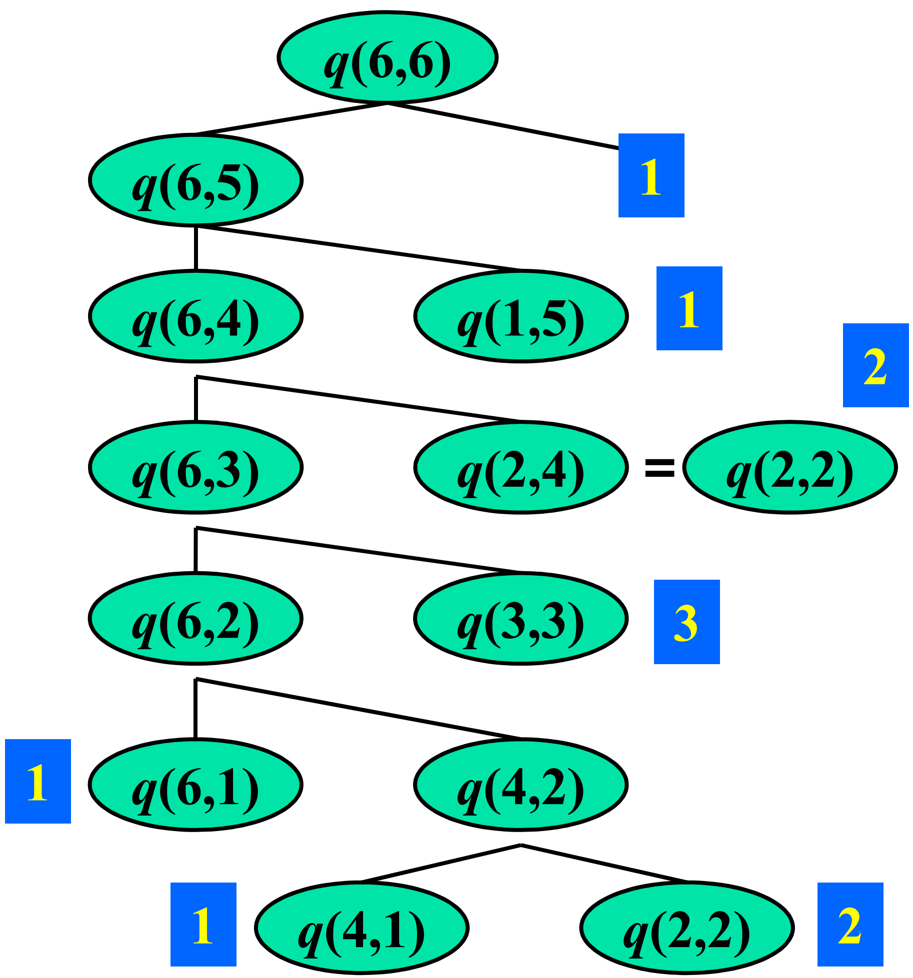
整数划分问题

- **可得算法伪代码为：**

```
int q(int n, int m){
    if ((n<1)||(m<1))  return 0;
    if ((n==1)||(m==1)) return 1;
    if (n<m) return q(n, n);
    if (n==m) return q(n, m-1)+1;
    return q(n, m-1)+q(n-m, m);
}
```

整数划分问题的递归调用

运行轨迹




```
int q(int n, int m){
    if ((n<1)||(m<1))
       return 0;
    if ((n==1)||(m==1))
       return 1;
    if (n<m)
       return q(n, n);
    if (n==m)
       return q(n, m-1)+1;
    return q(n, m-1)+q(n-m, m);
}
```

