POUGNES PHOENIX TSP

SIG 3101 - Probabilités

Rappels, précisions pour la suite

Notations

- En général, sauf précision supplémentaire, on utilisera les notations usuelles du cours ou celles précédemment employées.
  Par exemple, P désignera toujours une probabilité sur un univers Ω, A,B,C... des événements (parties de Ω), $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω, n un entier de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, X,Y des variables aléatoires...
- On notera A^c le complémentaire d'un événement A de l'univers Ω.

Premières définitions

Incompatibilité : [1] $A \cap B = \varnothing$

Indépendance : [2] $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Indépendance mutuelle : $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants ssi :

$$\forall J_{fini} \subset I, P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Remarque. *Les notions d'indépendance mutuelle et d'indépendance deux à deux sont différentes. L'indépendance "tout court" désigne souvent par abus de langage l'indépendance mutuelle, attention.*

Négligeabilité : $P(A) = 0$

Événement presque sûr : $P(A) = 1$

Probabilité uniforme sur Ω *fini* :

$$\begin{array}{ccc} P(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ A & \mapsto & \dfrac{cardA}{card\Omega} \end{array}$$

Dénombrabilité : Un ensemble E est dénombrable ssi il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.

Probabilités conditionnelles

Définition : Soit un événement B tel que P(B)>0.
On définit, pour tout événement A, la probabilité [3] conditionnelle de A sachant B par :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Théorème de Bayes (première forme) : Il s'agit d'une simple réécriture du dernier résultat, exprimant $P(A|B)$ en fonction de $P(B|A)$ afin **d'inverser le conditionnement**.
Mais en pratique, c'est la 2$^{\text{ème}}$ forme du théorème qui est utilisée.

1. Dans ce cas, on a de plus $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, soit une propriété sur la somme.
(Si A et B sont compatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$).
2. L'indépendance implique donc des relations sur le produit. Ne pas confondre avec l'incompatibilité.
3. On démontre en effet que cela définit une application qui est une probabilité dans le sens que l'on donnera ensuite.

Inversion du conditionnement - Probabilités totales

Formule des probabilités totales : Pour $(C_i)_{i=1}^n$ un système complet d'événements[4] (non vides) :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(A|C_i)$$

Théorème de Bayes (forme pratique) : Avec le système complet précédent :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(C_i|A) = \frac{P(C_i)P(A|C_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(C_j)P(A|C_j)}$$

Remarque. *Dans les exos sur le conditionnement, le choix du système complet est souvent déterminant. S'il n'est pas amené naturellement par l'énoncé ou les réponses précédentes, penser au système* $\{B, B^c\}$, *suffisant dans les cas les plus simples.*

Éléments de base en probabilités

Définition (Tribu)**.** *Par proposition, une tribu* $\mathscr{A}$ *sur* Ω *peut être définie comme une partie de* $P(\Omega)$ *(famille de parties de* Ω*) telle que :*
- $\Omega \in \mathscr{A}$ *ou* $\varnothing \in \mathscr{A}$
- $\forall A \in \mathscr{A}, A^c \in \mathscr{A}$
- $\forall (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ *ou :* $\forall (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

Remarque. $P(\Omega)$ *est une toujours une tribu, et en probabilités* ***finies ou dénombrables****, l'espace probabilisé étudié sera toujours défini à partir de* $P(\Omega)$*, d'où son importance.*

Définition (Espace probabilisable, probabilisé)**.** *À partir de* Ω*, on définit :*
- *Espace probabilisable : Couple* $(\Omega, \mathscr{A})$ *avec* $\mathscr{A}$ *tribu sur* Ω
- *Espace probabilisé : Triplet* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *avec* P *probabilité sur* $\mathscr{A}$

Définition (Probabilité)**.** *Par proposition,* $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ *est une probabilité sur* $\mathscr{A}$ *ssi :*
- $\forall A \in \mathscr{A}, P(A) \in [0,1]$
- $P(\Omega) = 1$
- *L'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
  - $\forall A, B \in \mathscr{A} : A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - $\forall (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}} : (\forall i, j \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \varnothing) \Rightarrow P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

