

二维不可压 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的数值方法

中文摘要

本文主要讨论了二维粘性不可压流体中的布朗粒子所对应的 Fokker–Planck 方程, 即 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的数值算法. 利用局部加密网格的方法, Gronwall 不等式和相对应的离散 Ladyzhenskaya 不等式, 得到了该方程在非光滑初值条件下的 Euler–SAV–FEM 格式的稳定性结果和误差估计. 数值实验也佐证了我们的理论结果. 在展望中, 本文又提出来了两种关于流体方程的带有低正则性积分的 SAV 型时间半离散格式, 并分析了其相容误差, 但是完整的误差估计和稳定性分析还需等待后续成果给出.

关键词: SAV, 变步长 Euler 格式, Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程, H^1 初值

NUMERICAL METHODS FOR THE 2D INCOMPRESSIBLE NAVIER–STOKES–FOKKER–PLANCK EQUATION

Abstract

In this paper, we talk about the numerical analysis for the Fokker–Planck equation of two-dimensional Brownian particles in an incompressible viscous fluid, *i.e.*, a convection-diffusion equation where the velocity is governed by the Navier–Stokes equation. With the help of the grids locally refined in temporal direction, discrete Gronwall inequality and discrete Ladyzhenskaya inequality, we obtain the almost unconditionally stability and convergence results of Euler SAV finite element scheme for the Navier–Stokes–Fokker–Planck equation with non-smooth initial data. And the numerical experiments are also provided to support the theoretical results. Last but not least, in the outlook part, we construct two kinds SAV schemes with low-regularity exponential integrators, and then analyze their consistency. However, the complete stability and convergence analysis needs to be given later.

Keywords: SAV, variable-step Euler scheme, Navier–Stokes–Fokker–Planck equations, \boldsymbol{H}^1 initial data.

目 录

中文摘要	I
英文摘要	II
第一章 引言	1
第二章 预备知识	4
2.1 函数空间	4
2.2 基本不等式	5
2.3 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的相关结论	6
2.3.1 基本记号与假设	6
2.3.2 有限元 Galerkin 逼近	8
2.3.3 正则性结果	11
第三章 非光滑初值下 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的 Euler– SAV–FEM 方法	13
3.1 SAV 格式的构造	13
3.2 稳定性分析	15
3.3 误差估计	18
第四章 定理 3.3 的证明	19
4.1 相容误差	19
4.2 全局误差估计	23
第五章 光滑初值下 Navier–Stokes 方程的 Crank–Nicolson–SAV– FEM 格式	29
5.1 稳定性	30
5.2 相容误差	31
5.3 全局误差估计	38

第六章 数值实验.....	42
第七章 总结与展望.....	49
7.1 小结.....	49
7.2 未来工作以及展望	49
7.2.1 非光滑初值和高 Reynolds 数下 N-S 方程 SAV 格式的稳 定性和误差分析.....	49
7.2.2 流体中的布朗非高斯聚合物扩散模型	50
7.2.3 两相流体模型.....	55
7.2.4 低正则性积分子与 SAV 格式.....	57
参考文献.....	62
致 谢.....	69

第一章 引言

设 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ 为处于不可压牛顿流体中的布朗粒子在 t 时刻的位置, 则其满足如下 Langevin 方程 [1]:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)dt + d\mathbf{B}(t),$$

其中 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(\cdot, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为流体的速度场, 与压强 $p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 满足如下 Navier–Stokes (N–S, 在本文中, 如无特殊说明, 专指二维不可压) 方程:

$$\partial_t \mathbf{v}(t) + (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t) - \Delta \mathbf{v}(t) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0,$$

$\mathbf{B}(t)$ 是均值为零, 协方差 $\mathbb{E}[\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^T(s)] = 2 \min\{t, s\}I$ 的布朗运动, I 为单位矩阵. 记 $u(t) = u(\cdot, t)$ 为 $\mathbf{x}(t)$ 的概率密度函数, 那么由 [2] 可知, u 是下列 Fokker–Planck 方程的解:

$$\partial_t u(t) + \nabla \cdot (\mathbf{v}u)(t) - \Delta u(t) = 0.$$

由求导公式 $\nabla \cdot (\mathbf{v}u) = (\nabla \cdot \mathbf{v})u + \mathbf{v} \cdot \nabla u$, 以及速度场的不可压条件, 我们就得到了不可压流体中布朗粒子的 Fokker–Planck 方程:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}(t) + (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t) - \Delta \mathbf{v}(t) + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0, \\ \partial_t u(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \nabla u(t) - \Delta u(t) = 0. \end{cases}$$

给定有界开区域 $\Omega \in \mathbb{R}^2$, 有限时间 $T > 0$, 齐次 Dirichlet 边界条件和初值条件, 我们就得到了本文要讨论的 N–S 方程与 Fokker–Planck 方程相耦合的方程组:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}(t) + (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t) - \Delta \mathbf{v}(t) + \nabla p = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \partial_t u(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \nabla u(t) - \Delta u(t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \mathbf{v}(t) = 0, \quad u(t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0, \quad u(0) = u^0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

作为理解和预测不可压流体动力学的基本数学方程, N–S 方程的解析解的表达式很难具体求出来, 因此其数值算法研究在科学计算和数值分析领域有着很重要的地位. 因为 N–S 方程的初值影响着其解的正则性, 而解的正则性在分析数值

格式的误差或者收敛阶的过程中起着至关重要的作用, 所以, 下面就对不同初值情况下已有的 N–S 方程的数值算法做一下简单介绍.

当 N–S 方程的初值充分光滑时, 也就是说, 初值属于 \mathbf{H}^2 或者更高, 一系列高精度数值格式及其收敛阶被学者们得到: Crank–Nicolson 格式 [3], 显隐型 Crank–Nicolson/Adams–Bashforth 格式 [4, 5], 半隐线性外插型 Crank–Nicolson 格式 [6–8], 稳定化型 Crank–Nicolson 格式 [9], Euler 和 BDF 型格式 [10–15], 投影法 [16–18], 指数型低正则性积分子 [19]. 当然还有很多没有提到的其他类型的数值格式, 例如 [20–24] 等, 这里就不做更多介绍了, 感兴趣的可自行查阅.

然而, 在初值属于 \mathbf{H}^1 时, 相对应的结果就很少了, 据作者所知的有: [25] 证明了空间有限元半离散具有 2 阶精度; 在 $\tau|\ln h| \leq c$ 条件下 (τ 为时间步长, h 为空间三角剖分的最大直径, 下同), [26] 和 [27] 分别得到了半隐型和显隐型 Euler 有限元全离散格式时间方向的 1 阶误差估计; 在同样的步长条件下, [28] 证明了显隐型 Crank–Nicolson/Adams–Bashforth 有限元方法的时间 1.5 阶收敛; 利用局部加密的时间剖分, [29] 给出了线性外插型 Crank–Nicolson 有限元格式的最优误差估计.

对于 N–S 方程来说, 我们知道, \mathbf{L}^2 的螺线子空间是其适定性成立的临界空间 [30]. 此情形下, 同样是在文献 [27] 中, 作者得到了在 $\tau h^{-2} \leq c$ 条件下显隐型 Euler 有限元格式的最优误差估计; 此外, 针对于谱 Galerkin 方法, 在 $\tau \lambda_M \leq c$ 这个条件下 (λ_M 为离散 Stokes 算子的最大特征值), [31] 给出了半隐型 Euler 格式的误差估计, 其时间方向仅有 0.5 的收敛阶; 最近, 利用对偶论证和局部加密的网格, [32] 得到了半隐型 Euler 有限元全离散格式的时空均 1 阶收敛的误差结果.

近些年来, 针对梯度流问题或 Hamilton 系统, [33–35] 等构建了一类无条件能量稳定的时间半离散格式, 称为 SAV (scalar auxiliary variable) 格式. 该格式在保证能量无条件稳定的同时也保证了最后离散生成的代数系统是线性的, 所以相较于隐格式来说, 其计算复杂度大幅度降低, 因此深受欢迎. 与梯度流问题类似, 不可压 N–S 方程同样具有能量稳定性, 其 SAV 格式在 [36] 中首次给出来. 紧接着, SAV-MAC 格式 [37] 和 SAV 压力校正方法 [38] 被相继提出来. 此外, [39] 给出了 \mathbf{H}^2 初值条件下 Euler SAV 有限元全离散格式的无条件能量稳定性和误差估计结果; 在适当的条件下, [40] 证明了 Euler SAV \mathbf{H}^1 协调有限元全离散格式在高 Reynolds 数情况下的稳定性和收敛性. 这里需要指出的是, 这些论文中使用的标量型辅助变量并不尽相同.

本文主要考虑的问题为非光滑初值下 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的 Euler–SAV–FEM 格式的稳定性 and 收敛性. 剩余部分的结构如下: 在第二章, 我们介绍了一些函数空间的基本定义和 (证明了) 一些后续讨论要用到的不等式, 例

如离散 Ladyzhenskaya 不等式 (引理 2.7), 同时还回顾了 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的一些正则性结果和相应的有限元 Galerkin 逼近结论. Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的一阶 Euler–SAV–FEM 格式(3.5) 的构造及其稳定性分析和收敛性的结果都是第三章的内容. 而收敛性的证明则被放在了第四章. 而第五章的内容是对上述流体方程的一阶 SAV 格式的推广, 给出了 \mathbf{H}^2 初值条件下 N–S 方程二阶线性外插 Crank–Nicolson 格式的误差估计. 通过第六章的数值实验, 验证了本文给出的数值格式的有效性和前述理论结果的正确性. 最后, 在总结与展望中, 提出了几个后续可做的与本文中讨论类似的问题, 比如说, 针对于 N–S 方程, 又构建了两类带有低正则性积分的 SAV 格式, 并且给出了其中一种格式的相容误差估计. 在本文中, c 均代指正常数, 虽在不同地方的具体数值不同, 但总与时间剖分 τ , 空间剖分 h 以及时间层数无关; 表达式 $a \lesssim b$ 的含义是存在一个正常数 c 使得 $a \leq cb$.

第二章 预备知识

本章给出本文所涉及的一些基本函数空间、基本不等式、后续证明所需的一些引理以及关于 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的正则性结论以及相关空间半离散的逼近性质.

2.1 函数空间

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集, $p \geq 1$ 是正实数, 那么定义在 Ω 上的 L^p 可积标量函数空间和 \mathbf{L}^p 可积向量函数空间定义如下.

定义 2.1 设 $u(\mathbf{v})$ 是一个定义在 Ω 上的标量 (向量) 可测函数. 我们说 $u(\mathbf{v})$ 是 $L^p(\mathbf{L}^p)$ 可积的, 如果

(1) ($1 \leq p < \infty$) Lebesgue 积分

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \quad \left(\int_{\Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)$$

是有限的;

(2) ($p = \infty$) 函数 $u(\mathbf{v})$ 是本性有界的, 即

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})| < \infty \quad \left(\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{x})| < \infty \right).$$

所有 $L^p(\mathbf{L}^p)$ 可积的函数关于范数

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})|, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\left(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|, & p = \infty, \end{cases} \right),$$

构成线性赋范空间. 特别地, 当 $p = 2$ 时, 其还是一个内积空间, 这里, 无论是标量 L^2 函数空间还是向量 \mathbf{L}^2 函数空间, 其上的内积和范数均统一写作 (\cdot, \cdot) 和 $\|\cdot\|$.

借由弱导数, 可定义如下通常所用的 Sobolev 空间.

定义 2.2 对于非负整数 k 和正实数 p ($1 \leq p \leq \infty$), 定义 Ω 上的标量 (向量) Sobolev 空间

$$W^{k,p} = \{u \in L^p : \partial^\alpha u \in L^p, 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

$$(\mathbf{W}^{k,p} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p : \partial^\alpha \mathbf{v} \in \mathbf{L}^p, 0 \leq |\alpha| \leq k\}),$$

其中, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ 表示多重指标, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, ∂^α 表示弱导数. 其空间上的范数定义为

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|u\|_{L^\infty}, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\left(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^\infty}, & p = \infty, \end{cases} \right).$$

特别地, 当 $p = 2$ 时,

$$H^k = W^{k,2} \quad (\mathbf{H}^k = \mathbf{W}^{k,2}),$$

并且记 H_0^1 (\mathbf{H}_0^1) 为 H^k (\mathbf{H}^k) 中在边界 $\partial\Omega$ 上迹为 0 的函数组成的子空间. 此外, 记 H^{-1} (\mathbf{H}^{-1}) 为 H_0^1 (\mathbf{H}_0^1) 的对偶空间.

设 X 为任意一个范数为 $\|\cdot\|_X$ 的 Banach 空间, $I \in \mathbb{R}$ 为实轴上的一个有 (无) 界区间, 那么 Bochner 空间的定义如下.

定义 2.3 设 $f: I \rightarrow X$ 是一个 X 值函数, 我们说 f 是 $L^p(I; X)$ 的, 如果

$$\|f\|_{L^p(I; X)} < \infty,$$

这里

$$\|f\|_{L^p(I; X)} := \begin{cases} \left(\int_I \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in I} \|f(t)\|_X, & p = \infty. \end{cases}$$

2.2 基本不等式

引理 2.1 (Young 不等式) 设 a 和 b 为两个任意正实数, $1 < p, q < \infty$ 为一对共轭指标, 即 $1/p + 1/q = 1$, 则

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

引理 2.2 (广义 Hölder 不等式) 设 $1 \leq r \leq \infty$ 是一个正实数, $1 < p, q < \infty$ 关于 r 共轭, 即 $1/p + 1/q = 1/r$. 如果 f 是 L^p 可积的且 g 是 L^q 可积的, 那么它们的乘积 fg 是 L^r 可积的. 更进一步, 其范数满足估计

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

如果 Ω 为 \mathbb{R}^2 上的凸多边形区域, 那么我们有如下不等式.

引理 2.3 (Ladyzhenskaya 不等式 [41])

$$\|v\|_{L^4} \lesssim \|v\|^{1/2} \|\nabla v\|^{1/2}, \quad \forall v \in H_0^1, \quad (2.1)$$

$$\|\nabla v\|_{L^4} \lesssim \|\nabla v\|^{1/2} \|\Delta v\|^{1/2}, \quad \forall v \in H_0^1 \cap H^2. \quad (2.2)$$

下面两个离散的 Gronwall 不等式在下文的推导中会经常用到, 具体证明可见 [5, 16, 42].

引理 2.4 (离散 Gronwall 不等式 1) 令 $x_k, y_k, z_k, w_k, v_k, \tau_k$ 为非负实数且满足

$$x_{k+1} - x_k + y_{k+1}\tau_{k+1} + z_{k+1}\tau_{k+1} - z_k\tau_k \leq x_k w_k \tau_k + v_{k+1}\tau_{k+1}, \quad \forall 0 \leq k \leq m.$$

那么对于任意的 $m \geq 0$, 成立

$$x_{m+1} + \sum_{k=0}^{m+1} y_k \tau_k \leq \exp \left(\sum_{k=0}^m w_k \tau_k \right) \left(x_0 + y_0 \tau_0 + z_0 \tau_0 + \sum_{k=1}^{m+1} v_k \tau_k \right).$$

引理 2.5 (离散 Gronwall 不等式 2) 令 B 和 a_n, b_n, d_n, τ_n 均为非负实数, 且满足

$$a_m + \sum_{n=n_0}^m b_n \tau_n \leq \sum_{n=n_0}^{m-1} a_n d_n \tau_n + B, \quad m \geq n_0 \geq 1,$$

那么

$$a_m + \sum_{n=n_0}^m b_n \tau_n \leq B \exp \left\{ \sum_{n=n_0}^{m-1} d_n \tau_n \right\}, \quad m \geq n_0.$$

2.3 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的相关结论

2.3.1 基本记号与假设

假设有界开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 足够光滑, 满足

(1) 对于任意给定的 L^2 函数 \mathbf{g} , 稳态 Stokes 方程

$$-\Delta \mathbf{w} + \nabla q = \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega,$$

的解 (\mathbf{w}, q) 存在唯一, 且满足估计

$$\|\mathbf{w}\|_{H^2} + \|q\|_{H^1} \lesssim \|\mathbf{g}\|.$$

(2) 对于任意给定的 L^2 函数 f , Poisson 方程

$$-\Delta u = f, \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0, \quad \text{on } \partial\Omega,$$

的解 u 存在唯一, 且满足估计

$$\|u\|_{H^2} \lesssim \|f\|.$$

根据 [43–46], 如果 Ω 是一个凸多边形区域或者边界 $\partial\Omega \in C^2$, 则上述假设成立. 于是在本文中, 我们直接取 Ω 为有界凸多边形区域.

下面, 我们引入与 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程 (1.1) 中的速度场 \mathbf{v} , 压强场 p , 浓度场 u 相关的函数空间. 记

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}_0^1, \quad V = H_0^1,$$

临界空间

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ in } \Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

其中 \mathbf{n} 表示边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,

$$Q = L_0^2 = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

以及 \mathbf{X} 的螺线子空间

$$\dot{\mathbf{X}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X} : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

设 \mathbb{P} 为从 \mathbf{L}^2 映到 \mathbf{H} 的 Leray 正交投影 [47, 48], 对于任意的 $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2$, 有

$$\mathbb{P}\mathbf{f} = \mathbf{f} - \nabla q,$$

其中 q 是如下边值问题的解

$$\begin{cases} \Delta q = \nabla \cdot \mathbf{f}, & \text{in } \Omega, \\ \nabla q \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

定义 \mathbf{H} 上的正定自伴闭的 Stokes 算子 $A = -\mathbb{P}\Delta : \mathbf{H}^2 \cap \dot{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbf{H}$ [49–51], 满足 [44, 45]

$$\|\nabla \mathbf{v}\| \lesssim \|A^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}\|, \quad \|\Delta \mathbf{v}\| \lesssim \|A \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^2 \cap \dot{\mathbf{X}}.$$

根据 Poincaré 不等式, 我们有

$$\|\mathbf{v}\| \lesssim \|\nabla \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1, \quad \|\nabla \mathbf{v}\| \lesssim \|A \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^2 \cap \dot{\mathbf{X}}.$$

此外, 借助 Leray 投影和 Stokes 算子, 方程(1.1) 可改写为如下形式:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbb{P}((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) + A \mathbf{v} = 0, \\ \partial_t u + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \Delta u = 0, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0, \quad u(0) = u^0, \end{cases}$$

设三线性型 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 和 $c(\cdot, \cdot, \cdot)$ 分别为

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2}((\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

和

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

借助上述记号, Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程 (1.1) 的弱形式为: 求解 $(\mathbf{v}, p, u) \in \mathbf{X} \times Q \times V$, 使成立

$$\begin{cases} (\partial_t \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{w}) = 0, & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}, \\ -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q) = 0, & \forall q \in Q, \\ (\partial_t u, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + c(\mathbf{v}, u, \varphi) = 0, & \forall \varphi \in V, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0, \quad u(0) = u^0, \end{cases} \quad (2.3)$$

这里, 因为

$$\Delta \mathbf{v} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

所以

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}) := (\nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{w}) + (\nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w}).$$

2.3.2 有限元 Galerkin 逼近

设 $\mathbf{X}_h \times Q_h \times V_h$ 为 $\mathbf{X} \times Q \times V$ 的有限元子空间, 其中 h 为形状正则且拟一致三角剖分的尺寸, $V_h \subset H_0^1$ 是由定义在三角剖分上的连续分片线性多项式所构成的有限元空间, 混合有限元空间 $\mathbf{X}_h \times Q_h$ 满足如下性质:

- (1) 对于任意的 $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$, 成立 $\nabla \cdot \mathbf{v}_h \in Q_h$;
- (2) Fortin 算子: 存在一个线性算子 $\Pi_h : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_h$, 使得对于任意 $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$, 成立

$$\nabla \cdot \Pi_h \mathbf{v} = P_{Q_h} \nabla \cdot \mathbf{v},$$

其中 $P_{Q_h} : L_0^2 \rightarrow Q_h$ 为 L^2 正交投影; 对于任意 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{X}$, 成立

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^m} \leq ch^{s-m} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^s}, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad 1 \leq s \leq 2,$$

$$\|\Pi_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{1,p}} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{1,p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

由 [52] 可知, 上面两条性质蕴含了如下 inf-sup 条件:

$$\|q_h\| \lesssim \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \setminus \{0\}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1}}, \quad \forall q_h \in Q_h.$$

满足上述性质的有限元子空间的例子有: Taylor–Hood P^k – P^{k-1} ($k \geq 2$) 有限元空间 [53, 54], Scott–Vogelius P^k – P_{-1}^{k-1} ($k \geq 4$) 有限元空间 [55, 56] 以及 MINI 有限元空间 [57] 等.

定义 \mathbf{X}_h 的螺线子空间:

$$\dot{\mathbf{X}}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h : (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h\},$$

离散 Stokes 算子 $A_h : \dot{\mathbf{X}}_h \rightarrow \dot{\mathbf{X}}_h$,

$$(A_h \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = (\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h,$$

离散 Laplace 算子 $\Delta_h : V_h \rightarrow V_h$,

$$(\Delta_h u_h, v_h) = -(\nabla u_h, \nabla v_h), \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

以及从 L^2 映到 V_h 的正交投影 P_h :

$$(P_h u - u, v_h) = 0, \quad \forall u \in L^2, v_h \in V_h,$$

从 L^2 映到 $\dot{\mathbf{X}}_h$ 的正交投影 \mathbb{P}_h :

$$(\mathbb{P}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}, \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2, \mathbf{v}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h.$$

弱形式(2.3)的有限元半离散格式为: 寻找 $(\mathbf{v}_h(t), p_h(t), u_h(t)) \in \mathbf{X}_h \times Q_h \times V_h$, $t > 0$, 使成立

$$\begin{cases} (\partial_t \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + (\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{w}_h) - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) = 0, & \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h, \\ -(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h, \\ (\partial_t u_h, \varphi_h) + (\nabla u_h, \nabla \varphi_h) + c(\mathbf{v}_h, u_h, \varphi_h) = 0, & \forall \varphi_h \in V_h, \\ \mathbf{v}_h(0) = \mathbb{P}_h \mathbf{v}^0, \quad u(0) = P_h u^0. \end{cases} \quad (2.4)$$

上述离散格式对应的抽象形式为: 寻找 $(\mathbf{v}_h(t), u_h(t)) \in \dot{\mathbf{X}}_h \times V_h$, $t > 0$, 使得

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}_h + \mathbb{P}_h((\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h) + A_h \mathbf{v}_h = 0, \\ \partial_t u_h + \mathbf{v}_h \cdot \nabla u_h - \Delta_h u_h = 0, \\ \mathbf{v}_h(0) = \mathbb{P}_h \mathbf{v}^0, \quad u_h(0) = P_h u^0. \end{cases} \quad (2.5)$$

最后由一些离散的 Gagliardo–Nirenberg 估计, 我们有如下关于三线形型 b 和 c 的估计 [5, 27, 29, 44, 46].

