Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Выпускная квалификационная работа по теме

«Управление в моделях межвидового взаимодействия»

Студентка 415 группы
Т. Е. Морозова *Научный руководитель*
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2018

Содержание

1 Введение

Рассматривается модель пищевой цепи с управлением без внутривидовой конкуренции, состоящая из четырех звеньев и описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1 x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4 x_3). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x_i, $i = \overline{1,4}$ — численности популяций видов, $r_1 + u_1$ — рождаемость первого вида, $r_2, r_3 - u_2, r_4$ — смертности остальных видов, b_1, b_2, b_3 и c_2, c_3, c_4 отвечают за взаимодействие между популяциями. Все параметры строго положительны, а управления берутся из интервалов $U_1^* = [u_1^{min}, u_1^{max}], U_2^* = [u_2^{min}, u_2^{max}]$ соответственно.

В данной работе основной целью является исследование свойств и синтеза управления для задачи быстродействия во множество положений равновесия.

2 Общие свойства системы

Из биологической интерпретации вытекает, что численность популяции не может быть отрицательной. В следующем утверждении будет показано, что система удовлетворяет этому свойству.

Утверждение 1. *Множество* $\left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i > 0, i = \overline{1,4}\right\}$ *инвариантно относительно системы (1) .*

Доказательство.
Из системы (1) видно, что при обнулении координат, обнуляются соответственно и выражения для $\dot{x}_i$, так что координаты не могут поменять знак. Интегрируя в обратном времени, получим, что координаты не могут обнулиться.

$\square$

Рассмотрим положения равновесия (1) как функцию управления:

$$P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)), \text{ где}$$

$$P_1(u) = \frac{r_2 c_4 + b_2 r_4}{c_2 c_4}, \quad P_2(u) = \frac{r_1 + u_1}{b_1}, \quad P_3(u) = \frac{r_4}{c_4}, \quad P_4(u) = \frac{c_3(r_1 + u_1) + (u_2 - r_3) b_1}{b_1 b_3}. \tag{2}$$

Заметим, что от управления существенно зависят только вторая и четвертая координата, поэтому в дальнейшем будем обозначать $P(u) = (P_1, P_2(u), P_3, P_4(u))$.

Множество положений равновесия $E = \{P(u) \mid u \in U^*\}$ представляет из себя параллелограмм в пространстве (x_2, x_4). В нашей работе мы предполагаем его непустоту, для этого введем ограничение на параметры задачи:

$$P_4(u_1^{min}, u_2^{min}) > 0.$$

Наша задача состоит в исследовании возможности перевода системы (1) во множество E при кусочно-непрерывном управлении из U_1^*, U_2^*.

В работе [1] найден первый интеграл системы (1) :

$$K(x,u) = x_1 - P_1 \ln x_1 + \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u)\ln x_2) + \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3) + \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u)\ln x_4). \quad (3)$$

Докажем, что функция $K(x,u)$ сильно выпукла по x и имеет минимум по x в точке $(P(u),u)$.

Утверждение 2. *Функция $K(x,u)$ сильно выпукла на любом выпуклом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^4_+$, а ее глобальный минимум по x достигается в точке $(P(u),u)$.*

Доказательство.
Рассмотрим гессиан функции $K(x,u)$:

$$H = \operatorname{diag}\left(\frac{P_1}{x_1^2},\ \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2^2},\ \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3 x_3^2},\ \frac{P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4^2}\right).$$

Очевидно, он больше нуля при всех $x_i > 0$, следовательно, функция выпукла.
Обозначим

$$K_1(x_1) = x_1 - P_1 \ln x_1,\ K_2(x_2,u) = \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u)\ln x_2),$$

$$K_3(x_3) = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3),\ K_4(x_4,u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u)\ln x_4,$$

тогда $K(x,u) = K_1(x_1) + K_2(x_2,u) + K_3(x_3) + K_4(x_4,u)$. Поскольку

$$K_1'(x_1) = 1 - \frac{P_1}{x_1},\ K_2'(x_2,u) = \frac{b_1}{c_2} - \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2},$$

$$K_3'(x_3) = \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} - \frac{b_1 b_2 P_3}{c_2 c_3 x_3},\ K_4(x_4,u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} - \frac{b_1 b_2 b_3 P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4},$$

глобальный минимум K_i достигается при $x_i = P_i$, следовательно, глобальный минимум $K(x,u)$ достигается в точке $(P(u),u)$.
Докажем сильную выпуклость. Возьмем $x_i \leqslant \mu, i = \overline{1,4}$, где $\mu \geqslant \max\left\{P_i \mid i = \overline{1,4}\right\}$. Тогда $H \geqslant \delta \cdot I$, где

$$\delta = \min\left(P_1, \frac{P_2(u)b_1}{c_2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3}, \frac{P_4(u) b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}\right)/\mu^2.$$

Таким образом $\langle Hx, x\rangle \geqslant \langle \delta I x, x\rangle = \delta\|x\|^2$, что и завершает доказательство.

