C1 - Solution

A hELL0,WOrlD

难度	考点
1	字符串输出

题目分析

输出如题所示的字符串即可，可以直接复制粘贴。

注意需要加上换行符，否则输出会挤在同一行。

错误示范

```
    printf("FoR rIFt ENergY uNnecEsSary iT iS?");
    printf("oUtPut mAXimiZeD,BUg mAss pROductiOn...");
    printf("hEll0,wOrlD!?");
```

其运行结果为

```
FoR rIFt ENergY uNnecEsSary iT iS?oUtPut mAXimiZeD,BUg mAss
pROductiOn...hEll0,wOrlD!?
```

正确做法为

```
    printf("FoR rIFt ENergY uNnecEsSary iT iS?\n");
    printf("oUtPut mAXimiZeD,BUg mAss pROductiOn...\n");
    printf("hEll0,wOrlD!?\n");
```

这样才会正确的输出三行结果。

示例代码

```
#include <stdio.h>
int main(void) {
    printf("FoR rIFt ENergY uNnecEsSary iT iS?\n");
    printf("oUtPut mAXimiZeD,BUg mAss pROductiOn...\n");
    printf("hEll0,wOrlD!?\n");
    return 0;
}
```

B 无情的复读机

难度	考点
1	循环，输入输出

题目分析

根据题目要求，只需要读入一个正整数，然后输出对应次数的字符`+`即可。

观察数据范围 $1 \leq n \leq 10000$ ，可知没有超过 `int` 类型变量能容纳的数值上限，使用 `int` 类型变量存储输入的数即可。输出指定次数的字符通常使用 `for` 或 `while` 循环，循环指定次数 n ，每次循环输出一次字符 `+` 且不换行，最后的输出结果就是连续的 n 个字符 `+` 。

示例代码

```
#include <stdio.h>

int main(){
    int i, n;    //声明变量
    scanf("%d", &n);     //读入输入数据
    for (i = 0; i < n; i = i + 1) { //通过for循环输出指定次数
        printf("+");
    }

    return 0;
}
```

C 博雅

难度	考点
1	基本四则运算，分支结构

题目解析

由题知，最终的博雅净有效次数等于出勤的次数减去没去的次数，如果设总报名次数为 n ，到课的次数为 m ，没去的次数为 x ，净有效次数为 a ，则有：

$$
x = n - m \\
a = m - x
$$

可由此公式计算出答案。

最后，再判断 a 是否达到了 4 ，并根据判断结果输出对应字符串。

示例代码

```
#include <stdio.h>

int main() {
    int m, n;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    int x = n - m; //没去的次数
    int a = m - x;
    printf("%d\n", a);

    if(a>=4) {
        printf("Yes\n");
    } else {
        printf("No\n");
    }
    return 0;
}
```

扩展阅读：三目运算符

像逻辑非 `!` 和负号 `-` 这种只连接一个数据的符号，称为“单目运算符”，例如 `-a` ；像加号 `+` 、减号 `-` 和乘号 `*` 这种连接两个数据的符号，称为“双目运算符”，例如 `a+b` ；以此类推，连接三个元素的符号就称为三目运算符。

在C语言中，只有一种三目运算符，一般形式为： `表达式1 ? 表达式2 : 表达式3`

在运算时，程序会先求解 `表达式1` ，若其值为真（非 0 ）则将 `表达式2` 的值作为整个表达式的取值，否则（ `表达式1` 的值为 0 ）将 `表达式3` 的值作为整个表达式的取值。这里的“表达式”，既可以是数，也可以是字符串。

例如，语句 `int Max = (a > b) ? a : b;` 的意思就是：如果 $a > b$，那么 $Max = a$，否则 $Max = b$

我们可以利用三目运算符来缩短本题的代码：

```
#include <stdio.h>

int main() {
    int m, n;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    int x = n - m;//没去的次数
    int a = m - x;
    printf("%d\n",a);
    printf(a >= 4 ? "Yes" : "No");
    return 0;
}
```

D De：从向量开始

难度	考点
1	四则运算

题目分析

由题目可以知道，我们需要输出两个三维向量的点乘

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x1 \times x2 + y1 \times y2 + z1 \times z2$$

