CHƯƠNG 1
HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.TÍNH CHẤT CỦA VECTƠ

Cho 2 vectơ $\vec{a}$ = (a_1,a_2,a_3), $\vec{b}$ = (b_1,b_2,b_3)

Ta có:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\right)$$

$$k\,\vec{a} = \left(ka_1, ka_2, ka_3\right) \qquad (\, k \in \mathrm{R}\,)$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}^{\,2}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

II. TÍNH CHẤT CỦA ĐIỂM

Cho 2 điểm $A(x_A, y_A, z_A,)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

Ta có:

$\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A, z_A)$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$OA = \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$

$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k ($k \neq 1$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$$

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

Chú ý: Cho điểm M(x,y,z)

1/ $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x,y,0)$

$M \in (Oyz) \Rightarrow M(0,y,z)$

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x,0,z)$

2/ $M \in Ox \Rightarrow M(x,0,0)$

$M \in Oy \Rightarrow M(0,y,0)$

$M \in Oz \Rightarrow M(0,0,z)$

III. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Cho 2 vectơ: $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ (hoặc $\vec{a}\wedge\vec{b}$),

là 1 vectơ có tọa độ:

$$\boxed{[\vec{a},\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)}$$

Tính chất:

1/ Vectơ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vuông góc với cả 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, tức là:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{a} = \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{b} = 0$$

2/ $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$

3/ $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

IV. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH CÓ HƯỚNG

1/ Chứng minh 2 vectơ cùng phương:

Cho 2 vectơ $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$

Ta có:

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k.\vec{b} \quad \left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ ($b_1.b_2.b_3 \neq 0$)

2/ Chứng minh 3 vectơ đồng phẳng:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0$

3/ Tính diện tích tam giác ABC**:**

$$S = \frac{1}{2}\left\|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\right\|$$

4/ Tính diện tích hình bình hành ABCD**:**

$$S = \left\|\left[\vec{AB},\vec{AD}\right]\right\|$$

5/ Tính thể tích tứ diện ABCD**:**

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\vec{AD}\right|$$

6/ Tính thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D':

$$V = \left|\left[\vec{AB},\vec{AD}\right]\vec{AA'}\right|$$

V. MẶT CẦU

Phương trình mặt cầu:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

là phương trình mặt cầu tâm I(a, b, c), bán kính R

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0} \quad (a^2+b^2+c^2-d>0)$$

là phương trình mặt cầu tâm I(a, b, c), bán kính R $=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

TỌA ĐỘ, VECTƠ VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Vấn đề 1: Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Phương pháp:

A, B, C, thẳng hàng ⇔ $\vec{AB}$ cùng phương

$$\vec{AC} \Leftrightarrow \left[\vec{AB}, \vec{AC}\right] = \vec{0}$$

Suy ra:

A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác ⇔ A, B, C không thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \left[\vec{AB}, \vec{AC}\right] \neq \vec{0}$$

Vấn đề 2: Chứng minh bốn điểm là bốn đỉnh của 1 tứ diện.

Phương pháp:

A, B, C, D là 4 đỉnh của 1 tứ diện ⇔ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng đđ

$$\Leftrightarrow \left[\vec{AB}, \vec{AC}\right].\vec{AD} \neq 0$$

Vấn đề 3: Tính các góc của 1 tam giác.

Phương pháp:

Để tính góc A của ΔABC, ta áp dụng công thức:

$$\boxed{\cos A = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}}$$

Các góc B và C được tính tương tự

Suy ra:

Góc A vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Góc A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$

Góc A tù $\Leftrightarrow$ cosA < 0 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$

Chú ý rằng một tam giác có nhiều nhất 1 góc tù.

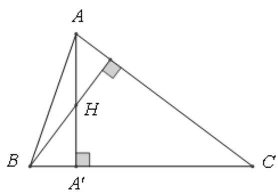
Vấn đề 4: Các yếu tố liên quan đến ΔABC

1/ Trọng tâm G:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_c) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) \end{cases}$$

2/ Trực tâm H:

Tìm tọa độ điểm H từ điều kiện:



$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ A, B, C, H \text{ đồng phẳng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$

3/ Chân đường cao A' của đường cao AA':

Tìm tọa độ điểm A' từ điều kiện:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}\right] = \vec{0} \end{cases}$$

4/ Tâm đường tròn ngoại tiếp I:

Tìm tọa độ điểm I từ điều kiện:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ A, B, C, I \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

Chú ý:

Nếu ΔABC vuông tại A thì:

Tâm I của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của cạnh huyền BC

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp: $R = \dfrac{AB}{2} = IA = IB = IC$

Nếu ΔABC đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp chính là trọng tâm của ΔABC.