引理 2.6 (1) 对于任意的 $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$, 成立

$$\begin{aligned} & |b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| + |b(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)| + |b(\mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \\ & \lesssim \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|^{1/2} \|\mathbf{u}_h\|_{H^1}^{1/2} \|\mathbf{v}_h\|_{H^1}^{1/2} \|A_h \mathbf{v}_h\|^{1/2} \|\mathbf{w}_h\| \\ & + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|_{H^1} \|\mathbf{v}_h\|^{1/2} \|A_h \mathbf{v}_h\|^{1/2} \|\mathbf{w}_h\|, \end{aligned}$$

$$|b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| + |b(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)| \lesssim \|\mathbf{u}_h\| \|\mathbf{v}_h\|_{H^1}^{1/2} \|A_h \mathbf{v}_h\|^{1/2} \|\mathbf{w}_h\|_{H^1}.$$

(2)

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{X},$$

(3)

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \lesssim \begin{cases} \|\mathbf{u}\|_{H^1} \|\mathbf{v}\|_{H^1} \|\mathbf{w}\|_{H^1}, \\ \|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|_{H^1}, \end{cases} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{X}.$$

引理 2.7 (离散 Ladyzhenskaya 不等式) 对于任意的 $v_h \in V_h$, 成立

$$\|\nabla v_h\|_{L^4} \lesssim \|\nabla v_h\|^{1/2} \|\Delta_h v_h\|^{1/2}.$$

证明 令 $v \in H_0^1 \cap H^2$ 是方程

$$\Delta v = \Delta_h v_h$$

的解, 也就是说, 函数 v 满足如下 Poisson 方程

$$\Delta v = \Delta_h v_h, \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (2.6)$$

因此, 根据 Poisson 方程的先验估计, 有

$$\|v\|_{H^2} \lesssim \|\Delta_h v_h\|. \quad (2.7)$$

方程两边和测试函数 $\varphi_h \in V_h$ 做内积, 得 $(\nabla(v - v_h), \nabla \varphi_h) = 0$. 由此可以看出, v_h 是 v 的 Ritz 投影. 又因为在拟一致剖分下, Ritz 投影是 $W^{1,p}$ 稳定的 [58], 即

$$\|v_h\|_{W^{1,p}} \lesssim \|v\|_{W^{1,p}}, \quad 2 \leq p \leq \infty. \quad (2.8)$$

于是, 结合 Poincaré 不等式, 式 (2.2), 式 (2.7) 以及式 (2.8), 我们有

$$\|\nabla v_h\|_{L^4} \lesssim \|\nabla v\|_{L^4} \lesssim \|\nabla v\|^{1/2} \|\Delta_h v_h\|^{1/2}.$$

下面还需要证明 $\|\nabla v\| \lesssim \|\nabla v_h\|$. 实际上, 在方程 (2.6) 两边作用于测试函数 v , 有

$$\|\nabla v\|^2 = -(\Delta_h v_h, P_h v) = (\nabla v_h, \nabla P_h v) \leq \|\nabla v_h\| \|\nabla P_h v\| \lesssim \|\nabla v_h\| \|\nabla v\|,$$

其中我们用到了 L^2 正交投影 P_h 的 H^1 稳定性 [59]. ■

引理 2.8 (1) $c(\mathbf{u}, v, v) = 0, \forall \mathbf{u} \in \dot{\mathbf{X}}, v \in H_0^1$.

(2) $c(\mathbf{u}_h, v_h, w_h) \leq c\|\mathbf{u}_h\| \|v_h\|_{H^1}^{1/2} \|\Delta_h v_h\|^{1/2} \|w_h\|_{H^1}, \forall \mathbf{u}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h, v_h, w_h \in V_h$.

证明 设 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))^T \in \dot{\mathbf{X}}, v(\mathbf{x}) = v(x_1, x_2) \in H_0^1, w(\mathbf{x}) = w(x_1, x_2) \in H_0^1$. 由分部积分, 得

$$c(\mathbf{u}, v, v) = \int_{\Omega} (u_1 \partial_{x_1} v + u_2 \partial_{x_2} v) v \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

此外, 根据式 (2.1) 和引理 2.7, 我们有

$$\begin{aligned} |c(\mathbf{u}_h, v_h, w_h)| &= |(\mathbf{u}_h \cdot \nabla v_h, w_h)| \\ &\lesssim \|\mathbf{u}_h\| \|\nabla v_h\|_{L^4} \|w_h\|_{L^4} \\ &\lesssim \|\mathbf{u}_h\| \|\nabla v_h\|^{1/2} \|\Delta_h v_h\|^{1/2} \|w_h\|^{1/2} \|\nabla w_h\|^{1/2} \\ &\lesssim \|\mathbf{u}_h\| \|v_h\|_{H^1}^{1/2} \|\Delta_h v_h\|^{1/2} \|w_h\|_{H^1}. \end{aligned}$$

■

2.3.3 正则性结果

文献 [60] 讨论了 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程 (1.1) 的有限元 Galerkin 逼近 (2.5) 的正则性和收敛性, 这里重新叙述一下主要结果.

定理 2.1 设 $(\mathbf{v}_h(t), p_h(t), u_h(t))$ 为有限元半离散 (2.5) 的解, 记 $\sigma(t) = \min\{t, 1\}$, 则有如下结果成立.

(1) 当初值 $(\mathbf{v}^0, u^0) \in (\mathbf{H}^2 \cap \dot{\mathbf{X}} \cap \mathbf{L}^\infty) \times (H^2 \cap V \cap L^\infty)$ 时,

$$\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^2}^2 + \|u_h\|_{H^2}^2 + \|p_h\|^2 \lesssim 1,$$

$$\sigma^r(t) (\|\partial_t \mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^r}^2 + \|\partial_t u_h(t)\|_{H^r}^2) \lesssim 1, \quad r = 0, 1, 2,$$

$$\sigma^{r+2}(t) (\|\partial_{tt} \mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^r}^2 + \|\partial_{tt} u_h(t)\|_{H^r}^2) \lesssim 1, \quad r = -1, 0, 1,$$

$$\int_0^t \sigma^r(s) (\|\partial_s \mathbf{v}_h(s)\|_{\mathbf{H}^{r+1}}^2 + \|\partial_s u_h(s)\|_{H^{r+1}}^2) \, ds \lesssim 1, \quad r = 0, 1,$$

$$\int_0^t \sigma^{r+1}(s) (\|\partial_{ss} \mathbf{v}_h(s)\|_{\mathbf{H}^r}^2 + \|\partial_{ss} u_h(s)\|_{H^r}^2) \, ds \lesssim 1, \quad r = -1, 0, 1,$$

$$\int_0^t \sigma^{r+2}(s) (\|\partial_{sss} \mathbf{v}_h(s)\|_{\mathbf{H}^{r-1}}^2 + \|\partial_{sss} u_h(s)\|_{H^{r-1}}^2) \, ds \lesssim 1, \quad r = 0, 1,$$

$$\int_0^t \sigma^3(s) (\|A_h \partial_{ss} \mathbf{v}_h(s)\|^2 + \|\Delta_h \partial_{ss} u_h(s)\|^2) \, ds \lesssim 1, \quad \sigma^2(t) \|\partial_t p_h(t)\|^2 \lesssim 1.$$

(2) 当初值 $(\mathbf{v}^0, u^0) \in (\dot{\mathbf{X}} \cap \mathbf{L}^\infty) \times (V \cap L^\infty)$ 时,

$$\|\mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|u_h(t)\|_{H^1}^2 \lesssim 1,$$

$$\sigma(t)(\|A_h \mathbf{v}_h(t)\|^2 + \|\Delta_h u_h(t)\|^2) \lesssim 1,$$

$$\sigma^3(t)(\|\partial_{tt} \mathbf{v}_h(t)\|^2 + \|\partial_{tt} u_h(t)\|^2) \lesssim 1,$$

$$\sigma^{r+1}(t)(\|\partial_t \mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^r}^2 + \|\partial_t u_h(t)\|_{H^r}^2) \lesssim 1, \quad r = -1, 0, 1, 2,$$

$$\int_0^t \sigma^r(s)(\|\partial_s \mathbf{v}_h(s)\|_{\mathbf{H}^r}^2 + \|\partial_s u_h(s)\|_{H^r}^2) ds \lesssim 1, \quad r = 0, 1, 2,$$

$$\int_0^t \sigma^{2-r}(s) \left(\|A_h^{-r/2} \partial_{ss} \mathbf{v}_h(s)\|^2 + \|(-\Delta_h)^{-r/2} \partial_{ss} u_h(s)\|^2 \right) ds \lesssim 1, \quad r = 0, 1, 2.$$

定理 2.2 令 (\mathbf{v}, p, u) 和 (\mathbf{v}_h, p_h, u_h) 分别为方程 (1.1) 及其有限元 Galerkin 逼近 (2.4) 的解. 那么我们有如下误差估计.

(1) 当初值 $(\mathbf{v}^0, u^0) \in (\mathbf{H}^2 \cap \dot{\mathbf{X}} \cap \mathbf{L}^\infty) \times (H^2 \cap V \cap L^\infty)$ 时,

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_h(t)\| + \|u(t) - u_h(t)\| \lesssim h^2,$$

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^1} + \|u(t) - u_h(t)\|_{H^1} + \sigma^{1/2}(t)\|p(t) - p_h(t)\| \lesssim h.$$

(2) 当初值 $(\mathbf{v}^0, u^0) \in (\dot{\mathbf{X}} \cap \mathbf{L}^\infty) \times (V \cap L^\infty)$ 时,

$$\sigma^{1/2}(t)(\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_h(t)\| + \|u(t) - u_h(t)\|) \lesssim h^2,$$

$$\sigma^{1/2}(t)(\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^1} + \|u(t) - u_h(t)\|_{H^1}) + \sigma(t)\|p(t) - p_h(t)\| \lesssim h.$$

第三章 非光滑初值下 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的 Euler–SAV–FEM 方法

本章主要讨论非光滑初值下, 即 $(\mathbf{v}^0, u^0) \in (\dot{\mathbf{X}} \cap \mathbf{L}^\infty) \times (V \cap L^\infty)$ 时, 方程 (1.1) 的一阶 Euler–SAV–FEM 方法的稳定性和收敛性分析. 本章的具体结构为: 首先在 3.1 节, 构造出了 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程 (1.1) 的一阶 Euler–SAV–FEM 格式(3.5), 这里由于存在非光滑初值带来的解在 0 时刻附近的弱奇异性, 我们采用了局部加密的时间网格剖分来试图消除掉其对收敛阶的影响. 然后, 在 3.2 节, 我们得到了数值格式(3.5)的无条件能量稳定性 (定理 3.1) 以及在一些范数意义下的稳定性 (定理 3.2). 最后, 在 3.3 节, 我们直接给出了该格式的误差估计结果 (定理 3.3), 而其详细的证明过程被放在了第四章中.

3.1 SAV 格式的构造

记标量型辅助变量

$$S(t) = \exp\left\{-\frac{t}{T}\right\}. \quad (3.1)$$

那么 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程 (1.1) 等价于

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}(t) + \frac{S(t)}{\exp\{-\frac{t}{T}\}} (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t) - \Delta \mathbf{v}(t) + \nabla p = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ S'(t) = -\frac{S(t)}{T} + \frac{1}{\exp\{-\frac{t}{T}\}} b(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)), \\ \partial_t u(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \nabla u(t) - \Delta u(t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \mathbf{v}(t) = 0, \quad u(t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, T], \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0, \quad u(0) = u^0, & \text{in } \Omega, \\ S(0) = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

其所对应的有限元半离散格式为: 求解 $(\mathbf{v}_h, p_h, S_h, u_h) \in \mathbf{X}_h \times Q_h \times \mathbb{R} \times V_h$, 使对任意的 $(\mathbf{w}_h, q_h, \varphi_h) \in \mathbf{X}_h \times Q_h \times V_h$, 成立

$$\begin{cases} (\partial_t \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + \frac{S_h}{\exp\{-\frac{t}{T}\}} b(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + (\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{w}_h) - (\nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h) = 0, \\ -(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \\ \partial_t S_h = -\frac{1}{T} S_h + \frac{1}{\exp\{-\frac{t}{T}\}} b(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h), \\ (\partial_t u_h, \varphi_h) + (\nabla u_h, \nabla \varphi_h) + (\mathbf{v}_h \cdot \nabla u_h, \varphi_h) = 0, \\ \mathbf{v}_h(0) = \mathbb{P}_h \mathbf{v}^0, \quad S_h(0) = 1, \quad u_h(0) = P_h u^0. \end{cases} \quad (3.3)$$

上述格式中 S_h 满足的方程是一个常微分方程, 解之得

$$S_h(t) = \exp\left\{-\frac{t}{T}\right\}.$$

因此, 该有限元格式与不引入 $S_h(t)$ 的式 (2.5) 同解. 类似地, 上述格式的抽象形式为: 求解 $(\mathbf{v}_h(t), S_h(t), u_h(t)) \in \mathbf{X}_h \times \mathbb{R} \times V_h$, 使其满足如下方程

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}_h(t) + \frac{S_h(t)}{\exp\{-\frac{t}{T}\}} \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t) + A_h \mathbf{v}_h(t) = 0, & t > 0, \\ S'_h(t) = -\frac{1}{T} S_h(t) + \frac{1}{\exp\{-\frac{t}{T}\}} b(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) & t > 0, \\ \partial_t u_h + \mathbf{v}_h \cdot \nabla u_h - \Delta_h u_h = 0, & t > 0, \\ \mathbf{v}_h(0) = \mathbb{P}_h \mathbf{v}^0, \quad S_h(0) = 1, \quad u_h(0) = P_h u^0. \end{cases} \quad (3.4)$$

设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ 为区间 $[0, T]$ 的一个划分, 步长 $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ 满足

$$\begin{aligned} \tau_1 &= T \left(\frac{\tau}{T} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ \tau_n &\sim \tau \left(\frac{t_{n-1}}{T} \right)^\alpha, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (\text{TS})$$

其中 $\tau = \max_{1 \leq n \leq N} \tau_n$, $\alpha \in (1/2, 1)$. 对于满足上述的步长, 由 [29, 32] 可知, 存在一个正常数 M , 使得

$$\tau_n \leq M \tau_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

对于任意序列 $\{\mathbf{v}_h^n\}_{n=0}^N$, 记

$$\bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h^n = \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1}).$$

于是, Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的一阶 Euler–SAV–FEM 格式为: 求解 $(\mathbf{v}_h^n, p_h^n, S_h^n, u_h^n) \in \mathbf{X}_h \times Q_h \times \mathbb{R} \times V_h$, $n = 1, \dots, N$, 使对任意的 $(\mathbf{w}_h, q_h, \varphi_h) \in$

$\mathbf{X}_h \times Q_h \times V_h$, 成立

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h^n, \mathbf{w}_h) + \frac{S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{w}_h) + (\nabla \mathbf{v}_h^n, \nabla \mathbf{w}_h) - (\nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h^n) = 0, \\ -(\nabla \cdot \mathbf{v}_h^n, q_h) = 0, \\ \bar{\partial}_\tau S_h^n = -\frac{1}{T} S_h^n + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n), \\ (\bar{\partial}_\tau u_h^n, \varphi_h) + (\nabla u_h^n, \nabla \varphi_h) + (\mathbf{v}_h^n \cdot \nabla u_h^n, \varphi_h) = 0, \\ \mathbf{v}_h^0 = \mathbb{P}_h \mathbf{v}^0, \quad S_h^0 = 1, \quad u_h^0 = P_h u^0. \end{cases} \quad (3.5)$$

或者说, 求解 $(\mathbf{v}_h^n, S_h^n, u_h^n) \in \dot{\mathbf{X}}_h \times \mathbb{R} \times V_h$, 使成立

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h^n + \frac{S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h^{n-1} + A_h \mathbf{v}_h^n = 0, & n \geq 1, \\ \bar{\partial}_\tau S_h^n = -\frac{1}{T} S_h^n + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n), & n \geq 1, \\ \bar{\partial}_\tau u_h^n - \Delta_h u_h^n + \mathbf{v}_h^n \cdot \nabla u_h^n = 0, & n \geq 1, \\ \mathbf{v}_h^0 = \mathbb{P}_h \mathbf{v}^0, \quad S_h^0 = 1, \quad u_h^0 = P_h u^0. \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2 稳定性分析

首先, 我们关于流体的动能有如下能量的无条件稳定结果.

定理 3.1 数值格式(3.5)在

$$E^n - E^{n-1} \leq -2\tau_n \|\nabla \mathbf{v}_h^n\|^2$$

的意义下是无条件能量稳定的, 其中

$$E^n = \|\mathbf{v}_h^n\|^2 + |S_h^n|^2,$$

并且对于任意的 $n \geq 1$ 满足

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 + |S_h^n|^2 + 2 \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla \mathbf{v}_h^k\|^2 \leq \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + 1.$$

证明 在式 (3.5) 中取 $\mathbf{w}_h = 2\tau_n \mathbf{v}_h^n$, $q_h = p_h^n$ 可得

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 - \|\mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n) + 2\tau_n \|\nabla \mathbf{v}_h^n\|^2 = 0.$$

又因为

$$|S_h^n|^2 - |S_h^{n-1}|^2 + |S_h^n - S_h^{n-1}|^2 = -\frac{2\tau_n}{T} |S_h^n|^2 + \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n),$$

所以

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 - \|\mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + |S_h^n|^2 - |S_h^{n-1}|^2 + 2\tau_n \|\nabla \mathbf{v}_h^n\|^2 \leq 0.$$

关于 n 求和可得

$$\|\mathbf{v}_h^n\| + |S_h^n| + 2 \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla \mathbf{v}_h^k\| \leq \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + |S_h^0|^2 = \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + 1.$$

■

然后, 数值解在相应范数下的稳定性如下.

定理 3.2 设 $(\mathbf{v}_h^n, p_h^n, S_h^n, u_h^n)$ 是 Euler–SAV–FEM 格式 (3.5) 的解, 那么对于任意的 $n \geq 1$, 当最大时间步长 τ 充分小时, 成立

$$\|\nabla \mathbf{v}_h^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|A_h \mathbf{v}_h^k\|^2 \lesssim \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + \tau_1 \left(\|\mathbf{v}_h^0\|^4 + \|A_h \mathbf{v}_h^0\|^2 \right), \quad (3.7)$$

$$\|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|A_h^2 \mathbf{v}_h^k\|^2 \lesssim \|A_h \mathbf{v}_h^0\|^2 + \tau_1 \left(\|A_h \mathbf{v}_h^0\|^4 + \|A_h^2 \mathbf{v}_h^0\|^2 \right), \quad (3.8)$$

$$\left\| (-\Delta_h)^{r/2} u_h^n \right\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \left\| (-\Delta_h)^{(r+1)/2} u_h^k \right\|^2 \lesssim \left\| (-\Delta_h)^{r/2} u_h^0 \right\|^2, \quad r = 0, 1, 2.$$

证明 首先, 在式 (3.5) 中取 $\mathbf{w}_h = 2\tau_n A_h \mathbf{v}_h^n \in \dot{\mathbf{X}}_h$, $q_h = 0$ 可得

$$\begin{aligned} & \|\nabla \mathbf{v}_h^n\|^2 - \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \|\nabla (\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1})\|^2 + 2\tau_n \|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 \\ & + \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, A_h \mathbf{v}_h^n) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

由定理 3.1 和引理 2.6 可得

$$\begin{aligned} & \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, A_h \mathbf{v}_h^n) \\ & \leq \left| \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, A_h \mathbf{v}_h^n) \right| \\ & \leq c\tau_n |S_h^n| \|\mathbf{v}_h^{n-1}\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\| \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^{1/2} \|A_h \mathbf{v}_h^n\| \\ & \leq c\tau_n \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^4 + \frac{\tau_n}{2M} \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 \\ & \leq c\tau_{n-1} \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \frac{\tau_{n-1}}{2} \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 \\ & + c\tau_1 \|\nabla \mathbf{v}_h^0\|^4 + \frac{\tau_1}{2M} \|A_h \mathbf{v}_h^0\|^2, \end{aligned}$$

这里 $\tau_0 = 0$. 将上式代入到式 (3.9) 中, 有

$$\begin{aligned} & \|\nabla \mathbf{v}_h^n\|^2 - \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 + \frac{\tau_n}{2} \|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 - \frac{\tau_{n-1}}{2} \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 \\ & \leq c\tau_{n-1} \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + c\tau_1 \left(\|\nabla \mathbf{v}_h^0\|^4 + \|A_h \mathbf{v}_h^0\|^2 \right). \end{aligned}$$

结合离散 Gronwall 不等式和定理 3.1 可得

$$\|\nabla \mathbf{v}_h^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|A_h \mathbf{v}_h^k\|^2 \lesssim \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + \tau_1 \left(\|\mathbf{v}_h^0\|^4 + \|A_h \mathbf{v}_h^0\|^2 \right).$$

然后, 取 $\mathbf{w}_h = 2\tau_n A_h^2 \mathbf{v}_h^n \in \dot{\mathbf{X}}_h$, $q_h = 0$, 成立

$$\begin{aligned} & \|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 - \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \|A_h(\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1})\|^2 + 2\tau_n \|A_h^2 \mathbf{v}_h^n\|^2 \\ & + \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, A_h^2 \mathbf{v}_h^n) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

由定理 3.1 和引理 2.6 可得

$$\begin{aligned} & \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, A_h^2 \mathbf{v}_h^n) \\ & \leq \left| \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, A_h^2 \mathbf{v}_h^n) \right| \\ & \leq c\tau_n |S_h^n| \|\mathbf{v}_h^{n-1}\|^{1/2} \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\| \|A_h^2 \mathbf{v}_h^{n-1}\|^{1/2} \|A_h^2 \mathbf{v}_h^n\| \\ & \leq c\tau_n \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^4 + \frac{\tau_n}{2M} \|A_h^2 \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \|A_h^2 \mathbf{v}_h^n\|^2 \\ & \leq c\tau_{n-1} \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \frac{\tau_{n-1}}{2} \|A_h^2 \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \|A_h^2 \mathbf{v}_h^n\|^2 \\ & + c\tau_1 \|A_h \mathbf{v}_h^0\|^4 + \frac{\tau_1}{2M} \|A_h^2 \mathbf{v}_h^0\|^2. \end{aligned}$$

将上式代入到式 (3.10) 中, 有

$$\begin{aligned} & \|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 - \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \|A_h^2 \mathbf{v}_h^n\|^2 + \frac{\tau_n}{2} \|A_h^2 \mathbf{v}_h^n\|^2 - \frac{\tau_{n-1}}{2} \|A_h^2 \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 \\ & \leq c\tau_{n-1} \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 \|A_h \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + c\tau_1 \left(\|A_h \mathbf{v}_h^0\|^4 + \|A_h^2 \mathbf{v}_h^0\|^2 \right). \end{aligned}$$

结合式 (3.7), 离散 Gronwall 不等式和定理 3.1 可得

$$\|A_h \mathbf{v}_h^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|A_h^2 \mathbf{v}_h^k\|^2 \lesssim \|A_h \mathbf{v}_h^0\|^2 + \tau_1 \left(\|A_h \mathbf{v}_h^0\|^4 + \|A_h^2 \mathbf{v}_h^0\|^2 \right).$$

最后, 在式 (3.5) 中取 $\varphi_h = 2(-\Delta_h)^r \tau_n u_h^n \in V_h$, $r = 0, 1, 2$, 有

$$\begin{aligned} & \|(-\Delta_h)^{r/2} u_h^n\|^2 - \|(-\Delta_h)^{r/2} u_h^{n-1}\|^2 + \|(-\Delta_h)^{r/2} (u_h^n - u_h^{n-1})\|^2 \\ & + 2\tau_n \|(-\Delta_h)^{(r+1)/2} u_h^n\|^2 = -2\tau_n (\mathbf{v}_h^n \cdot \nabla u_h^n, (-\Delta_h)^r u_h^n), \end{aligned} \quad (3.11)$$

这里

$$\|(-\Delta_h)^{1/2} v_h\| = \|\nabla v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h.$$

对于等号右边, 我们有

$$\begin{aligned}
& -2\tau_n(\mathbf{v}_h^n \cdot \nabla u_h^n, (-\Delta_h)^r u_h^n) \\
& \leq \begin{cases} 2\tau_n \|\mathbf{v}_h^n\|_{L^\infty} \|\nabla u_h^n\| \|u_h^n\|, & r = 0, \\ 2\tau_n \|\mathbf{v}_h^n\|_{L^\infty} \|\nabla u_h^n\| \|\Delta_h u_h^n\|, & r = 1, \\ 2\tau_n \|\mathbf{v}_h^n\|_{L^\infty} \left\| (-\Delta_h)^{1/2} \nabla u_h^n \right\| \left\| (-\Delta_h)^{-1/2} (-\Delta_h)^2 u_h^n \right\|, & r = 2, \end{cases} \\
& \leq c\tau_n \left\| (-\Delta_h)^{r/2} u_h^n \right\| \left\| (-\Delta_h)^{(r+1)/2} u_h^n \right\| \\
& \leq c\tau_n \left\| (-\Delta_h)^{r/2} u_h^n \right\|^2 + \frac{3\tau_n}{2} \left\| (-\Delta_h)^{(r+1)/2} u_h^n \right\|^2,
\end{aligned}$$

这里, 我们使用了离散 Gagliardo–Nirenberg 估计

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L^\infty} \lesssim \|\mathbf{v}_h\|^{1/2} \|A_h \mathbf{v}_h\|^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h,$$

以及结论式 (3.7) 和式 (3.8) 中范数 $\|\mathbf{v}_h^n\|$ 和 $\|A_h \mathbf{v}_h^n\|$ 关于 n 的一致有界性. 将上式代入式 (3.11) 中, 求和得

$$\begin{aligned}
& \left\| (-\Delta_h)^{r/2} u_h^n \right\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau_k \left\| (-\Delta_h)^{(r+1)/2} u_h^k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n \left\| (-\Delta_h)^{r/2} (u_h^k - u_h^{k-1}) \right\|^2 \\
& \leq c\tau_n \left\| (-\Delta_h)^{r/2} u_h^n \right\|^2 + c \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \left\| (-\Delta_h)^{r/2} u_h^k \right\|^2 + \left\| (-\Delta_h)^{r/2} u_h^0 \right\|^2.
\end{aligned}$$

利用离散 Gronwall 不等式可得最终结论. ■

3.3 误差估计

因为误差估计的证明比较冗长, 所以这里我们就只展示结果, 详细的证明过程就放在了下一章节中.

