

Качественный анализ множества достижимости системы Лотка-Вольтерра. Общий случай

П. В. Простяков^{1,*} И. В. Рублев^{2,**}

¹Москва ул. Кравченко д. 8 кв 404

²МГУ им. Ломоносова факультет Вычислительной
математики и кибернетики кафедра Системного Анализа

Данная статья посвящена задаче управления для нелинейной системы Лотка-Вольтерра являющейся классической моделью динамики популяций типа "хищник-жертва" с управлением интенсивностью отлова жертвы. При помощи принципа максимума Л.С. Понтрягина в настоящей работе изучены полученные в аналитическом виде свойства оптимального управления для задачи быстрого действия и свойства множества достижимости. Также рассматриваются методы и алгоритмы построения оптимального управления и множества достижимости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена задаче управления для нелинейной системы Лотка-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - u - by), \\ \dot{y} = y(-r_2 + cx), \end{cases} \quad u \in U = [0, u_{\max}], \quad 0 < u_{\max} < r_1, \quad (1)$$

являющейся классической моделью динамики популяций типа “хищник-жертва” (здесь x — численность жертвы, а y — хищника) с управлением интенсивностью отлова жертвы [1–3]. Область $\mathbb{R}_+^2 = (0, +\infty)^2$ инвариантна относительно системы (1), и (1) рассматривается при $x > 0$ и $y > 0$. При помощи принципа максимума Л.С. Понтрягина ([4, 5]) в настоящей работе изучены полученные в аналитическом виде свойства оптимального управления для задачи быстрого действия и свойства множества достижимости ([5–9]),

* Electronic address: PProstyakov@gmail.com

** Electronic address: iroublev@cs.msu.su

т.е. множества

$$X[t] = X(t, t_0, \bar{x}^0) = \{\bar{x}^1 \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists u(\cdot) : \bar{x}(t, t_0, \bar{x}^0|u(\cdot)) = \bar{x}^1\}, \quad t \geq t_0.$$

Здесь и ниже $\bar{x}^0 = (x^0, y^0)' \in \mathbb{R}_+^2$ — заданное начальное состояние системы (1), а $\bar{x}[\cdot] = \bar{x}(\cdot, t_0, x^0|u(\cdot))$ — траектория (1), выпущенная из этого начального состояния и отвечающая данному управлению $u(\cdot)$. Также в данной статье предложены алгоритмы построения множества $X[t]$ и решения задачи оптимального синтеза управления для перевода системы (1) в предписанное конечное состояние за наименьшее время.

Эта работа продолжает изучение системы (1), начатое в [10]. В [10] множество достижимости указанной системы управления было построено до момента его пересечения с множеством $E = \{(x, y)' : x = r_2/c, y \in Y_*\}$ (здесь $Y_* = [(r_1 - u_{\max})/b, r_1/b]$) положений равновесия (1) при постоянных управлениях. Здесь же задача достижимости исследована для случаев, которые не были исследованы в [10], а именно, для случая, когда начальная точка \bar{x}^0 лежит на множестве положений равновесия, а также самый общий случай, когда множество достижимости пересекается с множеством E .

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Предложение 1 Пусть $u(t) \equiv u_0$ при $t \in [\tau_0, \tau_1]$, тогда для траектории $\bar{x}[\cdot] = (x[\cdot], y[\cdot])'$ системы (1) выполнено $\varphi(x(t), y(t)|u_0) \equiv \alpha$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1]$, где $\alpha = \varphi(x(\tau_0), y(\tau_0)|u_0)$ и

$$\varphi(x, y|u_0) = cx - r_2 \ln x + by - (r_1 - u_0) \ln y, \quad (2)$$

т.е. $\varphi(x, y|u_0)$ является первым интегралом (1) при постоянном управлении u_0 . Функция $\varphi(x, y|u_0)$ является сильно выпуклой в любом выпуклом ограниченном подмножестве \mathbb{R}_+^2 , а ее глобальный минимум достигается в точке $(x_*, y_*)'$, где

$$x_* = r_2/c, \quad y_* = y_*(u_0) = (r_1 - u_0)/b.$$

Множество уровня этой функции $\Phi_\alpha = \{(x, y) : \varphi(x, y|u_0) \leq \alpha\}$ есть строго выпуклый компакт, а его граница $\partial\Phi_\alpha = \{(x, y) : \varphi(x, y|u_0) = \alpha\}$ — гладкая замкнутая кривая без самопересечений.

Доказательство. Полная производная φ в силу (1) равна

$$\frac{d}{dt}\varphi(x, y|u_0) = (c - r_2/x)x(r_1 - u_0 - by) + (b - (r_1 - u_0)/y)y(-r_2 + cx) = 0.$$

Рассмотрим гессиан функции φ

$$H = \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2/x^2 & 0 \\ 0 & (r_1 - u_0)/y^2 \end{pmatrix},$$

очевидно, $H > 0$ при $x > 0$ и $y > 0$, следовательно, функция φ выпукла в области \mathbb{R}_+^2 . Обозначим $\phi_1(x) = cx - r_2 \ln x$ и $\phi_2(y) = by - (r_1 - u_0) \ln y$, так что $\phi(x, y|u_0) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$. Поскольку $(\phi_1)' = c - r_2/x$ и $(\phi_2)' = b - (r_1 - u_0)/y$, глобальный минимум $\phi_1(x)$ достигается при $x = x_*$, а $\phi_2(y)$ — при $y = y_*$, причем $\phi_1(x)$ и $\phi_2(y)$ строго возрастают по x и по y при $x > x_*$ и $y > y_*$ соответственно, кроме того, $\phi_1(x) \rightarrow +\infty$ и $\phi_2(y) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow +\infty$. Следовательно, из неравенства $\phi(x, y|u_0) \leq \alpha$ вытекает, что $x \leq \mu$ и $y \leq \mu$, где

$$\mu \geq \max(x_*, y_*), \quad \min(\phi_1(\mu) + \phi_2(y_*), \phi_1(x_*) + \phi_2(\mu)) \geq \alpha.$$

Но тогда для $x \leq \mu$ и $y \leq \mu$ будет выполнено $H \geq \delta \cdot I$, где $\delta = \min(r_2, (r_1 - u_0))/\mu^2$. Таким образом, функция $\phi(x, y|u_0)$ является сильно выпуклой в области $(0, \mu)^2$, что завершает доказательство.

Следствие 1 Кривая $\partial\Phi_\alpha = \{(x, y) : \phi(x, y|u_0) = \alpha\}$ пересекает каждую прямую $\{(x, y) : x = \text{const}\}$ не более, чем в двух точках. Кроме того, при $x = x_* = r_2/c$ касательная к $\partial\Phi_\alpha$ параллельна оси Ox . Движение траектории $\bar{x}[\cdot]$ осуществляется при $\alpha > \alpha_* = \phi(x_*, y_*|u_0)$ по кривой $\partial\Phi_\alpha$ против часовой стрелки.