5/ Chân đường phân giác trong và ngoài**:**

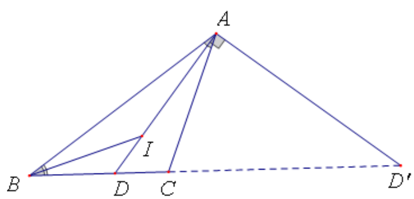
Gọi D, D' là chân đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$

Ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{D'B} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{D'C}$$



Chú ý:

Để tìm tâm của đường tròn nội tiếp:

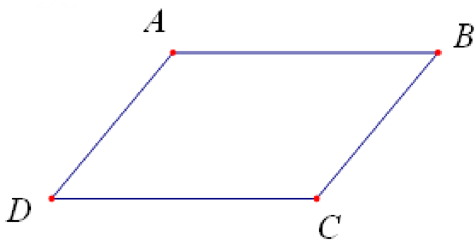
- Vẽ đường phân giác trong của góc B cắt AD tại I: I chính là tâm đường tròn nội tiếp.

- Tìm I từ công thức:

$$\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{BA}{BD}.\overrightarrow{ID}$$

Vấn đề 5: Xác định hình tính của tứ giác.

1/ ABCD là hình bình hành ⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ⇔ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



2/ ABCD là hình chữ nhật ⇔ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}$

3/ ABCD là hình vuông ⇔ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| \end{cases}$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho 3 vectơ $\vec{a} = (1,m,2)$, $\vec{b} = (m+1,2,1)$, $\vec{c} = (0,m-2,2)$

a/ Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$.

b/ Tìm m để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

c/ Tìm m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$

Giải

a/ Ta có:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a.b} = 0 \Leftrightarrow m+1+2m+2=0 \Leftrightarrow m = -1$$

b/ Ta có:

$[\vec{a},\vec{b}]$ = (m-4, 2m+1, $-m^2$-m+2)

=> $[\vec{a},\vec{b}].\vec{c}$ = (m-2)(2m+1)+2($-m^2$-m+2) = -5m +2

Do đó:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}].\vec{c} = 0 \Leftrightarrow -5m+2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}$

c/ Ta có: $\vec{a} + \vec{b}$ = (m+2, m+2, 3)

Do đó:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{c}| \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \Leftrightarrow (m+2)^2 + (m+2)^2 + 9 = (m-2)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -6 \pm 3\sqrt{3}$$

Bài 2: Cho $\vec{a}$ = (1,-2,3). Tìm tọa độ vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$, biết rằng $\vec{b}$ tạo với trục tọa độ Oy một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{14}$.

Giải:

Gọi $\vec{b}$ = (x,y,z); Oy có vectơ đơn vị $\vec{j}$ = (0,1,0). Ta có:

$$\begin{cases} \vec{b} = k\vec{a} \\ \vec{b}.\vec{j} > 0 \\ |\vec{b}| = \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k, y = -2k, z = 3k \\ y > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k, y = -2k, z = 3k \\ y > 0 \\ k^2 + 4k^2 + 9k^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k, y = -2k, z = 3k \\ y > 0 \\ k = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 2, z = -3 \\ k = -1 \end{cases}$$

Vậy $\vec{b}$ = (-1,2,-3)

Bài 3: Cho $\vec{a}$ = (1,1,1), $\vec{b}$ = (1,-1,3). Tìm tọa độ $\vec{c}$ biết $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $|\vec{c}|$ = 3 và $\vec{c}$ tạo với trục Oz một góc tù.

Giải:

Gọi $\vec{c}$ = (x,y,z). Trục Oz có vectơ đơn vị $\vec{k}$ = (0,0,1)

Ta có:

$$\begin{cases} \vec{c}.\vec{a} = 0 \\ \vec{c}.\vec{b} = 0 \\ |\vec{c}| = 3 \\ \vec{c}.\vec{k} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x - y + 3z = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 & (3) \\ z < 0 \end{cases}$$

(1) và (2) cho: x=-2z, y=z

Thay vào (3): $4z^2+z^2+z^2=9 \Leftrightarrow z^2 = \frac{9}{6} \Leftrightarrow$ z= $-\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ (do z < 0)

$\Rightarrow$ x= $\sqrt{6}$, y = $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy: $\vec{c} = (\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$

Bài 4: Cho 3 điểm: A (-2,0,2), B (1,2,3), C(x,y-3,7).

