POUGNES PHOENIX TSP

SIC 3601 - Théorie du signal

Précisions pour la suite

Dans toute la suite, on utilisera les mêmes notations et libertés que dans le poly de cours et que dans la pougne associée.

L'énoncé des questions est disponible dans la partie "Questions de cours" du poly (ou p.41 http://www-public.tem-tsp.eu/~castella/dispo/enseign/SI12/ExosCorriges.pdf).

La légende portée par les 2A prétend que quiconque a travaillé toutes ces questions de cours est sûr et certain de valider[1]...

Réponses aux Questions de cours

1. En théorie du signal, **un filtre** correspond à un système (dispositif associant un signal de sortie $y(t)$ à un signal d'entrée $x(t)$) **linéaire, invariant et continu** avec le lien entrée-sortie : $\boxed{Y(f) = H(f)X(f)}$,
   où $H(f)$ est la réponse en fréquence du filtre (ou fonction de transfert).
2. Un signal ou processus aléatoire $x(t, \omega)$ (noté simplement $x(t)$) sera dit :
   Stationnaire (au sens large / 2^{nd} ordre) s'il garde les mêmes propriétés statiques au 1^{er} et 2^{nd} ordre au cours du temps, i.e si : $\mathbb{E}[x(t, \omega)]$, $\mathbb{E}\left[x(t)\overline{x(t-\tau)}\right]$ indépendants de t ;
   Ergodique si les moments temporels existent et sont indépendants de la réalisation choisies pour les calculer, i.e si les différentes réalisations possibles ont les mêmes moments temporels (indépendamment de ω en gros).
   Remarquons que ces propriétés sont indépendantes.
3. La **réponse impulsionnelle d'un filtre** est le signal y de sortie du filtre lorsque que l'entrée x est une impulsion de Dirac δ. Donc $y = h$.
4. Le **critère de Shannon-Nyquist** du théorème d'échantillonnage stipule que la condition de reconstitution d'un signal échantillonné à la fréquence f_e est $\boxed{f_e \geq 2f_M}$, où f_M est la fréquence maximale utilisable (afin d'éviter toute interférence entre les ordres 0 et 1 dans la périodisation du signal initial).

1. MATLAB n'étant *a priori* plus au programme, les questions de cours relatives ne seront pas corrigées ici.

5. Par définition, pour un signal déterministe x :
   - Cas continu : Son **énergie**[2] est : $\boxed{E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt}$,

     sa **puissance**[3] moyenne est : $\boxed{P_x = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt}$

   - Cas discret : Son énergie est $\boxed{E_x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2}$, sa puissance est $\boxed{P_x = \lim\limits_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum\limits_{n=-M}^{M} |x_n|^2}$
6. Par analogie avec la relation pour les densités spectrales d'énergie, on a la relation[4] suivante entre les **densités spectrales de puissances** de y et x : $\boxed{S_y^p(f) = |H(f)|^2 S_x^p(f)}$
7. L'échantillonnage d'un signal a pour effet de "**périodiser**" son spectre : le spectre du signal échantillonné est, à une constante multiplicative près, la répétition périodique du spectre de départ (le calcul théorique montre en effet que $X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} X(f - kf_e)$).
   Pour ne pas perdre d'information au cours de cet échantillonnage, la condition en résultant pour un signal passe bas est celle de **Shannon-Nyquist** : $f_e \geq 2f_c$.
8. En traitement du signal, un filtre est ce qu'on appelle un système en théorie du signal (voir question 1).
   Un **filtre à temps discret** est un système (dispositif associant un signal de sortie y_n à un signal d'entrée x_n) caractérisé par la relation entrée-sortie $Y[z] = H[z]X[z]$, soit pour la réponse impulsionnelle : $\boxed{y_n = h_n * x_n}$.
9. La **modulation** consiste en l'adaptation d'un signal initial $m(t)$ pour sa transmission. En général, ce signal initial est à basse fréquence et le canal de transmission impose une "translation" de l'information contenue dans m dans le domaine fréquentiel ; cette translation se fait grâce une **porteuse** $p(t)$, signal à haute fréquence autour de laquelle se trouvera le spectre du signal modulé $s(t)$.
10. **L'autocorrélation** d'un signal x déterministe s'exprime, dans les différents cas, par :
    — En cas d'énergie finie :
    - temps continu : $\boxed{R_x^e(\tau) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt} = x(\tau) * x^*(-\tau) =< x(.), x(.-\tau) >$
    - temps discret : $\boxed{R_x^e(k) \triangleq \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n x_{n-k}^*}$