所以我们在输入$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$后，按照上述公式输出 `x1 * x2 + y1 * y2 + z1 * z2` 即可得到结果

示例代码

```
#include <stdio.h>

int main() {
    int X1, Y1, Z1;
    int X2, Y2, Z2;
    scanf("%d %d %d %d %d %d", &X1, &Y1, &Z1, &X2, &Y2, &Z2);
    printf("%d\n", X1 * X2 + Y1 * Y2 + Z1 * Z2);
    return 0;
}
```

E b mod a

难度	考点
2	判断结构 基本运算

题目分析

如题所述，计算$b \bmod a$的值。

注意以下几点

- 题目为多组数据输入 需要使用循环结构进行输入输出。
- 题目所要求计算的是$b \bmod a$而非$a \bmod b$，不要搞错了变量。
- 在进行取余运算之前就要先行判断a是否为0再做运算，否则程序会在试图对0取余的时候崩溃。

整体结构仿照“例题1-6”即可，可以得到以下示例代码。

示例代码

```
#include <stdio.h>
int main(void) {
    int n, a, b, i;
    scanf("%d", &n);
    for (i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d%d", &a, &b);
        if (a == 0) {
            printf("Wait. That's illegal.\n");
        } else {
            printf("%d mod %d = %d\n", b, a, b % a);
            // 注意题干 计算的是 b mod a 而不是 a mod b
        }
    }
    return 0;
}
```

F 军乐团选拔

难度	考点
2	四则运算 条件判断

题目分析

本题实际上为计算 n 个自然数中所有不为 0 的数的平均数，应该用一个变量 `num` 存储所有不为 0 的数的总和，再用另一个变量 `cnt` 记录人数不为 0 的连队数目。
具体实现方式为每读入一个连队的人数 `a`，就进行一次判断，若 `a` 不为 0 则将不为零的连队数 $+1$。

```
if(a != 0)
{
    num += a;  //更新总人数num
    cnt++;  //更新参与计算平均人数的连队数目
}
```

最后只需判断 cnt 是否为 0，即可确定输出平均数还是 `Oh!No!` 了。

示例代码

```
#include<stdio.h>

int main()
{
    int n, a, ans, num=0, cnt=0; //num和cnt是不断累加的，所以一定要初始化成0
    scanf("%d", &n);
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        scanf("%d", &a);
        if(a != 0)
```

```
        {
            num += a;  //更新总人数num
            cnt++;  //更新参与计算平均人数的连队数目
        }
    }

    if(cnt != 0)  //有人报名
    {
        ans = num / cnt;  //平均人数
        printf("%d", ans);
    }
    else  //无人报名
        printf("Oh!No!");

    return 0;
}
```

G 兜兜转转找到你

难度	考点
2	循环结构，分支结构，基本运算

题目解析

按照题目要求，用循环实现从 x 开始不断对其进行操作，循环条件为 $x \neq 1$ ，用变量 cnt 记录循环次数即可。

示例代码

```
#include <stdio.h>
int main()
{
    int x, cnt;
    scanf("%d", &x);
    for(cnt = 0; x != 1; ++cnt)
    {
        if(x % 2 == 1)
            x = 3 * x + 1;
        else
            x = x / 2;
    }
    printf("%d", cnt);
    return 0;
}
```

`H` 永久的爱

难度	考点
3	整数除法，抽屉原理

题目分析

先考虑求最大值，这是我们将所有的 1 全部排在一起，最大值显然为 b。
接下来考虑求最小值，问题可以描述为用 $a-b$ 个 0 去分隔 b 个 1，相当于将 b 个 1 放到 $a-b+1$ 个抽屉里，由抽屉原理可知，至少有一个抽屉中的 1 的数量不小于 $\lceil \frac{b}{a-b+1} \rceil$ （向上取整），这就是最小值。

由 $\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+y-1}{y} \right\rfloor$ （向下取整），知 $\lceil \frac{b}{a-b+1} \rceil = \lfloor \frac{a}{a-b+1} \rfloor$，可以用表达式 `a / (a - b + 1)` 表示。

示例代码

```c
#include <stdio.h>
int main()
{
    int t;
    scanf("%d", &t);
    while(t--)
    {
        int a, b;
        scanf("%d%d", &a, &b);
        printf("%d %d\n", b, a / (a - b + 1));
    }
    return 0;
}
```

