



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Дипломная работа по теме:

# “Задача достижимости для модели межвидового взаимодействия”

*Студент 515 группы*  
Н. С. Аушкап

*Научный руководитель*  
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2013

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Общие свойства системы.</b>	<b>4</b>
2.1	Общие свойства множества достижимости. . . . .	4
2.2	Особенности множества достижимости рассматриваемой системы. . . . .	5
2.3	Особые режимы принципа максимума Понтрягина. . . . .	8
2.4	Положения равновесия системы. . . . .	9
<b>3</b>	<b>Случай выполнения ограничений на параметры системы (<math>er_1 = br_3</math>).</b>	<b>10</b>
3.1	Общие свойства. . . . .	10
3.2	Множество достижимости из положения равновесия. Синтез управления. .	15
3.3	Общий случай. . . . .	18
<b>4</b>	<b>Случай <math>er_1 \neq br_3</math>.</b>	<b>22</b>

# 1 Введение.

Исследуется тритрофная пищевая цепь ([3], [7], [8]) с управлением, описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(r_1 - by) \\ \dot{y} &= y(-(r_2 + u) + cx - dz) \\ \dot{z} &= z(-r_3 + ey) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь численности популяций обозначаются за  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Управление ведется вторым видом ( $y$ ). Параметры системы  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e > 0$ , где  $r_1$  — рождаемость первого вида,  $r_2$ ,  $r_3$  — смертности второго и третьего видов соответственно. Слагаемые, пропорциональные членам  $xu$ ,  $yz$  и характеризуемые параметрами  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , отвечают за взаимодействие между популяциями. Управление  $u$  можно интерпретировать как интенсивность отлова второго вида. Ограничение на управление:  $u \in [0, U_{max}] = U$ .

Модель данного типа впервые была предложена в работе [1], в связи с описанием кинетики цепных химических реакций, и работе [2], возникшей при попытках объяснить колебания улова рыбы в Адриатическом море. Кроме этого, подобные системы возникают при описании различных других природных явлений, в таких областях, как лазерная физика [12], физика плазмы [13], гидродинамика [14] и других.

Важным вопросом для исследования подобных моделей, является нахождение первых интегралов для систем, описывающих поведение модели. Исследования, затрагивающие эту тему, можно найти, например, в работах [10], [16], [15]. Далее будет показано, что при определенных ограничениях на параметры системы ( $er_1 = br_3$ ) известен первый интеграл, который позволяет провести анализ поведения системы и решить поставленные в дипломной работе задачи.

Целью данной работы является исследование задачи достижимости, в частности исследование свойств множества достижимости  $X[t]$ .

$$X[t] = X(t, t_0, \bar{x}^0) = \{\bar{x}^1 \in \mathbb{R}_+^3 \mid \exists u(\cdot) \in U : \bar{x}(t, t_0, \bar{x}^0) = \bar{x}^1\}$$

Задача достижимости для двумерной системы Лотки–Вольтерра, описываемая следующей системой:  $\begin{cases} \dot{x} &= x(r_1 - u - by) \\ \dot{y} &= y(-r_2 + cx) \end{cases}$ , была исследована в работе [17]. В представленной работе показано, что при определенных ограничениях на параметры изучаемой трёхмерной системы, а именно при  $er_1 = br_3$ , многие свойства поведения системы совпадают с поведением двумерной системы.

В представленной работе показано, что при этих ограничениях на параметры у системы (1) существуют положения равновесия при  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  при фиксированных управлениях  $u$  и существует инвариантная поверхность. В этом случае построена линия переключения управления и решена задача синтеза управления, приводящего систему в положение равновесия в попятном времени. Также построено множество достижимости из положения равновесия системы и в общем случае — из произвольного начального положения.

Для случая  $er_1 \neq br_3$  показано, что множество достижимости в любой момент времени

целиком находится на некоторой поверхности, для которой получен аналитический вид и исследована динамика этих поверхностей в зависимости от времени.

## 2 Общие свойства системы.

### 2.1 Общие свойства множества достижимости.

Из интерпретации ясно, что численность популяции не может быть отрицательной. Следующее утверждение показывает, что данная система удовлетворяет этому свойству.

**Утверждение 1** *Множество  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$  является инвариантом для системы (1).*

**Доказательство.**

Из (1) видно, что при обнулении одной из координат  $x, y, z$  обнуляется соответствующее выражение для  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ , следовательно координаты не могут поменять знак. Интегрируя в обратном времени получим, что координаты не могут обнулиться. Получили искомое утверждение.  $\square$

Будем искать множество достижимости  $X[t]$ . Для этого введем функцию цены:

$$V(t, \bar{x}) = \min_{u(\cdot) \in U} (d^2(\bar{x}(t_0), \bar{x}^0) \mid \bar{x}(t) = \bar{x}), \text{ где } \bar{x} = (x, y, z) \quad (2)$$

Тогда  $X[t] = \{\bar{x} : V(t, \bar{x}) \leq 0\}$ .

Известно, что функция цены удовлетворяет уравнению Беллмана:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{u \in U} \left\langle \frac{\partial V}{\partial \bar{x}}, f(\bar{x}, u) \right\rangle = 0, \quad (3)$$

где  $f(\bar{x}, u)$  — правая часть системы (1).

Введем обозначения:  $\mathcal{H} = \max_{u \in U} \langle \frac{\partial V}{\partial \bar{x}}, f(\bar{x}, u) \rangle$  и  $\bar{s} = \frac{\partial V}{\partial \bar{x}}$ . Тогда из уравнения Беллмана получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{s}}, \\ \dot{\bar{s}} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{x}} \end{cases} \quad (4)$$

Тогда для границы множества достижимости справедлива импликация:

$$\partial X(t, t_0, \bar{x}^0) \subseteq \cup_{\bar{s}^0} \{\bar{x}(t, t_0, \bar{x}^0, \bar{s}^0)\}, \quad (5)$$

где  $\bar{x}(t, t_0, \bar{x}^0, \bar{s}^0)$  соответствует системе (4) с начальными условиями  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ ,  $\bar{s}(t_0) = \bar{s}^0$ .

Запишем утверждение в терминах принципа максимума:

**Теорема 1** *Рассмотрим систему в  $\mathbb{R}^n$ :*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (6)$$

где  $f(x, u)$  и  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$  — непрерывные функции. Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех измеримых управлений  $u(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющих ограничению  $u(t) \subset U \subset \mathbb{R}^m$

и имеющих ограниченные решения, исходящие из точки  $x^0$ . Пусть некоторому управлению  $\hat{u}(t) \in \mathcal{F}$  соответствует решение  $\hat{x}(t)$  с концом  $\hat{x}(T)$ , лежащим на границе множества достижимости. Тогда существует нетривиальное сопряженное решение  $\hat{\psi}(t)$  системы

$$\dot{\psi} = -\psi \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad (7)$$

так что принцип максимума  $H(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = M(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t))$  выполняется почти всюду.

Здесь функция Гамильтона—Понтрягина имеет такой вид:

$$H(\psi, x, u) = \psi f(x, u) = \psi_1 f^1(x, u) + \dots + \psi_n f^n \quad (8)$$

$$u M(\psi, x) = \max_{u \in \Omega} H(\psi, x, u).$$

**Доказательство.** доказательство этой теоремы приведено в [5] (гл.4, теорема 3).  $\square$

Таким образом управление будем выбирать из принципа максимума.

Для системы (1) функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид:

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x(r_1 - by) + \psi_2 y(-r_2 + u) + cx - dz + \psi_3 z(-r_3 + ey) \quad (9)$$

Оптимальное управление выглядит следующим образом:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \psi_2 > 0, \\ U_{max}, & \psi_2 \leq 0, \end{cases} \quad (10)$$

Сопряженная система:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 &= -\psi_1 r_1 - y(-\psi_1 b + \psi_2 c), \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_2(r_2 + u) - x(-\psi_1 b + \psi_2 c) - z(-\psi_2 d + \psi_3 e), \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_3 r_3 - y(-\psi_2 d + \psi_3 e). \end{cases} \quad (11)$$

## 2.2 Особенности множества достижимости рассматриваемой системы.

Для исходной системы (1) можно показать, что множество достижимости в любой момент времени будет целиком располагаться на некоторой поверхности. Для этого воспользуемся аппаратом скобок Ли, описанном в [18] в разделе 1, основной результат, используемый далее, изложен в теореме 1.8.10.

**Определение 1** Скобкой Ли  $[\cdot, \cdot]$  называется отображение, определяемое по следующей правилу:  $[f(\bar{x}), g(\bar{x})] = \frac{\partial g}{\partial \bar{x}}(\bar{x})f(\bar{x}) - \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(\bar{x})g(\bar{x})$ , где  $f, g$  – векторные функции,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial g}{\partial \bar{x}}$  – матрицы Якоби соответствующих функций.

Запишем исходную систему (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(r_1 - by) \\ \dot{y} &= y(-r_2 + cx - dz) - yu \\ \dot{z} &= z(-r_3 + ey) \end{cases}$$

$$\text{Или то же в векторном виде: } \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) + g(\bar{x})u, \text{ где } g(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x(r_1 - by) \\ y(-r_2 + cx - dz) \\ z(-r_3 + ey) \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим задачу при измеримых управлениях  $u \in \mathbb{R}$ , то есть откажемся от исходных геометрических ограничений на управление. Тогда размерность множества достижимости будет совпадать с рангом следующего построения:  $[ [f, g] \mid [f, [f, g]] \mid [f, [f, [f, g]]] \dots ]$ .

**Утверждение 2**  $\text{rank} [ g \mid [f, g] \mid [f, [f, g]] \mid [f, [f, [f, g]]] \dots ] = 2$

**Доказательство.**

Докажем по индукции.