Доказательство. Множеством стационарных точек системы (1) при постоянном управлении u_0 является $\Phi_{\alpha_*} = \{(x_*, y_*)'\}$, следовательно, при $\alpha > \alpha_*$ движение траектории $\bar{x}[\cdot]$ осуществляется либо по часовой стрелке, либо против нее, притом траектория пройдет всю замкнутую кривую Φ_α целиком за конечное время. Рассмотрим $x = x_* = r_2/c$, тогда мы имеем $\dot{y} = 0$ в силу системы (1). Но в точке $(x_*, y) \in \Phi_\alpha$ при $y > y_*$ мы имеем $0 = x(r_1 - u_0 - by_*) > x(r_1 - u_0 - by) = \dot{x}$, следовательно, в этой точке $\dot{x} < 0$, и движение осуществляется против часовой стрелки.

Рассмотрим вектор сопряженных переменных $\bar{\psi} = (\psi_x, \psi_y)'$, соответствующий вектору фазовых переменных $\bar{x} = (x, y)'$, и функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H = \psi_x \cdot x \cdot (r_1 - u - by) + \psi_y \cdot y \cdot (-r_2 + cx),$$

соответствующую принципу максимума Л.С. Понтрягина для условия, что $\bar{x}(t_1) \in \partial X(t_1, t_0, \bar{x}^0)$ (см., например, [5, теорема 3, с. 278–279]). Сопряженные уравнения следующие:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = -(r_1 - u - by)\psi_x - cy\psi_y, \\ \dot{\psi}_y = bx\psi_x + (r_2 - cx)\psi_y. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку $x > 0$, то оптимальное управление зависит от знака ψ_x , а именно, из условия максимума $u^* = u_{\max} \cdot \chi(-\psi_x)$ при $\psi_x \neq 0$, где $\chi(\psi)$ — функция Хэвисайда. Далее везде мы будем считать, что функция $\chi(\psi)$ непрерывна справа (это важно для случаев, когда рассматриваемое управление задается как позиционное, а не программное):

$$\chi(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi \geq 0, \\ 0, & \psi < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Но переключения управления в данном случае осуществляются в изолированные моменты времени, т.к. иначе существовали бы моменты времени t , при которых $\psi_x(t) = \dot{\psi}_x(t) = 0$, следовательно, из (3) в силу $y > 0$ вытекает, что $\psi_y(t) = 0$, что противоречит условию невырожденности сопряженных переменных. Обозначим $M = \max\{H | u \in [0, u_{\max}]\}$, нетрудно видеть, что

$$M = x(r_1 - u_{\max}(1 - \chi(\psi_x)) - by)\psi_x + y(-r_2 + cx)\psi_y,$$

причем в силу принципа максимума Л.С. Понтрягина функция M постоянна вдоль траекторий фазовой и сопряженной переменной при управлении, удовлетворяющем условию максимума. Докажем теорему, являющуюся аналогом теоремы 1 из [5, с. 463] для системы (1).

Теорема 1 *Рассмотрим при $t \in (\tau_0, \tau_1)$, $t_0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq t_1$, траектории фазовой и сопряженной переменной $\bar{x}[\cdot]$ и $\bar{\psi}[\cdot]$, соответствующие управлению $u^*(\cdot)$, для которого вдоль этих траекторий выполнено условие максимума. В таком случае*

1. *Если $\psi_x(\tau_0) = \psi_x(\tau_1) = 0$ и $x(\tau_0) = r_2/c$, то $x(\tau_1) = r_2/c$.*
2. *Если $\psi_x(\tau_0) = \psi_x(\tau_1) = 0$ и $x(\tau_0) \neq r_2/c$, то $x(\tau_1) \neq r_2/c$, однако найдется момент $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ такой, что $x(\tau) = r_2/c$.*
3. *Если $x(\tau_0) = x(\tau_1) = r_2/c$, но $x(t) \neq r_2/c$ при всех $t \in (\tau_0, \tau_1)$, и $\psi_x(\tau_0) = 0$, то $\psi_x(\tau_1) = 0$.*

4. Если $x(\tau_0) = x(\tau_1) = r_2/c$, но $x(t) \neq r_2/c$ при всех $t \in (\tau_0, \tau_1)$, и $\psi_x(\tau_0) \neq 0$, то $\psi_x(\tau_1) \neq 0$, однако найдется момент $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ такой, что $\psi_x(\tau) = 0$.

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Поскольку $M|_{t=\tau_0} = 0$, то $M|_{t=\tau_1} = 0$, следовательно, т.к. $\psi_x(\tau_1) = 0$, а $y\psi_y(\tau_1) \neq 0$, то $x(\tau_1) = r_2/c$.

Теперь рассмотрим пункт 2. Условие $x(\tau_1) \neq r_2/c$ также доказывается из постоянства M вдоль траекторий фазовой и сопряженной переменных. Предположим без ограничения общности, что $\psi_x(t) \neq 0$ при $t \in (\tau_0, \tau_1)$ (это можно сделать, т.к. нули ψ_x изолированы). В таком случае $\psi_y(\tau_0)$ и $\psi_y(\tau_1)$ разных знаков: $\psi_y(\tau_0) \cdot \psi_y(\tau_1) < 0$. Но тогда из $y > 0$ и из того, что $M|_{t=\tau_0} = M|_{t=\tau_1}$, вытекает, что $(-r_2 + cx(\tau_0)) \cdot (-r_2 + cx(\tau_1)) < 0$, следовательно, существует $t \in (\tau_0, \tau_1)$ такое, что $-r_2 + cx(t) = 0$, что и требовалось доказать.

