Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Морозова Татьяна Евгеньевна

Управление в моделях межвидового взаимодействия

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
И. В. Рублев

Москва, 2018

Содержание

1 Введение

Рассматривается модель пищевой цепи с управлением без внутривидовой конкуренции, состоящая из четырех звеньев и описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1 x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4 x_3). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x_i, $i = \overline{1,4}$ — численности популяций видов, $r_1 + u_1$ — рождаемость первого вида, $r_2, r_3 - u_2, r_4$ — смертности остальных видов, коэффициенты b_1, b_2, b_3 и c_2, c_3, c_4 отвечают за взаимодействие между популяциями. Все параметры строго положительны, а управления берутся из интервалов $U_1^* = [u_1^{min}, u_1^{max}], U_2^* = [u_2^{min}, u_2^{max}]$ соответственно. Управление можно интерпретировать как интенсивность отлова или «подкармливания» соответствующего вида в зависимости от знака.

Данная система обобщает модель хищника-жертвы, впервые введенную в работе [1], описывающей кинетику химических реакций. В дальнейшем опубликовано большое количество работ, посвященных исследованию систем без управления: [2], [3], [5], [6], [10] и др. и лишь несколько посвященных системам с управлением. Двумерный случай с управлением первой координатой исследован в [4], трехмерный частично изучен в [12]. В данной работе рассматривается одна из моделей межвидового взаимодействия типа пищевая цепь. Исследование, проведенное в [7], указывает на то, что системы четного и нечетного порядка подобного вида в отсутствии управления весьма сильно различаются по своим свойствам. А именно, в общем положении параметров модели (то есть исключая некоторые вырожденные случаи) лишь системы четного порядка имеют изолированные положения равновесия и являются биологически устойчивыми в том смысле, что ни у одного из видов численность не стремится к нулю, то есть все виды выживают. Поэтому весьма логичным представляется исследование именно четырехмерной пищевой цепи, как системы минимальной размерности, большей двух, обладающей свойством биологической устойчивости.

Управляющие параметры входят в показатели естественных роста и смертности первого и третьего вида, соответственно, так как это является обобщением двумерного случая: мы можем рассматривать четырехмерную систему, как две двумерные со введенной дополнительной связью между второй и третьей компонентой. В процессе исследования были предприняты попытки изучить систему с одним управлением, но объективные трудности привели к рассмотрению задачи именно с двумя управлениями как более простого варианта задачи на начальном этапе ее исследования.

Сложность исследования данной четырехмерной системы по сравнению с двумерной заключается в в трудности изучения поведения интегральных кривых, тогда как в модели хищник-жертва поведение траекторий полностью характеризуется первым интегралом. Вследствие этого возникает вопрос, как исследовать и решать задачу исходя лишь из свойств первого интеграла, найденного в работе [7]. Настоящая работа отвечает на этот вопрос и предлагает метод решения, исходящий из принципа уменьшения первого интеграла и построения соответствующих управлений.

Таким образом основной целью данной работы является исследование свойств рассматриваемой системы и синтез управления для задачи попадания в ε-окрестность множества положений равновесия за конечное время. Предложен и исследован метод приближения к положению равновесия и доказано, что предложенный синтез позволяет решить задачу за конечное время для любого начального положения системы.

2 Общие свойства системы

Из биологической интерпретации вытекает, что численность популяции не может быть отрицательной. В следующем утверждении будет показано, что система удовлетворяет этому свойству.

Утверждение 1. *Множество* $\left\{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_i > 0, i = \overline{1,4}\right\}$ *инвариантно относительно системы (1) .*

Доказательство.
Из системы (1) видно, что при обнулении координат, обнуляются соответственно и выражения для $\dot{x}_i$, так что координаты не могут поменять знак. Интегрируя в обратном времени, получим, что координаты не могут обнулиться.

$\square$

Рассмотрим положения равновесия (1) как функцию управления:

$$P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)), \text{ где}$$
$$P_1(u) = \frac{r_2c_4 + b_2r_4}{c_2c_4}, \quad P_2(u) = \frac{r_1 + u_1}{b_1}, \quad P_3(u) = \frac{r_4}{c_4}, \quad P_4(u) = \frac{c_3(r_1 + u_1) + (u_2 - r_3)b_1}{b_1b_3}. \tag{2}$$

Заметим, что от управления существенно зависят только вторая и четвертая координата, поэтому в дальнейшем будем обозначать $P(u) = (P_1, P_2(u), P_3, P_4(u))$.

Множество положений равновесия $\bar{P} = \{P(u) \colon u \in U^*\}$ представляет из себя параллелограмм в пространстве (x_2, x_4). В нашей работе мы предполагаем его непустоту, для этого введем ограничение на параметры задачи:

$$P_4(u_1^{min}, u_2^{min}) > 0.$$

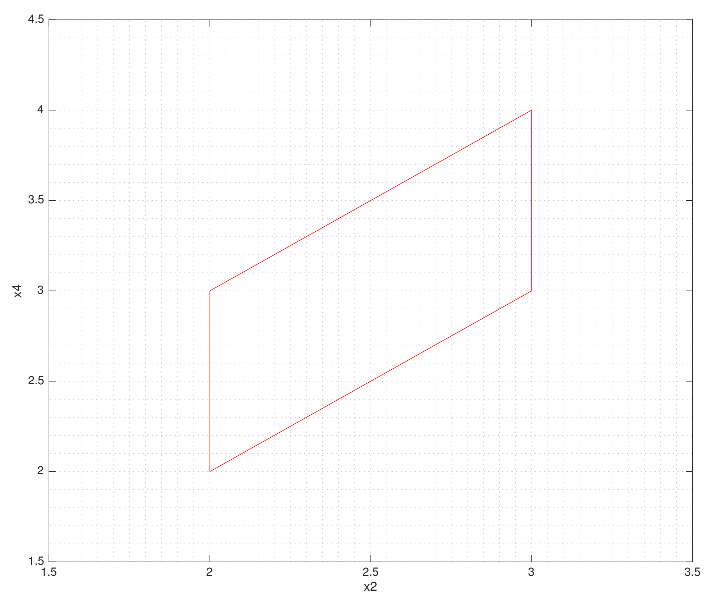

Рис. 1: Множество положений равновесия.

Наша задача состоит в исследовании возможности перевода системы (1) во множество $\bar{P}$ при кусочно-непрерывном управлении из U_1^*, U_2^*.

В работе [7] найден первый интеграл четырехмерной системы без управления:

$$K(x) = x_1 - P_1 \ln x_1 + \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2 \ln x_2) + \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3) + \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4 \ln x_4).$$

Подставив вместо P $P(u)$, получим функцию, которая будет являться первым интегралом системы (1) при постоянном управлении:

$$K(x|u) = x_1 - P_1 \ln x_1 + \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u) \ln x_2) + \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3) + \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u) \ln x_4). \quad (3)$$

Будем рассматривать $K(x|u)$ как функцию фазовой переменной с параметром u. Докажем, что она сильно выпукла и имеет минимум в точке $(P(u))$.

Утверждение 2. *Функция $K(x|u)$ сильно выпукла на любом выпуклом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^4_+$, а ее глобальный минимум достигается в точке $P(u)$.*

Доказательство.
Рассмотрим гессиан функции $K(x|u)$:

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{P_1}{x_1^2},\ \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2^2},\ \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3 x_3^2},\ \frac{P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4^2}\right).$$

Очевидно, он больше нуля при всех $x_i > 0$, следовательно, функция выпукла.
Обозначим

$$K_1(x_1) = x_1 - P_1 \ln x_1,\ K_2(x_2|u) = \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u) \ln x_2),$$

$$K_3(x_3) = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3),\ K_4(x_4|u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u) \ln x_4),$$

тогда $K(x|u) = K_1(x_1) + K_2(x_2|u) + K_3(x_3) + K_4(x_4|u)$. Поскольку

$$K_1'(x_1) = 1 - \frac{P_1}{x_1},\ K_2'(x_2|u) = \frac{b_1}{c_2} - \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2},$$

$$K_3'(x_3) = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} - \frac{b_1 b_2 P_3}{c_2 c_3 x_3},\ K_4'(x_4|u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} - \frac{b_1 b_2 b_3 P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4},$$

глобальный минимум K_i достигается при $x_i = P_i$, следовательно, глобальный минимум $K(x|u)$ достигается в точке $P(u)$.
Докажем сильную выпуклость. Возьмем $x_i \leqslant \mu, i = \overline{1,4}$, где $\mu \geqslant \max\left\{P_i : i = \overline{1,4}\right\}$. Тогда $H \geqslant \delta \cdot I$, где

$$\delta = \min\left(P_1, \frac{P_2(u)b_1}{c_2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3}, \frac{P_4(u) b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}\right)/\mu^2.$$

Таким образом $\langle Hx, x\rangle \geqslant \langle \delta I x, x\rangle = \delta\|x\|^2$, что и завершает доказательство.