Для  $[ g \mid [f, g] ] = \begin{pmatrix} 0 & -bxy(-r_2 + cx - dz) \\ -y & y^2(bc x + dez) \\ 0 & eyz(-r_2 + cx - dz) \end{pmatrix}$  утверждение верно.

Пусть  $\varphi = \begin{pmatrix} -bxyA(x, y, z) \\ C(x, y, z) \\ eyzA(x, y, z) \end{pmatrix}$ , найдем  $[f, \varphi]$ :

$$\begin{aligned} [f, \varphi] &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(\bar{x}) - \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \varphi(\bar{x}) = \\ &= \begin{pmatrix} -byA - bxy \frac{\partial A}{\partial x} & -bxA - bxy \frac{\partial A}{\partial y} & -bxy \frac{\partial A}{\partial z} \\ - & - & - \\ eyz \frac{\partial A}{\partial x} & e z A + eyz \frac{\partial A}{\partial y} & e y A + eyz \frac{\partial A}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(r_1 - by) \\ y(-r_2 + cx - dz) \\ z(-r_3 + ey) \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} r_1 - by & -bx & 0 \\ - & - & - \\ 0 & ez & -r_3 + ey \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -bxyA(x, y, z) \\ C(x, y, z) \\ eyzA(x, y, z) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-byA - bxy \frac{\partial A}{\partial x}) x(r_1 - by) + (-bxA - bxy \frac{\partial A}{\partial y}) y(-r_2 + cx - dz) + (-bxy \frac{\partial A}{\partial z}) z(-r_3 + ey) \\ - & - & - \\ eyz \frac{\partial A}{\partial x} x(r_1 - by) + (e z A + eyz \frac{\partial A}{\partial y}) y(-r_2 + cx - dz) + (e y A + eyz \frac{\partial A}{\partial z}) z(-r_3 + ey) \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} -bxyA(r_1 - by) - bx C \\ - & - & - \\ e z C + eyz A(-r_3 + ey) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -bxy \left[ -\frac{C}{y} - A(r_1 - by) + \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{A}{x} \right) x(r_1 - by) + \left( \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{A}{y} \right) y(-r_2 + cx - dz) + \frac{\partial A}{\partial z} z(-r_3 + ey) \right] \\ - & - & - \\ eyz \left[ -\frac{C}{y} - A(-r_3 + ey) + \frac{\partial A}{\partial x} x(r_1 - by) + \left( \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{A}{y} \right) y(-r_2 + cx - dz) + \left( \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{A}{z} \right) z(-r_3 + ey) \right] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -bxy \left[ -\frac{C}{y} + \frac{\partial A}{\partial x} x(r_1 - by) + \left( \frac{\partial A}{\partial y} y + A \right) (-r_2 + cx - dz) + (-r_3 + ey) z \frac{\partial A}{\partial z} \right] \\ - & - & - \\ eyz \left[ -\frac{C}{y} + \frac{\partial A}{\partial x} x(r_1 - by) + \left( \frac{\partial A}{\partial y} y + A \right) (-r_2 + cx - dz) + (-r_3 + ey) z \frac{\partial A}{\partial z} \right] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -bxy N(x, y, z) \\ M(x, y, z) \\ eyz N(x, y, z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

То есть первая и третья строки выражения  $[ g \mid [f, g] \mid [f, [f, g]] \mid [f, [f, [f, g]]] \dots ]$  линейно зависимы. И утверждение доказано.  $\square$

Таким образом, при всевозможных измеримых управлениях множество достижимости в любой фиксированный момент времени будет представлять собой поверхность, причем для разных моментов времени эти поверхности будут, вообще говоря, различны. При  $u \in [0, U_{\max}]$  множество достижимости будет располагаться на этих поверхностях.

Причем этими поверхностями будут множества:  $M = \mathcal{L}(g, [f, g])$ , где  $\mathcal{L}$  – линейная оболочка. Найдем выражение для них в виде  $F(x, y, z) = 0$ .

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f, g] = \begin{pmatrix} -bxy(-r_2 + cx - dz) \\ y^2(bcx + dez) \\ eyz(-r_2 + cx - dz) \end{pmatrix}$$

Тогда  $\mathcal{L}((ez, 0, bx))$  – ортогональное дополнение к  $\mathcal{L}(g, [f, g])$ . Отсюда составляем систему уравнений в частных производных на функцию  $F$ :

$$-bx \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} + ez \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0, \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 0;$$

Решением этой системы будет функция  $F(x, z) = z - Kx^{-\frac{e}{b}}$ . Отсюда имеем вид поверхностей:  $z - Kx^{-\frac{e}{b}} = 0$ .

На рисунке 1 изображены поверхности  $z - Kx^{-\frac{e}{b}} = 0$ , причем большим значениям  $K$  соответствуют поверхности, лежащие выше.

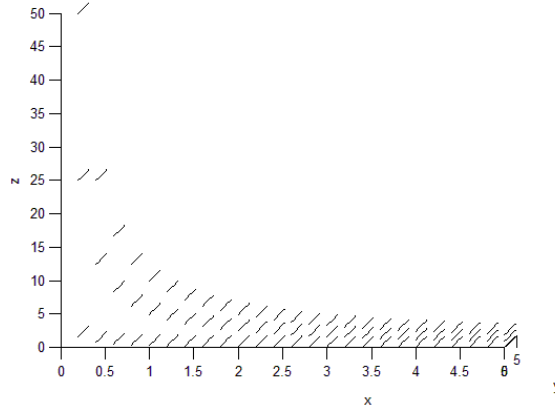


Рис. 1: Поверхности, содержащие множество достижимости.

Остается найти функцию  $K(t)$ , чтобы узнать на какой поверхности находится множество достижимости в конкретный момент времени. Для этого напишем обыкновенное дифференциальное уравнение на эту функцию:

$$\frac{d}{dt}K = \frac{d}{dt}zx^{\frac{e}{b}} = \dots = zx^{\frac{e}{b}} \left( \frac{e}{b}r_1 - r_3 \right) = K \left( \frac{e}{b}r_1 - r_3 \right).$$

Начальное значение  $K_0 = K(t_0)$  определяется начальным положением системы  $(x_0, y_0, z_0)$  и функцию  $K(t)$  можно найти сразу, зная параметры задачи. Она будет либо постоянной, либо изменяться (только возрастать или только убывать) с экспоненциальной скоростью.

Таким образом можно перейти к новой системе:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(r_1 - by) \\ \dot{y} &= y(-(r_2 + u) + cx - dK(t)x^{-\frac{e}{b}}) \\ \dot{z} &= K(t)x^{-\frac{e}{b}} \\ \dot{K} &= K\left(\frac{e}{b}r_1 - r_3\right) \\ \bar{x}_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ K_0 &= z_0x_0^{\frac{e}{b}} \end{cases}$$

И изучать поведение следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(r_1 - by) \\ \dot{y} &= y(-(r_2 + u) + cx - dK(t)x^{-\frac{e}{b}}) \end{cases} \quad (12)$$

Эта система содержит в правой части выражение, зависящее от времени, но на 1 размерность меньше исходной задачи. Далее будет показано, что для полученной системы не будет особых режимов принципа максимума.

## 2.3 Особые режимы принципа максимума Понтрягина.

Для исходной системы (1) и системы (11) существует особый режим принципа максимума Понтрягина. Запишем это в виде утверждения:

**Утверждение 3** *Существует особый режим принципа максимума для систем (1) и (11), при  $\psi_1xb - \psi_3ze = 0$ . Причем либо система находится в особом режиме всё время и не выходит из него, либо не окажется в нём на при любых  $t$ .*

**Доказательство.**

Предположим, что на некотором отрезке времени  $\psi_2 = \dot{\psi}_2 = 0$ , тогда из системы (11) получаем, что  $\psi_1xb - \psi_3ze = 0$ . Рассмотрим как изменяется эта величина:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_1xb - \psi_3ze) &= \dot{\psi}_1xb + \psi_1\dot{x}b - \dot{\psi}_3ze - \psi_3\dot{z}e = \\ &= -\psi_1xb(r_1 - yb) - \psi_2yxcb + \psi_1xb(r_1 - yb) - \psi_2ydz - \psi_3ze(r_3 - ye) - \psi_3(-r_3 + ey) = \\ &= \{\psi_2 = 0\} = 0, \end{aligned}$$

Таким образом получили, что если система находится в особом режиме, то она из него не выйдет. Интегрируя в обратном времени, получаем, что система не может попасть в особый режим, если она не находилась в нём сразу. Получили доказываемое утверждение.  $\square$

Отметим, что условие  $\psi_1xb - \psi_3ze = 0$  означает ортогональность вектора  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  поверхности  $z - Kx^{-\frac{e}{b}} = 0$ , на которой целиком располагается множество достижимости. Особому режиму соответствуют все точки множества достижимости. Однако, для того, чтобы получить концы траекторий, составляющие относительную границу множества достижимости, лежащего на соответствующей поверхности, достаточно рассмотреть режимы, не являющиеся особыми. Более точно, можно рассмотреть только те решения  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  сопряженной системы, коническая оболочка проекций начальных значений которых совпадает с касательной плоскостью, за исключением точки касания, к соответствующей поверхности в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Этому условию соответствует некоторая



кривая, например на сфере всевозможных (с точностью до произведения на положительную константу, что допустимо в силу положительной однородности системы (11)) начальных значений решения сопряженной системы.