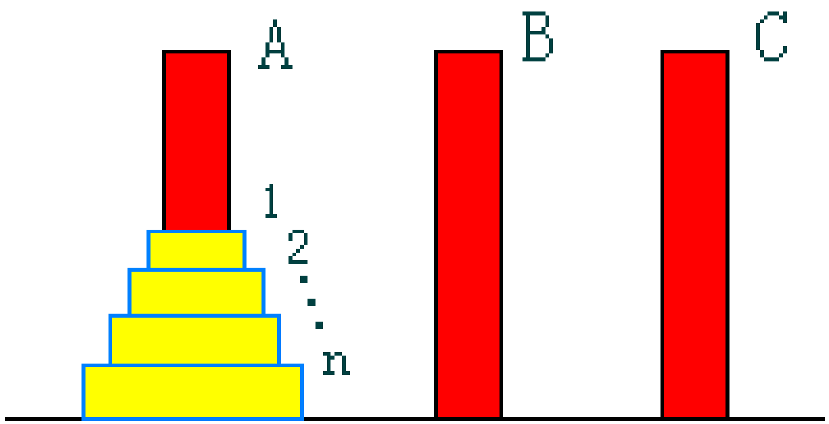
$$q(6,6)=1+1+2+3+1+1+2=11$$

Hanoi塔传说

在世界刚被创建的时候，有一座钻石宝塔(塔A)，其上有64个金碟。所有碟子按从大到小的次序从塔底堆放至塔顶。紧挨着这座塔有另外两个钻石宝塔(塔B和塔C)。从世界创始之日起，婆罗门的牧师们就一直在试图把塔A上的碟子移动到塔C上去，其间借助于塔B的帮助。每次只能移动一个碟子，任何时候都不能把一个碟子放在比它小的碟子上面。当牧师们完成任务时，世界末日也就到了。

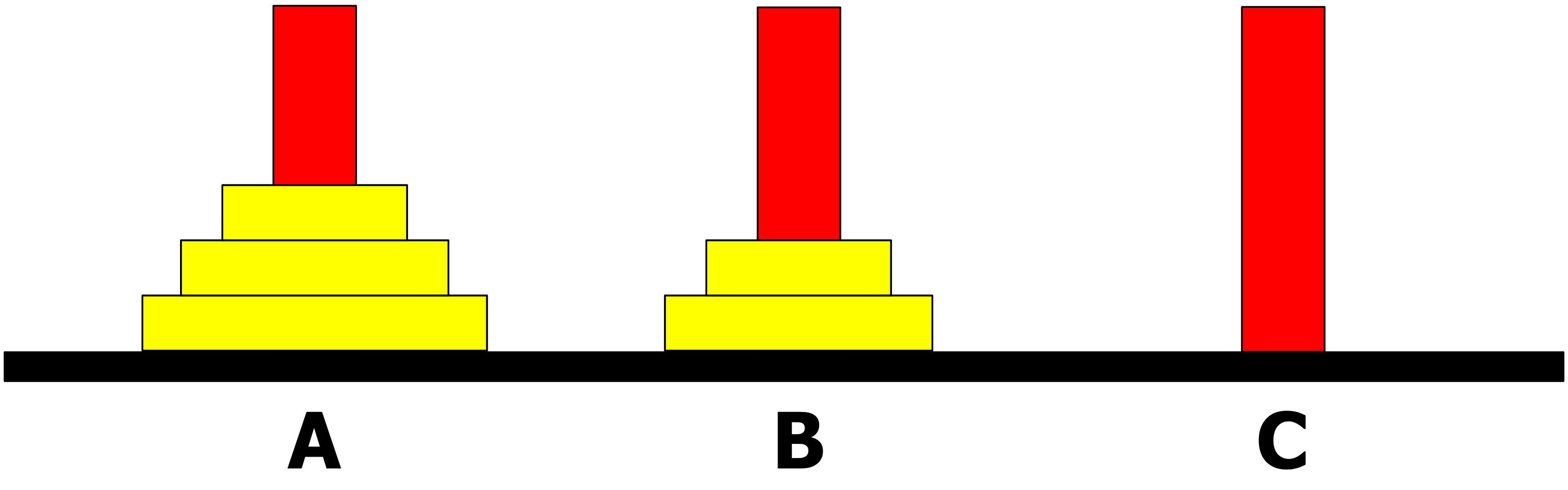
Hanoi塔问题

- 设A, B, C是3个塔座。开始时，在塔座A上有一叠共*n*个圆盘，这些圆盘自下而上，由大到小地叠在一起。各圆盘从小到大编号为1,2,…,*n*,现要求将塔座A上的这一叠圆盘移到塔座B上，并仍按同样顺序叠置。在移动圆盘时应遵守以下移动规则：
  - **规则1：** 每次只能移动1个圆盘；
  - **规则2：** 任何时刻都不允许将较大的圆盘压在较小的圆盘之上；
  - **规则3：** 满足规则1和2的前提下，可将圆盘移至A,B,C任一塔座上。



