

一. 重复字符串(powerstr):

30 分做法: 枚举

长度范围只有 1000 时, 我们可以枚举 k , 取字符串第 1 个到第 k 个字符作为子串 T , 然后去验证剩下的字符串是否都是 T 重复得来

时间复杂度 $O(n^2)$

100 分做法: KMP, Next 数组

假设字符串为 S , 长度为 N , 子串 T 重复 K 次后得到串 S , 那么 T 的长度一定为 $L = N/K$ (要整除), 则 $T = S[1...L]$, 将 S 拆分成 K 份, 每份长度为 L , 则有

$$S[1...L] = S[L+1...2L] = S[2L+1...3L] = \dots = S[(K-1)L+1...KL]$$

由于要保证 K 最大, 势必 L 要取最小, 所以根据 Next 函数的定义, 有 $\text{Next}[KL] = (K-1)L$;

即 $\text{Next}[N] = N - L$, 所以 $L = N - \text{Next}[N]$;

但是得出的长度 L 还要保证能被 N 整除, 所以如果不能整除说明 $L = N$, 即 $K = 1$;

而如果能整除, 那么 $K = N / (N - \text{Next}[N])$;

因而我们只要对字符串 S 做一趟 KMP, 对其求 Next 数组, 剩下的就是上述结论
时间复杂度 $O(n)$

二. Fibonacci 进制(fib):

100 分做法: DP

N 很大, 先尝试几个小数据。可以发现, 每个 Fibonacci 表示的长度, 和 Fibonacci 数大小有关 (1,2,3,5,8,13,21...), 这些值最高位上是 1, 后面全是 0, 即第一个 Fibonacci 表示长度为 i 的数是 $\text{fib}[i]$ 。因此按照长度对 Fibonacci 表示进行分类, 长度为 i 的数有 $\text{fib}[i-1]$ 个, 看做是第 i 组。那么第 i 组的总长度 $\text{len}[i] = \text{fib}[i-1] * i$ 。

接下来, 看 1 出现的次数。长度为 i 的数的表示中, 第 $i-1$ 位肯定是 0。

$\text{Sum}[i]$ 表示前 i 组的 1 的个数。可以得到如下式子:
 $\text{Sum}[i] = \text{sum}[i-1] + \text{fib}[i-1] + \text{sum}[i-2]$ 。第 i 组首位 1 的个数为 $\text{fib}[i-1]$, $i-1$ 位为 0, 那么最后的 $i-2$ 位的情况, 恰好为 $1 \sim i-2$ 组的所有情况。

整体算法也就明了了:

- 1) 求出 N 位所在的 Fibonacci 表示的数的长度 t
- 2) 求 $1 \sim t$ 中 Fibonacci 表示中 1 出现的个数。
- 3) 继续求解剩余字符的 1。

例如求解得到最后对应 Fibonacci 表示为 $x=100100$

- 1) 对于长度为 $1 \sim 5$ 的 Fibonacci 表示中 1 的个数为 $\text{sum}[5]$, $i \leq 100000$ 中 1 的个数即为 $\text{sum}[5] + 1$ 。
- 2) 对于 $100000 < i \leq 100100$, 最高位都是 1, 共有 $\text{fib}[3]$ 个, 后三位 1 的个数为 $\text{sum}[2] + 1$ 。
- 3) 1 的总个数为 $\text{sum}[5] + 1 + \text{fib}[3] + \text{sum}[2] + 1$ 。

最后细节比较多, 要实现的仔细一些。

三. 发奖金(reword):

100 分做法：组合+质因数分解+逆元+中国剩余定理

题目相当于求 n 个数的和不超过 m 的方案数。

首先如果是恰好等于 m ，那么就等价于求方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ 的解的个数，利用插板法可得到公式： $C(n + m - 1, m)$

现在要求不大于 m 的，相当于对 $i = 0 \dots m$ 对 $C(n + i - 1, i)$ 求和，根据 pascal 递推式可以得到答案为 $C(n + m, m)$

