《算法分析与设计》第 1 次作业 *

姓名：唐珞鑫　　学号：71117106　　成绩：__________

算法分析题

题目1：对以下每个函数，用Θ记号表示与其同阶的只含一项函数。例如，$f(n) = (n+1)^3$可表示为$f(n) = \Theta(n^3)$。

(1) $f(n) = n^2 + n\lg n$

(2) $f(n) = \frac{\sqrt{n}(n\lg n+2n)}{\lg^2 n+n}$

(3) $f(n) = \frac{(n^2+\lg n)(n+1)}{n^2+n}$

答：

(1) **假设** $g(n) = n^2$**，根据定义** $\exists\, c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ n_0 = 1$**，使得当** $n > n_0$ **时，** $c_1 \times g(n) \geq g(n) \geq c_2 \times g(n)$**，所以** $f(n) = \Theta(n^2)$**.**

(2) **假设** $g(n) = \sqrt{n}\lg n$**，根据定义** $\exists\, c_1 = 5,\ c_2 = 1,\ n_0 = 2$**，使得当** $n > n_0$ **时，** $c_1 \times g(n) \geq g(n) \geq c_2 \times g(n)$**，所以** $f(n) = \Theta(\sqrt{n}\lg n)$**.**

(3) $f(n) = n + \frac{\lg n}{n}$**，假设** $g(n) = n$**，根据定义** $\exists\, c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ n_0 = 1$**，使得当** $n > n_0$ **时，** $c_1 \times g(n) \geq g(n) \geq c_2 \times g(n)$**，所以** $f(n) = \Theta(n)$**.**

题目2：用Θ记号表示对下面一段程序中语句$x \leftarrow x+1$被执行的次数的估计.

Algorithm 1: 一个算法实例

```
for i=1 to n do
    for j=i to 3i do
        x ← x + 1;
    end for
end for
```

---

*

答： 循环 $For\ i=1$ **to** n 循环次数为 n 次, 当 $j=i$ 时循环 $For\ j=i$ **to** $3i$ 循环 $2i+1$ 次, 等差数列求和得到 $x \leftarrow x+1$ 共执行 n^2+2n 次,所以 $f(n)=n^2+2n$. 假设 $g(n)=n^2$,根据定义 $\exists\, c_1=3,\ c_2=1,\ n_0=1$，使得当 $n>n_0$ 时，$c_1 \times g(n) \geq g(n) \geq c_2 \times g(n)$，所以 $f(n)=\Theta(n^2)$.

算法实现题

题目3： 正整数x的约数是能整除x的正整数，其约数的个数记为$div(x)$，例如$div(10)=4$ 输入两个正整数a和b（其中$a \leq b$），找出a与b之间约数个数最多的数x, 并分析算法的时间复杂性.

答： 计算 a, b之间各个数的约数个数，第一次计算之后，记录数值和相应个数，再次计算时，将得出的约数个数与之前记录的个数进行比较，如果比之前记录的大，则取代之前的记录。

在计算i的约数个数时，根据约数分布在$\sqrt{i}$两侧的特性，将i开平方之后对一边进行计算，每找到一个可以整除i的数字时，约数个数加2，特殊情况下i开更号之后是整数，这时这个整数被重复计入约数个数，此时约数总数需要减一。

在比较、记录最大约数及其数值的时候，若遇到约数个数相等的数，将其数值存入数组中保存，在遇到更大约数个数的时候，将之前的数组清空。

Algorithm 2: 伪代码

$int\ count$;
$int\ factor$;
$int\ x$;
$m=\sqrt{j}$;
for i=*0* **to** *b-a-1* **do**
    for j=*1* **to** m **do**
        IF(j可以被k整除)$count+=2$;
        $IF(m$的乘积等于$j)count+=2$;
        $IF(count$大于$factor)factor \leftarrow count; x \leftarrow j$;
    end for
end for

时间复杂度 $f(n)=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}$,所以$g(n)=n^{\frac{3}{2}}$,$O(n)=n^{\frac{3}{2}}$