Hanoi塔问题

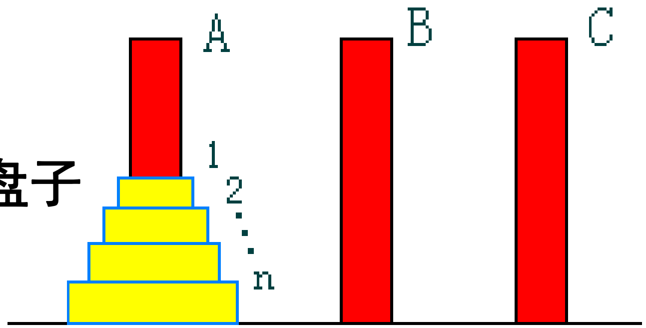
- 先来看一个简单的实例



递归算法

- 算法Hanoi(n, A, B, C) //n个盘子借助B, 从A移到C

```
if n = 1 then move (A, C)
else Hanoi(n-1, A, C, B)
        move (A, C)//剩下的一个盘子
        Hanoi(n-1, B, A, C)
```

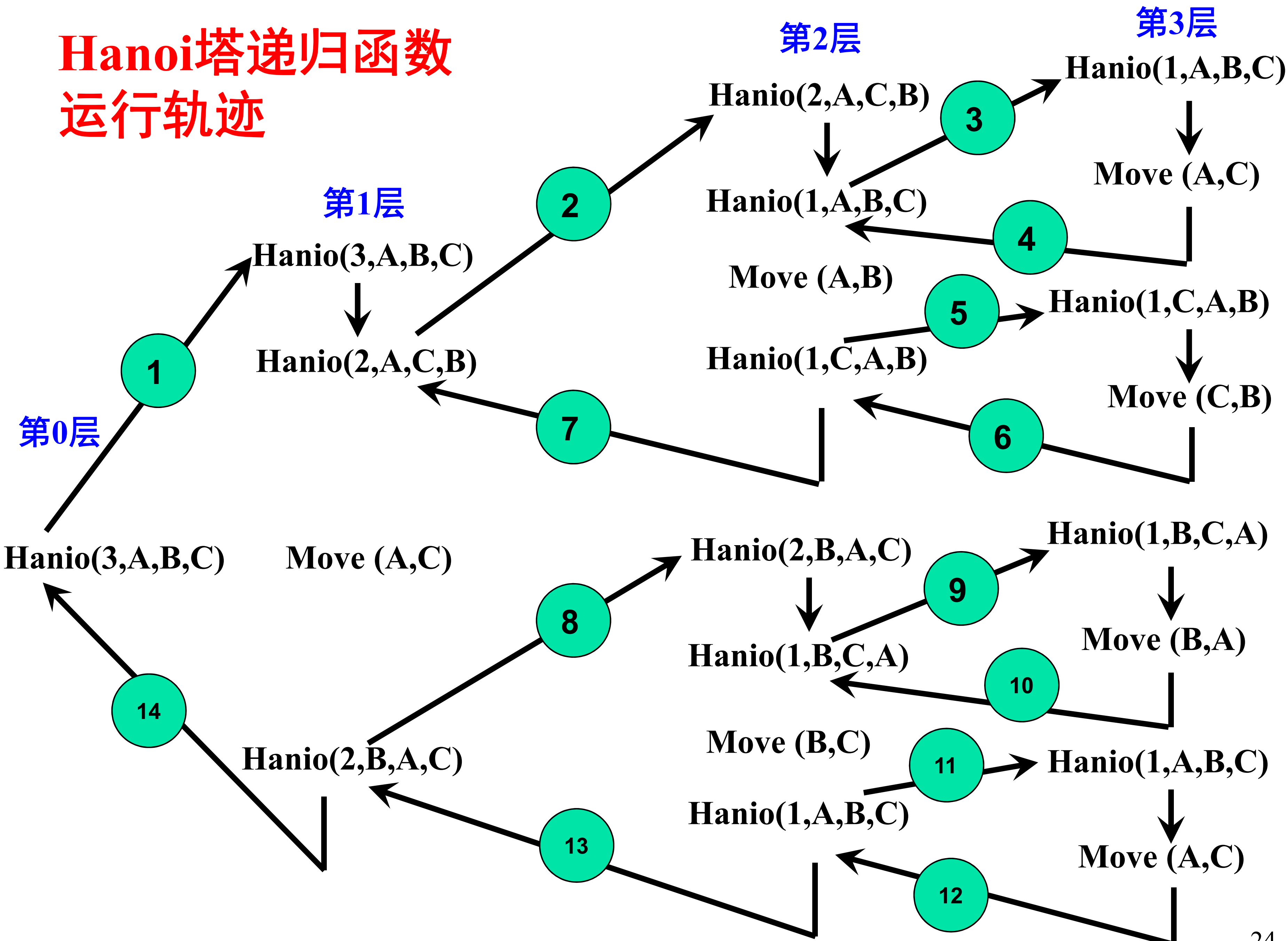


- **优点：** 简单、优雅、易于理解；
- **缺点：** 算法Hanoi以递归形式给出，每个圆盘的具体移动方式并不清楚，因此当$n \geq 5$以后，很难用手工移动来模拟这个算法。

递归函数的运行轨迹

- 在递归函数中，调用函数和被调用函数是同一个函数，需要注意的是递归函数的调用层次，如果把调用递归函数的主函数称为**第0层**，进入函数后，首次递归调用自身称为**第1层**调用；从第i层递归调用自身称为**第i+1层**。反之，退出第i+1层调用应该返回第i层。
