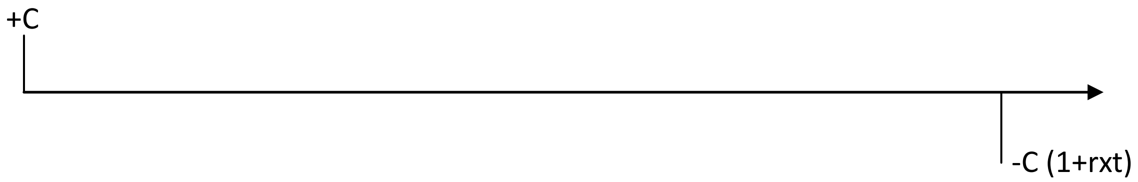
Mathématiques financières

Chapitre 1 : Les taux d'intérêts

Période de référence : période sur laquelle le taux de l'opération est défini.

I/ Le cas de l'emprunt

Dans le cas d'un emprunt d'un capital C au taux d'intérêt r entre les dates t=0 et t=T avec un remboursement du capital et des intérêts en une seule fois à la date final T.



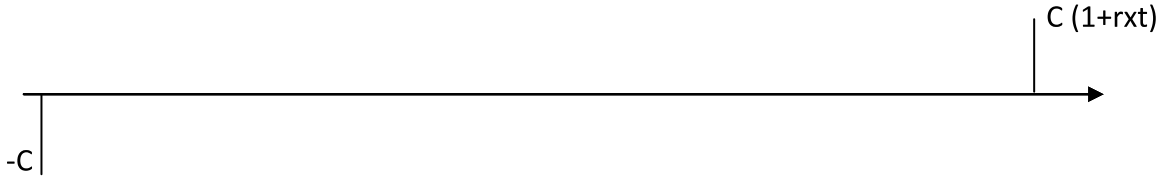
Formule intérêts à verser : C x r x t

Exemple : Emprunt de 1000 EUR sur 6 mois à un taux d'intérêt mensuel r=0.5 %

I= C x r x t = 1000 x 0.5% x 6 = 30

II/ Le cas du placement

Dans le cas du prêt ou du placement d'un capital C au taux r entre les dates t=0 et t=T, le digramme des flux est symétrique à celui de l'emprunt.



III/ Valeur acquise et taux de rendement arithmétique

a) La valeur acquise

Valeur acquise : montant final (intérêts et capital) récupéré à l'échéance de l'opération financière

Formule Vacq = C(1+rxt)

b) Le taux de rendement arithmétique

Taux de rendement arithmétique : permet de répondre à la question suivante :

Soit le placement d'un capital Co donnant lieu à un flux C1 (vacq) à la fin d'une durée T ; quel est le taux de rendement annuel qui aurait permit d'obtenir ce résultat dans le cas où les intérêts sont calculés selon la méthode des intérêts simple ?

Formule : si C1 = Co (1+r x t) alors $r = \frac{\text{C1}-\text{Co}}{\text{C0 x t}}$

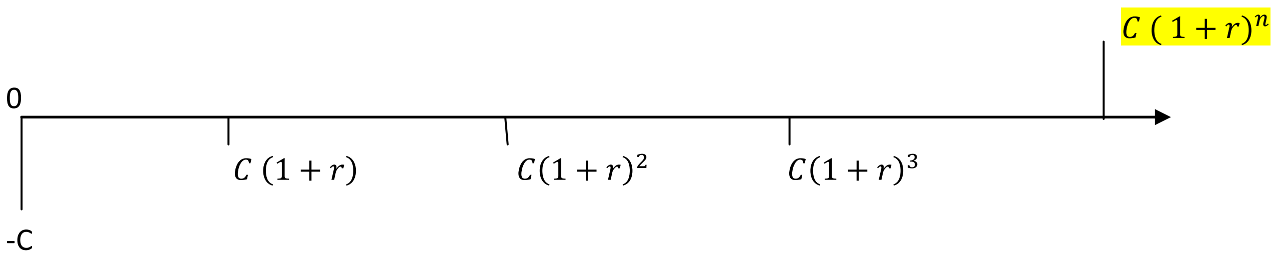
IV/ Principe des intérêts simples

La méthode des intérêts simple est utilisée de manière usuelle pour des opérations de durée inférieure à un an

