



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Выпускная квалификационная работа по теме

«Управление в моделях межвидового взаимодействия»

Студентка 415 группы

Т. Е. Морозова

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2018

Содержание

1	Введение	3
2	Общие свойства системы	3

1 Введение

Рассматривается модель пищевой цепи с управлением без внутривидовой конкуренции, состоящая из четырех звеньев и описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3x_4 + c_3x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4x_3). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x_i , $i = \overline{1,4}$ — численности популяций видов, $r_1 + u_1$ — рождаемость первого вида, $r_2, r_3 - u_2, r_4$ — смертности остальных видов, b_1, b_2, b_3 и c_2, c_3, c_4 отвечают за взаимодействие между популяциями. Все параметры строго положительны, а управления берутся из интервалов $U_1^* = [u_1^{min}, u_1^{max}]$, $U_2^* = [u_2^{min}, u_2^{max}]$ соответственно.

В данной работе основной целью является исследование свойств и синтеза управления для задачи быстрогодействия во множество положений равновесия.

2 Общие свойства системы

Из биологической интерпретации вытекает, что численность популяции не может быть отрицательной. В следующем утверждении будет показано, что система удовлетворяет этому свойству.

Утверждение 1. *Множество $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i > 0, i = \overline{1,4}\}$ инвариантно относительно системы (1).*

Доказательство.

Из системы (1) видно, что при обнулении координат, обнуляются соответственно и выражения для \dot{x}_i , так что координаты не могут поменять знак. Интегрируя в обратном времени, получим, что координаты не могут обнулиться.

□

Рассмотрим положения равновесия (1) как функцию управления:

$$P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)), \text{ где} \\ P_1(u) = \frac{r_2c_4 + b_2r_4}{c_2c_4}, \quad P_2(u) = \frac{r_1 + u_1}{b_1}, \quad P_3(u) = \frac{r_4}{c_4}, \quad P_4(u) = \frac{c_3(r_1 + u_1) + (u_2 - r_3)b_1}{b_1b_3}. \quad (2)$$

Заметим, что от управления существенно зависят только вторая и четвертая координата, поэтому в дальнейшем будем обозначать $P(u) = (P_1, P_2(u), P_3, P_4(u))$.

Множество положений равновесия $E = \{P(u) \mid u \in U^*\}$ представляет из себя параллелограмм в пространстве (x_2, x_4) . В нашей работе мы предполагаем его непустоту, для этого введем ограничение на параметры задачи:

$$P_4(u_1^{min}, u_2^{min}) > 0.$$

Наша задача состоит в исследовании возможности перевода системы (1) во множество E при кусочно-непрерывном управлении из U_1^*, U_2^* .

В работе [1] найден первый интеграл системы (1) :

$$K(x, u) = x_1 - P_1 \ln x_1 + \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u) \ln x_2) + \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3) + \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u) \ln x_4). \quad (3)$$

Докажем, что функция $K(x, u)$ сильно выпукла по x и имеет минимум по x в точке $(P(u), u)$.

Утверждение 2. *Функция $K(x, u)$ сильно выпукла на любом выпуклом ограниченном подмножестве \mathbb{R}_+^4 , а ее глобальный минимум по x достигается в точке $(P(u), u)$.*

Доказательство.

Рассмотрим гессиан функции $K(x, u)$:

$$H = \text{diag} \left(\frac{P_1}{x_1^2}, \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2^2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3 x_3^2}, \frac{P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4^2} \right).$$

Очевидно, он больше нуля при всех $x_i > 0$, следовательно, функция выпукла.

Обозначим

$$\begin{aligned} K_1(x_1) &= x_1 - P_1 \ln x_1, \quad K_2(x_2, u) = \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u) \ln x_2), \\ K_3(x_3) &= \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3), \quad K_4(x_4, u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u) \ln x_4), \end{aligned}$$

тогда $K(x, u) = K_1(x_1) + K_2(x_2, u) + K_3(x_3) + K_4(x_4, u)$. Поскольку

$$\begin{aligned} K'_1(x_1) &= 1 - \frac{P_1}{x_1}, \quad K'_2(x_2, u) = \frac{b_1}{c_2} - \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2}, \\ K'_3(x_3) &= \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} - \frac{b_1 b_2 P_3}{c_2 c_3 x_3}, \quad K'_4(x_4, u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} - \frac{b_1 b_2 b_3 P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4}, \end{aligned}$$

глобальный минимум K_i достигается при $x_i = P_i$, следовательно, глобальный минимум $K(x, u)$ достигается в точке $(P(u), u)$.

