## A 一般通过计算式

难度	考点
1	函数

#### 题意分析

按照题意,我们需要引入 math.h 库并调用其中的库函数 exp, cos, atan, log, cosh来进行计算。可以得到如下示例代码。注意输入为不定行输入,输出保留三位小数。

#### 示例代码

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main(void) {
    double x, y;
    while (scanf("%lf", &x) != EOF) {
        y = exp(cos(atan(x))) / log(cosh(x) + 1);
        printf("%.3f\n", y);
    }
    return 0;
}
```

# B a^b Problem Ver. 9

难度	考点
1	函数调用

### 问题分析

直接调用函数即可。

### 参考代码

```
#include <stdio.h>

long long qpow(long long a, unsigned long long b, long long p)
{
    long long ans = 1;
    a = a % p;
    while (b)
    {
        if (b & 1)
```

```
ans = (ans * a) % p;
b >>= 1;
a = a * a % p;
}
return ans;
}
int main()
{
  long long a, p;
  unsigned long long b;
  scanf("%11d%11u%11d", &a, &b, &p);
  printf("%11d", qpow(a, b, p));
  return 0;
}
```

### C水獭函数

难度	考点
2	函数

#### 题目分析

根据题意,我们可以先实现 f(x) ,再输出 f(f(f(x))) ; 要特殊注意的就是在实现 f(x) 的过程中如果直接用 x\*x 可能会超出 int 范围。

同时这里补充一下 C 语言的取余运算,我们知道比如在同余的角度下, $4 \mod 3 = 1$  或者  $4 \mod 3 = -2$  都可以说是对的,那么 C 语言是如何规定取余操作的呢?可以尝试以下的代码片段:

```
#include <stdio.h>
int main()
    printf("4 \%\% 3 = \%d\n",4 \% 3);
    printf("-2 \%\% 3 = \%d\n",(-2) \% 3);
    printf("-5 \%\% 3 = \%d\n",(-5) \% 3);
    printf("(-2 + 3) %% 3 = %d\n", (-2+3) % 3);
    printf("(-5 + 3) %% 3 = %d\n", (-5+3) % 3);
    printf("(-2 \% 3 + 3) \% 3 = \%d\n", (-2\%3 + 3) \% 3);
    printf("(-5 \% 3 + 3) \% 3 = \%d\n", (-5\%3 + 3) \% 3);
    printf("\n");
    printf("4 \%% -3 = \%d\n", 4 \% -3);
    printf("-2 \% -3 = \%d\n",(-2) \% -3);
    printf("-5 %% -3 = %d\n", (-5) % -3);
    printf("(-2 + 3) %% -3 = %d\n", (-2+3) % -3);
    printf("(-5 + 3) %% -3 = %d n", (-5+3) % -3);
    printf("(-2 \% -3 + 3) \% -3 = \%d\n", (-2\%3 + 3) \% -3);
    printf("(-5 %% -3 + 3) %% -3 = %d\n", (-5%3 + 3) % -3);
    return 0;
}
```

在 C 语言中,余数的计算方法可以表示为  $a \mod b = a - a/b*b$ 。而 C 语言中除法是趋零截尾的,也就是整数除法的结果相当于除法的结果向 0 的方向,将小数部分阶段,比如计算整数除法 7/(-3), $\frac{7}{-3} = -2.33$ ,所以整数除法结果就是 -2,即直接截断了小数点后的部分。

所以余数和被除数的符号一致,也就是说余数并不总是和通常的取余运算结果相一致(通常数学上的取余操作  $a \mod b$  结果在  $0 \mod b - 1$ ) ,所以在执行完 ans = a % b 后,为了使结果 ans 一定在  $0 \mod b - 1$  之间,我们用 ans = (ans + b) % b。这样,如果 ans 以前的值就是一个正数,那么 ans 的值不会受到影响;如果 ans 的值之前是一个负数,这么做就相当于把它转化成了同余意义下等价的正数,符合我们通常数学中的取余操作。

#### 示例代码