Также для получения относительной границы множества достижимости можно перейти к системе (12). Для неё сопряженная система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 &= -\psi_1(r_1 - by) - \psi_2yc - \psi_2ydK(t)\frac{e}{b}x^{-1-\frac{e}{b}} \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1xb - \psi_2(-(r_2 + u) + cx - dK(t)x^{-\frac{e}{b}}) \end{cases} \quad (13)$$

Можно показать, что для этой системы не будет особых режимов принципа максимума. Запишем это в виде утверждения:

**Утверждение 4** *Для системы (12) переключения управления происходят в изолированные моменты времени.*

**Доказательство.**

Предположим противное, что существует отрезок времени на котором  $\psi_2(t) = \dot{\psi}_2(t) = 0$ . Тогда из уравнения для  $\psi_2$  сопряженной системы (13) следует, что также  $\psi_1(t) = \dot{\psi}_1(t) = 0$  на этом отрезке времени. Таким образом получаем, что  $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 0$ , а это противоречит условию невырожденности вектора сопряженных переменных, получили противоречие. ч.т.д.  $\square$

## 2.4 Положения равновесия системы.

Далее рассмотрим множества положений равновесия системы.

При  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  существуют положения равновесия, только в случае  $er_1 = br_3$ , тогда при фиксированном управлении  $u$  положениями равновесия является прямая:

$$\begin{cases} y_e = \frac{r_1}{b} = \frac{r_3}{e}, \\ -(r_2 + u) + cx_e - dz_e = 0, \end{cases}$$

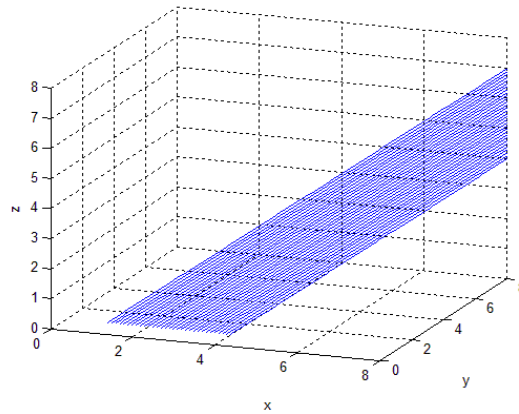


Рис. 2: Множества положений равновесия при различных управлениях.

При  $er_1 \neq br_3$  и строго положительных численностях всех популяций положений равновесия нет.

### 3 Случай выполнения ограничений на параметры системы ( $er_1 = br_3$ ).

#### 3.1 Общие свойства.

В этом случае найденное ранее значение  $K = zx^{\frac{e}{b}}$  не будет изменяться вдоль траекторий системы при всевозможных управлениях, то есть  $K = \text{const}$ . Запишем это свойство в виде утверждения:

**Утверждение 5** Пусть  $er_1 = br_3$ , тогда поверхность  $\hat{f}(x, y, z) = 0$ , где  $\hat{f}(x, y, z) = z - Kx^{-\frac{e}{b}}$  и  $K = K(x_0, z_0) = \text{const}$ , является инвариантом для системы (1).

**Доказательство.**

Вектор нормали к данной поверхности имеет вид:  $\bar{n} = \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{f}}{\partial y}, \frac{\partial \hat{f}}{\partial z} \right) = \left( K^{\frac{e}{b}} x^{-1-\frac{e}{b}}, 0, 1 \right)$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \bar{n} \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) &= \left( K^{\frac{e}{b}} x^{-1-\frac{e}{b}}, 0, 1 \right) \cdot (x(r_1 - by), y(-(r_2 + u) + cx - dz), z(-r_3 + ey)) = \\ &= (r_1 x - bxy) K^{\frac{e}{b}} x^{-1-\frac{e}{b}} - r_3 z + eyz = \left\{ \frac{e}{b} = \frac{r_3}{r_1} \right\} = \\ &= r_3 K x^{\frac{r_3}{r_1}} - \frac{br_3 y K}{r_1} x^{\frac{r_3}{r_1}} - r_3 K x^{\frac{r_3}{r_1}} + ey K x^{-1-\frac{r_3}{r_1}} = \{er_1 = br_3\} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение.  $\square$

Таким образом пришли к задаче с двумя переменными:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(r_1 - by) \\ \dot{y} &= y(-(r_2 + u) + cx - dKx^{-\frac{e}{b}}) \end{cases} \quad (14)$$

Эта система отличается от модели Лотки–Вольтерра, задача достижимости для которой была рассмотрена в [17], наличием дополнительного слагаемого  $-dKyx^{\frac{e}{b}}$ . Однако исследование, подробно описанное далее, показало, что многие свойства поведения системы сохраняются.

Для системы (14) управление имеет тот же вид (10). Сопряженная система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 &= -\psi_1(r_1 - by) - \psi_2 yc - \psi_2 y d K^{\frac{e}{b}} x^{-1-\frac{e}{b}} \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1 xb - \psi_2(-(r_2 + u) + cx - dKx^{-\frac{e}{b}}) \end{cases} \quad (15)$$

Ранее было доказано, что для этой системы не будет особых режимов принципа максимума Понтрягина.

Неподвижные точки системы (14) при постоянном управлении находятся из следующей системы:

$$\begin{cases} -(r_2 + u) + cx_e - dKx_e^{-\frac{e}{b}} &= 0 \\ y_e &= \frac{r_1}{b} \end{cases} \quad (16)$$

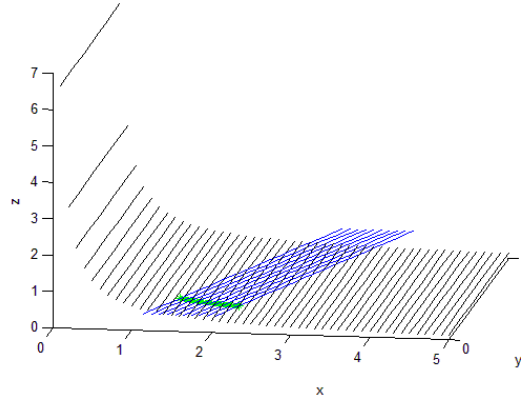


Рис. 3: Неподвижные точки.

Обозначим множество значений  $x$ , удовлетворяющих первому уравнению системы (16) для какого-либо значения управления  $u \in [0, U_{max}]$ , через  $X_e$ , и обозначим  $Y_e = \{\frac{r_1}{b}\}$ . То есть  $X_e \times Y_e$  – множество положений равновесия системы (14) при различных значениях управления  $u$ .

**Утверждение 6** Точка  $x_e$  единственна при постоянном управлении  $u$ .

**Доказательство.**

Обозначим  $h(x) = -(r_2 + u) + cx - dKx^{-\frac{\epsilon}{b}}$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 0+0} h(x) = -\infty$ , кроме того:

$h'(x) = c + d\frac{\epsilon}{b}x^{-1-\frac{\epsilon}{b}} > 0$ , то есть функция  $h(x)$  монотонно возрастает и лишь один раз пересекает ноль.  $\square$

Из доказательства этого утверждения видно, что наибольший корень первого уравнения системы (16), для различных  $u \in [0, U_{max}]$ , соответствует управлению  $u = U_{max}$ , обозначим его:  $x_2$ . Наименьший корень соответствует управлению  $u = 0$ , обозначим его:  $x_1$ .

**Теорема 2** Пусть  $u(t) \equiv u = const$ , при  $t \in (\tau_0, \tau_1)$ . Тогда для системы (14) можно выписать первый интеграл на этом отрезке времени:

$$\varphi(x, y|u) = by - r_1 \ln(y) - (r_2 + u) \ln(x) + cx + d\frac{b}{e}Kx^{-\frac{\epsilon}{b}},$$

Функция  $\varphi(x, y|u)$  является сильно выпуклой в любом выпуклом ограниченном подмножестве  $\mathbb{R}_+^2$ . Глобальный минимум этой функции достигается в точке  $(x_e, y_e)$ , где  $x_e, y_e$  удовлетворяют системе (16).

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{(14)} &= (b - \frac{r_1}{y})y(-(r_2 + u) + cx - dKx^{-\frac{\epsilon}{b}}) + (c - \frac{r_2+u}{x} - dKx^{-1-\frac{\epsilon}{b}})x(r_1 - by) = \\ &= -(r_1 - by)(-(r_2 + u) + cx - dKx^{\frac{\epsilon}{b}}) + (-(r_2 + u) + cx - dKx^{-\frac{\epsilon}{b}})(r_1 - by) = 0, \end{aligned}$$

Гессиан функции  $\varphi$  имеет следующий вид:

$$H = \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_2+u}{x^2} + dK(1 + \frac{\varepsilon}{b})x^{-2-\frac{\varepsilon}{b}} & 0 \\ 0 & \frac{r_1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$H > 0$  при  $x > 0$ ,  $y > 0$ , следовательно  $\varphi$  — выпуклая.

Далее докажем сильную выпуклость. Обозначим  $\varphi_1(x) = cx - (r_2 + u) \ln(x) + d_e^b K x^{-\frac{\varepsilon}{b}}$ ,  $\varphi_2(y) = by - r_1 \ln(y)$ , так что  $\varphi(x, y|u) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ . Тогда очевидно, что глобальный минимум функции  $\varphi$  достигается в точке  $(x_e, y_e)$ .