Докажем сильную выпуклость. Возьмем $x_i \leq \mu, i = \overline{1, 4}$, где $\mu \geq \max \{P_i \mid i = \overline{1, 4}\}$. Тогда $H \geq \delta \cdot I$, где

$$\delta = \min \left(P_1, \frac{P_2(u)b_1}{c_2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3}, \frac{P_4(u)b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} \right) / \mu^2.$$

Таким образом $\langle Hx, x \rangle \geq \langle \delta Ix, x \rangle = \delta \|x\|^2$, что и завершает доказательство.

□

Следствие. Приближение к положению равновесия равносильно уменьшению $K(x, u)$.

Утверждение 3. *В системе (1) в области \mathbb{R}_+^4 не могут возникать особые режимы управления.*

Доказательство.

Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для нашей системы.

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x_1 (r_1 + u_1 - b_1 x_2) + \psi_2 x_2 (-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1) + \psi_3 x_3 (-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2) + \psi_4 x_4 (-r_4 + c_4 x_3),$$

где $\psi(t) \in C$, $\psi(t) \neq 0$ и удовлетворяет сопряженной системе:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -(\psi_1(r_1 + u - b_2x_2) + \psi_2x_2c_2), \\ \dot{\psi}_2 = -(-b_1\psi_1x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1) + \psi_3x_3c_3), \\ \dot{\psi}_3 = -(-b_2\psi_2x_2 + \psi_3(-r_3 + u_2 - b_3x_4 + c_3x_2) + \psi_4x_4c_4), \\ \dot{\psi}_4 = -(b_3\psi_3x_3 + \psi_4(-r_4 + c_4x_3)). \end{cases}$$

Из принципа максимума для задачи быстродействия $H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = \sup_{u \in U^*} H(\psi, x, u)$.

Посчитаем производную H по u :

$$H'_u = (\psi_1x_1, \psi_3x_3) \text{ откуда } u_1^* = \begin{cases} u_1^{max}, & \psi_1x_1 \geq 0, \\ u_1^{min}, & \psi_1x_1 < 0. \end{cases}, \quad u_2^* = \begin{cases} u_2^{max}, & \psi_3x_3 \geq 0, \\ u_2^{min}, & \psi_3x_3 < 0. \end{cases}$$

Особый режим будет возникать, если хотя бы одна из компонент управления определяется неоднозначно, то есть либо $\psi_1x_1 = 0$, либо $\psi_3x_3 = 0$ на ненулевом промежутке времени. Так как в нашей системе x_1 и x_3 положительны, учитываются только ψ_1, ψ_3 .

Рассмотрим оба варианта.

1. Пусть $\psi_1(t) = 0, t \in [t_1, t_2]$. Рассмотрим последовательно $\dot{\psi}_i$ и убедимся, что все сопряженные переменные нулевые.

Если $\psi_1(t) = 0$ на промежутке $[t_1, t_2]$, то $\dot{\psi}_1 = 0$ на этом же временном отрезке. Но тогда из первого сопряженного уравнения $\psi_2 = 0$, следовательно и $\dot{\psi}_2 = 0, t \in [t_1, t_2]$, а тогда из второго сопряженного уравнения $\psi_3 = 0, t \in [t_1, t_2]$. Аналогично $\dot{\psi}_3 = 0, t \in [t_1, t_2]$ и из третьего сопряженного уравнения $\psi_4 = 0, t \in [t_1, t_2]$, что противоречит невырожденности $\psi(t)$.

2. Пусть $\psi_3(t) = 0, \psi_1(t) \neq 0, t \in [t_1, t_2]$, тогда и $\dot{\psi}_3(t) = 0$ на том же временном отрезке. Таким образом $-b_2\psi_2x_2 + \psi_4x_4c_4 = 0$. Возьмем производную по времени от этого выражения:

$$\begin{aligned} 0 &= -b_2(\dot{\psi}_2x_2 + \psi_2\dot{x}_2) + c_4(\dot{\psi}_4x_4 + \psi_4\dot{x}_4) = \\ &= -b_2(-x_2(-b_1\psi_1x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1)) + \psi_2x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1)) + \\ &\quad + c_4(\psi_4x_4(-r_4 + c_4x_3) + \psi_4x_4(-r_4 + c_4x_3)) = -b_1b_2x_1x_2\psi_1. \end{aligned}$$

Но $x_1, x_2, \psi_1 \neq 0$, а значит, мы получили противоречие, что и завершает доказательство. \square

Но из принципа максимума мы не можем аналитически найти оптимальное управление для задачи быстродействия, поэтому будем действовать по другой схеме. Будем строить наше управление таким образом, чтобы уменьшать $K(x, u)$, возможно, не самым оптимальным образом, но тем самым мы будем приближаться к положению равновесия.

