А. Ф. Филиппов, Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, *Матем. сб.*, 1960, том 51(93), номер 1, 99–128

1960 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 51 (93), № 1

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью

А. Ф. Филиппов (Москва)

Введение

До настоящего времени обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывной правой частью изучались, главным образом, в следующих двух направлениях. Во-первых, для дифференциальных уравнений (и систем) с разрывной правой частью очень общего вида доказывались теоремы о существовании решения и исследовались основные свойства решений. Эти результаты связаны с обобщением понятия решения дифференциального уравнения и охватывают также тот случай, когда правая часть дифференциального уравнения разрывна во всех точках рассматриваемой области (см., например, работы [1] — [4]).

Во-вторых, для дифференциальных уравнений (и систем) с кусочно-непрерывной правой частью в ряде работ (например, [5] — [10]) исследовалось поведение решений с качественной стороны. Решения таких уравнений составляются из кусков, каждый из которых проходит в области, где правая часть уравнения непрерывна, а иногда также из кусков, лежащих на границе двух областей непрерывности правой части. Применение такого метода вызывает затруднения в тех случаях, когда в течение конечного промежутка времени решение бесконечное число раз попадает на линию (или поверхность) разрыва правой части дифференциального уравнения. Такой случай может представиться, например, для рассмотренного в [7] уравнения вынужденных колебаний при одновременном наличии двух родов трения: вязкого и сухого. Уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + k\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + cx = e(t),$$

где b, k, c — положительные постоянные, $e(t)$ — непрерывная периодическая функция. В подобных случаях нельзя доказать обычными методами теоремы о существовании решения, о продолжаемости его, о единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий, в связи с чем такие случаи до сих пор оставались неисследованными.

В настоящей работе дается новое определение решения системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и изучаются свойства таких решений (существование, продолжаемость, единственность, непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части). При некоторых ограничениях обосновывается возможность применения к таким уравнениям основных методов качественной теории дифференциальных уравнений. Полученные результаты используются для исследования систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывной правой частью. Такой подход позволяет преодолеть затруднения появляющиеся в тех случаях, когда решение не может быть составлено из конечного числа гладких кусков, и получить ряд новых результатов. В частности, для систем уравнений с кусочно-непрерывной правой частью при достаточно широких предположениях доказываются теоремы существования, продолжаемости, единственности и непрерывной зависимости решения при $t>t_0$ от начальных условий, заданных при $t=t_0$. Для уравнений нелинейных колебаний в случае, когда трение является разрывной функцией от скорости, обосновывается возможность применения таких же методов исследования периодических решений, как и для аналогичных уравнений с непрерывным трением.

В тех случаях, когда решение, попав при некотором $t=t_1$ на линию разрыва (или поверхность разрыва) правой части системы дифференциальных уравнений, уже не может с нее сойти, возникает вопрос о продолжении решения при $t>t_1$. Из определения решения, сформулированного в этой статье, вытекает, что такое решение вполне определенным образом продолжается вдоль линии (или поверхности) разрыва. Этот способ продолжения допускает простое истолкование. Оказывается, что решение (в смысле настоящей статьи) уравнения с разрывной правой частью можно рассматривать (аналогично [6]), как хорошее приближение к решению уравнения с непрерывной правой частью, если правая часть сильно изменяется в некоторой очень узкой полосе и сравнительно слабо меняется вне этой полосы. С другой стороны, это же решение можно рассматривать (аналогично [9]), как хорошее приближение к решению уравнения с запаздыванием, если время запаздывания очень мало. Следовательно, полученные здесь результаты могут применяться также к изучению систем автоматического регулирования при наличии релейных переключений с запаздыванием (в частности, и на участках «скользящего режима», т. е. когда переключения с одного режима на другой и обратно следуют друг за другом с промежутками, продолжительность которых — величина порядка времени запаздывания).