□

Следствие. Приближение к положению равновесия равносильно уменьшению $K(x|u)$.

Если рассматривать задачу быстродействия для данной системы, то ниже доказано утверждение, которое говорит о том, что особых режимов принципа максимума Понтрягина нет.

Утверждение 3. *В системе (1) в области $\mathbb{R}^4_+$ не могут возникать особые режимы управления.*

Доказательство.
Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для нашей системы.

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x_1(r_1+u_1-b_1x_2)+\psi_2 x_2(-r_2-b_2x_3+c_2x_1)+\psi_3 x_3(-r_3+u_2-b_3x_4+c_3x_2)+\psi_4 x_4(-r_4+c_4x_3),$$

где $\psi(t) \in C,\ \psi(t) \neq 0$ и удовлетворяет сопряженной системе системе:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -(\psi_1(r_1 + u - b_2x_2) + \psi_2 x_2 c_2), \\ \dot{\psi}_2 = -(-b_1\psi_1 x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1) + \psi_3 x_3 c_3), \\ \dot{\psi}_3 = -(-b_2\psi_2 x_2 + \psi_3(-r_3 + u_2 - b_3x_4 + c_3x_2) + \psi_4 x_4 c_4), \\ \dot{\psi}_4 = -(b_3\psi_3 x_3 + \psi_4(-r_4 + c_4x_3)). \end{cases}$$

Из принципа максимума для задачи быстродействия $H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = \sup\limits_{u \in U^*} H(\psi, x, u)$.

Посчитаем производную H по u :

$$H'_u = (\psi_1 x_1, \psi_3 x_3) \text{ откуда } u_1^* = \begin{cases} u_1^{max}, & \psi_1 x_1 \geqslant 0, \\ u_1^{min}, & \psi_1 x_1 < 0. \end{cases},\ \ u_2^* = \begin{cases} u_2^{max}, & \psi_3 x_3 \geqslant 0, \\ u_2^{min}, & \psi_3 x_3 < 0. \end{cases}$$

Особый режим будет возникать, если хотя бы одна из компонент управления определяется неоднозначно, то есть либо $\psi_1 x_1 = 0$, либо $\psi_3 x_3 = 0$ на ненулевом промежутке времени. Так как в нашей системе x_1 и x_3 положительны, учитываются только ψ_1, ψ_3.

Рассмотрим оба варианта.

1. Пусть $\psi_1(t) = 0, t \in [t_1 t_2]$. Рассмотрим последовательно $\dot{\psi}_i$ и убедимся, что все сопряженные переменные нулевые.

   Если $\psi_1(t) = 0$ на промежутке $[t_1, t_2]$, то $\dot{\psi}_1 = 0$ на этом же временном отрезке. Но тогда из первого сопряженного уравнения $\psi_2 = 0$, следовательно и $\dot{\psi}_2 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$, а тогда из второго сопряженного уравнения $\psi_3 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$. Аналогично $\dot{\psi}_3 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$ и из третьего сопряженного уравнения $\psi_4 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$, что противоречит невырожденности $\psi(t)$.

2. Пусть $\psi_3(t) = 0, \psi_1(t) \neq 0, t \in [t_1 t_2]$, тогда и $\dot{\psi}_3(t) = 0$ на том же временном отрезке. Таким образом $-b_2\psi_2 x_2 + \psi_4 x_4 c_4 = 0$. Возьмем производную по времени от этого выражения:

$$\begin{aligned} 0 = -b_2(\dot{\psi}_2 x_2 + \psi_2 \dot{x}_2) + c_4(\dot{\psi}_4 x_4 + \psi_4 \dot{x}_4) = \\ = -b_2(-x_2(-b_1\psi_1 x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1)) + \psi_2 x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1)) + \\ + c_4(\psi_4 x_4(-r_4 + c_4x_3) + \psi_4 x_4(-r_4 + c_4x_3)) = -b_1 b_2 x_1 x_2 \psi_1. \end{aligned}$$

   Но $x_1, x_2, \psi_1 \neq 0$, а значит, мы получили противоречие, что и завершает доказательство.

□

Решая поставленную задачу, пользоваться ПМП затруднительно в силу фактической невозможности проинтегрировать соответствующую гамильтонову систему или хотя бы получить какую-то информацию о поведении ее траекторий. Поэтому далее мы будем пользоваться другой схемой решения. Как будет показано ниже, в системе возникают скользящие режимы, что говорит о том, что соответствующие траектории не будут являться оптимальными по быстродействию, однако будет доказано, что мы можем решить задачу за конечное время.

3 Синтез управления с применением первого интеграла системы

Предложен способ построения управления таким образом, чтобы уменьшать $K(x|u)$ и тем самым приближаться к положению равновесия. Метод несколько схож с методом функций Ляпунова, изложенным в классической работе [8]. Посчитаем производную $\frac{dK(x|u^0)}{dt}$ при некотором $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ в силу системы (1) :

$$
\begin{aligned}
\frac{dK(x|u_0)}{dt} &= \frac{\partial K(x|u_0)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial K(x|u_0)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial K(x|u_0)}{\partial x_3}\dot{x}_3 + \frac{\partial K(x|u_0)}{\partial x_4}\dot{x}_4 = \\
&= -\frac{1}{c_2c_3c_4}\big((u_2-u_2^0)(b_1b_2(r_4-c_4x_3)) + c_3(u_1-u_1^0)(b_2r_4+c_4r_2-c_2c_4x_1)\big) = \\
&= \frac{b_1b_2}{c_2c_3}(u_2-u_2^0)(x_3-P_3) + (u_1-u_1^0)(x_1-P_1) \to \min_{u_1\in U_1^*, u_2\in U_2^*}
\end{aligned}
$$

Заметим, что равновесие по x_1 и x_3 разделяет все пространство на четыре области, в каждой из которых будет свой минимизатор.

1. В области $x_1 > P_1$, $x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}$, $u_1^0 = u_1^{max}$, $u_2 = u_2^{min}$, $u_2^0 = u_2^{max}$.
2. В области $x_1 > P_1$, $x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}$, $u_1^0 = u_1^{max}$, $u_2 = u_2^{max}$, $u_2^0 = u_2^{min}$.
3. В области $x_1 < P_1$, $x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}$, $u_1^0 = u_1^{min}$, $u_2 = u_2^{min}$, $u_2^0 = u_2^{max}$.
4. В области $x_1 < P_1$, $x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}$, $u_1^0 = u_1^{min}$, $u_2 = u_2^{max}$, $u_2^0 = u_2^{min}$.

Введем 4 функции:

$$K_1(x) = K(x|u_1^{min}, u_2^{min}),\ K_2(x) = K(x|u_1^{max}, u_2^{min}),$$

$$K_3(x) = K(x|u_1^{min}, u_2^{max}),\ K_4(x) = K(x|u_1^{max}, u_2^{max}).$$

Беря управление, минимизирующее производную $\frac{dK(x|u^0)}{dt}$ в соответствующей области, мы будем уменьшать три функции, а четвертая будет постоянной. Процесс будет повторяться до тех пор, пока мы не попадем на положение равновесия, где все четыре функции станут постоянными.

