Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Выпускная квалификационная работа по теме

«Управление в моделях межвидового взаимодействия»

Студентка 415 группы
Т. Е. Морозова *Научный руководитель*
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2018

Содержание

1 Введение

Рассматривается модель пищевой цепи с управлением без внутривидовой конкуренции, состоящая из четырех звеньев и описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1 x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4 x_3). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x_i, $i = \overline{1,4}$ — численности популяций видов, $r_1 + u_1$ — рождаемость первого вида, $r_2, r_3 - u_2, r_4$ — смертности остальных видов, b_1, b_2, b_3 и c_2, c_3, c_4 отвечают за взаимодействие между популяциями. Все параметры строго положительны, а управления берутся из интервалов $U_1^* = [u_1^{min}, u_1^{max}], U_2^* = [u_2^{min}, u_2^{max}]$ соответственно.

В данной работе основной целью является исследование свойств и синтеза управления для задачи быстродействия во множество положений равновесия.

2 Общие свойства системы

Из биологической интерпретации вытекает, что численность популяции не может быть отрицательной. В следующем утверждении будет показано, что система удовлетворяет этому свойству.

Утверждение 1. *Множество* $\left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i > 0, i = \overline{1,4}\right\}$ *инвариантно относительно системы (1) .*

Доказательство.
Из системы (1) видно, что при обнулении координат, обнуляются соответственно и выражения для $\dot{x}_i$, так что координаты не могут поменять знак. Интегрируя в обратном времени, получим, что координаты не могут обнулиться.

$\square$

Рассмотрим положения равновесия (1) как функцию управления:

$$P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)), \text{ где}$$
$$P_1(u) = \frac{r_2 c_4 + b_2 r_4}{c_2 c_4}, \quad P_2(u) = \frac{r_1 + u_1}{b_1}, \quad P_3(u) = \frac{r_4}{c_4}, \quad P_4(u) = \frac{c_3(r_1 + u_1) + (u_2 - r_3) b_1}{b_1 b_3}. \tag{2}$$

Заметим, что от управления существенно зависят только вторая и четвертая координата, поэтому в дальнейшем будем обозначать $P(u) = (P_1, P_2(u), P_3, P_4(u))$.

Множество положений равновесия $E = \{P(u) \mid u \in U^*\}$ представляет из себя параллелограмм в пространстве (x_2, x_4). В нашей работе мы предполагаем его непустоту, для этого введем ограничение на параметры задачи:

$$P_4(u_1^{min}, u_2^{min}) > 0.$$

Наша задача состоит в исследовании возможности перевода системы (1) во множество E при кусочно-непрерывном управлении из U_1^*, U_2^*.

В работе [1] найден первый интеграл системы (1) :

$$K(x,u)=x_1-P_1\ln x_1+\frac{b_1}{c_2}(x_2-P_2(u)\ln x_2)+\frac{b_1b_2}{c_2c_3}(x_3-P_3\ln x_3)+\frac{b_1b_2b_3}{c_2c_3c_4}(x_4-P_4(u)\ln x_4). \quad (3)$$

Докажем, что функция $K(x,u)$ сильно выпукла по x и имеет минимум по x в точке $(P(u),u)$.

Утверждение 2. *Функция $K(x,u)$ сильно выпукла на любом выпуклом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^4_+$, а ее глобальный минимум по x достигается в точке $(P(u),u)$.*

Доказательство.
Рассмотрим гессиан функции $K(x,u)$:

$$H=\operatorname{diag}\left(\frac{P_1}{x_1^2},\ \frac{P_2(u)b_1}{c_2x_2^2},\ \frac{P_3b_1b_2}{c_2c_3x_3^2},\ \frac{P_4(u)}{c_2c_3c_4x_4^2}\right).$$