定理 3.3 令 $(\mathbf{v}(t), S(t), u(t))$ 和 $(\mathbf{v}_h^n, S_h^n, u_h^n)$ 分别为 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程(3.2)及其全离散格式(3.5)的解, 且初值 $(\mathbf{v}^0, u^0) \in (\dot{\mathbf{X}} \cap L^\infty) \times (V \cap L^\infty)$. 那么对于任意的 $n \geq 1$ 和充分小的 τ , 成立

$$\|\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}_h^n\| \lesssim \tau + \sigma^{-\frac{1}{2}}(t_n) h^2, \quad |S(t_n) - S_h^n| \lesssim \tau, \quad \|u(t_n) - u_h^n\| \lesssim \tau + \sigma^{-\frac{1}{2}}(t_n) h^2.$$

第四章 定理 3.3 的证明

在本章节, 我们对收敛性结果 (定理 3.3) 给出详细的证明. 该证明主要分成两步, 第一步先讨论了数值格式(3.5)的相容误差 (4.1 节), 第二步利用前面得到的相容误差估计以及一些离散 Sobolev 插值不等式, 例如离散 Ladyzhenskaya 不等式 (引理 2.7), 得到了全局误差的估计 (4.2 节). 在相容误差的具体估计过程中, 我们使用了负模估计方法, 借助于该方法以及我们所用的特殊的时间网格剖分, 就可以消除掉解在 0 时刻附近的弱奇异性对收敛阶的负面影响. 此外, 在估计浓度场的全局误差过程中, 我们通过引入一个辅助方程将这部分误差分解成了两部分, 达到了降低分析难度的目的.

4.1 相容误差

由数值格式(3.6)以及原方程的等价形式(3.2), 可得 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) + \frac{S_h(t_n)}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) + A_h \mathbf{v}_h(t_n) = \mathcal{E}_1^n + \mathcal{E}_2^n, \\ \bar{\partial}_\tau S_h(t_n) = -\frac{1}{T} S_h(t_n) + \frac{b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} + \mathcal{E}_3^n + \mathcal{E}_4^n, \\ \bar{\partial}_\tau u_h(t_n) - \Delta_h u_h(t_n) + \mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla u_h(t_n) = R^n, \end{cases}$$

其中,

$$R^n = \bar{\partial}_\tau u_h(t_n) - \partial_t u_h(t_n),$$

$$\mathcal{E}_1^n = \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) - \partial_t \mathbf{v}_h(t_n),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2^n &= \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) - \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_n) \\ &= \mathbb{P}_h((\mathbf{v}_h(t_{n-1}) - \mathbf{v}_h(t_n)) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) + \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla)(\mathbf{v}_h(t_{n-1}) - \mathbf{v}_h(t_n)) \\ &=: \mathcal{E}_{2,1}^n + \mathcal{E}_{2,2}^n, \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_3^n = \bar{\partial}_\tau S_h(t_n) - \partial_t S_h(t_n),$$

以及

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4^n &= \frac{b(\mathbf{v}_h(t_n), \mathbf{v}_h(t_n), \mathbf{v}_h(t_n)) - b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \\ &= \frac{b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n), \mathbf{v}_h(t_n)) - b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \end{aligned}$$

$$= \frac{b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}}.$$

上述定义的相容误差满足如下估计.

引理 4.1 (1). 对于任意给定的 $\varphi_h \in V_h$ 以及 $n \geq 1$, 成立

$$|(R^n, \varphi_h)| \lesssim \sigma^{-1}(t_n) \tau_n \|\nabla \varphi_h\|.$$

(2). 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$ 以及 $n \geq 1$, 成立

$$|(\mathcal{E}_1^n, \mathbf{w}_h)| \lesssim \sigma^{-1}(t_n) \tau_n \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \quad |(\mathcal{E}_2^n, \mathbf{w}_h)| \lesssim \sigma^{-1}(t_n) \tau_n \|\nabla \mathbf{w}_h\|,$$

和

$$|\mathcal{E}_3^n| \lesssim \tau_n, \quad |\mathcal{E}_4^n| \lesssim \sigma^{-1}(t_n) \tau_n.$$

证明 (1). 当 $n = 1$ 时, 对于任意的 $\varphi_h \in V_h$, 我们有

$$\begin{aligned} |(R^1, \varphi_h)| &\leq \tau_1^{-1} |(u_h(t_1) - u_h(t_0), \varphi_h)| + |(\partial_t u_h(t_1), \varphi_h)| \\ &= \tau_1^{-1} \left| \left(\int_0^{\tau_1} \partial_t u_h(t) dt, \varphi_h \right) \right| + |(\partial_t u_h(t_1), \varphi_h)| \\ &\leq \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} |(\partial_t u_h(t), \varphi_h)| dt + |(\partial_t u_h(t_1), \varphi_h)| \\ &= \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} |(\nabla u_h(t), \nabla \varphi_h) + c(\mathbf{v}_h(t), u_h(t), \varphi_h)| dt \\ &\quad + |(\nabla u_h(t_1), \nabla \varphi_h) + c(\mathbf{v}_h(t_1), u_h(t_1), \varphi_h)| \\ &\lesssim \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} (\|\nabla \mathbf{v}_h(t)\| + 1) \|\nabla u_h(t)\| \|\nabla \varphi_h\| dt \\ &\quad + (\|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\| + 1) \|\nabla u_h(t_1)\| \|\nabla \varphi_h\| \\ &\lesssim \|\nabla \varphi_h\|. \end{aligned}$$

当 $n \geq 2$ 时, 由 Taylor 展开可得

$$\bar{\partial}_\tau u_h(t_n) - \partial_t u_h(t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{\tau_n} \partial_{ss} u_h(s) ds.$$

对弱形式 (式 (2.4)) 中的最后一个方程等号两端关于时间 t 求导, 得

$$(\partial_{tt} u_h, \varphi_h) + c(\partial_t \mathbf{v}_h, u_h, \varphi_h) + c(\mathbf{v}_h, \partial_t u_h, \varphi_h) + (\nabla \partial_t u_h, \nabla \varphi_h) = 0.$$

所以, 对于任意的 $\varphi_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} &|(\partial_{tt} u_h(t), \varphi_h)| \\ &\leq |c(\mathbf{v}_h(t), \partial_t u_h(t), \varphi_h)| + |c(\partial_t \mathbf{v}_h(t), u_h(t), \varphi_h)| + |(\nabla \partial_t u_h(t), \nabla \varphi_h)| \\ &\lesssim (\|\nabla \mathbf{v}_h(t)\| + 1) \|\partial_t u_h(t)\|_{H^1} \|\nabla \varphi_h\| \\ &\lesssim \sigma^{-1}(t) \|\nabla \varphi_h\|. \end{aligned}$$

于是, 我们有

$$|(\partial_{tt}u_h, \varphi_h)| \lesssim \|\partial_t u_h\|_{H^1} \|\nabla \varphi_h\| \lesssim \sigma^{-1}(t) \|\nabla \varphi_h\|.$$

因此, 对于任意的 $\varphi_h \in V_h$ 和 $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} |(R^n, \varphi_h)| &= \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{\tau_n} (\partial_{ss}u_h(s), \varphi_h) ds \right| \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(\partial_{ss}u_h(s), \varphi_h)| ds \\ &\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |(\partial_{tt}u_h(t), \varphi_h)| \\ &\lesssim \sigma^{-1}(t_{n-1}) \tau_n \|\nabla \varphi_h\|. \end{aligned}$$

(2). 当 $n = 1$ 时, 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$, 我们有

$$\begin{aligned} |(\mathcal{E}_1^1, \mathbf{w}_h)| &\leq \tau_1^{-1} |(\mathbf{v}_h(t_1) - \mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{w}_h)| + |(\partial_t \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\ &= \tau_1^{-1} \left| \left(\int_0^{\tau_1} \partial_t \mathbf{v}_h(t) dt, \mathbf{w}_h \right) \right| + |(\partial_t \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\ &\leq \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} |(\partial_t \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| dt + |(\partial_t \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\ &= \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} |(\nabla \mathbf{v}_h(t), \nabla \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{v}_h(t), \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| dt \\ &\quad + |(\nabla \mathbf{v}_h(t_1), \nabla \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\ &\lesssim \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} (\|\nabla \mathbf{v}_h(t)\| + 1) \|\nabla \mathbf{v}_h(t)\| \|\nabla \mathbf{w}_h\| dt \\ &\quad + (\|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\| + 1) \|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\| \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\ &\lesssim \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{E}_2^1, \mathbf{w}_h)| &\lesssim |b(\mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{w}_h)| + |b(\mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\ &\lesssim (\|\nabla \mathbf{v}_h(t_0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\|) \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\ &\lesssim \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \end{aligned}$$

以及

$$|\mathcal{E}_4^1| \lesssim |b(\mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{v}_h(t_1))| \lesssim \|\nabla \mathbf{v}_h(t_0)\|^2 \|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\| \lesssim 1.$$

当 $n \geq 2$ 时, 由 Taylor 展开可得

$$\bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) - \partial_t \mathbf{v}_h(t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{\tau_n} \partial_{ss} \mathbf{v}_h(s) ds.$$

对弱形式 (式 (2.4)) 中第一个方程等号两端关于时间 t 求导, 得

$$(\partial_{tt}\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + b(\partial_t\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{v}_h, \partial_t\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + (\nabla\partial_t\mathbf{v}_h, \nabla\mathbf{w}_h) = 0,$$

所以, 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$,

$$\begin{aligned} & |(\partial_{tt}\mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| \\ & \leq |b(\mathbf{v}_h(t), \partial_t\mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| + |b(\partial_t\mathbf{v}_h(t), \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| + |(\nabla\partial_t\mathbf{v}_h(t), \nabla\mathbf{w}_h)| \\ & \lesssim (\|\nabla\mathbf{v}_h(t)\| + 1)\|\partial_t\mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla\mathbf{w}_h\| \\ & \lesssim \sigma^{-1}(t)\|\nabla\mathbf{w}_h\|. \end{aligned}$$

于是, 我们有

$$|(\partial_{tt}\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| \lesssim \|\partial_t\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla\mathbf{w}_h\| \lesssim \sigma^{-1}(t)\|\nabla\mathbf{w}_h\|.$$

因此, 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$ 和 $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{E}_1^n, \mathbf{w}_h)| &= \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{\tau_n} (\partial_{ss}\mathbf{v}_h(s), \mathbf{w}_h) \, ds \right| \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(\partial_{ss}\mathbf{v}_h(s), \mathbf{w}_h)| \, ds \\ &\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |(\partial_{tt}\mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| \\ &\lesssim \sigma^{-1}(t_{n-1})\tau_n\|\nabla\mathbf{w}_h\|, \\ |(\mathcal{E}_{2,1}^n, \mathbf{w}_h)| &= |b(\mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{w}_h)| \\ &\lesssim \|\mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1})\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla\mathbf{v}_h(t_{n-1})\|\|\nabla\mathbf{w}_h\| \\ &\lesssim \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t\mathbf{v}_h(t) \, dt \right\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla\mathbf{w}_h\| \\ &\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} \|\partial_t\mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla\mathbf{w}_h\| \\ &\lesssim \sigma^{-1}(t_{n-1})\tau_n\|\nabla\mathbf{w}_h\|, \\ |(\mathcal{E}_{2,2}^n, \mathbf{w}_h)| &= |b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{w}_h)| \\ &\lesssim \|\mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1})\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla\mathbf{v}_h(t_{n-1})\|\|\nabla\mathbf{w}_h\| \\ &\lesssim \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t\mathbf{v}_h(t) \, dt \right\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla\mathbf{w}_h\| \\ &\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} \|\partial_t\mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla\mathbf{w}_h\| \\ &\lesssim \sigma^{-1}(t_{n-1})\tau_n\|\nabla\mathbf{w}_h\|, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_4^n| &= \frac{|b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))|}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \\
&\lesssim \|\mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1})\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{v}_h(t_{n-1})\| \|\nabla \mathbf{v}_h(t_n)\| \\
&\lesssim \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t \mathbf{v}_h(t) dt \right\|_{H^1} \\
&\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} \|\partial_t \mathbf{v}_h(t)\|_{H^1} \\
&\lesssim \sigma^{-1}(t_{n-1}) \tau_n.
\end{aligned}$$

所以,

$$|(\mathcal{E}_2^n, \mathbf{v}_h)| \lesssim \sigma^{-1}(t_{n-1}) \tau_n \|\nabla \mathbf{w}_h\|.$$

最后, 因为 $S_h(t)$ 是一个光滑函数, 所以

$$|\mathcal{E}_3^n| \lesssim \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |S_h''(t)| \tau_n \lesssim \tau_n.$$

由 $t_n \sim t_{n-1}$, $n \geq 2$, 可得结论. ■

4.2 全局误差估计

记 (时间半离散的) 全局误差

$$\mathbf{e}_v^n = \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h^n, \quad e_S^n = S_h(t_n) - S_h^n,$$

以及

$$e_u^n = u_h(t_n) - u_h^n = u_h(t_n) - \bar{u}_h^n + \bar{u}_h^n - u_h^n =: \theta^n + \eta^n,$$

其中 \bar{u}_h^n 满足方程

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_\tau \bar{u}_h^n, \varphi_h) + (\nabla \bar{u}_h^n, \nabla \varphi_h) + (\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla \bar{u}_h^n, \varphi_h) = 0, & \forall \varphi_h \in V_h, \\ \bar{u}_h^0 = P_h u^0. \end{cases} \quad (4.1)$$

那么这些全局误差满足如下误差方程:

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{e}_v^n + A_h \mathbf{e}_v^n = \mathcal{E}_1^n + \mathcal{E}_2^n + \mathcal{F}_1^n, & n \geq 1, \\ \bar{\partial}_\tau e_S^n = -\frac{1}{T} e_S^n + \mathcal{E}_3^n + \mathcal{E}_4^n + \mathcal{F}_2^n, & n \geq 1, \\ \mathbf{e}_v^0 = \mathbf{0}, \quad e_S^0 = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_\tau \theta^n, \varphi_h) + (\nabla \theta^n, \nabla \varphi_h) + (\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla \theta^n, \varphi_h) = (R^n, \varphi_h), & \forall \varphi_h \in V_h, \\ \theta^0 = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

和

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_\tau \eta^n, \varphi_h) + (\nabla \eta^n, \nabla \varphi_h) + (e_v^n \cdot \nabla \bar{u}_h^n, \varphi_h) + (v_h^n \cdot \nabla \eta^n, \varphi_h) = 0, & \forall \varphi_h \in V_h, \\ \eta^0 = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^n &= -\frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} (S_h(t_n) \mathbb{P}_h(v_h(t_{n-1}) \cdot \nabla) v_h(t_{n-1}) - S_h^n \mathbb{P}_h(v_h^{n-1} \cdot \nabla) v_h^{n-1}) \\ &= -(\mathbb{P}_h(v_h(t_{n-1}) \cdot \nabla) v_h(t_{n-1}) - \mathbb{P}_h(v_h^{n-1} \cdot \nabla) v_h^{n-1}) \\ &\quad - \frac{e_S^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}_h(v_h^{n-1} \cdot \nabla) v_h^{n-1} \\ &= -(\mathbb{P}_h(e_v^{n-1} \cdot \nabla) v_h(t_{n-1}) + \mathbb{P}_h(v_h^{n-1} \cdot \nabla) e_v^{n-1}) \\ &\quad - \frac{e_S^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}_h(v_h^{n-1} \cdot \nabla) v_h^{n-1} \\ &=: \mathcal{F}_{1,1}^n + \mathcal{F}_{1,2}^n, \\ \mathcal{F}_2^n &= \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} (b(v_h(t_{n-1}), v_h(t_{n-1}), v_h(t_n)) - b(v_h^{n-1}, v_h^{n-1}, v_h^n)) \\ &= \frac{b(e_v^{n-1}, v_h(t_{n-1}), v_h(t_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} + \frac{b(v_h^{n-1}, e_v^{n-1}, v_h(t_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} + \frac{b(v_h^{n-1}, v_h^{n-1}, e_v^n)}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}}. \end{aligned}$$

引理 4.2 对于任意的 $n \geq 1$, 成立

$$\|e_v^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla e_v^k\|^2 \lesssim \tau^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k |e_S^k|^2.$$

证明 在误差方程(4.2)的第一个式子等号两边和 $2\tau_n e_v^n$ ($n \geq 1$) 做内积, 得

$$\|e_v^n\|^2 - \|e_v^{n-1}\|^2 + \|e_v^n - e_v^{n-1}\|^2 + 2\tau_n \|\nabla e_v^n\|^2 = 2\tau_n (\mathcal{E}_1^n + \mathcal{E}_2^n + \mathcal{F}_1^n, e_v^n). \quad (4.5)$$

根据引理 4.1, 我们有

$$(\mathcal{E}_1^n, e_v^n) \leq ct_n^{-1} \tau_n \|\nabla e_v^n\| \leq ct_n^{-2} \tau_n^2 + \frac{1}{16} \|\nabla e_v^n\|^2, \quad (4.6)$$

和

$$(\mathcal{E}_2^n, e_v^n) \leq ct_n^{-1} \tau_n \|\nabla e_v^n\| \leq ct_n^{-2} \tau_n^2 + \frac{1}{16} \|\nabla e_v^n\|^2. \quad (4.7)$$

再者, 对于任意的 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{1,1}^n, e_v^n) &\leq |b(e_v^{n-1}, v_h(t_{n-1}), e_v^n)| + |b(v_h^{n-1}, e_v^{n-1}, e_v^n)| \\ &\leq c \|\nabla e_v^n\| \|e_v^{n-1}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla e_v^{n-1}\|^{\frac{1}{2}} (\|\nabla v_h(t_{n-1})\| + \|\nabla v_h^{n-1}\|) \\ &\leq \frac{1}{16} \|\nabla e_v^n\|^2 + \frac{1}{4M} \|\nabla e_v^{n-1}\|^2 + c \|e_v^{n-1}\|^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

以及

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{1,2}^n, \mathbf{e}_v^n) &\leq c|e_S^n| |b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{e}_v^n)| \\
&\leq c|e_S^n| \|\nabla \mathbf{e}_v^n\| \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 \\
&\leq \frac{1}{16} \|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 + c|e_S^n|^2.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

将式 (4.6)–式 (4.9) 代入式 (4.5) 中, 舍去不等号左边的非负项得

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{e}_v^n\|^2 - \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + \tau_n \|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 + \frac{\tau_n}{2} \|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 \\
&\leq \frac{\tau_n}{2M} \|\nabla \mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + c\tau_n \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + c\tau_n |e_S^n|^2 + ct_n^{-2} \tau_n^3, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时, 记 $\tau_0 = 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{e}_v^1\|^2 - \|\mathbf{e}_v^0\|^2 + \tau_1 \|\nabla \mathbf{e}_v^1\|^2 + \frac{\tau_1}{2} \|\nabla \mathbf{e}_v^1\|^2 - \frac{\tau_0}{2} \|\nabla \mathbf{e}_v^0\|^2 \\
&\leq c\tau_0 \|\mathbf{e}_v^0\|^2 + c\tau_1 |e_S^1|^2 + ct_1^{-2} \tau_1^3.
\end{aligned}$$

又因为当 $n \geq 2$ 时, $\tau_n \leq M\tau_{n-1}$, 所以

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{e}_v^n\|^2 - \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + \tau_n \|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 + \frac{\tau_n}{2} \|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 - \frac{\tau_{n-1}}{2} \|\nabla \mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 \\
&\leq c\tau_{n-1} \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + c\tau_n |e_S^n|^2 + ct_n^{-2} \tau_n^3.
\end{aligned}$$

结合上面两个式子以及离散 Gronwall 不等式, 有

$$\|\mathbf{e}_v^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla \mathbf{e}_v^k\|^2 \lesssim \exp \left\{ c \sum_{k=1}^n \tau_k \right\} \left(\sum_{k=1}^n \tau_k |e_S^k|^2 + \tau_1 + \sum_{k=2}^n t_k^{-2} \tau_k^3 \right).$$

最后, 当 $\alpha \in (1/2, 1)$ 时, 有

$$\tau_1 = \tau^{\frac{1}{1-\alpha}} \lesssim \tau^2,$$

和

$$\sum_{k=2}^n t_k^{-2} \tau_k^3 \lesssim \tau^2 \sum_{k=2}^n \tau_k t_k^{2\alpha-2} \leq \tau^2 \int_0^T t^{2\alpha-2} dt \lesssim \tau^2.$$

■

引理 4.3 对于任意的 $n \geq 1$, 当最大时间步长 τ 充分小时, 成立

$$|e_S^n|^2 \lesssim \tau^2.$$

证明 在误差方程(4.2)的第二个式子等号两边同乘以 $2\tau_n e_S^n$ ($n \geq 1$), 得

$$|e_S^n|^2 - |e_S^{n-1}|^2 + |e_S^n - e_S^{n-1}|^2 = 2\tau_n (\mathcal{E}_3^n + \mathcal{E}_4^n + \mathcal{F}_2^n) e_S^n. \tag{4.10}$$

根据引理 4.1,

$$\mathcal{E}_3^n e_S^n \leq c e_S^n \tau_n \leq c \tau_n^2 + \frac{|e_S^n|^2}{12},$$

$$\mathcal{E}_4^n e_S^n \leq c e_S^n t_n^{-1} \tau_n \leq c t_n^{-2} \tau_n^2 + \frac{|e_S^n|^2}{12}.$$

根据定义,

$$\mathcal{F}_2^n e_S^n \leq c(\|\nabla \mathbf{e}_v^n\| + \|\nabla \mathbf{e}_v^{n-1}\|)|e_S^n| \leq c(\|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 + \|\nabla \mathbf{e}_v^{n-1}\|^2) + \frac{|e_S^n|^2}{12}.$$

将上述估计式代入(4.10)中, 再根据引理 4.2, 有

$$|e_S^n|^2 - |e_S^{n-1}|^2 \leq \frac{\tau_n}{2}|e_S^n|^2 + c\tau_n(\|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 + \|\nabla \mathbf{e}_v^{n-1}\|^2).$$

求和得

$$\begin{aligned} |e_S^n|^2 &\leq \frac{\tau_n}{2}|e_S^n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k |e_S^k|^2 + c \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla \mathbf{e}_v^k\|^2 \\ &\leq \frac{\tau_n(1+c)}{2}|e_S^n|^2 + c \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k |e_S^k|^2 + c\tau^2. \end{aligned}$$

取 τ 充分小, 使得上式中的

$$\frac{\tau_n(1+c)}{2} \leq \frac{1}{2},$$

使用离散 Gronwall 不等式可得结果. ■

引理 4.4 对于任意的 $n \geq 1$, 当 τ 充分小时, 成立

$$\|\theta^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla \theta^k\|^2 \lesssim \tau^2.$$

证明 在误差方程(4.3)中取 $\varphi_h = 2\tau_n \theta^n$,

$$\begin{aligned} &\|\theta^n\|^2 - \|\theta^{n-1}\|^2 + \|\theta^n - \theta^{n-1}\|^2 + 2\tau_n \|\nabla \theta^n\|^2 \\ &= -2\tau_n(\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla \theta^n, \theta^n) - 2\tau_n(R^n, \theta^n) \\ &\leq 2\tau_n \|\mathbf{v}_h(t_n)\|_{L^\infty} \|\nabla \theta^n\| \|\theta^n\| + 2\tau_n^2 \sigma^{-1}(t_n) \|\nabla \theta^n\| \\ &\leq \frac{3\tau_n}{2} \|\nabla \theta^n\|^2 + c t_n^{-2} \tau_n^3 + c\tau_n \|\theta^n\|^2, \end{aligned}$$

这里我们同样用到了离散 Gagliardo–Nirenberg 估计

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L^\infty} \lesssim \|\mathbf{v}_h\|^{1/2} \|A_h \mathbf{v}_h\|^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h,$$

以及定理 2.1 和引理 4.1 的相关结论. 对上式关于 n 求和可得

$$\|\theta^n\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla \theta^k\|^2 \leq c\tau_n \|\theta^n\| + c \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \|\theta^k\|^2 + c\tau^2.$$

取 τ 充分小, 使得 $c\tau_n < 1/2$. 于是

$$\|\theta^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla \theta^k\|^2 \leq c \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \|\theta^k\|^2 + c\tau^2.$$

最后由 Gronwall 不等式, 有

$$\|e_h^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \|\nabla e_h^k\|^2 \lesssim \tau^2.$$

截止目前, 我们已经估计了误差 e_v^n , e_S^n 以及 θ^n , 还剩下一个 η^n 没有讨论. 为了估计 η^n , 我们还需要知道差分方程(4.1)的解的相关范数的有界性, 即下述引理.