Посчитаем производную $\frac{dK(x, u^0)}{dt}$ при некотором $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ в силу системы (1) :

$$\begin{aligned} \frac{dK(x, u_0)}{dt} &= \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \\ &= -\frac{1}{c_2c_3c_4} ((u_2 - u_2^0)(b_1b_2(r_4 - c_4x_3)) + c_3(u_1 - u_1^0)(b_2r_4 + c_4r_2 - c_2c_4x_1)) = \\ &= \frac{b_1b_2}{c_2c_3} (u_2 - u_2^0)(x_3 - P_3) + (u_1 - u_1^0)(x_1 - P_1) \rightarrow \min_{u_1 \in U_1^*, u_2 \in U_2^*} \end{aligned}$$

Заметим, что равновесие по x_1 и x_3 разделяет все пространство на четыре области, в каждой из которых будет свой минимизатор.

1. В области $x_1 > P_1, x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}, u_1^0 = u_1^{max}, u_2 = u_2^{min}, u_2^0 = u_2^{max}$.
2. В области $x_1 > P_1, x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}, u_1^0 = u_1^{max}, u_2 = u_2^{max}, u_2^0 = u_2^{min}$.
3. В области $x_1 < P_1, x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}, u_1^0 = u_1^{min}, u_2 = u_2^{min}, u_2^0 = u_2^{max}$.
4. В области $x_1 < P_1, x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}, u_1^0 = u_1^{min}, u_2 = u_2^{max}, u_2^0 = u_2^{min}$.

Введем 4 функции:

$$K_1(x) = K(x, u_1^{min}, u_2^{min}), K_2(x) = K(x, u_1^{max}, u_2^{min}),$$

$$K_3(x) = K(x, u_1^{min}, u_2^{max}), K_4(x) = K(x, u_1^{max}, u_2^{max}).$$

Беря управление, минимизирующее производную $\frac{dK, u^0}{dt}$ в соответствующей области, мы будем уменьшать три функции, а четвертая будет постоянной. Процесс будет повторяться до тех пор, пока мы не попадем на положение равновесия, где все четыре функции станут постоянными.

Однако неопределенность возникает на самих гиперповерхностях $x_1 = P_1, x_3 = P_3$. Если возникает скользящий режим, то управлять системой становится затруднительно ввиду неоднозначности управления.

Рассмотрим подробнее, когда возникают скользящие режимы. Перепишем нашу систему в виде:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x, t) < 0 \\ f_2(x), & \sigma(x, t) > 0, \end{cases}$$

где $\sigma(x, t) = 0$ — поверхность разрыва правой части уравнения.

Необходимое и достаточное условие скользящего режима на отрезке $x \in [a, b]$ в этом случае будет:

$$\begin{cases} \lim_{\sigma \rightarrow 0+0} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} f_2(x) < 0 \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0-0} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} f_1(x) > 0. \end{cases} \quad \forall x \in [a, b] \subset \{x \mid \sigma(x, t) = 0\}$$

Таким образом мы можем рассматривать динамическую систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x, t) < 0 \\ f_s(x), & \sigma(x, t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x, t) > 0. \end{cases}$$

Регуляризуем скользящий режим таким образом, чтобы не уходить с линии переключения. Для этого применим метод продолжения Филиппова:

$$f_s(x) = \alpha f_1(x) + (1 - \alpha) f_2(x), \text{ где}$$

$$\alpha \in [0, 1] : \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} f_s(x) = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle \nabla(\sigma), f_1 \rangle}{\langle \nabla(\sigma), f_1 - f_2 \rangle}.$$

В этом случае мы будем выбирать управление $u = u^c$ таким образом, чтобы двигаться вдоль поверхности $\sigma(x, t) = 0$ некоторое положительное время, а именно, до того момента, когда нарушится условие скользящего режима.

Будем рассматривать отдельно случай скользящего режима по первой координате и по третьей.

Скользящий режим по x_1 .