Причем  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  строго возрастают по  $x$  и  $y$  соответственно, при  $x > x_e$  и  $y > y_e$ . И  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) = +\infty$ ,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi_2(y) = +\infty$ . Следовательно из неравенства  $\varphi(x, y|u) \leq \alpha$  следует, что  $x \leq \mu$  и  $y \leq \mu$ , где  $\mu \geq \max(x_e, y_e)$ ,  $\min(\varphi_1(\mu) + \varphi_2(y_e), \varphi_1(x_e) + \varphi_2(\mu)) \geq \alpha$ . Но тогда для  $x \leq \mu$  и  $y \leq \mu$  будет выполнено неравенство:  $H \geq \frac{\min((r_2+u), r_1)}{\mu^2} E$ . То есть функция  $\varphi(x, y|u)$  является сильно выпуклой, ч.т.д.  $\square$

**Следствие 1** Множество уровня  $\Phi_\alpha = \{(x, y) : \varphi(x, y|u) \leq \alpha\}$  — есть строгий выпуклый компакт, а его граница  $\partial\Phi_\alpha = \{(x, y) : \varphi(x, y|u) = \alpha\}$  — гладкая замкнутая кривая без самопересечений.

Кривая  $\partial\Phi_\alpha = \{(x, y) : \varphi(x, y|u) = \alpha\}$  пересекает каждую прямую

$\{(x, y)' : y = \text{const}\}$  не более чем в двух точках. И при  $y = y_e = \frac{r_1}{b}$  касательная к  $\partial\Phi_\alpha$  параллельна оси  $Oy$ . Движение траектории осуществляется при  $\alpha > \alpha_e = \varphi(x_e, y_e|u)$  по кривой  $\partial\Phi_\alpha$  против часовой стрелки.

**Доказательство.**

Положением равновесия системы (14), при постоянном управлении  $u = \text{const}$ , является точка  $\{(x_e, y_e)'\}$ , удовлетворяющая системе (16). Следовательно при  $\alpha > \alpha_e$  траектория пройдёт всю замкнутую кривую за конечное время.

При  $y = y_e = \frac{r_1}{b}$ , мы имеем:  $\dot{x} = 0$ . И в точке  $(x, y_e) \in \Phi_\alpha$ , при  $x > x_e$  справедливо:

$$0 = y(-(r_2 + u) + cx_e - dKx_e^{-\frac{\varepsilon}{b}}) < (-(r_2 + u) + cx - dKx^{-\frac{\varepsilon}{b}}) = \dot{y}$$

Следовательно  $\dot{y} > 0$  и движение осуществляется против часовой стрелки.  $\square$

**Теорема 3** Рассмотрим на некотором отрезке  $(\tau_0, \tau_1)$  траектории фазовой и сопряженной переменных  $\bar{x}(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot))^T$  и  $\bar{\psi}(\cdot) = (\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot))^T$ , соответствующие управлению  $u^*$ , для которого выполнено условие максимума. Тогда справедливы утверждения:

1. Если  $\psi_2(\tau_0) = \psi_2(\tau_1) = 0$  и  $y(\tau_0) = \frac{r_1}{b}$ , тогда  $y(\tau_1) = \frac{r_1}{b}$ .
2. Если  $\psi_2(\tau_0) = \psi_2(\tau_1) = 0$  и  $y(\tau_0) \neq \frac{r_1}{b}$ , тогда  $y(\tau_1) \neq \frac{r_1}{b}$  и  $\exists \tau \in (\tau_0, \tau_1) : y(\tau) = \frac{r_1}{b}$ .
3. Если  $y(\tau_0) = y(\tau_1) = \frac{r_1}{b}$  и  $\psi_2(\tau_0) = 0$ , но  $y(\tau) \neq \frac{r_1}{b}$ ,  $\forall \tau \in (\tau_0, \tau_1)$ , тогда  $\psi_2(\tau_1) = 0$ .
4. Если  $y(\tau_0) = y(\tau_1) = \frac{r_1}{b}$  и  $\psi_2(\tau_0) \neq 0$ , но  $y(\tau) \neq \frac{r_1}{b}$ ,  $\forall \tau \in (\tau_0, \tau_1)$ , тогда  $\psi_2(\tau_1) \neq 0$  и  $\exists \tau \in (\tau_0, \tau_1) : \psi_2(\tau) = 0$ .

### Доказательство.

Используем термины теоремы 1. Для системы (14):

$$H = \psi_1 x(r_1 - by) + \psi_2 y(-(r_2 + u) + cx - dKx^{-\frac{\epsilon}{b}}),$$

$$M(\psi, x) = \max_{u \in [0, U_{max}]} H(\psi, x, u) = H(\psi, x, u^*), \text{ где } u^* = U_{max} \chi(-\psi_2).$$

1.  $0 = M|_{\tau_0} = M|_{\tau_1} = \psi_1 x(r_1 - by)|_{\tau_1}$ , отсюда следует, что  $y(\tau_1) = \frac{r_1}{b}$ , ч.т.д.
2.  $y(\tau_1) \neq \frac{r_1}{b}$  — доказывается аналогично первому пункту.  
Без ограничения общности будем считать, что  $\psi_2(t) \neq 0$ ,  $t \in (\tau_0, \tau_1)$ , тогда  $\psi(\tau_0)\psi(\tau_1) < 0$ . Отсюда, учитывая положительность координаты  $x$ , получаем:  
 $(r_1 - by(\tau_0))(r_1 - by(\tau_1)) < 0 \implies \exists \tau \in (\tau_0, \tau_1) : (r_1 - by(\tau)) = 0$ , ч.т.д.
3.  $M|_{\tau_0} = M|_{\tau_1} = 0 \implies \psi_2 y(-(r_2 + u^*) + cx - dKx^{-\frac{\epsilon}{b}})|_{\tau_1} = 0$ . Отсюда следует, если предположить  $\psi_2(\tau_1) \neq 0$ , что  $x(\tau_1) \in \partial X_e$ .  
В силу пункта 1. получаем, что  $\psi_2(\tau) \neq 0$ ,  $\forall \tau \in (\tau_0, \tau_1) \implies u^* = const$  при  $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ .  
Далее рассмотрим последовательность  $\{x^{0,j}\} \in \mathbb{R}_+$ ,  $x^{0,j} \longrightarrow x(\tau_0)$ ,  $j \longrightarrow +\infty$ .  
Выпустим траектории  $\bar{x}^j[\cdot]$ ,  $\bar{\psi}^j[\cdot]$  с постоянным управлением  $u^*$  из начальных точек  $\bar{x}^j(\tau_0) = (x^{0,j}, \frac{r_1}{b})$ ,  $\bar{\psi}^j[\tau_0] = (\psi_1(\tau_0), 0)$ . Пусть  $\tau_1^j$  — первый момент времени строго больше  $\tau_0$ , когда  $y^j(\tau_1^j) = \frac{r_1}{b}$ . Так как знак  $\psi_2^j(\tau)$  в правой окрестности  $\tau_0$  однозначно определяется значением  $\psi_1(\tau_0)$  (из (15)), то  $\bar{x}^j[\cdot]$ ,  $\bar{\psi}^j[\cdot]$  вместе с управлением  $u^*$  будет удовлетворять всем условиям принципа максимума Понтрягина. Однако в силу непрерывности решения ОДУ по начальным данным:  $\tau_1^j \longrightarrow \tau_1$ ,  $x^j(\tau_1^j) \longrightarrow x(\tau_1)$  и  $\psi_2^j(\tau_1^j) \longrightarrow \psi_2(\tau_1)$ , но по построению  $x^j(\tau_1^j) \notin \partial X_e$  при достаточно больших  $j \implies \psi_2^j(\tau_1^j) = 0$  — противоречие. Получили, что  $\psi_2(\tau_1) = 0$ , ч.т.д.
4. Предположим противное, что  $\psi_2(\tau_1) = 0 \implies \{ \text{аналогично пункту 3, но в обратном времени} \} \implies \psi_2(\tau_0) = 0$  — противоречие.  
Получили, что  $\psi_2(\tau_1) \neq 0$ . Теперь покажем, что  $\exists \tau \in (\tau_0, \tau_1) : \psi_2(\tau) = 0$ .  
Предположим противное, тогда  $\psi_2$  сохраняет знак на интервале  $(\tau_0, \tau_1) \implies u^* = const$ . В этом случае, если одно из выражений  $-(r_2 + u^*) + cx - dKx^{-\frac{\epsilon}{b}}|_{\tau_0}$  или  $-(r_2 + u^*) + cx - dKx^{-\frac{\epsilon}{b}}|_{\tau_0}$  равно нулю, то второе выражение равно нулю быть не может, так как  $x(\tau_0) \neq x(\tau_1)$ , но это противоречит тому, что  $M|_{[\tau_0, \tau_1]} \equiv 0$ . В этом случае, если оба выражения не обнуляются, то они должны быть разных знаков, но это противоречит  $M|_{\tau_0} = M|_{\tau_1}$ . ч.т.д.  $\square$

**Замечание 1** Траектория пересекает прямую  $y = y_e = \frac{r_1}{b}$  в изолированные моменты времени, если при пересечении с данной прямой координата  $x$  не совпадает с концами отрезка  $X_e$ . Иначе траектория останется в одной точке до тех пор, пока не произойдёт переключение управления, то есть пока не обнулится  $\psi_2$ .

Таким образом получается, что моменты пересечения траектории и прямой  $y = y_e = \frac{r_1}{b}$  и моменты переключения управления либо совпадают, либо перемежаются, по крайней мере до момента попадания траектории на множество положений равновесия  $E = X_e \times Y_e$ .

Рассмотрим случай, когда эти моменты совпадают.

Обозначим:

$$u_{ext} = U_{max} \chi \left( \frac{r_1}{b} - y \right), \quad u_{int} = U_{max} \left( 1 - \chi \left( \frac{r_1}{b} - y \right) \right)$$

$\bar{x}_{ext}(\cdot)$ ,  $\bar{x}_{int}(\cdot)$  — соответствующие этим управлениям траектории системы (14).