§ 1. Определение решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью

1. Обозначения. Для краткости будем обозначать точку $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства через $\boldsymbol{x}$, точку $(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(n+1)$-мерного пространства — через $(t, \boldsymbol{x})$. Часто будем называть $\boldsymbol{x}$ вектором и обозначать через $|\boldsymbol{x}|$ его норму:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

а через $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$; норма разности $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ равна расстоянию между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Через $U(\boldsymbol{x}, \delta)$ обозначим δ-окрестность точки $\boldsymbol{x}$ в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$. Замыкание какого-либо множества E будем обозначать чертой сверху: $\bar{E}$. Выпуклое замыкание, т. е. наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее множество E, обозначим через $\operatorname{konv} E$ (от слова konvex — выпуклый). Множество значений функции (или вектор-функции) $f(\boldsymbol{x})$, принимаемых на множестве E, обозначим через $f(E)$. Если не все множество E принадлежит области определения функции $f(\boldsymbol{x})$, то через $f(E)$ обозначаем множество значений функции $f(\boldsymbol{x})$, в тех точках множества E, в которых она определена. Множество значений функции (вектор-функции) $f(t, \boldsymbol{x})$, принимаемых при $\boldsymbol{x} \in E$ и фиксированном t, обозначим через $f(t, E)$.

В теории функций действительного переменного имеются понятие существенной верхней грани скалярной функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ на множестве E (если пренебречь значениями функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ на множествах меры нуль):

$$\operatorname{vrai\,max}_{\boldsymbol{x} \in E} \varphi(\boldsymbol{x}) = \inf_{\mu N = 0} \sup_{\boldsymbol{x} \in E - N} \varphi(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где μ — мера Лебега, а нижняя грань (inf) берется по всем множествам меры нуль, и аналогичное понятие существенной верхней грани функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}$, для которой примем обозначение $M\{\varphi(\boldsymbol{x})\}$:

$$M\{\varphi(\boldsymbol{x})\} = \lim_{\delta \to 0} \operatorname{vrai\,max}_{\boldsymbol{x}' \in U(\boldsymbol{x}, \delta)} \varphi(\boldsymbol{x}'). \tag{2}$$

Существенные нижние грани функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ на множестве E и в точке $\boldsymbol{x}$ будем обозначать соответственно так:

$$\operatorname{vrai\,min}_{\boldsymbol{x} \in E} \varphi(\boldsymbol{x}), \qquad m\{\varphi(\boldsymbol{x})\}.$$

Для функции $f(t, \boldsymbol{x})$ мы будем определять существенную верхнюю грань так же как для $\varphi(\boldsymbol{x})$, изменяя только $\boldsymbol{x}$, а t будем считать параметром. Чтобы это подчеркнуть, будем писать $M_x\{f(t, \boldsymbol{x})\}$.

2. Определение решения. Мы будем рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ n \geqslant 1), \tag{3}$$

правые части которой удовлетворяют следующему условию.

Условие А. Функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ — вещественная измеримая функция, определенная почти всюду в открытой или замкнутой области Q пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$; для любой замкнутой ограниченной области $D \subseteq Q$ существует такая почти всюду конечная функция $A(t)$, что почти всюду в D

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n)| < A(t). \tag{4}$$

Большинство результатов будет получено при дополнительном предположении суммируемости функции $A(t)$.

В векторных обозначениях система (3) запишется в виде одного уравнения:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$.

Дадим два равносильных между собой определения решения системы (3) или, что то же самое, уравнения (5).

I. Вектор-функция $\boldsymbol{x}(t)$, определенная на интервале (t_1, t_2), называется решением уравнения (5), если она абсолютно непрерывна и если при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ для любого $\delta > 0$ вектор $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$ принадлежит наименьшему выпуклому замкнутому множеству (n-мерного пространства), содержащему все значения вектор-функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}')$, когда $\boldsymbol{x}'$ пробегает почти всю δ-окрестность точки

$x(t)$ в пространстве x-ов (при фиксированном t), т. е. всю окрестность, кроме множества меры нуль. В принятых ранее обозначениях

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} \in \prod_{\delta>0} \prod_{\mu N=0} \operatorname{konv} \boldsymbol{f}(t, U(\boldsymbol{x}(t), \delta) - N). \tag{6}$$

Правую часть формулы (6) будем обозначать через $K\{\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))\}$.

II. Вектор-функция $\boldsymbol{x}(t)$, определенная на интервале (t_1, t_2), называется р е ш е н и е м у р а в н е н и я (5), если она абсолютно непрерывна и если при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ при любом выборе ортогональной системы координат в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$

$$m_x\{f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\} \leqslant \frac{dx_i(t)}{dt} \leqslant M_x\{f_i(t, x_1, \ldots x_n)\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где f_i — правые части системы уравнений вида (3), которая является записью уравнения (5) в выбранной ортогональной системе координат.

