



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Выпускная квалификационная работа по теме

# «Управление в моделях межвидового взаимодействия»

*Студентка 415 группы*  
Т. Е. Морозова *Научный руководитель*  
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2018

## Содержание

1	Введение	3
2	Общие свойства системы	3

# 1 Введение

Рассматривается модель пищевой цепи с управлением без внутривидовой конкуренции, состоящая из четырех звеньев и описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u - b_1x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 - b_3x_4 + c_3x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4x_3). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  — численности популяций видов,  $r_1 + u$  — рождаемость первого вида,  $r_i$ ,  $i = \overline{2,4}$  — смертности остальных видов,  $b_i$ ,  $i = \overline{1,3}$  и  $c_i$ ,  $i = \overline{2,4}$  отвечают за взаимодействие между популяциями. Все параметры строго положительны, а управление берется из интервала  $U^* = [u_{min}, u_{max}]$ .

В данной работе основной целью является исследование свойств и синтеза управления для задачи быстрогодействия во множество положений равновесия.

## 2 Общие свойства системы

Из биологической интерпретации вытекает, что численность популяции не может быть отрицательной. В следующем утверждении будет показано, что система удовлетворяет этому свойству.

**Утверждение 1.** *Множество  $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i > 0, i = \overline{1,4}\}$  инвариантно относительно системы (1).*

**Доказательство.**

Из системы (1) видно, что при обнулении координат, обнуляются соответственно и выражения для  $\dot{x}_i$ , так что координаты не могут поменять знак. Интегрируя в обратном времени, получим, что координаты не могут обнулиться.

□

Рассмотрим положения равновесия (1) как функцию управления:

$$P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)), \text{ где} \\ P_1(u) = \frac{r_2c_4 + b_2r_4}{c_2c_4}, \quad P_2(u) = \frac{r_1 + u}{b_1}, \quad P_3(u) = \frac{r_4}{c_4}, \quad P_4(u) = \frac{c_3(r_1 + u) - r_3b_1}{b_1b_3}. \quad (2)$$

Заметим, что от управления существенно зависят только вторая и четвертая координата, поэтому в дальнейшем будем обозначать  $P(u) = (P_1, P_2(u), P_3, P_4(u))$ .

Множество положений равновесия  $E = \{P(u) \mid u \in U^*\}$  представляет из себя отрезок прямой

$$x_4 = \frac{c_3x_2 - r_3}{b_3}$$

в пространстве  $\mathbb{R}^4$ , такой, что

$$x_2 \in \left[ \frac{r_1 + u_{min}}{b_1}, \frac{r_1 + u_{max}}{b_1} \right], \quad x_4 > 0$$

и, вообще говоря, может быть пустым. Но в нашей работе мы предполагаем его непустоту, для этого введем следующее ограничение на параметры задачи:

$$u_{min} > \frac{r_3 b_1 - c_3 r_1}{c_3}.$$

Наша задача состоит в исследовании возможности перевода системы (1) во множество  $E$  при кусочно-непрерывном управлении из  $U^*$ .

В работе [1] найден первый интеграл системы (1) :

$$K(x, u) = x_1 - P_1 \ln x_1 + \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u) \ln x_2) + \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3) + \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u) \ln x_4). \quad (3)$$

Докажем, что функция  $K(x, u)$  сильно выпукла по  $x$  и имеет минимум по  $x$  в точке  $(P(u), u)$ .

**Утверждение 2.** *Функция  $K(x, u)$  сильно выпукла на любом выпуклом ограниченном подмножестве  $\mathbb{R}_+^4$ , а ее глобальный минимум по  $x$  достигается в точке  $(P(u), u)$ .*

**Доказательство.**

Рассмотрим гессиан функции  $K(x, u)$  :

$$H = \text{diag} \left( \frac{P_1}{x_1^2}, \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2^2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3 x_3^2}, \frac{P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4^2} \right).$$

Очевидно, он больше нуля при всех  $x_i > 0$ , следовательно, функция выпукла. Обозначим

$$K_1(x_1) = x_1 - P_1 \ln x_1, \quad K_2(x_2, u) = \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u) \ln x_2),$$

$$K_3(x_3) = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3), \quad K_4(x_4, u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u) \ln x_4),$$

тогда  $K(x, u) = K_1(x_1) + K_2(x_2, u) + K_3(x_3) + K_4(x_4, u)$ . Поскольку

$$K_1'(x_1) = 1 - \frac{P_1}{x_1}, \quad K_2'(x_2, u) = \frac{b_1}{c_2} - \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2},$$

$$K_3'(x_3) = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} - \frac{b_1 b_2 P_3}{c_2 c_3 x_3}, \quad K_4'(x_4, u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} - \frac{b_1 b_2 b_3 P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4},$$

глобальный минимум  $K_i$  достигается при  $x_i = P_i$ , следовательно, глобальный минимум  $K(x, u)$  достигается в точке  $(P(u), u)$ .