**Теорема 4** Рассмотрим траектории  $\bar{x}_{ext}[\cdot]$  и  $\bar{x}_{int}[\cdot]$ , и соответствующие управления  $u_{ext}(\cdot)$  и  $u_{int}(\cdot)$ . Пусть моменты времени  $t_0 < \tau_1 < \tau_2$  таковы, что  $\bar{x}_{ext,int}(\tau_1) \notin E$ ,  $\bar{x}_{ext,int}(\tau_2) \notin E$ , но  $y_{ext,int}(\tau_1) = y_{ext,int}(\tau_2) = y_e = \frac{r_1}{b}$ , причем  $y_{ext,int}(t) \neq y_e$ , для всех  $t \in (\tau_1, \tau_2)$ . В таком случае для  $u_{ext,int}^0 = u_{ext,int}(\tau_1 - 0) = u_{ext,int}(\tau_2 + 0)$  и  $\Delta\varphi_* = U_{max} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > U_{max}$ , где  $x_1 < x_2$  — концы отрезка  $X_e$ , справедливо:

1. Для траектории  $\bar{x}_{ext}[\cdot]$ :  $\varphi(x_{ext}(\tau_2), y_{ext}(\tau_2)|u_{ext}^0) - \varphi(x_{ext}(\tau_1), y_{ext}(\tau_1)|u_{ext}^0) \geq \Delta\varphi_*$ .
2. Для траектории  $\bar{x}_{int}[\cdot]$ :  $\varphi(x_{int}(\tau_2), y_{int}(\tau_2)|u_{int}^0) - \varphi(x_{int}(\tau_1), y_{int}(\tau_1)|u_{int}^0) \leq -\Delta\varphi_*$ .

**Доказательство.**

Докажем для траектории  $\bar{x}(\cdot) = \bar{x}_{ext}(\cdot)$  и управления  $u^0 = u_{ext}^0$ .

Пусть  $x(\tau_1) > x_2$ , тогда из следствия 1,  $\dot{y}(\tau_1) > 0$  и  $u(\tau_1 - 0) = u_0 = U_{max}$ ,  $u(\tau_1 + 0) = 0$ .

Кроме того из вида первого интеграла  $\varphi$  имеем:

$$\varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0 = U_{max}) = \varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)|0) - U_{max} \ln(x(\tau_1))$$

$$\varphi(x(\tau_2), y(\tau_2)|0) = \varphi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0 = U_{max}) + U_{max} \ln(x(\tau_2))$$

Далее из равенства  $\varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)|0) = \varphi(x(\tau_2), y(\tau_2)|0)$  получаем:

$$\varphi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0 = U_{max}) - \varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0 = U_{max}) = U_{max} \ln\left(\frac{x(\tau_1)}{x(\tau_2)}\right)$$

Но  $\frac{x(\tau_1)}{x(\tau_2)} > \frac{x_2}{x_1}$ , откуда и получаем утверждение 1 в случае  $x(\tau_1) > x_2$ .

Пусть  $x(\tau_1) < x_1$ , тогда из следствия 1,  $\dot{y}(\tau_1) < 0$  и  $u(\tau_1 - 0) = u_0 = 0$ ,  $u(\tau_1 + 0) = U_{max}$ .

Кроме того из вида первого интеграла  $\varphi$  имеем:

$$\varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0 = 0) = \varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)|U_{max}) + U_{max} \ln(x(\tau_1))$$

$$\varphi(x(\tau_2), y(\tau_2)|U_{max}) = \varphi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0 = 0) - U_{max} \ln(x(\tau_2))$$

Далее из равенства  $\varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)|U_{max}) = \varphi(x(\tau_2), y(\tau_2)|U_{max})$  получаем:

$$\varphi(x(\tau_2), y(\tau_2)|u_0 = 0) - \varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)|u_0 = 0) = U_{max} \ln\left(\frac{x(\tau_2)}{x(\tau_1)}\right)$$

Но  $\frac{x(\tau_2)}{x(\tau_1)} > \frac{x_2}{x_1}$ , откуда и получаем утверждение 1 в случае  $x(\tau_1) < x_1$ .

Случай  $\bar{x}[\cdot] = \bar{x}_{int}[\cdot]$  рассматривается аналогично.  $\square$

Рассмотрим случай  $(x_0, y_0) \notin X_e \times Y_e$ , то есть начальная точка не лежит на множестве положений равновесия.

Тогда, в силу теоремы 2 и следствия 1, если  $y_{ext} > y_e = \frac{r_1}{b}$ , то  $u_{ext} = 0$  и в момент попадания  $t_e$  траектории на прямую  $y = \frac{r_1}{b}$  справедливо:  $x_{ext}(t_e) < x_e|_{u=0}$ , если  $y_{ext} < y_e$ , то

$u_{ext} = U_{max}$  и  $x_{ext}(t_e) > x_e|_{u=U_{max}}$ . Таким образом траектория  $\bar{x}_{ext}$  никогда не попадет на множество положений равновесия  $X_e \times Y_e$ . Более того, в силу теоремы 4, последовательности  $\{\varphi_{ext}(t_e^{2j-1} - 0)\}$  и  $\{\varphi_{ext}(t_e^{2j} - 0)\}$ , где  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $j \geq 1$ ,  $t_e^i$  – моменты попадания на прямую  $y = y_e = \frac{r_1}{b}$  и  $\varphi_{ext}(t) = \varphi(x_{ext}(t), y_{ext}(t) | u_{ext}(x_{ext}(t), y_{ext}(t)))$ , неограниченно возрастают при  $j \rightarrow +\infty$ , откуда следует, что для любого  $M > 0$  существует достаточно большой момент времени  $t_M$  такой, что  $\|\bar{x}_{ext}(t)\| > M$ , при  $t > t_M$ .

Для траектории  $\bar{x}_{int}$  напротив, траектория никогда не попадет на множество положений равновесия. Так как, иначе, в силу теоремы 4, последовательности  $\{\varphi_{int}(t_e^{2j-1} - 0)\}$  и  $\{\varphi_{int}(t_e^{2j} - 0)\}$  стремились бы к  $-\infty$ , при  $j \rightarrow +\infty$ . Что противоречит тому, что  $\varphi \geq \min_{u \in [0, U_{max}]} (\varphi_e|_u) > -\infty$ .

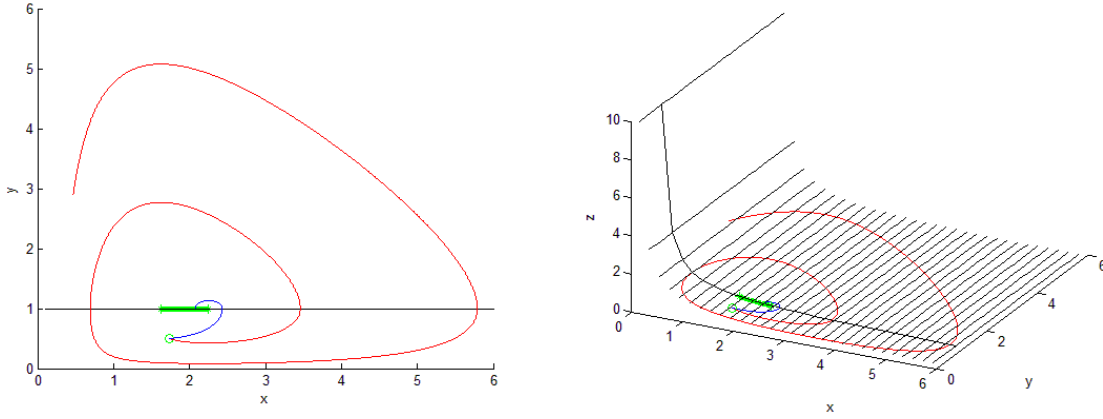


Рис. 4: Траектория  $\bar{x}_{ext}$  изображена красной линией,  $\bar{x}_{int}$  – синей.

### 3.2 Множество достижимости из положения равновесия. Синтез управления.

Рассмотрим случай, когда начальное состояние принадлежит множеству положений равновесия  $X_e \times Y_e$ .

Рассмотрим две специальные траектории, для которых моменты переключения управления и моменты пересечения ими прямой  $y = y_e = \frac{r_1}{b}$  совпадают. Обозначим  $\bar{x}_r$  – траекторию, соответствующую управлению  $u_r = U_{max}\chi(\frac{r_1}{b} - y)$  и начальному значению сопряженной переменной  $(-1, 0)$ , то есть на некотором начальном промежутке времени  $u_r = U_{max}$ . И  $\bar{x}_l$  – траекторию, соответствующую управлению  $u_l = U_{max}\chi(\frac{r_1}{b} - y)$ , но уже начальному значению сопряженной переменной  $(1, 0)$ , то есть на некотором начальном промежутке времени  $u_l = 0$ .

Обозначим через  $t_0 = t_r^0 < t_r^1 < t_r^2 < \dots$  и  $t_0 = t_l^0 < t_l^1 < t_l^2 < \dots$  – последовательные моменты пересечения соответствующими траекториями линию  $y = y_e = \frac{r_1}{b}$ . Заметим, что в силу теоремы 2 и следствия 1, а так же исходя из того, что траектории  $\bar{x}_r$  и  $\bar{x}_l$  ведут себя так же как траектория  $\bar{x}_{ext}$ , моменты времени определены корректно. И легко показать, что  $x_l(t_l^{2j-2}) < x_r(t_r^{2j-1}) < x_l(t_l^{2j})$  и  $x_r(t_r^{2j-2}) > x_l(t_l^{2j-1}) > x_r(t_r^{2j})$ , где  $j = 1, 2, \dots$ . Так же обозначим через  $S_r^1, S_r^2, \dots$  и  $S_l^1, S_l^2, \dots$  – множества, изображенные на рисунке 5, ограниченные траекториями  $\bar{x}_r, \bar{x}_l$  и прямой  $y = y_e = \frac{r_1}{b}$ .