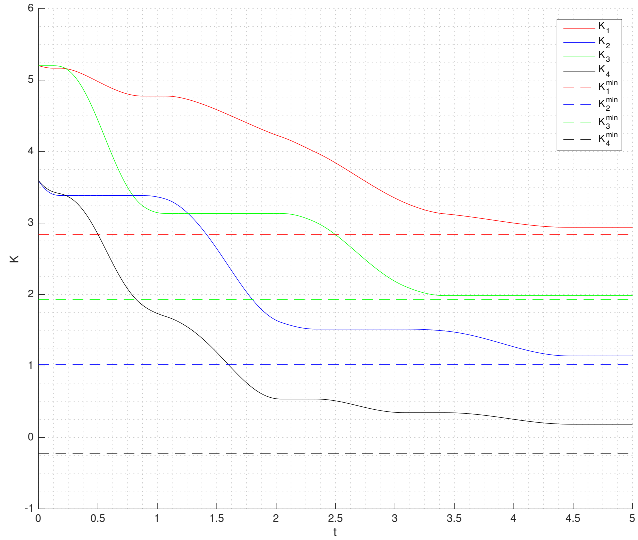

Рис. 2: $K_i(x|u), i = \overline{1,4}$.

Соответствующие фазовые координаты:

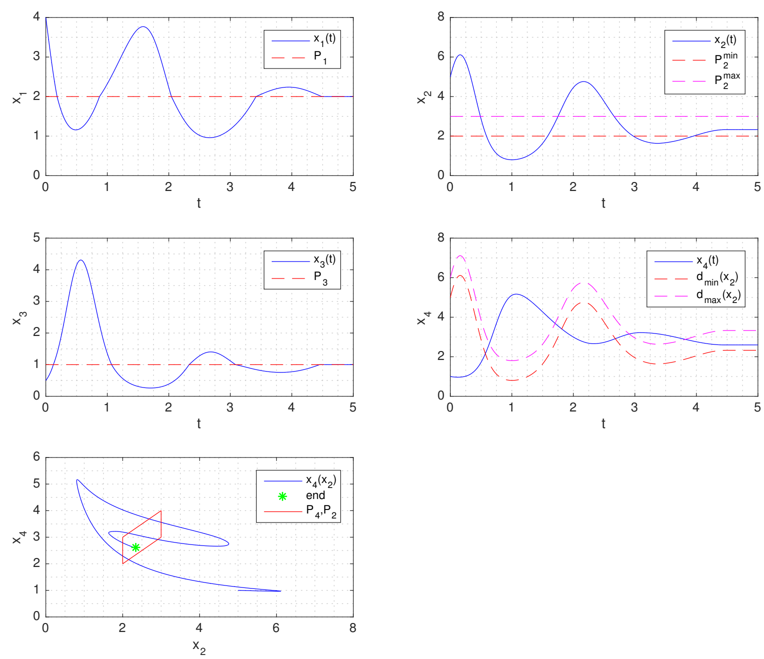

Рис. 3: Фазовые координаты.

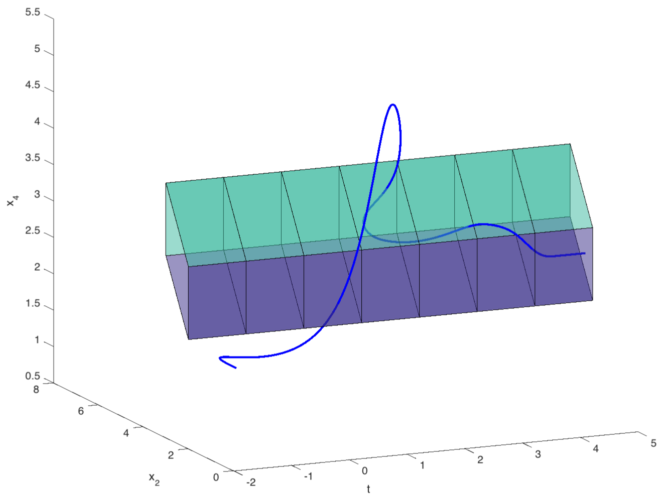

Рис. 4: Траектория в терминах (t, x_2, x_4).

4 Скользящие режимы

Особенностью этого метода является то, что неопределенность возникает на самих гиперповерхностях $x_1 = P_1, x_3 = P_3$. В [9] рассмотрены дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, в которых возникают скользящие режимы. Рассмотрим, в каких случаях они возникают в нашей системе, и регуляризуем скользящий режим таким образом, чтобы не уходить с линии переключения.

Для начала кратко опишем, в каких случаях в системе дифференциальных уравнений возникают скользящие режимы, и приведем описание метода Филиппова.

Перепишем систему в виде:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t) < 0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t) > 0, \end{cases}$$

где $\sigma(x,t) = 0$ — поверхность разрыва правой части уравнения.

Необходимое и достаточное условие скользящего режима на отрезке $x \in [a,b]$ в этом случае будет:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\sigma \to 0+0} \dfrac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_2(x) < 0 \\ \lim\limits_{\sigma \to 0-0} \dfrac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_1(x) > 0. \end{cases} \quad \forall x \in [a,b] \subset \{x \colon \sigma(x,t) = 0\}$$

Таким образом мы можем рассматривать динамическую систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t) < 0 \\ f_s(x), & \sigma(x,t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t) > 0. \end{cases}$$

Для этого применим метод продолжения Филиппова:

$$f_s(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x), \text{ где}$$
$$\alpha \in [0,1] : \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_s(x) = 0$$
$$\alpha = \frac{\langle \nabla(\sigma), f_1 \rangle}{\langle \nabla(\sigma), f_1 - f_2 \rangle}.$$

В этом случае мы будем выбирать управление $u = u^c$ таким образом, чтобы двигаться вдоль поверхности $\sigma(x,t) = 0$ некоторое положительное время, а именно, до того момента, когда нарушится условие скользящего режима.

Будем рассматривать отдельно случай скользящего режима по первой координате и по третьей.

4.1 Скользящий режим по x_1.

Утверждение 4. *Пусть в (1) нет скользящего режима по x_3. Тогда скользящий режим по x_1 возникает при*

$$\begin{cases} x_1 = P_1, \\ P_2(u_1^{min}) < x_2 < P_2(u_1^{max}). \end{cases}$$

Если положить $u_1 = u_1^c = b_1 x_2 - r_1$, то разрыв в правой части будет устранен.

Доказательство.

В этом случае $f_1(x) = f(x, u_1^{max}, u_2^0)$, $f_2(x) = f(x, u_1^{min}, u_2^0)$, $\sigma(x,t) = x_1 - P_1$. Тогда $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = [1,0,0,0]^T$, $\langle \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}, f_1(x) \rangle = x_1(r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2)$, $\langle \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}, f_2(x) \rangle = x_1(r_1 + u_1^{min} - b_1 x_2)$.

Мы предполагаем, что по x_3 скользящего режима нет, и вторая компонента управления определяется однозначно. Ниже будет доказано, что скольжение одновременно по обеим координатам эквивалентно решению исходной задачи.

Получим, что скользящий режим возникает при

$$\begin{cases} \lim\limits_{x_1 - P_1 \to 0+0} x_1(r_1 + u_1^{min} - b_1 x_2) < 0, \\ \lim\limits_{x_1 - P_1 \to 0-0} x_1(r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2) > 0, \end{cases}$$

откуда $P_2(u_1^{min}) < x_2 < P_2(u_1^{max})$.

То есть при таких x_2, если мы находимся вблизи гиперповерхности $x_1 = P_1$ с соответствующей стороны, у нас возникает по первой координате скользящий режим. Тогда, применяя метод Филиппова, получим

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t) < 0 \\ \alpha_1 f_1(x) + (1-\alpha_1) f_2(x), & \sigma(x,t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \begin{cases} f(x, u_1^{max}, u_2^0), & \sigma(x,t) < 0 \\ f(x, u_1^c, u_2^0), & \sigma(x,t) = 0 \\ f(x, u_1^{min}, u_2^0), & \sigma(x,t) > 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2}{u_1^{max} - u_1^{min}},$$
$$u_1^c = \alpha_1 u_1^{min} + (1-\alpha_1) u_1^{max} = b_1 x_2 - r_1.$$

□

4.2 Скользящий режим по x_3.