В этих определениях мы предполагаем, что при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ часть области определения функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, попавшая в сколь угодно малую n-мерную окрестность точки $\boldsymbol{x}(t)$ в плоскости $t = \text{const}$, имеет положительную меру. Это условие, очевидно, выполнено, если решение $\boldsymbol{x}(t)$ проходит в области определения функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ и эта область является или замкнутой областью с кусочно-гладкой границей (для произвольной замкнутой области это условие может и не выполняться), или произвольной открытой областью в пространстве $(t, x_1, \ldots, x_n)$. Если это условие выполнено, то определения I и II имеют смысл, т. е. при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ правая часть формулы (6) не является пустым множеством, а в формуле (7) левая и правая части определены и левая не превосходит правую. Это вытекает из следующей леммы.

Л е м м а 1. *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ определена и измерима на множестве E, $\mu E > 0$. Тогда существует такое множество N_0 меры нуль, что*

$$\prod_{\mu N=0} \overline{\boldsymbol{f}(E - N)} = \overline{\boldsymbol{f}(E - N_0)} \tag{8}$$

(черта означает замыкание), причем (8) *остается справедливым, если заменить замыкание на выпуклое замыкание.*

В качестве N_0 можно взять множество тех точек множества E, которые не являются точками плотности множества E, и тех точек, в которых функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ не является асимптотически непрерывной. Тогда утверждение леммы становится очевидным.

3. Равносильность двух определений решения.

Л е м м а 2. *Для того чтобы абсолютно непрерывная вектор-функция $\boldsymbol{x}(t)$ являлась решением уравнения* (5) *в смысле определения* I, *необходимо и достаточно, чтобы при почти всех t для каждого вектора $\boldsymbol{v}$ выполнялось неравенство*

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} \cdot \boldsymbol{v} \leqslant M_x\{\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{v}\}. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и. Из (9) и (2) следует, что для каждого $\boldsymbol{v}$ и каждого $\delta > 0$

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\cdot \boldsymbol{v} \leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{\boldsymbol{x}'\in U}(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}) = \sup_{\boldsymbol{x}'\in U-N_0}(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}), \tag{10}$$

где $U=U(\boldsymbol{x}(t),\delta)$, N_0 — то же, что в лемме 1. Для любого множества A множество $\operatorname{konv} A$ есть пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих A. Поэтому, если для каждого вектора $\boldsymbol{v}$ имеем $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant\sup\limits_{x\in A}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})$, то $\boldsymbol{b}\in\operatorname{konv} A$. Значит, из (10) следует, что

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\in\operatorname{konv}\boldsymbol{f}(t,U(\boldsymbol{x}(t),\delta)-N_0).$$

В силу леммы 1 и формулы (6) $\boldsymbol{x}(t)$ — решение в смысле определения I. Аналогично доказывается необходимость.

Из леммы 2 вытекает равносильность определений I и II, так как неравенство (9) превращается в (7), если в качестве $\boldsymbol{v}$ взять вектор длины 1, направленный вдоль координатной оси x_i (или противоположно направленный).

Замечание. Условия леммы 2 можно несколько ослабить, если уравнение (5) удовлетворяет условию А. Достаточно требовать, чтобы для каждого постоянного вектора $\boldsymbol{v}$ при почти всех t выполнялось неравенство (9), т. е. можно допустить, чтобы множество (меры нуль) значений t, при которых неравенство (9) не выполняется, зависело от вектора $\boldsymbol{v}$. При этом утверждение леммы 2 остается справедливым.

В самом деле, при этом условии для почти всех t неравенство (9) выполняется одновременно для счетного всюду плотного множества векторов. Выбирая из этого множества последовательность, сходящуюся к произвольному вектору $\boldsymbol{v}$ и переходя по ней к пределу в неравенстве (9) (это возможно при тех t, при которых $A(t)<\infty$ в условии А), получим, что при почти всех t неравенство (9) выполняется для произвольного $\boldsymbol{v}$. Тогда, в силу леммы 2, $\boldsymbol{x}(t)$ — решение.