    — En puissance :
    - temps continu : $\boxed{R_x^p(\tau) \triangleq \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)x^*(t-\tau)dt}$
    - temps discret : $\boxed{R_x^p(k) \triangleq \lim\limits_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum\limits_{n=-M}^{M} x_n x_{n-k}^*}$

2. Sans unité dans ce cours. Mathématiquement, un signal est dit d'énergie finie s'il est dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.
3. Sans unité également. Pour un signal périodique, P_x correspond en fait à la valeur moyenne sur une période.
4. Dur à montrer. En énergie, la relation se montre par 1. et par définition des densités spectrales d'énergies.

11. Un filtre est dit **causal** si la réponse ne précède pas l'excitation, ce qui s'exprime par :
   - Cas continu : $\forall t < t_0, x(t) = 0 \Rightarrow \forall t < t_0, y(t) = 0$.
   - Cas discret : $\forall n < n_0, x_n = 0 \Rightarrow \forall n < n_0, y_n = 0$

   On montre qu'un filtre est causal **si et seulement si** : $\forall t < 0, h(t) = 0$ ou $\forall n < 0, h_n = 0$, où h désignant la réponse impulsionnelle du filtre.

12. La reconstruction sans erreur d'un signal échantillonné à la période f_e est théoriquement possible si le **critère de Shannon-Nyquist** est vérifié (voir 4.), i.e si $\boxed{f_e \geq 2f_M}$

13. Par définition, la **transformée en z** du signal à temps discret x_n est la série formelle $X[z]$ d'indéterminée z et de domaine de convergence : $D_x = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq R_1 < |z| < R_2 \leq \infty\}$ définie par la relation : $\boxed{\forall z \in D_x, X[z] \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}}$.

    On remarque pour la **transformée à temps discret** que : $\boxed{\forall \tilde{f} \in [0, 1], \forall \tilde{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], X(\tilde{f}) = X[e^{2i\pi\tilde{f}}]}$.

14. PLUS TARD - Un **signal à bande étroite** est un signal $s(t)$ dont le spectre, relativement étroit, se situe "autour" d'une fréquence f_0. Ce signal est généré par la modulation d'une onde porteuse de fréquence f_0 par un signal $m(t)$. **Un exemple est nécessaire pour cette question**. **Un exemple est nécessaire pour cette question**. **Un exemple est nécessaire pour cette question**.
15. Un **signal déterministe** est représenté par une fonction/suite $x(t)/x_n$ définie et connue pour tout t/n, et que l'on peut étudier via les outils classiques d'analyse, tandis qu'un **signal aléatoire** est modélisée par une variable aléatoire dont on ne peut déterminer à l'avance les valeurs et que l'on étudiera via les outils de probabilité.
16. La densité spectrale de puissance Γ_x^p d'un signal x se définit dans le cas général comme la transformée de Fourier de son autocorrélation : $\boxed{\Gamma_x^p = \mathrm{TF}[\gamma_x(t)]}$.

    On justifie cette appellation par la relation : $\boxed{P_x = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(f) df}$,

    P_x étant la puissance moyenne de x.
17. La transformée en z d'un **filtre numérique h_n de réponse impulsionnelle finie** (RIF, dit aussi transverse) s'écrit sous la forme d'un **polynôme en z^{-1}** : $\mathrm{H}[z] = \sum\limits_{j=0}^{q} b_j z^{-j}$