Proposition (Continuité monotone)**.** *Soit* $(A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ *:*
- $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow P(\bigcup_{n\in N} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$ *(croissance)*
- $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow P(\bigcap_{n\in N} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$ *(décroissance)*

4. C'est une partition de Ω : $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i = \Omega$ et $\forall i, j \in [\![1,n]\!] : i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \varnothing$

Variables aléatoires scalaires et multidimensionnelles

Variables aléatoires discrètes

Définition (Variable aléatoire)**.** *C'est une application* $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (E, \varepsilon)$ *mesurable.*

Une variable aléatoire peut être réelle (si $E = \mathbb{R}$*), complexe, vectorielle, multidimensionnelle ou multivariée, ou encore une suite de variables aléatoires.*

Notation (Image réciproque)**.**

$$\forall A \in E, [X \in A] = X^{-1}(A)$$

Définition (Loi de probabilité P_X d'une variable aléatoire X)**.** *C'est la mesure de probabilité suivante :*

$$P_X : \begin{array}{ccc} \varepsilon & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P([X \in A]) \end{array}$$

Remarque. *On note plutôt* $P(X \in A)$ *pour alleger.*
Aussi : $P_X(x) = P_X(x) = P(X = x) = p_x = P(X \in \{x\})$

Notation (Pour des variables suivant la même loi)**.** *Si* X *et* Y *sont des v.a. telles que* $P_X = P_Y$*,*
alors[5] *on notera* $X \sim Y$

Voici une liste de lois de probabilité à connaître **absolument**, et qui peuvent potentiellement servir dans tous les exos. Notamment, le fait que **la somme d'une loi de probabilité vaut 1** simplifie énormément de calculs *a priori* difficiles.

Loi uniforme discrète : Si $n = cardE$:

$$\forall x \in E, P(X = x) = \frac{1}{n}$$

Loi de Poisson de paramètre λ : (notée parfois $\mathscr{P}(\lambda)$)

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Loi binomiale de paramètres n et p : (notée $\mathscr{B}(n,p)$)

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Loi de Bernoulli de paramètre p : Cette loi est définie par[6]

$$\begin{cases} P(X = 0) & = 1 - p \\ P(X = 1) & = p \\ P(X = x) & = 0 \qquad sinon \end{cases}$$

5. On ne peux pas en déduire que X = Y, erreur à ne pas commettre.
6. En résumé : $\forall x \in \mathbb{R}, P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$.
Cela doit vous rappeler la loi binomiale.

Remarque (Exo à maîtriser). *Si* $(X_i)_{i=1}^n$ *est une famille de v.a. de Bernoulli de paramètre p, indépendantes*[7] *et identiquement distibuées*[8][9]*, alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{B}(n,p)$$

Loi géométrique de paramètre p : (notée $\mathscr{G}(p)$) [10]

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

Approximation de Poisson : Soit (X_n) une suite de v.a. telle que
$\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim \mathscr{B}(n,p_n)$, où (np_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors (X_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathscr{P}(\lambda)$$

i.e.

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Variables aléatoires continues = Variables aléatoires à densités

Définition (Fonction de répartition).

$$F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P(X \leq x) \end{array}$$

Proposition. *Par définition,* F_X *est croissante.*
De plus, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

7. Deux v.a. X_i et X_j sont dites indépendantes ssi
$\forall (k,k'),(i,j), P(X_i = k \cap X_j = k') = P(X_i = k)P(X_j = k')$
8. Deux v.a. X_i et X_j sont dites identiquement distribuées ssi
$\forall k,(i,j), P(X_i = k) = P(X_j = k)$
9. L'abréviation i.i.d est souvent employée pour désigner les v.a. indépendantes et identiquement distribuées.
10. Il s'agit de la seule loi de probabilité discrète sans mémoire, sachant que la seule loi de probabilité continue sans mémoire est la loi exponentielle.

