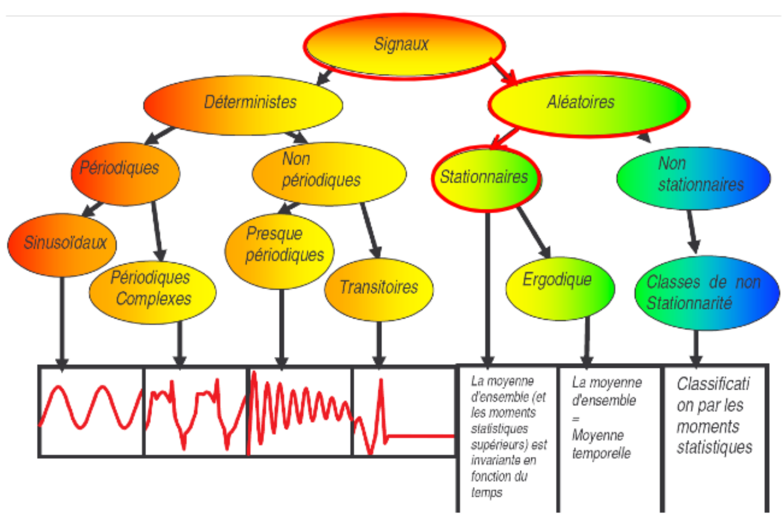
Introduction aux signaux bruités
FIPA 1
2021-2022

isabelle.quidu@ensta-bretagne.fr

Classification des signaux



Signal aléatoire

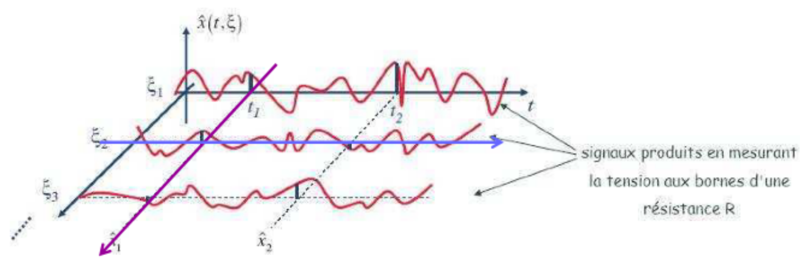
Tout signal physique (ou *naturel*) a une composante aléatoire imprévisible : parole, mesure…

Signal *Aléatoire*

fonction du temps *sujet au hasard*

$$x(t, \xi)$$

Signal aléatoire



- A $\xi = \xi_0$, $x(t, \xi_0)$ est une fonction du temps dite trajectoire ou réalisation du signal aléatoire
- A $t=t_0$ fixé, $x(\xi,t_0)$ est une fonction de ξ, aléas expérimentaux, c'est donc une variable aléatoire

Statistiques des signaux aléatoires

Statistiques d'ordre 1, *i.e.* caractérisation de la variable aléatoire $x(t_0,\xi)$: moments d'ordre 1 et 2

$$m\left(t_0\right) = E\left\{x\left(t_0,\xi\right)\right\}$$

$$\operatorname{var}\left(t_0\right) = \sigma^2\left(t_0\right) = E\left\{\left[x\left(t_0,\xi\right) - m\left(\left(t_0\right)\right)\right]^2\right\}$$

Statistiques d'ordre 2, *i.e.* caractérisation du vecteur aléatoire $\{x(t_1,\xi), x(t_2,\xi)\}$: fonction d'autocorrélation statistique

$$\Gamma_{xx}\left(t_1,t_2\right) = \left\langle x\left(t_1,\xi\right), x\left(t_2,\xi\right)\right\rangle = E\left\{x\left(t_1,\xi\right)x^*\left(t_2,\xi\right)\right\}$$

Stationnarité

« Stationnarité »

≡ pas d'évolution au cours du temps

Aussi appelée « invariance »