    La relation relative à la sortie en découlant est $\boxed{y_n = \sum\limits_{j=0}^{q} b_j x_{n-j}}$.
18. Le **signal analytique** $z_x(t)$ associé au signal réel $x(t)$ est par définition le signal de transformée de Fourier $Z_x(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$ Par calcul, $\boxed{z_x(t) = x(t) + i\hat{x}(t)}$,

    où $\hat{x}(t)$ désigne la transformée de Hilbert (réelle) du signal $x(t)$.
19. La quantification d'un signal est la **discrétisation de l'ensemble de ses valeurs** : la quantification est aux amplitudes ce que l'échantillonnage est aux temps.
20. La transformée en z d'un **filtre numérique h_n de réponse impulsionnelle infinie (RII) ou (purement) récursif ou auto-régressif (AR)** s'écrit sous la forme suivante :

    $$\mathrm{H}[z] = \frac{b}{1 + \sum\limits_{j=1}^{p} a_j z^{-j}}$$

    La relation relative à la sortie en découlant est $\boxed{y_n = b_0 x_n - \sum\limits_{j=1}^{p} a_j y_{n-j}}$.
21. **La transformée de Fourier à temps discret** d'un signal x_n est définie par :

    $\boxed{X(\tilde{f}) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi \tilde{f} n}, \text{ où la fréquence est normalisée, avec en général : } \tilde{f} \triangleq \frac{f}{f_e} \in [0, 1]}$
22. **La transformée de Fourier discrète** est une approximation de la transformée de Fourier à temps discret : on ne somme qu'en un nombre N **fini** de valeurs de fréquences en lesquels on connait le signal x_n. On obtient : $\boxed{\forall k \in [\![0, N-1]\!], X_k = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{k}{N} n}}$.

Plus précisément : $\boxed{\text{Si } \forall n \notin [\![0, N-1]\!], x_n = 0, \text{ alors } \forall k \in [\![0, N-1]\!], X_k = X(\tilde{f} = \frac{k}{N})}$

Si N est une puissance de 2, il existe un algorithme rapide de calcul de la TFD : c'est la transformée de Fourier rapide (ou FFT).

23. **L'intercorrélation** γ_{xy}^p de deux signaux x, y à temps continus et de puissances finies est la fonction définie par : $\boxed{\forall \tau \in \mathbb{R}, \gamma_{xy}^p(\tau) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t) y^*(t-\tau) dt}$

24. D'après le **théorème de Wiener-Kintchine**, la densité spectrale de puissance Γ_x^p d'un processus aléatoire du $2^{\text{ème}}$ ordre x est la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation statistique : $\boxed{\Gamma_x^p(f) = \text{TF}[\gamma_x(t)](f)}$.
On complètera cette question plus tard.

25. On appelle **bruit blanc** un processus aléatoire $b(t)$ stationnaire au sens large,
centré (i.e $\mathbb{E}[b(t)] = 0$) et dont la densité spectrale de puissance $\Gamma_b(f)$ est constante sur l'ensemble du domaine fréquentiel considéré.
On a donc $\boxed{\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2} \text{ (convention) et } \gamma_b(t) = TF^{-1}[\Gamma_b(f)](t) = \frac{N_0}{2}\delta(t)}$.

26. La **modulation** consiste en l'adaptation d'un signal initial $m(t)$ appelée la modulante pour sa transmission. En général, **la modulante est à basse fréquence** et le canal de transmission impose une "translation" de l'information contenue dans m dans le domaine fréquentiel ; cette translation se fait grâce une **porteuse $p(t)$, signal à haute fréquence** autour de laquelle se trouvera le spectre du signal modulé $s(t)$.

27. On appelle **bruit blanc** un processus aléatoire $b(t)$ stationnaire au sens large,
centré (i.e $\mathbb{E}[b(t)] = 0$) et dont la densité spectrale de puissance $\Gamma_b(f)$ est constante sur l'ensemble du domaine fréquentiel considéré.
On a donc $\boxed{\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2} \text{ (par convention) et } \gamma_b(t) = \text{TF}^{-1}[\Gamma_b(f)](t) = \frac{N_0}{2}\delta(t)}$.

28. **L'intercorrélation** γ_{xy}^e de deux signaux x, y à temps discrets et d'énergies finies est la fonction définie par : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \gamma_{xy}^e(k) \triangleq \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{n-k}^*}$.

29. Pour un filtre de fonction de transfert $H(f)$, les **densités spectrales de puissance** $\Gamma_x^p(f)$ et $\Gamma_y^p(f)$ sont liées par la relation : $\boxed{\Gamma_y^p(f) = |H(f)|^2 \Gamma_x^p(f)}$.