Перейдем к пункту 3. Тогда $M|_{t=\tau_0} = M|_{t=\tau_1} = 0$, следовательно, $(r_1 - u_{\max}(1 - \chi(\psi_x(\tau_1))) - by(\tau_1))\psi_x(\tau_1) = 0$. Предположим противное, что $\psi_x(\tau_1) \neq 0$, тогда $y(\tau_1) \in \partial Y_*$. Таким образом, при отсутствии последнего включения пункт 3 полностью обоснован. В силу уже доказанного пункта 1 $\psi_x(t) \neq 0$ при всех $t \in (\tau_0, \tau_1)$, следовательно, управление $u_*(\cdot)$, соответствующее исходным траекториям фазовой и сопряженной переменных, постоянно при $t \in (\tau_0, \tau_1)$: $u_*(t) \equiv u_0$, где u_0 равно либо 0, либо u_{\max} . В таком случае рассмотрим последовательность $\{y^{0,j}\} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{y(\tau_0)\}$, $y^{0,j} \rightarrow y(\tau_0)$ при $j \rightarrow \infty$. Выпустим траектории фазовой и сопряженной переменных $\bar{x}^j[\cdot]$ и $\bar{\psi}^j[\cdot]$ систем (1) и (3) с постоянным управлением $u_*(t) \equiv u_0$ при начальных условиях $\bar{x}^j(\tau_0) = (r_2/c, y^{0,j})'$ и $\bar{\psi}^j(\tau_0) = (0, \psi_y(\tau_0))'$, соответственно. Пусть τ_1^j — первый момент времени, строго больший τ_0 , когда $x^j(\tau_1^j) = r_2/c$. Поскольку знак $\psi_x^j(t)$ в правой окрестности $t = \tau_0$ однозначно определяется в силу (3) значением $\psi_y(\tau_0)$, то отсюда следует, что $\bar{x}^j[\cdot]$, $\bar{\psi}^j[\cdot]$ вместе с управлением $u_*(\cdot)$ будут удовлетворять всем условиям принципа максимума Л.С. Понтрягина. Однако в силу непрерывности решения ОДУ по начальным данным $\tau_1^j \rightarrow \tau_1$, $y^j(\tau_1^j) \rightarrow y(\tau_1)$ и $\psi_x^j(\tau_1^j) \rightarrow \psi_x(\tau_1)$, но, однако, по построению $y^j(\tau_1^j) \notin \partial Y_*$ при достаточно больших значениях j , а значит, $\psi_x^j(\tau_1^j) = 0$, что противоречит исходной посылке $\psi_x(\tau_1) \neq 0$.

Осталось обосновать пункт 4. Если мы предположим противное, что $\psi_x(\tau_1) = 0$, тогда, повторив рассуждения, проведенные при доказательстве предыдущего пункта, в обратном времени, мы придем к выводу, что $\psi_x(\tau_0) = 0$, что противоречит исходному предположению. Осталось показать, что $\psi_x(\tau) = 0$ при некотором $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$. Если это

не так, то тогда $\psi_x(t)$ сохраняет знак при $t \in [\tau_0, \tau_1]$, переключений на этом отрезке нет, и управление постоянно: $u_*(t) \equiv u_0$ при всех $t \in (\tau_0, \tau_1)$ для $u_0 = 0$ либо $u_0 = u_{\max}$. Но в таком случае если одно из выражений $r_1 - u_0 - by(\tau_0)$ и $r_1 - u_0 - by(\tau_1)$ равно нулю, то второе нулю быть равно не может, т.к. $y(\tau_0) \neq y(\tau_1)$, но это противоречит тому, что M в этом случае тождественно равно нулю при $t \in [\tau_0, \tau_1]$. В случае, если оба выражения $r_1 - u_0 - by(\tau_0)$ и $r_1 - u_0 - by(\tau_1)$ отличны от нуля, они обязаны быть разных знаков, а это также противоречит $M|_{t=\tau_0} = M|_{t=\tau_1}$, ибо последнее в силу условий данного пункта эквивалентно $x(\tau_0)(r_1 - u_0 - by(\tau_0))\psi_x(\tau_0) = x(\tau_1)(r_1 - u_0 - by(\tau_1))\psi_x(\tau_1)$.

Замечание 1 Исходя из доказательства теоремы 1 видно, что траектория $x[\cdot]$ не пересекает прямую $x = x_* = r_2/c$ в изолированные моменты времени, за исключением того случая, когда y при пересечении указанной прямой совпадает с одним из концов отрезка Y_* . В этой исключительной ситуации возможно, что траектория $\bar{x}[\cdot]$ всей системы (1) будет оставаться в соответствующей крайней точке множества положений равновесия E в течение интервала времени положительной длины, а именно, до тех пор, пока в очередной раз не обнулится ψ_x и не произойдет переключение управления.

Таким образом, из теоремы 1 вытекает, что, по крайней мере пока траектория $\bar{x}[\cdot]$ не попала на множество положений равновесия E (а точнее, согласно замечанию 1, в его подмножество $\{r_2/c\} \times Y_*$), моменты пересечения этой траекторией прямой $x = x_* = r_2/c$ и моменты переключения управления $u_*(\cdot)$ либо совпадают, либо перемежаются.

Рассмотрим теперь управления и траектории, которые соответствуют случаю, когда эти моменты совпадают, а именно, пусть

$$u_{ext}(\bar{x}) = u_{\max} \cdot \chi(r_2/c - x), \quad u_{int}(\bar{x}) = u_{\max} \cdot (1 - \chi(r_2/c - x)),$$

а $\bar{x}_{ext}[\cdot]$ и $\bar{x}_{int}[\cdot]$ — соответствующие этим управлениям траектории (1), выпущенные в момент времени $t = t_0$ из точки $\bar{x}^0 = (x^0, y^0)'$. Будем называть $\bar{x}_{ext}[\cdot]$ — внешней, а $\bar{x}_{int}[\cdot]$ — внутренней граничной траекторией.

Теорема 2 Рассмотрим траекторию $\bar{x}[\cdot]$, совпадающую с $\bar{x}_{ext}[\cdot]$ или $\bar{x}_{int}[\cdot]$, и соответствующее управление $u(\cdot)$. Пусть моменты времени $t_0 < \tau_1 < \tau_2$ таковы, что $\bar{x}(\tau_1) \notin E$, $\bar{x}(\tau_2) \notin E$, однако $x(\tau_1) = x(\tau_2) = x_* = r_2/c$, причем $x(t) \neq x_*$ для всех $t \in (\tau_1, \tau_2)$. В таком случае для $u_0 = u(\tau_1 - 0) = u(\tau_2 + 0)$ и $\Delta\phi_* = u_{\max} \ln(r_1/(r_1 - u_{\max})) > u_{\max}$

- Если $\bar{x}[\cdot] = \bar{x}_{ext}[\cdot]$, то $\phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0) - \phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0) \geq \Delta\phi_*$.
- Если $\bar{x}[\cdot] = \bar{x}_{int}[\cdot]$, то $\phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0) - \phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0) \leq -\Delta\phi_*$.

Доказательство. Рассмотрим $\bar{x}[\cdot] = \bar{x}_{ext}[\cdot]$ (случай $\bar{x}[\cdot] = \bar{x}_{int}[\cdot]$ рассматривается полностью аналогично). Пусть $y(\tau_1) > r_1/b$, тогда, исходя из предложения 1 и следствия 1, $\dot{x}(\tau_1) < 0$ и $u(\tau_1 - 0) = u_0 = 0$, $u(\tau_1 + 0) = u_{\max}$. В таком случае из (2)

$$\begin{aligned}\phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_{\max}) &= \phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0) + u_{\max} \ln y(\tau_1), \\ \phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0) &= \phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_{\max}) - u_{\max} \ln y(\tau_2).\end{aligned}$$

Поскольку $\phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_{\max}) = \phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_{\max})$, то

$$\phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0) - \phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0) = u_{\max} \ln(y(\tau_1)/y(\tau_2)).$$

Но $y(\tau_2) < (r_1 - u_{\max})/b$, откуда $y(\tau_1)/y(\tau_2) > r_1/(r_1 - u_{\max})$.