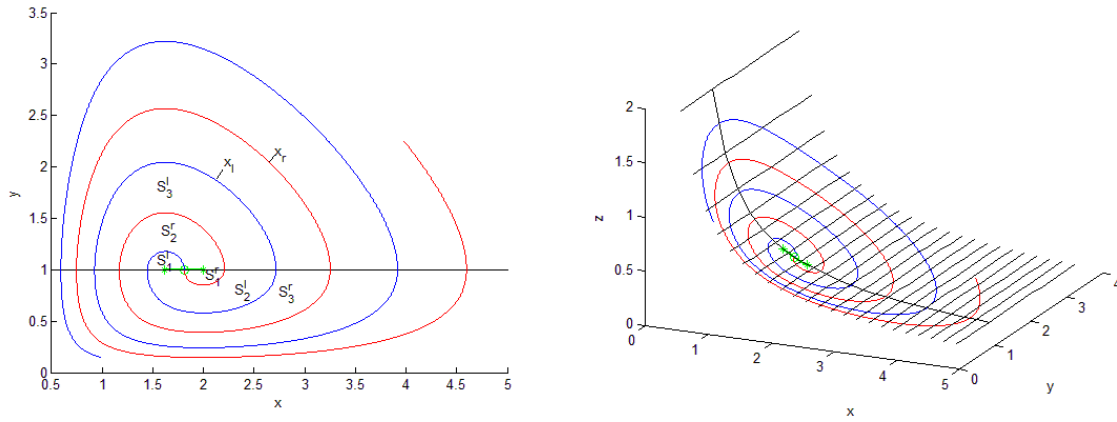


Рис. 5: Семейство множеств  $S_{r,l}^i$ . Траектория  $\bar{x}_r$  изображена красным цветом,  $\bar{x}_l$  – синим.

Тогда траектории, удовлетворяющие принципу максимума, лежат внутри некоторого отдельного множества  $S_{r,l}^i$  и имеют ровно одно переключение на каждом из множеств. Причем для траекторий лежащих выше прямой  $y = y_e$  переключение происходит с  $u = 0$  на  $u = U_{max}$ , а для лежащих ниже этой прямой наоборот – с  $u = U_{max}$  на  $u = 0$ .

Из описанных свойств системы и сделанных построений следует следующее утверждение:

**Утверждение 7** *Множество точек, в которые можно попасть из множества положений равновесия не более чем за  $n$  переключений ограничено множеством:  $\cup_{i=1}^{n+1} S_i^l \cup S_i^r$ .*

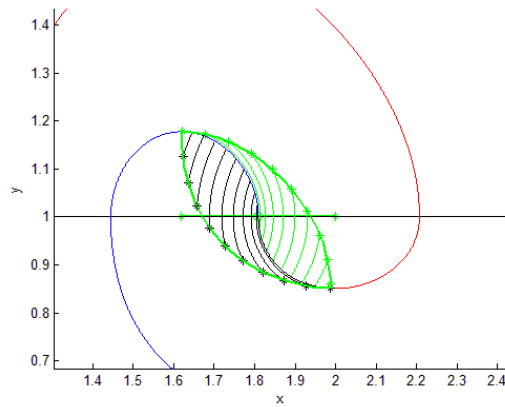


Рис. 6: Множество достижимости из положения равновесия.

На рисунке 6 продемонстрировано множество достижимости, причем оно является доступным за одно переключение.

Далее можно построить кусочно-гладкую линию переключения, аналогично тому, как это описано в [5] на страницах 469-472 и обосновано в теоремах 5 и 6 на страницах 470 и 472 соответственно. На рисунке 7 красным изображены дуги  $W_r^1, W_r^2, \dots$  и синим –



$W_l^1, W_l^2, \dots$ , где дуга  $W_r^1$  соответствует траектории  $\bar{x}_r$  до момента  $t_r^1$  первого пересечения прямой  $y = y_e$ , дуга  $W_l^1$  соответствует траектории  $\bar{x}_l$  до момента  $t_l^1$  первого пересечения прямой  $y = y_e$ . Далее, дуги  $W_r^i, W_l^i$  получены путем отражения дуг  $W_l^{i-1}, W_r^{i-1}$  соответственно.

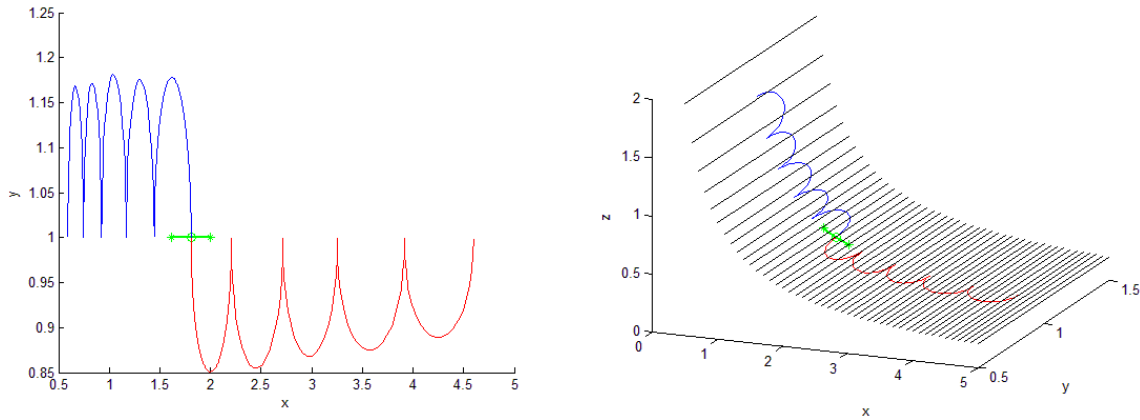


Рис. 7: Линия переключения.

Совокупность линий переключения для всевозможных инвариантных поверхностей даёт поверхность переключения.

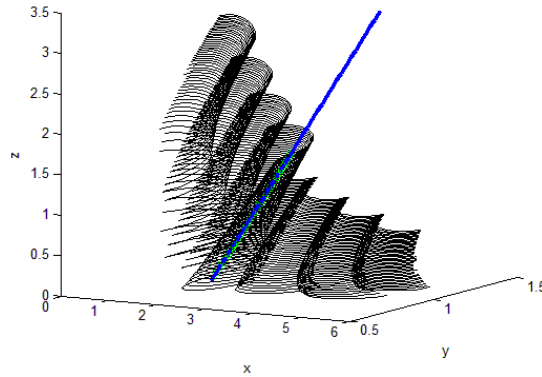


Рис. 8: Поверхность переключения.

Исходя из вышеизложенных построений можно в попятном времени построить позиционное управление, переводящее систему из произвольной точки в точку  $(x_0, y_0)$ , лежащую на множестве положений равновесия. Вид этого управления следующий:

$$u_E^*(t) = \begin{cases} 0, & (x, y)^T \text{ выше линии переключения} \\ U_{max}, & (x, y)^T \text{ ниже линии переключения} \\ -r_2 + cx_0 - dKx_0^{-\frac{c}{b}}, & (x, y)^T = (x_0, y_0)^T. \end{cases}$$

И справедливо утверждение:

**Утверждение 1** Пусть  $\bar{x}_0$  принадлежит множеству положений равновесия, тогда  $X(t_1, t_0, \bar{x}_0) \subseteq X(t_2, t_0, \bar{x}_0)$ , где  $t_1 < t_2$ .

Ниже приведена иллюстрация демонстрирующая это свойство системы:

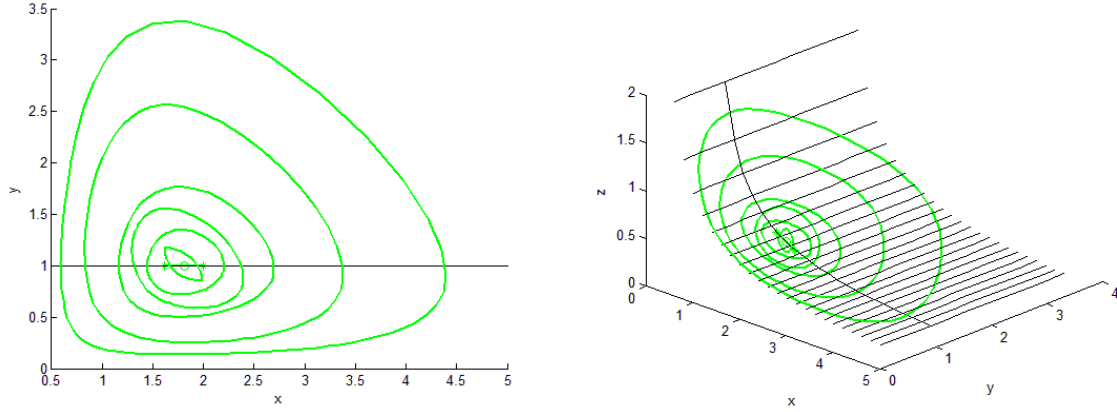


Рис. 9: Множества достижимости из положения равновесия.

### 3.3 Общий случай.

Вернёмся к случаю, когда начальная точка не лежит на множестве положений равновесия.

Рассмотрим ранее введенные траектории  $\bar{x}_{ext}[\cdot]$  и  $\bar{x}_{int}[\cdot]$ . Траектория  $\bar{x}_{int}[\cdot]$  после первого попадания на множество положений равновесия отразится от него и далее будет совпадать либо с  $\bar{x}_r[\cdot]$ , либо с  $\bar{x}_l[\cdot]$ , в зависимости от того, с какого значения управления происходит переключение. Таким образом после этого траектория  $\bar{x}_{int}[\cdot]$  будет обладать свойствами соответствующей траектории  $\bar{x}_{r,l}[\cdot]$ . Это позволяет ввести множества изображенные на рисунке 10.