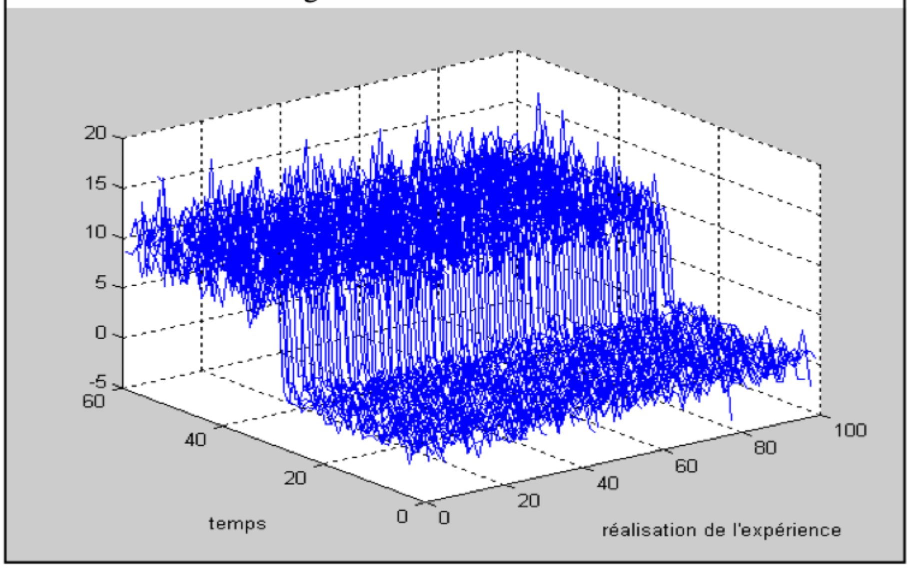
⇒ caractéristiques stochastiques indépendantes de l'origine des temps

- si les densités de probabilité ont cette propriété
  => « stationnarité au sens strict »
- si seuls les moments ont cette propriété
  => « stationnarité au sens large » en précisant l'ordre
  - ordre 1 si son espérance ne dépend pas du temps
  - ordre 2 si stationnaire à l'ordre 1 ET si l'autocorrélation (définie sur la planche précédente) ne dépend que de la différence temporelle $\tau = t_2 - t_1$, de sorte que l'autocorrélation est une fonction du temps τ:

$$\Gamma_{xx}\left(t, t-\tau\right) = E\left\{x\left(t,\xi\right)x^*\left(t-\tau,\xi\right)\right\} = \Gamma_{xx}\left(\tau\right)$$

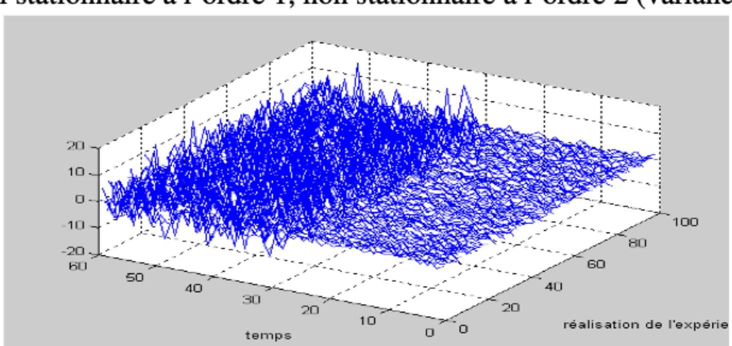
Exemple 1: STATIONNAIRE?

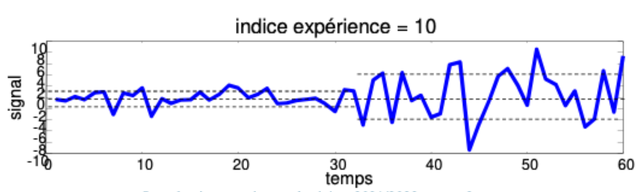
signal non stationnaire à l'ordre 1



Exemple 2: STATIONNAIRE?

signal stationnaire à l'ordre 1, non stationnaire à l'ordre 2 (variance)





Introduction aux signaux bruités – 2021/2022 – page 8

Analyse spectrale

- Un signal aléatoire (*sauf bruit blanc*) est un signal à puissance moyenne finie (énergie infinie)
- La *distribution fréquentielle* de puissance du signal aléatoire est décrite par la Densité Spectrale de Puissance (notée DSP)
- La densité spectrale de puissance $\gamma_x(f)$ est la quantité de puissance contenue dans le signal aléatoire $x(t)$ par unité de fréquence = dP/df
- La DSP est donnée en (unité signal)²/Hertz (ex: V^2/Hz ou W/Hz)

Densité spectrale $\gamma_s(f)$: propriétés et calcul

- ✓ positive
- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(f)\,df = E\left\{\left|x(t,\xi)\right|^2\right\} = \overline{P}$ puissance (statistique) moyenne

➢ Comment l'obtenir?