Теперь пусть $y(\tau_1) < (r_1 - u_{\max})/b$, тогда, аналогично предыдущим рассуждениям, $\dot{x}(\tau_1) > 0$, $u(\tau_1 - 0) = u_0 = u_{\max}$ и $u(\tau_1 + 0) = 0$. Из (2)

$$\begin{aligned}\phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|0) &= \phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0) - u_{\max} \ln y(\tau_1), \\ \phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|0) &= \phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0) + u_{\max} \ln y(\tau_2).\end{aligned}$$

Поскольку $\phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|0) = \phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|0)$, то

$$\phi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0) - \phi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0) = u_{\max} \ln(y(\tau_2)/y(\tau_1)).$$

Но $y(\tau_2) > r_1/b$, откуда $y(\tau_2)/y(\tau_1) > r_1/(r_1 - u_{\max})$.

Обозначим через $t_{ext}^1, t_{ext}^2, \dots$ и $t_{int}^1, t_{int}^2, \dots$ упорядоченные последовательности моментов времени (здесь $t_0 \leq t_{ext}^1 < t_{ext}^2 < \dots$ и $t_0 \leq t_{int}^1 < t_{int}^2 < \dots$), таких что $x_{ext}(t_{ext}^j) = x_*$ и $x_{int}(t_{int}^j) = x_*$ для $j = 1, 2, \dots$, соответственно. Пусть

$$\begin{aligned}N_{ext} &= \sup\{n \in \mathbb{N} : \bar{x}_{ext}(t_{ext}^j) \notin E, j = 1, \dots, n-1\}, \\ N_{int} &= \sup\{n \in \mathbb{N} : \bar{x}_{int}(t_{int}^j) \notin E, j = 1, \dots, n-1\},\end{aligned}$$

таким образом, если одно из чисел N_{ext} или N_{int} конечно, то соответствующая траектория в соответствующий момент времени с индексом j , равным этому числу, впервые попадает на множество положений равновесия E . В этом случае мы будем рассматривать данную траекторию лишь вплоть до этого момента. Обозначим, кроме того, $t_{ext}^0 = t_{int}^0 = t_0$.

Пусть $\bar{x}^0 \notin E$. Рассмотрим траекторию $\bar{x}_{ext}[\cdot]$. Возьмем произвольное число j , $1 \leq j \leq N_{ext}$ ($N_{ext} \geq 1$ по определению). Если $x_{ext}(t) > x_*$ при $t \in (t_{ext}^{j-1}, t_{ext}^j)$, тогда, т.к. $u_{ext}(\bar{x}_{ext}(t)) \equiv 0$, $y_{ext}(t_{ext}^j) > y_*(0) = r_1/b$ в силу предложения 1 и следствия 1. Если же $x_{ext}(t) < x_*$ при $t \in (t_{ext}^{j-1}, t_{ext}^j)$, тогда, т.к. $u_{ext}(\bar{x}_{ext}(t)) \equiv u_{\max}$, $y_{ext}(t_{ext}^j) < y_*(u_{\max}) = (r_1 - u_{\max})/b$. В таком случае из теоремы 2 вытекает, что $N_{ext} = +\infty$, причем для любого числа $\mu > 0$ найдется такой достаточно большой момент времени $t \geq t_0$, что $\|\bar{x}_{ext}(t)\| \geq \mu$. Это происходит в силу неограниченного монотонного возрастания последовательностей $\{\phi_{ext}(t_{ext}^{2k-1} - 0)\}$ и $\{\phi_{ext}(t_{ext}^{2k} - 0)\}$ для кусочно-постоянной функции

$$\phi_{ext}(t) = \phi(x_{ext}(t), y_{ext}(t) | u_{ext}(\bar{x}_{ext}(t)))$$

при $k \rightarrow +\infty$. Что касается траектории $\bar{x}_{int}[\cdot]$, то для кусочно-постоянной функции

$$\phi_{int}(t) = \phi(x_{int}(t), y_{int}(t) | u_{int}(\bar{x}_{int}(t)))$$

последовательности $\{\phi_{int}(t_{int}^{2k-1} - 0)\}$ и $\{\phi_{int}(t_{int}^{2k} - 0)\}$ монотонно убывают по k при $2k - 1 < N_{int}$ и $2k < N_{int}$, соответственно, причем $N_{int} < +\infty$. Последнее следует из того, что если $N_{int} = +\infty$, то, согласно теореме 2, $\phi_{int}(t_{int}^{2k-1}) \rightarrow -\infty$ и $\phi_{int}(t_{int}^{2k}) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, что противоречит тому, что

$$\phi(x, y | u_0) \geq \phi_* = \min\{\phi(x_*, y_*(u_0) | u_0) | u_0 \in [0, u_{\max}]\} > -\infty$$

для всех $(x, y)' \in \mathbb{R}_+^2$ и $u_0 \in [0, u_{\max}]$. Более того, справедлива оценка

$$N_{int} \leq 2 \left\lceil \frac{\phi(x^0, y^0 | u_{int}(\bar{x}^0)) - \phi_*}{\Delta\phi_*} \right\rceil.$$

Далее ниже будем обозначать $t_e = t_{int}^j$ при $j = N_{int}$, т.е. момент первого попадания внутренней граничной траектории $\bar{x}_{int}[\cdot]$ на множество положений равновесия E .

На Рис. 1 слева сплошной линией изображена внешняя граничная траектории, внутренняя траектория изображена точечной линией при $t \leq t_e$, а ее продолжение при $t > t_e$ показано пунктирной линией (об этом см. ниже в разделе о построении множества достижимости в общем случае).

Смысл внешней и внутренней граничных траекторий указан в работе [10], в которой множества достижимости $X[t]$ было построено для всех $t \in [t_0, t_e)$. Далее, прежде чем перейти к общему случаю, построив $X[t]$ и для $t \geq t_e$, мы изучим задачу достижимости для случая, когда начальное состояние \bar{x}^0 принадлежит множеству положений равновесия E .

