

TP Processus aléatoires – FIPA 1 SE

Etude d'une sinusoïde bruitée

Cette application avec le logiciel MatLab a pour but de mesurer qualitativement et quantitativement l'impact d'un bruit blanc gaussien additif sur une sinusoïde. Les observations seront faites à la fois dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel.

Question 1 : Analyse d'un bruit b blanc gaussien

Indication : Pour générer un vecteur bruit blanc (donc de moyenne $m = 0$) gaussien de longueur N et d'écart-type σ , la commande est : `b = σ *randn(1,N)` ;

Remarque : Le bruit blanc est modélisé par une densité spectrale de puissance constante quelle que soit la fréquence. Dans le cas analogique, ce modèle mène à une puissance (statistique) moyenne infinie car l'impulsion de Dirac est infinie en $t=0$. Dans le cas discret en revanche, l'impulsion numérique vaut 1 en zéro et mène donc pour le bruit blanc numérique à une puissance (statistique) moyenne finie et égale à la variance σ^2 .

La variance caractérise la dispersion des données autour de la valeur moyenne m . Pour bien comprendre cette notion, on va générer un bruit blanc gaussien de $N=10000$ points et d'écart-type σ allant de 0.1 à 1 par pas de 0.1. Par ailleurs, le caractère « blanc » signifie que les échantillons du bruit sont décorrélés entre eux. Pour vérifier tout cela, ouvrez une figure et visualisez sur trois graphes pour chaque valeur σ (faire une boucle et utiliser la fonction pause pour visualiser les résultats pour chaque valeur) :

- Sur le premier graphe, la répartition des échantillons du bruit b .
- Sur le second graphe, l'histogramme normalisé (distribution) des échantillons (fonction `hist`),
- Sur le troisième graphe, l'autocorrélation estimée à partir des N échantillons du bruit

sous hypothèse d'ergodicité et définie par $\Gamma_{bb}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-|n|} b(k)b^*(k-|n|)$. Pour ce faire, utiliser la fonction `xcorr` puis normaliser par le nombre d'échantillons. Vérifier que, conformément à la remarque ci-dessus, le pic d'autocorrélation en zéro a une amplitude égale à la variance.

Question 2 : Synthétiser un signal sinusoïdal s (dit *signal utile*) de fréquence $f_s=250\text{Hz}$. La fréquence d'échantillonnage est $f_e = 8\text{kHz}$.

Méthode :

- a) Générer un vecteur temps permettant de visualiser $N_p=10$ périodes du signal.

- b) Générer le vecteur signal.
- c) Afficher le signal, en référençant les axes et le titre, sur le 1^{ier} graphe d'une figure contenant 4 graphes les uns en dessous des autres.
- d) Après avoir lu le rappel ci-dessous, calculer le module de la transformée de Fourier rapide du signal et générer le vecteur fréquence associé ($f = (-Nfft/2:Nfft/2-1)/Nfft*f_e$;) pour une visualisation entre $-f_e/2$ et $f_e/2$.
- e) Tracer ce spectre d'amplitude sur le 2nd graphe de la figure. Comparer la courbe obtenue avec la théorie.

Rappel sur la transformée de Fourier rapide : la transformée de Fourier discrète peut être faite de manière rapide en fixant le second paramètre de la fonction `fft` à un nombre de points $Nfft$, qui est une puissance de 2, supérieur ou égal (afin de ne pas tronquer ce dernier !) à la longueur N du signal d'entrée (fonction `nextpow2`). Si $Nfft > N$, cela revient à ajouter $Nfft - N + 1$ échantillons à zéro et à diminuer d'autant le pas fréquentiel défini par $f_e/Nfft$ (technique du « zéro-padding »). La sortie de la fonction `fft` est un vecteur complexe de $Nfft$ points fréquentiels de 0 à f_e . Pour une visualisation sur l'intervalle $-f_e/2$ à $f_e/2$, il faut utiliser en sortie la fonction `fftshift`.

Question 3 : Additionner au signal utile un bruit blanc gaussien (de même longueur que celle du signal utile) pour former le signal bruité $sb=s+b$

Vous fixerez la puissance du bruit de manière raisonnable compte tenu du signal utile et de l'analyse faite à la question 1.

- a) Afficher le signal bruité dans le troisième graphe de la figure.
- b) Calculer et tracer dans le quatrième graphe son spectre d'amplitude en échelle logarithmique (fonction `semilogy`).

Question 4 : Etude de l'influence du bruit

Pour différentes variances du bruit (faire une boucle et utiliser la fonction `pause`), faire les analyses suivantes.

1. Analyse qualitative

Retracer les courbes précédentes. Commenter.

2. Analyse quantitative

Calculer le rapport signal à bruit et afficher la valeur en décibels de la variable `rsb` dans le titre du troisième graphe :

```
title(['signal bruité - RSB = ' num2str(10*log10(rsb)) ' dB'])
```