Очевидно, он больше нуля при всех $x_i>0$, следовательно, функция выпукла.
Обозначим

$$K_1(x_1)=x_1-P_1\ln x_1,\ K_2(x_2,u)=\frac{b_1}{c_2}(x_2-P_2(u)\ln x_2),$$

$$K_3(x_3)=\frac{b_1b_2}{c_2c_3}(x_3-P_3\ln x_3),\ K_4(x_4,u)=\frac{b_1b_2b_3}{c_2c_3c_4}(x_4-P_4(u)\ln x_4,$$

тогда $K(x,u)=K_1(x_1)+K_2(x_2,u)+K_3(x_3)+K_4(x_4,u)$. Поскольку

$$K_1'(x_1)=1-\frac{P_1}{x_1},\ K_2'(x_2,u)=\frac{b_1}{c_2}-\frac{P_2(u)b_1}{c_2x_2},$$

$$K_3'(x_3)=\frac{b_1b_2}{c_2c_3}-\frac{b_1b_2P_3}{c_2c_3x_3},\ K_4'(x_4,u)=\frac{b_1b_2b_3}{c_2c_3c_4}-\frac{b_1b_2b_3P_4(u)}{c_2c_3c_4x_4},$$

глобальный минимум K_i достигается при $x_i=P_i$, следовательно, глобальный минимум $K(x,u)$ достигается в точке $(P(u),u)$.
Докажем сильную выпуклость. Возьмем $x_i\leqslant\mu, i=\overline{1,4},$ где $\mu\geqslant\max\left\{P_i\mid i=\overline{1,4}\right\}$. Тогда $H\geqslant\delta\cdot I$, где

$$\delta=\min\left(P_1,\frac{P_2(u)b_1}{c_2},\frac{P_3b_1b_2}{c_2c_3},\frac{P_4(u)b_1b_2b_3}{c_2c_3c_4}\right)/\mu^2.$$

Таким образом $\langle Hx,x\rangle\geqslant\langle\delta Ix,x\rangle=\delta\|x\|^2$, что и завершает доказательство.

$\square$

Утверждение 3. *В системе (1) в области $\mathbb{R}^4_+$ не могут возникать особые режимы управления.*

Доказательство.
Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для нашей системы.

$$H(\psi,x,u)=\psi_1x_1(r_1+u_1-b_1x_2)+\psi_2x_2(-r_2-b_2x_3+c_2x_1)+\psi_3x_3(-r_3+u_2-b_3x_4+c_3x_2)+\psi_4x_4(-r_4+c_4x_3),$$

где $\psi(t)\in C,\ \psi(t)\neq 0$ и удовлетворяет сопряженной системе системе:

$$\begin{cases}\dot\psi_1=-(\psi_1(r_1+u-b_2x_2)+\psi_2x_2c_2),\\ \dot\psi_2=-(-b_1\psi_1x_1+\psi_2(-r_2-b_2x_3+c_2x_1)+\psi_3x_3c_3),\\ \dot\psi_3=-(-b_2\psi_2x_2+\psi_3(-r_3+u_2-b_3x_4+c_3x_2)+\psi_4x_4c_4),\\ \dot\psi_4=-(b_3\psi_3x_3+\psi_4(-r_4+c_4x_3)).\end{cases}$$

Из принципа максимума $H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = \sup\limits_{u \in U^*} H(\psi, x, u)$.

Посчитаем производную H по u :

$$H'_u = (\psi_1 x_1, \psi_3 x_3) \text{ откуда } u_1^* = \begin{cases} u_1^{max}, & \psi_1 x_1 \geqslant 0, \\ u_1^{min}, & \psi_1 x_1 < 0. \end{cases}, \quad u_2^* = \begin{cases} u_2^{max}, & \psi_3 x_3 \geqslant 0, \\ u_2^{min}, & \psi_3 x_3 < 0. \end{cases}$$

Особый режим будет возникать, если хотя бы одна из компонент управления определяется неоднозначно, то есть либо $\psi_1 x_1 = 0$, либо $\psi_3 x_3 = 0$ на ненулевом промежутке времени. Так как в нашей системе x_1 и x_3 положительны, учитываются только ψ_1, ψ_3.

Рассмотрим оба варианта.

