# Đề cương ôn tập Topology

Nguyễn Tú Anh - A29888 - Đại Học Thăng Long
ntanhtm@gmail.com

Ngày 9 tháng 6 năm 2019

# Mục lục

# Phần I
# Định nghĩa

## 1 Điểm trong

Điểm $\mathbf{a}$ gọi là điểm trong của một tập $S \subset \mathbb{R}^n$ nếu $\exists r > 0$ để hình cầu mở $B(\mathbf{a}, r) \subset S$

## 2 Điểm biên

Điểm $\mathbf{a}$ gọi là điểm biển của $S$ nếu $\forall r > 0$, $B(\mathbf{a}, r)$ chứa ít nhất một điểm thuộc S và 1 điểm không thuộc S.

## 3 Tập mở, tập đóng

**Tập mở** : Tập $A \subset S$ gọi là mở trong $S$ nếu tất cả các điểm của $A$ đều là điểm trong.

**Tập đóng** : Tập $A \subset S$ gọi là đóng trong $S$ nếu $S - A$ là tập mở trong $S$.

## 4 Tập lồi

Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi nếu nó chứa mọi đường thẳng đi qua 2 điểm bất kì nằm trong nó. Hay nói cách khác, nếu $(1-\lambda)a + \lambda b \in C$, với $a, b$ là 2 điểm bất kì trong C và $0 \leq \lambda \leq 1$ thì ta nói $C$ là tập lồi.

## 5 Điểm bất động

### 5.1 Của hàm

Cho một tập $X$ và một hàm $f : X \to X, x^* \in X$ là điểm bất động của $f$ nếu vài chỉ nếu $f(x^*) = x^*$.

### 5.2 Của phép tương ứng

Cho một tập $X$ và một phép tương ứng $F : X \twoheadrightarrow \mathbb{P}(X)$ với $\mathbb{P}(X)$ là tập con của $X$, $x^* \in X$ là một điểm bất động của $F$ nếu và chỉ nếu $x^* \in F(x^*)$

## 6 Ánh xạ co

Cho $S$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ và $K$ là tập của tất cả các hàm số bị chặn từ $S$ vào $\mathbb{R}^n$. Toán tử $T : K \to K$ là ánh xạ *co* nếu tồn tại một số $\alpha \in [0, 1)$ sao cho với mọi $\varphi, \psi \in K$,

$$\mathbf{d}(\mathbf{T}(\varphi), \mathbf{T}(\psi)) \leq \alpha \mathbf{d}(\varphi, \psi)$$

# Phần II
# Phát biểu kết quả

## 1 Điều kiện cần và đủ để một hàm là liên tục

**Định lý 13.3.4**

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f$ là liên tục nếu và chỉ nếu một trong các điều kiện tương đương sau được thỏa mãn:

(a) $f^{-1}(U)$ là tập mở với mọi tập mở $U$ trong $\mathbb{R}^m$

(b) $f^{-1}(F)$ là tập đóng với mọi tập đóng $F$ trong $\mathbb{R}^m$

## 2 Định lý cực đại

**Định lý 13.4.1**

Giả sử $f$ là một hàm liên tục từ $X \times Y$ đến $\mathbb{R}$, với $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, và $Y$ là tập 'compact', $X, Y \neq \varnothing$. Thì:

(a) Hàm giá trị $V(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$ là một hàm liên tục của $x$.

(b) Nếu bài toán cực đại có duy nhất một lời giải $y = y(x)$ với mọi x, thì $y(x)$ là một hàm liên tục của $x$.

## 3 Định lý tách

**Định lý 13.6.4**

Cho $S$ và $T$ là 2 tập lồi trong $(R)^n$ với không có điểm trong tương đối chung nào. Khi đó, $S$ và $T$ có thể bị tách bởi một siêu phẳng, nghĩa là tồn tại một vec-tơ $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ trong $\mathbb{R}^n$ và một số vô hướng $\alpha$ sao cho:

$$\mathbf{a}.\mathbf{x} \leq \alpha \leq \mathbf{a}.\mathbf{y} \text{ với mọi } \mathbf{x} \text{ trong } S \text{ và mọi } \mathbf{y} \text{ trong } T$$

## 4 Định lý điểm bất động của Brouwer và Kakutani

### 4.1 Định lý điểm bất động của Brouwer

**Định lý 14.4.1**

Giả sử $K$ là một tập lồi, compact, không rỗng trong $\mathbb{R}^n$, và một hàm liên tục $f$ ánh xạ từ $K$ và chính nó thì $f$ có một điểm bất động $x^*$, có nghĩa là một điểm $x^* \in K$ sao cho $f(x^*) = x^*$

## 4.2 Định lý điểm bất động của Kakutani

### Định lý 14.4.2

Giả sử $K$ là một tập lồi, compact, không rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F$ là một phép tương ứng từ $K \twoheadrightarrow K$.Giải sử rằng:

- $F(x)$ là một tập lồi không rỗng trong $K$ với mỗi $x \in K$.
- $F$ là nửa liên tục trên.