现在就要求 $C(n + m, m) \bmod P$

这里我们主要要解决如何快速计算 $n! \bmod P$

以及当分母有 $m! \bmod P$ 的情况

1. 当 n, m 都比较小的时候，同时 P 为比较大的素数时，可以直接利用逆元求解，当 n, m 比较大的时候，见下面两种情况（以下参考魏铭 2011 年国家集训队作业）

2. 当 P 为素数的情况：

我们发现 $n! \bmod P$ 的计算过程是以 P 为周期的，举例如下：

$n = 10, P = 3$

$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$

$= 1 * 2 *$

$4 * 5 *$

$7 * 8 *$

$10 *$

$3 * 6 * 9$

$= (1 * 2)^3 *$

$3^3 * (1 * 2 * 3)$

最后一步中的 $1 * 2 * 3$ 可递归处理。

因为 P 的倍数与 P 不互质，所以 P 的倍数不能直接乘入答案，应当用一个计数器变量 cnt 来保存答案中因子 P 的个数。

我们提前预处理出 $fac[i] = 1 * 2 * 3 * \dots * (i - 1) * i \bmod P$ ，函数 $calcfac(n)$ 返回 $n! \bmod P$ 的值， $power(a, b, c)$ 返回 $a^b \bmod c$ 的值，可用快速幂在 $O(\log b)$ 的时间内完成。

```
typedef long long LL;
```

```
LL calcfac(LL n)
```

```
{
```

```
    if (n < P) return fac[n];
```

```
    LL seg = n / P, rem = n % P;
```

```
    LL ret = power(fac[P - 1], seg, P); // fac[P - 1] 重复出现了 seg 次
```

```
    ret = ret * fac[rem] % P; // 除去 seg 次 fac[P - 1] 外，剩下的零头
```

```
    cnt += n / P; // 提出 n / P 个因子 P
```

```
    ret = ret * calcfac(n / P) % P; // 递归处理
```

```
    return ret;
```

```
}
```

于是 $n! \bmod p$ 的计算可在 $O(\log n)$ 的时间内解决。

对于分母中的 $n!$ ，方法是相似的。若 a 为正整数， $a * a' = 1(\text{mod } P)$ ，那么我们称 a' 为 a 的逆元，记作 a^{-1} ，并有 $b / a(\text{mod } P) = b * a^{-1}(\text{mod } P)$ 。这样我们只需要把预处理 $\text{fac}[i] = 1 * 2 * 3 * \dots * (i - 1) * i \text{ mod } P$ 更换为 $\text{inv}[i] = 1^{-1} * 2^{-1} * 3^{-1} * \dots * (i - 1)^{-1} * i^{-1} \text{ mod } P$ ，其计算方法与分子中的 $n!$ 计算相差无几，具体可参考我的代码。求逆元可以使用扩展欧几里得算法。

3. 当 p 为合数时

对于某些测试点，我们发现 P 分解后只有 2 个因子，并且不相同，所以我们可以对这两个因子分别运行算法 2，最后用中国剩余定理合并即可。

对于剩下的数据，可以对 P 进行质因数分解，得到 $P = p_1^{c_1} * p_2^{c_2} * \dots * p_t^{c_t}$ 。

对于每个 $1 \leq i \leq t$ ，以 $p_i^{c_i}$ 为模运行算法 2，最后用中国剩余定理合并。这里 $p_i^{c_i}$ 不一定为质数，不过只需对原算法稍加修改即可。令 $P = p_i^{c_i}$ ， $\text{fac}[i] =$ 除去 p_i 的倍数外 i 的阶乘。例如 $p_i = 3, c_i = 2$ ，那么 $\text{fac}[10] = 1 * 2 * 4 * 5 * 7 * 8 * 10$ ，除去了 3 的倍数 3、6 和 9。阶乘依然是以 P 为周期的， $\text{calcfac}(n)$ 与算法 2 主体相同，只是统计因子个数时，应使用 $\text{ret} += n / p_i$ 而不是 $\text{ret} += n / P$ ，递归处理时也应该是 $\text{calcfac}(n / p_i)$ 而不是 $\text{calcfac}(n / P)$ 。

时间复杂度 $O(t * n)$