Tìm x,y để 3 điểm A,B,C thẳng hàng

Giải:

$$\overrightarrow{AB} = (3,2,1),\ \overrightarrow{AC} = (x+2, y-3, 5)$$

Cách 1:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (y-13, 13-x, 2x-3y+13)$$

Ta có:

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 13 = 0 \\ 13 - x - 0 \\ 2x - 3y + 13 - 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ x = y = 13

Cách 2:

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{5}{1} \Leftrightarrow$ x = y = 13

Cách 3:

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=3k \\ y-3=2k \\ 5=k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=13 \\ k=5 \end{cases}$$

Bài 5: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho 2 điểm A(-4, 1, 2), B(2a, a^2 -3, 2)

Tìm a để 3 điểm O,A,B là 3 đỉnh của một tam giác.

Giải:

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (-4,1,2), \overrightarrow{OB} = (2a, a^2-3, 2)$

=> $[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}] = (2a^2-8, -4a-8, 4a^2+2a-12)$

Do đó:

O, A, B là 3 đỉnh của một tam giác $\Leftrightarrow$ $[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}] \neq \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a^2-8\neq 0 \\ -4a-8\neq 0 \\ 4a^2+2a-12\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \neq -2$

Bài 6: Cho 2 điểm A(1,1,2), B(-1,3,-9)

a/ Tìm điểm M trên trục Oz sao cho ΔABM vuông tại M

b/ Gọi N là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oyz). Hỏi điểm N chia đoạn AB theo tỉ số nào? Tìm tọa độ điểm N?

c/ Gọi α, β, γ là góc tạo bởi đường thẳng AB và các trục tọa độ. Tính giá trị của P = $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

Giải:

a/ M $\in$ Oz => M(0,0,z)

$\overrightarrow{AM} = (-1,-1,z-2), \overrightarrow{BM} = (1,-3,z+9)$

ΔABM vuông tại M $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow -1+3+(z-2)(z+9)=0$

$$\Leftrightarrow z^2+7z-16=0 \Leftrightarrow z = \frac{-7\pm\sqrt{113}}{2}$$

b/ N = AB $\cap$ (Oyz) => N(0,y,z)

$\overrightarrow{NA} = (1,1-y,2-z)$, $\overrightarrow{NB}$ = (-1, 3-y, -9-z)

Điểm N chia đoạn AB theo tỉ số k ⇔ $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{NB}$ ⇔

$$\begin{cases} 1 = -k \\ 1-y = k(3-y) \\ 2-z = k(-9-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = -1 \\ y = 2 \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy : k = -1, N$(0,2,\frac{-7}{2})$

c/ $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 2, -11); các vtcp của Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}$ = (1,0,0), $\vec{j}$ = (0,1,0),

$\vec{k}$ = (0,0,1)

Ta có: cosα = $\frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{i}|}{|\overrightarrow{AB}||\vec{i}|} = \frac{2}{\sqrt{129}}$

Cosβ = $\frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{j}|}{|\overrightarrow{AB}||\vec{j}|} = \frac{2}{\sqrt{129}}$

Cosγ = $\frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{k}|}{|\overrightarrow{AB}||\vec{k}|} = \frac{121}{\sqrt{129}}$

$\Rightarrow$ P = $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Bài 7: Cho 3 điểm: A(1,1,1), B(-1,-1,0), C(3,1,-1)

a/ Tìm điểm M trên trục Oy cách đều 2 điểm B, C

b/ Tìm điểm N trên mặt phẳng (Oxy) cách đều 3 điểm A, B, C.

c/ Tìm điểm P trên mặt phẳng (Oxy) sao cho PA + PC nhỏ nhất.