30. Pour un signal $h(t)$ déterministe donné, l'opération qui à un signal $x(t)$ associe le signal $\boxed{y(t) = h(t) * x(t) = \int_{\mathbb{R}} h(s) x(t-s) ds}$ s'appelle le **filtrage** par $h(t)$.

31. PLUS TARD - Enveloppe convexe

32. La transformée d'un signal échantillonné est une **série de Fourier** : le signal échantillonné est donc périodique (de période T_e), de coefficients les échantillons du signal initial. La transformée de Fourier d'un signal **périodique** est en fait une série de Fourier[5].

33. **Le signal analytique associé à un signal réel $x(t)$ est complexe :** en effet, par construction, $\boxed{z_x(t) = x(t) + i\hat{x}(t)}$, où la transformée de Hilbert $\hat{x}(t)$ est réelle.

5. En tout cas, d'après les pougnes Phoenix. Le concept de transformée de Fourier généralisant celui de série de Fourier, cela parait logique.

34. La transformée en z d'un **filtre numérique h_n de réponse impulsionnelle infinie (RII) ou (purement) récursif ou auto-régressif (AR)** s'écrit sous la forme suivante : $\boxed{\mathrm{H}[z] = \dfrac{b}{1 + \sum\limits_{j=1}^{p} a_j z^{-j}}}$

    L'équation temporelle en découlant est $\boxed{y_n = b_0 x_n - \sum\limits_{j=0}^{p} a_j y_{n-j}}$.

35. Le **domaine de convergence** de la fonction de transfert en z H$[z]$ d'un filtre **causal** est de la forme : $\boxed{D = \{z \in \mathbb{C}/|z| > R > 0\} \cup \{\infty\}}$

36. PLUS TARD. Signaux aléatoires, trajectoire

37. PLUS TARD. J'aurais dit "bruit blanc" si l'hypothèse "centré" était mentionnée.

38. **L'algorithme de transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform, FFT)** est un algorithme de calcul matriciel de la transformée de Fourier **discrète**. La FFT est réalisable si **l'ordre de la matrice est une puissance de 2**, et repose sur les calculs indépendants des quantités $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n}\omega_{\frac{N}{2}}^{kn}}$ et $\boxed{\omega_N^k \sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1}\omega_{\frac{N}{2}}^{kn}}$, de somme X_k (avec la notation usuelle $\omega_N = e^{\frac{-2i\pi}{N}}$).

39. D'après le **théorème du retard** (voir 40.), $z^{-1}X[z]$ est la transformée en z de x_{n-1}.

40. Pour la transformée en z, le **théorème du retard** s'écrit : $\mathrm{Tz}(x_{n-n_0})[z] = z^{-n_0}X[z]$.

41. Le processus de **Poisson homogène** et le **processus de Wiener** (lié aux mouvements browniens) sont des exemples de signaux aléatoires à **accroissements indépendants**.

42. $x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\tau(t - nT)$, donc :

    $X(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\tau(t-nT)e^{-2i\pi ft}dt$ (définition)

    $X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{R}} \Pi_\tau(t-nT)e^{-2i\pi ft}dt$ (linéarité)

    $X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{R}} \Pi_\tau(t)e^{-2i\pi f(t+n\tau)}dt$ (changement de variable)

    $X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\Pi_\tau(t)e^{-2i\pi ft}\right) e^{-2i\pi n\tau}dt$

    $X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi n\tau} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\Pi_\tau(t)e^{-2i\pi ft}\right) dt$

    $X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi n\tau}\mathrm{TF}[\Pi_\tau(t)]$

    $\boxed{X(f) = \tau\Pi_\tau \mathrm{sinc}(\pi ft) \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi n\tau}}$

43. PLUS TARD. ALÉATOIRE, stationnaire/ergondique (voir 2)

44. Un signal ou processus aléatoire $x(t,\omega)$ (noté simplement $x(t)$) sera dit **stationnaire au sens large** (ou au 2$^{\text{nd}}$ ordre) s'il garde les mêmes propriétés statiques au 1$^{\text{er}}$ et 2$^{\text{nd}}$ ordre

au cours du temps, i.e si les moments statistiques $\mathbb{E}[x(t,\omega)]$ et $\mathbb{E}\left[x(t)\overline{x(t-\tau)}\right]$ sont tous deux indépendants du temps t.