- 采用**图示方法**描述递归函数的**运行轨迹**，从中可较直观地了解到各调用层次及其执行情况。

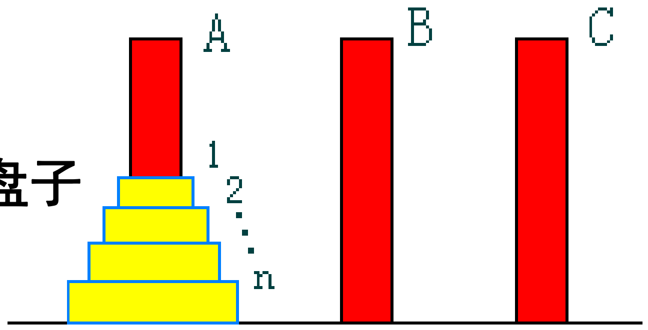
Hanoi塔递归函数运行轨迹



递归算法

- **算法Hanoi(n, A, B, C)** //n个盘子借助B, 从A移到C

1. **if** $n = 1$ **then** move (A, C)
2. **else** Hanoi(n-1, A, C, B)
3. move (A, C)//剩下的一个盘子
4. Hanoi(n-1, B, A, C)

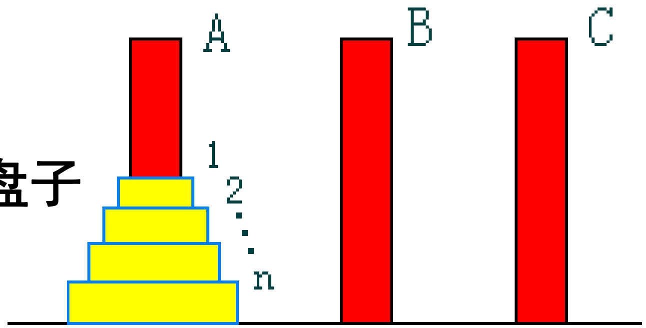


如果用了递归，就找不到while/for循环语句。
此时，该如何计算时间复杂度呢？

递归算法

- 算法Hanoi(n, A, B, C) //n个盘子借助B, 从A移到C

1. **if** $n = 1$ **then** move (A, C)
2. **else** Hanoi(n-1, A, C, B)
3. move (A, C)//剩下的一个盘子
4. Hanoi(n-1, B, A, C)