```
#include <stdio.h>

int a,b;
int f(int x) {
    // 这段代码里的 mod b 有两个作用: 防止结果超过 int 范围; 保证余数的范围
    return (((a * x % b) * x + x) % b + b) % b;
}

int main() {
    int x;
    scanf("%d%d",&a,&b);
    while(~scanf("%d",&x)){
        printf("%d\n",f(f(f(x))));
    }
    return 0;
}
```

当然,为了防止计算 f(x) 的计算过程中产生超出 int 的结果使用 long long 类型也是可以的;其次就是 函数 f(x) 的实现可以写的更简单一些,大家可以思考一下

## D 圆锥曲线和离心率

难度	考点
3	函数

### 题目分析

直接根据 Hint 及有关的数学公式完成函数即可,注意函数的返回值为 double 类型,以及本题所需的数组大小。由 Hint 可知,本题需要讨论 a,b 的大小关系,这些都需要在函数中予以体现。

### 示例代码

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double eccentricity(int a, int b) {
   double e = 0;
   if (a > b) {
```

```
e = sqrt(a * a - b * b) / a;
    } else if (a < b) {</pre>
        e = sqrt(b * b - a * a) / b;
    }
    return e;
}
int main() {
   int p[9];
    double e[6];
    for (int i = 1; i \le 8; i++) {
        scanf("%d", &p[i]);
    }
    e[1] = eccentricity(p[1], p[5]);
    e[2] = eccentricity(p[3], p[1]);
    e[3] = eccentricity(p[7], p[6]);
    e[4] = eccentricity(p[2], p[4]);
    e[5] = eccentricity(p[8], p[3]);
    for (int i = 1; i \le 5; i++) {
        printf("%.2f ", e[i]);
    }
   return 0;
}
```

## E Catalan 数

难度	考点
3	函数与递归

### 题目分析

题中已给出数列的递推公式,因此我们可以使用递归函数来进行运算。 根据题意我们可以得到以下递归函数

#### 示例代码

```
#include <stdio.h>
int Catalan(int n);
int main(void) {
   int T, a;
    scanf("%d", &T);
   for (int i = 0; i < T; i++) {
        scanf("%d", &a);
        printf("%d\n", Catalan(a));
    }
    return 0;
}
int Catalan(int n) {
   if (n == 0) {
       return 1;
    }else{
        int sum = 0;
        for (int i = 0; i \le n - 1; i++) {
            sum += (Catalan(i) * Catalan(n - 1 - i));
       return sum;
    }
}
```

### F孪生素数猜想

难度	考点
4	函数,判断素数

### 题目分析

本题与教材例5-4类似。

我们只需要使 p 从 l 开始遍历到 r-2 ,判断 p 和 q=p+2 是否为素数,输出结果即可。

判断素数的函数是下方示例代码中的 isPrime 函数,若参数 x 是素数则返回 1 ,否则返回 0 。

注意: 判断素数时 i 只需要枚举到  $\sqrt{x}$  即可,若枚举到 x 会超时;此外特别要注意 1 不是素数。

示例代码中主函数中的循环是从大于 l 的第一个奇数 ( p = 1 | 1 )开始枚举的,从 l 开始枚举也没有问题。

### 示例代码

```
#include <stdio.h>
int isPrime(int x)
{
   if(x == 1) return 0;
   if(x % 2 == 0) return 0;
   for(int i = 3; i * i <= x; i += 2)</pre>
```

```
if(x \% i == 0) return 0;
    return 1;
}
int main()
   int 1, r;
   int n = 0;
    scanf("%d%d", &1, &r);
   //for(int p = 1; p + 2 <= r; p++)
   for(int p = 1 | 1; p + 2 \ll r; p += 2)
        if(isPrime(p) && isPrime(p + 2))
            printf("%d %d\n", p, p + 2);
            n++;
        }
    printf("%d", n);
    return 0;
}
```

### G 戎璎花的汉诺塔

难度	考点
4	递归,汉诺塔

### 题目分析

经典递归问题之汉诺塔——课本上就有源代码

让我们再回顾其思路

假设有一个n层的汉诺塔在左侧的柱子上,要将其移动到右侧的柱子,需要怎么移动最快?