Khi đó $F$ có một điểm bất động $x^* \in K$, nghĩa là một điểm $x^*$ sao cho $x^* \in F(x^*)$

# Phần III
# Chứng minh định lý

## 1 Bolzano-Weierstrass

**Định lý 13.2.5**

### 1.1 Phát biểu

Một tập con $S$ của $\mathbb{R}^n$ là **compact** (đóng và bị chặn) nếu và chỉ nếu mọi dãy các điểm trong $S$ có một dãy con hội tụ tới một điểm trong $S$.

### 1.2 Chứng minh

#### 1.2.1 Định lý bổ trợ

**Định lý 13.2.3 (Bao đóng và hội tụ)**

- Với bất kỳ tập $S \subseteq \mathbb{R}^n$, một điểm $a$ trong $\mathbb{R}^n$ thuộc $\overline{S}$ nếu và chỉ nếu $a$ là giới hạn của một dãy $\{x_k\}$ trong $S$.
- Một tập $S \subseteq \mathbb{R}^n$ bị đóng nếu và chỉ nếu mọi chuỗi hội tụ của các điểm trong $S$ có giới hạn của nó trong $S$.

**Định lý 13.2.4** Một tập con $S \subseteq \mathbb{R}^n$ bị chặn nếu và chỉ nếu mỗi dãy của các điểm trong $S$ có một dãy con hội tụ.

#### 1.2.2 Chứng minh

**Chiều thuận**

| | |
|---|---|
| Giả thiết | $S \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập compact, $\{\mathbf{x}_k\}$ là một dãy trong $S$ |
| Kết luận | $\{\mathbf{x}_k\}$ chứa một dãy con hội tụ tới một điểm trong $S$. |

Chứng minh:
Do $S \subseteq \mathbb{R}^n$ và bị chặn (compact) $\Rightarrow$ $\{\mathbf{x}_k\}$ chứa một dãy con hột tụ (Định lý 13.2.4).
Do $S$ đóng nên giới hạn của dãy con phải nằm trong $S$ (Định lý 13.2.3).
Vậy $\{\mathbf{x}_k\}$ chứa một dãy con hội tụ tới một điểm trong $S$.

**Chiều ngược**

| | |
|---|---|
| Giả thiết | Mọi dãy các điểm trong $S$ có một dãy con hội tụ tới một điểm trong $S$. |
| Kết luận | $S$ đóng và bị chặn. |

Chứng minh:
Theo định lý 13.2.4 thì $S$ bị chặn.
Đặt $\mathbf{x}$ là điểm tùy ý trong bao đóng của $S$.
$\Rightarrow$ có một dãy $\{\mathbf{x}_k\}$ trong $S$ với $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$

Theo giả thiết, $\{\mathbf{x}_k\}$ có một dãy con $\{\mathbf{x}_{k_j}\}$ hội tụ đến một giới hạn $\mathbf{x}'$ trong $S$.
Nhưng $\{\mathbf{x}_{k_j}\}$ cũng hội tụ đến $\mathbf{x}$.
$\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}' \in S$
$\Rightarrow S$ đóng.

# 2 Ma trận sản xuất

**Định lý 13.7.2**

## 2.1 Phát biểu

Với một ma trận vuông cấp $n$ với các phần tử không âm $\mathbf{A}$, các mệnh đề sau đây là tương đương:

(a) $\mathbf{A}$ là ma trận sản xuất.

(b) $\mathbf{A}^m \to \mathbf{0}$ khi $m \to \infty$.

(c) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + ....$

(d) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ tồn tại và không âm.

## 2.2 Chứng minh (a) $\Rightarrow$ (b)

Chọn một vector $\mathbf{a} \gg 0$ sao cho $\mathbf{a} \gg \mathbf{Aa}$(Do $A$ là ma trận sản xuất) (Mỗi phần tử của $\mathbf{a}$ lớn hơn hẳn phần tử tương ứng của $\mathbf{Aa}$).
Vì thế, $\exists \lambda$ trong (0,1) sao cho $\lambda \mathbf{a} \gg \mathbf{Aa} \gg 0$.
Khi đó, $\lambda^2 \mathbf{a} = \lambda(\lambda \mathbf{a}) \gg \lambda \mathbf{Aa} = \mathbf{A}\lambda \mathbf{a} \geq \mathbf{AAa} = \mathbf{A^2 a} \gg 0$
Bằng quy nạp, ta có $\lambda^m \mathbf{a} \gg \mathbf{A}^m \mathbf{a}$ với $m = 1, 2, ...$
Khi $m \to \infty$ thì $\lambda^m \mathbf{a} \to 0$ $(\lambda < 1)$
$\Rightarrow \mathbf{A}^m \mathbf{a} \to 0$ khi $m \to \infty$
Có $\mathbf{A}^m \mathbf{a} = \mathbf{A}^m (\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{A}^m \mathbf{e}_i \geq a_j \mathbf{A}^m \mathbf{e}_j$ với $j = 1, 2..n$
$\Rightarrow$ cột thứ $j$ - $\mathbf{A}^m \mathbf{e}_j$ của $\mathbf{A}^m$ tiến đến $\mathbf{0}$ khi $m \to \infty$
$\Rightarrow \mathbf{A}^m \to \mathbf{0}$ khi $m \to \infty$

