欠扩散方程

2022 年 12 月 31 日

目录

1 预备知识

1.1 积分变换

定义 1 (拉普拉斯变换)**.** 设函数 $f(t) \in L^1([0,\infty);\mathbb{R})$, 并且存在常数 $C > 0$ 以及 $\sigma \in \mathbb{R}$ 使得 $|f(t)| \sim Ce^{\sigma t}$, 则 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $\tilde{f}(s) = \mathscr{L}[f(t)](s)$ 定义为

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) ds, \qquad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \sigma\}. \tag{1}$$

称 $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \sigma\}$ 为 $\tilde{f}(s)$ 的收敛域.

定义 2 (拉普拉斯逆变换). 函数 $\tilde{f}(s)$ 的拉普拉斯逆变换 $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[\tilde{f}(s)](t)$ 由如下复积分给出,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}\tilde{f}(s)ds, \tag{2}$$

其中 $\gamma \in \mathbb{R}$ 满足 $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = \gamma\}$ 包含在 $\tilde{f}$ 的收敛域内.

定义 3 (傅里叶变换). 设函数 $f(x) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 则 $f(x)$ 的傅里叶变换 $\hat{f}(k) = \mathscr{F}[f(x)](k)$ 定义为

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(x)dx. \tag{3}$$

定义 4 (傅里叶逆变换). 函数 $\hat{f}(k)$ 的傅里叶逆变换 $f(x) = \mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(k)](x)$ 为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\hat{f}(k)dk. \tag{4}$$

定义 5 (梅林变换). 设函数 $f(t) : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, 则 $f(t)$ 的梅林变换 $f^*(s) = \mathscr{M}[f(t)](s)$ 定义为

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} f(t)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

定义 6 (梅林逆变换). 函数 $f^*(s)$ 的梅林逆变换 $f(t) = \mathscr{M}^{-1}[f^*(s)](t)$ 为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} t^{-s} f^*(s)\mathrm{d}s, \tag{6}$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 满足 $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = c\}$ 包含在 f^* 的解析区域内.

性质 1 (拉普拉斯变换与梅林变换的关系).

$$\mathscr{M}\{\mathscr{L}[f(t)](s)\}(1-p) = \Gamma(1-p)\mathscr{M}[f(t)](p). \tag{7}$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{M}[\mathscr{L}[f(t)](s)](1-p)\\
=&\int_0^\infty s^{-p}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
=&\int_0^\infty f(t)\int_0^\infty s^{-p}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
=&\int_0^\infty f(t)\int_0^\infty \left(\frac{z}{t}\right)^{-p}\mathrm{e}^{-z}\frac{\mathrm{d}z}{t}\mathrm{d}t \qquad z=st,\ \mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}z}{t}\\
=&\Gamma(1-p)\int_0^\infty t^{p-1}f(t)\mathrm{d}t\\
=&\Gamma(1-p)\mathscr{M}[f(t)](p).
\end{aligned} \tag{8}
$$

□

性质 2 (卷积的拉普拉斯变换)**.** 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积 $(f\star g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ 的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[f\star g](s)=\mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s). \tag{9}$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}[f\star g](s)\\
=&\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau dt\\
=&\int_0^\infty g(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st}f(t-\tau)dtd\tau\\
=&\int_0^\infty g(\tau)\int_0^\infty e^{-s(u+\tau)}f(u)dud\tau \qquad u=t-\tau\\
=&\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\right)\\
=&\mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s).
\end{aligned}
$$

□

性质 3 (导函数的拉普拉斯变换)**.** 函数 $f(t)$ 的 n 阶导函数 $f^{(n)}(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[f^{(n)}](s)=s^n\mathscr{L}[f](s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^{(k)}(0). \tag{10}$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}[f^{(n)}](s)\\
=&\int_0^\infty e^{-st}f^{(n)}(t)dt\\
=&s\int_0^\infty e^{-st}f^{(n-1)}(t)dt-f^{(n-1)}(0)\\
=&s^n\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^{(k)}(0)\\
=&s^n\mathscr{L}[f](s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^{(k)}(0).
\end{aligned}
$$