首先,至少,我们需要将最大的,最底下的第 n 圆盘移动到最右侧的柱子上。

由于圆盘只能放在更大的圆盘上,因此为了将第 n 号圆盘移动到最右侧的柱子上,我们需要:

第一步,将前 n-1 个圆盘组成的汉诺塔移动到中间的柱子上

第二步,将第 n 个圆盘移动到最右侧柱子上

第三步,将前n-1个圆盘组成的汉诺塔移动到右侧柱子上。

第二步可以直接输出,接下来需要处理的就是第一步和第三步,注意到第 n 层圆盘的存在完全不会影响 前 n-1 层圆盘的移动,那么第一步和第三步本质就是 n-1 层的汉诺塔的问题。

那么这 n-1 层的汉诺塔问题又可以再一次化归成 n-2 层的汉诺塔,化归成 n-3 层的汉诺塔……直到变成最基本的情况:只有一个圆盘,直接移动即可。

由此我们就得到了递归关系和初始状态,就能解决整个问题了。

另外,其实输出的字符串存在错别字(毕竟璎花只是个夭折的不识字的水子),希望大伙可以复制题目 给出的输入/输出而不是手敲一遍,又慢又容易打错

#### 示例代码

```
#include <stdio.h>
void hanoi(int n, char from, char via, char to);
void move(int n, char from, char to);
int main(void) {
   int n;
   char from, via, to;
   scanf(" %c %c %c %d", &from, &via, &to, &n);
   hanoi(n, from, via, to);
   return 0;
void hanoi(int n, char from, char via, char to) {
   // 将n层的汉诺塔从from柱经过via柱移动到to柱上
   if (1 == n) {
       // 只有一层的初始状态,直接输出即可
       move(n, from, to);
       return;
   }
   hanoi(n - 1, from, to, via);
   // 第一步,将前n-1层组成的汉诺塔从from柱经过to柱移动到via柱上
   move(n, from, to);
   // 第二步,移动第n层圆盘至to柱上
   hanoi(n - 1, via, from, to);
   // 第三步,将前n-1层组成的汉诺塔从via柱经过from柱移动到to柱上
}
void move(int n, char from, char to) {
   printf("Eika moved Koishi %02d form the %c to the %c\n", n, from, to);
}
```

### H 禁止抄袭!

难度	考点
5	递归输出

### 题目分析

此题与教材例5-17疫情期间的座位选择有相似的地方,但是除了过程有微小区别之外,最大的问题就是本题狠狠的限制了空间,如果使用书上的做法会 MLE ,只能得 0.4 或 0.6 分。于是我们可以不用数组去模拟,而是直接递归输出的过程。

注意到对于**大多数情况**而言,输出的字符串可以看作由首尾两个 1 和中间 n-2 个待输出字符组成的。而这 n-2 个字符就是我们进行递归输出的主体,它被从中间划分后,可以看作三部分: 左边一半待输出字符,中间的 1 ,右边一半待输出字符。再对左右两边的待输出字符进行同样处理,直到中间不再能放下 1 了,即这一段待输出字符的数量小于等于 2 时,输出对应数量的 0。

这题还需要考虑两个特殊情况,即 n=1 和 n=2 的情况,此时输出的字符串不再可以看作由首尾两个 1 和中间 n-2 个待输出字符组成的,需要单独处理。

#### 示例代码

```
#include <stdio.h>
void f(int n)
   if (n == 1) // n == 1 和 n == 2 的时候是终止情况,不能继续向下递归
       printf("0");
   else if (n == 2)
       printf("00");
   else
   {
       f((n - 1) / 2); // 左半部分,与右半部分合起来共有n-1个字符
       printf("1"); // 中间的1
       f(n / 2);
   }
int main(void)
   int n;
   scanf("%d", &n);
   if (n == 1) // 两个特殊情况
       printf("1");
   else if (n == 2)
       printf("10");
   else
       printf("1"); // 输出首位的1
       f(n - 2); // 输出中间部分,共n-2个字符
       printf("1"); // 输出末位的1
   }
   return 0;
}
```