45. Le **critère de Shannon-Nyquist** du théorème d'échantillonnage stipule que la condition de reconstitution sans perte d'information d'un signal échantillonné à la fréquence f_e est : $f_e \geq 2f_M$, où f_M est la fréquence maximale utilisable afin d'éviter toute interférence entre les ordres 0 et 1 dans la périodisation du signal initial.
Donc ici, toutes les fréquences f_e vérifiant $\boxed{f_e \geq 2B}$ conviennent.
46. PLUS TARD : SIGNAL ANALYTIQUE, ENVELOPPE CONVEXE DE $cos(2\pi f_0 t)$ (voir Sondra)
47. MATLAB : non corrigée.
48. PLUS TARD - Pour un signal ALÉATOIRE à temps discret :
    (a) Lauto-corrélation
    (b) Densité spectrale de puissance
49. Pour un signal x déterministe à temps continu :
$\boxed{E_x \triangleq \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df}$ **par théorème de Parseval**.
50. Par définition, $\forall t \in \mathbb{R}, Ш_{T_e}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT_e)$ définit un peigne de Dirac de période T_e, et $x_e(t) = x(t)Ш_{T_e}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\delta(t-kT_e)$ est la version échantillonnée à la période T_e du signal $x(t)$, dont les échantillons sont les $(x(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$.
Par la **formule exacte d'interpolation**, dans les conditions de Shannon-Nyquist, on a la relation : $\boxed{x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\mathrm{sinc}[\pi f_e(t-kT_e)]}$
51. Un filtre MA (moving average, moyenne mobile) est un **filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)** : sa fonction de transfert en z est donc de la forme : $\boxed{\mathrm{H}[z] = \sum_{j=0}^{q} b_j z^{-j}}$
52. MATLAB : non corrigée.
53. Le signal de sortie $y(t) = h(t)$ est appelée **réponse impulsionnelle** lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac $\delta(t)$. La **réponse en fréquence** ou **fonction de transfert** du filtre est la transformée de Fourier $H(f)$ du signal $h(t)$.
54. PLUS TARD - ENVELOPPE CONVEXE (voir 24)
55. PLUS TARD - SIGNAL ALÉATOIRE, TRAJECTOIRE
56. MATLAB : non corrigée.
57. MATLAB : non corrigée.
58. Un filtre de transformée en z $H[z]$ s'exprimant comme une fraction rationnelle sera à la fois causal et stable **si et seulement si** le degré du numérateur de $H[z]$ est inférieur ou égal au degré du dénominateur et tous les pôles du filtre sont strictement à l'intérieur du cercle unité.

59. Pour $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux d'énergies finies,
par définition : $\boxed{\forall \tau \in \mathbb{R}, \gamma_{xy}^{e}(\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt = x(\tau) * y^*(-\tau)}$
60. Pour un signal x_n à temps discret et d'énergie finie :
$\boxed{E_x \triangleq \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(\tilde{f})|^2 d\tilde{f}}$ par théorème de Parseval.
L'intégrale peut aussi être prise sur [0,1] **par 1-périodicité** de $X(\tilde{f})$.
61. PLUS TARD - ENVELOPPE CONVEXE
62. Un filtre à temps discret de réponse impulsionnelle h_n vérifiant :
(a) : $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |h_k| < \infty$ sera **stable** (i.e la réponse à tout signal borné sera bornée)
(b) : $\{\forall n \in \mathbb{Z}, h_n \in \mathbb{R}$ et $\forall n < 0, h_n = 0\}$ sera **causal**
Notons par ailleurs que si $H[z]$ est une fraction rationnelle, alors le filtre sera à la fois causal et stable **si et seulement si** le degré du numérateur de $H[z]$ est inférieur ou égal au degré du dénominateur et tous les pôles du filtre sont strictement à l'intérieur du cercle unité.
63. PLUS TARD - BRUIT ?
64. MATLAB : non corrigée.
65. MATLAB : non corrigée.