□

性质 4 (导函数的傅里叶变换)**.** 速降函数函数 $f(x)$ 的 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$ 的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[f^{(n)}](k)=(-ik)^n\mathscr{F}[f](k). \tag{11}$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}[f^{(n)}](k)\\
=&\int_{\mathbb{R}}e^{ikx}f^{(n)}(x)dx\\
=&-ik\int_{\mathbb{R}}e^{ikx}f^{(n-1)}(x)dx\\
=&(-ik)^n\int_{\mathbb{R}}e^{ikx}f(x)dx\\
=&(-ik)^n\mathscr{F}[f](k).
\end{aligned}
$$

□

性质 5 (傅里叶变换及其逆变换的平移性质)**.**

$$\mathscr{F}[f(x-x_0)](k)=e^{ikx_0}\mathscr{F}[f](k), \tag{12}$$

$$\mathscr{F}^{-1}[e^{ikx_0}\mathscr{F}[f](k)](x)=f(x-x_0). \tag{13}$$

证明.

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}[f(x-x_0)](k)\\=&\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(x-x_0)dx\\=&\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x'+x_0)} f(x')dx'\\=&e^{ikx_0}\mathscr{F}[f](k).\end{aligned}$$

□

例 1 (幂函数的拉普拉斯变换). 设幂函数 $f(t)=t^\alpha$, 其中 $\alpha>-1$, 则

$$\tilde{f}(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt=\int_0^\infty e^{-z}\left(\frac{z}{s}\right)^\alpha\frac{dz}{s}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{s^{1+\alpha}}.$$

例 2 (δ 函数的傅里叶变换).

$$\mathscr{F}[\delta(x-x_0)](k)=\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\delta(x-x_0)dx=e^{ikx_0}.$$

例 3 ($\mathrm{e}^{-a|x|}$ 的傅里叶变换). 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$, 其中 $a>0$, 则

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f](k)=&\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{d}x\\=&\int_{\mathbb{R}}(\cos(kx)+\mathrm{i}\sin(kx))\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{d}x\\=&2\int_0^\infty\cos(kx)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{14}$$

而

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\cos(kx)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{k}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}\sin(kx)\\=&\frac{1}{k}\left[\mathrm{e}^{-ax}\sin(kx)\mid_{x=0}^{x=\infty}+a\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\sin(kx)\mathrm{d}x\right]\\=&\frac{a}{k}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\sin(kx)\mathrm{d}x\\=&\frac{a}{k^2}\left[-\mathrm{e}^{-ax}\cos(kx)\mid_{x=0}^{x=\infty}-a\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\cos(kx)\mathrm{d}x\right]\\=&\frac{a}{k^2}-\frac{a^2}{k^2}\int_0^\infty\cos(kx)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{15}$$

于是

$$\int_0^{\infty} \cos(kx) \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{d}x = \frac{a}{k^2 + a^2}. \tag{16}$$

所以

$$\mathscr{F}[f](k) = \frac{2a}{k^2 + a^2}. \tag{17}$$

1.2 H 函数

定义 7 (H 函数)**.** 设 $a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q \in \mathbb{C}$, $A_1, \cdots, A_p, B_1, \cdots, B_q > 0$, 则 H 函数

$$\begin{aligned} &H_{pq}^{mn}\left[z\big|_{(b1,B1),\cdots,(b_q,B_q)}^{(a_1,A_1),\cdots,(a_p,A_p)}\right] \\ =&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}\Gamma(b_i+B_i s)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-A_i s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+A_i s)\prod\limits_{i=m+1}^{q}\Gamma(1-b_i-B_i s)} z^{-s}\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{18}$$

例 4. 设函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $\tilde{f}(s) = s^{\mu}\mathrm{e}^{-as^{\nu}}$, 其中 $a > 0$, 求 $f(t)$.