引理 4.5 令 \bar{u}_h^n 为差分方程(4.1) 的解. 那么对于任意的 $n \geq 1$, 当 τ 充分小时, 成立

$$\|\Delta_h \bar{u}_h^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \tau_k \left\| (-\Delta_h)^{3/2} \bar{u}_h^k \right\|^2 \lesssim \|\Delta_h \bar{u}_h^0\|^2.$$

证明 在式 (4.1) 中取 $\varphi_h = 2(-\Delta_h)^2 \tau_n \bar{u}_h^n \in V_h$, 有

$$\begin{aligned} & \|\Delta_h \bar{u}_h^n\|^2 - \|\Delta_h \bar{u}_h^{n-1}\|^2 + \|\Delta_h (\bar{u}_h^n - \bar{u}_h^{n-1})\|^2 \\ & + 2\tau_n \left\| (-\Delta_h)^{3/2} \bar{u}_h^n \right\|^2 = -2\tau_n (\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla \bar{u}_h^n, (-\Delta_h)^2 \bar{u}_h^n). \end{aligned} \quad (4.11)$$

对于等号右边, 我们有

$$\begin{aligned} & -2\tau_n (\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla \bar{u}_h^n, (-\Delta_h)^2 \bar{u}_h^n) \\ & \leq c\tau_n t_n^{-1/4} \left\| (-\Delta_h)^{1/2} \nabla \bar{u}_h^n \right\| \left\| (-\Delta_h)^{3/2} \bar{u}_h^n \right\| \\ & \leq c\tau_n t_n^{-1/2} \left\| \Delta_h^{r/2} \bar{u}_h^n \right\|^2 + \frac{3\tau_n}{2} \left\| (-\Delta_h)^{3/2} \bar{u}_h^n \right\|^2. \end{aligned}$$

将上式代入(4.11)中, 求和得

$$\begin{aligned} & \|\Delta_h \bar{u}_h^n\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau_k \left\| (-\Delta_h)^{3/2} \bar{u}_h^k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n \|\Delta_h (\bar{u}_h^k - \bar{u}_h^{k-1})\|^2 \\ & \leq c\tau_n t_n^{-1/2} \|\Delta_h \bar{u}_h^n\|^2 + c \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k t_k^{-1/2} \|\Delta_h \bar{u}_h^k\|^2 + \left\| (\Delta_h)^{r/2} \bar{u}_h^0 \right\|^2. \end{aligned}$$

利用离散 Gronwall 不等式可得最终结论.

由上述引理, 我们可得关于 η^n 的估计.

引理 4.6 对于任意的 $n \geq 1$, 当 τ 充分小时, 我们有

$$\|\eta^n\| \lesssim \tau.$$

证明 在误差方程(4.4)中取 $\varphi_h = 2\tau_n e_u^n$, 由上述引理和引理 2.8 可得

$$\begin{aligned}
& \|\eta^n\|^2 - \|\eta^{n-1}\|^2 + \|\eta^n - \eta^{n-1}\|^2 + 2\tau_n \|\nabla \eta^n\|^2 \\
&= -2\tau_n (\mathbf{e}_v^n \cdot \nabla \bar{u}_h^n, \eta^n) \\
&\leq 2\tau_n \|\mathbf{e}_v^n\| \|\bar{u}_h^n\|^{1/2} \|\Delta_h \bar{u}_h^n\|^{1/2} \|\eta^n\|_{H^1} \\
&\leq c\tau_n \|\mathbf{e}_v^n\| \|\nabla \eta^n\| \\
&\leq c\tau_n \|\mathbf{e}_v^n\|^2 + \tau_n \|\nabla \eta^n\|^2.
\end{aligned}$$

最后关于 n 求和化简可得

$$\|\eta^n\|^2 \lesssim \sum_{k=1}^n \tau_k \|\mathbf{e}_v^k\|^2 \lesssim \sum_{k=1}^n \tau_k \tau^2 \lesssim \tau^2.$$

■

综合定理 2.2 以及上述几个引理的结果, 我们就可以得到最终的结论定理 3.3.

第五章 光滑初值下 Navier–Stokes 方程的 Crank–Nicolson–SAV–FEM 格式

本章主要讨论光滑初值下的, 即 $\mathbf{v}^0 \in \mathbf{H}^2 \cap \dot{\mathbf{X}} \cap L^\infty$ 时, N–S 方程

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v}(t) + (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t) - \Delta \mathbf{v}(t) + \nabla p = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0. \end{cases} \quad (\text{N–S})$$

假设时间剖分的步长 τ_n 满足

$$\begin{aligned} \tau_1 = \tau_2 = T \left(\frac{\tau}{T} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \alpha \in \left(\frac{3}{4}, 1 \right), \\ \tau_n \sim \tau \left(\frac{t_{n-1}}{T} \right)^\alpha, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.1)$$

那么方程的二阶 Crank–Nicolson–SAV–FEM 格式为: 求解 $(\mathbf{v}_h^n, p_h^n, S_h^n) \in \mathbf{X}_h \times Q_h \times \mathbb{R}$, 对于任意 $(\mathbf{w}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times Q_h$, 使得, 当 $n = 1, 2$ 时成立

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h^n, \mathbf{w}_h) + \frac{S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{w}_h) + (\nabla \mathbf{v}_h^n, \nabla \mathbf{w}_h) - (\bar{p}^n, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) = 0, \\ -(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_h^n, q_h) = 0, \\ \bar{\partial}_\tau S_h^n = -\frac{1}{T} S_h^n + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n), \\ \mathbf{v}_h^0 = \mathbb{P}_h \mathbf{v}^0, \quad S_h^0 = 1, \end{cases} \quad (5.2)$$

以及当 $n \geq 3$ 时成立

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h^n, \mathbf{w}_h) + \frac{\bar{S}_h^n}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} b(\tilde{\mathbf{v}}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h^n, \mathbf{w}_h) + (\nabla \bar{\mathbf{v}}_h^n, \nabla \mathbf{w}_h) - (\bar{p}^n, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) = 0, \\ -(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_h^n, q_h) = 0, \\ \bar{\partial}_\tau S_h^n = -\frac{1}{T} \bar{S}_h^n + \frac{1}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} b(\tilde{\mathbf{v}}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h^n), \end{cases} \quad (5.3)$$

这里,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_h^n &= \left(1 + \frac{r_n}{2} \right) \mathbf{v}_h^{n-1} - \frac{r_n}{2} \mathbf{v}_h^{n-2}, \quad r_n = \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}, \quad n \geq 2, \\ \bar{\mathbf{v}}_h^n &= \frac{\mathbf{v}_h^n + \mathbf{v}_h^{n-1}}{2}, \quad \bar{p}_h^n = \frac{p_h^n + p_h^{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

$$\bar{S}_h^n = \frac{S_h^n + S_h^{n-1}}{2}, \quad \bar{t}_n = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}.$$

写成抽象方程的形式为: 求解 $(\mathbf{v}_h^n, S_h^n) \in \dot{\mathbf{X}}_h \times Q_h$, 使得当 $n = 1, 2$ 时成立

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h^n + \frac{S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h^{n-1} + A_h \mathbf{v}_h^n = 0, \\ \bar{\partial}_\tau S_h^n = -\frac{1}{T} S_h^n + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n), \end{cases} \quad (5.4)$$

当 $n \geq 3$ 时, 成立

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h^n + \frac{\bar{S}_h^n}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} \mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h^n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}_h^n + A_h \bar{\mathbf{v}}_h^n = 0, \\ \bar{\partial}_\tau S_h^n = -\frac{1}{T} \bar{S}_h^n + \frac{1}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} b(\tilde{\mathbf{v}}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h^n). \end{cases} \quad (5.5)$$

下面我们简单叙述一下该格式的 (无条件能量) 稳定性.

5.1 稳定性

定理 5.1 数值格式(5.2)–(5.3)是无条件能量稳定的, 即对于任意的 $n \geq 1$, 成立

$$E^n \leq E^{n-1} \leq \|\mathbf{v}_h^0\| + 1.$$

进一步, 当 $n = 1, 2$ 时,

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 + |S_h^n|^2 + 2 \sum_{k=1}^n \tau_k \|\mathbf{v}_h^k\|^2 \leq \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + 1,$$

当 $n \geq 3$ 时,

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 + |S_h^n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \tau_k \|\mathbf{v}_h^k + \mathbf{v}_h^{k-1}\|^2 \leq \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + 1.$$

证明 在格式(5.2)中取 $\mathbf{w}_h = 2\tau_n \mathbf{v}_h^n$, $q_h = 0$ 可知, 当 $n = 1, 2$ 时, 有

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 - \|\mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + 2\tau_n \|\nabla \mathbf{v}_h^n\|^2 + \frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n) = 0.$$

对(5.2)中的第三个方程等号两端同时乘以 $2\tau_n S_h^n$ 可得

$$\frac{2\tau_n S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n) = |S_h^n|^2 - |S_h^{n-1}|^2 + |S_h^n - S_h^{n-1}|^2 + \frac{2\tau_n}{T} |S_h^n|^2.$$

将上述两个式子结合起来并将非负项 $\|\mathbf{v}_h^n - \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2$, $|S_h^n - S_h^{n-1}|^2$ 和 $2\tau_n |S_h^n|^2/T$ 舍去, 可得当 $n = 1, 2$ 时成立

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 - \|\mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + |S_h^n|^2 - |S_h^{n-1}|^2 \leq -2\tau_n \|\mathbf{v}_h^n\|^2. \quad (5.6)$$

在格式(5.3)中取 $\mathbf{w}_h = 2\tau_n \bar{\mathbf{v}}_h^n$, 可得 $n \geq 3$ 时成立

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 - \|\mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + 2\tau_n \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_h^n\|^2 + \frac{2\tau_n \bar{S}_h^n}{\exp\left\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\right\}} b(\tilde{\mathbf{v}}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h^n) = 0.$$

同样的, 对(5.2)中的第三个方程等号两端同时乘以 $2\tau_n \bar{S}_h^n$ 可得

$$\frac{2\tau_n \bar{S}_h^n}{\exp\left\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\right\}} b(\tilde{\mathbf{v}}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h^n) = |S_h^n|^2 - |S_h^{n-1}|^2 + \frac{2\tau_n}{T} |\bar{S}_h^n|.$$

联合上述两个式子可知当 $n \geq 3$ 时成立

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 - \|\mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 + |S_h^n|^2 - |S_h^{n-1}|^2 \leq -2\tau_n \|\bar{\mathbf{v}}_h^n\|^2. \quad (5.7)$$

最后, 对不等式(5.6)和(5.7)关于 n 求和可得 $n = 1, 2$ 时,

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 + |S_h^n|^2 + 2 \sum_{k=1}^n \tau_k \|\mathbf{v}_h^k\|^2 \leq \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + 1,$$

$n \geq 3$ 时,

$$\|\mathbf{v}_h^n\|^2 + |S_h^n|^2 + 2 \sum_{k=1}^2 \tau_k \|\mathbf{v}_h^k\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \tau_k \|\mathbf{v}_h^k + \mathbf{v}_h^{k-1}\|^2 \leq \|\mathbf{v}_h^0\|^2 + 1.$$

■

5.2 相容误差

在这一部分, 我们讨论二阶格式(5.2)–(5.3)的相容误差, 满足如下式子的 \mathcal{E}_1^n , \mathcal{E}_2^n , \mathcal{E}_3^n , \mathcal{E}_4^n , \mathcal{E}_5^n 和 \mathcal{E}_6^n :

(1) $n = 1, 2$ 时,

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) + \frac{S_h(t_n)}{\exp\left\{-\frac{t_n}{T}\right\}} \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) + A_h \mathbf{v}_h(t_n) = \mathcal{E}_1^n + \mathcal{E}_2^n, \\ \bar{\partial}_\tau S_h(t_n) = -\frac{1}{T} S_h(t_n) + \frac{b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\left\{-\frac{t_n}{T}\right\}} + \mathcal{E}_3^n + \mathcal{E}_4^n, \end{cases}$$

(2) $n \geq 3$ 时,

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) + \frac{\bar{S}_h(t_n)}{\exp\left\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\right\}} \mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) + A_h \bar{\mathbf{v}}_h(t_n) = \mathcal{E}_1^n + \mathcal{E}_2^n + \mathcal{E}_5^n, \\ \bar{\partial}_\tau S_h(t_n) = -\frac{1}{T} \bar{S}_h(t_n) + \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \bar{\mathbf{v}}_h(t_n))}{\exp\left\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\right\}} + \mathcal{E}_3^n + \mathcal{E}_4^n + \mathcal{E}_6^n, \end{cases}$$

其中,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) &= \left(1 + \frac{r_n}{2}\right) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) - \frac{r_n}{2} \mathbf{v}_h(t_{n-2}), \\ \bar{\mathbf{v}}_h(t_n) &= \frac{\mathbf{v}_h(t_n) + \mathbf{v}_h(t_{n-1})}{2}, \quad \bar{S}_h(t_n) = \frac{S_h(t_n) + S_h(t_{n-1})}{2}.\end{aligned}$$

根据数值格式 (5.4)–(5.5), 我们可得相容误差 $\mathcal{E}_1^n, \mathcal{E}_2^n, \mathcal{E}_3^n, \mathcal{E}_4^n, \mathcal{E}_5^n$ 和 \mathcal{E}_6^n 的具体表达式如下:

(1) $n = 1, 2$ 时,

$$\mathcal{E}_1^n = \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) - \partial_t \mathbf{v}_h(t_n),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2^n &= \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) - \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_n) \\ &= \mathbb{P}_h((\mathbf{v}_h(t_{n-1}) - \mathbf{v}_h(t_n)) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) + \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla)(\mathbf{v}_h(t_{n-1}) - \mathbf{v}_h(t_n)) \\ &=: \mathcal{E}_{2,1}^n + \mathcal{E}_{2,2}^n,\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_3^n = \bar{\partial}_\tau S_h(t_n) - \partial_t S_h(t_n),$$

以及

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_4^n &= \frac{b(\mathbf{v}_h(t_n), \mathbf{v}_h(t_n), \mathbf{v}_h(t_n)) - b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\left\{-\frac{t_n}{T}\right\}} \\ &= \frac{b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n), \mathbf{v}_h(t_n)) - b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\left\{-\frac{t_n}{T}\right\}} \\ &= \frac{b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\left\{-\frac{t_n}{T}\right\}},\end{aligned}$$

(2) $n \geq 3$ 时,

$$\mathcal{E}_1^n = \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) - \partial_t \mathbf{v}_h(\bar{t}_n),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2^n &= \mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(\bar{t}_n) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) \\ &= \mathbb{P}_h((\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(\bar{t}_n)) \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) + \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(\bar{t}_n) \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(\bar{t}_n)) \\ &=: \mathcal{E}_{2,1}^n + \mathcal{E}_{2,2}^n,\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_3^n = \bar{\partial}_\tau S_h(t_n) - \partial_t S_h(\bar{t}_n),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_4^n &= \frac{b(\mathbf{v}_h(\bar{t}_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n)) - b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \bar{\mathbf{v}}_h(t_n))}{\exp\left\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\right\}} \\ &= \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n)) - b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \bar{\mathbf{v}}_h(t_n))}{\exp\left\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\right\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} + \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \bar{\mathbf{v}}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} \\
&=: \mathcal{E}_{4,1}^n + \mathcal{E}_{4,2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_5^n &= A_h \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - A_h \bar{\mathbf{v}}_h(t_n), \\
\mathcal{E}_6^n &= \frac{S_h(\bar{t}_n)}{T} - \frac{\bar{S}_h(t_n)}{T}.
\end{aligned}$$

上述定义的相容误差满足如下估计.

引理 5.1 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$, 有下述估计.

(1)

$$|(\mathcal{E}_1^1, \mathbf{w}_h)| \lesssim \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \quad |(\mathcal{E}_2^1, \mathbf{w}_h)| \lesssim \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \quad |\mathcal{E}_3^1| \lesssim \tau_1, \quad |\mathcal{E}_4^1| \lesssim 1,$$

和

$$|(\mathcal{E}_1^2, \mathbf{w}_h)|, |(\mathcal{E}_2^2, \mathbf{w}_h)| \lesssim \sigma^{-1/2}(t_2) \tau_2 \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \quad |\mathcal{E}_3^1| \lesssim \tau_2, \quad |\mathcal{E}_4^1| \lesssim \sigma^{-1/2}(t_2) \tau_2.$$

(2) $n \geq 3$ 时,

$$|(\mathcal{E}_1^n, \mathbf{w}_h)|, |(\mathcal{E}_2^n, \mathbf{w}_h)|, |(\mathcal{E}_5^n, \mathbf{w}_h)| \lesssim \sigma^{-3/2}(t_n) \tau_n^2 \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \quad |\mathcal{E}_4^n| \lesssim \sigma^{-3/2}(t_n) \tau_n^2,$$

和

$$|\mathcal{E}_3^n|, |\mathcal{E}_6^n| \lesssim \tau_n^2.$$

证明 当 $n = 1$ 时, 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$, 我们有

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{E}_1^1, \mathbf{w}_h)| &\leq \tau_1^{-1} |(\mathbf{v}_h(t_1) - \mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{w}_h)| + |(\partial_t \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\
&= \tau_1^{-1} \left| \left(\int_0^{\tau_1} \partial_t \mathbf{v}_h(t) dt, \mathbf{w}_h \right) \right| + |(\partial_t \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\
&\leq \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} |(\partial_t \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| dt + |(\partial_t \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\
&= \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} |(\nabla \mathbf{v}_h(t), \nabla \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{v}_h(t), \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| dt \\
&\quad + |(\nabla \mathbf{v}_h(t_1), \nabla \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \tau_1^{-1} \int_0^{\tau_1} (\|\nabla \mathbf{v}_h(t)\| + 1) \|\nabla \mathbf{v}_h(t)\| \|\nabla \mathbf{w}_h\| dt \\
&\quad + (\|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\| + 1) \|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\| \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \|\nabla \mathbf{w}_h\|,
\end{aligned}$$

$$|(\mathcal{E}_2^1, \mathbf{w}_h)| \lesssim |b(\mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{w}_h)| + |b(\mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{v}_h(t_1), \mathbf{w}_h)|$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim (\|\nabla \mathbf{v}_h(t_0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\|) \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \|\nabla \mathbf{w}_h\|,
\end{aligned}$$

以及

$$|\mathcal{E}_3^1| \lesssim \max_{t \in [t_0, t_1]} |S_h''(t)| \tau_1 \lesssim \tau_1.$$

和

$$|\mathcal{E}_4^1| \lesssim |b(\mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{v}_h(t_0), \mathbf{v}_h(t_1))| \lesssim \|\nabla \mathbf{v}_h(t_0)\|^2 \|\nabla \mathbf{v}_h(t_1)\| \lesssim 1.$$

当 $n = 2$ 时, 由 Taylor 展开可得

$$\bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) - \partial_t \mathbf{v}_h(t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{\tau_n} \partial_{ss} \mathbf{v}_h(s) \, ds.$$

对弱形式 (式 (2.4)) 中第一个方程等号两端关于时间 t 求导, 得

$$(\partial_{tt} \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + b(\partial_t \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{v}_h, \partial_t \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + (\nabla \partial_t \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{w}_h) = 0,$$

所以, 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$,

$$\begin{aligned}
&|(\partial_{tt} \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| \\
&\leq |b(\mathbf{v}_h(t), \partial_t \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| + |b(\partial_t \mathbf{v}_h(t), \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| + |(\nabla \partial_t \mathbf{v}_h(t), \nabla \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim (\|\nabla \mathbf{v}_h(t)\| + 1) \|\partial_t \mathbf{v}_h(t)\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \sigma^{-1/2}(t) \|\nabla \mathbf{w}_h\|.
\end{aligned}$$

即

$$|(\partial_{tt} \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| \lesssim \sigma^{-1/2}(t) \|\nabla \mathbf{w}_h\|.$$

