Indications pour le BE
Estimation spectrale
Non paramétrique

Jean-Christophe CEXUS

cexusje@ensta-bretagne.fr
Bureau : E103

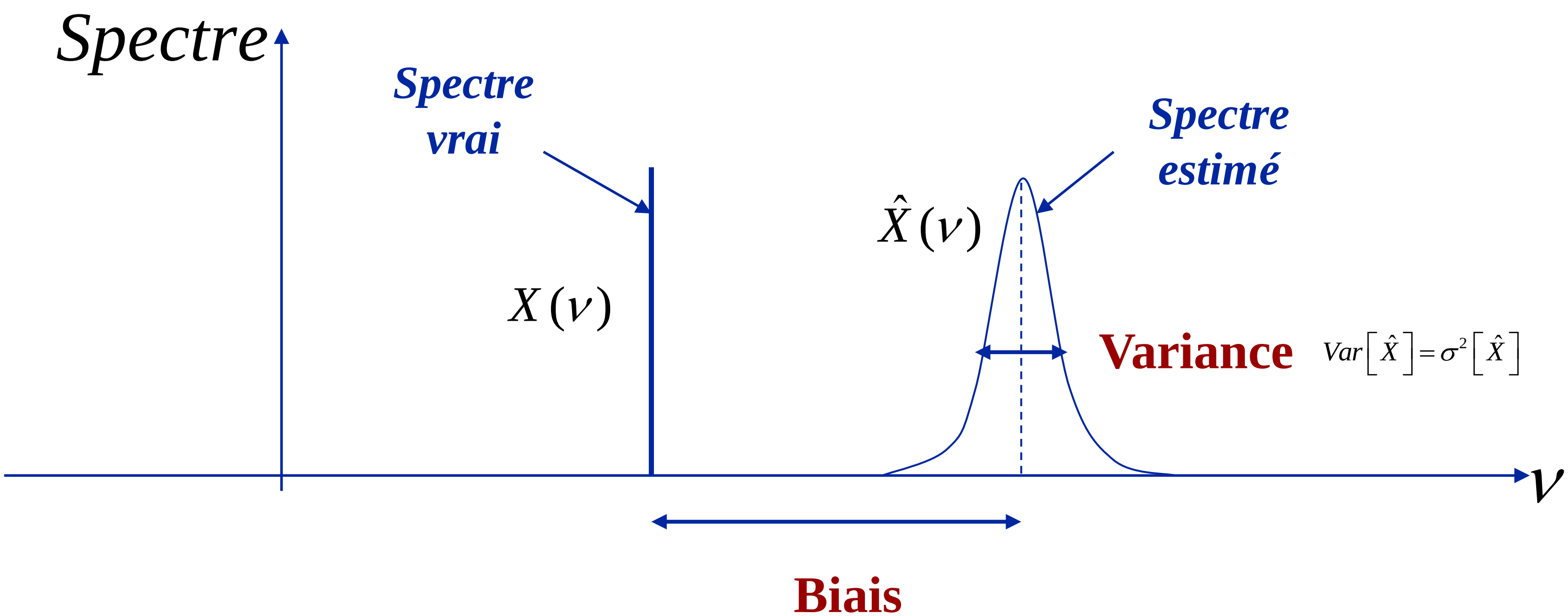
2021

> Evaluation d'un estimateur

Evaluation d'un estimateur : Evaluation de sa qualité / performances

En pratique, l'observation peut être considérée comme la réalisation d'un processus aléatoire, que le signal soit déterministe ou aléatoire.

- Notions de **biais** et **variance** pour un estimateur



Evaluation d'un estimateur

Evaluation d'un estimateur : Evaluation de sa qualité / performances

Terminologie : $\hat{X}$ est l'estimé à partir des observations ***Y***.

- Biais (moment du 1er ordre) :

$$E\left[\hat{X}\right] = X + biais\left(\hat{X}\right)$$

<u>Application à l'estimation de la DSP (Matlab) :</u>

biais = mean(DSP)

variance = var(DSP)^2

- Variance (moment du 2ème ordre) :

$$Var\left[\hat{X}\right] = E\left[\left(\hat{X} - E\left[\hat{X}\right]\right)^2\right]$$

- EQM (erreur quadratique moyenne) : $EQM = E\left[\left(X - \hat{X}\right)^2\right]$

$$EQM = Var\left[\hat{X}\right] + biais\left(\hat{X}\right)^2$$

> Evaluation d'un estimateur

Evaluation d'un estimateur : Evaluation de sa qualité / performances

Terminologie : $\hat{X}$ est l'estimé à partir des observations ***Y***.