Докажем сильную выпуклость. Возьмем  $x_i \leq \mu, i = \overline{1, 4}$ , где  $\mu \geq \max \{P_i \mid i = \overline{1, 4}\}$ . Тогда  $H \geq \delta \cdot I$ , где

$$\delta = \min \left( P_1, \frac{P_2(u)b_1}{c_2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3}, \frac{P_4(u)b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} \right) / \mu^2.$$

Таким образом  $\langle Hx, x \rangle \geq \langle \delta Ix, x \rangle = \delta \|x\|^2$ , что и завершает доказательство. □

Будем максимально уменьшать  $K(x, u)$ , то есть гасить «энергию системы», что будет приближать нас положению равновесия.

Посчитаем производную  $\frac{dK(x, u_0)}{dt}$  при некотором  $u_0$  в силу системы (1) :

$$\frac{dK(x, u_0)}{dt} = \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_4} \dot{x}_4 = (u - u_0) \left( x_1 - \frac{b_2 r_4 + c_4 r_2}{c_2 c_4} \right).$$

Заметим, что равновесие по  $x_1$  разделяет все пространство на две области. В области  $x_1 > \frac{b_2 r_4 + c_4 r_2}{c_2 c_4}$  производная будет минимальной при  $u = u_{min}$ ,  $u_0 = u_{max}$ , а при  $x_1 < \frac{b_2 r_4 + c_4 r_2}{c_2 c_4}$  — наоборот, то есть при  $u = u_{max}$ ,  $u_0 = u_{min}$ . При  $x_1 = \frac{b_2 r_4 + c_4 r_2}{c_2 c_4}$  возникает «особый режим».

Выясним, может ли «особый режим» наступать на временном отрезке ненулевой меры.

...

Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для нашей системы и проверим, могут ли быть особые режимы.

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x_1 (r_1 + u - b_1 x_2) + \psi_2 x_2 (-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1) + \psi_3 x_3 (-r_3 - b_3 x_4 + c_3 x_2) + \psi_4 x_4 (-r_4 + c_4 x_3),$$

где  $\psi(t) \in C$ ,  $\psi(t) \neq 0$  и удовлетворяет сопряженной системе:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -(\psi_1(r_1 + u - b_2 x_2) + \psi_2 x_2 c_2), \\ \dot{\psi}_2 = -(-b_1 \psi_1 x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1) + \psi_3 x_3 c_3), \\ \dot{\psi}_3 = -(-b_2 \psi_1 x_2 + \psi_3(-r_3 - b_3 x_4 + c_3 x_2) + \psi_4 x_4 c_4), \\ \dot{\psi}_4 = -(b_3 \psi_3 x_3 + \psi_4(-r_4 + c_4 x_3)). \end{cases}$$

Из принципа максимума  $H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = \sup_{u \in U^*} H(\psi, x, u)$ .

Посчитаем производную  $H$  по  $u$ :

$$H'_u = \psi_1 x_1, \text{ откуда } u^* = \begin{cases} u_{max}, & \psi_1 x_1 \geq 0, \\ u_{min}, & \psi_1 x_1 < 0. \end{cases}$$

Так как в нашей системе  $x_1(t) > 0$ , особый режим будет возникать, если  $\psi_1(t) = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ . Но тогда  $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , тогда  $\psi_2 = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , тогда  $\dot{\psi}_2 = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , тогда  $\psi_3 = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , тогда  $\dot{\psi}_3 = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , тогда  $\psi_4 = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , что противоречит невырожденности  $\psi(t)$ .

## Список литературы

- [1] *Massarelli N., Hoffman K., Previte J. P.* Effect of parity on productivity and sustainability of Lotka–Volterra food chains. // Mathematical Biology. December of 2014. 1609–1626.