Giải:

a/ M $\in$ Oy => M(0,y,0)

M cách đều 2 điểm B,C ⇔ MB = MC ⇔ $MB^2 = MC^2$

⇔ $1+(y+1)^2 = 9+(y-1)^2 + 1$ ⇔ y= $\frac{9}{4}$

Vậy M$(0, \frac{9}{4}, 0)$

b/ N $\in$ (Oxy) => N(x, y, 0)

N cách đều 3 điểm A, B, C ⇔ $\begin{cases} NA = NB \\ NA = NC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} NA^2 = NB^2 \\ NA^2 = NC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+1=(x+1)^2+(y+1)^2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+1=(x-3)^2+(y-1)^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{7}{4} \end{cases}$$

Vậy N $(2, -\frac{7}{4}, 0)$

c/ P $\in$ (Oxy) => P(x,y,0)

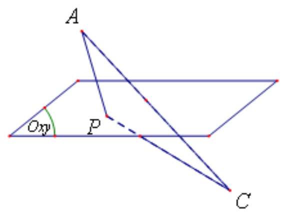
Nhận thấy A và C nằm khác phía đối với mp (Oxy) (do $z_A.z_C$ = -1 <0)

Ta có: PA +PC $\geq$ AC

Do đó: PA+PC nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ PA+PC = AC

$\Leftrightarrow$ P = AC $\cap$ (Oxy) $\Leftrightarrow$ A, P,C thẳng hàng



Ta có:

$$\overrightarrow{AP}=(x-1,y-1,-1),\ \overrightarrow{AC}=(2,0,-2)$$

A, P, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}$ = k$\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2k \\ y-1=0 \\ -1=-2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy P(2, 1, 0)

Bài 8: Cho 2 vectơ $\vec{a}$ = (1,-3,4), $\vec{b}$ = (2,-6,8)

Tìm tọa độ $\vec{c}$ biết $\vec{c}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $|\vec{c}|$ = 3 $|\vec{a}+\vec{b}|$

Giải:

Gọi $\vec{c}$ = (x,y,z) ; $\vec{a}+\vec{b}$ = (3,-9,12)

Ta có:

$$\begin{cases} \vec{c} = K\vec{b} \\ K < 0 \\ |\vec{c}| = 3|\vec{a} + \vec{b}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2K, y = -6K, z = 8K \\ K < 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9(9 + 81 + 144) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2K, y = -6K, z = 8K \\ K < 0 \\ K^2 = \frac{81}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -9, y = 27, z = -36 \\ K = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

Vậy $\vec{c}$ = (-9,27,-36)

Bài 9: Cho ΔABC có A(0,0,1), B(1,4,0), C(0,15,1)

a/ Tính độ dài đường cao AK của ΔABC.

b/ Tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

c/ Tìm trực tâm H của ΔABC.

Giải:

a/ $\overrightarrow{AB}$ = (1,4,-1), $\overrightarrow{AC}$ = (0,15,0), $\overrightarrow{BC}$ = (-1,11,1)

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ = (15,0,15) => $S_{ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}]| = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

Ta cũng có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AK.BC = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ => $AK = \frac{15\sqrt{2}}{BC} = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{123}}$

b/ Gọi I(x,y,z). Ta có:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - z - 8 = 0 \\ 2y - 15 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{21}{2} \\ y = \frac{15}{2} \\ z = \frac{23}{2} \end{cases}$$

Vậy $I(-\frac{21}{2}, \frac{15}{2}, \frac{23}{2})$

c/ Gọi H(x,y,z). Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 11y + z - 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 4 \\ z = -21 \end{cases}$$

Vậy: H(22,4,-21)

Bài 10: Cho 4 điểm: A(1,0,1), B(-1,1,2), C(-1,1,0), D(2,-1,-2)

a) Chứng minh rằng A,B,C,D là 4 đỉnh của một tứ diện.
b) Tính cosin của góc giữa 2 đường thẳng AB và CD.
c) Tính độ dài đường cao AH của tứ diện ABCD.

Giải:

a) A,B,C,D là bốn đỉnh của một tứ diện $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} \neq 0$

Ta có: $\overrightarrow{AB}\ (-2,1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2,1,-1)$, $\overrightarrow{AD} = (1,-1,-3)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$= (-2,-4,0) => $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 2 \neq 0$

=>A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.

b) $\overrightarrow{CD}$ = (3,-2,-2), $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ = -10

$$\cos(AB,CD) = |\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})| = \frac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|} = \frac{10}{\sqrt{6}.\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{102}}$$

c) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3}$

Ngoài ra: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}$ => $AH = \frac{1}{S_{BCD}}$

$[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}] = (-4,-6,0)$ => $S_{BCD} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}]| = \frac{1}{2}\sqrt{16+36} = \sqrt{13}$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Bài 11: Cho ΔABC có A(1,1,1), B(5,1,-2), C(7,9,1)

a) Tính cosin của góc A.

b) Chứng minh rằng góc B nhọn.

c) Tính độ dài đường phân giác trong của góc A.

d) Tìm tọa độ chân đường cao vẽ từ A.