1. Пусть $\psi_1(t) = 0, t \in [t_1 t_2]$. Рассмотрим последовательно $\dot{\psi}_i$ и убедимся, что все сопряженные переменные нулевые.

   Если $\psi_1(t) = 0$ на промежутке $[t_1, t_2]$, то $\dot{\psi}_1 = 0$ на этом же временном отрезке. Но тогда из первого сопряженного уравнения $\psi_2 = 0$, следовательно и $\dot{\psi}_2 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$, а тогда из второго сопряженного уравнения $\psi_3 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$. Аналогично $\dot{\psi}_3 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$ и из третьего сопряженного уравнения $\psi_4 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$, что противоречит невырожденности $\psi(t)$.

2. Пусть $\psi_3(t) = 0, \psi_1(t) \neq 0, t \in [t_1 t_2]$, тогда и $\dot{\psi}_3(t) = 0$ на том же временном отрезке. Таким образом $-b_2 \psi_2 x_2 + \psi_4 x_4 c_4 = 0$. Возьмем производную по времени от этого выражения:

$$\begin{aligned} 0 = -b_2(\dot{\psi}_2 x_2 + \psi_2 \dot{x}_2) + c_4(\dot{\psi}_4 x_4 + \psi_4 \dot{x}_4) = \\ = -b_2(-x_2(-b_1\psi_1 x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1)) + \psi_2 x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1)) + \\ + c_4(\psi_4 x_4(-r_4 + c_4 x_3) + \psi_4 x_4(-r_4 + c_4 x_3)) = -b_1 b_2 x_1 x_2 \psi_1. \end{aligned}$$

   Но $x_1, x_2, \psi_1 \neq 0$, а значит, мы получили противоречие, что и завершает доказательство.

□

Вернемся к $K(x,u)$. Уменьшая ее, мы будем приближаться к положению равновесия. Посчитаем производную $\frac{dK(x,u^0)}{dt}$ при некотором $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ в силу системы (1) :

$$\begin{aligned} \frac{dK(x,u_0)}{dt} = \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_3}\dot{x}_3 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_4}\dot{x}_4 = \\ = -\frac{1}{c_2 c_3 c_4}\big((u_2 - u_2^0)(b_1 b_2(r_4 - c_4 x_3)) + c_3(u_1 - u_1^0)(b_2 r_4 + c_4 r_2 - c_2 c_4 x_1)\big) = \\ = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(u_2 - u_2^0)(x_3 - P_3) + (u_1 - u_1^0)(x_1 - P_1). \end{aligned}$$

Заметим, что равновесие по x_1 и x_3 разделяет все пространство на четыре области, в каждой из которых будет свой минимизатор.

1. В области $x_1 > P_1, x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}$, $u_1^0 = u_1^{max}$, $u_2 = u_2^{min}$, $u_2^0 = u_2^{max}$.

2. В области $x_1 > P_1, x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}$, $u_1^0 = u_1^{max}$, $u_2 = u_2^{max}$, $u_2^0 = u_2^{min}$.

3. В области $x_1 < P_1$, $x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}$, $u_1^0 = u_1^{min}$, $u_2 = u_2^{min}$, $u_2^0 = u_2^{max}$.
4. В области $x_1 < P_1$, $x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}$, $u_1^0 = u_1^{min}$, $u_2 = u_2^{max}$, $u_2^0 = u_2^{min}$.

Введем 4 функции:

$$K_1(x) = K(x, u_1^{min}, u_2^{min}),\ K_2(x) = K(x, u_1^{max}, u_2^{min}),$$

$$K_3(x) = K(x, u_1^{min}, u_2^{max}),\ K_4(x) = K(x, u_1^{max}, u_2^{max}).$$

Беря управление, минимизирующее производную $\frac{dK,u^0}{dt}$ в соответствующей области, мы будем уменьшать три функции, а четвертая будет постоянной. Процесс будет повторяться до тех пор, пока мы не попадем на положение равновесия, где все четыре функции станут постоянными.