Définition (Densité de probabilité). *Si X est μ-mesurable, la densité de probabilité f_X est l'application intégrable telle que :* $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mu(dt)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = F_X'(x)$

Voici une liste de densités de probabilité à connaître **absolument**, et qui peuvent potentiellement servir dans tous les exos. Notamment, le fait que **l'intégrale d'une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ vaut 1** simplifie énormément de calculs a priori difficiles.

Loi uniforme continue : $X \sim \mathscr{U}([a, b])$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

Loi exponentielle de paramètre λ : $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$$

Définition (Densité conditionnelle).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

Proposition (Changement de variables aléatoires).

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| f_{X,Y}(x, y) \qquad f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}\right|} f_{X,Y}(x, y)$$

Espérance

Définition.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx$$

Remarque (Linéarité).

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Proposition (Théorème du transfert).

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)dx$$

Remarque (L'espérance d'une indicatrice est une probabilité).

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$$

Variance[11]

Définition. $V(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Définition (Covariance)**.** *Cov(X,Y)* $=$[12] $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

$$\textit{Important : } V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$$

Remarque. *Si X et Y sont indépendantes : Cov(X,Y) = 0, alors :*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Les réciproques sont fausses.

Mode

Définition (Mode)**.** *Pour une variable aléatoire X,*

Si X est discrète : *C'est la valeur de k pour laquelle la loi de probabilité est la plus grande.*

Si X est continue : *C'est la valeur de x pour laquelle la densité de probabilité est maximale.*

Médiane

Définition (Médiane)**.** *C'est la valeur m pour laquelle :*

$$P(X \leq m) = P(X \geq m) = \frac{1}{2}$$

Caractéristiques de la loi normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Une v.a. suivante une loi normale est appelée une gaussienne.

Densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Moyenne :

$$\mathbb{E}(X) = \mu = moyenne = mode = médiane$$

Variance :

$$\sigma^2 = V(X)$$

Loi normale centrée $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

Loi normale réduite $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$:

$$V(X) = 1$$

Loi normale centrée réduite :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Exemple important, tombe fréquemment.

---

11. La variance V(X) est le carré de l'écart-type σ.
12. On a aussi : $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$

Courbe de la densité : C'est une gaussienne (cloche).

Symétrie : On a une symétrie par rapport à l'axe $x = \mu$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(\mu - x) = F_X(\mu + x)$$

i.e. (aire [13] sous la courbe) :

$$\mathscr{A}_{x \geq \mu} = \mathscr{A}_{x \leq \mu} = \frac{1}{2}$$

Forme : Plus σ est grand, plus la gaussienne est aplatie. En effet :

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f_X(x)dx = 0.7, \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f_X(x)dx = 0.95, \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f_X(x)dx = 0.997$$

Remarque. *Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont* ***indépendantes****, alors :*

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Vecteurs gaussiens

Définition. *Soit $(X_i)_{i=1}^n$ une famille de v.a.*

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ *est un vecteur gaussien ssi toute combinaison linéaire des X_i est une v.a. gaussienne* [14].

Remarque. *Dans ce cas, on note $X \sim \mathcal{N}(M, \Sigma)$, avec :*

$M = \mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix}$

$\Sigma = C_X = Var(X) = $ *matrice de variance-covariance* $= \left(\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^T] \right)_{1 \leq i,j \leq n}$

avec, $\forall i, j \in [\![1, n]\!] : i \neq j \Rightarrow Var(X)_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$

Proposition. *Si X est gaussien, alors les v.a. marginales X_i sont gaussiennes. Réciproque fausse.*

Proposition. *Si les v.a. marginales X_i sont gaussiennes* ***et indépendantes****,*
alors X est gaussien et Σ est diagonale.

Proposition. *Si X et Y sont des vecteurs gaussiens tels que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\Sigma_X = \Sigma_Y$, alors $X \sim Y$.*

Proposition. *Si X est gaussien et que Σ est* ***définie positive*** [15]*, alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_{M,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[\frac{-(x - M)^T \Sigma^{-1} (x - M)}{2}\right]$$

Proposition. *Si X est gaussien, alors pour tout $i,j \in [\![1, n]\!]$, X_i et X_j sont non corrélées* [16].