Приведем аналогичное утверждение про скользящий режим по третьей координате.

Утверждение 5. *Пусть в (1) нет скользящего режима по x_1. Тогда скользящий режим по третьей координате возникает, если*

$$\begin{cases} x_3 = P_3, \\ d_{min}(x_2) = \dfrac{c_3x_2 - r_3 + u_2^{min}}{b_3} < x_4 < \dfrac{c_3x_2 - r_3 + u_2^{max}}{b_3} = d_{max}(x_2). \end{cases}$$

Если положить $u_2 = u_2^c = r_3 + b_3x_4 - c_3x_2$, то разрыв в правой части будет устранен.

Доказательство.

В этом случае $f_1(x) = f(x, u_1^0, u_2^{max}),\ f_2(x) = f(x, u_1^0, u_2^{min}),\ \sigma(x,t) = x_3 - P_3$. Тогда $\frac{\partial\sigma}{\partial x} = [0,0,1,0]^T,\ \langle\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x}, f_1(x)\rangle = x_3(-r_3 + u_2^{max} - b_3x_4 + c_3x_2),\ \langle\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x}, f_2(x)\rangle = x_3(-r_3 + u_2^{min} - b_3x_4 + c_3x_2)$. Получим, что скользящий режим возникает при

$$\begin{cases} \lim\limits_{x_3 - P_3 \to 0+0} x_3(-r_3 + u_2^{min} - b_3x_4 + c_3x_2) < 0, \\ \lim\limits_{x_3 - P_3 \to 0-0} x_3(-r_3 + u_2^{max} - b_3x_4 + c_3x_2) > 0, \end{cases}$$

откуда $d_{min}(x_2) = \frac{c_3x_2 - r_3 + u_2^{min}}{b_3} < x_4 < \frac{c_3x_2 - r_3 + u_2^{max}}{b_3} = d_{max}(x_2)$.

После регуляризации получаем

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(x, u_1^0, u_2^{max}), & \sigma(x,t) < 0 \\ f(x, u_1^0, u_2^c), & \sigma(x,t) = 0 \\ f(x, u_1^0, u_2^{min}), & \sigma(x,t) > 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha_2 = \frac{-r_3 + u_2^{max} - b_3x_4 + c_3x_2}{u_2^{max} - u_2^{min}},$$

$$u_2^c = \alpha_2 u_2^{min} + (1 - \alpha_2)u_2^{max} = r_3 + b_3x_4 - c_3x_2.$$

□

Замечание 5.1. *Мы рассматриваем скользящие режимы либо по первой, либо по третьей координате, так как в случае одновременного скольжения по обеим координатам задача решена.*

Доказательство.

Пусть имеет место скользящий режим по обеим координатам. То есть

$$\begin{cases} x_1 = P_1, \\ x_2 \in [P_2^{min}, P_2^{max}], \\ x_3 = P_3, \\ x_4 \in [d_{min}(x_2), d_{max}(x_2)]. \end{cases}$$

Так как по первой и по третьей координате мы двигаемся вдоль $x_1 = P_1$ и $x_3 = P_3$ соответственно, то $\dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_3$. А так как $x_1 = P_1, x_3 = P_3$, из системы (1) получим, что $\dot{x}_2 = 0 = \dot{x}_4$, что и означает попадание в положение равновесие и полную стабилизацию системы.

□

Замечание 5.2. *Случай «отталкивания» от поверхностей разрыва правой части уравнения невозможен.*

Доказательство.

Необходимым условием для разнонаправленности векторного поля $f(x,u)$ вблизи поверхности разрыва будет

$$\begin{cases} x_2 \geqslant P_2^{max}, \\ x_2 \leqslant P_2^{min} \end{cases}$$

в первом случае и

$$\begin{cases} x_4 \geqslant d^{max}(x_2), \\ x_4 \leqslant d^{min}(x_2) \end{cases}$$

во втором. Очевидно, в обоих случаях требуемое невозможно, а значит, вблизи поверхностей $x_1 = P_1, x_3 = P_3$ возможно либо непрерывное векторное поле $f(x,u)$, либо случаи скользящих режимов по одной из координат, рассмотренные выше.

□

5 Конечность процесса

Докажем, что за конечное время мы придем в ε-окрестность равновесия.

Определение 1. *Назовем $\alpha\varepsilon$-окрестностью положения равновесия множество*

$$\bar{P}_{\bar{\alpha}}^{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ |x_1 - P_1| \leqslant \alpha_1\varepsilon, |x_3 - P_3| \leqslant \alpha_3\varepsilon, x_2 \in [P_2^{min} - \alpha_2\varepsilon, P_2^{max} + \alpha_2\varepsilon],$$

$$x_4 \in [d^{min}(x_2) - \alpha_4\varepsilon, d^{max}(x_2) + \alpha_4\varepsilon]\}\,.$$

Будем обозначать попадание в соответствующую $\alpha_i\varepsilon$-окрестность по i-ой координате $P_{\alpha_i i}^{\varepsilon}$.

Лемма 1.

$$\forall \delta_1 > 0, \delta_3 > 0 \ \exists A = A(\delta_1, \delta_2) \ :$$

$$\left|\frac{dK(x|u)}{dt}\right| > A \ \ \forall x \in \{\bar{x} \colon x_2, x_4 \in \mathbb{R}, |x_1 - P_1| > \delta_1 \textit{или}\ |x_3 - P_3| > \delta_3\}$$

Доказательство.

Если $|x_1 - P_1| > \delta_1$ или $|x_3 - P_3| > \delta_3$, то

$$\min_u \frac{dK(x|u)}{dt} \leqslant \begin{cases} -a_1 = -\delta_1(u_1^{max} - u_1^{min}), & |x_1 - P_1| > \delta_1 \\ -a_2 = -\delta_3 \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(u_2^{max} - u_2^{min}), & |x_3 - P_3| > \delta_3, \end{cases}$$

т.е.

$$\min_u \frac{dK(x|u)}{dt} \leqslant \min(-a_1, -a_2) = A.$$

Таким образом мы в явном виде нашли A, чем и завершили доказательство.

□

Лемма 2. *Пусть $x_2(t_0) \notin P_{\alpha_2 2}^{\varepsilon}$, $0 \leqslant \alpha_2' < \alpha_2$, тогда $\exists \Delta t > 0 \ : \ \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta t)\ x_2(t) \notin P_{\alpha_2' 2}^{\varepsilon}$.*

Доказательство.
Введем

$$v_2^{min} = \min\left\{x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1)\colon K(x|u) \leqslant K(x^0, u)\right\},$$
$$v_2^{max} = \max\left\{x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1)\colon K(x|u) \leqslant K(x^0, u)\right\}.$$

По Утверждению 2 $K(x|u)$ — выпукла, из [11] ее множество уровня — компакт, следовательно, на нем будут достигаться минимум и максимум непрерывной функции. Тогда $v_2^{min} \leqslant \dot{x}_2 \leqslant v_2^{max}$. Оценим время, которое понадобится x_2, чтобы дойти до $P^{\varepsilon}_{\alpha_2' 2}$. Пусть $x_2 > P_2^{max} + \alpha_2\varepsilon$. Тогда $\frac{d}{dt}x_2 \geqslant v_2^{min}$. Проинтегрировав до момента, когда $x_2 = P_2^{max} + \alpha_2'\varepsilon$, получим, что $P_2^{max} + \alpha_2'\varepsilon - (P_2^{max} + \alpha_2\varepsilon) \geqslant v_2^{min}\Delta t_2^1$, откуда, с учетом, что $v_2^{min} < 0$, искомая оценка времени будет

$$\Delta t_2^1 \geqslant \frac{(\alpha_2' - \alpha_2)\varepsilon}{v_2^{min}}.$$

Аналогично оценим время в случае, когда $x_2 < P_2^{min} - \alpha_2\varepsilon$:

$$\Delta t_2^2 \geqslant \frac{(\alpha_2 - \alpha_2')\varepsilon}{v_2^{max}}.$$

Таким образом, мы оценили $\Delta t_2 = \min(\Delta t_2^1, \Delta t_2^2) = (\alpha_2 - \alpha_2')\varepsilon \min(\frac{1}{v_2^{max}}, -\frac{1}{v_2^{min}})$ — минимальное время, за которое x_2 дойдет до $\alpha_2'\varepsilon$-окрестности P_2, если она находилась вне $\alpha_2\varepsilon$-окрестности P_2.