4. Сравнение с другими определениями решения.

а) Сравнение с обычным определением решения в случае непрерывной правой части уравнения. Пусть при $t_1<t<t_2$ график вектор-функции $\boldsymbol{x}(t)$ проходит внутри области, в которой правая часть уравнения (5) непрерывна относительно $(t,\boldsymbol{x})$. Для того чтобы при этих t вектор-функция $\boldsymbol{x}(t)$ была решением уравнения (5) в смысле определения I, необходимо и достаточно, чтобы она была решением этого уравнения в обычном смысле, т. е. чтобы она на всем интервале (t_1,t_2) имела производную, равную $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))$.

В самом деле, если $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ непрерывна, то множество $K\{\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\}$ состоит из одной точки, совпадающей с $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$. Если $\boldsymbol{x}(t)$ — решение в обычном смысле, то $\boldsymbol{x}(t)$ абсолютно непрерывна и $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))=K\{\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))\}$, т. е. $\boldsymbol{x}(t)$ — решение в смысле определения I. Обратно, пусть $\boldsymbol{x}(t)$ — решение в смысле определения I, тогда при почти всех $t\in(t_1,t_2)$ $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\in K\{\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))\}$, т. е., в силу сказанного выше, почти всюду $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))$. Вследствие абсолютной непрерывности $\boldsymbol{x}(t)$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}(\tau))\,d\tau. \tag{11}$$

Так как подынтегральная функция непрерывна, то при всех $t \in (t_1, t_2)$ существует непрерывная производная $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$, т. е. $\boldsymbol{x}(t)$ — решение в обычном смысле.

б) Сравнение с определением решения Каратеодори [1]. Пусть в области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$ правая часть уравнения (5) измерима как функция $n+1$ переменных и непрерывна по $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ при любом фиксированном t; пусть почти всюду в области G $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant A(t)$, где функция $A(t)$ суммируема. Тогда всякое решение уравнения (5) в смысле определения I является решением в смысле Каратеодори, т. е. является абсолютно непрерывной функцией, почти всюду удовлетворяющей уравнению (5), и, обратно, всякое решение в смысле Каратеодори является решением в смысле определения I.

Для доказательства достаточно заметить, что, в силу непрерывности по $\boldsymbol{x}$ функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, множество $K\{\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\}$ состоит из одной точки, совпадающей с $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$.

в) Сравнение с определением Розенталя [2]. Если правые части системы (3) удовлетворяют условию А, где функция $A(t)$ суммируема, то всякое решение этой системы в смысле определения II будет решением в смысле Розенталя [2]. Обратное, вообще говоря, неверно. Эти утверждения почти очевидны.

г) Сравнение с определением Викторовского [3]. Если правые части системы (3) удовлетворяют условию А, где функция $A(t)$ суммируема, то в случае $n = 1$, т. е. когда система состоит лишь из одного уравнения, определение I равносильно определению статьи [3] (это непосредственно вытекает из сформулированного в [3] на стр. 239—240 условия, необходимого и достаточного для того, чтобы данная функция была решением в смысле [3]); в случае $n > 1$ всякое решение в смысле определения I является решением в смысле [3] (доказательства мы не приводим), но обратное, вообще говоря, неверно, как показывает следующий пример.

Всякое решение системы

$$\frac{dx_1}{dt} = 4 + 2\,\mathrm{sgn}\,x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 2 - 4\,\mathrm{sgn}\,x_2 \tag{12}$$

рано или поздно попадает на прямую $x_2 = 0$ и уже не может сойти с нее. Покажем, что определение I дает однозначное продолжение этого решения, а определение статьи [3] — неоднозначное.

Если точка M лежит на оси x_1, то в окрестности этой точки вектор $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, компоненты которого — правые части системы (12), принимает два значения: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^- = (2,6)$ при $x_2 < 0$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^+ = (6, -2)$ при $x_2 > 0$. Отложим из точки M эти два вектора и соединим их концы отрезком AB (рис. 1). Этот отрезок и будет множеством $K\{\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\}$, в котором, согласно определению I, должен лежать конец вектора $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ для точки M. В то же время «вектор скорости» $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ должен лежать на оси x_1, так как решение не может сойти с нее ни вверх, ни вниз. Следовательно, конец вектора $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ должен лежать в точке пересечения отрезка AB и оси x_1. Таким образом, этот вектор определяется однозначно. Легко подсчитать, что в рассматриваемом случае $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (5,0)$.

