

《算法分析与设计》第2次作业*

姓名: 唐珞鑫 学号: 71117106 成绩: _____

算法分析题

题目1: 求下列递推关系表示的算法复杂度

(1) $T(n) = 9T(n/3) + n$

(2) $T(n) = n + 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)$

(3) $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$

答:

(1) 利用公式法, $k = 9$, $m = 3$, $T(n) = n^2 + \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} \frac{9^i}{3^i} n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, 所以 $O(n^2)$

(2) 利用主定理, $a = 3$, $b = 4$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.79}$, $f(n) = n = \Omega(n^{0.79+\epsilon})$, $\exists \epsilon > 0$, 且对充分大的 n 有 $3f(\frac{n}{4}) \leq cf(n)$, 其中 $c < 1$, 所以 $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$

(3) 利用主定理, $a = 4$, $b = 2$, $n^{\log_b a} = n^2$, $f(n) = n^2 \lg n = \Omega(n^{2+\epsilon})$, $\exists \epsilon > 0$, 且对充分大的 n 有 $4f(\frac{n}{2}) \leq cf(n)$, 其中 $c < 1$, 所以 $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2 \lg n)$

题目2: 假设谷歌公司在过去 n 天中的股票价格记录在数组 $A[1..n]$ 中, 我们希望从中找出两天的价格, 其价格增幅最大, 即找到 $A[i]$ 和 $A[j]$ ($i \leq j$) 使得 $M = A[j] - A[i]$ 的值最大, 请设计一个时间复杂度不超过 $O(n \lg n)$ 的分治算法

答: 采用递归分治方法, 将 n 个元素不断对半分 (若 n 为奇数则将中间的一个元素当做两个相同的元素将数组凑成偶数项), 直到规模变为2。

处理规模为2的子问题时, 比较这两天的股价得到股价最大值和股价最小值, 将后一天的股价 $A[j]$ 减去前一天的股价 $A[i]$ (其中 $i < j$), 得到一个差值 (差值可能是正也可能是负), 向上返回 “股价最大值, 股价最小值, 股价最大差值”。

处理规模大于2的子问题时, 例如规模为4的子问题, 有两个子问题返回了值, 这里称之为 “左子问题” 和 “右子问题”, 用右子问题返回的最大值减去左子问题返回的

*要求: 1、分析题请用书面化语言给出详细分析过程; 2、实现题请先写出算法思想, 其次用伪代码描述, C++源码采用在线提交, 提交密码: 123456, 用户名统一使用学号-姓名的格式。

最小值，得到一个差值，将这个差值与左右子问题返回的两个差值进行比较，得出新的最大差值，将左右子问题的股价最大值和股价最小值分别比较，得出新的最大值最小值，将这些新的“股价最大值，股价最小值，股价最大差值”向上返回，以此类推。

算法实现题

题目3：问题描述：在与联盟的战斗中连续失败后，帝国撤退到最后一个据点。根据其强大的防御系统，帝国击退了联盟攻击的六波浪潮。经过几个不眠之夜，联盟将军亚瑟注意到防御系统的唯一弱点就是能源供应。该系统由N个核电站充电，其中任何一个都会使系统失效。

这位将军很快就开始对N名特工进行突击搜查，这些特工人员进入了据点。不幸的是，由于帝国空军的袭击，他们未能降落在预期位置。作为一名经验丰富的将军，亚瑟很快意识到他需要重新安排计划。他现在要知道的第一件事是哪个代理商离任何一个发电站最近。你是否可以帮助将军计算代理人和车站之间的最小距离？

题目细节及提交地址：<https://vjudge.net/contest/287988>

答：问题可以看做是最近点对问题变式，采用递归分治算法。

对所有的点按照x坐标（或者y）从小到大排序，找到坐标中位值进行分割，使得点集分为两个集合 S_1 ， S_2 。递归的寻找两个集合中的最近点对。留意最短距离的两个端点一个在 S_1 中一个在 S_2 中的情况，因为左右两边的已找到的最近点对距离为 d ，若中间区域的某点A存在另一点构成距离更短的点对，这两点的y值之差必须小于 d 。画出长为 $2 * d$ ，宽为 d 的矩形，点A位于矩形上边，所有与A有可能构成最近点对的候选点应位于矩形候选区域中，对于任意一点，最多只需向下遍历6个点就行。

设置一位标记坐标的属性，即坐标的身份是电站还是特工，计算点对距离时如果身份相同，比如都是特工或者都是电站，此时的距离没有意义，将它设置为很大的值。

Algorithm 1: 伪代码

```
1 //定义二维点Point;
2 typedef struct Point;
3 {
4     float x, y, z;
5 } Point;
6 //平面上任意两点对之间的距离公式计算
7 float Distance(Pointa, Pointb);
8 //求出最近点对
9 float ClosestPair(传入数组, 数组长度);
10 {
11     //两个子数组
12     Point *pts1 = new Point[length/2];
13     Point *pts2 = new Point[length/2];
14     //分治求解左、右半部分子集的最近点对
15     d1 = ClosestPair(pts1, length/2, a1, b1);
16     d2 = ClosestPair(pts2, length - length/2, a2, b2);
17     Point *pts3 = new Point[length];
18     for(i = 0, k = 0; i < length; i++) 求在d2d区间内的最近点对
19 }
```
