

Đồ thị Hamilton

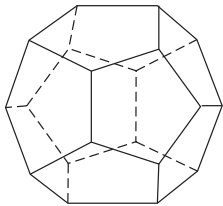
Trần Vĩnh Đức

Ngày 10 tháng 10 năm 2019

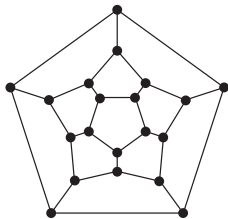
Tài liệu tham khảo

- ▶ Ngô Đắc Tân, *Lý thuyết Tổ hợp và Đồ thị*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.
- ▶ Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. 2nd Edition, 2000.
- ▶ K. Rosen, *Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học* (Bản dịch Tiếng Việt)

Đi vòng quanh thể giới

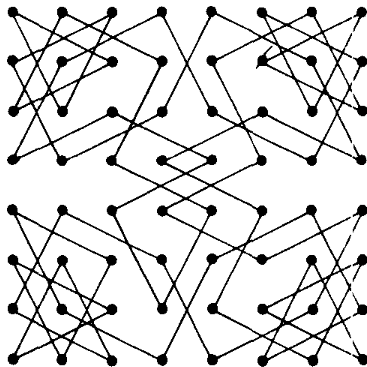


(a)

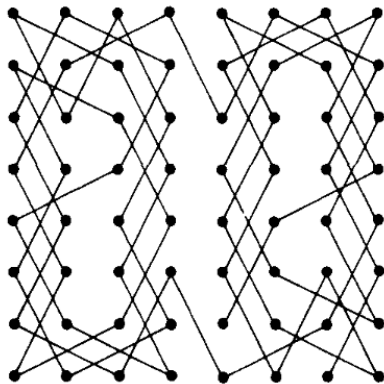


(b)

Con Mã đi trên bàn cờ



Con Mã đi trên bàn cờ 2



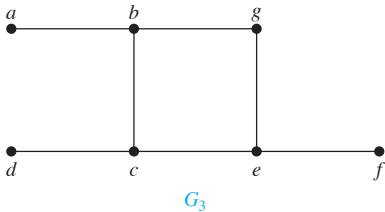
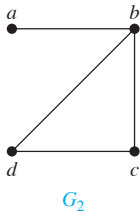
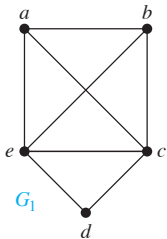
Định nghĩa (Đồ thị nửa Hamilton)

- ▶ Một đường đi trong đồ thị G được gọi là *đường đi Hamilton* nếu nó chứa tất cả các đỉnh của G .
- ▶ Một đồ thị được gọi là *đồ thị nửa Hamilton* nếu nó có đường đi Hamilton.

Nói cách khác, đồ thị nửa Hamilton là đồ thị có đường đi bao trùm.

Ví dụ

Đồ thị nào dưới đây là nửa Hamilton?



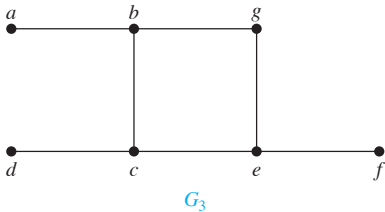
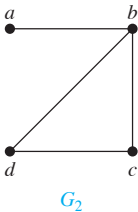
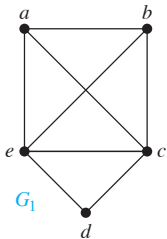
Định nghĩa (Đồ thị Hamilton)

- ▶ Một chu trình trong đồ thị G được gọi là *chu trình Hamilton* nếu nó chứa tất cả các đỉnh của G .
- ▶ Một đồ thị được gọi là *đồ thị Hamilton* nếu nó có chu trình Hamilton.

Nói cách khác, đồ thị Hamilton là đồ thị có chu trình bao trùm.

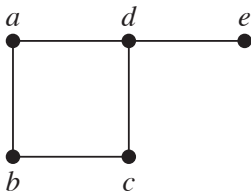
Ví dụ

Đồ thị nào dưới đây là Hamilton?

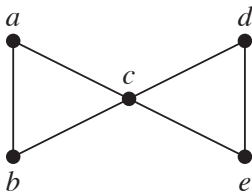


Ví dụ

Đồ thị nào dưới là Hamilton? Nếu không, có là nửa Hamilton?



G



H

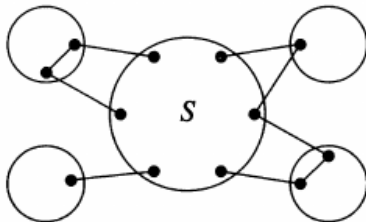
Ví dụ

Chứng minh rằng đồ thị đầy đủ K_n có chu trình Hamilton với mọi $n \geq 3$.

Mệnh đề

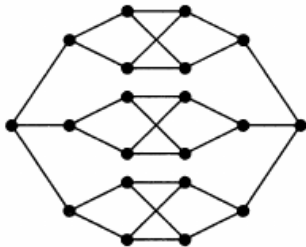
Nếu $G = (V, E)$ có chu trình Hamilton, vậy thì với mọi tập đỉnh khác rỗng $S \subseteq V$, đồ thị thu được từ G bằng cách xóa các đỉnh thuộc S chỉ có nhiều nhất $|S|$ thành phần liên thông.