С другой стороны, пользуясь определением решения в [3] (стр. 224), легко показать, что любая пара функций вида $x_1(t) = c_0 + c_1 t$, $x_2(t) = 0$, где $2 \leqslant c_1 \leqslant 6$, является решением в смысле [3]. Очевидно, эта же пара функций будет решением и в смысле статьи [2].

Итак, на линии разрыва правых частей системы (12) «скорость движения» $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ определяется однозначно для решений в смысле определения I и неоднозначно для решений в смысле [2] и [3].

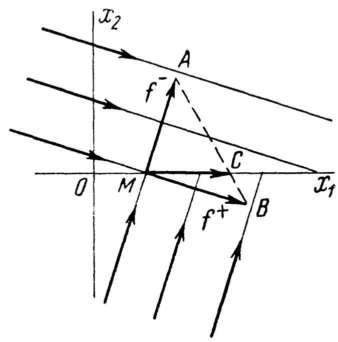

Рис. 1

Заметим, что для систем уравнений с правой частью, не зависящей от t, определения решения в [2] и [3] равносильны.

д) Сравнение с другими известными определениями решения. В работах [4] и [11] обобщение понятия решения дифференциального уравнения основано на обобщении понятия интеграла и существенно отлично от обобщения, рассматриваемого в этой статье.

В работах [5], [6], [8], [9] рассматриваются только кусочно-линейные уравнения. Решение, которое попадает в момент $t = t_1$ на поверхность разрыва и не может тотчас же с нее сойти, в работах [5], [8] остается при $t > t_1$ в той точке, куда оно попало (т. е. при $t \geqslant t_1$ авторы этих работ полагают $x_i(t) = \text{const}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$). В работах [6], [9] такое решение продолжается однозначно и совпадает с решением в смысле определения I этой статьи. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть области G^- и G^+ в пространстве $x_1, \ldots, x_n$ разделены гладкой поверхностью S. Пусть вектор-функция $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ ограничена и для любого постоянного t существуют ее предельные значения $\boldsymbol{f}^-(t, \boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}^+(t, \boldsymbol{x})$ при приближении к поверхности S из областей G^- и G^+. Пусть f_N^- и f_N^+ — проекции векторов $\boldsymbol{f}^-$ и $\boldsymbol{f}^+$ на нормаль к поверхности S, направленную от G^- к G^+. Пусть вектор-функция $\boldsymbol{x}(t)$ абсолютно непрерывна и при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ имеем $\boldsymbol{x}(t) \in S$, $f_N^-(t, \boldsymbol{x}(t)) \geqslant 0$, $f_N^+(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant 0$, $f_N^- - f_N^+ > 0$. Чтобы $\boldsymbol{x}(t)$ было решением уравнения* (5), *необходимо и достаточно, чтобы при почти всех $t \in [t_1, t_2]$*

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}^0(t, \boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{f}^0 = \alpha \boldsymbol{f}^+ + (1-\alpha)\boldsymbol{f}^-, \qquad \alpha = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+}. \tag{13}$$

Доказательство. По определению I, конец вектора $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$ должен принадлежать отрезку, соединяющему точки $\boldsymbol{f}^-$ и $\boldsymbol{f}^+$, т. е. отрезку $\alpha\boldsymbol{f}^+ + (1-\alpha)\boldsymbol{f}^-$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. С другой стороны, проекция вектора $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$ на нормаль к S должна быть равна нулю. Отсюда находим значение α в (13).

Замечание. Если $\boldsymbol{f}^-$ и $\boldsymbol{f}^+$ непрерывны по $(t, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in S$, то равенство (13) справедливо при всех $t \in (t_1, t_2)$ (как в п. 4а)).

Легко видеть, что значение $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ для решения, лежащего на поверхности разрыва, в работах [6], [9] — то же, что в лемме 3.