首先利用梅林变换和拉普拉斯变换的关系, 可以得到

$$\Gamma(1-p)\mathscr{M}[f](p) = \int_0^{\infty} s^{-p} s^{\mu} \mathrm{e}^{-as^{\nu}} \mathrm{d}s. \tag{19}$$

对上式积分进行变量替换 $z = as^{\nu}$, $s = (z/a)^{1/\nu}$, $\mathrm{d}s = (z/a)^{1/\nu-1}/(a\nu)\mathrm{d}z$ 可得

$$\begin{aligned} \mathscr{M}[f](p) &= \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^{\infty}\frac{1}{a\nu}\left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{\mu-p}{\nu}}\left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}-1}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-p)}\frac{1}{\nu a^{\frac{\mu+1-p}{\nu}}}\int_0^{\infty} z^{\frac{\mu+1-p}{\nu}-1}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\nu a^{\frac{\mu+1-p}{\nu}}}\frac{\Gamma(\frac{\mu+1-p}{\nu})}{\Gamma(1-p)}. \end{aligned} \tag{20}$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\nu a^{\frac{\mu+1}{\nu}}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\Gamma(\frac{\mu+1-s}{\nu})}{\Gamma(1-s)} \left(\frac{t}{a^{\frac{1}{\nu}}}\right)^{-s} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\nu a^{\frac{\mu+1}{\nu}}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\Gamma(\frac{\mu+1+s}{\nu})}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{a^{\frac{1}{\nu}}}{t}\right)^{-s} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\nu a^{\frac{\mu+1}{\nu}}} H_{11}^{10} \left[\frac{a^{\frac{1}{\nu}}}{t} \Bigg|_{(\frac{\mu+1}{\nu}, \frac{1}{\nu})}^{(1,1)} \right].
\end{aligned} \tag{21}
$$

进一步，可利用留数定理对上述积分进行展开．对于伽马函数 $\Gamma(z)$ 而言，$\Gamma(n)=\infty$，$n=0$，-1，-2，$\cdots$，并且奇点只有一阶极点 $\{0,-1,-2,\cdots\}$，所以上述积分的被积函数的奇点，即一阶极点为 $(\mu+1+s_n)/\nu=-n$，$s_n=-1-\mu-\nu n$，$n=0$，1，2，$\cdots$，于是留数

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}(s_n) &= \lim_{s\to s_n} (s-s_n) \frac{\Gamma(\frac{\mu+1+s}{\nu})}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{a^{\frac{1}{\nu}}}{t}\right)^{-s} \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\mu-\nu n)} \left(\frac{a^{\frac{1}{\nu}}}{t}\right)^{1+\mu+\nu n} \lim_{s\to s_n} (s-s_n)\Gamma(\frac{\mu+1+s}{\nu}) \\
&= \frac{\nu}{n!\Gamma(-\mu-\nu n)} \left(\frac{a^{\frac{1}{\nu}}}{t}\right)^{1+\mu} \left(-\frac{a}{t^{\nu}}\right)^{n},
\end{aligned} \tag{22}
$$

这是因为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to s_n} (s-s_n)\Gamma(\frac{\mu+1+s}{\nu}) \\
=&\lim_{s\to -1-\mu-\nu n} (s+1+\mu+\nu n)\Gamma(\frac{\mu+1+s}{\nu}) \\
=&\lim_{s\to -1-\mu-\nu n} \frac{(s+1+\mu+\nu n)\Gamma(\frac{\mu+1+s}{\nu}+1)}{\frac{\mu+1+s}{\nu}} \\
=&\lim_{s\to -1-\mu-\nu n} \frac{(s+1+\mu+\nu n)\Gamma(\frac{\mu+1+s}{\nu}+n+1)}{\frac{\mu+1+s}{\nu}\cdots(\frac{\mu+1+s}{\nu}+n)} \\
=&\lim_{s\to -1-\mu-\nu n} \frac{\Gamma(\frac{\mu+1+s}{\nu}+n+1)}{\frac{\mu+1+s}{\nu}\cdots(\frac{\mu+1+s}{\nu}+n-1)}\nu \\
=&\frac{\nu}{(-n)\cdots(-1)}
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$=\frac{(-1)^n\nu}{n!}.$$

所以 $f(t)$ 还可以表示为下述形式

$$f(t)=\frac{1}{t^{1+\mu}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(-\mu-\nu n)}\left(-\frac{a}{t^{\nu}}\right)^n. \tag{24}$$