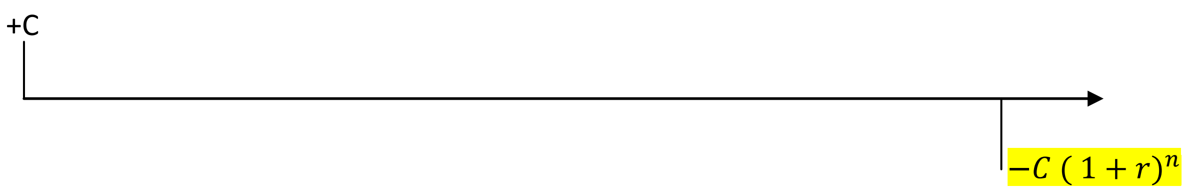
V/ Le principe des intérêts composés

Supposons un capital C placé à un taux d'intérêt r pendant n périodes ; les intérêts sont calculés à la fin de chaque période, ajoutés chaque fois au capital (on appelle ça la capitalisation) et produisent à leur tour des intérêts au même taux r.

Cas du placement :



Cas du prêt :



VI/ Valeur acquise et taux de rendement actuariel

a) La valeur acquise

La valeur acquise est toujours égale au montal final récupéré à l'échéance de l'opération (capital et intérêts)

Formule : Vacq = $C(1+r)^n$

Exemple : Dans le cas d'un placement de 1000 EUR sur 3 ans au taux de 4 %. Quelle est la valeur acquise de cette opération ? Quel est le montant des intérêts ?

Vacq = $1000\ (1+4\ \%\ )^3 = 1124.36$

Intérêts : 1124.36-1000= 124.36

b) Le taux de rendement actuariel

Il permet de répondre à la question suivante :

Soit le placement d'un capital C0 donnant lieu à un flux terminal C1 à la fin d'une période d'une durée T ; quel est le taux de rendement qui permet d'obtenir ce résultat dans le cas où les intérêts sont calculés selon la méthode des intérêts composés ?

Formule : Si $\mathrm{C1} = \mathrm{C0}(1+r)^n\ alors\ \ r = \ (C1/C0)^{1/n} - 1$

VII/ Les équivalences

Deux taux sont équivalents sur une durée T s'ils conduisent au même flux terminal C1, pour le même capital placé C.

Ainsi, on peut se donner le taux actuariel pour le calcul des intérêts composés et calculer le taux arithmétique équivalent à ce taux actuariel.

Exemple n°1 : Placement Co= 1000 EUR sur 3 ans au taux actuariel de 4%, ne donnant lieu à aucun flux avant son échéance. Quel est le taux équivalent ?

Vacq selon méthode des intérêts composés : $C1 = 1000(1+4\%)^3 = 1124.86$

Pour obtenir la même Vacq en utilisant la méthode des intérêts simples :

Rendement équivalent : $r = \frac{\mathrm{C1-Co}}{\mathrm{C0\ x\ t}} = 0.0416$

Le taux arithmétique équivalent est de 4.16 %

Exemple n°2 : Placement de 100 EUR sur 2 ans au taux arithmétique de 10 %. Quel est le taux actuariel équivalent ?

Vacq = 100 (1 + 0.1 x 2) = 120

Pour obtenir la même Vacq en utilisant la méthode des intérêts composés :

Rendement équivalent : $r = (C1/C0)^{1/n} - 1$ = 0.954

Le taux actuariel équivalent est de 9.54 %

Chapitre 2 : Principes d'actualisation et de capitalisation

I/ Les opérations à plusieurs flux

Dans l'analyse des opérations à plusieurs flux, le temps est décomposé en période de MEME DUREE, chacune de ces périodes donnant lieu à une rentrée ou une sortie d'argent nette unique.