### 拓展

这题虽然和教材上的例题很相像,但这只是单纯的撞车。

这题真正的灵感来源是<u>【毕导】男同胞福音!如何解决尿尿时最尴尬的难题?建议偷偷收藏</u>,是一个很典型的使用递归思想解决问题的案例。

这题甚至一开始的题面都和视频里的一样,但是为了联系现状,提醒同学们不要抄袭 <del>(原题面没过审)</del> 就临时改了。

# I dyc写代码

难度	考点
6	进制,函数

#### 题目分析

先证明一个结论: f(x) 的值等于 x 在三进制下每一位之和与位数的和。

使用数学归纳法证明,当  $x\leq 3$  时结论显然成立,假设对于所有的 x< k 都成立,下考虑 x=k 的情形,若 x 是 3 的倍数,此时由于  $f(x)=f(\frac{x}{3})+1$ ,由于 x 在三进制下相当于比  $\frac{x}{3}$  添加了一个0,结论成立。若不是 3 的倍数,则相当于在最后一位加 1 ,结论依旧成立。

回到原题,我们要找到 l 与 r 之间最大的 x 使得 f(x) 最大,当 l 和 r 相差的足够小时,我们显然可以直接计算,下面讨论 r-l>3 的情况,分以下两种情况:

- 当 l 和 r 三进制下位数相同时,假设分别为  $(a_0a_1\cdots a_k)_3$  和  $(b_0b_1\cdots b_k)_3$  ,假设从高位开始第一位不同的为第 m 位,可知  $0\leq m< k$  ,那么我们可以知道若  $b_i=2(i\leq m\leq k)$  最大的一定是  $(a_0a_1\cdots a_{m-1}222\cdots 2)_3$  ,否则一定是  $(a_0a_1\cdots a_{m-1}(b_m-1)22\cdots 2)_3$  。
- 当 l 和 r 三进制下位数不同时,假设分别为  $(a_0a_1\cdots a_{k_1})_3$  和  $(b_0b_1\cdots b_{k_2})_3$  ,分两段来考虑,考查跟 r 三进制下位数相同的最小的数 y ,l 到 y 之间最大的答案显然为  $2(k_2-1)$  ,y 到 r 之间同上面一种情况的讨论。

#### 示例代码

```
#include<stdio.h>
#define max(a,b) (((a) > (b)) ? (a) : (b))
int t,a[100],b[100];
long long l,r;
long long f(long long x)//计算f(x)的函数
    if(x == 0)
    return 1;
   if(x \% 3 == 0)
    return f(x / 3) + 1;
    else
    return f(x - 1) + 1;
}
int main()
    scanf("%d",&t);
    while(t--)
        scanf("%11d %11d",&1,&r);
        if(r - 1 <= 3)//当差值小于3的时候直接计算
            long long ans = 0;
            for(long long i = 1; i \leftarrow r; i++)
            ans = \max(ans, f(i));
            printf("%11d\n",ans);
        }
        else
        {
            int 11 = 0, 12 = 0;
            long long ans = 0;
            for(int i = 0; i < 50; i++)
            a[i] = 0,b[i] = 0;
            while(1)//分别计算1和r三进制下的表达式
            a[11] = 1 \% 3, 1 = 1 / 3, 11++;
            while(r)
            b[12] = r \% 3, r = r / 3, 12++;
```

```
if(11 != 12)//如果位数不同
           {
               ans = 3 * (12 - 1);//一种情形是12-1个2
               a[12 - 1] = 1; //另一种情形让1成为最小的12位的数
               for(int i = 0; i < 12 - 1; i++)
               a[i] = 0;
           }
           int k, flag = 0;
           for(int i = 50; i >= 0; i--)
               if(a[i] != b[i])//找到1和r不同的第一位
               {
                   k = i;
                   break;
               }
           }
           for(int i = k - 1;i >= 0;i--)//判断r后面是否都是2
           {
               if(b[i] != 2)
               flag = 1;
           if(flag)//如果都不是2,相应赋值
               b[k] = b[k] - 1;
               for(int i = k - 1; i >= 0; i--)
               b[i] = 2;
           long long x = 0;
           for(int i = 50; i >= 0; i--)
           x = x * 3 + b[i];
           ans = max(ans, f(x)); // 计算最后的答案
           printf("%11d\n",ans);
       }
   }
   return 0;
}
```

## 」 哪吒的递归函数

难度	考点
6~7	二进制,求贡献

### 题目分析

```
本题暴力递归会超时。那如何计算呢?
```

```
设 x 的二进制表示为 n_kn_{k-1}\cdots n_1n_{0\,(2)} ,其中 n_i\in\{0,1\} ,且一定有 n_k=1 。 当 k=0 时, x=n_{0\,(2)} ,即 x 为 0 或 1 。 f(0)=1,f(1)=2 。
```