Giải

a) $\overrightarrow{AB} = (4,0,-3)$, $\overrightarrow{AC} = (6,8,0)$, $\overrightarrow{BC} = (2,8,3)$

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{24}{5.10} = \frac{12}{25}$$

b) $\overrightarrow{BA} = (-4,0,3)$, $\overrightarrow{BC} = (2,8,3)$

=> $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 1 > 0$ => góc B nhọn.

c) Gọi D(x,y,z) là giao điểm đường phân giác trong của góc A với cạnh BC.

Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ => $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DC} = (7-x,9-y,1-z)$, $\overrightarrow{DB} = (5-x,1-y,-2-z)$

Do đó:

$$\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x = -2(5-x) \\ 9-y = -2(1-y) \\ 1-z = -2(-2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{17}{3},\frac{11}{3},-1\right)$$

$$=> AD = \sqrt{\left(\frac{17}{3}-1\right)^2+\left(\frac{11}{3}-1\right)^2+(-1-1)^2} = \frac{2\sqrt{74}}{3}$$

d) Gọi H(x,y,z) là chân đường cao AH. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \text{ cùng ph } \ ong\, \overrightarrow{\mathrm{BC}} \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$\overrightarrow{AH}$ = (x-1, y-1, z-1), $\overrightarrow{BH}$ = (x-5, y-1, z+2), $\overrightarrow{BC}$ = (2,8,3)

Do đó:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)+8(y-1)+3(z-1)=0 \\ \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{387}{77} \\ y=\dfrac{85}{77} \\ z=-\dfrac{151}{77} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \text{H}\left(\frac{387}{77},\frac{85}{77},\frac{-151}{77}\right)$$

Bài 12: Định m để các phương trình sau là phương trình mặt cầu:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 2my - 2(m-1)z + 5m^2 + m + 5 = 0$ (1)
b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+3)x - 6my + 4mz + 13m^2 + 2m + 5 = 0$ (2)

Giải

a) (1) là pt mặt cầu $\Leftrightarrow 4m^2 + m^2 + (m-1)^2 - 5m^2 - m - 5 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 > 0$

$\Leftrightarrow m<-1 \ \text{ v } \ m>4$

b) (2) là pt mặt cầu $\Leftrightarrow (m+3)^2 + 9m^2 + 4m^2 - 13m^2 - 2m - 5 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

Bài 13: Cho 2 điểm A(-1,0,-3), B(1,2,-1). Viết phương trình mặt cầu (S):

a) Có đường kính AB.
b) Có tâm I thuộc trục Oy và qua 2 điểm A,B.
Giải:

a) (S) có tâm I là trung điểm AB và bán kính R = IA

I(0,1,-2), R = IA = $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

=> (S): $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$

b) Cách 1:

$I \in Oy$ => I(0,b,0)

(S) qua 2 điểm A,B ⇔ IA = IB ⇔ $IA^2 = IB^2$

⇔ $1 + b^2 + 9 = 1 + (b-2)^2 + 1$ ⇔ b = -1

=> I(0,-1,0), R = IA = $\sqrt{11}$

=> (S): $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$

Cách 2:

$I \in Oy$ => I(0,b,0) => (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2by + d = 0$

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+9+d=0 \\ 1+4+1-4b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-10 \\ b=-1 \end{cases}$$

=> (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 10 = 0$

Bài 14: Viết pt mặt cầu (S) qua 3 điểm A(1,2,4), B(1,-3,-1), C(2,2,-3) và có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy)

Giải

Gọi I là tâm của (S)

$I \in (Oxy)$ => I(a,b,0)

=> (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by + d = 0$

Ta có:

$A \in (S)$ ⇔ -2a – 4b + d + 21 = 0 (1)

$B \in (S)$ ⇔ -2a + 6b + d + 11 = 0 (2)

$C \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b + d + 17 = 0$ (3)

(1), (2), (3) cho a = -2, b = 1, d = -21

$\Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$

Bài 15: Cho 3 điểm A(2,0,1), B(-1,1,3), C(1,2,0)

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt phẳng (Oyz) và tiếp xúc mặt phẳng (ABC) tại A.