于是, 若定义 Mainardi 函数如下,

$$f_{\mu,\nu}(t;a)=\frac{1}{t^{1+\mu}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(-\mu-\nu n)}\left(-\frac{a}{t^{\nu}}\right)^n, \tag{25}$$

那么

$$\mathscr{L}^{-1}\{s^{\mu}\mathrm{e}^{-as^{\nu}}\}(t)=f_{\mu,\nu}(t;a). \tag{26}$$

1.3 分数阶积分和导数

定义 8 (α 阶左侧 Riemann-Liouville 积分)**.** 设函数 $f(t)\in L^1(a,b)$, $\alpha>0$, 则 $f(t)$ 的 α 阶左侧 *Riemann-Liouville* 积分 $({}_aI_t^{\alpha}f)(t)$ 定义为

$$({}_aI_t^{\alpha}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds. \tag{27}$$

定义 9 (α 阶左侧 Caputo 导数)**.** 设 $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$, 函数 $f(t)\in C^n(a,b)$, 则 $f(t)$ 的 α 阶左侧 *Caputo* 导数 $({}_a^CD_t^{\alpha}f)(t)$ 定义为

$${}_a^CD_t^{\alpha}f)(t)={}_aI_t^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds. \tag{28}$$

性质 6 (Caputo 导数的拉普拉斯变换)**.** 由例*1*, 性质*2*以及性质*3*, 可以直接得到 *Caputo* 导数 $({}_0^CD_t^{\alpha}f)(t)$ 的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[({}_0^CD_t^{\alpha}f)(t)](s)=s^{\alpha}\mathscr{L}[f](s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-1-k}f^{(k)}(0). \tag{29}$$

1.4 subordinator

定义 10 (α-stable subordinator)**.** 称随机过程 $T(t)$ 是一个 α 稳定的 *subordinator* 如果它是一个非减的 α 稳定的 *Lévy* 过程.

性质 7 (拉普拉斯指数)**.** 设 $T(t)$ 是一个 α 稳定的 *subordinator,* 则其拉普拉斯指数为 $-s^\alpha$, 即

$$\tilde{g}(s,t) = \mathbb{E}e^{-sT(t)} = \int_0^\infty e^{-sT} g(x,t)dT = e^{-ts^\alpha}, \tag{30}$$

其中 $g(x,t)$ 是 $T(t)$ 的概率密度函数.

性质 8 (scaling property)**.** 设 $T(t)$ 是一个 α 稳定的 *subordinator,* 则

$$T(t) \overset{d}{=} t^{1/\alpha} T(1). \tag{31}$$

证明.

$$\mathbb{E}e^{-sT(t)} = e^{-ts^\alpha} = e^{-1\dot{(}t^{1/\alpha}s)^\alpha} = \mathbb{E}e^{-(t^{1/\alpha}s)T(1)}.$$

□

由上述性质, 可以得到

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \partial_x \int_0^x g(u,t)du \\ &= \partial_x \mathbb{P}(T(t) \leqslant x) \\ &= \partial_x \mathbb{P}(t^{1/\alpha}T(1) \leqslant x) \\ &= \partial_x \mathbb{P}(T(1) \leqslant t^{-1/\alpha}x) \\ &= \partial_x \int_0^{t^{-1/\alpha}x} g_\alpha(u)du \\ &= t^{-1/\alpha} g_\alpha(t^{-1/\alpha}x), \end{aligned} \tag{32}$$

其中 $g_\alpha(x)$ 为 $T(1)$ 的概率密度函数, 其拉普拉斯变换为 $\tilde{g}_\alpha(s) = e^{-s^\alpha}$. 在例4中取 $\mu = 0$, $a = 1$, $\nu = \alpha$, 可以得到

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} H\left[\frac{1}{x} \,\middle|^{(1,1)}_{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha})}\right]. \tag{33}$$