当 k>0 时,  $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$  的二进制表示为  $n_kn_{k-1}\cdots n_{1(2)}$  ,相当于去掉最低位或者右移;  $x-2^{\lfloor\log_2x\rfloor}$  的二进制表示为  $n_{k'}\cdots n_1n_{0(2)}$  ,其中 k' 是满足 k'< k 且  $n_{k'}=1$  的最大的自然数,相当于去掉最高位的 1 (和后面连续的 0 )。有

$$f(x)=f(n_kn_{k-1}\cdots n_1n_{0\,(2)})=f(n_kn_{k-1}\cdots n_{1\,(2)})+f(n_{k'}\cdots n_1n_{0\,(2)})$$
 ,

可见递归过程并没有对 x 的二进制表示的每一位进行修改, 只是去掉了其中若干项而已。

也就是说,一定有  $f(x)=a_kf(n_k)+a_{k-1}f(n_{k-1})+\cdots+a_0f(n_0)=\sum_{i=0}^ka_if(n_i)$ ,其中  $a_i$ 是每一位的贡献。

例如  $10=n_3n_2n_1n_{0(2)}=1010_{(2)}$   $f(10)=f(1010_{(2)})=f(101_{(2)})+f(10_{(2)})$   $=f(10_{(2)})+f(1_{(2)})+f(1_{(2)})+f(0_{(2)})$ 

$$=f(1_{(2)})+f(0_{(2)})+f(1_{(2)})+f(1_{(2)})+f(0_{(2)})$$

写作  $n_i$  的形式就是:

$$egin{aligned} f(10) &= f(n_3n_2n_1n_{0(2)}) = f(n_3n_2n_{1(2)}) + f(n_1n_{0(2)}) \ &= f(n_3n_{2(2)}) + f(n_{1(2)}) + f(n_{1(2)}) + f(n_{0(2)}) \ &= f(n_{3(2)}) + f(n_{2(2)}) + f(n_{1(2)}) + f(n_{1(2)}) + f(n_{0(2)}) \ &= f(n_3) + f(n_2) + 2f(n_1) + f(n_0) \end{aligned}$$

即 
$$a_3 = 1, a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = 1$$
,代入  $f(0) = 1, f(1) = 2$  得  $f(10) = 8$ 。

问题就转化为了如何求每一位的贡献  $a_i$ 。

每个基本情况  $f(n_i)$  ,都是通过对  $x=n_kn_{k-1}\cdots n_1n_{0(2)}$  进行若干次右移操作和若干次去掉最高位的 1 (和后面连续的 0 )操作得到的。也就是说  $n_i$  的贡献  $a_i$  就是通过这两种操作将  $x=n_kn_{k-1}\cdots n_1n_{0(2)}$  变为  $n_i$  的方法数。

如  $x=10=1010_{(2)}$  ,对于  $n_2$  ,只有"右移两次,去掉最高位"这一种方法能将 x 变为  $n_2$  ,因此  $a_2=1$  ;对于  $n_1$  ,有"去掉最高位,右移"和"右移,去掉最高位"两种方法使得 x 变为  $n_1$  ,因此  $a_1=2$  。

对于  $n_i$  而言,想要递归到基本情况,显然右移操作一共需要进行 i 次;去掉最高位的操作需要进行几次呢?

 $n_i=1$  时,设满足  $i\leq j\leq k, n_j=1$  的 j 的个数为  $cnt_i$  ,即  $n_i$  和更高位中 1 的数量,显然需要进行  $cnt_i-1$  次"去掉最高位"的操作,且两种操作无顺序要求,因此方法数为

$$inom{cnt_i-1+i}{i}=rac{(cnt_i-1+i)!}{i!\cdot(cnt_i-1)!}$$
 (组合数) 。

 $n_i=0$  时,设满足  $i\leq j\leq k, n_j=1$  的 j 的个数为  $cnt_i$  ,即更高位中 1 的数量,显然需要进行  $cnt_i$  次"去掉最高位"的操作,但是最后一次操作一定是"去掉最高位"而不能是"右移",(如 x=10 , $n_2$  的情况),因此只有  $cnt_i-1$  次"去掉最高位"的操作顺序是可以变的,因此方法数也为

$$inom{(cnt_i-1+i)}{i}=rac{(cnt_i-1+i)!}{i!\cdot(cnt_i-1)!}$$
 .