`I` 军乐团分组

难度	考点
4	最大公因数 gcd

题目分析

分析题意不难发现，分组要求同组人必须来自同连，也就是说每组人数必须是所有连人数的公因数。但~~不要被样例解释部分误导~~，不需要求每一连队分了多少组，只需要用 **总人数** / **每组人数即可求出总组数**。因此用一个 `num` 变量记录 8 个连的总人数，再用一个变量 `gcd` 循环求取 8 个连人数的最大公因数 (gcd)。

示例代码

```
#include<stdio.h>

int main()
{
    int n, a, b, gcd, num = 0;
    scanf("%d", &a);
    gcd = a;
    num = a;
    for(int i = 2; i <= 8; i++)
    {
        scanf("%d", &b);
        num += b;

        if(gcd > b)  //求最大公因数
            gcd = b;
        while(!(a % gcd == 0 && b % gcd == 0))
        {
            gcd--;
        }
        a = gcd;
    }
    n = num / gcd;
    printf("%d", n);
    return 0;
}
```

补充内容

对于本题的数据范围 $1 \le a_i \le 200$ 且只有 8 个数，时间复杂度 $O(n)$ 似乎是足够的 $(n = \min(a, b))$，但对于更大规模的求 gcd，有没有更高效的方法呢？这里贴出一个古老且神奇的 **辗转相除法**，感兴趣的同学可以自行研究它的原理和正确性，其时间复杂度降到了 $O(\log n)$。

```
int a,b,gcd,temp;  //求a和b的最大公因数
scanf("%d%d",&a,&b);
if(a < b)
{
    temp = a;
    a = b;
    b = temp; //交换a和b的值
} //始终保证a是二者中较大的数
while(b != 0)
{
    temp = a % b;
    a = b;
    b = temp;
}
gcd = a; //最终求出gcd的值
```

J 分割平面

难度	考点
5~6	计数，取模

本题难度过高，不做要求。

题目解析

若使得区域最多，显然需要使尽量多的直线不共点，且任意两条直线不相互平行。即**除了初始的 n 个点以外，任意点不能同时在三条直线上，且任意两条直线都有交点。**

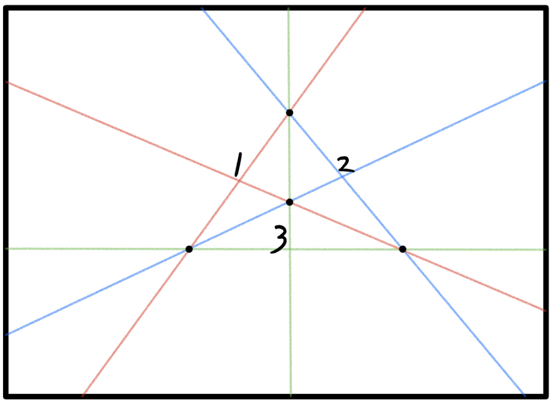
由 Hint 中的欧拉示性数公式 $v-e+f=1$，分割的区域数量就是公式中的 f，因此我们需要求得 v,e 的值，即可通过 $f=e-v+1$ 求得答案。

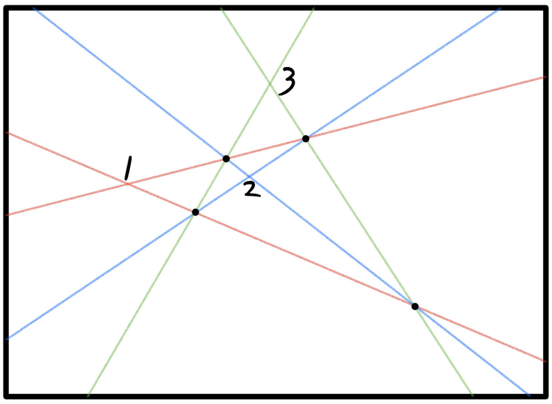
如何求顶点数 v？

顶点有两个来源，第一种是最初给出的 n 个点，第二种是若干条直线的两两相交新增的交点。

由两点确定一条直线，一个新增交点涉及到两条直线， 4 个初始点。

然而 4 条初始点能够确定 3 对相交的直线，如下图：





即任选 4 个初始点会产生 3 个新增交点，因此产生的新增交点总数为 $3\cdot C_n^4$ 。

所以顶点总数 $v=n+3\cdot C_n^4$ 。

如何求边数 e？

两点确定一条直线，对于每一条直线，若不计新增交点，该直线被两个初始点分成了 3 段，即每条直线最初都贡献了 3 条边，一共有 C_n^2 条直线，所有直线最初贡献了 $3\cdot C_n^2$ 条边。