1. si le signal aléatoire est stationnaire à l'ordre 2, la DSP est *la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation*

   $$\gamma_x(f) = TF(\Gamma_{xx}(\tau))$$ (théorème de Wiener-Khintchine)

   NB: En pratique, DSP *estimée* à partir des seuls échantillons disponibles et sous hypothèse *d'ergodicité*(*) (corrélogramme, périodogramme)

2. si le signal aléatoire est non stationnaire à l'ordre 2, l'analyse temps-fréquence est privilégiée

Dans la suite du cours avec M. Cexus

(*) échange des propriétés temporelles et statistiques (ex: espérance remplacée par moyenne temporelle)

Bruit de mesure

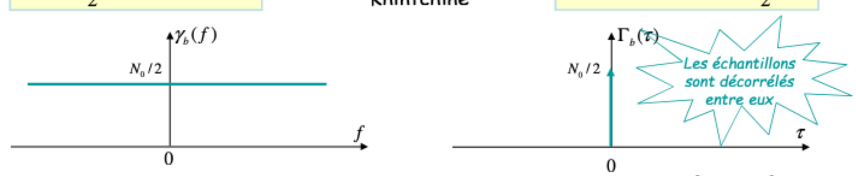
Le caractère hasardeux de la mesure peut provenir:

1. d'un capteur <u>imparfait</u> par nature :
   - Vieillissement des composants, dérive thermique sur de grandes échelles de temps…: bruit « en 1/f » (⇔ sensible en BF):
   - Courant créé par le déplacement aléatoire de porteurs de charges (électrons):
     - Bruit (blanc) de grenaille: superposition de courants impulsionnels correspondant aux charges des électrons
     - Bruit (blanc) thermique: dû à l'agitation thermique des électrons
2. du <u>contexte</u> de la mesure:
   - Nature intrinsèque du capteur : effet de la tête de lecture (grésillement) d'un tourne-disque
   - Environnement : bruit ambiant marin pour un système sonar

Bruit Blanc : théorie

- <u>Définition:</u> signal aléatoire stationnaire à l'ordre 2 dont le spectre de puissance est *constant* sur toutes les fréquences (répartition spectrale indépendante de la fréquence)
  - ✓ analogie avec la lumière blanche (composée de radiations de toutes les longueurs d'onde entre 400 et 800 nm)
- <u>Modèle mathématique:</u>

$$\gamma_b(f) = \frac{N_0}{2} \quad \forall f \in]-\infty, +\infty[\xrightarrow{\text{Théorème de Wiener-Khintchine}} \Gamma_b(\tau) = TF^{-1}[\gamma_b(f)] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

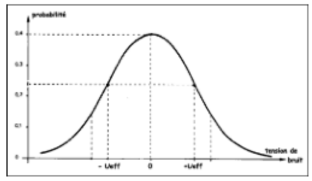


- Spectre sans raie à l'origine => sa moyenne $E\{b(t,\xi)\}$ est nulle => $\sigma_b^2 = E\left\{\left|b(t,\xi)\right|^2\right\}$
  - L'écart-type est la <u>valeur efficace</u> du bruit: $\sigma_b = b_{eff}$
- Concept fictif : sa puissance (= $\Gamma_b(0)$) est infinie (or les sig. aléatoires ont une puiss. moyenne finie)!!