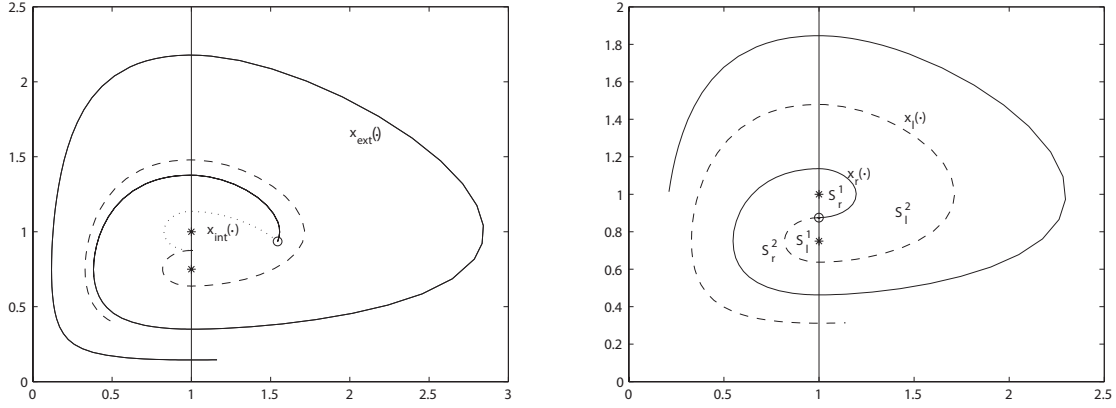


Рис. 1. Траектории \bar{x}_{ext} и \bar{x}_{int} (слева), Траектории \bar{x}_l , \bar{x}_r и семейства множеств \mathfrak{S}_l , \mathfrak{S}_r (справа).

3. МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ИЗ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

В данном разделе предполагается, что начальное состояние системы управления $\bar{x}^0 \in \text{ri } E = \{r_2/c\} \times \text{int } Y_*$. В этом случае мы также рассмотрим сначала управления и траектории, для которых моменты пересечения этими траекториями прямой $x = x_* = r_2/c$ и моменты переключения соответствующих управлений совпадают. А именно, пусть $\bar{x}_r[\cdot]$ и $\bar{x}_l[\cdot]$ — траектории (1), выпущенные в момент времени $t = t_0$ из указанной выше точки и удовлетворяющие принципу максимума Л.С. Понтрягина, рассмотренному в предыдущем разделе, при начальных значениях сопряженной переменной, равных $\bar{\psi}(t_0) = (0, -1)'$ и $\bar{\psi}(t_0) = (0, 1)'$, соответственно. Учитывая (4), можно считать, что $\bar{x}_r[\cdot]$ и $\bar{x}_l[\cdot]$ порождены следующими позиционными управлениями:

$$u_r(\bar{x}) = u_{\max} \cdot (1 - \chi(x - r_2/c)), \quad u_l(\bar{x}) = u_{\max} \cdot \chi(r_2/c - x).$$

Обозначим через $t_r^0, t_r^1, t_r^2, \dots$ и $t_l^0, t_l^1, t_l^2, \dots$ упорядоченные последовательности моментов времени (здесь $t_0 = t_r^0 < t_r^1 < t_r^2 < \dots$ и $t_0 = t_l^0 < t_l^1 < t_l^2 < \dots$), таких что $x_r(t_r^j) = x_*$ и $x_l(t_l^j) = x_*$ для $j = 0, 1, 2, \dots$, соответственно. Покажем, что в самом деле наше обозначение корректно, т.е. моменты пересечения траекториями $\bar{x}_r[\cdot]$ и $\bar{x}_l[\cdot]$ прямой $x = x_* = r_2/c$ являются изолированными. Рассмотрим это для траектории $\bar{x}_r[\cdot]$ (для траектории $\bar{x}_l[\cdot]$ все рассуждения проводятся аналогично). Согласно замечанию 1, момент $t_r^1 > t_0$ определен в данном случае корректно. При этом $u_r[t] = u_r(\bar{x}_r(t)) = 0$ для всех $t \in (t_r^0, t_r^1)$, значит, из предложения 1 и следствия 1 $y_r(t_r^1) > y_*(0) = r_1/b$. Но

тогда при $t \geq t_r^1$ траектория $\bar{x}_r[\cdot]$ совпадает с траекторией $\bar{x}_{ext}(\cdot, t_r^1, \bar{x}_r(t_r^1))$, которая была рассмотрена в предыдущем разделе. Следовательно, и моменты t_r^j при $j > 1$ определены корректно, более того, все свойства $\bar{x}_{ext}[\cdot]$ переносятся на траекторию $\bar{x}_r[\cdot]$. Также нетрудно доказать, что $y_l(t_l^{2k-2}) < y_r(t_r^{2k-1}) < y_l(t_l^{2k})$ и $y_r(t_r^{2k-2}) > y_l(t_l^{2k-1}) > y_r(t_r^{2k})$ для всех $k = 1, 2, \dots$. На Рис. 1 справа изображены траектории $\bar{x}_r[\cdot]$ и $\bar{x}_l[\cdot]$.

Обозначим через \mathfrak{S}_l и \mathfrak{S}_r семейства компактных множеств S_r^1, S_r^2, \dots и S_l^1, S_l^2, \dots на \mathbb{R}_+^2 , так что последние ограничены интегральными кривыми, соответствующими траекториям $\bar{x}_r[\cdot]$ и $\bar{x}_l[\cdot]$, а также прямой $x = x_*$ в соответствии с правой частью рисунка 1. Основным свойством построенных множеств является то, что интегральные кривые, соответствующие траекториям, удовлетворяющим принципу максимума, лежат внутри каждого отдельного множества из этих семейств и имеют только одно переключение на каждом множестве, для множеств, лежащих слева от $x = x_*$, — с u_{\max} на 0, а для множеств, лежащих справа от $x = x_*$, — с 0 на u_{\max} .

Теорема 3 *Множество точек \mathbb{R}_+^2 , в которые можно попасть из заданной точки $\bar{x}^0 \in \text{ri } E$ вдоль траекторий, удовлетворяющих принципу максимума, не более чем за n переключений управления, $n \geq 1$, ограничено множеством:*

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} S_l^i \cup S_r^i. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим задачу построения синтеза управления из фиксированной точки $\bar{x}^0 \in \text{ri } E$ в произвольную точку $\bar{x}^1 \in \mathbb{R}_+^2$. Цель состоит в построении позиционного управления $u_E^*(\bar{x})$, переводящего систему (1) из произвольного состояния \bar{x}^1 в состояние \bar{x}^0 в *попятном времени*. Для этого мы построим *кривую переключений* полностью аналогично тому, как это делается в [5, с. 469–471] (учитывая лишь разницу направления времени). Полученная кривая W изображена жирной линией на Рис. 2 и состоит из дуг W_r^1, W_r^2, \dots (сплошная линия) и W_l^1, W_l^2, \dots (пунктирная линия), аналогичным дугам, обозначенным в [5] как W_+^j и W_-^j при $j = 1, 2, \dots$. Дуги W_r^1 и W_l^1 совпадают с частями интегральных кривых, отвечающих траекториям $\bar{x}_r[\cdot]$ и $\bar{x}_l[\cdot]$ при $t \in [t_r^0, t_r^1]$ и $t \in [t_l^0, t_l^1]$, соответственно. Далее, для $j = 2, \dots$ дуги W_r^j и W_l^j получены как *отражения* дуг W_l^{j-1} и W_r^{j-1} . Покажем, как именно дуга W_l^{j-1} отражается в дугу W_r^j . Для этого мы выбираем произвольную точку $\bar{x}^* \in W_l^{j-1}$, а также берем $\bar{\psi}^* = (0, -1)'$ и выпускаем