13. Car pour toute densité de probabilité, $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$
14. i.e. suivant une loi normale
15. A est définie positive ssi : $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^t A x \geq 0$, avec égalité ssi $x = 0$.
16. i.e. $Cov(X_i, X_j) = 0$

Inégalités importantes [17]

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebichev)**.**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

Proposition (Inégalité de Markov)**.**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$$

Espérance conditionnelle

Définition. *L'espérance conditionnelle de X sachant Y est notée* $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}_Y(X)$ *et est une variable aléatoire fonction de Y.*

Méthode (Cas discret)**.** *Pour* $n \in \mathbb{Z}$*, calcul de* $\mathbb{E}_{Y=n}(X) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} kP_{Y=n}(X = k)$

- *Bayes :* $P_{Y=n}(X = k) = \dfrac{P(Y = n, X = k)}{P(Y = n)} = \dfrac{P(Y = n \cap X = k)}{P(Y = n)}$
- *Puis, de cette expression pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*, déduire une expression "en remplaçant n par Y"*

Méthode (Cas continue [18])**.** *Pour* $y \in \mathbb{R}$*, calcul de* $\mathbb{E}_{Y=y}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x)dx$

- *Bayes :* $f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$
- *Puis, de cette expression pour tout* $y \in \mathbb{R}$*, déduire une expression "en remplaçant y par Y"*

Convergence des suites de variables aléatoires

Soit (X_i) une suite de v.a. et X une v.a. (limite potentielle de (X_i)).

Convergence en loi

Proposition. *On note* [19] *:* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} X$*. Obtenue si :*

- *Si pour les fonctions de répartitions :*
  $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$
- *Si* [20] *pour toute* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, C^0$*, bornée :*
  $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$

Convergence en probabilité

Définition.

$$\forall \varepsilon > 0, P(||X_n - X|| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Équivalent à : $\forall \varepsilon > 0, P(||X_n - X|| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*. On note* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P.} X$

17. X,Y sont toujours des v.a., discrètes ou continues selon le contexte.
18. Soyez convaincus de la parfaite équivalence des deux démarches.
La formule de Bayes doit vous évoquer tout de suite le conditionnement.
19. CF page 4. En gros, Cela signifie que la convergence s'applique aux lois de probabilités
20. C'est même un ssi.

Convergence presque sûrement

Définition.

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

Équivaut à une convergence simple sauf sur un ensemble de mesure nulle. On note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P.S.} X$

Remarque. *Cv p.s. ⇒ Cv en proba ⇒ Cv en loi.*

Loi des grands nombres

Proposition (Loi **faible** des grands nombres)**.** *Soit* (X_i) *une suite de v.a.i.i.d*[21] *:*

$$\left(\mathbb{E}(X_n^2) < \infty\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P.} \mathbb{E}(X_1) \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathbb{E}(X_1) \end{cases}$$

Proposition (Loi **forte** des grands nombres)**.** *Soit* (X_i) *une suite de v.a.i.i.d :*

$$(\mathbb{E}(|X_1|) < \infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)\right)$$

$\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ *signifie en fait que* X_1 *est intégrable.*

Théorème centrale limite

Proposition. *Soit* (X_i) *une suite de v.a.i.i.d telle que :*

$$\begin{cases} \exists m \in \mathbb{R}, & \forall i \in \mathbb{N}, & \mathbb{E}(X_i) = m \\ \exists \sigma \in \mathbb{R}, & \forall i \in \mathbb{N}, & V(X_i) = \sigma^2 \end{cases}$$

Alors :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathscr{N}(0,1)$$

Simulation sur un ordinateur

L'ordinateur ne "maîtrise" rien d'autre qu'une loi de probabilité uniforme sur [0,1].
Si on pose $Y = F_X^{-1}(U)$, avec : $\begin{cases} U & \sim \mathscr{U}_{[0,1]} \\ X & v.a. \end{cases}$ Alors : $Y \sim X$

21. Variables Aléatoires Indépendantes et Identiquement Distribuées. Voir notes en page 4 pour rappel.