Однако неопределенность возникает на самих гиперповерхностях $x_1 = P_1, x_3 = P_3$. Если возникает скользящий режим, то управлять системой становится затруднительно ввиду неоднозначности управления.

Рассмотрим подробнее, когда возникают скользящие режимы. Перепишем нашу систему в виде:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t) < 0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t) > 0. \end{cases}$$

Достаточное условие скользящего режима на отрезке $x \in [a, b]$ в этом случае будет:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\sigma \to 0+0} \dfrac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_2(x) < 0 \\ \lim\limits_{\sigma \to 0-0} \dfrac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_1(x) > 0. \end{cases} \quad \forall x \in [a, b] \subset \{x \mid \sigma(x,t) = 0\}$$

Таким образом мы можем рассматривать динамическую систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t) < 0 \\ f_s(x), & \sigma(x,t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t) > 0. \end{cases}$$

Регуляризуем скользящий режим таким образом, чтобы не уходить с линии переключения. Для этого применим метод продолжения Филиппова:

$$f_s(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x), \text{ где}$$

$$\alpha \in [0,1] : \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_s(x) = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle \nabla(\sigma), f_1 \rangle}{\langle \nabla(\sigma), f_1 - f_2 \rangle}.$$

Будем рассматривать отдельно случай скользящего режима по первой координате и по третьей.

В первом случае $f_1(x) = f(x, u_1^{max}, u_2^0),\ f_2(x) = f(x, u_1^{min}, u_2^0), \sigma(x,t) = \sigma(x) = x_1 - P_1$.

Мы предполагаем, что по x_3 скользящего режима пока нет и вторая компонента управления определяется однозначно.

Тогда получим, что скользящий режим возникает при

$$\begin{cases} \lim\limits_{x_1 - P_1 \to 0+0} x_1(r_1 + u_1^{min} - b_1 x_2) > 0, \\ \lim\limits_{x_1 - P_1 \to 0-0} x_1(r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2) < 0, \end{cases}$$

откуда $P_2(u_1^{min}) < x_2 < P_2(u_1^{max})$.

То есть при таких x_2, если мы находимся вблизи гиперповерхности $x_1 = P_1$ с соответствующей стороны, у нас возникает по первой координате скользящий режим. Тогда, применяя метод Филиппова, получим

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t) < 0 \\ \alpha_1 f_1(x) + (1-\alpha_1) f_2(x), & \sigma(x,t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \begin{cases} f(x, u_1^{max}, u_2^0), & \sigma(x,t) < 0 \\ f(x, \alpha_1 u_1^{min} + (1-\alpha_1) u_1^{max}, u_2^0), & \sigma(x,t) = 0 \\ f(x, u_1^{min}, u_2^0), & \sigma(x,t) > 0. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2}{u_1^{max} - u_1^{min}}.$$

Во втором случае аналогично получим, что скользящий режим по третьей координате возникает, если

$$d_{min}(x_2) = \frac{c_3 x_2 - r_3 + u_2^{min}}{b_3} < x_4 < \frac{c_3 x_2 - r_3 + u_2^{max}}{b_3} = d_{max}(x_2).$$

После регуляризации получаем

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(x, u_1^0, u_2^{max}), & \sigma(x,t) < 0 \\ f(x, u_1^0, \alpha_2 u_2^{min} + (1-\alpha_2) u_2^{max}), & \sigma(x,t) = 0 \\ f(x, u_1^0, u_2^{min}), & \sigma(x,t) > 0. \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \frac{-r_3 + u_2^{max} - b_3 x_4 + c_3 x_2}{u_2^{max} - u_2^{min}}.$$

Докажем, что за конечное время мы придем в положение равновесия, то есть с какого-то момента времени функции K_i станут постоянными. Для этого

1. докажем, что время нахождения в скользящих процессах отдельно по первой и третьей координате конечно,

2. оценим скорость убывания $K(t,u)$ вне скользящих режимов снизу.