Bruit Gaussien

Popularité du bruit gaussien

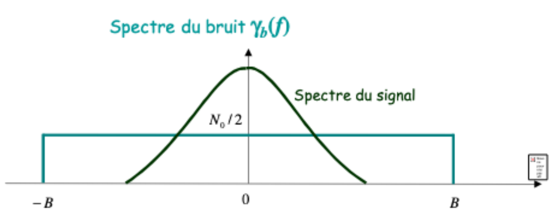
- Pour la grande majorité des bruits électroniques, la distribution statistique de la tension de bruit est une courbe en cloche (soit une distribution Gaussienne) centrée en zéro

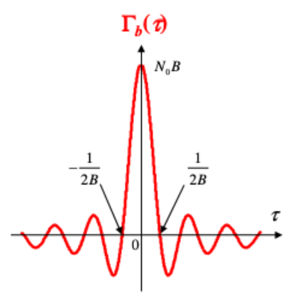


- Conformément aux propriétés de la loi Gaussienne, la probabilité que $b(t,\xi)$ soit dans l'intervalle:
  - $[-b_{eff};\ b_{eff}]$ = 0.68 soit 68% de chances
  - $[-2b_{eff};\ 2b_{eff}]$ = 0.95 soit 95% de chances
  - $[-3b_{eff};\ 3b_{eff}]$ = 0.997 soit 99.7% de chances : la tension ne dépasse quasi jamais $3b_{eff}$
  - D'où la définition de la tension de bruit crête-crête : $b_{cc} = 6b_{eff}$

Bruit blanc à bande limitée (1/2)

- Le bruit blanc n'a pas de signification physique
  - ✓ Tout bruit est associé à une mesure et un appareil de mesure possède toujours une bande passante limitée : en analogique, bruit « blanc » sur la bande passante $[-B;\ B]$ de l'appareil de mesure (bruit dit « pseudo-blanc »).
  - ✓ En numérique, par échantillonnage à f_e , bruit « blanc » limité à $B = f_e/2$.





$\boxed{\gamma_b(f) = \frac{N_0}{2} rect_{2B}(f)}$ Théorème de Wiener-Khintchine $\boxed{\Gamma_b(\tau) = TF^{-1}\left[\gamma_b(f)\right] = N_0 B \mathrm{sinc}(2\pi B\tau)}$

Bruit blanc à bande limitée (2/2)

- Spectre sans raie à l'origine => bruit centré => $\sigma_b^2 = E\left\{\left|b(t,\xi)\right|^2\right\}$
- *i.e.* la puissance moy. du bruit blanc à bande limitée est égale à sa variance
- OR $\Gamma_b(\tau) = N_0 B \operatorname{sinc}(2\pi B\tau) \Rightarrow \Gamma_b(0)(=\bar{P}) = N_0 B$
- Soit la <u>variance</u> $\sigma_b^2 = N_0 B$
- Le niveau $\frac{N_0}{2}$ de la DSP du bruit dans la bande [-B; B] est donc $\sigma_b^2 / 2B$
- Remarque :

  si ce bruit est gaussien, on a alors complètement caractérisé sa loi

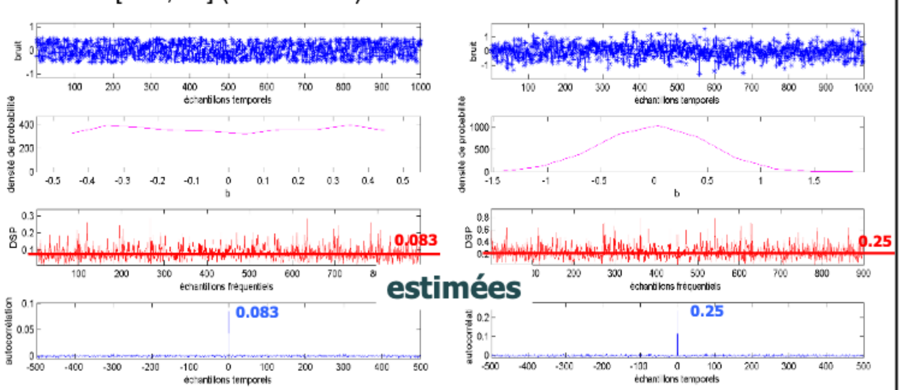
- Exemples de deux sources de bruits blancs dans un circuit:
  - En tension à cause de l'agitation thermique, les porteurs de charges s'entrechoquent et conduisent à une force électro-motrice aléatoire $b(t)$ (d'autant plus élevée que la résistance est forte): le bruit thermique est un bruit blanc à bande limitée par le montage électronique.
  - En courant : le bruit de grenaille est également blanc au moins jusqu'à 1GHz.