Giải:

$I \in (Oyz) \Rightarrow I(0,b,c)$

Ta có:

(S) tiếp xúc (ABC) tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ (1)

$\overrightarrow{AI} = (-2, b, c-1)$, $\overrightarrow{AB} = (-3,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,2,-1)$

Do đó:

(1)$\Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c + 4 = 0 \\ 2b - c + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I(0,-2,-1)$

Bán kính (S): $R = IA = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow (S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 12$

Bài 16: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(1,-3,6) và cắt trục Ox tại 2 điểm M,N sao cho MN = 8.

Giải:

Gọi H là hình chiếu của I trên Ox => H là trung điểm MN.

$$HM = HN = \frac{MN}{2} = 4;\ IH = d(I,Ox) = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$$

Gọi R là bán kính của (S): $R^2 = IM^2 + IH^2 = 61$

$$\Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 61$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Chứng minh 3 điểm A(1,1,1), B(-4,3,1), C(-9,5,1) thẳng hàng.

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD. Biết A(-3,-2,0), B(3,-3,1), C(5,0,2)

Tìm tọa độ đỉnh D và góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$

Bài 3:

a) Tìm vectơ đơn vị vuông góc với trục Ox và vuông góc với $\vec{a} = (3,6,8)$

b) Tìm $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a} = (2\sqrt{2},-1,4)$ biết rằng $|\vec{b}| = 10$

Bài 4: Cho $\vec{a} = (1,1,-2)$, $\vec{b} = (1,0,m)$. Tìm m để góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45^o

Bài 5: Cho 2 điểm A(-2,3,1), B(5,6,-2). Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M.

Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số nào ? Tìm tọa độ điểm M.

Bài 6: Cho 3 điểm A(1,0,2), B(-2,1,1), C(1,-3,-2). Gọi M là điểm chia đoạn AB theo tỉ số -2; N là điểm chia đoạn BC theo tỉ số 2. Tính độ dài đoạn MN.

Bài 7: Cho 3 vectơ $\vec{a} = (3,-2,4)$, $\vec{b} = (5,1,6)$, $\vec{c} = (-3,0,2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện: $\vec{a}.\vec{x} = 4$, $\vec{b}.\vec{x} = 35$, $\vec{c}$ vuông góc $\vec{x}$.

Bài 8: Cho 2 điểm A(1,2,3), B(2,0,-1)

a) Tìm điểm M thuộc trục Ox cách đều 2 điểm A và B.

b) Tìm điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) cách đều 2 điểm A,B và cách gốc O một khoảng bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 9: Cho 2 điểm A(0,1,2), B(-1,1,0)

a) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔOAB

b) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔOAB

Bài 10: Cho 4 điểm A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), D(-2,1,-1)

a) Chứng minh A,B,C,D là 4 đỉnh của một tứ diện.

b) Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD
c) Tính độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A.

Bài 11: Cho 2 điểm A(2,-1,0), B(-3,1,1)

a) Tìm điểm M $\in$ mặt phẳng (Oyz) để MA + MB nhỏ nhất.
b) Tìm điểm N $\in$ mặt phẳng (Oyz) để |NA – NB| lớn nhất.

Bài 12: Cho ΔABC có A(4,0,1), B(2,-1,3), C(5,-1,-1)

Tính độ dài đường phân giác trong của góc B.

Bài 13: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(4,-2,1) biết:

a) (S) tiếp xúc mặt pẳng (Oxz).
b) (S) tiếp xúc trục Ox.
c) (S) cắt trục Oy tại 2 điểm A,B với AB = 10.

Bài 14: Viết pt mặt cầu (S) qua điểm A(1,-1,4) và tiếp xúc với 3 mặt phẳng tọa độ

Bài 15: Cho tứ diện OABC có A(4,0,0), B(0,-2,0), C(0,0,2), 0 là gốc tọa độ.

a) Tìm tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.
b) Tìm hình chiếu của đỉnh O trên mặt phẳng (ABC).

Bài 16: Cho 3 điểm A(-2,1,-2), B(2,1,1), C(-1,0,5). Viết phương trình mặt cầu có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.