Замечание. Мы рассматриваем скользящие режимы либо по первой, либо по третьей координате, так как в случае одновременного скольжения по обеим координатам задача решена. Тут надо это пояснять или это слишком очевидно?

Скользящий режим по x_3.

$$x_3 = P_3, \ x_4 \in [d_{min}(x_2), d_{max}(x_2)]. \tag{4}$$

Заметим что $\dot{x}_4 = 0$, так что $x_4 = x_4^*$ и наша система превращается в двумерную:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1x_2) & = b_1x_1(P_2(u_1) - x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1) & = c_2x_2(x_1 - P_1). \end{cases}$$

Выражаем x_2 через x_4^* из (4):

$$c_{min}(x_4^*) = \frac{b_3x_4^* + r_3 - u_2^{max}}{c_3} < x_2 < \frac{b_3x_4^* + r_3 - u_2^{min}}{c_3} = c_{max}(x_4^*).$$

Таким образом наша система остается двумерной до тех пор, пока $x_2 \in [c_{min}(x_4^*), c_{max}(x_4^*)]$ и у нас возникает две альтернативы:

1. либо x_2 никогда не нарушает границы неравенства, и система остается двумерной,
2. либо существует конечный момент времени, когда одно из неравенств на x_2 будет нарушено, и система становится вновь четырехмерной.

Рассмотрим первый случай и докажем, что система за конечное время придет в положение равновесия по x_1, x_2, а значит, и в искомое положение равновесия по всем четырем координатам, что и решает исходную задачу.

Тут будет доказательство из статьи.

Скользящий режим по x_1.

$$\begin{cases} x_1 = P_1, \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2P_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3x_4 + c_3x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4x_3), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = P_1, \\ \dot{x}_2 = b_2x_2(P_3 - x_3), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3x_4 + c_3x_2), \\ \dot{x}_4 = c_4x_4(x_3 - P_3). \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что $\mathrm{sgn}(\dot{x}_4) = -\mathrm{sgn}(\dot{x}_2) = \mathrm{sgn}(x_3 - P_3)$.
Также заметим, что в случае $x_3 > P_3$

$$\dot{x}_3 \vee 0 \Leftrightarrow x_4 \vee d_{min}(x_2),$$

а в случае $x_3 < P_3$

$$\dot{x}_3 \vee 0 \Leftrightarrow x_4 \vee d_{max}(x_2).$$

Таким образом будем рассматривать 4 случая в зависимости от знака $x_3 - P_3$ и $\dot{x}_3$:

Случай 1: $x_3 > P_3,\ \dot{x}_3 > 0$,

Случай 2: $x_3 > P_3,\ \dot{x}_3 < 0$,

Случай 3: $x_3 < P_3,\ \dot{x}_3 > 0$,

Случай 4: $x_3 < P_3,\ \dot{x}_3 < 0$.

Без ограничения общности будем считать, что скользящий режим по первой координате осуществляется с начального момента времени t_0.

Случай 1.

$$x_3(t_0) > P_3,\ \dot{x}_3(t_0) > 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_0) < 0, \dot{x}_4(t_0) > 0$, а из второго — что $x_4(t_0) < d_{min}(x_2)$.

Таким образом $\dot{x}_3(t) > 0, \forall t : x_4(t) < d_{min}(x_2)$, поэтому, пока $x_4 < d_{min}(x_2)$, $x_3 \geqslant x_3(t_0) - P_3 = a_1 > 0$. Тогда $\dot{x}_4 \geqslant c_4 x_4(t_0) a_1, \dot{x}_2 < 0 \Rightarrow d_{min}(x_2) < d_{min}(x_2(t_0))$, тогда мы можем оценить $t_1 \leqslant \frac{d_{min}(x_2(t_0)) - x_4(t_0)}{c_4 x_4(t_0) a_1}$ — время, за которое x_4 дойдет до $d_{min}(x_2)$.
Рассмотрим момент t_1.
$\dot{x}_3(t_1) = 0$, но $\ddot{x}_3(t_1) = \dot{x}_3(t_1)((-r_3 + u_2 - b_3 x_4(t_1) + c_3 x_2(t_1)) + x_3(t_1)(-b_3 \dot{x}_4(t_1) + c_3 \dot{x}_2(t_1)) < 0$, так что $\forall \Delta_1 > 0$ $\dot{x}_3(t_1 + \Delta_1) < 0$, при этом $x_3(t_1 + \Delta_1) > P_3$, так что теперь возникает случай 2.