В первом случае $f_1(x) = f(x, u_1^{max}, u_2^0)$, $f_2(x) = f(x, u_1^{min}, u_2^0)$, $\sigma(x, t) = \sigma(x) = x_1 - P_1$. Тогда $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = [1, 0, 0, 0]^T$, $\langle \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}, f_1(x) \rangle = x_1(r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2)$, $\langle \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}, f_2(x) \rangle = x_1(r_1 + u_1^{min} - b_1 x_2)$.

Мы предполагаем, что по x_3 скользящего режима нет, и вторая компонента управления определяется однозначно. Ниже будет доказано, что скольжение одновременно по обеим координатам эквивалентно решению исходной задачи.

Получим, что скользящий режим возникает при

$$\begin{cases} \lim_{x_1 - P_1 \rightarrow 0+0} x_1(r_1 + u_1^{min} - b_1 x_2) < 0, \\ \lim_{x_1 - P_1 \rightarrow 0-0} x_1(r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2) > 0, \end{cases}$$

откуда $P_2(u_1^{min}) < x_2 < P_2(u_1^{max})$.

То есть при таких x_2 , если мы находимся вблизи гиперповерхности $x_1 = P_1$ с соответствующей стороны, у нас возникает по первой координате скользящий режим. Тогда, применяя метод Филиппова, получим

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x, t) < 0 \\ \alpha_1 f_1(x) + (1 - \alpha_1) f_2(x), & \sigma(x, t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x, t) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \begin{cases} f(x, u_1^{max}, u_2^0), & \sigma(x, t) < 0 \\ f(x, u_1^c, u_2^0), & \sigma(x, t) = 0 \\ f(x, u_1^{min}, u_2^0), & \sigma(x, t) > 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2}{u_1^{max} - u_1^{min}},$$

$$u_1^c = \alpha_1 u_1^{min} + (1 - \alpha_1) u_1^{max} = b_1 x_2 - r_1.$$

Скользящий режим по x_3 .

Аналогично получим, что скользящий режим по третьей координате возникает, если

$$d_{min}(x_2) = \frac{c_3 x_2 - r_3 + u_2^{min}}{b_3} < x_4 < \frac{c_3 x_2 - r_3 + u_2^{max}}{b_3} = d_{max}(x_2).$$

После регуляризации получаем

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(x, u_1^0, u_2^{max}), & \sigma(x, t) < 0 \\ f(x, u_1^0, u_2^c), & \sigma(x, t) = 0 \\ f(x, u_1^0, u_2^{min}), & \sigma(x, t) > 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha_2 = \frac{-r_3 + u_2^{max} - b_3x_4 + c_3x_2}{u_2^{max} - u_2^{min}},$$

$$u_2^c = \alpha_2 u_2^{min} + (1 - \alpha_2) u_2^{max} = r_3 + b_3x_4 - c_3x_2.$$

Замечание. Случай «отталкивания» от поверхностей разрыва правой части уравнения невозможен.

Доказательство.

Необходимым условием для разнонаправленности векторного поля $f(x, u)$ вблизи поверхности разрыва будет

$$\begin{cases} x_2 \geq P_2^{max}, \\ x_2 \leq P_2^{min} \end{cases}$$

в первом случае и

$$\begin{cases} x_4 \geq d^{max}(x_2), \\ x_4 \leq d^{min}(x_2) \end{cases}$$

во втором. Очевидно, в обоих случаях требуемое невозможно, а значит, вблизи поверхностей $x_1 = P_1, x_3 = P_3$ возможно либо непрерывное векторное поле $f(x, u)$, либо случай скользящего режима, рассмотренный выше.

□

Докажем, что за конечное время мы придем в положение равновесия, то есть с какого-то момента времени функции K_i станут постоянными. Для этого

1. докажем, что время нахождения в скользящих процессах отдельно по первой и третьей координате конечно,
2. оценим снизу скорость убывания $K(t, u)$ вне скользящих режимов по модулю.

Замечание. Мы рассматриваем скользящие режимы либо по первой, либо по третьей координате, так как в случае одновременного скольжения по обеим координатам задача решена:

Доказательство.

Пусть имеет место скользящий режим по обеим координатам. То есть

$$\begin{cases} x_1 = P_1, \\ x_2 \in [P_2^{min}, P_2^{max}], \\ x_3 = P_3, \\ x_4 \in [d_{min}(x_2), d_{max}(x_2)]. \end{cases}$$

Так как по первой и по третьей координате мы двигаемся вдоль $x_1 = P_1$ и $x_3 = P_3$ соответственно, то $\dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_3$. А так как $x_1 = P_1, x_3 = P_3$, из системы (1) получим, что $\dot{x}_2 = 0 = \dot{x}_4$, что и означает попадание в положение равновесие и полную стабилизацию системы.

