Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Выпускная квалификационная работа по теме

«Управление в моделях межвидового взаимодействия»

Студентка 415 группы
Т. Е. Морозова *Научный руководитель*
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2018

Содержание

1 Введение

Рассматривается модель пищевой цепи с управлением без внутривидовой конкуренции, состоящая из четырех звеньев и описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u - b_1 x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 - b_3 x_4 + c_3 x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4 x_3). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x_i, $i = \overline{1,4}$ — численности популяций видов, $r_1 + u$ — рождаемость первого вида, r_i, $i = \overline{2,4}$ — смертности остальных видов, b_i, $i = \overline{1,3}$ и c_i, $i = \overline{2,4}$ отвечают за взаимодействие между популяциями. Все параметры строго положительны, а управление берется из интервала $U^* = [u_{min}, u_{max}]$.

В данной работе основной целью является исследование свойств и синтеза управления для задачи быстродействия во множество положений равновесия.

2 Общие свойства системы

Из биологической интерпретации вытекает, что численность популяции не может быть отрицательной. В следующем утверждении будет показано, что система удовлетворяет этому свойству.

Утверждение 1. *Множество* $\left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i > 0, i = \overline{1,4}\right\}$ *инвариантно относительно системы (1) .*

Доказательство.
Из системы (1) видно, что при обнулении координат, обнуляются соответственно и выражения для $\dot{x}_i$, так что координаты не могут поменять знак. Интегрируя в обратном времени, получим, что координаты не могут обнулиться.

□

Рассмотрим положения равновесия (1) как функцию управления:

$$P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)), \text{ где}$$
$$P_1(u) = \frac{r_2 c_4 + b_2 r_4}{c_2 c_4}, \quad P_2(u) = \frac{r_1 + u}{b_1}, \quad P_3(u) = \frac{r_4}{c_4}, \quad P_4(u) = \frac{c_3(r_1 + u) - r_3 b_1}{b_1 b_3}. \tag{2}$$

Заметим, что от управления существенно зависят только вторая и четвертая координата, поэтому в дальнейшем будем обозначать $P(u) = (P_1, P_2(u), P_3, P_4(u))$.

Множество положений равновесия $E = \{P(u) \mid u \in U^*\}$ представляет из себя отрезок прямой

$$x_4 = \frac{c_3 x_2 - r_3}{b_3}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$, такой, что

$$x_2 \in \left[\frac{r_1 + u_{min}}{b_1}, \frac{r_1 + u_{max}}{b_1}\right], \; x_4 > 0$$

и, вообще говоря, может быть пустым. Но в нашей работе мы предполагаем его непустоту, для этого введем следующее ограничение на параметры задачи:

$$u_{min} > \frac{r_3 b_1 - c_3 r_1}{c_3}.$$

Наша задача состоит в исследовании возможности перевода системы (1) во множество E при кусочно-непрерывном управлении из U^*.

В работе [1] найден первый интеграл системы (1) :

$$K(x,u) = x_1 - P_1 \ln x_1 + \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u)\ln x_2) + \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3) + \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u)\ln x_4). \quad (3)$$

Докажем, что функция $K(x,u)$ сильно выпукла по x и имеет минимум по x в точке $(P(u), u)$.

Утверждение 2. *Функция $K(x,u)$ сильно выпукла на любом выпуклом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^4_+$, а ее глобальный минимум по x достигается в точке $(P(u), u)$.*

Доказательство.
Рассмотрим гессиан функции $K(x,u)$:

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{P_1}{x_1^2},\ \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2^2},\ \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3 x_3^2},\ \frac{P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4^2}\right).$$

Очевидно, он больше нуля при всех $x_i > 0$, следовательно, функция выпукла.
Обозначим

$$K_1(x_1) = x_1 - P_1 \ln x_1,\ K_2(x_2,u) = \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u)\ln x_2),$$

$$K_3(x_3) = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3),\ K_4(x_4,u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u)\ln x_4,$$

тогда $K(x,u) = K_1(x_1) + K_2(x_2,u) + K_3(x_3) + K_4(x_4,u)$. Поскольку

$$K_1'(x_1) = 1 - \frac{P_1}{x_1},\ K_2'(x_2,u) = \frac{b_1}{c_2} - \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2},$$

$$K_3'(x_3) = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} - \frac{b_1 b_2 P_3}{c_2 c_3 x_3},\ K_4(x_4,u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} - \frac{b_1 b_2 b_3 P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4},$$