траектории фазовых и сопряженных переменных \bar{x} и $\bar{\psi}$ в силу (1) и (3) при $\bar{x}[0] = \bar{x}^*$, $\bar{\psi}[0] = \bar{\psi}^*$ и управлении $u(\cdot) \equiv u_0 = 0$. Далее ищем наименьший момент $\tau > 0$ такой, что $\psi_x[\tau] = 0$. В таком случае мы говорим, что точка $\bar{x}^* \in W_l^{j-1}$ *отражается* в точку $\bar{x}[\tau] = \bar{x}(\tau, 0, \bar{x}^*|u_0) \in W_r^j$. Перебирая всевозможные точки $\bar{x}^* \in W_l^{j-1}$, мы получаем всю дугу W_r^j целиком. Отражение W_r^{j-1} в W_l^j происходит по аналогичной схеме с той лишь разницей, что мы берем здесь $\bar{\psi}^* = (0, 1)'$ и $u_0 = u_{\max}$. По построению концы дуг W_r^1, W_r^2, \dots и W_l^1, W_l^2, \dots совпадают с точками $\bar{x}_r(t_r^j)$ и $\bar{x}_l(t_l^j)$ при $j = 0, 1, 2, \dots$. Обоснование построения W совпадает с доказательством теоремы 5 из [5, с. 470]. Проведя рассуждения, полностью аналогичные тем, что приведены в доказательстве теоремы 6 из [5, с. 471-472], можно доказать, что линия переключения $W = W_l \cup W_r$ (здесь $W_r = \bigcup_j W_r^j$ и $W_l = \bigcup_j W_l^j$) является кусочно-гладкой кривой, причем

$$\begin{aligned} W_r &\subseteq \{(x, y)' \in \mathbb{R}_+^2 : x \geq x^0, y \geq y^0\}, \\ W_l &\subseteq \{(x, y)' \in \mathbb{R}_+^2 : x \leq x^0, y \leq y^0\}. \end{aligned}$$

Кроме того, W разделяет множество \mathbb{R}_+^2 на две части — \bar{X}_l и \bar{X}_r , так что $\mathbb{R}_+^2 = \bar{X}_l \cup \bar{X}_r \cup \{\bar{x}^0\}$, $W_l \setminus \{\bar{x}^0\} \subset \bar{X}_l$, $W_r \setminus \{\bar{x}^0\} \subset \bar{X}_r$, $\bar{X}_l \cap \bar{X}_r = \emptyset$ и

$$\begin{aligned} \{(x, y)' \in \mathbb{R}_+^2 : x < x^0, y > y^0\} &\subset \bar{X}_l, \\ \{(x, y)' \in \mathbb{R}_+^2 : x > x^0, y < y^0\} &\subset \bar{X}_r. \end{aligned}$$

В таком случае справедлив аналог теоремы 7 из [5, с. 476]:

Теорема 4 Пусть зафиксирована точка $\bar{x}^0 = (x^0, y^0)' \in \text{ri } E$. Для каждой точки $\bar{x}^1 \in \mathbb{R}_+^2$ существует в точности одно оптимальное управление $u^*(\cdot)$ из класса управлений, удовлетворяющих принципу максимума, переводящее систему (1) из состояния \bar{x}^1 в попятном времени в состояние \bar{x}^0 . При этом оптимальный синтез в попятном времени определяется позиционным управлением

$$u_E^*(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & (x, y)' \in \bar{X}_r, \\ u_{\max}, & (x, y)' \in \bar{X}_l, \\ r_1 - by^0, & x = x^0, y = y^0. \end{cases} \quad (6)$$

На Рис. 2 вместе с кривой переключения изображены изохроны — линии уровня функции $T(x, y|x^0, y^0)$, равной времени оптимального быстрогодействия из точки $\bar{x}^0 = (x^0, y^0)' \in \text{ri } E$ в точку $\bar{x} = (x, y)'$. Каждая из изохрон совпадает с границей областей достижимости $\partial X(t, t_0, \bar{x}^0)$ в соответствующий момент времени.

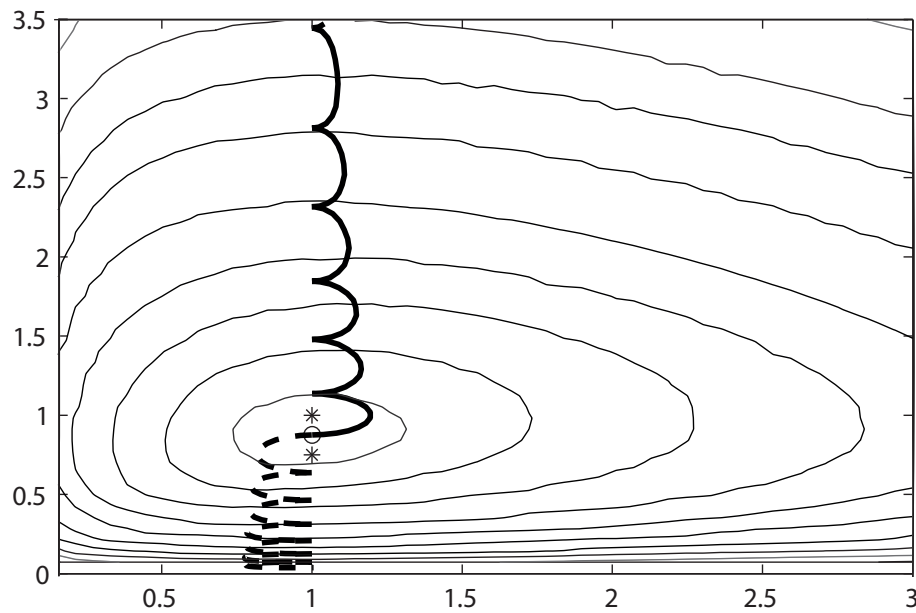


Рис. 2. Линии уровня функции $T(x, y | x^0, y^0)$, совпадающие с $\partial X(t, t_0, \bar{x}^0)$ при различных $t \geq t_0$

Предложение 2 Пусть $\bar{x}^0 = (x^0, y^0)' \in \text{ri } E$, тогда для любых $t, t', t_0 \leq t \leq t'$, $X(t, t_0, \bar{x}^0) \subseteq X(t', t_0, \bar{x}^0)$.