Bruit Blanc : pratique

Attention: en numérique, $\Gamma_b(n=0) = \frac{N_0}{2}\delta(0) = \frac{N_0}{2}$ ET $\Gamma_b(0) = E\left\{\left|b(t)\right|^2\right\} = \sigma_b^2 / f_e$

car par échantillonnage à la fréquence f_e, $B = f_e/2$ (ici, $f_e = 1\text{Hz}$)

- Cas 1: bruit blanc uniforme entre [-0.5;0.5] (var = 0.083)
- Cas 2: bruit blanc gaussien de variance 0.25



Rapport signal à bruit - RSB (1/2)

Soit $sb(t)=s(t)+b(t)$ un signal bruité défini comme la somme d'un signal utile $s(t)$ de bande B et d'un bruit $b(t)$ (perturbations…)

➢ Le **rapport signal à bruit** peut être défini comme le **rapport** des **puissances moyennes** du signal et du bruit:

$$RSB = \frac{\overline{P}_s}{\overline{P}_b} \quad \text{ou encore, en dB,} \quad RSB_{dB} = 10\log_{10}\frac{\overline{P}_s}{\overline{P}_b}$$

Rapport signal à bruit - RSB (2/2)

- Remarque 1:
  - si $b(t)$ est un bruit blanc de DSP $N_0/2$ (donc centré) gaussien (variance σ_b^2), limité par la bande B du signal utile (donc bruit *pseudo-blanc*), on peut exprimer le RSB par

$$RSB = \frac{\overline{P}_s}{\sigma_b^2} = \frac{\overline{P}_s}{N_0 B}$$

- Remarque 2: la valeur efficace reflète l'énergie par unité de temps transmise par le signal
  - Si $s(t)$ est signal déterministe $s(t)$ de période T (*): $\overline{P}_s = \frac{1}{T}\int_T \left|s(t)\right|^2 dt = s_{eff}^2$
  - Si $b(t)$ est un bruit pseudo-blanc de variance σ_b^2 : $\overline{P}_b = E\left\{\left|b(t)\right|^2\right\} = \sigma_b^2 = b_{eff}^2$

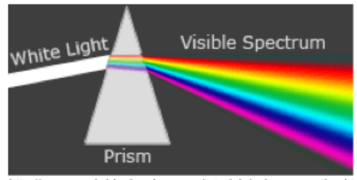
$$RSB_{dB} = 10\log_{10}\frac{\overline{P}_s}{\overline{P}_b} = 10\log_{10}\frac{s_{eff}^2}{b_{eff}^2} = 20\log_{10}\frac{s_{eff}}{b_{eff}}$$

(*) Les puissances utilisées ici sont exprimées en (unité signal)² mais le RSB est le même si l'on considère les puissances dissipatives exprimées en J/s (cas d'un quadripôle fournissant un signal $s(t)$ de valeur efficace s_{eff} à une résistance de charge R et affecté d'un bruit $b(t)$ de valeur efficace b_{eff}) car il s'agit d'un rapport de puissances.

Bruits colorés

Lorsque la lumière contient davantage de radiations d'une certaine longueur d'onde ($=c/f$), elle est colorée :

- rose/rouge si elle contient des radiations de grandes longueurs d'onde (fréquences basses)
- bleue/violette si elle contient des radiations de longueurs d'onde basses (fréquences élevées)



http://www.cambridgeincolour.com/tutorials/color-perception.htm

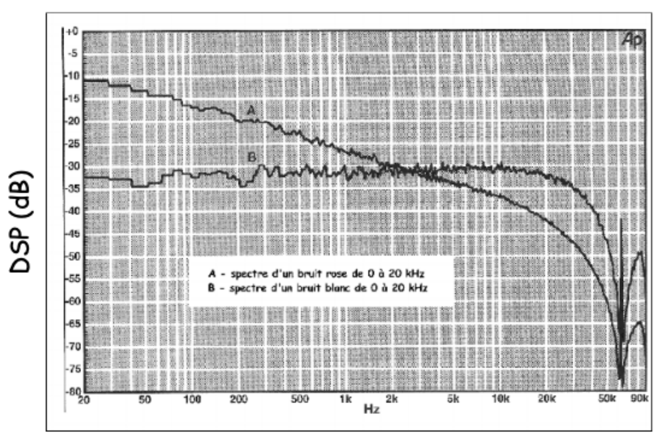
De la même façon et par analogie avec la lumière, lorsqu'un bruit traverse un « filtre », certaines composantes sont atténuées. La répartition spectrale n'est plus indépendante de la fréquence : le bruit est dit 'coloré':