因此, 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$ 和 $n = 2$,

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{E}_1^n, \mathbf{w}_h)| &= \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{\tau_n} (\partial_{ss} \mathbf{v}_h(s), \mathbf{w}_h) \, ds \right| \\
&\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(\partial_{ss} \mathbf{v}_h(s), \mathbf{w}_h)| \, ds \\
&\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |(\partial_{tt} \mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \sigma^{-1/2}(t_{n-1}) \tau_n \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \\
|(\mathcal{E}_{2,1}^n, \mathbf{w}_h)| &= |b(\mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \|\mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1})\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{v}_h(t_{n-1})\| \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t \mathbf{v}_h(t) \, dt \right\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{w}_h\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} \|\partial_t \mathbf{v}_h(t)\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \sigma^{-1/2}(t_{n-1}) \tau_n \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \\
|(\mathcal{E}_{2,2}^n, \mathbf{w}_h)| &= |b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \|\mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1})\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{v}_h(t_{n-1})\| \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t \mathbf{v}_h(t) dt \right\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} \|\partial_t \mathbf{v}_h(t)\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \sigma^{-1/2}(t_{n-1}) \tau_n \|\nabla \mathbf{w}_h\|,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_4^n| &= \frac{|b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))|}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \\
&\lesssim \|\mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(t_{n-1})\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{v}_h(t_{n-1})\| \|\nabla \mathbf{v}_h(t_n)\| \\
&\lesssim \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t \mathbf{v}_h(t) dt \right\|_{H^1} \\
&\leq \tau_n \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} \|\partial_t \mathbf{v}_h(t)\|_{H^1} \\
&\lesssim \sigma^{-1/2}(t_{n-1}) \tau_n.
\end{aligned}$$

所以,

$$|(\mathcal{E}_2^n, \mathbf{w}_h)| \lesssim \sigma^{-1/2}(t_{n-1}) \tau_n \|\nabla \mathbf{w}_h\|.$$

因为 $S_h(t)$ 是一个光滑函数, 所以

$$|\mathcal{E}_3^2| \lesssim \max_{t \in [t_1, t_2]} |S_h''(t)| \tau_2 \lesssim \tau_2.$$

当 $n \geq 3$ 时, 由 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\tau \mathbf{v}_h(t_n) - \partial_t \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) &= \frac{\tau_n^2}{48} (\partial_{ttt} \mathbf{v}_h(\xi_1) + \partial_{ttt} \mathbf{v}_h(\xi_2)), \\
\mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \bar{\mathbf{v}}_h(t_n) &= \frac{\tau_n^2}{16} (\partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_3) + \partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_4)),
\end{aligned}$$

其中 $\xi_1, \xi_3 \in (t_{n-1}, \bar{t}_n)$, $\xi_2, \xi_4 \in (\bar{t}_n, t_n)$,

$$\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) = \frac{\tau_n^2}{8} \left(\frac{2}{r_n} \partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_5) - \partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_6) \right),$$

其中 $\xi_5 \in (t_{n-2}, t_{n-1})$, $\xi_6 \in (t_{n-1}, \bar{t}_n)$. 对弱形式 (式 (2.4)) 中第一个方程等号两端关于时间 t 求两次导数, 得

$$\begin{aligned}
&(\partial_{ttt} \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + b(\partial_{tt} \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + 2b(\partial_t \mathbf{v}_h, \partial_t \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \\
&+ b(\mathbf{v}_h, \partial_{tt} \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + (\nabla \partial_{tt} \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{w}_h) = 0,
\end{aligned}$$

所以, 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$,

$$\begin{aligned}
& |(\partial_{ttt}\mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| \\
& \leq |b(\partial_{tt}\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| + 2|b(\partial_t\mathbf{v}_h, \partial_t\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| \\
& \quad + |b(\mathbf{v}_h, \partial_{tt}\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| + |(\nabla\partial_{tt}\mathbf{v}_h, \nabla\mathbf{w}_h)| \\
& \lesssim \|\partial_{tt}\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla\mathbf{w}_h\| + \|\partial_t\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1}^2\|\nabla\mathbf{w}_h\| + \|\partial_{tt}\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla\mathbf{w}_h\| \\
& \lesssim \sigma^{-3/2}(t)\|\nabla\mathbf{w}_h\|.
\end{aligned}$$

即

$$|(\partial_{ttt}\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| \lesssim \sigma^{-3/2}(t)\|\nabla\mathbf{w}_h\|.$$

因此, 对于任意的 $\mathbf{w}_h \in \dot{\mathbf{X}}_h$ 和 $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{E}_1^n, \mathbf{w}_h)| &= \frac{\tau_n^2}{48} |(\partial_{ttt}u_h(\xi_1) + \partial_{ttt}u_h(\xi_2), \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \tau_n^2 \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |(\partial_{ttt}\mathbf{v}_h(t), \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \sigma^{-3/2}(t_{n-1})\tau_n^2\|\nabla\mathbf{w}_h\|, \\
|(\mathcal{E}_{2,1}^n, \mathbf{w}_h)| &= |b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(\bar{t}_n), \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \|\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(\bar{t}_{n-1})\|_{\mathbf{H}^1}\|\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n)\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla\mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \|\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(\bar{t}_{n-1})\|_{\mathbf{H}^1}(\|\mathbf{v}_h(t_{n-1})\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathbf{v}_h(t_{n-2})\|_{\mathbf{H}^1})\|\nabla\mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \tau_n^2 \left\| \left(\frac{2}{r_n} \partial_{tt}\mathbf{v}_h(\xi_5) - \partial_{tt}\mathbf{v}_h(\xi_6) \right) \right\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla\mathbf{w}_h\| \\
&\leq \tau_n^2 \max_{t \in [t_{n-2}, t_n]} \|\partial_{tt}\mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla\mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \sigma^{-3/2}(t_{n-2})\tau_n^2\|\nabla\mathbf{w}_h\|, \\
|(\mathcal{E}_{2,2}^n, \mathbf{w}_h)| &= |b(\mathbf{v}_h(\bar{t}_n), \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(\bar{t}_n), \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \|\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbf{v}_h(\bar{t}_{n-1})\|_{\mathbf{H}^1}\|\mathbf{v}_h(\bar{t}_n)\|_{\mathbf{H}^1}\|\nabla\mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \tau_n^2 \left\| \left(\frac{2}{r_n} \partial_{tt}\mathbf{v}_h(\xi_5) - \partial_{tt}\mathbf{v}_h(\xi_6) \right) \right\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla\mathbf{w}_h\| \\
&\leq \tau_n^2 \max_{t \in [t_{n-2}, t_n]} \|\partial_{tt}\mathbf{v}_h(t)\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla\mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \sigma^{-3/2}(t_{n-2})\tau_n^2\|\nabla\mathbf{w}_h\|,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_{4,1}^n| &= \frac{|b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n))|}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} \\
&\lesssim \|\mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n)\|_{H^1} \|\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n)\|_{H^1} \|\mathbf{v}_h(\bar{t}_n)\|_{H^1} \\
&\lesssim \tau_n^2 \left\| \left(\frac{2}{r_n} \partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_5) - \partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_6) \right) \right\|_{H^1} \\
&\leq \tau_n^2 \max_{t \in [t_{n-2}, t_n]} \|\partial_{tt} \mathbf{v}_h(t)\|_{H^1} \\
&\lesssim \sigma^{-3/2}(t_{n-2}) \tau_n^2, \\
|\mathcal{E}_{4,2}^n| &= \frac{|b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \bar{\mathbf{v}}_h(t_n))|}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} \\
&\lesssim \|\mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n)\|_{H^1} \|\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n)\|_{H^1}^2 \\
&\lesssim \tau_n^2 \left\| \left(\frac{2}{r_n} \partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_5) - \partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_6) \right) \right\|_{H^1} \\
&\leq \tau_n^2 \max_{t \in [t_{n-2}, t_n]} \|\partial_{tt} \mathbf{v}_h(t)\|_{H^1} \\
&\lesssim \sigma^{-3/2}(t_{n-2}) \tau_n^2.
\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{E}_2^n, \mathbf{v}_h)| &\lesssim \sigma^{-3/2}(t_{n-2}) \tau_n^2 \|\nabla \mathbf{w}_h\|, \\
|\mathcal{E}_4^n| &\lesssim \sigma^{-3/2}(t_{n-2}) \tau_n^2.
\end{aligned}$$

再有,

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{E}_5^n, \mathbf{w}_h)| &= |(A_h \mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - A_h \bar{\mathbf{v}}_h(t_n), \mathbf{w}_h)| \\
&= |(\nabla(\mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \bar{\mathbf{v}}_h(t_n)), \nabla \mathbf{w}_h)| \\
&\lesssim \|(\mathbf{v}_h(\bar{t}_n) - \bar{\mathbf{v}}_h(t_n))\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \tau_n^2 \|\partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_3) + \partial_{tt} \mathbf{v}_h(\xi_4)\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \tau_n^2 \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} \|\partial_{tt} \mathbf{v}_h(t)\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{w}_h\| \\
&\lesssim \sigma^{-3/2}(t_{n-1}) \tau_n^2 \|\nabla \mathbf{w}_h\|.
\end{aligned}$$

最后, 对于光滑函数 S_h 来说,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_3^n| &\lesssim \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |S_h'''(t)| \tau_n^2 \lesssim \tau_n^2, \\
|\mathcal{E}_6^n| &\lesssim \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |S_h''(t)| \tau_n^2 \lesssim \tau_n^2.
\end{aligned}$$

由 $t_n \sim t_{n-1} \sim t_{n-2}$, $n \geq 3$, 可得结论. ■

5.3 全局误差估计

记 (时间半离散的) 全局误差

$$\mathbf{e}_v^n = \mathbf{v}_h(t_n) - \mathbf{v}_h^n, \quad e_S^n = S_h(t_n) - S_h^n,$$

那么其满足如下误差方程:

(1) $n = 1, 2$ 时,

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{e}_v^n + A_h \mathbf{e}_v^n = \mathcal{E}_1^n + \mathcal{E}_2^n + \mathcal{F}_1^n, \\ \bar{\partial}_\tau e_S^n = -\frac{1}{T} e_S^n + \mathcal{E}_3^n + \mathcal{E}_4^n + \mathcal{F}_2^n, \\ \mathbf{e}_v^0 = \mathbf{0}, \quad e_S^0 = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

(2) $n \geq 3$ 时,

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{e}_v^n + A_h \bar{\mathbf{e}}_v^n = \mathcal{E}_1^n + \mathcal{E}_2^n + \mathcal{E}_5^n + \mathcal{F}_1^n, \\ \bar{\partial}_\tau e_S^n = -\frac{1}{T} \bar{e}_S^n + \mathcal{E}_3^n + \mathcal{E}_4^n + \mathcal{E}_6^n + \mathcal{F}_2^n, \end{cases} \quad (5.9)$$

其中,

$$\bar{\mathbf{e}}_v^n = \frac{\mathbf{e}_v^n + \bar{\mathbf{e}}_v^{n-1}}{2}, \quad \bar{e}_S^n = \frac{e_S^n + e_S^{n-1}}{2}.$$

而 \mathcal{F}_1^n 和 \mathcal{F}_2^n 的具体表达式为

(1) $n = 1, 2$ 时,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^n &= -\frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} (S_h(t_n) \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) - S_h^n \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h^{n-1}) \\ &= -(\mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h(t_{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) - \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h^{n-1}) \\ &\quad - \frac{e_S^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h^{n-1} \\ &= -(\mathbb{P}_h(\mathbf{e}_v^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h(t_{n-1}) + \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{e}_v^{n-1}) \\ &\quad - \frac{e_S^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}_h(\mathbf{v}_h^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h^{n-1} \\ &=: \mathcal{F}_{1,1}^n + \mathcal{F}_{1,2}^n, \\ \mathcal{F}_2^n &= \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} (b(\mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n)) - b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^n)) \\ &= \frac{b(\mathbf{e}_v^{n-1}, \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} + \frac{b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{e}_v^{n-1}, \mathbf{v}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} + \frac{b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{e}_v^n)}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}}. \end{aligned}$$

(2) $n \geq 3$ 时,

$$\mathcal{F}_1^n = -\frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} (\bar{S}_h(t_n) \mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \bar{S}_h^n \mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h^n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}_h^n)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\bar{S}(t_n)}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}}(\mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) - \mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}}_h^n) \\
&\quad - \frac{\bar{e}_S^n}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}}\mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}}_h^n \\
&= -\frac{\bar{S}(t_n)}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}}(\mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{e}}_v^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n) + \mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{e}}_v^n) \\
&\quad - \frac{\bar{e}_S^n}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}}\mathbb{P}_h(\tilde{\mathbf{v}}_h^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}}_h^n \\
&=: \mathcal{F}_{1,1}^n + \mathcal{F}_{1,2}^n, \\
\mathcal{F}_2^n &= \frac{1}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}}(b(\tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \bar{\mathbf{v}}_h(t_n)) - b(\tilde{\mathbf{v}}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h^n)) \\
&= \frac{b(\tilde{\mathbf{e}}_v^n, \tilde{\mathbf{v}}_h(t_n), \bar{\mathbf{v}}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} + \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h^n, \tilde{\mathbf{e}}_v^n, \bar{\mathbf{v}}_h(t_n))}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} + \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h^n, \bar{\mathbf{e}}_v^n)}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}},
\end{aligned}$$

这里,

$$\tilde{\mathbf{e}}_v^n = \left(1 + \frac{r_n}{2}\right)\mathbf{e}_v^{n-1} - \frac{r_n}{2}\mathbf{e}_v^{n-2}.$$

引理 5.2 全局误差 \mathbf{e}_v^n 满足如下估计:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}_v^1\|^2 + \tau_1\|\nabla\mathbf{e}_v^1\|^2 &\lesssim \tau^4 + \tau_1|e_S^1|^2, \\
\|\mathbf{e}_v^2\|^2 + \tau_2\|\nabla\mathbf{e}_v^2\|^2 &\lesssim \tau^4 + \tau_1|e_S^1| + \tau_2|e_S^2|,
\end{aligned}$$

以及

$$\|\mathbf{e}_v^n\|^2 + \sum_{k=3}^n \tau_k\|\nabla\mathbf{e}_v^k\|^2 \lesssim \tau^4 + \tau_1|e_S^1|^2 + \tau_2|e_S^2|^2 + \sum_{k=3}^n \tau_k|\bar{e}_S^k|^2, \quad n \geq 3.$$

证明 在误差方程(5.8)的第一个式子等号两边和 $2\tau_n\mathbf{e}_v^n$ ($n = 1, 2$) 做内积, 得

$$\|\mathbf{e}_v^1\|^2 + \tau_1\|\nabla\mathbf{e}_v^1\|^2 = \tau_1(\mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_2^1 + \mathcal{F}_1^1, \mathbf{e}_v^1), \quad (5.10)$$

和

$$\|\mathbf{e}_v^2\|^2 - \|\mathbf{e}_v^1\|^2 + \|\mathbf{e}_v^2 - \mathbf{e}_v^1\|^2 + 2\tau_2\|\nabla\mathbf{e}_v^2\|^2 = 2\tau_2(\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{F}_1^2, \mathbf{e}_v^2). \quad (5.11)$$

根据引理 5.1, 我们有

$$(\mathcal{E}_1^1, \mathbf{e}_v^1) \leq c\|\nabla\mathbf{e}_v^1\| \leq c + \frac{1}{16}\|\nabla\mathbf{e}_v^1\|^2, \quad (5.12)$$

$$(\mathcal{E}_2^1, \mathbf{e}_v^1) \leq c\|\nabla\mathbf{e}_v^1\| \leq c + \frac{1}{16}\|\nabla\mathbf{e}_v^1\|^2, \quad (5.13)$$

和

$$(\mathcal{E}_1^2, \mathbf{e}_v^2) \leq ct_2^{-1/2} \tau_2 \|\nabla \mathbf{e}_v^2\| \leq ct_2^{-1} \tau_2^2 + \frac{1}{8} \|\nabla \mathbf{e}_v^2\|^2, \quad (5.14)$$

$$(\mathcal{E}_2^2, \mathbf{e}_v^2) \leq ct_n^{-1/2} \tau_2 \|\nabla \mathbf{e}_v^2\| \leq ct_2^{-1} \tau_2^2 + \frac{1}{8} \|\nabla \mathbf{e}_v^2\|^2. \quad (5.15)$$

此外, 对于 $n = 1, 2$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{1,1}^n, \mathbf{e}_v^n) &\leq |b(\mathbf{e}_v^{n-1}, \mathbf{v}_h(t_{n-1}), \mathbf{e}_v^n)| + |b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{e}_v^{n-1}, \mathbf{e}_v^n)| \\ &\leq c \|\nabla \mathbf{e}_v^n\| \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{e}_v^{n-1}\|^{\frac{1}{2}} (\|\nabla \mathbf{v}_h(t_{n-1})\| + \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|) \\ &\leq \frac{1}{16} \|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 + \frac{1}{4M} \|\nabla \mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + c \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2, \end{aligned} \quad (5.16)$$

以及

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{1,2}^n, \mathbf{e}_v^n) &\leq c |e_S^n| |b(\mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h^{n-1}, \mathbf{e}_v^n)| \\ &\leq c |e_S^n| \|\nabla \mathbf{e}_v^n\| \|\nabla \mathbf{v}_h^{n-1}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{16} \|\nabla \mathbf{e}_v^n\|^2 + c |e_S^n|^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

将式 (5.12)–式 (5.17) 分别代入相对应的式 (5.10) 和式 (5.11) 中, 舍去不等号左边的非负项得

$$\|\mathbf{e}_v^1\|^2 + \frac{\tau_1}{2} \|\nabla \mathbf{e}_v^1\|^2 \leq c \tau_1 |e_S^1|^2 + c \tau_1,$$

和

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{e}_v^2\|^2 - \|\mathbf{e}_v^1\|^2 + \tau_2 \|\nabla \mathbf{e}_v^2\|^2 \\ &\leq \frac{\tau_2}{2M} \|\nabla \mathbf{e}_v^1\|^2 + c \tau_2 \|\mathbf{e}_v^1\|^2 + c \tau_2 |e_S^2|^2 + ct_2^{-1} \tau_2^2. \end{aligned}$$

又因为 $\tau_2 \leq M \tau_{n-1}$ 和 $t_2 = 2\tau_2$ 所以

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{e}_v^2\|^2 + \tau_2 \|\nabla \mathbf{e}_v^2\|^2 \\ &\lesssim \|\mathbf{e}_v^1\|^2 + \tau_1 \|\nabla \mathbf{e}_v^1\|^2 + \tau_2 |e_S^2|^2 + \tau_2 \\ &\lesssim \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 |e_S^1| + \tau_2 |e_S^2|. \end{aligned}$$

在误差方程(5.9)的第一个式子等号两端同时和 $2\tau_n \bar{\mathbf{e}}_v^n$ 做内积可得, $n \geq 3$ 时, 成立

$$\|\mathbf{e}_v^n\|^2 - \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + 2\tau_n \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^n\|^2 = 2\tau_n (\mathcal{E}_1^n + \mathcal{E}_2^n + \mathcal{E}_5^n + \mathcal{F}_1^n, \bar{\mathbf{e}}_v^n). \quad (5.18)$$

根据引理 5.1, 我们可得

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_1^n, \bar{\mathbf{e}}_v^n) &\leq ct_n^{-3/2} \tau_n^2 \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^n\| \leq ct_n^{-3} \tau_n^4 + \frac{1}{16} \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^n\|^2, \\ (\mathcal{E}_2^n, \bar{\mathbf{e}}_v^n) &\leq ct_n^{-3/2} \tau_n^2 \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^n\| \leq ct_n^{-3} \tau_n^4 + \frac{1}{16} \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^n\|^2, \end{aligned}$$

和

$$(\mathcal{E}_6^n, \bar{\mathbf{e}}_v^n) \leq ct_n^{-3/2} \tau_n^2 \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^n\| \leq ct_n^{-3} \tau_n^4 + \frac{1}{16} \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^n\|^2.$$

然后, 利用引理 2.6 中的估计, 可得

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_1^n, \bar{\mathbf{e}}_v^n) &= (\mathcal{F}_{1,1}^n, \bar{\mathbf{e}}_v^n) + (\mathcal{F}_{1,2}^n, \bar{\mathbf{e}}_v^n) \\ &\lesssim (\|\tilde{\mathbf{e}}_v^n\| + |\bar{e}_S^n|) \|\bar{\mathbf{e}}_v^n\| \\ &\lesssim \|\tilde{\mathbf{e}}_v^n\|^2 + |\bar{e}_S^n|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_v^n\|^2 \\ &\lesssim \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{e}_v^{n-2}\|^2 + |\bar{e}_S^n|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_v^n\|^2. \end{aligned}$$

将上述估计代入式 (5.18) 中, 化简可得

$$\|\mathbf{e}_v^n\|^2 - \|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + \tau_n \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^n\|^2 \leq ct_n^{-3} \tau_n^5 + c\tau_n |\bar{e}_S^n|^2 + c\tau_n (\|\mathbf{e}_v^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{e}_v^{n-2}\|^2).$$

对上式关于 n 求和, 结合 $n = 1, 2$ 时的估计以及离散 Gronwall 不等式, 有

$$\|\mathbf{e}_v^n\|^2 + \sum_{k=3}^n \tau_k \|\nabla \bar{\mathbf{e}}_v^k\|^2 \lesssim \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 |e_S^1|^2 + \tau_2 |e_S^2|^2 + \sum_{k=3}^n \tau_k |\bar{e}_S^k|^2 + \sum_{k=3}^n t_k^{-3} \tau_k^5.$$

最后, 由当 $\alpha \in (3/4, 1)$ 时, 有

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau^{\frac{1}{1-\alpha}} \lesssim \tau^4,$$

和

$$\sum_{k=3}^n t_k^{-3} \tau_k^5 \lesssim \tau^4 \sum_{k=2}^n \tau_k t_k^{4\alpha-3} \leq \tau^4 \int_0^T t^{4\alpha-3} dt \lesssim \tau^4,$$

成立可结束证明. ■

类似地, 我们还可以得到关于 e_S^n 的估计.

引理 5.3 对于任意的 $n \geq 1$, 当最大时间步长 τ 充分小时, 成立

$$|e_S^n|^2 \lesssim \tau^4.$$

联合上述两个估计, 我们可得最终的收敛性结果.

定理 5.2 令 $\mathbf{v}(t)$ 和 \mathbf{v}_h^n 分别为流体方程 (N-S) 及其 Crank–Nicolson–SAV–FEM 格式(5.2)–(5.3) 的解, 那么

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_h^n\| \lesssim \tau^2 + h^2.$$

第六章 数值实验

在本章中, 我们利用一些数值实验例子来验证前文中得到的理论结果. 在所有实验中, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $T = 10$, 有限元子空间 $\mathbf{X}_h \times Q_h$ 取得是 Taylor–Hood P^2 – P^1 有限元空间, 时间步长 $\tau_n = (t_{n-1}/T)^\alpha \tau$, $n \geq 2$. 所有计算都是使用的 Python 函数库 FEniCSx [61–63] 中实现的相关函数.

我们首先来验证我们满足条件(TS)的局部加密时间剖分的计算复杂度是与一致剖分的计算复杂度同阶的. 因为这意味着在与相同数量级的计算量下, 此非一致剖分所得到的数值结果是要比相对应的一致剖分更加精确更加稳定的.

例 6.1 取 $T = 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 50, 100$, $\alpha = 0.6, 0.7, 0.9$, 以及 $\tau = 1/64, 1/128, 1/256$, 从表 6.1 可以看出, 当 $\alpha = 0.6$ 时, 其时间总剖分数 N 与以最大步长 τ 做一致剖分的总剖分数 T/τ 的比值 $N\tau/T$ 总是小于 2.6 的; 当 $\alpha = 0.7$ 时, $N\tau/T < 3.5$; 当 $\alpha = 0.9$ 时, $N\tau/T < 10.3$. 此结果表明, 我们所采取的非一致剖分的时间层数与相对应的一致剖分的时间层数是只差了一个常数倍的, 并且这个常数倍相对于总层数是比较小的, 这也就验证了满足条件(TS)的局部加密时间剖分的计算量是与一致剖分的计算量差不多的. 此外, 图 6.1 – 图 6.4 刻画了在不同的总时间 T 、不同的最大步长 τ 和不同的参数 α 下, 时间剖分步长 τ_n 和时间剖分节点 t_n 是怎样随时间层数 n 所演变的.