# 3 Định lý điểm bất động của ánh xạ co

## 3.1 Phát biểu

**Định lý 14.3.1**

Cho $S$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ và $K$ là tập của tất cả các hàm số bị chặn từ $S$ vào $\mathbb{R}^n$. Giả sử toán tử $T : K \to K$ là ánh xạ *co*. Khi đó, tồn tại một hàm số duy nhất $\varphi^* \in K$ sao cho $\varphi^* = T(\varphi^*)$

## 3.2 Chứng minh

**Chứng minh** $T(\varphi^*(x)) = \varphi^*(x)$
Do $T$ là ánh xạ *co* nên ta có: $d(T(\varphi), T(\psi)) \leq \alpha d(\varphi, \psi)$ với $\alpha \in [0, 1)$ và $\varphi, \psi \in K$
Đặt $T(\varphi_n) = \varphi_{n+1}$ với $n = 0, 1, 2, ...$ $(\varphi_i \in K)$
Đặt $\gamma_n = d(\varphi_{n+1}, \varphi_n)$, ta có:
$\gamma_{n+1} = d(\varphi_{n+2}, \varphi_{n+1}) = d(T(\varphi_{n+1}), T(\varphi_n)) \leq \alpha d(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leq \alpha\gamma_n$ với $n \geq 0$
Từ $\gamma_{n+1} \leq \alpha\gamma_n$ dễ dàng ta có $\gamma_n \leq \alpha^n \gamma_0$.
Có $\varphi_m - \varphi_n = (\varphi_m - \varphi_{m-1}) + (\varphi_{m-1} - \varphi_{m-2}) + ... + (\varphi_{n+1} - \varphi_n)$ với $m > n$.
Ta có:

$$\| \varphi_m(x) - \varphi_n(x) \| = \| \sum_{r=n}^{m-1} (\varphi_{r+1}(x) - \varphi_r(x)) \| \leq \sum_{r=n}^{m-1} \| \varphi_{r+1}(x) - \varphi_r(x) \| \text{ (Bất đẳng thức tam giác)}$$

Do $\gamma_n = d(\varphi_{n+1}, \varphi_n)$ và $\gamma_n \leq \alpha^n \gamma_0$ ta được:

$$\| \varphi_m(x) - \varphi_n(x) \| \leq \sum_{r=n}^{m-1} \gamma_r \leq \sum_{r=n}^{m-1} \alpha^r \gamma_0$$

Do:

$$\sum_{r=n}^{m-1} \alpha^r \gamma_0 = \gamma_0 \sum_{r=n}^{m-1} \alpha^r = \gamma_0 \alpha^n \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i = \gamma_0 \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \leq \frac{\gamma_0 \alpha^n}{1 - \alpha}$$

Ta được:

$$\| \varphi_m(x) - \varphi_n(x) \| \leq \frac{\gamma_0 \alpha^n}{1 - \alpha}$$

Do $\alpha \in [0, 1)$ nên $n$ càng lớn thì $\frac{\gamma_0 \alpha^n}{1-\alpha}$ càng nhỏ, suy ra $\{\varphi_n(x)\}$ là một chuỗi Cauchy với giới hạn $\varphi^*(x)$.
Vậy khi $m \to \infty$ thì $\varphi_m \to \varphi^*$, ta được:

$$\| \varphi^*(x) - \varphi_n(x) \| \leq \frac{\gamma_0 \alpha^n}{1 - \alpha}$$

Ta có:

$$\| T(\varphi^*(x)) - \varphi_{n+1}(x) \| = \| T(\varphi^*(x)) - T(\varphi_n(x)) \| \leq \alpha \| \varphi^*(x) - \varphi_n(x) \| \leq \frac{\gamma_0 \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Khi $n \to \infty$ thì $\varphi_n \to \varphi^*$ (Caushy) và $\frac{\gamma_0 \alpha^{n+1}}{1-\alpha} \to 0$ $(\alpha < 1)$ nên $\| T(\varphi^*(x)) - \varphi^*(x) \| = 0$ hay $T(\varphi^*(x)) = \varphi^*(x)$

**Chứng minh tính duy nhất**

Giả sử một hàm khác $\varphi^{**}$ thỏa mãn $T(\varphi^{**}(x)) = \varphi^{**}(x)$
Ta có:

$$d(\varphi^*, \varphi^{**}) = d(T(\varphi^*), T(\varphi^{**})) \leq \alpha d(\varphi^*, \varphi^{**})$$

Do $\alpha \in [0, 1)$ và $d(\varphi^*, \varphi^{**}) \geq 0$ nên $d(\varphi^*, \varphi^{**}) = 0 \Longrightarrow \varphi^* = \varphi^{**}$