Đề cương ôn tập Topology

Nguyễn Tú Anh - A29888 - ntanhtm@gmail.com

Ngày 16 tháng 5 năm 2019

Phần I
Định nghĩa

1 Điểm trong

Điểm $a \in A$ gọi là điểm trong nếu $\exists r > 0$ để $B^S(a, r) \subset A$

2 Điểm biên

Điểm $b \in S$ gọi là điểm biển của A nếu $\forall r > 0$, $B^S(b, r)$ chứa ít nhất một điểm thuộc A và 1 điểm thuộc $S - A$

3 Tập mở, tập đóng

Tập mở : Tập $A \subset S$ gọi là mở trong S nếu $\forall a \in A$ đều là điểm trong.

Tập đóng : Tập $A \subset S$ gọi là đóng trong S nếu $S - A$ là tập mở trong S.

4 Tập lồi

Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi nếu nó chứa mọi đường thẳng đi qua 2 điểm bất kì nằm trong nó. Hay nói cách khác, nếu $(1 - \lambda)a + \lambda b \in C$, với a, b là 2 điểm bất kì trong C và $0 \leq \lambda \leq 1$ thì ta nói C là tập lồi.

Phần II

Phát biểu kết quả

1 Điều kiện cần và đủ để một hàm là liên tục

Định lý 13.3.4

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f là liên tục nếu và chỉ nếu một trong các điều kiện tương đương sau được thỏa mãn:

(a) $f^{-1}(U)$ là tập mở với mọi tập mở U trong $\mathbb{R}^m$

(b) $f^{-1}(F)$ là tập đóng với mọi tập đóng F trong $\mathbb{R}^m$

2 Định lý cực đại

Định lý 13.4.1

Giả sử f là một hàm liên tục từ $X \times Y$ đến $\mathbb{R}$, với $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, và Y là tập 'compact', $X, Y \neq \varnothing$. Thì:

(a) Hàm giá trị $V(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$ là một hàm liên tục của x.

(b) Nếu bài toán cực đại có duy nhất một lời giải $y = y(x)$ với mọi x, thì $y(x)$ là một hàm liên tục của x.

Phần III
Chứng minh định lý

1 Bolzano-Weierstrass

Định lý 13.2.5

1.1 Phát biểu

Một tập con S của $\mathbb{R}^n$ là **compact** (đóng và bị chặn) nếu và chỉ nếu mọi dãy các điểm trong S có một dãy con hội tụ tới một điểm trong S.

1.2 Chứng minh

1.2.1 Định lý bổ trợ

Định lý 13.2.3 (Bao đóng và hội tụ)

- Với bất kỳ tập $S \subseteq \mathbb{R}^n$, một điểm a trong $\mathbb{R}^n$ thuộc S nếu và chỉ nếu a là giới hạn của một dãy $\{x_k\}$ trong S.
- Một tập $S \subseteq \mathbb{R}^n$ bị đóng nếu và chỉ nếu mọi chuỗi hội tụ của các điểm trong S có giới hạn của nó trong S.

Định lý 13.2.4 Một tập con $S \subseteq \mathbb{R}^n$ bị chặn nếu và chỉ nếu mỗi dãy của các điểm trong S có một dãy con hội tụ.

1.2.2 Chứng minh

Chiều thuận

Giả thiết	$S \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập compact, $\{\mathbf{x}_k\}$ là một dãy trong S
Kết luận	$\{\mathbf{x}_k\}$ chứa một dãy con hội tụ tới một điểm trong S.

Chứng minh:
Do $S \subseteq \mathbb{R}^n$ và bị chặn (compact) $\Rightarrow$ $\{\mathbf{x}_k\}$ chứa một dãy con hột tụ (Định lý 13.2.4).
Do S đóng nên giới hạn của dãy con phải nằm trong S (Định lý 13.2.3).
Vậy $\{\mathbf{x}_k\}$ chứa một dãy con hội tụ tới một điểm trong S.

Chiều ngược

Giả thiết	Mọi dãy các điểm trong S có một dãy con hội tụ tới một điểm trong S.
Kết luận	S đóng và bị chặn.