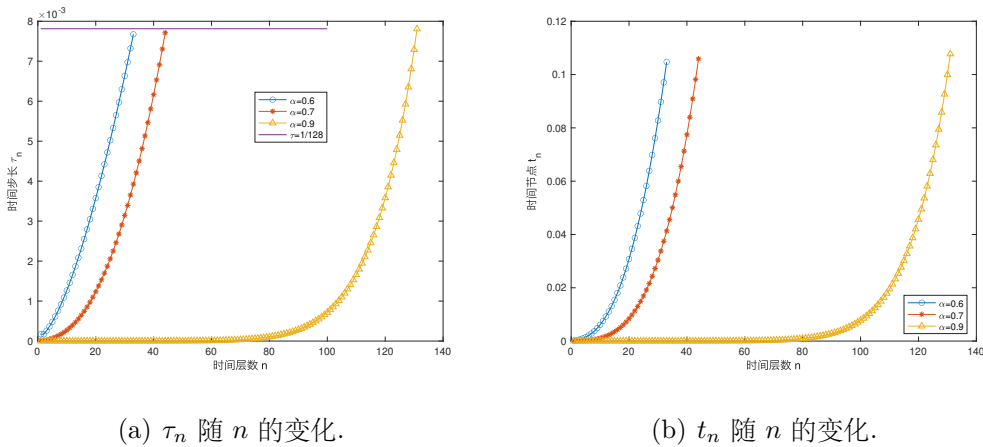
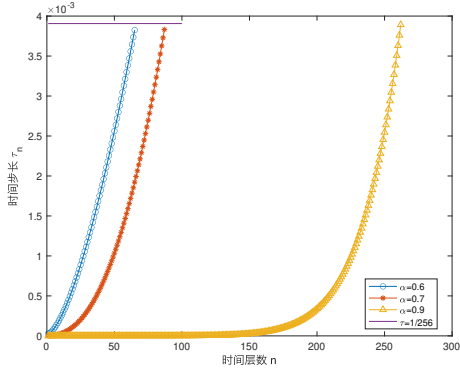
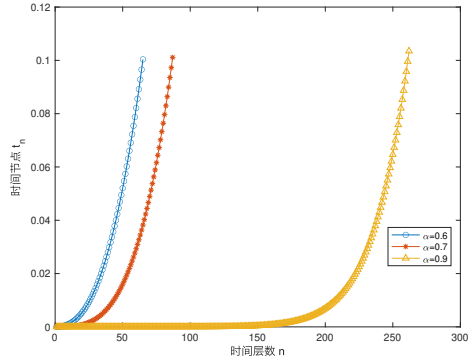
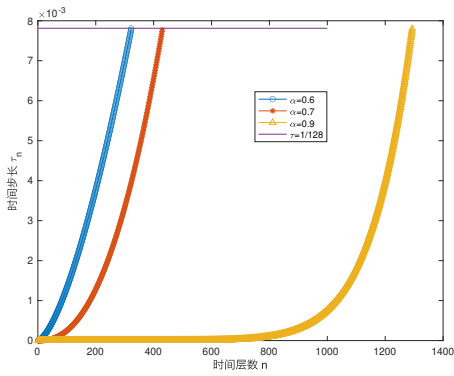
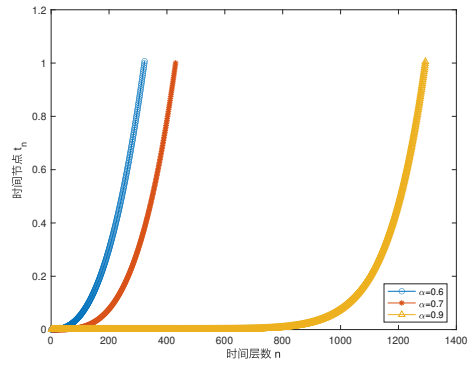
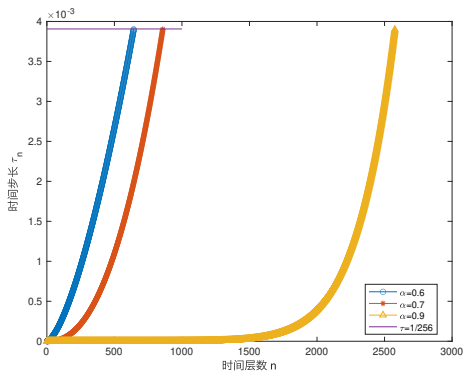
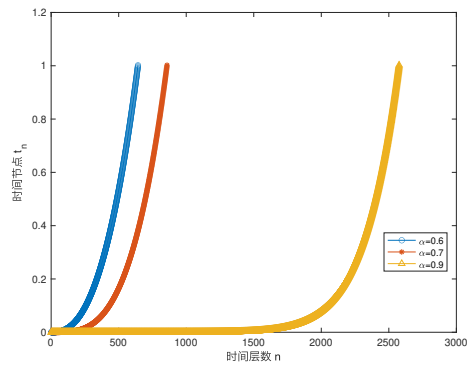


图 6.1 当 $T = 0.1$, $\tau = 1/128$ 时, 时间步长 τ_n 与时间节点 t_n 随 n 的变化.

下面, 我们来讨论数值格式(3.5)的无条件能量稳定性以及误差. 在衡量误差的时候, 因为有些情况下精确解并不知道, 所以此时一般将剖分特别细的数值解作为精确解的代替, 记为 $(\mathbf{v}_{h,\text{ref}}^n, u_{h,\text{ref}}^n)$, 这些数值解对应的剖分为 $\tau = 1/10240$, $h = 1/256$.

表 6.1 不同时长、不同剖分 and 不同参数下的时间剖分总步数 N .

α	$N \backslash T$		τ							$N\tau/T$
			0.1	0.5	1	5	10	50	100	
0.6	1/64	16	82	162	162	803	1604	8005	16006	< 2.6
	1/128	33	162	323	323	1604	3204	16006	32006	< 2.6
	1/256	65	323	643	643	3204	6405	32006	64007	< 2.6
0.7	1/64	22	109	216	216	1071	2139	10674	21342	< 3.5
	1/128	44	216	430	430	2139	4273	21342	42676	< 3.5
	1/256	87	430	858	858	4273	8541	42676	85343	< 3.5
0.9	1/64	63	327	650	650	3217	6420	32027	64030	< 10.3
	1/128	131	650	1293	1293	6420	12823	64030	128034	< 10.3
	1/256	262	1293	2576	2576	12838	25626	128034	256037	< 10.3

(a) τ_n 随 n 的变化.(b) t_n 随 n 的变化.图 6.2 当 $T = 0.1, \tau = 1/256$ 时, 时间步长 τ_n 与时间节点 t_n 随 n 的变化(a) τ_n 随 n 的变化.(b) t_n 随 n 的变化.图 6.3 当 $T = 1, \tau = 1/128$ 时, 时间步长 τ_n 与时间节点 t_n 随 n 的变化.(a) τ_n 随 n 的变化.(b) t_n 随 n 的变化.图 6.4 当 $T = 1, \tau = 1/256$ 时, 时间步长 τ_n 与时间节点 t_n 随 n 的变化.

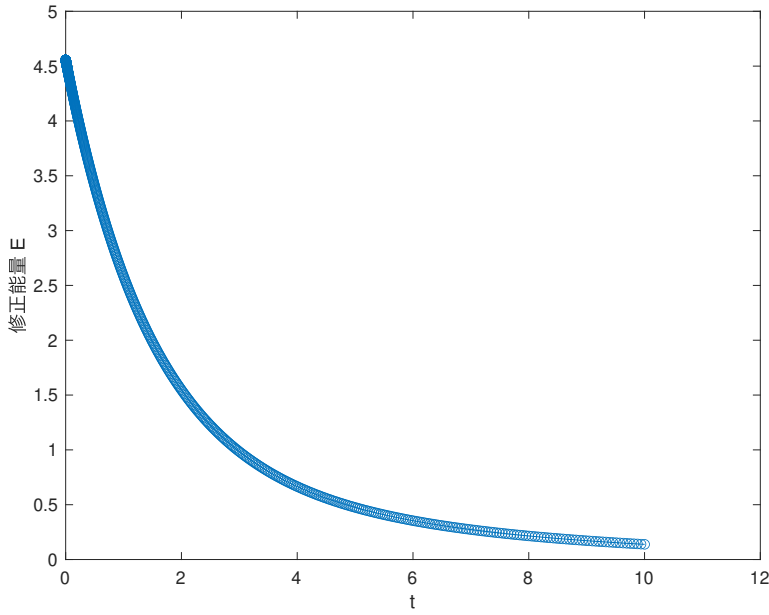


图 6.5 $\tau = 1/16$, $h = 1/64$, $\alpha = 0.8$ 时, 速度场的修正动能随时间的演化.

例 6.2 令 $w = \sin^{\frac{5}{2}}(\pi x) \sin^{\frac{5}{2}}(\pi y)$, 初值

$$\mathbf{v}^0 = (\partial_y w, -\partial_x w)^T,$$

满足

$$\mathbf{v}^0 \in \mathbf{H}^{2-\varepsilon} \cap \mathbf{H}_0^1 \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 0.$$

此时, 速度场的修正动能 $E^n = \|\mathbf{v}_h^n\|^2 + |S_h^n|^2$ 随时间 t_n 的演化如图 6.6 和 图 6.5 所示, 我们可以看出来, 这些数值解是满足定理 3.1 中的能量耗散的结果的. 误差 $\|\mathbf{v}_{h,\text{ref}}^N - \mathbf{v}_h^N\|$ 及其所对应的收敛阶在表 6.2 和表 6.3 中给出. 从表中数据看, 数值实验是与理论结果 (定理 3.3) 吻合的.

表 6.2 时间误差及其收敛阶, 空间剖分 $h = 1/128$, $\alpha = 0.8$.

τ	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差	1.5563E-5	7.5910E-6	3.7489E-6	1.8629E-6
收敛阶	-	1.0358	1.0179	1.0089

表 6.3 空间误差及其收敛阶, 时间剖分 $\tau = 1/5120$, $\alpha = 0.8$.

h	1/16	1/32	1/64	1/128
误差	5.5563E-5	1.3791E-5	3.4329E-6	8.5812E-7
收敛阶	-	2.0104	2.0062	2.0002

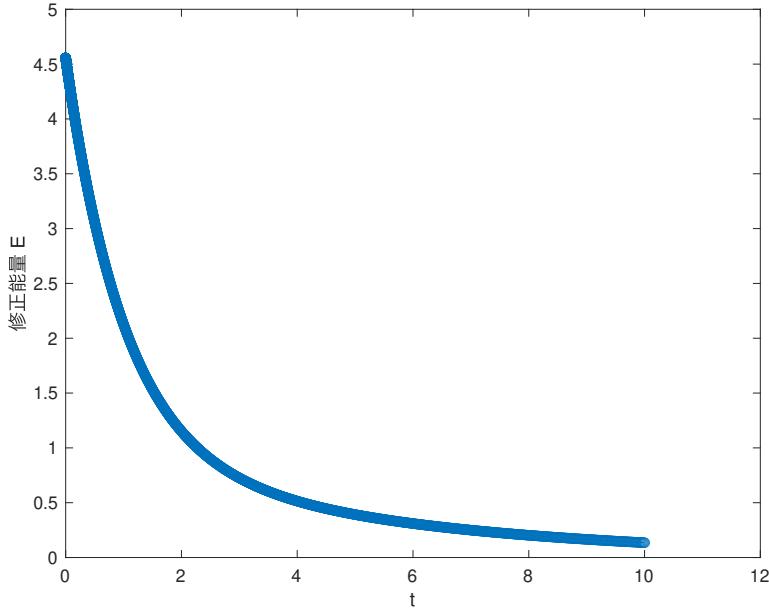


图 6.6 $\tau = 1/64$, $h = 1/64$, $\alpha = 0.8$ 时, 速度场的修正动能随时间的演化.

通过进一步的数值实验我们发现, 当初值的正则性低于 \mathbf{H}^1 时, 数值实验得到的时空收敛阶依然可以达到 1 阶和 2 阶. 这可能意味着定理 3.3 中关于初值的条件可以适当降低. 详情可见下一个例子.

例 6.3 令 $w = \sin^{\frac{3}{2}}(\pi x) \sin^{\frac{3}{2}}(\pi y)$, 初值

$$\mathbf{v}^0 = (\partial_y w, -\partial_x w)^T,$$

满足

$$\mathbf{v}^0 \in \mathbf{H}^{1-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 0 \text{ in } \Omega, \quad \mathbf{v}^0 = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

此时, 其修正能量同样是耗散的, 如图 6.7 和图 6.8 所示. 而误差 $\|\mathbf{v}_{h,\text{ref}}^N - \mathbf{v}_h^N\|$ 及其所对应的收敛阶在表 6.4 和表 6.5 中给出.

表 6.4 时间误差及其收敛阶, 空间剖分 $h = 1/128$, $\alpha = 0.8$.

τ	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差	4.8924E-5	2.5476E-5	1.2942E-5	6.481E-6
收敛阶	-	0.9414	0.9771	0.9978

例 6.4 令 $w = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, 速度场 \mathbf{v} 的初值为

$$\mathbf{v}^0 = (\partial_y w, -\partial_x w)^T,$$

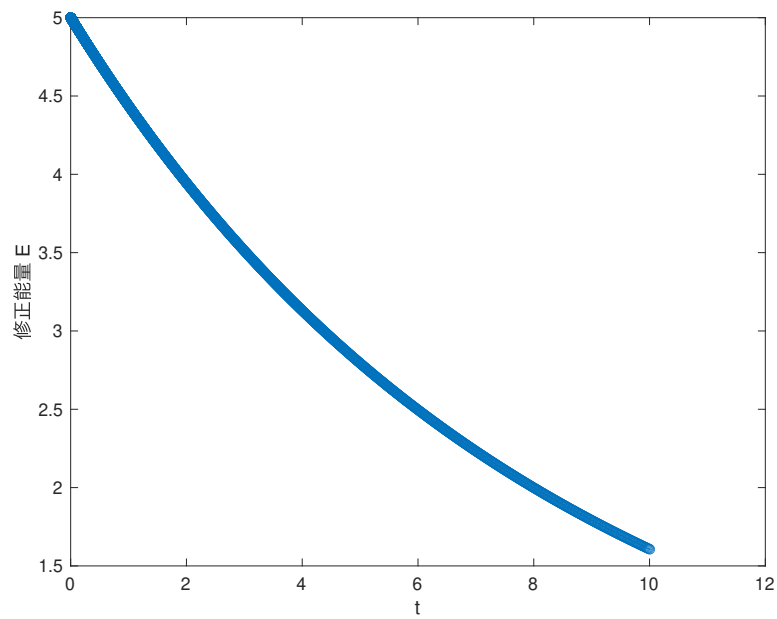


图 6.7 $\tau = 1/64$, $h = 1/64$, $\alpha = 0.8$ 时, 速度场的修正动能随时间的演化.

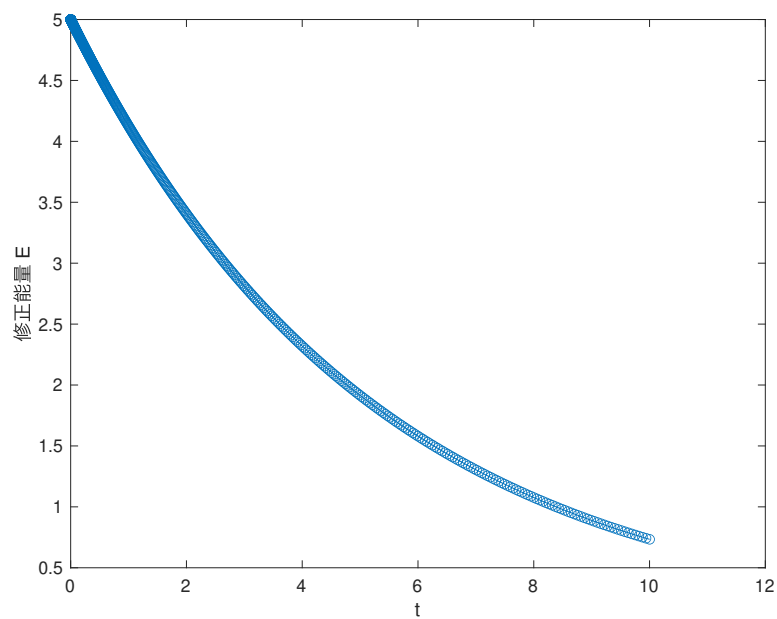


图 6.8 $\tau = 1/16$, $h = 1/64$, $\alpha = 0.8$ 时, 速度场的修正动能随时间的演化.

表 6.5 空间误差及其收敛阶, 时间剖分 $\tau = 1/5120$, $\alpha = 0.8$.

h	1/16	1/32	1/64	1/128
误差	6.9834E-5	1.7860E-5	4.5229E-6	1.1384E-7
收敛阶	-	1.9672	1.9817	1.9905

浓度场 u 的初值为

$$u^0 = xy(1-x)(1-y).$$

此时, 速度场的误差 $\|\mathbf{v}_{h,\text{ref}}^N - \mathbf{v}_h^N\|$ 及其收敛阶为表 6.6 和表 6.7, 浓度场的误差 $\|u_{h,\text{ref}}^N - u_h^N\|$ 和收敛阶为表 6.8 和表 6.9, 都与理论结果 (定理 3.3) 相吻合.

表 6.6 速度场的时间误差及其收敛阶, 空间剖分 $h = 1/128$, $\alpha = 0.8$.

τ	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差	1.7177E-5	8.4765E-6	4.2110E-6	2.0988E-6
收敛阶	-	1.0189	1.0093	1.0046

表 6.7 速度场空间误差及其收敛阶, 时间剖分 $\tau = 1/5120$, $\alpha = 0.8$.

h	1/16	1/32	1/64	1/128
误差	2.6378E-5	6.4999E-6	1.6124E-6	4.0278E-7
收敛阶	-	2.0210	2.0112	2.0011

表 6.8 浓度场时间误差及其收敛阶, 空间剖分 $h = 1/128$, $\alpha = 0.8$.

τ	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差	1.2260E-6	5.5908E-7	2.6654E-7	1.3008E-7
收敛阶	-	1.1328	1.0687	1.0350

表 6.9 浓度场空间误差及其收敛阶, 时间剖分 $\tau = 1/5120$, $\alpha = 0.8$.

h	1/16	1/32	1/64	1/128
误差	8.4578E-7	2.0556E-7	5.0998E-8	1.2742E-7
收敛阶	-	2.0407	2.0101	2.0057

第七章 总结与展望

7.1 小结

本文主要考虑了非光滑初值条件下二维不可压 Navier–Stokes–Fokker–Planck 方程的 Euler–SAV–FEM 格式的误差估计. 本文利用了局部加密网格的方法来试图消除掉解析解在时间 $t \rightarrow 0$ 时的弱奇异性对收敛阶的负面影响. 这个方法在和分数阶偏微分方程这一类带有弱奇异积分核的积分微分方程相关的数值格式中较为常见, 比如说 [64, 65] 中使用的梯度网格. 对于耦合方程数值格式的误差分析, 关键在于怎么去估计耦合项—对流项所对应的三线性型. 这里采用的是和 N–S 方程中非线性项所对应的三线性型类似的估计方法, 即靠一个 Poisson 型的辅助方程得到相应的离散 Ladyzhenskaya 不等式, 进而利用这个不等式去估计三线性型.

7.2 未来工作以及展望

7.2.1 非光滑初值和高 Reynolds 数下 N–S 方程 SAV 格式的稳定性与误差分析

对于 N–S 方程的 SAV 格式, 还有许多可以做的问題, 这里就简单列举几个.

- (1) Reynolds 数对稳定性和收敛性的影响.
- (2) \mathbf{H}^1 初值下线性外插型 Crank–Nicolson SAV 格式.
- (3) \mathbf{H}^1 初值下线性外插型 BDF2 SAV 格式

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau^B \mathbf{v}^n + (\hat{\mathbf{v}}^n \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}}^n - \Delta \mathbf{v}^n + \nabla p^n = 0, & \nabla \cdot \mathbf{v}^n = 0, \\ \bar{\partial}_\tau S^n = -\frac{1}{T} S^n + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\hat{\mathbf{v}}^n, \hat{\mathbf{v}}^n, \mathbf{v}^n), \end{cases} \quad n \geq 1,$$

这里,

$$\bar{\partial}_\tau^B \mathbf{v}^n = \begin{cases} \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}), & n = 1, 2, \\ \frac{1}{\tau_n} \left[\frac{1 + 2r_n}{1 + r_n} \mathbf{v}^n - (1 + r_n) \mathbf{v}^{n-1} + \frac{r_n^2}{1 + r_n} \mathbf{v}^{n-2} \right], & n \geq 3, \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{v}}^n = \begin{cases} \mathbf{v}^{n-1}, & n = 1, 2, \\ (1 + r_n) \mathbf{v}^{n-1} - r_n \mathbf{v}^{n-2}, & n \geq 3. \end{cases}$$

(4) \mathbf{H}^1 初值下 Crank–Nicolson/Adams–Bashforth SAV 格式

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}^n + \frac{S_h^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1} - \Delta \mathbf{v}^n + \nabla p^n = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^n = 0, \\ \bar{\partial}_\tau S^n = -\frac{1}{T} S^n + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}^n) \end{cases} \quad n = 1, 2,$$

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\tau \mathbf{v}^n - \Delta \bar{\mathbf{v}}^n + \nabla \bar{p}^n \\ + \frac{\bar{S}^n}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} \left(\left(1 + \frac{r_n}{2}\right) (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1} - \frac{r_n}{2} (\mathbf{v}^{n-2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-2} \right) = 0, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}^n = 0, \\ \bar{\partial}_\tau S^n = -\frac{1}{T} \bar{S}^n \\ + \frac{1}{\exp\{-\frac{\bar{t}_n}{T}\}} \left(\left(1 + \frac{r_n}{2}\right) b(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}^{n-1}, \bar{\mathbf{v}}^n) - \frac{r_n}{2} b(\mathbf{v}^{n-2}, \mathbf{v}^{n-2}, \bar{\mathbf{v}}^n) \right), \end{cases} \quad n \geq 3.$$

(5) \mathbf{L}^2 初值下 Euler SAV 格式.

7.2.2 流体中的布朗非高斯聚合物扩散模型

在上文中, 我们讨论了流体中的布朗粒子所对应的 Fokker–Planck 方程(1.1)及其数值算法. 实际上在自然界中, 尤其是在复杂环境中, 粒子的扩散方式大多不是布朗运动, 比如说 [66–69] 等文献中发现的形形色色的反常 (即非布朗) 扩散现象. 最近几年, 在复杂生物系统和高分子材料中, 有一类被称为布朗非高斯型的反常扩散经常出现 [70–73], 此类扩散的特点为其均方位移与布朗运动一样都是与时间成正比的, 但是与布朗运动不同的是, 其概率密度函数不是高斯的. 下面就针对于一类在聚合物中发现的布朗非高斯扩散, 引入其在流体中的扩散方程.