глобальный минимум K_i достигается при $x_i = P_i$, следовательно, глобальный минимум $K(x,u)$ достигается в точке $(P(u), u)$.
Докажем сильную выпуклость. Возьмем $x_i \leqslant \mu, i = \overline{1,4}$, где $\mu \geqslant \max\left\{P_i \mid i = \overline{1,4}\right\}$. Тогда $H \geqslant \delta \cdot I$, где

$$\delta = \min\left(P_1, \frac{P_2(u)b_1}{c_2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3}, \frac{P_4(u) b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}\right)/\mu^2.$$

Таким образом $\langle Hx, x\rangle \geqslant \langle \delta I x, x\rangle = \delta \|x\|^2$, что и завершает доказательство.

□

Будем максимально уменьшать $K(x,u)$, то есть гасить «энергию системы», что будет приближать нас положению равновесия.

Посчитаем производную $\frac{dK(x,u_0)}{dt}$ при некотором u_0 в силу системы (1) :

$$\frac{dK(x,u_0)}{dt} = \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_3}\dot{x}_3 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_4}\dot{x}_4 = (u - u_0)\left(x_1 - \frac{b_2 r_4 + c_4 r_2}{c_2 c_4}\right).$$

Заметим, что равновесие по x_1 разделяет все пространство на две области. В области $x_1 > \frac{b_2r_4+c_4r_2}{c_2c_4}$ производная будет минимальной при $u = u_{min}$, $u_0 = u_{max}$, а при $x_1 < \frac{b_2r_4+c_4r_2}{c_2c_4}$ — наоборот, то есть при $u = u_{max}, u_0 = u_{min}$. При $x_1 = \frac{b_2r_4+c_4r_2}{c_2c_4}$ возникает «особый режим».

Выясним, может ли «особый режим» наступать на временном отрезке ненулевой меры.

...

Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для нашей системы и проверим, могут ли быть особые режимы.

$$H(\psi,x,u) = \psi_1 x_1(r_1+u-b_1x_2)+\psi_2x_2(-r_2-b_2x_3+c_2x_1)+\psi_3x_3(-r_3-b_3x_4+c_3x_2)+\psi_4x_4(-r_4+c_4x_4),$$

где $\psi)t) \in C,\ \psi(t) \neq 0$ и удовлетворяет сопряженной системе системе:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -(\psi_1(r_1 + u - b_2x_2) + \psi_2x_2c_2), \\ \dot{\psi}_2 = -(-b_1\psi_1x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1) + \psi_3x_3c_3), \\ \dot{\psi}_3 = -(-b_2\psi_1x_2 + \psi_3(-r_3 - b_3x_4 + c_3x_2) + \psi_4x_4c_4), \\ \dot{\psi}_4 = -(b_3\psi_3x_3 + \psi_4(-r_4 + c_4x_3)). \end{cases}$$

Из принципа максимума $H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = \sup\limits_{u \in U^*} H(\psi, x, u)$.

Посчитаем производную H по u :

$$H'_u = \psi_1 x_1, \text{ откуда } u^* = \begin{cases} u_{max}, & \psi_1x_1 \geqslant 0, \\ u_{min}, & \psi_1x_1 < 0. \end{cases}$$

Так как в нашей системе $x_1(t) > 0$, особый режим будет возникать, если $\psi_1(t) = 0$ на ненулевом промежутке времени. Рассмотрим последовательно $\dot{\psi}_i$ и убедимся, что все сопряженные переменные нулевые.

Если $\psi_1(t) = 0$ на промежутке $[t_1, t_2]$, то $\dot{\psi}_1 = 0$ на этом же временном отрезке. Но тогда из первого сопряженного уравнения $\psi_2 = 0$, следовательно и $\dot{\psi}_2 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$, а тогда из второго сопряженного уравнения $\psi_3 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$. Аналогично $\dot{\psi}_3 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$ и из третьего сопряженного уравнения $\psi_4 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$, что противоречит невырожденности $\psi(t)$.

Таким образом, особых режимов в системе не возникает и управление кусочно-постоянное.

Список литературы

[1] *Massarelli N., Hoffman K., Previte J. P.* Effect of parity on productivity and sustainability of Lotka–Volterra food chains. // Mathematical Biology. December of 2014. 1609–1626.