II/ Les principes d'actualisation et la valeur présente

a) Le principe d'actualisation

- NB : Pour pouvoir comparer 2 projets ne nécessitant pas le même investissement, il faut actualiser les flux.

Pour actualiser deux séries de flux A et B : remplacer les différents flux des différentes périodes par des flux se produisant tous *aujourd'hui (en EUR d'aujourd'hui)*, puis calculer la somme algébrique de ces flux se produisant tous à la date initiale et caractériser chaque investissement par le résultat ainsi obtenu.

Exemple n°1 : Comparons 2 investissements différents caractérisés par des flux distincts à des périodes différentes. Lequel de ces investissement est préférable ?

	0	1	2	3	4
A	-500	100	150	200	250
B	-350	250	100	75	125

$$A = -500 + \frac{100}{1+r} + \frac{150}{(1+r)^2} + \frac{200}{(1+r)^3} + \frac{250}{(1+r)^4}$$

$$B = -350 + \frac{250}{1+r} + \frac{100}{(1+r)^2} + \frac{75}{(1+r)^3} + \frac{125}{(1+r)^4}$$

Exemple n°2 : Le 01/07/2005 : souscription d'un emprunt imposant au particulier de rembourser 2000 EUR au 01/07/2007. Il souhaite rembourser de façon anticipée dès aujourd'hui.

Sachant que le taux annuel de l'emprunt est de 3 %, à combien s'élève le montant du remboursement anticipé ?

$$\text{Valeur présente} = \frac{2000}{(1+3\%)^2} = 1885.19\ EUR$$

b) La valeur présente d'une séquence de flux

Considérons un investissement générant une séquence de flux telle que {F0, F1, F2 …. Fn}

La valeur présente ou valeur actuelle (VP) de cette séquence de flux est donnée par la formule suivante :

$$\text{VP} = F0 + \frac{F1}{1+r} + \frac{\text{F2}}{(1+r)^2} + \frac{\text{F3}}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{\text{Fn}}{(1+r)^n}$$

Dans certain cas, le calcul peut être simplifié en utilisant les propriétés de la suite géométrique :

Formule :

$$remboursement\ constant * \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Exemple : Emprunt d'un montant X, capacité de remboursement de 1000 EUR par an sur une période de 10 ans à un taux annuel de 5%.

Séquence de flux :

$$\text{X} = \frac{1000}{1+5\%} + \frac{1000}{(1+5\%)^2} + \frac{1000}{(1+5\%)^3} + \cdots + \frac{1000}{(1+5\%)^{10}}$$

Simplification par la suite géométrique :

$$X = 1000 * \frac{1-(1+5\%)^{-10}}{5\%} = 7721{,}73\ \text{EUR}$$

III/ VNP ou VAN

Dans le cas de l'investissement, on emploie le terme de VNP (valeur nette présente) ou VAN (valeur actuelle nette)

Exemple : Calculez la VNP de l'investissement en utilisant un taux d'actualisation de 10 %.

PERIODES	0	1	2
FLUX	-200	100	200

$$\text{VNP} = -200 + \frac{100}{1+10\%} + \frac{200}{(1+10\%)^2} = -200 + 71 + 165{,}2 = 56{,}20$$

VNP = 56,20 >0. Cet investissement est rentable car la VNP>0

Un investissement sera retenu s'il produit une VNP positive. Entre deux investissements, on préférera celui dont la VNP est la plus élevée.

Règle n°1 : Un investissement ne doit être retenu que si sa VNP est positive

Règle n°2 : Entre plusieurs investissements, on doit retenir celui dont la VNP est la plus élevée.

IV/ Le taux de rentabilité interne (TRI)

On retiendra un projet si le TRI est supérieur au taux actuariel

$$\text{Formule du TRI } = r1 - \frac{VAN1 - 0}{VAN1 - VAN2} * (r1 - r2)$$

Exemple : Considérons l'investissement suivant :

PERIODES	0	1	2
FLUX	-200	80	280

Lorsqu'on ne dispose ni de calculatrice ni de tableur, le calcul du TRI se fait par approximation successive. On encadre le TRI par 2 valeurs proches : l'une trop grande (VNP < 0) et l'autre trop petite (VNP > 0). On passe par une interpolation linéaire.