□

Замечание 2.1. Аналогично можно оценить минимальное время $\Delta t_1, \Delta t_3$, за которое x_1 и x_3 дойдут из $P^{\varepsilon}_{\alpha_1' 1}$ и $P^{\varepsilon}_{\alpha_3' 3}$ до $P^{\varepsilon}_{\alpha_1 1}$ и $P^{\varepsilon}_{\alpha_3 3}$ соответственно, где $0 < \alpha_i' < \alpha_i,\ i = 1, 3$.

Положим в дальнейшем $\alpha_1 = 1 = \alpha_3$.

Лемма 3. *Пусть* $|x_1(t_0) - P_1| < \varepsilon$. *Тогда* $\exists \alpha_2$: *если* $x_2(t_0) \notin P^{\varepsilon}_{\alpha_2 2}$, *то* $\exists t > t_0 : x_1(t) \notin [P_1 - \varepsilon, P_1 + \varepsilon]$.

Доказательство.
Оценим скорость x_1. Для этого разделим промежуток времени, когда x_2 находится вне P_2 на две части:

1. $x_2 > P_2^{max} + \frac{\alpha_2\varepsilon}{2}$ или $x_2 < P_2^{min} - \frac{\alpha_2\varepsilon}{2}$,
2. $x_2 \in [P_2^{min} - \frac{\alpha_2\varepsilon}{2}, P_2^{max} + \frac{\alpha_2\varepsilon}{2}]$.

Будем рассматривать первый промежуток. Для него по Лемме 2, положив $\alpha_2' = \frac{\alpha_2}{2}$, найдем Δt_2 — минимальное время, которое x_2 будет находиться в границах из пункта 1. Тогда, считая ε настолько маленьким, чтобы $P_1 - \varepsilon > 0$,

$$|\dot{x}_1| = |x_1(r_1 + u_1 - b_1x_2)| = |x_1b_1(P_2(u) - x_2)| > \frac{\alpha_2}{2}b_1\varepsilon(P_1 - \varepsilon).$$

Оценим расстояние, которое пройдет за это время x_1 :

$$S_{x_1} > \frac{\alpha_2}{2}b_1\varepsilon(P_1 - \varepsilon)\Delta t_2.$$

Потребуем, чтобы оно было больше 2ε и выведем оценку на α_2 :

$$S_{x_1} \geqslant 2\varepsilon \ \Rightarrow\ \alpha_2 \geqslant \frac{4\varepsilon}{(P_1 - \varepsilon)\varepsilon b_1\Delta t_2},$$

где $\Delta t_2 = \frac{\alpha_2}{2}\varepsilon \min(\frac{1}{v_2^{max}}, -\frac{1}{v_2^{min}})$, откуда

$$(\alpha_2)^2 \geqslant \frac{8}{(P_1 - \varepsilon)\varepsilon b_1 v_2^0},$$

где $v_2^0 = \min(\frac{1}{v_2^{max}}, -\frac{1}{v_2^{min}})$.
Таким образом мы в явном виде получили оценку на искомое α_2, что и завершает доказательство.

$\square$

Замечание 3.1. Аналогичные Леммам 2, 3 утверждения можно доказать и в случае

$$|x_3 - P_3| < \alpha_3\varepsilon,\ x_4 \in [d_{min}(x_2) - \alpha_2\varepsilon, d_{max}(x_2) + \alpha_2\varepsilon].$$

Поэтому приведем лишь моменты, которые будут отличаться для x_2 и x_4. Отличие будет в оценке скорости для x_4, где v_4^{min}, v_4^{max} следует определить следующим образом:

$$v_4^{min} = \min\left\{x_4(-r_4 + c_4x_3) \colon K(x|u) \leqslant K(x^0, u)\right\} - \frac{c_3}{b_3}v_2^{max},$$

$$v_4^{max} = \max\left\{x_4(-r_4 + c_4x_3) \colon K(x|u) \leqslant K(x^0, u)\right\} - \frac{c_3}{b_3}v_2^{min},$$

так как мы оцениваем скорость сближения x_4 и d_2.
Тогда $\Delta t_4 \geqslant \min(\Delta t_4^1, \Delta t_4^2) = \frac{\alpha_4}{2}\varepsilon v_4^0$, где $v_4^0 = \min(\frac{1}{v_4^{max}}, -\frac{1}{v_4^{min}})$. В таком случае $\alpha_4^2 \geqslant \frac{8}{(P_3-\varepsilon)\varepsilon b_3 v_4^0}$.

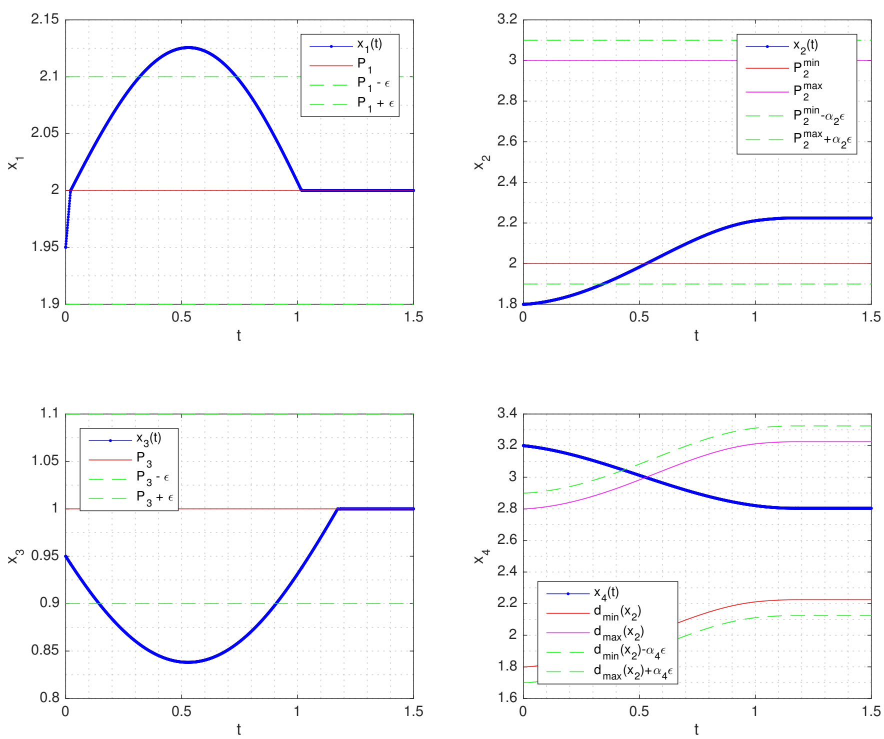

Рис. 5: Случай из Леммы 3.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое допустимое управление $u = (u_1, u_2)$ и такие $\alpha_i,\ i = \overline{1,4}$, что из любого начального положения $\bar{x}^0$ система (1) придет в $\alpha\varepsilon$-окрестность положения равновесия за конечное время.*

Доказательство.
Исходя из Леммы 1, для системы, находящейся вне $\alpha\varepsilon$-окрестности положения равновесия, существенно выделяются две ситуации:

1. когда $|x_1 - P_1| > \delta_1$ или $|x_3 - P_3| > \delta_3$,
2. когда $|x_1 - P_1| < \delta_1$, $|x_3 - P_3| < \delta_3$, но $x_2 \notin P^{\varepsilon}_{\alpha_2\, 2}, x_4 \notin P^{\varepsilon}_{\alpha_4\, 4}$.