设n个盘子的移动次数为T(n)

$$T(n)=2T(n-1)+1$$

$$T(1)=1$$

→ 递推方程

递推方程

- 设序列$a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$简记为$\{a_n\}$，一个把$a_n$与某些个$a_i(i<n)$联系起来的等式叫做关于序列$\{a_n\}$的递推方程

- 递推方程的求解：
给定关于序列$\{a_n\}$的递推方程和若干初值，计算a_n

迭代法求解递推方程

- 不断用递推方程的右部替换左部
- 每次替换，随着n的降低在和式中多出一项
- 直到出现初值停止迭代
- 将初值代入并对和式求和
- 可用数学归纳法验证解的正确性

Hanoi塔算法

$$T(n)=2T(n-1)+1$$
$$T(1)=1$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n-1)+1 \\
&= 2[2T(n-2)+1]+1 \\
&= 2^2T(n-2)+2+1 \\
&= \ldots\ldots \\
&= 2^{n-1}T(1)+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+2+1 \\
&= 2^{n-1}+2^{n-1}-1 \\
&= 2^n-1
\end{aligned}
$$

解的正确性-归纳验证

- 证明：下述递推方程的解是$T(n)=2^n-1$
  - $T(n)=2T(n-1)+1$
  - $T(1)=1$

- 方法：数学归纳法
- 证　$n=1$, $T(1)=2^1-1=1$

  假设对于n，解满足方程，则

  $T(n+1)$

  $=2T(n)+1=2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$

Hanoi塔算法

$$T(n)=2T(n-1)+1$$
$$T(1)=1$$

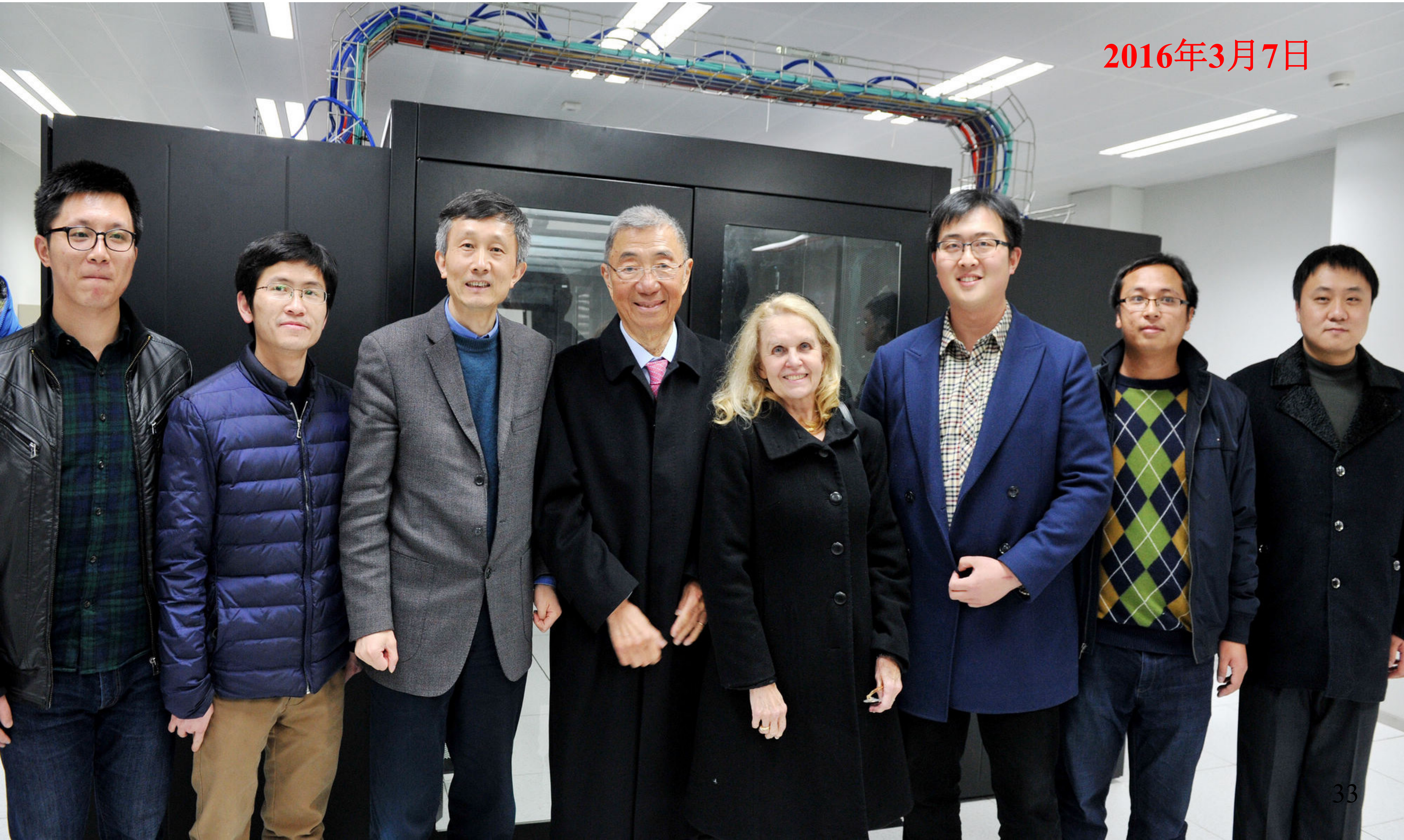
$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n-1)+1 \\
&= 2[2T(n-2)+1]+1 \\
&= 2^2T(n-2)+2+1 \\
&= \cdots\cdots \\
&= 2^{n-1}T(1)+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+2+1 \\
&= 2^{n-1}+2^{n-1}-1 \\
&= 2^n-1
\end{aligned}
$$