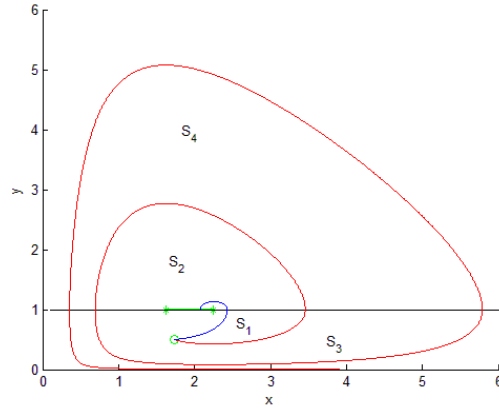


Рис. 10:  $\bar{x}_{int}$  обозначена синим цветом,  $\bar{x}_{ext}$  — красным.

Для множеств  $S_1, S_2, \dots$  справедливы включения:  $S_{2i-1} \subset S_{2j-1}, S_{2i} \subset S_{2j}, 1 \leq i < j$ . И справедливо утверждение:

**Утверждение 2** Для любого  $T > t_0$  найдётся число  $n \in \mathbb{N}, n > 1$  такое, что  $X[T] \subseteq S_{n-1} \cup S_n$ . И на каждом множестве управление имеет ровно одно переключение, за исключением, быть может, множеств  $S_1$  и  $S_2$ .

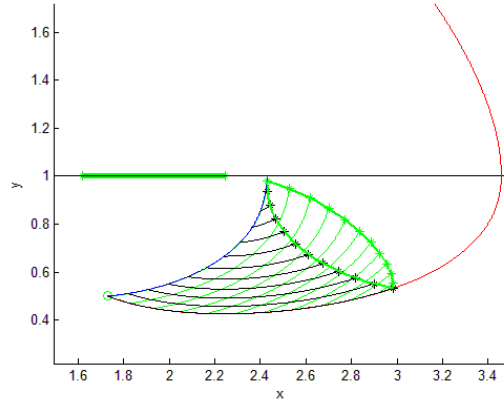


Рис. 11: Множество достижимости из положения равновесия.

Далее приведены иллюстрации поведения множества достижимости при начальном положении, не лежащем на множестве положений равновесия:

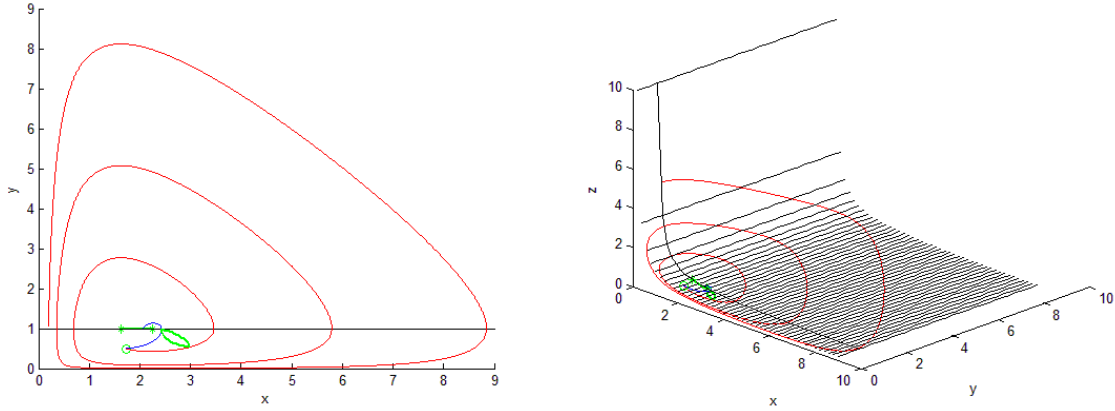


Рис. 12: Множества достижимости.

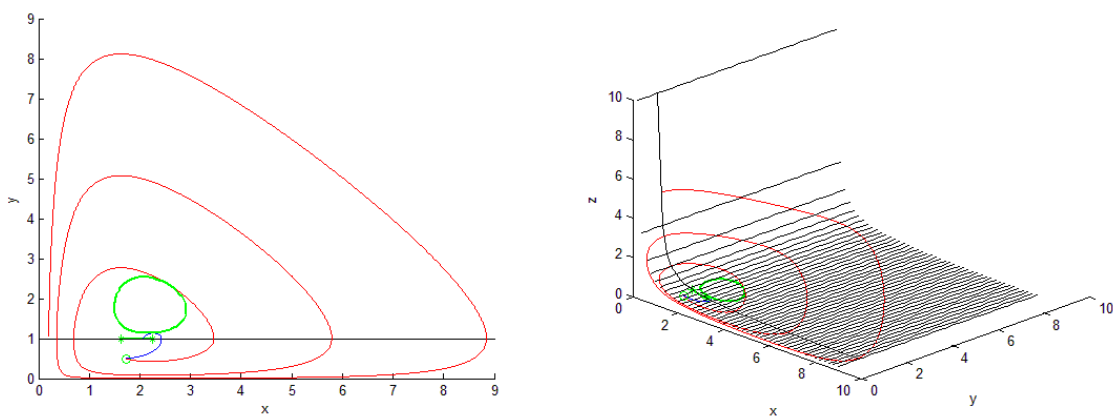


Рис. 13: Множества достижимости.

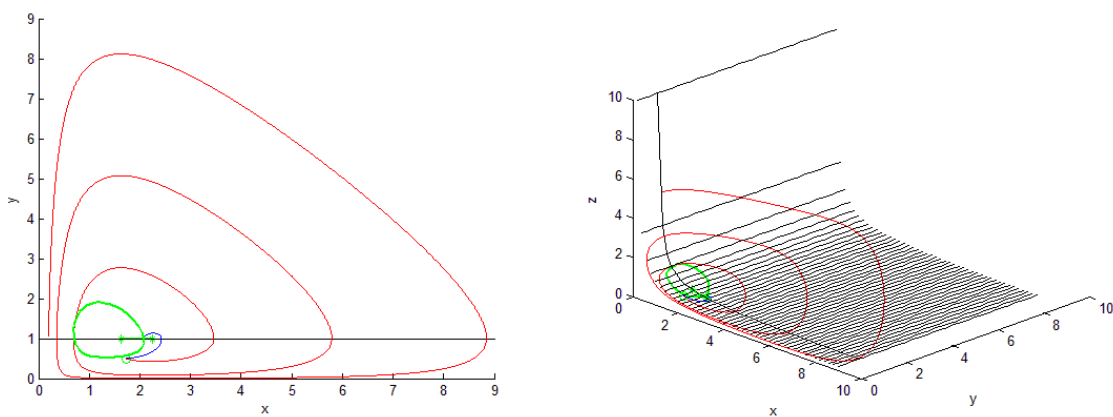


Рис. 14: Множества достижимости.

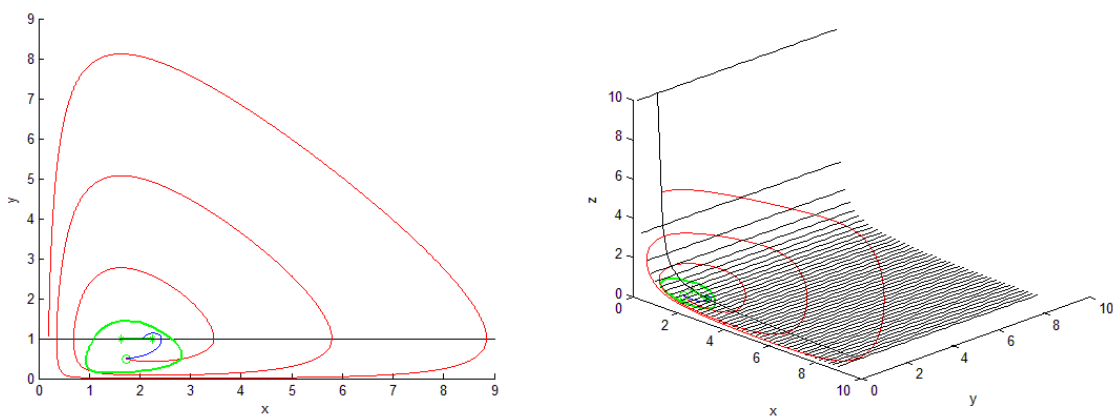


Рис. 15: Множества достижимости.

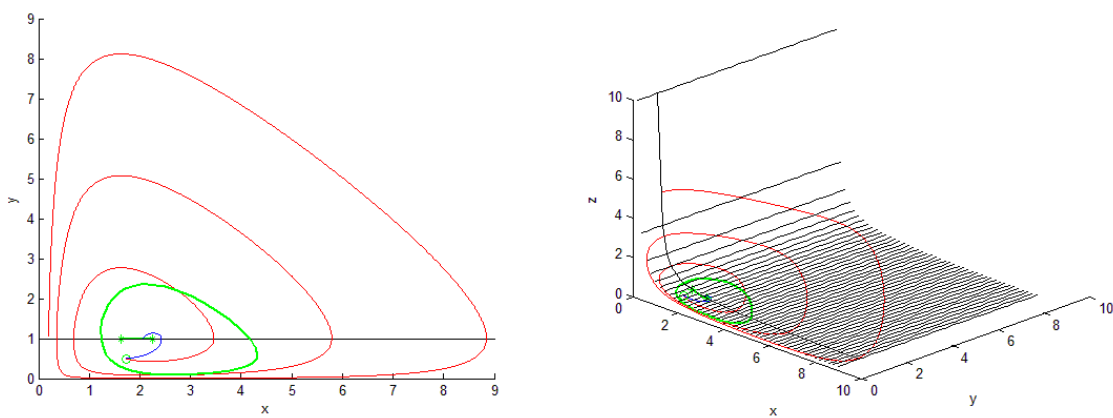


Рис. 16: Множества достижимости.