1.5 inverse subordinator

定义 11 (inverse subordinator)**.** *设 $T(t)$ 是一个 α 稳定的 subordinator, inverse subordinator $E(t)$ 是 $T(t)$ 的逆过程*

$$E(t) = \inf\{u > 0 : T(u) > t\}. \tag{34}$$

设 $h(u,t)$ 是 $E(t)$ 的概率密度函数, 则根据定义, 有

$$\begin{aligned} h(u,t) &= \partial_u \mathbb{P}(E(t) \leqslant u) \\ &= \partial_u \mathbb{P}(T(u) \geqslant t) \\ &= \partial_u (1 - \mathbb{P}(T(u) < t)) \\ &= -\partial_u \int_0^t g(x,u) dx \\ &= -\partial_u \int_0^t u^{-1/\alpha} g_\alpha(u^{-1/\alpha} x) dx \\ &= -\partial_u \int_0^{u^{-1/\alpha} t} g_\alpha(y) dy \qquad y = u^{-1/\alpha} x \\ &= \frac{t}{\alpha} u^{-1-1/\alpha} g_\alpha(u^{-1/\alpha} t) \\ &= \frac{t}{\alpha^2} u^{-1-1/\alpha} H \left[\frac{u^{1/\alpha}}{t} \,|_{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha})}^{(1,1)} \right], \end{aligned} \tag{35}$$

$$\tilde{h}(u,s) = -\partial_u \frac{\tilde{g}(s,u)}{s} = -\partial_u s^{-1} e^{-us^\alpha} = s^{\alpha-1} e^{-us^\alpha}. \tag{36}$$

2 欠扩散方程的解法

求解欠扩散方程

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha P(x,t) &= D \partial_x^2 P(x,t), \\ P(x,0) &= \delta(x - x_0). \end{aligned} \tag{37}$$

其中 ∂_t^α 是 Caputo 导数,

$$\partial_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) \mathrm{d}s,$$

$0 < \alpha < 1$, D 为扩散系数,

2.1 拉普拉斯-傅里叶方法

对方程 (37) 两边做拉普拉斯-傅里叶变换, 得

$$s^\alpha \hat{\tilde{P}}(k,s) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0} s^{\alpha-1} = -Dk^2 \hat{\tilde{P}}(k,s), \tag{38}$$

即

$$\hat{\tilde{P}}(k,s) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0} s^{\alpha-1}}{s^\alpha + Dk^2}. \tag{39}$$

根据例3, 有

$$\tilde{P}(x,s) = \frac{1}{2\sqrt{D}s^{1-\alpha/2}} \mathrm{e}^{-\frac{s^{\alpha/2}}{\sqrt{D}}|x-x_0|}, \tag{40}$$

根据例4, 得

$$\begin{aligned} P(x,t) &= \frac{1}{\alpha|x-x_0|} H_{11}^{10}\left[\left(\frac{|x-x_0|}{\sqrt{D}}\right)^{2/\alpha} t^{-1} \middle|^{(1,1)}_{(1,\frac{2}{\alpha})}\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{D}} f_{-1+\alpha/2,\alpha/2}\left(t; \frac{|x-x_0|}{\sqrt{D}}\right). \end{aligned} \tag{41}$$

$\alpha = 1$ 时, 根据 (41) 式, 我们有

$$\begin{aligned} P(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{D}} f_{-1/2,1/2}\left(t; \frac{|x-x_0|}{\sqrt{D}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{1}{t^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1/2-(1/2)n)} \left(-\frac{|x-x_0|}{\sqrt{D}} \frac{1}{t^{1/2}}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma((1-n)/2)} \left(-\frac{|x-x_0|}{\sqrt{Dt}}\right)^n. \end{aligned} \tag{42}$$

因为当 n 为奇数时, $1/\Gamma((1-n)/2) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} P(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!\Gamma((1-2n)/2)} \left(-\frac{|x-x_0|}{\sqrt{Dt}}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!\Gamma(1/2-n)} \left(\frac{|x-x_0|^2}{Dt}\right)^n. \end{aligned} \tag{43}$$