§ 2. Замена переменных в дифференциальном уравнении

Из определения решения (§ 1) вытекает, что любое решение системы (3) при любом ортогональном преобразовании координат $x_1, \ldots, x_n$ переходит в решение системы, полученной из (3) с помощью этого преобразования (как для систем уравнений с непрерывной правой частью). Однако из-за неравноправности определения решения по отношению к t и $x_1, \ldots, x_n$, вообще говоря, недопустима замена независимого переменного t на $\tau = \varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$. В приводимых ниже теоремах 1 и 2 обосновывается возможность некоторых замен переменных в системе (3).

Условие В. Будем говорить, что уравнение (5) или система (3) удовлетворяет условию В в открытой или замкнутой области Q пространства $t, \boldsymbol{x}$, если функция $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ определена почти всюду в области Q, измерима, и для любой ограниченной замкнутой области $D \subseteq Q$ существует такая суммируемая функция $B(t)$, что почти всюду в D

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant B(t). \tag{14}$$

Лемма 4. *Пусть уравнение* (5) *удовлетворяет условию* В. *Для того чтобы вектор-функция* $\boldsymbol{x}(t)$ *являлась решением этого уравнения на отрезке* $[t_0, t_2]$, *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $t_1 \in [t_0, t_2]$

$$\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varphi}(t)\, dt, \tag{15}$$

где при почти всех t

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \in K\{\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))\}. \tag{16}$$

Утверждение леммы непосредственно вытекает из определения I и свойств интеграла Лебега.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (5) *удовлетворяет условию* В *в области* Q, *и функция* $t(\tau)$ *монотонна и абсолютно непрерывна. Тогда каждое решение уравнения* (5) *при замене переменного* $t = t(\tau)$ *переходит в решение уравнения*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}), \tag{17}$$

где $\boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(t(\tau), \boldsymbol{x}) \cdot t'(\tau)$ *при тех* τ, *для которых* $t'(\tau) \neq 0$, *и* $\boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}) = 0$ *при тех* τ, *для которых* $t'(\tau) = 0$. *Обратно, каждое решение уравнения* (17) *переходит в решение уравнения* (5).

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 4, правил замены переменных в интеграле Лебега ([12], стр. 303—304) и свойств абсолютно непрерывных функций (в частности, см. [12], стр. 75).

Замечание. В теореме 1 функцию $t(\tau)$ можно подобрать так, что правая часть полученного уравнения (17) будет ограничена в любой ограниченной замкнутой области $D \subset Q$ (быть может, в разных областях D ограничена разными константами).

В самом деле, пусть $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots$ — последовательность замкнутых ограниченных областей, в сумме дающих область D, причем область D_k содержится в полосе $-k \leqslant t \leqslant k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и пусть почти всюду в D_k $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant B_k(t)$. Там, где функция $B_k(t)$ не определена (при $|t| > k$), положим ее равной нулю. Пусть

$$b_k = 2^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_k(t)\,dt, \qquad \Phi_k(t) = \frac{1}{b_k} \int\limits_{-\infty}^{t} B_k(s)\,ds.$$

Функция $\Phi_k(t)$ — абсолютно непрерывная, возрастающая, $0 \leqslant \Phi_k(t) \leqslant 2^{-k}$. Следовательно, ряд $t + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t)$ сходится, и его сумма $\tau(t)$ — возрастающая абсолютно непрерывная функция ([12], стр. 75). Легко видеть, что замена переменного $t = t(\tau)$, где функция $t(\tau)$ — обратная к $\tau(t)$, удовлетворяет всем требованиям.

Теорема 2. *Пусть система* (3) *удовлетворяет условию* А. *Тогда при любой замене переменных вида*

$$y_i = \psi_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

где функции ψ_i непрерывно дифференцируемы и якобиан преобразования не обращается в нуль, всякое решение системы (3) *переходит в решение системы*

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(t, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

где

$$F_i(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} f_j(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{20}$$

получающейся из (3) *с помощью формальной замены переменных* (18).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ — решение уравнения (5), которое является векторной записью системы (3), $\boldsymbol{y}(t)$ выражается через $\boldsymbol{x}(t)$ формулами (18). Тогда при почти всех t для любого вектора $\boldsymbol{v}$ выполняется неравенство (9) и существуют такие $\delta > 0$ и C, что при почти всех $\boldsymbol{x}'$, удовлетворяющих неравенству $|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}(t)| < \delta$, имеем $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}')| \leqslant C$. Пусть t_1 — любое из таких t. Из (18) следует:

$$\frac{dy_i(t_1)}{dt} = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j(t_1)}{\partial t},$$

где значения производных берутся при $t = t_1$, $x_j = x_j(t_1)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Обозначим через Φ линейное преобразование n-мерного пространства с матрицей $\left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1,\ldots,n}$; значения производных берутся в указанной выше точке.