В первом случае работает Лемма 1, и мы уменьшаем $K(x|u)$ на положительную величину. Покажем, что второй случай реализуется на протяжении конечного времени и конечное число раз.
Положим $\alpha_1 = 1 = \alpha_3$. По Лемме 3 и Замечанию 3.1 найдем α_2, α_4. Таким образом мы задали $\bar{\alpha} = [1, \alpha_2, 1, \alpha_4]$. Покажем, что в этом случае система придем в $\alpha\varepsilon$-окрестностью положения равновесия за конечное время.
Зафиксируем некоторое маленькое $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Из Леммы 3 известно, что за время Δt_2 прошло расстояние больше, чем $2\varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon_1$, а значит, существует момент времени t^* такой, что $x_1(t^*) > P_1 + \varepsilon$ или $x_1(t^*) < P_1 - \varepsilon$. Тогда по Замечанию 2.1 существует $\Delta t_1 : x_1(t^*) \notin [P_1 - \varepsilon + \varepsilon_1, P_1 + \varepsilon - \varepsilon_1]\ \forall t \in [t^*, t^* + \Delta t_1]$.
Положим $\delta_1 = \varepsilon - \varepsilon_1$. Тогда в течение времени Δt_1 выполнены условия для первой ситуации и работает Лемма 1. Таким образом мы получили, что за время Δt_1 мы уменьшили $K(x|u)$ не менее, чем на $A\Delta t_1$.
Так как $K(x|u)$ ограничена снизу, таких моментов времени, когда $|x_1 - P_1| < \varepsilon,\ x_2(t_0) \notin P^{\varepsilon}_{\alpha_2\, 2}$ будет конечное число, следовательно, за конечное время мы придем в $\alpha\varepsilon$-окрестность положения равновесия по x_1, x_2.
Абсолютно аналогичным образом можно доказать, что за конечное время система приходит в $\alpha\varepsilon$-окрестность положения равновесия по x_3, x_4.
Таким образом мы доказали, что в любой ситуации мы уменьшаем $K(x|u)$ на положительную величину, и в силу ее ограниченности снизу найдется конечный момент времени, когда она достигнет своего минимума. Это и означает, что мы пришли в $\alpha\varepsilon$-окрестностью положения равновесия, что и требовалось доказать.

$\square$

Утверждение 6. $\forall \bar{\varepsilon} > 0\ \exists \varepsilon > 0\ :\ P^{\varepsilon}_{\bar{\alpha}} \subset P^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\alpha}'}$, *где* $\bar{\alpha}' = [1, 1, 1, 1]$.

Доказательство.
Нам нужно доказать, что для сколь угодно малого $\bar{\varepsilon}$ можно подобрать такое ε, чтобы попадание в $P^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\alpha}'}$ означало бы попадание в $\bar{\varepsilon}$-окрестность положения равновесия по всем координатам. Для этого должно выполняться

$$\begin{cases} \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}, \\ \alpha_2 \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}, \\ \alpha_4 \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}. \end{cases}$$

Рассмотрим второе неравенство и докажем, что всегда можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, чтобы оно выполнялось. Так как обе части неравенства неотрицательны, возведем его в квадрат. Тогда необходимо, чтобы

$$\forall \bar{\varepsilon} > 0\ \exists \varepsilon > 0\ :\ \frac{8\varepsilon}{b_1 (P_1 - \varepsilon) v^0} \leqslant \bar{\varepsilon}^2.$$

Рассмотрим функцию $f(\varepsilon) = \frac{8\varepsilon}{b_1(P_1-\varepsilon)v^0}$:

$$f(0) = 0, \lim_{\varepsilon \to P_1} = +\inf, \; f(\varepsilon) \in C[0, P_1).$$

В силу непрерывности $f(\varepsilon)$ пробегает все промежуточные значения, значит, искомое ε всегда найдется, что и требовалось доказать.

□

6 Прочие свойства системы

Рассмотрим по какой схеме ведет себя система в скользящих режимах.

Скользящий режим по x_3.

Рассмотрим частный случай, когда

$$x_3 = P_3, \; x_4 \in [d_{min}(x_2), d_{max}(x_2)]. \tag{4}$$

Заметим что $\dot{x}_4 = 0$, так что $x_4 = x_4^*$ и наша система фактически вырождается в двумерную:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1 x_2) & = b_1 x_1(P_2(u_1) - x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1) & = c_2 x_2(x_1 - P_1). \end{cases}$$

Выражаем x_2 через x_4^* из (4):

$$c_{min}(x_4^*) = \frac{b_3 x_4^* + r_3 - u_2^{max}}{c_3} < x_2 < \frac{b_3 x_4^* + r_3 - u_2^{min}}{c_3} = c_{max}(x_4^*).$$

Таким образом наша система остается «двумерной» до тех пор, пока $x_2 \in [c_{min}(x_4^*), c_{max}(x_4^*)]$ и у нас возникает две альтернативы:

1. либо x_2 никогда не нарушает границы неравенства, и система остается «двумерной»,
2. либо существует конечный момент времени, когда одно из неравенств на x_2 будет нарушено, и система становится вновь четырехмерной.

Случай двумерной системы разобран в [4], где показано, что за конечное время система придет в положение равновесия по x_1, x_2, а значит, и в искомое положение равновесия по всем четырем координатам, что и решает исходную задачу.

Скользящий режим по x_1.

$$\begin{cases} x_1 = P_1, \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 P_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4 x_3), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = P_1, \\ \dot{x}_2 = b_2 x_2(P_3 - x_3), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2), \\ \dot{x}_4 = c_4 x_4(x_3 - P_3). \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что $\operatorname{sgn}(\dot{x}_4) = -\operatorname{sgn}(\dot{x}_2) = \operatorname{sgn}(x_3 - P_3)$.
Также заметим, что в случае $x_3 > P_3$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}_3) = \operatorname{sgn}(x_4 - d_{min}(x_2)),$$

а в случае $x_3 < P_3$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}_3) = \operatorname{sgn}(x_4 - d_{max}(x_2)).$$

Таким образом будем рассматривать 4 случая в зависимости от знака $x_3 - P_3$ и $\dot{x}_3$:

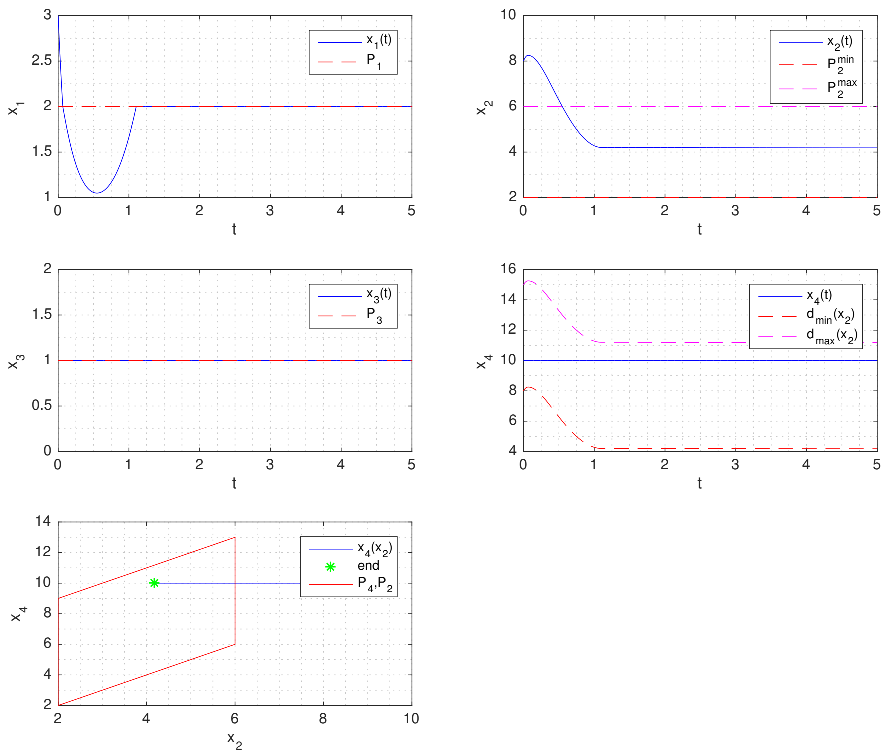

Рис. 6: Скользящий режим по x_3.