Случай 2.

$$x_3(t_1) > P_3, \dot{x}_3(t_1) < 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_1) < 0, \dot{x}_4(t_1) > 0$, а из второго — что $x_4(t_1) > d_{min}(x_2(t_1))$. Докажем, что

- либо $\exists t_2 < \infty : x_3(t_2) = P_3$,
- либо $\forall \varepsilon > 0\ \exists t_2' : x_3(t) - P_3 < \varepsilon\ \forall t > t_2'$.

Предположим противное: $\forall t > t_1$ $x_3(t) > P_3 + \delta, \delta > 0$. Тогда $\dot{x}_2(t) < b_2 x_2 \delta < 0$, поэтому $\exists t_2^* : x_2(t_2^*) < P_2^{min}$, но тогда мы выходим из скользящего режима по первой координате, а значит, возвращаемся к уже рассмотренным вариантам.

Случай, когда x_3 попадает в ε-окрестность P_3 приводит нас в положение равновесия по всем координатам с точностью до бесконечно малой величины.

Если же $\exists t_2 : x_3(t_2) = P_2$, то в зависимости от того, где в этот момент находится четвертая координата, мы либо решили задачу, либо переходим к случаю 4:

- $x_4(t_2) \in [d_{min}(x_2(t_2)), d_{max}(x_2(t_2))]$, $x_3(t_2) = P_3$, $x_2(t_2) \in [P_2^{min}, P_2^{max}]$, $x_1(t_2) = P_1 \Rightarrow x(t_2) = P(u)$.
- $x_4(t_2) > d_{max}(x_2(t_2)) \Rightarrow \dot{x}_3(t_2) < 0$, $\forall \Delta_2 > 0$ $x_3(t_2 + \Delta_2) < P_3 \Rightarrow$ переходим к случаю 4, заменив $t_2 + \Delta_2$ на t_2.

Случай 4.

$$x_3(t_2) < P_3, \dot{x}_3(t_2) < 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_2) > 0, \dot{x}_4(t_2) < 0$, а из второго — что $x_4(t_2) > d_{max}(x_2(t_2))$.

Аналогично случаю 1 $\dot{x}_3(t) < 0, \forall t : x_4(t) > d_{max}(x_2)$, поэтому, пока $x_4 > d_{max}(x_2)$, $x_3 \leqslant x_3(t_2) - P_3 = a_2 < 0$. Тогда $\dot{x}_4 \leqslant -c_4 x_4(t_2) a_2, \dot{x}_2 > 0 \Rightarrow d_{max}(x_2) > d_{max}(x_2(t_2))$, тогда $\exists t_3 : x_4(t_3) = d_{max}(x_2)$.
Рассмотрим момент t_3.
$\dot{x}_3(t_3) = 0$, но $\ddot{x}_3(t_3) = \dot{x}_3(t_3)((-r_3 + u_2 - b_3 x_4(t_3) + c_3 x_2(t_3)) + x_3(t_3)(-b_3 \dot{x}_4(t_3) + c_3 \dot{x}_2(t_3)) > 0$, так что $\forall \Delta_3 > 0$ $\dot{x}_3(t_3 + \Delta_3) > 0$, при этом $x_3(t_3 + \Delta_3) < P_3$, так что теперь возникает случай 3.

Случай 3.

$$x_3(t_3) < P_3, \dot{x}_3(t_3) > 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_3) > 0, \dot{x}_4(t_3) < 0$, а из второго — что $x_4(t_3) < d_{max}(x_2(t_3))$.

