POUGNES PHOENIX TSP

SIC 3601 - Théorie du signal

Notations, précisions pour la suite

Dans toute la suite, on notera $x(t)$ (en minuscules) un signal dépendant d'un paramètre (souvent le temps t), $X(f)$ sa transformée de Fourier (en majuscules) (dont le paramètre sera souvent la fréquence f), x^* le conjugué de x ...

La rigueur mathématiques sera plus ou moins respectée : les hypothèses des théorèmes seront en gros vérifiées dans les exos mais il n'est pas nécessaire d'en faire mention dans les copies (et dans cette fiche non plus du coup).

Caractérisation des signaux

Définition (Signal - Théorie du signal)**.** *C'est une grandeur (physique ou non qui contient une information), et qui dépend d'un paramètre (souvent le temps t ou la fréquence f). On dit qu'un signal est à n dimensions s'il dépend de n paramètres.*

Son traitement, c'est l'ensemble des éléments mathématiques présentés dans ce cours afin d'extraire l'information intéressante du signal. Cela nécessite une transformation en général[1].

Discipline à l'interface entre les maths appliquées, des sciences de l'ingénieur, de la physique...

Un signal peut être à temps ou amplitude discret ou continue.

- **Analogique** : temps et amplitude continus
- **Échantillonné** : temps discret, amplitude continue
- **Quantifié** : temps continu, amplitude discrète
- **Numérique** (ou digital[2]) : temps et amplitude discrets.
  On étudiera surtout des signaux échantillonnés

Signaux déterministes - aléatoires

Définition (Signal déterministe)**.** *Représenté par une fonction connue → Analyse classique.*

Définition (Signal aléatoire)**.** *Représenté par une variable aléatoire inconnue → Probabilités. Représenterons le plus gros des signaux que l'on va étudier.*

1. #Fourier, même si l'intégration sur $\mathbb{R}$ (caractérisation globale) et la difficulté de synthèse à cause d'irrégularités locales notamment, limitent cette transformation. Pense à Eisenberg, et il existe d'autres représentation.
2. Mais ce terme est parfois aussi utilisé pour désigné un signal échantillonné... Faire attention aux abus de langages.

Transformation de Fourier

Définition (Transformation de Fourier)**.** *On définit les différentes transformés suivantes :*

Transformée à temps continu : $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2i\pi ft}dt$, *d'inverse* $x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{2i\pi ft}df$

Transformée à temps discret : $X(\tilde{f}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi fn}$, *d'inverse* $x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\tilde{f})e^{2i\pi fn}d\tilde{f}$

Transformée discrète : $X_k = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{k}{N}n}$, *d'inverse* $x_n = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} X_k e^{2i\pi \frac{k}{N}n}$

Remarque (Série de Fourier)**.** *Pour les signaux T-périodiques, on a de manière analogue :*

$$X_k = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)e^{-2i\pi k\frac{t}{T}}dt,\ d'inverse\ x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi k\frac{t}{T}}$$

Propriétés importantes :

Linéarité : Les différentes transformées de Fourier sont linéaires.

Symétrie : $\mathrm{TF}[x(t)^*] = X(-f)^*$

Théorème du retard, modulation : On a les propriétés duales[3] suivantes :

Théorème du retard : $\mathrm{TF}[x(t-t_0)] = e^{-2i\pi f_0 t}X(f)$

Modulation : $\mathrm{TF}\left[e^{2i\pi f_0 t}x(t)\right] = X(f-f_0)$

Changement d'échelle : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{TF}[x(at)] = \frac{1}{|a|}X(f/|a|)$

Dérivation : $\mathrm{TF}\left[\dfrac{dx(t)}{dt}\right] = 2i\pi f X(f)$

Convolution : En notant $x(t) * y(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(s)y(t-s)ds$, on a :

$\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] = X(f)Y(f)$ et $\mathrm{TF}[x(t)y(t)] = X(f) * Y(f)$

Théorème de Parseval : Pour passer des propriétés temporelles aux fréquentielles :

$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$, où E_x définit l'énergie[4] du signal x.

On définit aussi la puissance moyenne de x par $P_x = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int\limits_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$

Pour un signal périodique, P_x correspond en fait à la valeur moyenne sur une période.

Définition - Proposition (Impulsion de Dirac δ)**.** *En gros, on va l'utiliser comme une fonction nulle partout sauf en 0, et vérifiant les propriétés suivantes :*

$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_{\mathbb{R}} \delta(s-a)ds = 1$

$\delta(s) * x(s) = x(s)$

$x(s)\delta(s-a) = x(a)\delta(s-a)$

3. Dans le sens d'une correspondance entre les domaines temporel et fréquentiel via la transformée de Fourier
4. Sans unité ans ce cours. Mathématiquement, un signal est dit d'énergie finie s'il est $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$