□

Скольльзящий режим по x_3 .

$$x_3 = P_3, \quad x_4 \in [d_{\min}(x_2), d_{\max}(x_2)]. \quad (4)$$

Заметим что $\dot{x}_4 = 0$, так что $x_4 = x_4^*$ и наша система фактически превращается в двумерную:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1x_2) & = b_1x_1(P_2(u_1) - x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1) & = c_2x_2(x_1 - P_1). \end{cases}$$

Выражаем x_2 через x_4^* из (4):

$$c_{\min}(x_4^*) = \frac{b_3x_4^* + r_3 - u_2^{\max}}{c_3} < x_2 < \frac{b_3x_4^* + r_3 - u_2^{\min}}{c_3} = c_{\max}(x_4^*).$$

Таким образом наша система остается «двумерной» до тех пор, пока $x_2 \in [c_{\min}(x_4^*), c_{\max}(x_4^*)]$ и у нас возникает две альтернативы:

1. либо x_2 никогда не нарушает границы неравенства, и система остается «двумерной»,
2. либо существует конечный момент времени, когда одно из неравенств на x_2 будет нарушено, и система становится вновь четырехмерной.

Рассмотрим первый случай и докажем, что система за конечное время придет в положение равновесия по x_1, x_2 , а значит, и в искомое положение равновесия по всем четырем координатам, что и решает исходную задачу.

Тут будет доказательство из статьи.

Скольльзящий режим по x_1 .

$$\begin{cases} x_1 = P_1, \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2P_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3x_4 + c_3x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4x_3), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = P_1, \\ \dot{x}_2 = b_2x_2(P_3 - x_3), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3x_4 + c_3x_2), \\ \dot{x}_4 = c_4x_4(x_3 - P_3). \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что $\text{sgn}(\dot{x}_4) = -\text{sgn}(\dot{x}_2) = \text{sgn}(x_3 - P_3)$.

Также заметим, что в случае $x_3 > P_3$

$$\text{sgn}(\dot{x}_3) = \text{sgn}(x_4 - d_{\min}(x_2)),$$

а в случае $x_3 < P_3$

$$\text{sgn}(\dot{x}_3) = \text{sgn}(x_4 - d_{\max}(x_2)).$$

Таким образом будем рассматривать 4 случая в зависимости от знака $x_3 - P_3$ и \dot{x}_3 :

Случай 1: $x_3 > P_3, \dot{x}_3 > 0$,

Случай 2: $x_3 > P_3, \dot{x}_3 < 0$,

Случай 3: $x_3 < P_3, \dot{x}_3 > 0$,

Случай 4: $x_3 < P_3, \dot{x}_3 < 0$.

Без ограничения общности будем считать, что скользящий режим по первой координате осуществляется с начального момента времени t_0 .

Случай 1.

$$x_3(t_0) > P_3, \dot{x}_3(t_0) > 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_0) < 0, \dot{x}_4(t_0) > 0$, а из второго — что $x_4(t_0) < d_{min}(x_2)$.

Таким образом $\dot{x}_3(t) > 0, \forall t : x_4(t) < d_{min}(x_2)$, поэтому, пока $x_4 < d_{min}(x_2)$, $x_3 \geq x_3(t_0) - P_3 = a_1 > 0$. Тогда $\dot{x}_4 \geq c_4 x_4(t_0) a_1, \dot{x}_2 < 0 \Rightarrow d_{min}(x_2) < d_{min}(x_2(t_0))$, тогда мы можем оценить $t_1 \leq \frac{d_{min}(x_2(t_0)) - x_4(t_0)}{c_4 x_4(t_0) a_1}$ — время, за которое x_4 дойдет до $d_{min}(x_2)$.

Рассмотрим момент t_1 .

$\dot{x}_3(t_1) = 0$, но $\ddot{x}_3(t_1) = \dot{x}_3(t_1)((-r_3 + u_2 - b_3 x_4(t_1) + c_3 x_2(t_1)) + x_3(t_1)(-b_3 \dot{x}_4(t_1) + c_3 \dot{x}_2(t_1))) < 0$, так что $\forall \Delta_1 > 0 \dot{x}_3(t_1 + \Delta_1) < 0$, при этом $x_3(t_1 + \Delta_1) > P_3$, так что теперь возникает случай 2.