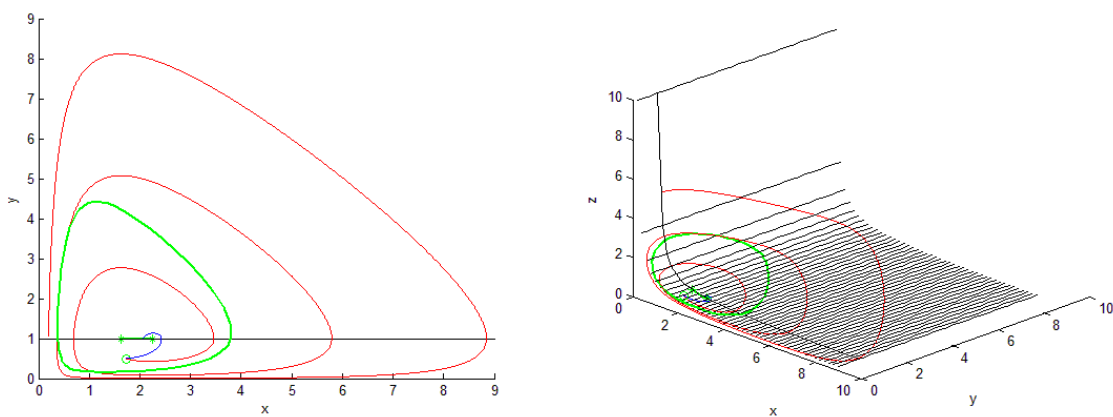


Рис. 17: Множества достижимости.

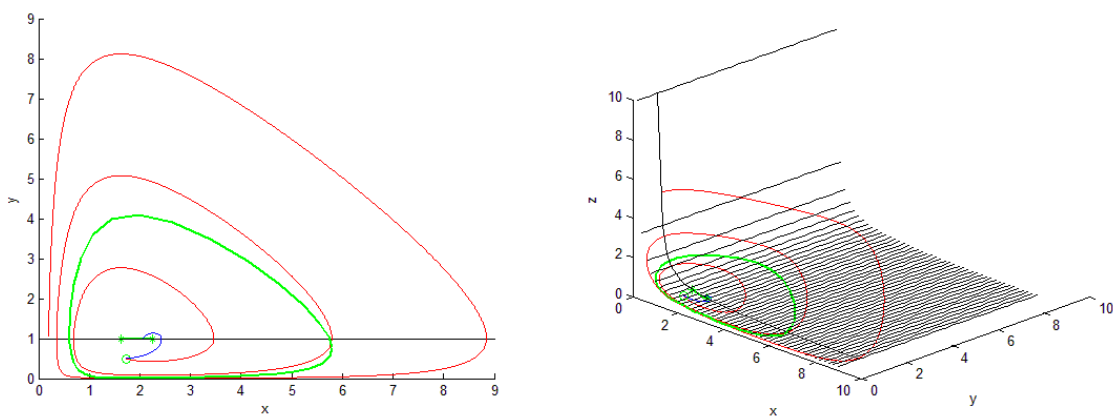


Рис. 18: Множества достижимости.

#### 4 Случай $er_1 \neq br_3$ .

Ранее был получен вид поверхностей, на которых располагается множество достижимости в каждый момент времени:  $z - K(t)x^{-\frac{e}{b}} = 0$ . И было найдено поведение функции  $K(t)$ :

$$\frac{d}{dt}K = K \left( \frac{e}{b}r_1 - r_3 \right).$$

Видно, что при  $er_1 < br_3$  функция  $K(t)$  убывает с экспоненциальной скоростью, и множество достижимости спускается по семейству этих поверхностей. Далее приведена иллюстрация, демонстрирующая описанную особенность множества достижимости, при  $er_1 < br_3$ , то есть при экспоненциально убывающих значениях  $K(t)$ .

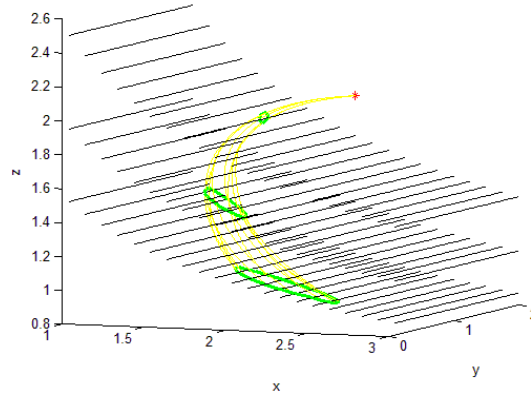


Рис. 19: Множества достижимости, при убывающем  $K(t)$ .

Также можно рассмотреть еще одно семейство поверхностей, на которых будут располагаться траектории при постоянных управлениях. Запишем утверждение:

**Утверждение 8** Пусть  $er_1 < br_3$ . Положим  $G_u(x(t), y(t), z(t)) = by - r_1 \ln(y) + cx - (r_2 + u) \ln(x) + d \frac{b}{e} z$ . Тогда для всех решений системы (1), при постоянном управлении  $u$  справедливо:

$$\left. \frac{d}{dt} G_u(x(t), y(t), z(t)) \right|_{(1)} < 0$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_u(x(t), y(t), z(t)) &= \left( \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \\ &= (c - \frac{r_2 + u}{x})x(r_1 - by) + (b - \frac{r_1}{y})y(-(r_2 + u)y + cx - dz) + \frac{bd}{e}z(-r_3 + ey) = \\ &= dz(r_1 - r_3 \frac{b}{e}) < 0. \quad \square \end{aligned}$$

На рисунке 20 изображены поверхности  $by - r_1 \ln(y) + cx - (r_2 + u) \ln(x) + d \frac{b}{e} z = G_u$ , соответствующие различным значениям  $G_u$  и одному и тому же фиксированному управлению  $u = const$ . Причем при уменьшении значений  $G_u$  семейство поверхностей стягивается.

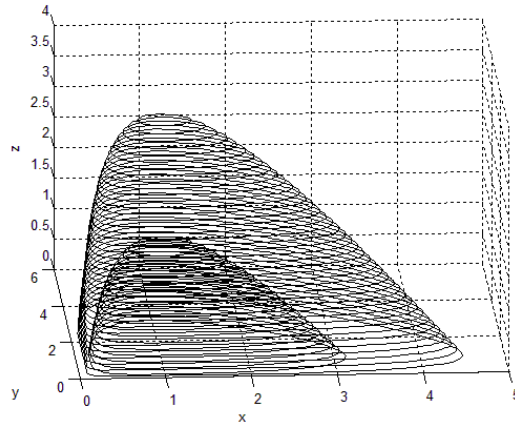


Рис. 20: Поверхности  $by - r_1 \ln(y) + cx - (r_2 + u) \ln(x) + d \frac{b}{e} z = G_u$ .

Случай  $er_1 > br_3$  аналогичен случаю  $er_1 < br_3$ , но в этом случае функция  $K(t)$  возрастает, и значения  $G_u$ , при фиксированном управлении, увеличиваются.

## Список литературы

- [1] *Lotka A. J.* Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 1920, V.6, 410–415.
- [2] *Volterra V.* Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. P.:Gauthiers-Villars, Paris, 1931
- [3] *Murray J. D* Mathematical Biology.
- [4] *Куржанский А. Б.* Лекции по курсу «Динамическое программирование и процессы управления», 2011 - 2012 г.
- [5] *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории управления, М.: НАУКА, 1972 г.
- [6] *Рублёв И. В.* Лекции по курсу «Оптимальное управление», 2010 - 2011 г.
- [7] *Базыкин А. Д* Математическая биофизика взаимодействующих популяций. Москва: НАУКА, 1985 г.
- [8] *Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П.* Динамические системы и модели биологии. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010 г.
- [9] *Kurzanski A. B., Varaiya P.* Dynamic Optimization for Reachability Problems, JOTA. 2001 Vol. 108, N 2. P.
- [10] *Yiannis T. Christodoulides, Pantelis A. Damianou* Darboux polynomials for Lotka-Volterra systems in three dimensions.
- [11] *Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А.* Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы. Изв. РАН, Теор. и сист. упр. 2003. N 3. С. 8—16.
- [12] *Lamb W. E.* Theory of an Optical Maser, Phys Rev. A, 1964, V.134, 1429.
- [13] *Laval G., Pellat R.* Plasma Physics, in Proceedings of Summer School of Theoretical Physics, Gordon and Breach, New York, 1975.
- [14] *Busse F. H.* Transitions to Turbulence Via the Statistical Limit Cycle Route, in Synergetics, Springer-Verlag, Berlin, 1978, p. 39.
- [15] *Chauvet E., Paullet J., Previte J., Walls Z.A* Lotka-Volterra Three-species Food Chain. MATHEMATICS MAGAZINE 2002 Vol. 75, N 4.
- [16] *Kie Van Ivanky Saputra.* Semi-global analysis of Lotka-Volterra systems with constant terms. 2008
- [17] *Рублёв И. В., Простяков П. В.* Построение множества достижимости системы Лотка-Вольтерра. Общий случай. 2012г.
- [18] *Alberto Isidori.* Nonlinear Control Systems. Third Edition. Springer, August 11, 1995