- un estimateur est **non biaisé** si son biais est 0 : $biais\left(\hat{X}\right)=0$

- Il existe une borne inférieure de la variance : *Borne de Cramer-Rao* (CR) (pour un estimateur sans biais) : $$Var\left[\hat{X}\right]\geq\frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p_{y,x}(y,x)}{\partial x^2}\right]}$$

- Si la variance atteint la borne de CR, on dit que l'estimateur est **Efficace.**
- L'estimateur idéal est *non biaisé* et *efficace* mais variance et biais sont liés par l'EQM :
  - **Antagonisme biais-variance**

- Un estimateur est **Consistant** si le biais et la variance tendent vers 0 lorsque le nombre d'observations augmente (plus l'estimée s'approche de la vrai valeur).

> Densité spectrale de puissance - Estimation

Méthode non paramétrique : Périodogramme simple

Issu de l'application directe du théorème de Wiener-Kintchine : $\boxed{\gamma_{xx}(\nu) = TF\left[\Gamma_{xx}(\tau)\right]}$

$$\hat{\Gamma}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\hat{\gamma}_{xx}(\upsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\Gamma}_{xx}(k).e^{-2j\pi\nu k}$$ ← **FFT{ $\Gamma_{xx}(\tau)$ }**

On peut montrer que :

$$\boxed{\hat{\gamma}_{xx}(\upsilon) = \frac{1}{N}\left|X(\upsilon)\right|^2}$$

Implémentation du code

$$avec\ \ X(\upsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k).e^{-2j\pi\nu k}$$

FFT{ x }

> Densité spectrale de puissance - Estimation

Méthode non paramétrique : Périodogramme modifié

On applique une fenêtre de pondération W sur le signal x de longueur N

$$\boxed{\hat{\gamma}_{xx}(\upsilon) = \frac{1}{N.U}\left|\tilde{X}(\upsilon)\right|^2}$$

$$avec\ \tilde{X}(\upsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k).W(k).e^{-2j\pi\nu k}$$

$$et\ U = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|W(k)\right|^2$$

Implémentation du code

Densité spectrale de puissance - Estimation

Méthode non paramétrique : Périodogramme moyenné (Bartlett)

consiste à moyenner le périodogramme simple en divisant le signal de longueur N en K segments de longueur L, sans recouvrement (**N=KL**).

- Découpage du signal en K segments

$$x_i(n) = x(n+iL),$$
$$n \in [0,\ldots,L-1] \; et \; i \in [0,\ldots,K-1]$$

- Estimation d'un périodogramme simple

sur chaque segment :

$$\hat{\gamma}_{xx}^{(i)}(\upsilon) = \frac{1}{L}\left|X^{(i)}(\upsilon)\right|^2$$

$$avec \;\; X^{(i)}(\upsilon) = \sum_{k=0}^{L-1} x(k+iL).e^{-2j\pi\nu k}$$

Implémentation du code

- Calcul de la moyenne des périodogrammes

$$\boxed{\hat{\gamma}_{xx}(\upsilon) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}\hat{\gamma}_{xx}^{(i)}(\upsilon)}$$

> Densité spectrale de puissance - Estimation

Méthode non paramétrique : Périodogramme moyenné et adouci (Welch)

En 1967, Welch propose deux modifications à la méthode de Bartlett.

- recouvrement des segments $x_i(n)$.
- ajout d'une fenêtre de pondération sur les séquences $x_i(n)$.

$$N = L + D(K-1)$$

Découpage du signal de longueur **N** en **K** segments de longueur **L**, chaque séquence consécutive étant décalée de **D** points (<=L) : *N = L + D(K-1)* avec *D = (1 - overlap)L* et *overlap étant le taux de recouvrement (si 0 pas de recouvrement)*

$$\hat{\gamma}_{xx}^{(i)}(\upsilon) = \frac{1}{L.U}\left|\tilde{X}^{(i)}(\upsilon)\right|^2$$

$$\text{avec } \tilde{X}^{(i)}(\upsilon) = \sum_{k=0}^{L-1} x(k+iD).W(k).e^{-2j\pi\nu k}$$

Implémentation du code

$$\text{et } U = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\left|W(k)\right|^2$$

Finalement, en fonction du périodogramme modifié :

$$\boxed{\hat{\gamma}_{xx}(\upsilon) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}\hat{\gamma}^{(i)}_{\text{periodogramme\_modifie}}(\upsilon)}$$