Chứng minh.



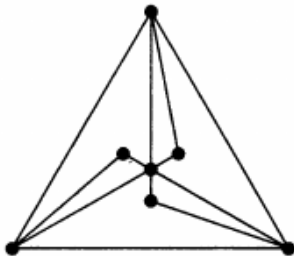
Ví dụ

Đồ thị sau có phải là Hamilton không?



Ví dụ

Đồ thị sau đây chỉ ra rằng điều kiện cần trước không phải điều kiện đủ. Tại sao?



Bài tập

Alice và Bob nhìn trộm đề thi Toán Rời Rạc của thầy Đức. Alice thấy thầy đang mô tả một **đồ thị với 17 đỉnh và 129 cạnh**; còn Bob thấy thầy hỏi xem đồ thị này có chu trình Hamilton không.

- Bob nói rằng: "không cần biết chi tiết đồ thị thầy đang vẽ thế nào, chắc chắn đồ thị này **có** chu trình Hamilton."
- Còn Alice nói: "Nếu không biết chi tiết thì không thể quyết định được đồ thị này **có** chu trình Hamilton hay không."

Ai đúng, ai sai? Bạn hãy giải thích.

Định lý (Ore)

Giả sử G là một đồ thị với $n \geq 3$ đỉnh thỏa mãn: với mọi cặp đỉnh không liền kề u và v , ta có

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

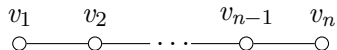
khi đó G là đồ thị Hamilton.

Chứng minh định lý Ore

- ▶ Giả sử định lý không đúng.
- ▶ Tồn tại đồ thị $G = (V, E)$ với n đỉnh và có nhiều cạnh nhất thỏa mãn điều kiện của định lý Ore nhưng không là Hamilton. Tại sao?
- ▶ Vì G có nhiều cạnh nhất có thể nên đồ thị thu được bằng cách thêm một cạnh mới nối hai đỉnh không kề nhau phải có chu trình Hamilton chứa cạnh thêm đó. Tại sao?
- ▶ Vậy giữa hai đỉnh bất kỳ trong G có thể nối với nhau bằng một đường Hamilton.

Chứng minh (tiếp)

- ▶ Vì đồ thị K_n có chu trình Hamilton nên $G \neq K_n$.
- ▶ Vậy tồn tại hai đỉnh v_1 và v_n không kề nhau trong G ,
- ▶ và tồn tại đường Hamilton:

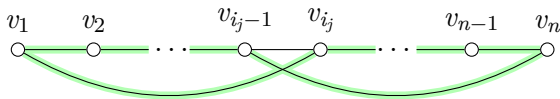


Chứng minh (tiếp)

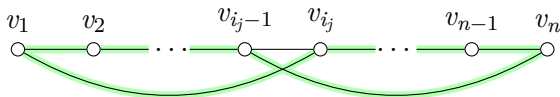
- ▶ Giả sử v_1 kề với k đỉnh là: $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ và

$$2 = i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

- ▶ Đỉnh v_n không thể kề với đỉnh v_{i_j-1} nào ($2 \leq j \leq k$) vì nếu không sẽ tồn tại chu trình Hamilton:



Chứng minh (tiếp)



- Vậy v_n không kề với ít nhất k đỉnh $\{v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \dots, v_{i_k-1}, \dots\}$.
Tức là

$$\deg(v_n) \leq n - 1 - k$$

- Nhưng vậy thì

$$n \leq \deg(v_1) + \deg(v_n) \leq k + (n - 1 - k) = n - 1 \quad \text{✗}$$

Định lý (Dirac)

Nếu G là một đồ thị với $n \geq 3$ đỉnh thỏa mãn: bậc của mỗi đỉnh ít nhất bằng $n/2$, khi đó G là đồ thị Hamilton.

Chứng minh.

- ▶ Với hai đỉnh không kề nhau bất kỳ u và v ta có

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n/2 + n/2 = n$$

- ▶ Suy ra, G thỏa mãn các điều kiện của định lý Ore, vì thế nó có chu trình Hamilton.



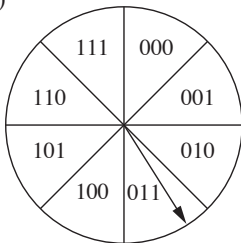
Bài tập

- ▶ Hãy chỉ ra rằng các điều kiện trên không phải điều kiện cần.
- ▶ Có nghĩa rằng: chỉ ra tồn tại đồ thị không thỏa mãn điều kiện Dirac mà vẫn có chu trình Hamilton.

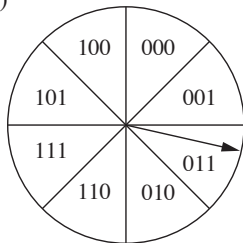
Mã Gray

- Chia đường tròn thành 2^n cung có độ dài bằng nhau, và gán mỗi xâu bit độ dài n cho một cung.

(a)



(b)



- Tìm cách gán đảm bảo rằng hai cung cạnh nhau chỉ khác nhau một bit.

Mã Gray 2