$\square$

Утверждение 3. *В системе (1) в области $\mathbb{R}^4_+$ не могут возникать особые режимы управления.*

Доказательство.
Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для нашей системы.

$$H(\psi,x,u) = \psi_1 x_1(r_1 + u_1 - b_1 x_2) + \psi_2 x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1) + \psi_3 x_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2) + \psi_4 x_4(-r_4 + c_4 x_3),$$

где $\psi(t) \in C,\ \psi(t) \neq 0$ и удовлетворяет сопряженной системе системе:

$$\begin{cases} \dot\psi_1 = -(\psi_1(r_1 + u - b_2 x_2) + \psi_2 x_2 c_2), \\ \dot\psi_2 = -(-b_1\psi_1 x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1) + \psi_3 x_3 c_3), \\ \dot\psi_3 = -(-b_2\psi_2 x_2 + \psi_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2) + \psi_4 x_4 c_4), \\ \dot\psi_4 = -(b_3\psi_3 x_3 + \psi_4(-r_4 + c_4 x_3)). \end{cases}$$

Из принципа максимума $H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = \sup\limits_{u\in U^*} H(\psi, x, u)$.

Посчитаем производную H по u :

$$H'_u = (\psi_1 x_1, \psi_3 x_3) \text{ откуда } u_1^* = \begin{cases} u_1^{max}, & \psi_1 x_1 \geqslant 0, \\ u_1^{min}, & \psi_1 x_1 < 0. \end{cases}, \quad u_2^* = \begin{cases} u_2^{max}, & \psi_3 x_3 \geqslant 0, \\ u_2^{min}, & \psi_3 x_3 < 0. \end{cases}$$

Особый режим будет возникать, если хотя бы одна из компонент управления определяется неоднозначно, то есть либо $\psi_1 x_1 = 0$, либо $\psi_3 x_3 = 0$ на ненулевом промежутке времени. Так как в нашей системе x_1 и x_3 положительны, учитываются только ψ_1, ψ_3.

Рассмотрим оба варианта.

1. Пусть $\psi_1(t) = 0, t \in [t_1 t_2]$. Рассмотрим последовательно $\dot{\psi}_i$ и убедимся, что все сопряженные переменные нулевые.

   Если $\psi_1(t) = 0$ на промежутке $[t_1, t_2]$, то $\dot{\psi}_1 = 0$ на этом же временном отрезке. Но тогда из первого сопряженного уравнения $\psi_2 = 0$, следовательно и $\dot{\psi}_2 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$, а тогда из второго сопряженного уравнения $\psi_3 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$. Аналогично $\dot{\psi}_3 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$ и из третьего сопряженного уравнения $\psi_4 = 0,\ t \in [t_1, t_2]$, что противоречит невырожденности $\psi(t)$.

2. Пусть $\psi_3(t) = 0, \psi_1(t) \neq 0, t \in [t_1 t_2]$, тогда и $\dot{\psi}_3(t) = 0$ на том же временном отрезке. Таким образом $-b_2\psi_2 x_2 + \psi_4 x_4 c_4 = 0$. Возьмем производную по времени от этого выражения:

$$\begin{aligned} 0 = &-b_2(\dot{\psi}_2 x_2 + \psi_2 \dot{x}_2) + c_4(\dot{\psi}_4 x_4 + \psi_4 \dot{x}_4) = \\ &= -b_2(-x_2(-b_1\psi_1 x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1)) + \psi_2 x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1)) + \\ &\qquad + c_4(\psi_4 x_4(-r_4 + c_4 x_3) + \psi_4 x_4(-r_4 + c_4 x_3)) = -b_1 b_2 x_1 x_2 \psi_1. \end{aligned}$$

   Но $x_1, x_2, \psi_1 \neq 0$, а значит, мы получили противоречие, что и завершает доказательство.

□

Вернемся к $K(x, u)$. Уменьшая ее, мы будем приближаться к положению равновесия. Посчитаем производную $\frac{dK(x,u^0)}{dt}$ при некотором $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ в силу системы (1) :

$$\begin{aligned} \frac{dK(x,u_0)}{dt} &= \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_3}\dot{x}_3 + \frac{\partial K(x,u_0)}{\partial x_4}\dot{x}_4 = \\ &= -\frac{1}{c_2 c_3 c_4}\left((u_2 - u_2^0)(b_1 b_2(r_4 - c_4 x_3)) + c_3(u_1 - u_1^0)(b_2 r_4 + c_4 r_2 - c_2 c_4 x_1)\right) = \\ &= \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(u_2 - u_2^0)(x_3 - P_3) + (u_1 - u_1^0)(x_1 - P_1). \end{aligned}$$

Заметим, что равновесие по x_1 и x_3 разделяет все пространство на четыре области, в каждой из которых будет свой минимизатор.

1. В области $x_1 > P_1, x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}$, $u_1^0 = u_1^{max}$, $u_3 = u_3^{min}$, $u_3^0 = u_3^{max}$.

2. В области $x_1 > P_1, x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}$, $u_1^0 = u_1^{max}$, $u_3 = u_3^{max}$, $u_3^0 = u_3^{min}$.