对于一条直线，每个新增交点会增加一条边。而每个新增交点会作用于两条直线，即每个新增交点贡献了 2 条边，因此所有新增交点贡献了 $2\cdot 3\cdot C_n^4=6\cdot C_n^4$ 条边。

所以边的总数 $e=3\cdot C_n^2+6\cdot C_n^4$ 。

因此最终答案为 $f=e-v+1=3\cdot C_n^2+3\cdot C_n^4-n+1=\frac{3n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}-n+1$ 。

注意事项:

1. 需要用 `long long` 类型
2. 注意模运算和数据范围，记得在运算过程中取模，具体看代码。

示例代码

```
#include <stdio.h>
int main()
{
    long long n;
    long long mod = 998244353; //模数
    long long inv2 = (mod + 1) / 2; //除以2等价于乘inv2
    scanf("%lld", &n);
    long long A = n * (n - 1) / 2 * 3 % mod; //答案第一项
    long long B = (n * (n - 1) / 2 % mod) * ((n - 2) * (n - 3) / 2 % mod) % mod *
inv2 % mod; //答案第二项
    long long ans = A + B - n + 1; //答案
    ans = (ans % mod + mod) % mod; //保证ans为正
    printf("%lld", ans);
    return 0;
}
```

第二种解法 by cwz

首先考虑这个问题：**对于平面上 m 条直线，任意三线不共点，最多能够把平面划分成多少个区域?**

1 条直线最多可以将平面划分为 2 个区域，2 条直线最多可以将平面划分为 4 个部分，3 条直线最多可以将平面划分为 7 个部分。每增加一条直线，都最多可以和平面上已有的 $i-1$ 条直线相交，增加 i 个区域。由此，我们可以得到，**对于平面上 m 条直线，任意三线不共点，最多能够把平面划分成 $\frac{m(m+1)}{2}+1$ 个区域。**

我们已经知道了这个题有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条直线。可是，对于这个题来说，n 个点确定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条直线时，显然组成的图形会有 n 个点不是只由两条直线相交得到的，而是 $n-1$ 条直线的公共点。

所以接下来考虑第二个问题：**当 k 条直线汇聚于一点时，会比这 k 条直线任意三线不共点时把平面少划分多少区域?**

显然当 k 条直线汇聚于一点时，可以把平面划分为 $2k$ 个区域，$\frac{k(k+1)}{2}+1-2k=\frac{k^2-3k+2}{2}=\frac{(k-1)(k-2)}{2}$。因此，**当 k 条直线汇聚于一点时，会比这 k 条直线任意三线不共点时把平面少划分 $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ 个区域。**

综合以上问题的考虑，对于这个题，直线数量 $m=\frac{n(n-1)}{2}$，不是只由两条直线相交得到的点有 n 个，这 n 个点全部都是 $n-1$ 条直线的公共点，即 $k=n-1$，我们可以写出平面区域数 f 的最终表达式:

$$f=\frac{\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)}{2}+1-n\cdot\frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

又注意到结果有可能很大，我们不能在计算完毕之后再求模，而是应该在计算的过程之中就要求模。AC代码如下：

```
#include <stdio.h>
int main(void)
{
    long long n, f, line;
    int div2 = 499122177, mod = 998244353;
    scanf("%lld", &n); // n 的最大可能取值超过了 int 范围
    line = n * (n - 1) / 2 % mod;
    f = line * (line + 1) / 2 % mod + 1 - n * ((n - 3) * (n - 2) / 2 % mod) % mod;
    f = (f % mod + mod) % mod; // 防止出现负数求模
    printf("%lld", f);
    return 0;
}
```

Author: David Tong

本题灵感来自于3Blue1Brown的视频：[【官方中配】分圆问题，诡异的数列规律：解答篇-哔哩哔哩]

- End -