Замечание 2 Нетрудно отыскать оптимальный синтез управления, переводящий систему (1) из любого начального состояния в фиксированную точку множества $\text{ri } E$ в прямом времени. Для этого, например, во всех предшествующих построениях можно изменить направление времени на обратное к указанному. В таком случае каждая из изохрон, построенных аналогично предыдущему, будет совпадать уже с границей множества разрешимости в соответствующий момент времени.

4. ЗАДАЧА ДОСТИЖИМОСТИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В данном разделе предполагается, что начальное состояние системы управления \bar{x}^0 таково, что $\bar{x}^e = \bar{x}_{int}(t_e) \in \text{ri } E = \{r_2/c\} \times \text{int } Y_*$. Таким образом, мы исключаем лишь

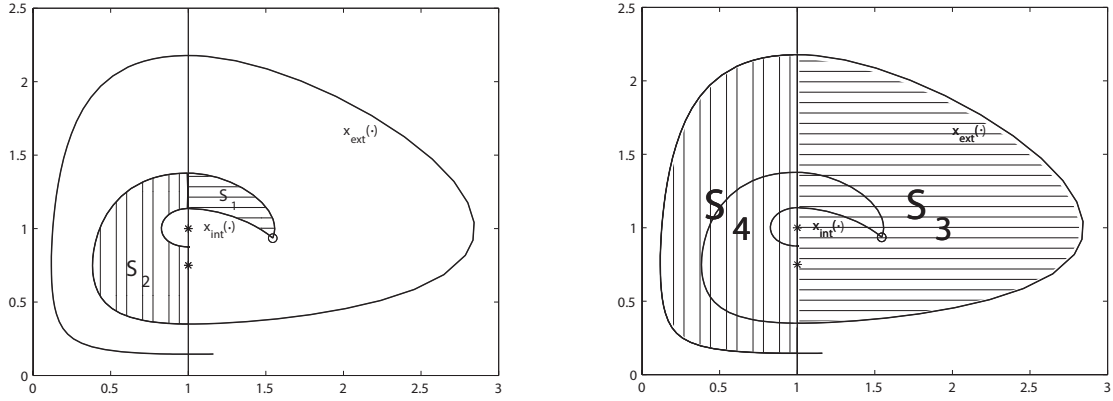


Рис. 3. Семейство множеств $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$.

случаи, когда внутренняя граничная траектория попадает в множество положений равновесия в его крайних точках, и рассматриваем ситуацию в общем положении. Исключенные нами из рассмотрения случаи можно получить предельным переходом.

Продолжим траекторию $\bar{x}_{int}[\cdot]$ при $t > t_e$, исходя из принципа максимума. Однако, в отличие от $t < t_e$, непосредственно после переключения управления при $t = t_e$ внутренняя граничная траектория $\bar{x}_{int}[\cdot]$ уже не пересечет трансверсально прямую $x = x_* = r_2/c$, а отразится от нее. Для того, чтобы продемонстрировать это, необходимо рассмотреть два случая, а именно, когда $\dot{x}_{int}(t_e - 0) < 0$ и $\dot{x}_{int}(t_e - 0) > 0$. Тогда для $\bar{x}_{int}[\cdot]$ в некоторой левой полукрестности t_e управление равно 0 (во втором случае u_{\max}), а после момента t_e оно переключится на u_{\max} (соответственно, 0). Следовательно, при $t \geq t_e$ мы получим, что $\bar{x}_{int}(t, t_0, \bar{x}^0) \equiv \bar{x}_l(t, t_e, \bar{x}^e)$ (соответственно, $\bar{x}_{int}(t, t_0, \bar{x}^0) \equiv \bar{x}_r(t, t_e, \bar{x}^e)$). Таким образом, свойства $\bar{x}_{int}[\cdot]$ после момента t_e совпадают со свойствами $\bar{x}_l[\cdot]$ и $\bar{x}_r[\cdot]$, рассмотренными в предыдущем разделе. Заметим, что при $t > t_e$ можно считать, что внутренняя граничная траектория порождена позиционным управлением $u_l(\bar{x})$ при $\dot{x}_{int}(t_e - 0) > 0$ и $u_r(\bar{x})$ при $\dot{x}_{int}(t_e - 0) < 0$, соответственно.

На Рис. 1 изображены внешняя граничная траектория $\bar{x}_{ext}[\cdot]$ (сплошная линия), а также внутренняя граничная траектория $\bar{x}_{int}[\cdot]$ при $t \leq t_e$ (точечная линия) и при $t > t_e$ (пунктирная линия). На Рис. 3 изображены определенные при помощи данных траекторий компактные множества S_1, S_2, \dots , образующие семейство \mathfrak{S} . Отметим, что $\bar{x}_{int}[\cdot]$ образует границу некоторых из данных множеств лишь при $t \leq t_e$. Нетрудно

видеть, что справедливы включения:

$$S_{2i-1} \subset S_{2j-1} \quad S_{2i} \subset S_{2j}, \quad S_{2i-1} \cap S_{2i} \subset \{(x, y)' : x = x_*\}, \quad j > i \geq 1.$$

Теорема 5 Пусть $\bar{x}[t] = \bar{x}(t, t_0, \bar{x}^0)$, $t \in [t_0, T]$, — траектория системы (1), удовлетворяющая условию $\bar{x}[T] \in \partial X[T]$, где $X[T] = X(T, t_0, \bar{x}^0)$ — множество достижимости в момент времени $t = T$, а $u(t)$ — соответствующее этой траектории управление. В таком случае либо $\bar{x}[\cdot] \equiv \bar{x}_{int}[\cdot]$, либо $\bar{x}[\cdot] \equiv \bar{x}_{ext}[\cdot]$, либо $x[t] \in S_1$ при $t \in [t_0, T]$, причем $u(t)$ имеет на отрезке $[t_0, T]$ ровно одно переключение, либо будет справедливо следующее. Существует такое минимальное число $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, что $\bar{x}[t] \in S_{n-1} \cup S_n$ для всех $t \in [t_0, T]$. При этом найдутся такие моменты $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = T$, что $x[\tau_j] = x_* = r_2/c$, $j = 1, \dots, n-1$, но $x[t] \neq x_*$ при $t \notin \{\tau_j, j = 0, \dots, n\}$. Кроме того, $\bar{x}[t] \in S_j$ при всех $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j = 1, 2$, $\bar{x}[t] \in \text{int } S_j$ при всех $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$ и $j = 3, \dots, n$. При $t \in (\tau_0, \tau_1)$ и $t \in (\tau_{n-1}, \tau_n)$ управление $u(t)$ имеет не более одного переключения, а при $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j = 2, \dots, n-1$, — ровно одно переключение.