Chứng minh:
Theo định lý 13.2.4 thì S bị chặn.
Đặt $\mathbf{x}$ là điểm tùy ý trong bao đóng của S.
$\Rightarrow$ có một dãy $\{\mathbf{x}_k\}$ trong S với $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$

Theo giả thiết, $\{\mathbf{x}_k\}$ có một dãy con $\{\mathbf{x}_{k_j}\}$ hội tụ đến một giới hạn $\mathbf{x}'$ trong S.
Nhưng $\{\mathbf{x}_{k_j}\}$ cũng hội tụ đến $\mathbf{x}$.
$\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}' \in S$
$\Rightarrow S$ đóng.

2 Ma trận sản xuất

Định lý 13.7.2

2.1 Phát biểu

Với một ma trận vuông cấp n với các phần tử không âm $\mathbf{A}$, các mệnh đề sau đây là tương đương:

(a) $\mathbf{A}$ là ma trận sản xuất.

(b) $\mathbf{A}^m \to \mathbf{0}$ khi $m \to \infty$.

(c) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + ...$

(d) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ tồn tại và không âm.

2.2 Chứng minh

Chứng minh theo trình tự: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$

- $(a) \Rightarrow (b)$
  Chọn một vector $\mathbf{a} \gg 0$ sao cho $\mathbf{a} \gg \mathbf{Aa}$(Do A là ma trận sản xuất) (Mỗi phần tử của $\mathbf{a}$ lớn hơn hẳn phần tử tương ứng của $\mathbf{Aa}$).
  Vì thế, $\exists\lambda$ trong (0,1) sao cho $\lambda\mathbf{a} \gg \mathbf{Aa} \gg 0$.
  Khi đó, $\lambda^2\mathbf{a} = \lambda(\lambda\mathbf{a}) \gg \lambda\mathbf{Aa} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{a} \geq \mathbf{AAa} = \mathbf{A^2a} \gg 0$
  Bằng quy lạp, ta có $\lambda^m\mathbf{a} \gg \mathbf{A}^m\mathbf{a}$ với $m = 1, 2, ...$
  Khi $m \to \infty$ thì $\lambda^m\mathbf{a} \to 0$ $(\lambda < 1)$
  $\Rightarrow \mathbf{A}^m\mathbf{a} \to 0$ khi $m \to \infty$
  Có $\mathbf{A}^m\mathbf{a} = \mathbf{A}^m(\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{A}^m\mathbf{e}_i \geq a_j\mathbf{A}^m\mathbf{e}_j$ với $j = 1, 2..n$
  $\Rightarrow$ cột thứ j - $\mathbf{A}^m\mathbf{e}_j$ của $\mathbf{A}^m$ tiến đến $\mathbf{0}$ khi $m \to \infty$
  $\Rightarrow \mathbf{A}^m \to \mathbf{0}$ khi $m \to \infty$

- $(b) \Rightarrow (c)$
  Do định thức của một ma trận liên tục theo các phần tử của nó.
  $\Rightarrow \lim_{m\to\infty} |\mathbf{I} - \mathbf{A}^m| = |\lim_{m\to\infty}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^m)| = 1 - 0 = 1$
  $\Rightarrow |\mathbf{I} - \mathbf{A}^m| \neq 0$ với m đủ lớn.
  Lại có, $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + ... + \mathbf{A}^{m-1}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^m$
  $\Rightarrow |\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$
  $\Rightarrow \mathbf{I} - \mathbf{A}$ khả nghịch.
  $\Rightarrow \mathbf{I} + \mathbf{A} + ... + \mathbf{A}^{m-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^m)$
  Khi $m \to \infty$ thì $\mathbf{I} + \mathbf{A} + ... + \mathbf{A}^{m-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ (đpcm)

- $(c) \Rightarrow (d)$ là điều hiển nhiên.

- $(d) \Rightarrow (a)$
  Chọn $\mathbf{y} \gg \mathbf{0}$, đặt $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}$
  $\Rightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ và $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y} \gg \mathbf{0}$
  $\Rightarrow \mathbf{Ix} - \mathbf{Ax} \gg \mathbf{0}$
  $\Rightarrow \mathbf{x} \gg \mathbf{Ax} \Rightarrow \mathbf{A}$ là ma trận sản xuất.