Случай 2.

$$x_3(t_1) > P_3, \dot{x}_3(t_1) < 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_1) < 0, \dot{x}_4(t_1) > 0$, а из второго — что $x_4(t_1) > d_{min}(x_2(t_1))$. Докажем, что

- либо $\exists t_2 < \infty : x_3(t_2) = P_3$,
- либо $\forall \varepsilon > 0 \exists t'_2 : x_3(t) - P_3 < \varepsilon \forall t > t'_2$.

Предположим противное: $\forall t > t_1 \ x_3(t) > P_3 + \delta, \delta > 0$. Тогда $\dot{x}_2(t) < b_2 x_2 \delta < 0$, поэтому $\exists t_2^* : x_2(t_2^*) < P_2^{min}$, но тогда мы выходим из скользящего режима по первой координате, а значит, возвращаемся к уже рассмотренным вариантам.

Случай, когда x_3 попадает в ε -окрестность P_3 приводит нас в положение равновесия по всем координатам с точностью до бесконечно малой величины.

Если же $\exists t_2 : x_3(t_2) = P_2$, то в зависимости от того, где в этот момент находится четвертая координата, мы либо решили задачу, либо переходим к случаю 4:

- $x_4(t_2) \in [d_{min}(x_2(t_2)), d_{max}(x_2(t_2))], \ x_3(t_2) = P_3, \ x_2(t_2) \in [P_2^{min}, P_2^{max}], \ x_1(t_2) = P_1 \Rightarrow x(t_2) = P(u)$.
- $x_4(t_2) > d_{max}(x_2(t_2)) \Rightarrow \dot{x}_3(t_2) < 0, \ \forall \Delta_2 > 0 \ x_3(t_2 + \Delta_2) < P_3 \Rightarrow$ переходим к случаю 4, заменив $t_2 + \Delta_2$ на t_2 .

Случай 4.

$$x_3(t_2) < P_3, \dot{x}_3(t_2) < 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_2) > 0, \dot{x}_4(t_2) < 0$, а из второго — что $x_4(t_2) > d_{max}(x_2(t_2))$.

Аналогично случаю 1 $\dot{x}_3(t) < 0, \forall t : x_4(t) > d_{max}(x_2)$, поэтому, пока $x_4 > d_{max}(x_2)$, $x_3 \leq x_3(t_2) - P_3 = a_2 < 0$. Тогда $\dot{x}_4 \leq -c_4 x_4(t_2) a_2, \dot{x}_2 > 0 \Rightarrow d_{max}(x_2) > d_{max}(x_2(t_2))$, тогда $\exists t_3 : x_4(t_3) = d_{max}(x_2)$.

Рассмотрим момент t_3 .

$\dot{x}_3(t_3) = 0$, но $\ddot{x}_3(t_3) = \dot{x}_3(t_3)((-r_3 + u_2 - b_3 x_4(t_3) + c_3 x_2(t_3)) + x_3(t_3)(-b_3 \dot{x}_4(t_3) + c_3 \dot{x}_2(t_3))) > 0$, так что $\forall \Delta_3 > 0 \dot{x}_3(t_3 + \Delta_3) > 0$, при этом $x_3(t_3 + \Delta_3) < P_3$, так что теперь возникает случай 3.

Случай 3.

$$x_3(t_3) < P_3, \dot{x}_3(t_3) > 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\dot{x}_2(t_3) > 0, \dot{x}_4(t_3) < 0$, а из второго — что $x_4(t_3) < d_{max}(x_2(t_3))$.

Как и в случае 2, мы можем доказать, что

- либо $\exists t_4 < \infty : x_3(t_4) = P_3$,
- либо $\forall \varepsilon > 0 \exists t'_4 : x_3(t) - P_3 < \varepsilon, \forall t > t'_4$.