在文献 [74] 及其后续工作 [75, 76] 中, 作者给我们介绍了一个聚合物的聚合/解聚扩散模型. 设 A_N 为一个通过反应聚合了 N 个单体 A 的线性聚合物, 满足聚合/解聚反应方程式 $A_{N-1} + A \rightleftharpoons A_N$, 记其质心位置为 $\mathbf{r}(t)$. 假设参加聚合反应的单体数目 $N = N(t)$ 是一个生灭过程, 并且该聚合物的质心在每个反应间隙均作布朗运动, 但是所对应的扩散系数 D 与 N 相关, 即 $D = D(N(t))$. 该假设在聚合物模型中是一个常见假设, 详情可见 [77]. 在此假设下, 静态介质中质心位置 $\mathbf{r}(t)$ 满足动力学方程:

$$d\mathbf{r}(t) = \sqrt{2D(N(t))} d\mathbf{B}(t).$$

进一步, 根据 Stokes-Einstein 关系 [78], 扩散系数的具体表达式为

$$D(N(t)) = \frac{D_0}{(N(t) + n_{\min})^\alpha},$$

其中 n_{\min} 为聚合/解聚反应能够启动的最小聚合物单体数目, 其与参加聚合反应的单体数目 $N(t)$ 之和即为系统中参与构成聚合物的单体总量, D_0 为一个正常数, 量纲同扩散系数, α 是一个参数, 取决于聚合物模型, 例如, Rouse 模型 [79]($\alpha = 1/2$), Zimm 模型 [80]($\alpha = 1$), 蠕动模型 [81](raptation model, $\alpha = 2$) 等. 在平均场临界极限意义下, 作者发现质心位置的扩散行为呈布朗非高斯型.

宏观方程的推导

在流体介质中, 与布朗情形相同, 质心位置 $\mathbf{r}(t)$ 满足的动力学方程需修改为

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) dt + \sqrt{2D(N(t))} d\mathbf{B}(t). \quad (7.1)$$

首先, 记 \mathbb{E} 表示期望或者系综平均, \mathcal{F} 为 Fourier 变换,

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}}\{f(\mathbf{r})\} = \int e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

$\delta(\cdot)$ 为 Dirac delta 函数, $\delta_{\cdot, \cdot}$ 为 Kronecker delta 函数,

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

设 $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^d$ 为方程(7.1)的解, $\kappa : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为一给定函数, 设

$$\mathbf{A}(t) = \int_0^t \kappa(\mathbf{r}(\tau), \tau) d\tau,$$

那么 $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $N(t)$ 的联合概率密度函数为

$$u_n = u(\mathbf{r}, \mathbf{A}, n, t) = \mathbb{E}[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}(t))\delta(\mathbf{A} - \mathbf{A}(t))\delta_{n, N(t)}].$$

记 $\tilde{u}(\zeta)$ 是 u_n 的母 (生成) 函数:

$$\tilde{u}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \zeta^n = \mathbb{E}[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{A} - \mathbf{A}(t))\zeta^{N(t)}],$$

对其做 Fourier 变换 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}$, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{p}$:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}} \mathcal{F}_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{p}}\{\tilde{u}(\zeta)\} = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(t)} \zeta^{N(t)}].$$

设生灭过程 $N(t)$ 的出生率和死亡率分别为 λ 和 μ ($\mu(0) = 0$), 对应的转移概率为

$$P(N(t+\tau) = j \mid N(t) = i) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(i)\tau} \simeq \lambda(i)\tau + o(\tau), & j = i + 1, \\ 1 - e^{-\mu(i)\tau} \simeq \mu(i)\tau + o(\tau), & j = i - 1, \\ e^{-\lambda(i)\tau} e^{-\mu(i)\tau} \simeq 1 - \lambda(i)\tau - \mu(i)\tau + o(\tau), & j = i, \\ 1 - (1 - e^{-\lambda(i)\tau})(1 - e^{-\mu(i)\tau}) \simeq o(\tau), & \text{其他}. \end{cases}$$

由 Itô 公式

$$\begin{aligned} df(N(t)) &= \lambda(N(t))(f(N(t) + 1) - f(N(t))) dt \\ &\quad - \mu(N(t))(f(N(t)) - f(N(t) - 1)) dt, \end{aligned}$$

可得

$$\zeta^{N(t+\tau)} = \zeta^{N(t)} + [\lambda(N(t))(\zeta - 1) + \mu(N(t))(\zeta^{-1} - 1)]\zeta^{N(t)}\tau + o(\tau).$$

此外, 根据方程(7.1)以及 $\mathbf{A}(t)$ 的定义, 在 Itô 积分的意义下 [2, 82], 我们有

$$\mathbf{r}(t+\tau) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)\tau + \sqrt{2D(N(t))}(\mathbf{B}(t+\tau) - \mathbf{B}(t)) + o(\tau),$$

和

$$\mathbf{A}(t+\tau) = \mathbf{A}(t) + \kappa(\mathbf{r}(t), t)\tau + o(\tau).$$

由上面三个式子可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t+\tau)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t+\tau)} \zeta^{N(t+\tau)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t+\tau)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t+\tau)} \zeta^{N(t)}] + o(\tau) \\ &\quad + \mathbb{E}\{e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t+\tau)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t+\tau)} \zeta^{N(t)} [\lambda(N(t))(\zeta - 1) + \mu(N(t))(\zeta^{-1} - 1)]\}\tau, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t+\tau)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t+\tau)} \zeta^{N(t)}] \\ &= \mathbb{E}\left\{e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot[\mathbf{r}(t)+\mathbf{v}(\mathbf{r}(t),t)\tau+\sqrt{2D(N(t))}(\mathbf{B}(t+\tau)-\mathbf{B}(t))]} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{A}(t)+\kappa(\mathbf{r}(t),t)\tau)} \zeta^{N(t)}\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot[\mathbf{r}(t)+\sqrt{2D(N(t))}(\mathbf{B}(t+\tau)-\mathbf{B}(t))]} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t)} \zeta^{N(t)}\right\} + o(\tau) \\ &\quad + \mathbf{i}\tau \mathbf{k} \cdot \mathbb{E}[e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t)} \zeta^{N(t)} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)] + \mathbf{i}\tau \mathbf{p} \cdot \mathbb{E}[e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t)} \zeta^{N(t)} \kappa(\mathbf{r}(t), t)] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot[\mathbf{r}(t)+\sqrt{2D(N(t))}(\mathbf{B}(t+\tau)-\mathbf{B}(t))]} e^{\mathbf{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t)} \zeta^{N(t)}\right] + o(\tau) \\ &\quad + \tau \mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}} \mathcal{F}_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{p}} \{-\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}\tilde{u}(\zeta)) - \kappa \cdot \nabla_{\mathbf{A}} \tilde{u}(\zeta)\}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ e^{\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t+\tau)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(t+\tau)} \zeta^{N(t)} [\lambda(N(t))(\zeta - 1) + \mu(N(t))(\zeta^{-1} - 1)] \right\} \tau \\
&= \mathbb{E} \left\{ e^{\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(t)} e^{\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \sqrt{2D(N(t))(\mathbf{B}(t+\tau) - \mathbf{B}(t))} \tau} \zeta^{N(t)} \right. \\
&\quad \left. \times e^{\mathbf{i}\mathbf{p} \cdot \kappa(\mathbf{r}(t), t) \tau} [\lambda(N(t))(\zeta - 1) + \mu(N(t))(\zeta^{-1} - 1)] \right\} \tau + o(\tau) \\
&= \mathbb{E} \left\{ e^{\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(t)} \zeta^{N(t)} [\lambda(N(t))(\zeta - 1) + \mu(N(t))(\zeta^{-1} - 1)] \right\} \tau + o(\tau) \\
&= \mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}} \mathcal{F}_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{p}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda(n)(\zeta - 1) + \mu(n)(\zeta^{-1} - 1)] u_n \zeta^n \right\} \tau + o(\tau), \\
&\quad \mathbb{E} \left\{ e^{\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}(t) + \sqrt{2D(N(t))(\mathbf{B}(t+\tau) - \mathbf{B}(t))}]} e^{\mathbf{i}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(t)} \zeta^{N(t)} - e^{\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)} e^{\mathbf{i}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(t)} \zeta^{N(t)} \right\} \\
&= \mathcal{F}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}} \mathcal{F}_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{p}} \left\{ \Delta_{\mathbf{r}} \sum_{n=0}^{\infty} D(n) u_n \zeta^n \right\} + o(\tau),
\end{aligned}$$

这里最后一个等式我们用到了布朗运动的独立增量性和平稳增量性.

基于上面得到的式子以及逆 Fourier 变换, 令 $\tau \rightarrow 0$, 人们可得

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{u}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda(n)(\zeta - 1) + \mu(n)(\zeta^{-1} - 1)] u_n \zeta^n \\
&\quad - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} \tilde{u}(\zeta)) - \kappa \cdot \nabla_{\mathbf{A}} \tilde{u}(\zeta) + \Delta_{\mathbf{r}} \sum_{n=0}^{\infty} D(n) u_n \zeta^n.
\end{aligned}$$

进一步化简, 我们有

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n)(\zeta - 1) u_n \zeta^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) u_n \zeta^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) u_n \zeta^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda(n-1) u_{n-1} - \lambda(n) u_n) \zeta^n, \quad (\text{因为 } \lambda(-1) = u_{-1} = 0),
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)(\zeta^{-1} - 1) u_n \zeta^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(n+1) u_{n+1} - \mu(n) u_n) \zeta^n + \mu(0) u_0 \zeta^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(n+1) u_{n+1} - \mu(n) u_n) \zeta^n.
\end{aligned}$$

最后记

$$\mathcal{L}_n u_n = \lambda(n-1) u_{n-1} - (\lambda(n) + \mu(n)) u_n + \mu(n+1) u_{n+1},$$

则

$$\partial_t u_n = \mathcal{L}_n u_n + D(n) \Delta_r u_n - \nabla_r \cdot (\mathbf{v} u_n) - \kappa \cdot \nabla_A u_n.$$

注. 对于流体中的布朗粒子, 相应的与 $\mathbf{A}(t)$ 的联合概率密度函数满足的方程为

$$\partial_t u = \Delta_r u - \nabla_r \cdot (\mathbf{v} u) - \kappa \cdot \nabla_A u.$$

若对上述方程关于变元 \mathbf{A} 做 Fourier 变换, 则得到的方程即为流体中 (或外部势下) 布朗运动的 Feynman–Kac 方程, 此类方程在物理应用和数学理论方面都有着广泛的讨论, 详情可见 [2, 83, 84] 及其参考文献.

于是, 我们就得到了流体中的布朗非高斯粒子的扩散方程:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \partial_t u_n + \mathbf{v} \cdot \nabla_r u_n = \mathcal{L}_n u_n + D(n) \Delta_r u_n - \kappa \cdot \nabla_A u_n, \end{cases}$$

这里 $u_n = u(\mathbf{r}, \mathbf{A}, n, t)$ 为联合概率密度函数. 或者, 我们对上式中的第三个方程的关于变量 \mathbf{A} 做 Fourier 变换, 记 \hat{u}_n 为变换后的函数, 得

$$\partial_t \hat{u}_n + \mathbf{v} \cdot \nabla_r \hat{u}_n = \mathcal{L}_n \hat{u}_n + D(n) \Delta_r \hat{u}_n + \mathbf{i}(\mathbf{p} \cdot \kappa) \hat{u}_n.$$

令 $\mathbf{p} = 0$, 重新记 $u_n(\mathbf{r}, t) = \hat{u}_n(p = 0)$ ($\mathbf{r}(t)$ 和 $N(t)$ 的联合概率密度函数), 则有

$$\partial_t u_n + \mathbf{v} \cdot \nabla u_n = \mathcal{L}_n u_n + D(n) \Delta u_n. \quad (7.2)$$

数值格式

我们这里只讨论扩散方程(7.2)的数值格式, 耦合方程的处理和前文文中的处理步骤相似.

为了简单起见, 这里我们假设 $\lambda(n) \equiv \lambda$ ($n \geq 0$), $\mu(n) \equiv \mu$ ($n \geq 1$). 给定齐次 Dirichlet 边界条件以及假设 $n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, 记未知解组成的向量 $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{M-1})^T \in \mathbb{R}^M$, 则方程(7.2)的矩阵形式为

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (A + B) \mathbf{u} + D \Delta \mathbf{u}, \quad (7.3)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} -(\lambda + \mu) & \mu & & & \\ \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu \\ & & & \lambda & -(\lambda + \mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times M},$$

$$B = \text{diag} \{ \mu, 0, \dots, 0, \lambda \} \in \mathbb{R}^{M \times M},$$

$$D = \text{diag} \{ D(0), D(1), \dots, D(M-1) \} \in \mathbb{R}^{M \times M}.$$

根据定义我们知道矩阵 $-A$ 是一个正定矩阵, 因为其特征值为 [85]

$$\lambda + \mu + 2\sqrt{\lambda\mu} \cos \left(\frac{k\pi}{M+1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

此外由 $D(n)$ 和 λ, μ 的非负性, 对角矩阵 B 和 D 均为半正定矩阵. 进一步, 存在 $C_{\min} = D(M-1)$, $C_{\max} = D(0)$, $C = \max \{ \lambda, \mu \}$, 使得对于任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ 成立

$$C_{\min} |\mathbf{x}|^2 \leq \mathbf{x}^T D \mathbf{x} \leq C_{\max} |\mathbf{x}|^2, \quad \mathbf{x}^T B \mathbf{x} \leq C |\mathbf{x}|^2.$$

令 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ 为有限区间 $[0, T]$ 的时间步长为 τ 的一致剖分, 在速度场 \mathbf{v} 已知的情况下, 方程(7.3)的时间 Euler 半离散可写为

$$\bar{\partial}_\tau \mathbf{u}^n + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = (A + B) \mathbf{u}^n + D \Delta \mathbf{u}^n, \quad n \geq 1. \quad (7.4)$$

对上式等号两边同时和 $2\tau(-\Delta)^r \mathbf{v}^n$ ($r = 0, 1, 2$) 做内积, 得

$$\begin{aligned} & \left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^n \right\|^2 - \left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^{n-1} \right\|^2 + 2C_{\min} \tau \left\| (-\Delta)^{(r+1)/2} \nabla \mathbf{u}^n \right\|^2 \\ & \leq -2\tau((\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n, (-\Delta)^r \mathbf{u}^n) + 2C\tau \left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^n \right\|^2. \end{aligned}$$

根据定理 3.2 的证明过程我们知道

$$-2\tau((\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n, (-\Delta)^r \mathbf{u}^n) \leq c\tau \left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^n \right\|^2 + \frac{3C_{\min} \tau}{2} \left\| (-\Delta)^{(r+1)/2} \mathbf{u}^n \right\|^2.$$

令 τ 充分小使得 $C\tau < 1/8$ 以及上式中的 $c\tau < 1/4$, 此时成立

$$\left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^n \right\|^2 - \left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^{n-1} \right\|^2 + C_{\min} \tau \left\| (-\Delta)^{(r+1)/2} \mathbf{u}^n \right\|^2 \leq \left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^{n-1} \right\|^2.$$

对 n 求和并应用离散 Gronwall 不等式可得稳定性结果

$$\left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^n \right\|^2 + C_{\min} \tau \sum_{k=1}^n \left\| (-\Delta)^{(r+1)/2} \mathbf{u}^k \right\|^2 \lesssim \left\| (-\Delta)^{r/2} \mathbf{u}^0 \right\|^2, \quad r = 0, 1, 2.$$

误差估计也与第四章中的内容类似, 这里就不再赘述了.

7.2.3 两相流体模型

对于流体方程与其他 (抛物) 方程相耦合的系统, 我们还可以考虑两相流体方程, 相关模型及其研究可见 [86–95] 等相关文献. 这里简单介绍一下该模型. 对于两相流体, 记 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 为相场模型 (或叫做扩散界面模型 [96]) 中的场函数, 满足

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{流体 1,} \\ -1, & \text{流体 2.} \end{cases}$$

这个间断的场函数在两相之间被一个不存在的光滑人工扩散薄膜磨光, 该膜的厚度为 $O(\varepsilon)$. 设该系统的 Ginzburg–Landau 型 Helmholtz 自由能为

$$\mathcal{E}(\varphi) = -\frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 + \int F_\varepsilon(\varphi) d\mathbf{x},$$

这里 $F_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个和 ε 相关的给定势函数, 记 $f = -F'_\varepsilon$. 将此问题看作是一个梯度流问题, 根据极小能量原理, 则 φ 满足如下方程

$$D_t\varphi = \mathcal{G}\mu, \quad \mu = \frac{\delta\mathcal{E}(\varphi)}{\delta\varphi} = -\Delta\varphi - f(\varphi),$$

其中 D_t 为随体 (物质) 导数, $D_t = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, \mathbf{v} 为流体的流速, \mathcal{G} 为一个负定对称算子, 表示梯度流的类型: L^2 梯度流时 $\mathcal{G} = -\text{id}$ (恒等算子), H^{-1} 梯度流时 $\mathcal{G} = \Delta$, H^{-s} 梯度流时 $\mathcal{G} = -(-\Delta)^s$ (分数阶 Laplace 算子 [97], $0 < s < 1$). 此时, 流体力学基本方程组中的动量守恒部分变为

$$D_t\mathbf{v} = \partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu\Delta\mathbf{v} - \nabla p - \nabla \cdot (\nabla\varphi \otimes \nabla\varphi),$$

其中 ν 为粘滞系数, $-\nabla\varphi \otimes \nabla\varphi$ 表示薄膜表面张力造成的弹性应力, \otimes 是张量积. 借助于修正压力和散度定理, 上述方程可化简为

$$D_t\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p - \mu\nabla\varphi = 0.$$

综上所述, 相场方程型的两相不可压流体方程为

$$\begin{cases} \partial_t\varphi + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi = \mathcal{G}\mu, \\ \mu = -\Delta\varphi - f(\varphi), \\ \partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p - \mu\nabla\varphi = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

该系统满足如下能量耗散定律:

$$\frac{d\mathcal{E}(\mathbf{v}, \varphi)}{dt} = (\mathcal{G}\mu, \mu) - \nu\|\nabla\mathbf{v}\|^2 \leq 0,$$

总能量

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}, \varphi) = \int \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + F_\varepsilon(\varphi) d\mathbf{x}.$$

于是, 设计出高效快速的保能量耗散的数值格式是非常有必要的.

注. 取双势阱势 $F_\varepsilon(\varphi) = (\phi^2 - 1)^2/(4\varepsilon^2)$, 当 $\mathcal{G} = -\text{id}$ 时, 方程(7.5)即为 Navier–Stokes/Allen–Cahn 方程; 当 $\mathcal{G} = \Delta$ 时, 方程(7.5)被叫做 Navier–Stokes/Cahn–Hilliard 方程.

7.2.4 低正则性积分分子与 SAV 格式

低正则性积分分子主要用在非线性色散方程的时间半离散上, 其相较于经典的差分方法, 在相同的收敛阶条件下对方程解的正则性要求较低, 比如说, Schrödinger 方程 [98, 99], KdV 方程 [100, 101], Dirac 方程 [102] 和 Boussinesq 方程 [103]. 对于一般的非线性抛物方程, [104] 构建了一个构造其 1 阶和 2 阶低正则性积分分子的统一框架, 借助于该文献的思想, [19] 第一次给出了 N–S 方程的低正则性积分分子及其误差分析. 最近, 一类具有最大模上界 (maximum bound principle, MBP) 性质的 Allen–Cahn 型非线性抛物方程 [105] 的 (保 MBP) 低正则性积分分子在 [106] 中也被构造出来.

由前文可知, 对于具有能量耗散的方程, SAV 格式是很受欢迎的一类数值离散, 而低正则性积分分子又相较于经典差分格式降低了对方程解析解的光滑性要求, 因此将两者结合起来会得到更加鲁棒的数值方法. 于是, 基于上述文献, 本文构造出了两个 N–S 方程的带有低正则性积分分子的 SAV 格式. 详细讨论如下.

格式构造

这里使用 n 维 N–S 方程经过投影后的等价形式:

$$\partial_t \mathbf{v}(t) + A\mathbf{v}(t) + \mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(t) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0,$$

解 \mathbf{v} 满足如下常数变易公式

$$\mathbf{v}(t) = e^{-tA}\mathbf{v}^0 - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(s) ds, \quad (7.6)$$

或者,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t_n) &= e^{-\tau A}\mathbf{v}(t_{n-1}) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)A}\mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(s) ds, \\ &= e^{-\tau A}\mathbf{v}(t_{n-1}) - \int_0^\tau e^{-(\tau-s)A}\mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(t_{n-1} + s) ds, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

其中 $t_n = n\tau$, ($n = 0, 1, \dots, N$), 为区间 $[0, T]$ 的以 $\tau = T/N$ 为时间步长的均匀剖分节点, e^{-tA} 表示负 Stokes 算子 $-A$ 生成的 (压缩) 解析半群 [49, 107]. 因为

$$\mathbf{v}(t_{n-1} + s) = e^{-sA}\mathbf{v}(t_{n-1}) - \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+s} e^{-(t_{n-1}+s-\xi)A}\mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(\xi) d\xi,$$

所以

$$\mathbf{v}(t_n) = e^{-\tau A}\mathbf{v}(t_{n-1}) - \int_0^\tau g(s) ds - R_1^n, \quad (7.7)$$

其中,

$$g(s) = e^{-(\tau-s)A}\mathbb{P}(e^{-sA}\mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla)e^{-sA}\mathbf{v}(t_{n-1}),$$

$$R_1^n = \int_0^\tau e^{-(\tau-s)A} \mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(t_{n-1} + s) - g(s) \, ds,$$

满足 [19, eq.(2.11)]

$$\|R_1^n\| \lesssim \tau^2 \left(\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)} + \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{1,4})}^2 \right).$$

对式 (7.7) 中的关于函数 g 的积分这一项做左矩形数值积分逼近或右矩形数值积分逼近, 得

(1) (左矩形)

$$\mathbf{v}(t_n) = e^{-\tau A}(\mathbf{v}(t_{n-1}) - \tau \mathbb{P}(\mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t_{n-1})) - R_1^n - R_{2,l}^n,$$

(2) (右矩形)

$$\mathbf{v}(t_n) = e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) - \tau \mathbb{P}(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla) e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) - R_1^n - R_{2,r}^n,$$

其中,

$$R_{2,l}^n = \int_0^\tau g(s) - g(0) \, ds, \quad R_{2,r}^n = \int_0^\tau g(s) - g(\tau) \, ds.$$

根据 [19, eq.(2.33)], 我们有

$$\|g'(s)\| \lesssim \|\mathbf{v}(s)\|_{\mathbf{W}^{2,p}}, \quad p = \begin{cases} 2 + \varepsilon, & n = 2, \\ \frac{12}{5}, & n = 3, \end{cases} \quad \varepsilon > 0,$$

进而,

$$\|R_{2,l}^n\|, \|R_{2,r}^n\| \lesssim \tau^2 \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{2,p})},$$

综上所述, 我们得到了

$$\mathbf{v}(t_n) = e^{-\tau A}(\mathbf{v}(t_{n-1}) - \tau \mathbb{P}(\mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t_{n-1})) - R_l^n,$$

$$\mathbf{v}(t_n) = e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) - \tau \mathbb{P}(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla) e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) - R_r^n,$$

这里,

$$\|R_l^n\|, \|R_r^n\| \lesssim \tau^2 \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{2,p})}.$$

舍去误差项, 我们就构造出了 N-S 方程的两种低正则性积分子半离散:

$$\mathbf{v}^n = e^{-\tau A}(\mathbf{v}^{n-1} - \tau \mathbb{P}(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1}), \quad (\text{LR Ia})$$