Случай 1: $x_3 > P_3,\ \dot{x}_3 > 0,$

Случай 2: $x_3 > P_3,\ \dot{x}_3 < 0,$

Случай 3: $x_3 < P_3,\ \dot{x}_3 > 0,$

Случай 4: $x_3 < P_3,\ \dot{x}_3 < 0.$

Без ограничения общности будем считать, что скользящий режим по первой координате осуществляется с начального момента времени t_0.

Случай 1.

$$x_3(t_0) > P_3,\ \dot{x}_3(t_0) > 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_0) < 0, \dot{x}_4(t_0) > 0$, а из второго — что $x_4(t_0) < d_{min}(x_2)$.

Таким образом $\dot{x}_3(t) > 0, \forall t : x_4(t) < d_{min}(x_2)$, поэтому, пока $x_4 < d_{min}(x_2)$, $x_3 - P_3 \geqslant x_3(t_0) - P_3 = a_1 > 0$. Тогда $\dot{x}_4 \geqslant c_4 x_4(t_0) a_1, \dot{x}_2 < 0 \Rightarrow d_{min}(x_2) < d_{min}(x_2(t_0))$, тогда мы можем оценить $t_1 \leqslant \frac{d_{min}(x_2(t_0)) - x_4(t_0)}{c_4 x_4(t_0) a_1}$ — время, за которое x_4 дойдет до $d_{min}(x_2)$.
Рассмотрим момент t_1.
$\dot{x}_3(t_1) = 0$, но $\ddot{x}_3(t_1) = \dot{x}_3(t_1)((-r_3 + u_2 - b_3 x_4(t_1) + c_3 x_2(t_1)) + x_3(t_1)(-b_3 \dot{x}_4(t_1) + c_3 \dot{x}_2(t_1)) < 0$, так что $\forall \Delta_1 > 0\ \dot{x}_3(t_1 + \Delta_1) < 0$, при этом $x_3(t_1 + \Delta_1) > P_3$, так что теперь возникает случай 2.

Случай 2.

$$x_3(t_1) > P_3, \dot{x}_3(t_1) < 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_1) < 0, \dot{x}_4(t_1) > 0$, а из второго — что $x_4(t_1) > d_{min}(x_2(t_1))$. Докажем, что

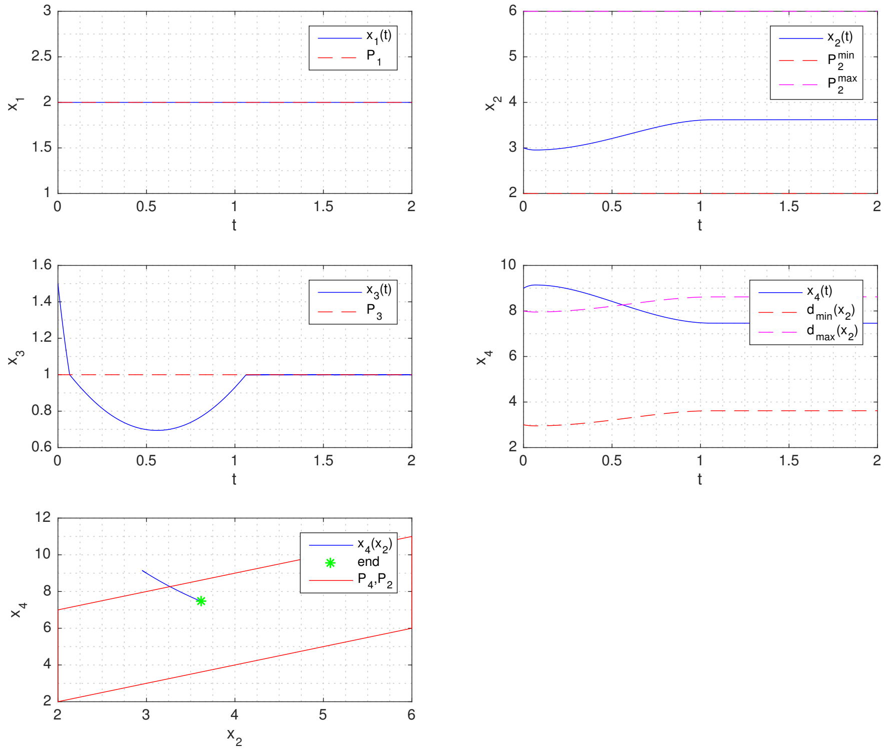

Рис. 7: Скользящий режим по x_1.

- либо $\exists t_2 < \infty : x_3(t_2) = P_3$,
- либо $\forall \varepsilon > 0 \, \exists t_2' : x_3(t) - P_3 < \varepsilon \; \forall t > t_2'$.

Предположим противное: $\forall t > t_1 \;\; x_3(t) > P_3 + \delta, \delta > 0$. Тогда $\dot{x}_2(t) < b_2 x_2 \delta < 0$, поэтому $\exists t_2^* : x_2(t_2^*) < P_2^{min}$, но тогда мы выходим из скользящего режима по первой координате, что выходит за рамки рассматриваемого случая.

Случай, когда x_3 попадает в ε-окрестность P_3 приводит нас в положение равновесия по всем координатам с точностью до бесконечно малой величины.

Если же $\exists t_2 : x_3(t_2) = P_3$, то в зависимости от того, где в этот момент находится четвертая координата, мы либо решили задачу, либо переходим к случаю 4:

- $x_4(t_2) \in [d_{min}(x_2(t_2)), d_{max}(x_2(t_2))]$, $x_3(t_2) = P_3$, $x_2(t_2) \in [P_2^{min}, P_2^{max}]$, $x_1(t_2) = P_1 \Rightarrow x(t_2) = P(u)$.
- $x_4(t_2) > d_{max}(x_2(t_2)) \Rightarrow \dot{x}_3(t_2) < 0$, $\forall \Delta_2 > 0 \; x_3(t_2 + \Delta_2) < P_3 \Rightarrow$ переходим к случаю 4, заменив $t_2 + \Delta_2$ на t_2.

Случай 4.

$$x_3(t_2) < P_3, \dot{x}_3(t_2) < 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_2) > 0, \dot{x}_4(t_2) < 0$, а из второго — что $x_4(t_2) > d_{max}(x_2(t_2))$.

Аналогично случаю 1 $\dot{x}_3(t) < 0, \forall t : x_4(t) > d_{max}(x_2)$, поэтому, пока $x_4 > d_{max}(x_2)$, $x_3 - P_3 \leqslant x_3(t_2) - P_3 = a_2 < 0$. Тогда $\dot{x}_4 \leqslant -c_4 x_4(t_2) a_2, \dot{x}_2 > 0 \Rightarrow d_{max}(x_2) > d_{max}(x_2(t_2))$, тогда $\exists t_3 : x_4(t_3) = d_{max}(x_2)$.

Рассмотрим момент t_3.

$\dot{x}_3(t_3) = 0$, но $\ddot{x}_3(t_3) = \dot{x}_3(t_3)((-r_3 + u_2 - b_3x_4(t_3) + c_3x_2(t_3)) + x_3(t_3)(-b_3\dot{x}_4(t_3) + c_3\dot{x}_2(t_3)) > 0$, так что $\forall \Delta_3 > 0 \ \dot{x}_3(t_3 + \Delta_3) > 0$, при этом $x_3(t_3 + \Delta_3) < P_3$, так что теперь возникает случай 3.