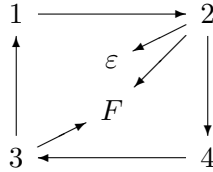
Однако в данном случае реализуется только первый пункт, то есть всегда существует конечный момент времени, в который $x_3 = P_3$. Докажем невозможность второго пункта. Рассмотрим $\ddot{x}_3(t)$, $t > t_3$.

$$\ddot{x}_3(t) = \dot{x}_3(t)((-r_3 + u_2 - b_3x_4(t) + c_3x_2(t)) + x_3(t)(-b_3\dot{x}_4(t) + c_3\dot{x}_2(t)) > 0 \forall t : x_3(t) < P_3,$$

так как $\dot{x}_3(t)((-r_3 + u_2 - b_3x_4(t) + c_3x_2(t)) \geq 0 \forall t$, $x_3(t) > 0 \forall t$, $\dot{x}_4(t) < 0, \dot{x}_2(t) > 0 \forall t : x_3(t) < P_3$. Таким образом невозможно асимптотическое приближение к положению равновесия, как в случае 2. Но как и в случае 2, дальнейшая динамика системы зависит от $x_4(t_4)$:

- Если $x_4(t_4) \in [d_{min}(x_2(t_4)), d_{max}(x_2(t_4))]$, $x_3(t_4) = P_3$, $x_2(t_4) \in [P_2^{min}, P_2^{max}]$, $x_1(t_4) = P_1 \Rightarrow x(t_4) = P(u)$.
- Если $x_4(t_4) < d_{min}(x_2(t_4)) \Rightarrow \dot{x}_3(t_4) > 0$, $\forall \Delta_4 > 0 x_3(t_4 + \Delta_4) > P_3 \Rightarrow$ переходим к случаю 1, заменив $t_4 + \Delta_4$ на t_0 .

Таким образом схематично мы можем изобразить, как один случай сводится к другому, на следующей диаграмме, где состояние F означает решение задачи, а ε — попадание в ε -окрестность положения равновесия:



Остается доказать, что невозможен вариант, при котором мы никогда не придем ни в одно из конечных состояний, то есть заиклимся.

Вот тут возникает проблема, я не знаю, как это доказать аккуратно. По идее, тут можно как-то из соображений уменьшения К это сделать, но надо подумать.

Скорость вне скользящих режимов.

Отсутствие скользящих режимов эквивалентно следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 \neq P_1, \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 = P_1, \\ x_2 \in [P_2^{min}, P_2^{max}], \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_3 \neq P_3, \\ \left\{ \begin{array}{l} x_3 = P_3, \\ x_4 \in [d_{min}(x_2), d_{max}(x_2)]. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Если $|x_1 - P_1| > \delta_1$ или $|x_3 - P_3| > \delta_3$, то

$$\min_u \frac{dK(x, u)}{dt} \leq \begin{cases} -a_1 = -\delta_1(u_1^{max} - u_1^{min}), & |x_1 - P_1| > \delta_1 \\ -a_2 = -\delta_3 \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} (u_2^{max} - u_2^{min}), & |x_3 - P_3| > \delta_3, \end{cases}$$

т.е.

$$\min_u \frac{dK(x, u)}{dt} \leq \min(-a_1, -a_2).$$

Осталось рассмотреть случаи, когда

$$x_1 \approx P_1, x_3 \approx P_3$$

и

$$x_1 = P_1, x_3 = P_3, \text{ но } x_2 \notin [P_2^{min}, P_2^{max}], x_4 \notin [d_{min}(x_2), d_{max}(x_2)].$$

В принципе, это можно сделать аналитически, но опять же надо аккуратно расписывать все. Но если смотреть на картинки, то понятно, что там происходит, так что, наверное, это можно как-то адекватно описать.

И.В.

Я посмотрел книжку A.Isidori "Nonlinear Control Systems" нашел там нужные результаты и провел вычисления. Короче говоря, для любой точки равновесия можно при помощи конкретной замены фазовых переменных и при помощи замены управления (т.е. подстановки в управления некоторой функции от фазовых переменных и новых управлений) превратить нашу систему в полностью линейную следующего вида (при этом ограничений на то, где действует линеаризация, вообще нету, см. ниже):

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = w_1 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = w_2. \end{cases}$$

Не так важно, как получилось все, что идет ниже (хотя я все могу объяснить и показать в книжке соответствующее место), но замена не очень сложная. Схема после моих вычислений такая:

1) выбираем некоторое допустимое управление $u^0 = (u_1^0, u_2^0)'$ (надо выбрать строго внутри ограничений на управление, почему, будет ясно ниже).