Доказательство. Теорема вытекает непосредственно из принципа максимума Л.С. Понтрягина, теоремы 1 и сделанных выше построений.

Следствие 2 Для любого $T \geq t_0$ найдется такое минимальное число $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, что множество достижимости

$$X[T] = X(T, t_0, \bar{x}^0) \subseteq S_{n-1} \cup S_n.$$

Таким образом, объединение подходящих множеств семейства \mathfrak{S} является внешней оценкой множества достижимости. Укажем и одну из внутренних оценок (см. предложение 2 и Рис. 2 по поводу свойств последней).

Предложение 3 Для любого $T \geq t_e$ справедливо включение

$$X[T] = X(T, t_0, \bar{x}^0) \supseteq X(T, t_e, \bar{x}^e).$$

Граница $\partial X[T]$ множества достижимости $X[T]$ может быть построена, исходя из принципа максимума, полностью аналогично тому, как это делалось в случае, когда начальное положение \bar{x}^0 находилось в множестве положений равновесия (см. также [10] для

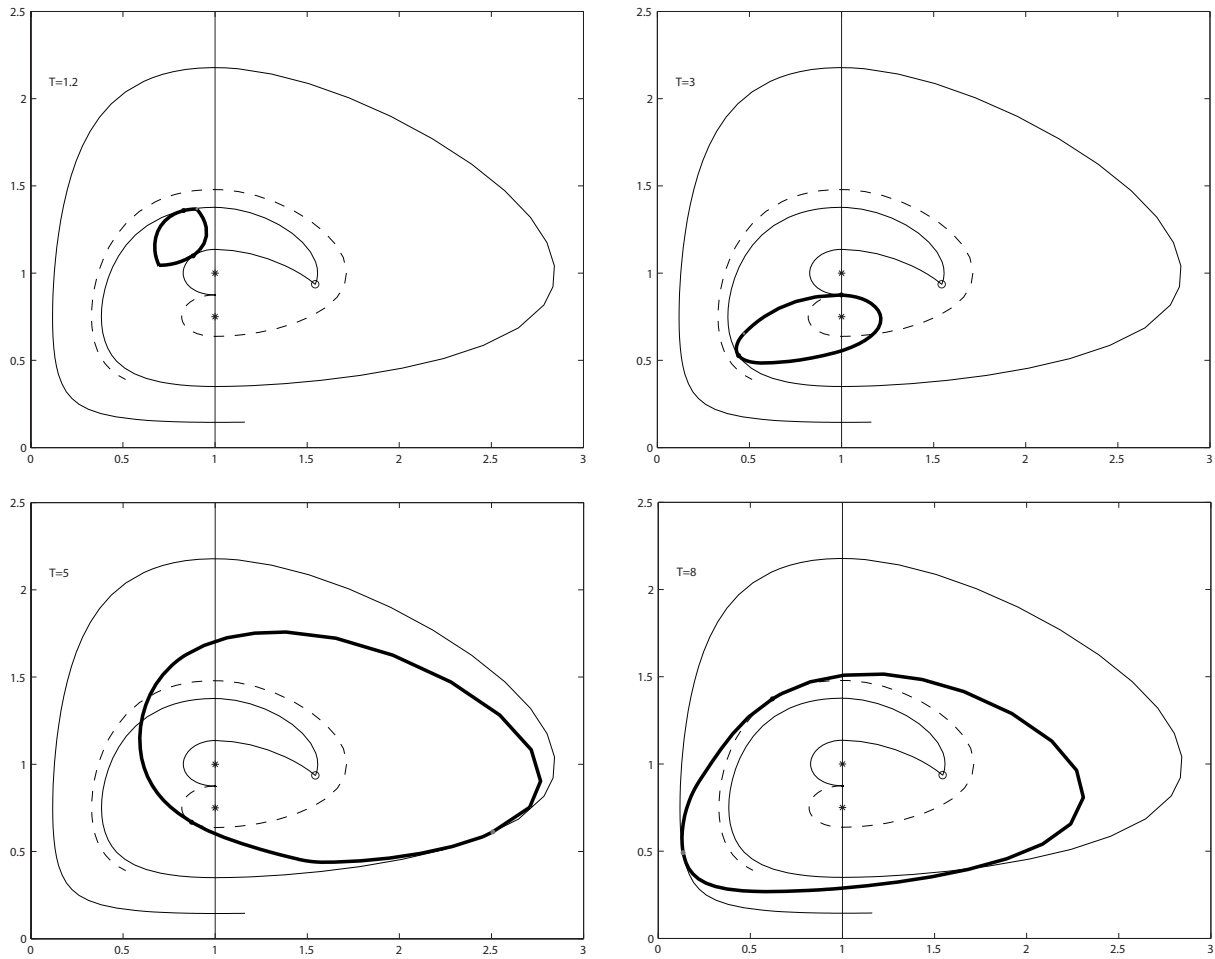


Рис. 4. Множество достижимости $X[T]$ при различных значениях T .

алгоритма построения $\partial X[T]$ при $T < t_e$). На Рис. 4 приведено множество достижимости $X[T]$ за разные моменты времени. Нетрудно видеть, что $\partial X[T]$ представляет из себя замкнутую кривую, которая содержит точки $\bar{x}_{int}[T]$ и $\bar{x}_{ext}[T]$.

-
1. Смит Дж.М. Модели в экологии. М.: Наука, 1981.
 2. Заславский Б.Г., Полуэтов Р.М. Управление экологическими системами. М.: Наука, 1988.
 3. Flaaten O. The Economic of Multispecies Harvesting. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
 4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
 5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
 6. Красовский Н.Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических си-

- стем // ПММ. 1964. Т. 28, N1. С. 3–14.
7. Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 65, N 2. С. 179–187.
 8. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН, Теор. и сист. упр. 2003. N 3. С. 8–16.
 9. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamic Optimization for Reachability Problems // JOTA. 2001. Vol. 108, N 2. P. 227–251.
 10. Простяков П.В. Построение множества достижимости системы Лотка-Вольтерра // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42, N 3. С. 366–373.

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE REACHABILITY SET OF THE LOTKA-VOLTERRA SYSTEM. GENERAL CASE.

P. Prostyakov, I. Rublev

The present paper deals with the analysis of a control problem for the Lotka-Volterra bilinear system, which is a classical model of prey-predator population dynamics controlled via harvesting intensity. By using the Pontryagin maximum principle, we analyze some properties, which can be obtained analytically, of the, and the reachability set in different cases. Also we consider methods and algorithms for constructing the optimal control and the reachability set.