3. В области $x_1 < P_1$, $x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}$, $u_1^0 = u_1^{min}$, $u_3 = u_3^{min}$, $u_3^0 = u_3^{max}$.

4. В области $x_1 < P_1$, $x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}$, $u_1^0 = u_1^{min}$, $u_3 = u_3^{max}$, $u_3^0 = u_3^{min}$.

Введем 4 функции:

$$K_1(x) = K(x, u_1^{min}, u_2^{min}),\ K_2(x) = K(x, u_1^{max}, u_2^{min}),$$

$$K_3(x) = K(x, u_1^{min}, u_2^{max}),\ K_4(x) = K(x, u_1^{max}, u_2^{max}).$$

Беря управление, минимизирующее производную $\frac{dK, u^0}{dt}$ в соответствующей области, мы будем уменьшать три функции, а четвертая будет постоянной. Процесс будет повторяться до тех пор, пока мы не попадем на положение равновесия, где все четыре функции станут постоянными. Докажем, что за конечное время мы придем в положение равновесия, то есть с какого-то момента времени функции K_i станут постоянными.

Однако неопределенность возникает на самих гиперповерхностях $x_1 = P_1, x_3 = P_3$. Если возникает скользящий режим, то управлять системой становится затруднительно ввиду неоднозначности управления.

Рассмотрим подробнее, когда возникают скользящие режимы. Перепишем нашу систему в виде:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t) < 0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t) > 0. \end{cases}$$

Достаточное условие скользящего режима на отрезке $x \in [a, b]$ в этом случае будет:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\sigma \to 0+0} \dfrac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_2(x) < 0 \\ \lim\limits_{\sigma \to 0-0} \dfrac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_1(x) > 0. \end{cases} \quad \forall x \in [a,b] \subset \{x \mid \sigma(x,t) = 0\}$$

Таким образом мы можем рассматривать динамическую систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t) < 0 \\ f_s(x), & \sigma(x,t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t) > 0. \end{cases}$$

Регуляризуем скользящий режим таким образом, чтобы не уходить с линии переключения. Для этого применим метод продолжения Филиппова:

$$f_s(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x), \text{ где}$$

$$\alpha \in [0,1] : \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} f_s(x) = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle \nabla(\sigma), f_1 \rangle}{\langle \nabla(\sigma), f_1 - f_2 \rangle}.$$

Будем рассматривать отдельно случай скользящего режима по первой координате и по третьей.

В первом случае $f_1(x) = f(x, u_1^{max}, u_2^0),\ f_2(x) = f(x, u_1^{min}, u_2^0), \sigma(x,t) = \sigma(x) = x_1 - P_1$.

Мы предполагаем, что по x_3 скользящего режима пока нет и вторая компонента управления определяется однозначно.

Тогда получим, что скользящий режим возникает при

$$\begin{cases} \lim\limits_{x_1-P_1\to 0+0} x_1(r_1+u_1^{min}-b_1x_2)>0, \\ \lim\limits_{x_1-P_1\to 0-0} x_1(r_1+u_1^{max}-b_1x_2)<0, \end{cases}$$

откуда $P_2(u_1^{min})<x_2<P_2(u_1^{max})$.

То есть при таких x_2, если мы находимся вблизи гиперповерхности $x_1=P_1$ с соответствующей стороны, у нас возникает по первой координате скользящий режим. Тогда, применяя метод Филиппова, получим

$$\dot{x}(t)=\begin{cases} f_1(x), & \sigma(x,t)<0 \\ \alpha_1 f_1(x)+(1-\alpha_1)f_2(x), & \sigma(x,t)=0 \\ f_2(x), & \sigma(x,t)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}(t)=\begin{cases} f(x,u_1^{max},u_2^0), & \sigma(x,t)<0 \\ f(x,\alpha_1u_1^{min}+(1-\alpha_1)u_1^{max},u_2^0), & \sigma(x,t)=0 \\ f(x,u_1^{min},u_2^0), & \sigma(x,t)>0. \end{cases}$$

$$\alpha_1=\frac{r_1+u_1^{max}-b_1x_2}{u_1^{max}-u_1^{min}}.$$

Во втором случае аналогично получим, что скользящий режим по третьей координате возникает, если $\frac{c_3x_2-r_3+u_2^{min}}{b_3}<x_4<\frac{c_3x_2-r_3+u_2^{max}}{b_3}$.

После регуляризации получаем

$$\dot{x}(t)=\begin{cases} f(x,u_1^0,u_2^{max}), & \sigma(x,t)<0 \\ f(x,u_1^0,\alpha_2u_2^{min}+(1-\alpha_2)u_2^{max}), & \sigma(x,t)=0 \\ f(x,u_1^0,u_2^{min}), & \sigma(x,t)>0. \end{cases}$$

$$\alpha_2=\frac{-r_3+u_2^{max}-b_3x_4+c_3x_2}{u_2^{max}-u_2^{min}}.$$

Список литературы

[1] *Massarelli N., Hoffman K., Previte J. P.* Effect of parity on productivity and sustainability of Lotka–Volterra food chains. // Mathematical Biology. December of 2014. 1609–1626.