Как и в случае 2, мы можем доказать, что

- либо $\exists t_4 < \infty : x_3(t_4) = P_3$,

- либо $\forall \varepsilon > 0 \, \exists t_4' : x_3(t) - P_3 < \varepsilon, \forall t > t_4'$.

Однако в данном случае реализуется только первый пункт, то есть всегда существует конечный момент времени, в который $x_3 = P_3$. Докажем невозможность второго пункта. Рассмотрим $\ddot{x}_3(t),\ t > t_3$.

$$\ddot{x}_3(t) = \dot{x}_3(t)((-r_3 + u_2 - b_3 x_4(t) + c_3 x_2(t)) + x_3(t)(-b_3 \dot{x}_4(t) + c_3 \dot{x}_2(t)) > 0 \ \forall t : x_3(t) < P_3,$$

так как $\dot{x}_3(t)((-r_3+u_2-b_3x_4(t)+c_3x_2(t)) \geqslant 0 \ \forall t,\ x_3(t) > 0 \ \forall t,\ \dot{x}_4(t) < 0, \dot{x}_2(t) > 0 \ \forall t : x_3(t) < P_3$. Таким образом невозможно асимптотическое приближение к положению равновесия, как в случае 2. Но как и в случае 2, дальнейшая динамика системы зависит от $x_4(t_4)$:

- Если $x_4(t_4) \in [d_{min}(x_2(t_4)), d_{max}(x_2(t_4))],\ x_3(t_4) = P_3,\ x_2(t_4) \in [P_2^{min}, P_2^{max}],\ x_1(t_4) = P_1 \Rightarrow x(t_4) = P(u)$.
- Если $x_4(t_4) < d_{min}(x_2(t_4)) \Rightarrow \dot{x}_3(t_4) > 0,\ \forall \Delta_4 > 0 \ x_3(t_4 + \Delta_4) > P_3 \Rightarrow$ переходим к случаю 1, заменив $t_4 + \Delta_4$ на t_0.

Таким образом схематично мы можем изобразить, как один случай сводится к другому, на следующей диаграмме, где состояние F означает решение задачи, а ε — попадание в ε-окрестность положения равновесия:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[ddd] \\
& \varepsilon & \\
& F & \\
4 \arrow[uuu] \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Остается доказать, что невозможен вариант, при котором мы никогда не придем ни в одно из конечных состояний, то есть зациклимся.

Вот тут возникает проблема, я не знаю, как это доказать аккуратно. По идее, тут можно как-то из соображений уменьшения K это сделать, но надо подумать.

Скорость вне скользящих режимов.

Отсутствие скользящих режимов эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 \neq P_1, \\ \begin{cases} x_1 = P_1, \\ x_2 \in [P_2^{min}, P_2^{max}], \end{cases} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_3 \neq P_3, \\ \begin{cases} x_3 = P_3, \\ x_4 \in [d_{min}(x_2), d_{max}(x_2)]. \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

Если $|x_1 - P_1| > \delta_1$ или $|x_3 - P_3| > \delta_3$, то

$$\frac{dK(x,u)}{dt} \leqslant \begin{cases} -a_1 = -\delta_1 (u_1^{max} - u_1^{min}), & |x_1 - P_1| > \delta_1 \\ -a_2 = -\delta_3 \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} (u_2^{max} - u_2^{min}), & |x_3 - P_3| > \delta_3, \end{cases}$$

т.е.

$$\frac{dK(x,u)}{dt} \leqslant \min(-a_1, -a_2).$$

Осталось рассмотреть случаи, когда

$$x_1 \approx P_1, x_3 \approx P_3$$

и

$$x_1 = P_1, x_3 = P_3, \text{ но } x_2 \notin [P_2^{min}, P_2^{max}], x_4 \notin [d_{min}(x_2), d_{max}(x_2)].$$

Список литературы

[1] *Massarelli N., Hoffman K., Previte J. P.* Effect of parity on productivity and sustainability of Lotka–Volterra food chains. // Mathematical Biology. December of 2014. 1609–1626.