5845亿年！！！

问题：如果1秒移动1个，64个金蝶要多少时间？


每秒能算60万亿次
要计算三天左右

丁肇中夫妇访问东南大学SOC



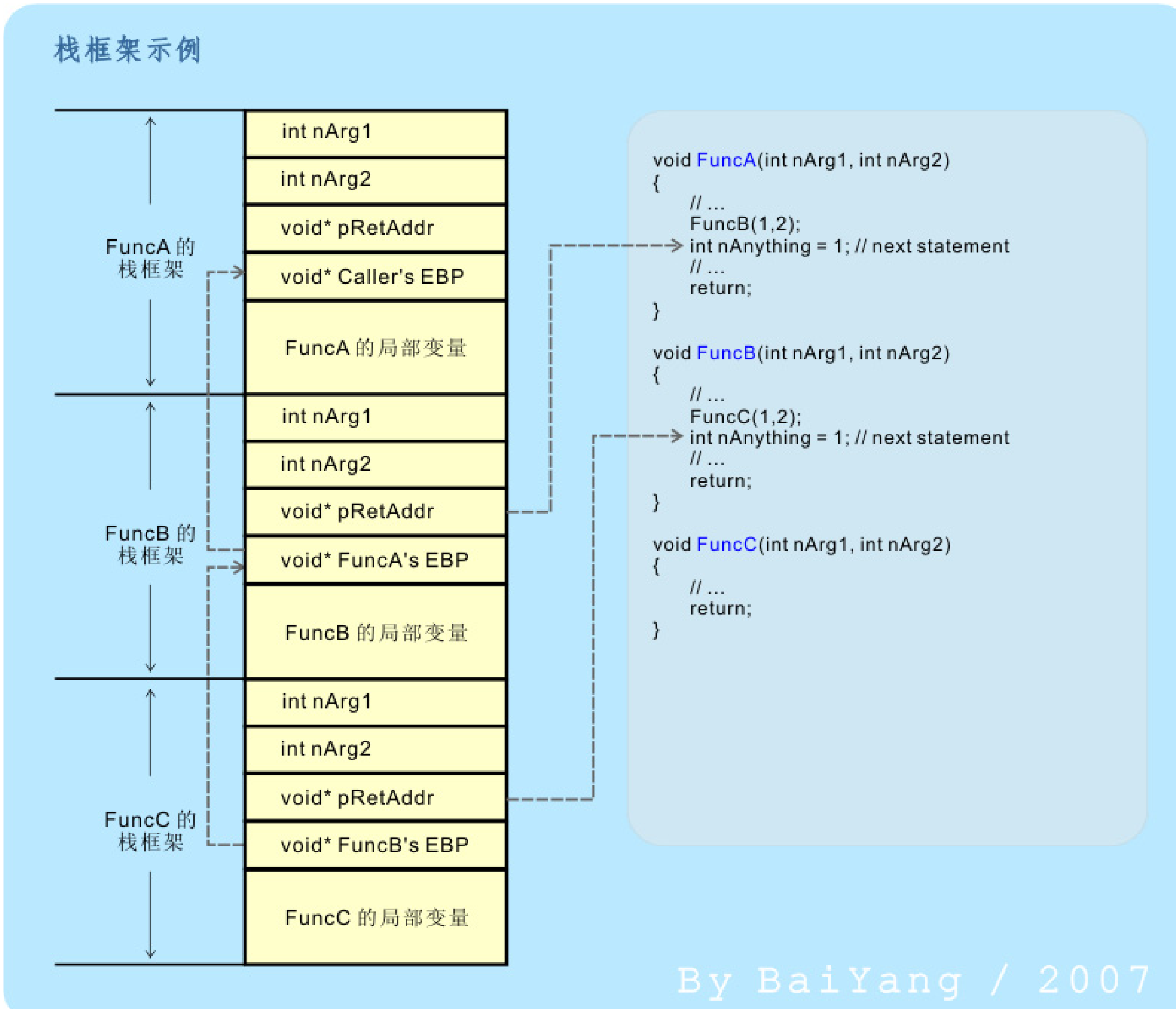
Hanoi塔算法

有没有更好的算法???

没有！！！

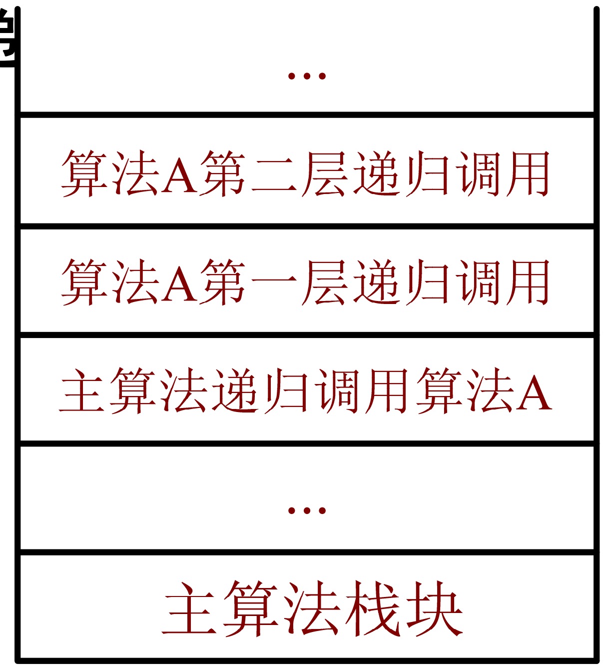
这是一个难解的问题，不存在多项式时间的算法！

递归的函数调用（回顾C语言）



递归小结

- 实现递归调用的关键是**建立递归调用工作栈**。在调用算法之前：
  1. 将所有实参指针，返回地址等信息传递给被调用算法；
  2. 为被调算法的局部变量分配存储区；
  3. 将控制移到被调算法的入口。



- 返回调用算法时，系统要完成：
  1. 保存被调算法的结果；
  2. 释放分配给被调用算法的数据区；
  3. 依保存的返回地址将控制转移到调用算法。

递归小结(cont.)

优点：结构清晰，可读性强，而且容易用数学归纳法来证明算法的正确性，因此它为设计算法、调试程序带来很大方便。

缺点：递归算法的运行效率较低，无论是耗费的计算时间还是占用的存储空间都比非递归算法要多。