R1 $\longrightarrow$ VAN1 > 0

TRI = 0

R2 $\longrightarrow$ VAN2 <0

Prenons r1 = 5% et r2 = 42%

$$\text{VAN1 } = -200 + \frac{80}{1+5\%} + \frac{280}{(1+5\%)^2} = 130{,}15$$

$$\text{VAN2} = -200 + \frac{80}{1 + 42\%} + \frac{280}{(1 + 42\%)^2} = -4{,}8$$

$$\text{TRI} = 5\% - \frac{130{,}15 - 0}{130{,}15 - (-4{,}8)} * (5\% - 42\%) = 0.40$$

THÈME 3 : PRÊTS ET EMPRUNTS

I. REMBOURSEMENT ANNUEL

Annuité = Amortissement + Intérêts

Capital Restant Dû (CRD) = $C_0 - \sum Amortissements$

Le CRD est toujours décroissant.

Formules à retenir

Amortissement constant = $\frac{Capital}{n}$

Annuités constantes = $\frac{Cr}{1-(1+r)^{-n}}$

Remarque : quand il s'agit d'un remboursement In Fine, on rembourse à la fin.

TEG = Taux Effectif Global, même calcul que pour le TIR

Remarque : en plus du Capital C, il peut y avoir des frais de dossiers f.

$$C + f = (1+TEG)^{-1} + (1+TEG)^{-2} + \cdots + (1+TEG)^{-n}$$

II. REMBOURSEMENT NON ANNUEL

Si le taux t n'est pas annuel, il faut le convertir.

$$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$$

$$(1 + t_a)^{\frac{1}{n}} = (1 + t_i)$$

$a = annuel$

$m = mensuel$

$i = tout\ type$

Première approche TEG

$$Taux\ Période = \frac{t_a}{p}$$

$$t_a = t_p p$$

Deuxième approche TAEG

$$t_p = (1 + t_a)^{1/p} - 1$$

$$t_a = (1 + t_p)^p - 1$$

THÈME 4 : EMPRUNTS OBLIGATAIRES

Coupure = Valeur Nominale (VN)

Prix Effectif = Valeur de l'obligation (Parfois ≠ VN)

SI Valeur de Remboursement > Valeur Nominale = Prime de remboursement

SI Valeur d'Emission < Valeur Nominale = Prime d'émission

SI VR = VN = VE, le taux de rendement est égal au taux d'intérêts.

SINON la rémunération est égale au taux d'intérêts + les primes citées.

Exemple 1

VE = VN = 1 000

VR = 1 050 > VN = 1 000, prime de remboursement

$r = 6\%$ ***Coupon = VNr*** sur n années

$$TIR = -\,1\,000 + 60\,\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + 1050\,(1+r)^{-n}$$

Exemple 2

VE = 495 < VN = 500 = prime d'émission

VN = VR = 500

$r = 5\%$ Sur n années

$$TIR = -495 + 25\,\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + 500(1+r)^{-n}$$

Plus le taux d'intérêts augmente, plus le cours de l'obligation baisse.

Si t est émis à un autre moment que 0 (t < 1), le moment entre 0 et t correspond à d.

$$\boldsymbol{d\ est\ la\ durée\ qui\ sépare\ 0\ et\ t}$$

$$t = 0\ alors\ F\,\frac{(1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$0 < t < 1\ alors\ (1+r)^{d}(F\,\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + Primes)$$

$$Coupon\ Couru\ (CC) = Coupon_{annuel}d$$

$$CC\ \% = \frac{CC}{VN}$$

$$Valeur\ Plein\ Coupon(VplC) - CC = Valeur\ au\ pied\ du\ Coupon\ (VpC)$$

$$Cours\ au\ pied\ du\ Coupon(CpC) = \frac{VpC}{VN}$$

$$Prix\ de\ l'obligation = CpC + CC$$