即 
$$a_i = \binom{cnt_i-1+i}{i} = \frac{(cnt_i-1+i)!}{i!\cdot(cnt_i-1)!}$$
 。

所以最终的答案为

$$f(x) = a_k f(n_k) + a_{k-1} f(n_{k-1}) + \dots + a_0 f(n_0) = \sum_{i=0}^k a_i f(n_i) = \sum_{i=0}^k inom{cnt_i-1+i}{i} f(n_i)$$
 .

 $a_i$  可通过递推求得,已知  $a_{i+1}$  ,求  $a_i$  时,若  $n_i=0$  ,  $cnt_i=cnt_{i+1}$  ,则  $a_i=\dfrac{(i+1)\cdot a_{i+1}}{cnt_i+i}$  ;若  $n_i=1$  ,  $cnt_i=cnt_{i+1}+1$  ,则  $a_i=\dfrac{(i+1)\cdot a_{i+1}}{cnt_{i+1}}$  ;特别地,当 i=k 时,  $cnt_i=1$  ,  $a_i=1$  。

从高到低遍历x的每一位,按公式计算 $a_i$ ,乘上f(0)=1或f(1)=2,再求和即可得到答案。

#### 示例代码

```
#include <stdio.h>
int main()
   unsigned long long x;
   while(~scanf("%llu", &x))
       if(x == 0)
        {
            puts("1");
            continue;
       unsigned long long ans = 0;
       int i, cnt = 0;
        for(i = 0; x >> i; ++i); //求出x二进制表示有几位, 此时i=k+1
        unsigned long long a = 1;
        for(--i; i >= 0; --i)
           if(x >> i \& 1) //ni=1
               if(cnt != 0) a = a * (i + 1) / cnt; //i!=k时
                cnt++; //更新cnt
            else //ni=0
               a = a * (i + 1) / (cnt + i);
            ans += x >> i & 1 ? 2 * a : a;
       printf("%]]u\n", ans);
    return 0;
}
```

### 补充: WA代码

#### 0.1 分代码 - 暴力递归求解

```
#include<stdio.h>
int g(unsigned long long x)
{
   int cnt = 0;
   while(x)
   {
      ++cnt;
      x >>= 1;
   }
}
```

```
return cnt;
}
unsigned long long f(unsigned long long x)
{
    if(x == 0) return lull;
    return f(x >> 1) + f(x - (lull << g(x) - 1));
}
int main()
{
    unsigned long long x;
    while(~scanf("%llu", &x))
        printf("%llu\n", f(x));
    return 0;
}</pre>
```

#### 0.4 分代码 - 记忆化存储递归求解

```
设 x=n_kn_{k-1}\cdots n_1n_{0(2)} , f(x)=f(n_kn_{k-1}\cdots n_1n_{0(2)})=f(n_kn_{k-1}\cdots n_{1(2)})+f(n_{k'}\cdots n_1n_{0(2)}) , 其中 k' 是满足 k'< k 且 n_{k'}=1 的最大的自然数。  \text{用 }A[i][j] \text{ 存储 }f(n_jn_{j-1}\cdots n_{i(2)})\text{ , }\text{ 递归求解}.
```

```
#include <stdio.h>
unsigned long long f(unsigned long long x, int i, int j, unsigned long long A[64]
[64])
{
   if(A[i][j]) return A[i][j]; //如果A[i][j]不为0, 说明计算过了, 直接返回
   if(i == j) return A[i][j] = x >> i & 1 ? 2 : 1; //基本情况
   int k;
   for(k = j - 1; k > i && !(x >> k & 1); --k); //求出k'
    return A[i][j] = f(x, i + 1, j, A) + f(x, i, k, A); //递归求解,同时用A[i][j]存
储答案
}
int main()
   unsigned long long x;
   while(~scanf("%llu", &x))
       if(x == 0) //特殊情况
        {
           puts("1");
           continue;
       unsigned long long A[64][64] = \{0\};
       int k;
       for(k = 0; x >> k; ++k);
       printf("%llu\n", f(x, 0, k - 1, A));
   return 0;
}
```