Случай 3.

$$x_3(t_3) < P_3, \dot{x}_3(t_3) > 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_3) > 0, \dot{x}_4(t_3) < 0$, а из второго — что $x_4(t_3) < d_{max}(x_2(t_3))$.

Как и в случае 2, мы можем доказать, что

- либо $\exists t_4 < \infty : x_3(t_4) = P_3$,
- либо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_4' : x_3(t) - P_3 < \varepsilon, \forall t > t_4'$.

Однако в данном случае реализуется только первый пункт, то есть всегда существует конечный момент времени, в который $x_3 = P_3$. Докажем невозможность второго пункта. Рассмотрим $\ddot{x}_3(t), \ t > t_3$.

$$\ddot{x}_3(t) = \dot{x}_3(t)((-r_3 + u_2 - b_3x_4(t) + c_3x_2(t)) + x_3(t)(-b_3\dot{x}_4(t) + c_3\dot{x}_2(t)) > 0 \ \forall t : x_3(t) < P_3,$$

так как $\dot{x}_3(t)((-r_3+u_2-b_3x_4(t)+c_3x_2(t)) \geqslant 0 \ \forall t, \ x_3(t) > 0 \ \forall t, \ \dot{x}_4(t) < 0, \dot{x}_2(t) > 0 \ \forall t : x_3(t) < P_3$. Таким образом невозможно асимптотическое приближение к положению равновесия, как в случае 2. Но как и в случае 2, дальнейшая динамика системы зависит от $x_4(t_4)$:

- Если $x_4(t_4) \in [d_{min}(x_2(t_4)), d_{max}(x_2(t_4))], \ x_3(t_4) = P_3, \ x_2(t_4) \in [P_2^{min}, P_2^{max}], \ x_1(t_4) = P_1 \Rightarrow x(t_4) = P(u)$.
- Если $x_4(t_4) < d_{min}(x_2(t_4)) \Rightarrow \dot{x}_3(t_4) > 0, \ \forall \Delta_4 > 0 \ x_3(t_4 + \Delta_4) > P_3 \Rightarrow$ переходим к случаю 1, заменив $t_4 + \Delta_4$ на t_0.

Таким образом схематично мы можем изобразить, как один случай сводится к другому, на следующей диаграмме, где состояние F означает решение задачи попадания точно во множество положений равновесия, а ε — попадание в ε-окрестность положения равновесия:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[ddd] \\
& \varepsilon & \\
& F & \\
3 \arrow[uuu] \arrow[ur] & & 4 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

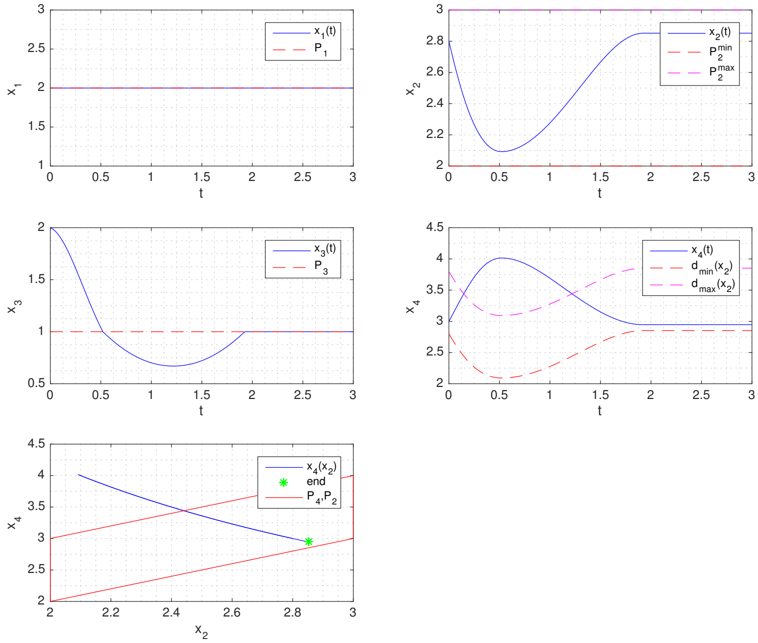

Рис. 8: Реализация случаев $2 \to 4 \to 3 \to$ F.

7 Заключение

Данная работа представляет собой первый этап в рассмотрении четырехмерной пищевой цепи, в которой управляющие параметры входят в показатели роста и смертности первого и третьего вида. Предложен метод синтеза управления для задачи попадания в произвольно малую ε-окрестность положения равновесия. Доказано, что такой синтез позволяет решить задачу за конечное время. Также исследовано поведение системы в скользящих режимах.

Дальнейшее рассмотрение задачи предполагает изучение возможности попадания в точности в положение равновесия за конечное время. Численные эксперименты позволяют предположить, что таковая возможность есть, но требует более тонкого анализа, который выходит за пределы представленной работы. Ниже представлен график зависимости времени достижения ε-окрестности от ее размеров в логарифмическом масштабе по оси x. Из него видно, что с уменьшением окрестности время увеличивается незначительно.

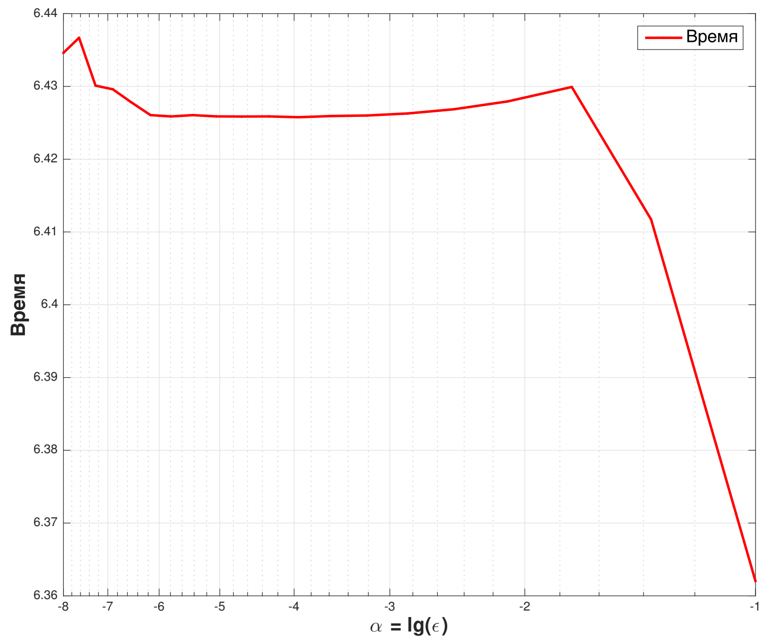

Рис. 9: Зависимость времени достижения ε-окрестности от ее размеров.

Список литературы

[1] *Lotka A. J.* Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 1920. V. 6, P. 410-415.

[2] *Murray J. D.* Mathematical Biology. Springer. 2002.

[3] *Базыкин А. Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука. 1985.

[4] *Рублев И. В., Простяков П. В.* Построение множества достижимости системы Лотка–Вольтерра. Общий случай. // 2018 (подготовлена к публикации).

[5] *Sze-Bi Hsu, Shigui Ruan, Ting-Hui Yang* Analysis of three species Lotka–Volterra food web models with omnivory // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015. V. 426. P. 659–687

[6] *Laurent Cairo* Darboux First Integral Conditions and Integrability of the 3D Lotka-Volterra System // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2000, V. 7, N 4. P. 511–531.

[7] *Massarelli N., Hoffman K., Previte J. P.* Effect of parity on productivity and sustainability of Lotka–Volterra food chains. // Mathematical Biology. December of 2014. V. 69. P. 1609–1626.

[8] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Москва. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1950.

[9] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.

[10] *Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П.* Динамические модели и модели биологии. М.: Физматлит, 2010.

[11] *Ф.П.Васъльев* Методы оптимизации. Москва. Факториал пресс. 2012. с. 176.

[12] *Н. С. Аушкап* Задача достижимости для модели межвидового взаимодействия // Дипломная работа. Кафедра системного анализа факультета ВМК МГУ. 2013