和

$$\mathbf{v}^n = e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1} - \tau \mathbb{P}(e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1}, \quad (\text{LR Ib})$$

其中, (LR Ia)等价于半线性抛物方程的 IFRK 格式 [108, 109], (LR Ib)是 [19] 中提出的一个中间格式, 与其最终格式不同的是, 为了保证稳定性, 作者又对最后一项做了半隐化处理. 但是在这里, 因为我们要引入 SAV, 所以并不需要做成半隐格式. 对常数变易公式(7.6)引入前文中的辅助变量, 即

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t) = e^{-tA} \mathbf{v}^0 - \frac{S(t)}{\exp\{-\frac{t}{T}\}} \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(s) ds, \\ S'(t) = -\frac{S(t)}{T} + \frac{1}{\exp\{-\frac{t}{T}\}} \int_0^t e^{-(t-s)A} b(\mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s)) ds, \\ S(0) = 1. \end{cases}$$

于是, (LR Ia)和(LR Ib)所对应的 SAV 格式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{v}^n = e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1} - \frac{\tau S^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} e^{-\tau A} \mathbb{P}(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1}, & n \geq 1, \\ \bar{\partial}_\tau S^n = -\frac{S^n}{T} + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} (e^{-\tau A} \mathbb{P}(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}^n), & n \geq 1, \\ S^0 = 1, \end{cases} \quad (7.8)$$

和

$$\begin{cases} \mathbf{v}^n = e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1} - \frac{\tau S^n}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}(e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1}, & n \geq 1, \\ \bar{\partial}_\tau S^n = -\frac{S^n}{T} + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1}, e^{-\tau A} \mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}^n), & n \geq 1, \\ S^0 = 1. \end{cases} \quad (7.9)$$

这两个格式都是无条件能量稳定的, 即

$$\|\mathbf{v}^n\|^2 + |S^n|^2 \leq \|\mathbf{v}^{n-1}\|^2 + |S^{n-1}|^2, \quad \forall n \geq 1.$$

相容性

下面我们来估计一下(LR Ib)所对应的 SAV 格式(7.9)的相容误差, (LR Ia)所对应的 SAV 格式(7.8)的估计方法也是类似的, 这里就不再展开讨论. 因为 $S(t_n) = \exp\{-\frac{t_n}{T}\}$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t_n) &= e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) - \tau \mathbb{P}(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla) e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) + R_r^n \\ &= e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) - \frac{\tau S(t_n)}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \mathbb{P}(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla) e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) + R_r^n, \end{aligned}$$

此相容误差 R_r^n 上文已经讨论过. 另一方面,

$$\bar{\partial}_\tau S(t_n) = -\frac{S(t_n)}{T} + \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), \mathbf{v}(t_n)) + E_1^n + E_2^n,$$

其中

$$\begin{aligned}
E_1^n &= \bar{\partial}_\tau S(t_n) - S'(t_n), \\
E_2^n &= \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \int_0^{t_n} e^{-(t_n-s)A} b(\mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s)) \, ds \\
&\quad - \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), \mathbf{v}(t_n)) \\
&= \frac{\tau^{-1}}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)A} b(\mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s)) \, ds \\
&\quad - \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), \mathbf{v}(t_n)) \\
&= \frac{\tau^{-1}}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)A} b(\mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(t_n)) \, ds \\
&\quad - \frac{1}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} b(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), \mathbf{v}(t_n)) \\
&\quad - \frac{\tau^{-1}}{\exp\{-\frac{t_n}{T}\}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)A} b(\mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(s)) \, ds.
\end{aligned}$$

又因为

$$\left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)} \mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(s) \, ds - \tau \mathbb{P}(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla) e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) \right\| \lesssim \tau^2,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)A} b(\mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(t_n)) \, ds - b(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), \mathbf{v}(t_n)) \\
&= \frac{1}{\tau} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)} \mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(s) \, ds - \tau \mathbb{P}(e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}) \cdot \nabla) e^{-\tau A} \mathbf{v}(t_{n-1}), \mathbf{v}(t_n) \right) \\
&\lesssim \tau.
\end{aligned}$$

又因为

$$\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(s) = - \int_s^{t_n} A \mathbf{v}(\tau) - \mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(\tau) \, d\tau,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)A} b(\mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(s)) \, ds \right| \\
&= \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-(t_n-s)A} ((\mathbf{v}(s) \cdot \nabla) \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(s)) \, ds \right| \\
&\leq \tau \|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \|\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(t_{n-1},t_n;L^2)} \\
&\lesssim \tau^2 \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{1,\infty})} \left(\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)} + \|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \right) \\
&\lesssim \tau^2.
\end{aligned}$$

于是,

$$|E_2^n| \lesssim \tau, \quad |E_1^n| \lesssim \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |S''(t)| \tau \lesssim \tau.$$

至此, 三项相容误差就全部估计了. 但其全局误差的估计还需后续讨论.

参考文献

- [1] Coffey W T, Kalmykov Y P. The Langevin Equation. With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering[M], volume 27 of *World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics*. Third ed., World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2012: xxii+827.
- [2] Wang X, Chen Y, Deng W. Feynman–Kac equation revisited[J]. *Phys. Rev. E*, 2018, 98(5):052114.
- [3] Heywood J G, Rannacher R. Finite–element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. Part IV: error analysis for second–order time discretization[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1990, 27(2):353–384.
- [4] Tone F. Error analysis for a second order scheme for the Navier–Stokes equations[J]. *Appl. Numer. Math.*, 2004, 50(1):93–119.
- [5] He Y, Sun W. Stability and convergence of the Crank–Nicolson/Adams–Bashforth scheme for the time-dependent Navier–Stokes equations[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2007, 45(2):837–869.
- [6] Sun H, He Y, Feng X. On error estimates of the pressure–correction projection methods for the time–dependent Navier–Stokes equations[J]. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2011, 8(1):70–85.
- [7] Ingram R. A new linearly extrapolated Crank–Nicolson time–stepping scheme for the Navier–Stokes equations[J]. *Math. Comp.*, 2013, 82(284):1953–1973.
- [8] Guo Y, He Y. Unconditional convergence and optimal L^2 error estimates of the Crank–Nicolson extrapolation FEM for the nonstationary Navier–Stokes equations[J]. *Comput. Math. Appl.*, 2018, 75(1):134–152.
- [9] Ervin V J, Layton W J, Neda M. Numerical analysis of filter–based stabilization for evolution equations[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2012, 50(5):2307–2335.
- [10] Emmrich E. Error of the two–step BDF for the incompressible Navier–Stokes problem[J]. *ESAIM: M2AN*, 2004, 38(5):757–764.
- [11] de Frutos J, García-Archilla B, Novo J. Postprocessing finite–element methods for the Navier–Stokes equations: the fully discrete case[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2009, 47(1):596–621.
- [12] Bermejo R, Galán del Sastre P, Saavedra L. A second order in time modified Lagrange–Galerkin finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2012, 50(6):3084–3109.
- [13] Layton W, Mays N, Neda M, et al. Numerical analysis of modular regularization methods for the BDF2 time discretization of the Navier–Stokes equations[J]. *ESAIM: M2AN*, 2014, 48(3):765–793.

- [14] de Frutos J, García-Archilla B, John V, et al. Error analysis of non inf–sup stable discretizations of the time-dependent Navier–Stokes equations with local projection stabilization[J]. *IMA J. Numer. Anal.*, 2019, 39(4):1747–1786.
- [15] DeCaria V, Layton W, Zhao H. A time-accurate, adaptive discretization for fluid flow problems[J]. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2020, 17(2):254–280.
- [16] Shen J. On error estimates of projection methods for Navier–Stokes equations: first-order schemes[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1992, 29(1):57–77.
- [17] Shen J. On error estimates of some higher order projection and penalty–projection methods for Navier–Stokes equations[J]. *Numer. Math.*, 1992, 62(1):49–73.
- [18] Shen J. On error estimates of the projection methods for the Navier–Stokes equations: second-order schemes[J]. *Math. Comp.*, 1996, 65(215):1039–1065.
- [19] Li B, Ma S, Schratz K. A semi-implicit exponential low-regularity integrator for the Navier–Stokes equations[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2022, 60(4):2273–2292.
- [20] Baker G A, Douglas V A, Karakashian O A. On a higher order accurate fully discrete Galerkin approximation to the Navier–Stokes equations[J]. *Math. Comp.*, 1982, 39(160):339–375.
- [21] Wang K, He Y. Convergence analysis for a higher order scheme for the time-dependent Navier–Stokes equations[J]. *Appl. Math. Comput.*, 2012, 218(17):8269–8278.
- [22] Wang K, Lv C. Third-order temporal discrete scheme for the non-stationary Navier–Stokes equations[J]. *Int. J. Comput. Math.*, 2012, 89(15):1996–2018.
- [23] Notsu H, Tabata M. Error estimates of a stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations[J]. *ESAIM: M2AN*, 2016, 50(2):361–380.
- [24] Liu W, Hou Y, Xue D. Numerical analysis of a 4th-order time parallel algorithm for the time-dependent Navier–Stokes equations[J]. *Appl. Numer. Math.*, 2020, 150:361–383.
- [25] Hill A T, Süli E. Approximation of the global attractor for the incompressible Navier–Stokes equations[J]. *IMA J. Numer. Anal.*, 2000, 20(4):633–667.
- [26] He Y. A fully discrete stabilized finite-element method for the time-dependent Navier–Stokes problem[J]. *IMA J. Numer. Anal.*, 2003, 23(4):665–691.
- [27] He Y. The Euler implicit/explicit scheme for the 2D time-dependent Navier–Stokes equations with smooth or non-smooth initial data[J]. *Math. Comp.*, 2008, 77(264):2097–2124.
- [28] He Y. The Crank–Nicolson/Adams–Bashforth scheme for the time-dependent Navier–Stokes equations with nonsmooth initial data[J]. *Numer. Methods PDEs*, 2012, 28(1):155–187.
- [29] Li B, Ma S, Wang N. Second-order convergence of the linearly extrapolated Crank–Nicolson method for the Navier–Stokes equations with H^1 initial data[J]. *J. Sci. Comput.*, 2021, 88(3):70.

- [30] Gallagher I. Critical function spaces for the well-posedness of the Navier–Stokes initial value problem[C]. *Proceedings of Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*. Springer, Cham, 2018: 647–685.
- [31] He Y. Stability and error analysis for spectral Galerkin method for the Navier–Stokes equations with L^2 initial data[J]. *Numer. Methods PDEs*, 2008, 24(1):79–103.
- [32] Li B, Ma S, Ueda Y. Analysis of fully discrete finite element methods for 2D Navier–Stokes equations with critical initial data[J]. *ESAIM: M2AN*, 2022, 56(6):2105–2139.
- [33] Shen J, Xu J, Yang J. The scalar auxiliary variable (SAV) approach for gradient flows[J]. *J. Comput. Phys.*, 2018, 353:407–416.
- [34] Shen J, Xu J. Convergence and error analysis for the scalar auxiliary variable (SAV) schemes to gradient flows[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2018, 56(5):2895–2912.
- [35] Shen J, Xu J, Yang J. A new class of efficient and robust energy stable schemes for gradient flows[J]. *SIAM Rev.*, 2019, 61(3):474–506.
- [36] Lin L, Yang Z, Dong S. Numerical approximation of incompressible Navier–Stokes equations based on an auxiliary energy variable[J]. *J. Comput. Phys.*, 2019, 388:1–22.
- [37] Li X, Shen J. Error analysis of the SAV–MAC scheme for the Navier–Stokes equations[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2020, 58(5):2465–2491.
- [38] Li X, Shen J, Liu Z. New SAV–pressure correction methods for the Navier–Stokes equations: stability and error analysis[J]. *Math. Comp.*, 2021, 91(333):141–167.
- [39] Zhang T, Yuan J. Unconditional stability and optimal error estimates of Euler implicit/explicit–SAV scheme for the Navier–Stokes equations[J]. *J. Sci. Comput.*, 2022, 90(1):1.
- [40] Han Y, Hou Y, Zhang M. Analysis of divergence-free H^1 conforming FEM with IMEX–SAV scheme for the Navier–Stokes equations at high Reynolds number[J]. *Math. Comp.*, 2023, 92(340):557–582.
- [41] Adams R A, Fournier J J F. Sobolev Spaces[M], volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Second ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003: xiv+305.
- [42] He Y, Li K. Convergence and stability of finite element nonlinear Galerkin method for the Navier–Stokes equations[J]. *Numer. Math.*, 1998, 79(1):77–106.
- [43] Kellogg R B, Osborn J E. A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon[J]. *J. Func. Anal.*, 1976, 21(4):397–431.
- [44] Temam R. Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis[M], volume 343. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1984: xiv+408.
- [45] Heywood J G, Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. Part I: regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1982, 19(2):275–311.

- [46] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations: Theory and Algorithms[M], volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986: x+374.
- [47] Fujita H, Kato T. On the Navier–Stokes initial value problem. I[J]. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1964, 16:269–315.
- [48] Kato T. Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions[J]. *Math. Z.*, 1984, 187(4):471–480.
- [49] Giga Y. Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces[J]. *Math. Z.*, 1981, 178(3):297–329.
- [50] Giga Y. Domains of fractional powers of the Stokes operator in L_r spaces[J]. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1985, 89(3):251–265.
- [51] Hishida T, Shibata Y. L_p – L_q estimate of the Stokes operator and Navier–Stokes flows in the exterior of a rotating obstacle[J]. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009, 193(2):339–421.
- [52] Guzmán J, Neilan M. Conforming and divergence-free Stokes elements on general triangular meshes[J]. *Math. Comp.*, 2014, 83(285):15–36.
- [53] Taylor C, Hood P. A numerical solution of the Navier–Stokes equations using the finite element technique[J]. *Internat. J. Comput. Fluids*, 1973, 1(1):73–100.
- [54] Diening L, Storn J, Tscherpel T. Fortin operator for the Taylor–Hood element[J]. *Numer. Math.*, 2022, 150(2):671–689.
- [55] Scott L R, Vogelius M. Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials[J]. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1985, 19(1):111–143.
- [56] Guzmán J, Scott L R. The Scott–Vogelius finite elements revisited[J]. *Math. Comp.*, 2019, 88(316):515–529.
- [57] Arnold D N, Brezzi F, Fortin M. A stable finite element for the Stokes equations[J]. *Calcolo*, 1984, 21(4):337–344.
- [58] Rannacher R, Scott L R. Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations[J]. *Math. Comp.*, 1982, 38(158):437–445.
- [59] Crouzeix M, Thomée V. The stability in L_p and W_p^1 of the L_2 -projection onto finite element function spaces[J]. *Math. Comp.*, 1987, 48(178):521–532.
- [60] Zhang T, Yuan J, Si Z. Decoupled two-grid finite element method for the time-dependent natural convection problem I: Spatial discretization[J]. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 2015, 31(6):2135–2168.
- [61] Alnæs M S, Logg A, Ølgaard K B, et al. Unified form language: a domain-specific language for weak formulations of partial differential equations[J]. *ACM Trans. Math. Softw.*, 2014, 40:1–37.
- [62] Scroggs M W, Baratta I A, Richardson C N, et al. Basix: a runtime finite element basis evaluation library[J]. *J. Open Source Softw.*, 2022, 7(73):3982.

- [63] Scroggs M W, Dokken J S, Richardson C N, et al. Construction of arbitrary order finite element degree-of-freedom maps on polygonal and polyhedral cell meshes[J]. *ACM Trans. Math. Softw.*, 2022, 48(18):1–23.
- [64] Stynes M, O’Riordan E, Gracia J L. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2017, 55(2):1057–1079.
- [65] Mustapha K. An L_1 approximation for a fractional reaction–diffusion equation, a second-order error analysis over time-graded meshes[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2020, 58(2):1319–1338.
- [66] Richardson L F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph[J]. *Proc. Roy. Soc. A*, 1926, 110(756):709–737.
- [67] Scher H, Montroll E W. Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids[J]. *Phys. Rev. B*, 1975, 12(6):2455.
- [68] Szymanski J, Weiss M. Elucidating the origin of anomalous diffusion in crowded fluids[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 103(3):038102.
- [69] Jeon J H, Monne H M S, Javanainen M, et al. Anomalous diffusion of phospholipids and cholesterol in a lipid bilayer and its origins[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 109(18):188103.
- [70] Stylianidou S, Kuwada N J, Wiggins P A. Cytoplasmic dynamics reveals two modes of nucleoid-dependent mobility[J]. *Biophys. J.*, 2014, 107(11):2684–2692.
- [71] Jeon J H, Javanainen M, Martinez-Seara H, et al. Protein crowding in lipid bilayers gives rise to non-Gaussian anomalous lateral diffusion of phospholipids and proteins[J]. *Phys. Rev. X*, 2016, 6(2):021006.
- [72] Yamamoto E, Akimoto T, Kalli A C, et al. Dynamic interactions between a membrane binding protein and lipids induce fluctuating diffusivity[J]. *Sci. Adv.*, 2017, 3(1):e1601871.
- [73] Cherstvy A G, Nagel O, Beta C, et al. Non-Gaussianity, population heterogeneity, and transient superdiffusion in the spreading dynamics of amoeboid cells[J]. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2018, 20(35):23034–23054.
- [74] Baldovin F, Orlandini E, Seno F. Polymerization induces non-Gaussian diffusion[J]. *Front. Phys.*, 2019, 7:124.
- [75] Nampoothiri S, Orlandini E, Seno F, et al. Polymers critical point originates Brownian non-Gaussian diffusion[J]. *Phys. Rev. E*, 2021, 104(6):L062501.
- [76] Nampoothiri S, Orlandini E, Seno F, et al. Brownian non-Gaussian polymer diffusion and queuing theory in the mean-field limit[J]. *New J. Phys.*, 2022, 24(2):023003.
- [77] Odian G. Principles of Polymerization[M]. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, 2004: xxiv+812.
- [78] Doi M, Edwards S F. The Theory of Polymer Dynamics[M], volume 73. Oxford University Press, New York, 1988.

- [79] Weber S C, Spakowitz A J, Theriot J A. Bacterial chromosomal loci move subdiffusively through a viscoelastic cytoplasm[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104(23):238102.
- [80] Ermak D L, McCammon J A. Brownian dynamics with hydrodynamic interactions[J]. *J. Chem. Phys.*, 1978, 69(4):1352–1360.
- [81] Doi M, Edwards S F. Dynamics of concentrated polymer systems. part 1: Brownian motion in the equilibrium state[J]. *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2*, 1978, 74:1789–1801.
- [82] Cairoli A, Baule A. Feynman–Kac equation for anomalous processes with space- and time-dependent forces[J]. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2017, 50(16):164002.
- [83] Chen Z Q, Deng W, Xu P. Feynman–Kac transform for anomalous processes[J]. *SIAM J. Math. Anal.*, 2021, 53(5):6017–6047.
- [84] Zhang S, Chen Z Q. Fokker–Planck equation for Feynman–Kac transform of anomalous processes[J]. *Stochastic Process. Appl.*, 2022, 147:300–326.
- [85] Yueh W C. Eigenvalues of several tridiagonal matrices[J]. *Appl. Math. E-Notes*, 2005, 5:66–74.
- [86] Jacqmin D. Calculation of two-phase Navier–Stokes flows using phase-field modeling[J]. *J. Comput. Phys.*, 1999, 155(1):96–127.
- [87] Yue P, Feng J J, Liu C, et al. A diffuse-interface method for simulating two-phase flows of complex fluids[J]. *J. Fluid Mech.*, 2004, 515:293–317.
- [88] Feng X. Fully discrete finite element approximations of the Navier–Stokes–Cahn–Hilliard diffuse interface model for two-phase fluid flows[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2006, 44(3):1049–1072.
- [89] Gal C G, Grasselli M. Asymptotic behavior of a Cahn–Hilliard–Navier–Stokes system in 2D[J]. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 2010, 27(1):401–436.
- [90] Kotschote M. Strong solutions of the Navier–Stokes equations for a compressible fluid of Allen–Cahn type[J]. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2012, 206(2):489–514.
- [91] Chen Y, Shen J. Efficient, adaptive energy stable schemes for the incompressible Cahn–Hilliard Navier–Stokes phase-field models[J]. *J. Comput. Phys.*, 2016, 308:40–56.
- [92] Diegel A E, Wang C, Wang X, et al. Convergence analysis and error estimates for a second order accurate finite element method for the Cahn–Hilliard–Navier–Stokes system[J]. *Numer. Math.*, 2017, 137(3):495–534.
- [93] Jeong D, Kim J. Conservative Allen–Cahn–Navier–Stokes system for incompressible two-phase fluid flows[J]. *Comput. Fluids*, 2017, 156:239–246.
- [94] Huo W, Teng K. Global well-posedness and L^2 decay estimate of smooth solutions for 2D incompressible Navier–Stokes–Allen–Cahn system[J]. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2022, 73(6):230.
- [95] Xu X, Zhao L, Liu C. Axisymmetric solutions to coupled Navier–Stokes/Allen–Cahn equations[J]. *SIAM J. Math. Anal.*, 2010, 41(6):2246–2282.

- [96] Anderson D M, McFadden G B, Wheeler A A. Diffuse–interface methods in fluid mechanics[C]. Proceedings of Annual Review of Fluid Mechanics. Annual Reviews, Palo Alto, CA, 1998: 139–165.
- [97] Lischke A, Pang G, Gulian M, et al. What is the fractional Laplacian? A comparative review with new results[J]. *J. Comput. Phys.*, 2020, 404:109009.
- [98] Ostermann A, Schratz K. Low regularity exponential–type integrators for semilinear Schrödinger equations[J]. *Found. Comput. Math.*, 2018, 18(3):731–755.
- [99] Ostermann A, Rousset F, Schratz K. Error estimates of a Fourier integrator for the cubic Schrödinger equation at low regularity[J]. *Found. Comput. Math.*, 2021, 21(3):725–765.
- [100] Hofmanová M, Schratz K. An exponential–type integrator for the KdV equation[J]. *Numer. Math.*, 2017, 136(4):1117–1137.
- [101] Li Y, Wu Y, Yao F. Convergence of an embedded exponential–type low–regularity integrators for the KdV equation without loss of regularity[J]. *Ann. Appl. Math.*, 2021, 37(1):1–21.
- [102] Schratz K, Wang Y, Zhao X. Low–regularity integrators for nonlinear Dirac equations[J]. *Math. Comp.*, 2021, 90(327):189–214.
- [103] Ostermann A, Su C. Two exponential–type integrators for the “good” Boussinesq equation[J]. *Numer. Math.*, 2019, 143(3):683–712.
- [104] Rousset F, Schratz K. A general framework of low regularity integrators[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2021, 59(3):1735–1768.
- [105] Du Q, Ju L, Li X, et al. Maximum bound principles for a class of semilinear parabolic equations and exponential time–differencing schemes[J]. *SIAM Rev.*, 2021, 63(2):317–359.
- [106] Doan C K, Hoang T T P, Ju L, et al. Low regularity integrators for semilinear parabolic equations with maximum bound principles[J]. *BIT*, 2023, 63(1):2.
- [107] Abe K, Giga Y. Analyticity of the Stokes semigroup in spaces of bounded functions[J]. *Acta Math.*, 2013, 211(1):1–46.
- [108] Isherwood L, Grant Z J, Gottlieb S. Strong stability preserving integrating factor Runge–Kutta methods[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2018, 56(6):3276–3307.
- [109] Ju L, Li X, Qiao Z, et al. Maximum bound principle preserving integrating factor Runge–Kutta methods for semilinear parabolic equations[J]. *J. Comput. Phys.*, 2021, 439:110405.