- si les basses fréquences prédominent, le bruit est rose (en $1/f$) ou rouge ($1/f^2$)
- si les fréquences élevées prédominent, le bruit est bleu (en f) ou violet (en f^2)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Bruits_color%C3%A9s

Bruits colorés

Spectre d'un bruit blanc (B) et d'un bruit rose (A) dans la bande audio [20;20000]Hz

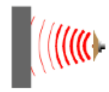


Source : http://www.ta-formation.com/acrobat-cours/bruit.pdf

Combinaison de bruits (1/6)

Exemple du bruit dans le bâtiment

- Deux types de bruit dans le bâtiment : bruit aérien (parole, musique…) et bruit solidien *ou bruit d'impact* (pas, marteau…)



- L'oreille est un organe extrêmement sensible ! Il perçoit des pressions acoustiques variant de 2.10^{-5} Pa ($=p_{ref}$) à 20 Pa, l'échelle varie donc de 1 à 1 000 000 !

Combinaison de bruits (2/6)

Le niveau de bruit acoustique dans l'air est exprimé en dB par rapport à un niveau de référence tel que:

$$p_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{p}{p_{ref}}\right) \quad \text{où} \quad p_{ref} = 20\mu Pa$$

- Pression acoustique: variation par rapport à la pression d'équilibre p_{ref} au passage de l'onde sonore

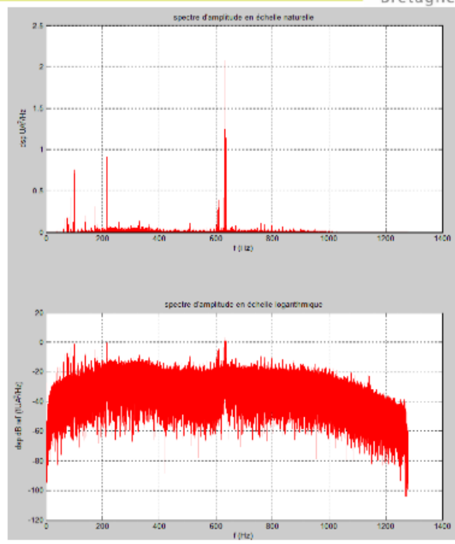
- Avantages du dB
  1. permet de gérer les problèmes de dynamique
  2. correspond assez bien à la manière dont notre oreille entend et compare les sons : à chaque fois qu'un bruit est amplifié d'un facteur 2, l'oreille ne le perçoit pas deux fois plus fort mais amplifié d'un incrément de 3dB (voir plus loin)

Combinaison de bruits (3/6)

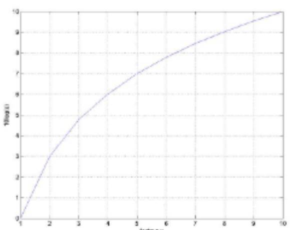
Avantages du dB

1. permet de gérer les problèmes de dynamique

   Illustration ci-contre en acoustique sous-marine



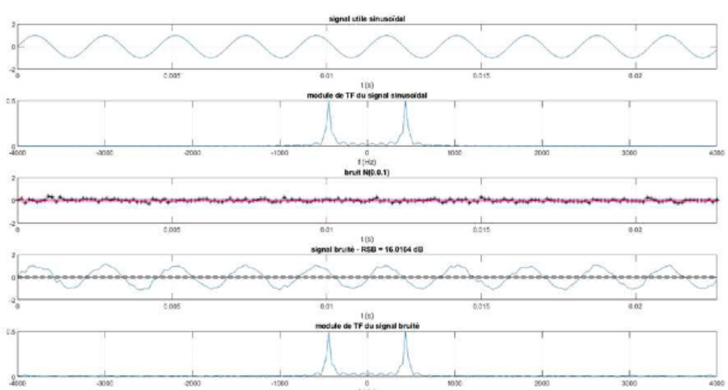
2. Perception auditive:



Introduction aux signaux bruités – 2021/2022 – page 23

Application: Sinusoïde avec bruit blanc additif gaussien de puissance croissante

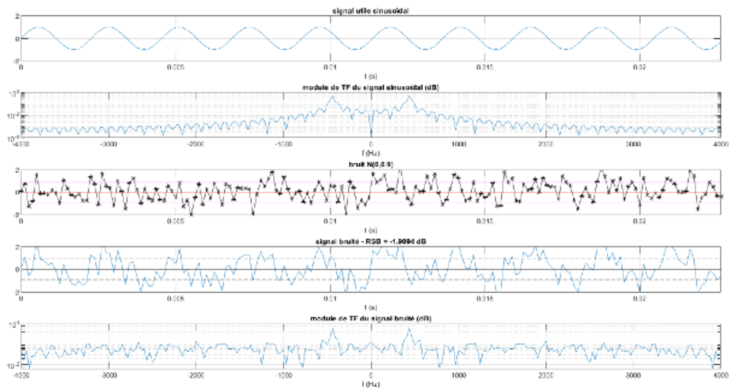
Spectres d'amplitude en valeur naturelle



Introduction aux signaux bruités – 2021/2022 – page 24

Sinusoïde avec bruit blanc additif gaussien de puissance croissante

Spectres d’amplitude en dB et audio associée



Combinaison de bruits (4/6)

➢ Que donne <u>l’addition</u> de deux sources de niveau p_{dB}^{a} et p_{dB}^{b} ?

Lorsque deux sources produisent des sons en un point, ce sont les intensités acoustiques ou les carrés des pressions acoustiques qui s’ajoutent, et non pas les niveaux sonores en décibels!

- Pour la première source, $p_{dB}^{a} = 20\log_{10}\left(\frac{p_a}{p_{ref}}\right)$
- Pour la deuxième, $p_{dB}^{b} = 20\log_{10}\left(\frac{p_b}{p_{ref}}\right)$
- La combinaison de pression est : $p_{tot}^{2} = p_a^2 + p_b^2$
- Si $p_a = p_b$, $p_{dB}^{tot} = 10\log_{10}\left(\frac{2p_a^2}{p_{ref}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{p_a^2}{p_{ref}}\right) + 10\log_{10}\left(2\right) = p_{dB}^{a} + 3$

Combinaison de bruits (5/6)

➢ Plus généralement, que donne l'addition de deux niveaux sonores?

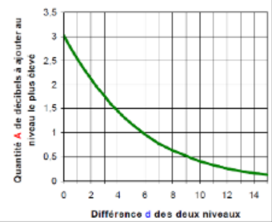
Table donnant le résultat de l'« addition » de deux niveaux sonores exprimés en décibels

⇒ *Quantité* ***A*** *de décibels gagnés, connaissant la différence arithmétique* ***d*** *des deux niveaux.*

d en dB	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A en dB	**3**	**2.5**	**2.1**	**1.8**	**1.5**	**1.2**	**1**	**0.8**	**0.6**	**0.5**	**0.4**	**0.33**	**0.26**

⇒ Pour un écart de plus de 10dB, le bruit le plus faible a une contribution négligeable, il est **masqué** par le bruit le plus fort

⇒ Relation non linéaire

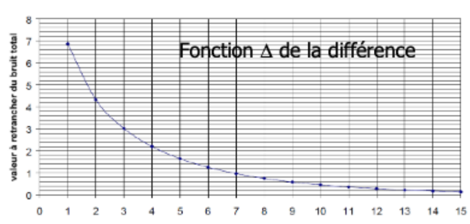


Combinaison de bruits (6/6)

➢ Que donne la soustraction de deux niveaux sonores?

- *Cas de mesure indirecte d'un signal de niveau* p_{dB}^{a} *(machine seule) dans un bruit de fond de niveau connu* p_{dB}^{b} *(bruit ambiant)*
- p_{dB}^{tot} *est la mesure du signal dans le bruit de fond (machine dans le bruit ambiant)*

$$p_{dB}^{a} = p_{dB}^{tot} - \Delta\left(p_{dB}^{tot} - p_{dB}^{b}\right)$$



Faible (resp. *forte*) *différence*

⇔

fort (resp. *faible*) *impact du bruit de fond* (lien avec le RSB)