2) переписываем систему в отклонениях от положения равновесия $\xi_1 = x_1 - P_1, \xi_2 = x_2 - P_2(u^0), \xi_3 = x_3 - P_3, \xi_4 = x_4 - P_4(u^0)$, подставляем в управление $u = u^0 + v$ (т.е. v — отклонение u от u^0), в результате получится вот такая система:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\frac{(b_1 \xi_2 (b_2 r_4 + c_4 r_2 + c_2 c_4 \xi_1))}{(c_2 c_4)} + \frac{(b_2 r_4 + c_4 r_2 + c_2 c_4 x_1)}{(c_2 c_4)} v_1 \\ \dot{\xi}_2 = -\frac{((b_2 \xi_3 - c_2 \xi_1)(r_1 + u_1^0 + b_1 \xi_2))}{b_1} \\ \dot{\xi}_3 = -\frac{((r_4 + c_4 \xi_3)(b_3 \xi_4 - c_3 \xi_2))}{c_4} + \frac{(r_4 + c_4 x_3)}{c_4} v_2 \\ \dot{\xi}_4 = -(\xi_4 + (c_3(r_1 + u_1^0) - \frac{b_1(r_3 - u_2^0)}{(b_1 b_3)})(r_4 - c_4(\xi_3 + r_4/c_4))) \end{cases}$$

У данной системы положение равновесия уже $(0,0,0,0)'$ при управлении $v=(0,0)'$. Будем называть ее системой в отклонениях.

3) делаем в вышеприведенной системе замену переменных:

$$\begin{cases} z_1 = \xi_2, \\ z_2 = -\frac{(b_2\xi_3 - c_2\xi_1)(r_1 + u_1^0 + b_1\xi_2)}{b_1}, \\ z_3 = \xi_4, \\ z_4 = -\frac{\xi_4 + (c_3(r_1 + u_1^0) - b_1(r_3 - u_2^0))}{b_1b_3}(r_4 - c_4(\xi_3 + \frac{r_4}{c_4})) \end{cases}$$

То есть что тут происходит. Мы в качестве z_1 и z_3 берем ξ_2 и ξ_4 , а в качестве z_2 и z_4 просто берем правые части системы в отклонениях для этих же переменных.

4) после замены (а обратная замена выписывается также полностью аналитически) мы получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \beta_1(z) + \alpha_{11}(z)v_1 + \alpha_{12}(z)v_2, \\ \dot{z}_3 = z_4, \\ \dot{z}_4 = \beta_2(z) + \alpha_{22}(z)v_2 \end{cases}$$

Здесь $\beta_i(z), \alpha_{ij}(z)$ — некоторые функции ($\alpha_{21}(z)$ тождественно равно нулю), вид их довольно непростой. Но при этом $\beta_i(0) = 0$, то есть здесь тоже равновесие $(0, 0, 0, 0)'$ при $v = (0, 0)'$. И еще здесь $\alpha_{11}(0)$ и $\alpha_{22}(0)$ отличны от нуля, то есть матрица $A(z)$, составленная из $\alpha_{ij}(z)$, обратима в окрестности положения равновесия.

Теперь берем $v = (v_1 v_2)' = (A(z))^{-1}[-(\beta_1(z)\beta_2(z))' + w]$, где $w = (w_1, w_2)'$ — еще одно новое управление. То есть мы подставляем в систему для z такое управление v , зависящее от z и w , чтобы все нелинейные члены уничтожились и получилась полностью линейная система.

Теперь какие тут есть проблемы. Существует окрестность начала координат по z , такая что соответствующая v будет давать управление $u = u^0 + v$, "вписывающееся" в наши ограничения. Однако размер этой окрестности неясен, это требуется изучать. То есть в принципе схема такая. Мы берем линейную систему, решаем для нее задачу (там получается как раз не более одного переключения по каждой координате w). Далее начинаем возвращаться к исходным координатам и смотреть, какова окрестность исходного положения равновесия $P_1, P_2(u^0), P_3, P_4(u^0)$, чтобы соответствующее u удовлетворяло ограничениям.

Однако что тут может не совсем получиться. Проблема с точками u^0 , близким к нашим ограничениям. Теоретически может быть, что при стремлении u^0 к границам нашего управления размер окрестности будет стремиться к нулю. В результате может получиться так, что объединение окрестностей по всем u^0 из уменьшенного прямоугольника (по сравнению с исходным прямоугольником, задающим ограничения на управления) может не "покрыть" множество положений равновесия. Но тут надо уж смотреть, вычисляя все, что нужно.

Список литературы

- [1] *Massarelli N., Hoffman K., Previte J. P.* Effect of parity on productivity and sustainability of Lotka–Volterra food chains. // Mathematical Biology. December of 2014. 1609–1626.