又因为

$$\begin{aligned}
&\Gamma(1/2-n)\\
=&\frac{\Gamma(1/2-n+1)}{1/2-n}\\
=&\frac{\Gamma(1/2-n+n)}{(1/2-n)(1/2-n+1)\cdots(1/2-n+n-1)}\\
=&\frac{\Gamma(1/2)(-2)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}\\
=&\frac{\sqrt{\pi}(-2)^n}{(2n-1)!!},
\end{aligned} \tag{44}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2n)!\Gamma(1-n/2)}\\
=&\frac{(2n-1)!!}{\sqrt{\pi}(2n)!(-2)^n}\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}(2n)!!(-2)^n}\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}(n!2^n)(-2)^n}\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}n!(-4)^n},
\end{aligned} \tag{45}$$

于是

$$\begin{aligned}
P(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4Dt}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}n!(-4)^n}\left(\frac{|x-x_0|^2}{Dt}\right)^n\\
&=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{|x-x_0|^2}{4Dt}\right)^n\\
&=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}.
\end{aligned} \tag{46}$$

2.2 subordinated process

假设方程 (37) 的解 $P(x,t)$ 具有如下形式

$$P(x,t)=\int_0^{\infty}n(s,t)P_0(x,s)dx, \tag{47}$$

其中 $P_0(x,t)$ 是扩散方程

$$\partial_t P_0(x,t) = D\partial_x^2 P_0(x,t) \tag{48}$$

且初始条件为 $P_0(x,t)=\delta(x-x_0)$ 的解. 下面说明 $n(s,t)$ 就是前面所说的 inverse subordinator 的概率密度函数, 即 (35) 中的 h.

首先对 (47) 式两边对 x 积分, 然后进行拉普拉斯变换 $t\to u$,

$$\int_{\mathbb{R}} P(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty n(s,t)P_0(x,s)dsdx = \int_0^\infty n(s,t)\int_{\mathbb{R}} P_0(x,s)dxds, \tag{49}$$

$$1 = \int_0^\infty n(s,t)ds, \tag{50}$$

$$\frac{1}{u} = \int_0^\infty \tilde{n}(s,u)ds. \tag{51}$$

对方程 (37) 进行拉普拉斯变换, 得

$$u\tilde{P}(x,u) - \delta(x-x_0) = Du^{1-\alpha}\partial_x^2\tilde{P}(x,u), \tag{52}$$

将 (47) 代入到上式中

$$\begin{aligned}
&u\int_0^\infty \tilde{n}(s,u)P_0(x,s)ds - \delta(x-x_0)\\
=&Du^{1-\alpha}\int_0^\infty \tilde{n}(s,u)\partial_x^2 P_0(x,s)ds\\
=&u^{1-\alpha}\int_0^\infty \tilde{n}(s,u)\partial_s P_0(x,s)ds\\
=&u^{1-\alpha}\left(\tilde{n}(\infty,u)P_0(x,\infty) - \tilde{n}(0,u)P_0(x,0) - \int_0^\infty \partial_s\tilde{n}(s,u)P_0(x,s)ds\right),
\end{aligned} \tag{53}$$

其中, 根据 (51), $\tilde{n}(\infty,u)=0$, $P_0(x,\infty)$ 是扩散方程 (48) 的稳态解, 即 Boltzmann 分布. 所以上式就可以写作

$$\int_0^\infty \left(u\tilde{n}(s,u) + u^{1-\alpha}\partial_s\tilde{n}(s,u)\right)P_0(x,s)ds = \left(1-u^{1-\alpha}\tilde{n}(0,u)\right)\delta(x-x_0), \tag{54}$$

要想这个式子成立, 只能是两边都为零, 即

$$\partial_s\tilde{n}(s,u) = -u^\alpha\tilde{n}(s,u), \tag{55}$$

$$\tilde{n}(0,u) = u^{\alpha-1}, \tag{56}$$

解之得

$$\tilde{n}(s,u) = u^{\alpha-1}e^{-u^{\alpha}s}. \tag{57}$$

这个和 (36) 中得到的 $\tilde{h}$ 是一样的, 所以说 n 是 inverse subordinator 的概率密度, 即欠扩散方程 (37) 是 $B(E(t))$ 的扩散方程.

参考文献