Тогда в векторной записи получим:

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t_1)}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Phi\frac{d\boldsymbol{x}(t_1)}{dt}. \tag{21}$$

Обозначим через Φ^* линейное преобразование, сопряженное Φ. Преобразование Φ^* — невырожденное, так как его якобиан не равен нулю; поэтому произвольный вектор $\boldsymbol{v}$ в (9) можно заменить на $\Phi^*\boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{w}$ — тоже произвольный вектор. Так как для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ $\Phi\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\Phi^*\boldsymbol{b}$, то из (9) и (2) следует:

$$\Phi\frac{d\boldsymbol{x}(t_1)}{dt}\cdot\boldsymbol{w} \leqslant M_x\{\boldsymbol{f}(t_1, \boldsymbol{x}(t_1))\cdot\Phi^*\boldsymbol{w}\} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\ \operatorname*{vrai\,max}_{\boldsymbol{x}'\in U(\boldsymbol{x}(t_1),\,\delta)} (\Phi\boldsymbol{f}(t_1, \boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{w}). \tag{22}$$

С другой стороны, чтобы $\boldsymbol{y}(t)$ было решением системы (19), в силу леммы 2 надо, чтобы при почти всех t для любого $\boldsymbol{w}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{w} \leqslant \lim_{\delta\to 0}\ \operatorname*{vrai\,max}_{\boldsymbol{y}'\in U(\boldsymbol{y}(t),\,\delta)} (\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}')\cdot\boldsymbol{w}). \tag{23}$$

Но в силу (20)

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}') = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Phi_{x'}\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}'), \tag{24}$$

где $\boldsymbol{x}'$ — точка, соответствующая точке $\boldsymbol{y}'$ в силу преобразования (18), $\Phi_{x'}$ — та же матрица, что и Φ, только значения производных теперь берутся при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$. Полагая в (23) $t = t_1$ и оценивая левую часть с помощью соотношений (21) и (22), а правую — с помощью (24), видим, что для выполнения условия (23) достаточно, чтобы правая часть (22) не превосходила выражения

$$\lim_{\delta\to 0}\ \operatorname*{vrai\,max}_{\boldsymbol{y}'\in U(\boldsymbol{y}(t_1),\,\delta)} (\Phi_{x'}\boldsymbol{f}(t_1, \boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{w}). \tag{25}$$

Вследствие невырожденности преобразования (18), из того, что $\boldsymbol{x}'$ находится в окрестности точки $\boldsymbol{x}(t_1)$, следует, что $\boldsymbol{y}'$ находится в окрестности точки $\boldsymbol{y}(t_1)$, и обратно. Поэтому разность правой части (22) и выражения (25) по модулю не превосходит

$$\lim_{\delta\to 0}\ \operatorname*{vrai\,max}_{\boldsymbol{x}'\in U(\boldsymbol{x}(t_1),\,\delta)} ((\Phi - \Phi_{x'})\boldsymbol{f}(t_1, \boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{w}). \tag{26}$$

В силу непрерывности частных производных, из которых состоят матрицы Φ и $\Phi_{x'}$, при $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{x}(t_1)$ имеем $\Phi_{x'} \to \Phi$; далее, при почти всех $\boldsymbol{x}'$ в рассматриваемой окрестности $|\boldsymbol{f}(t_1, \boldsymbol{x}')| \leqslant C$, $\boldsymbol{w} = \text{const}$. Следовательно, предел (26) равен нулю. Теорема доказана.

§ 3. Теоремы существования решения

1. Лемма 5. *Пусть уравнение* (5) *удовлетворяет условию* В. *Для того чтобы непрерывная вектор-функция* $\boldsymbol{x}(t)$ *была решением уравнения* (5) *на интервале* (t_1, t_2), *необходимо и достаточно, чтобы для любых*

t' и $t''>t'$ из этого интервала и для любого вектора $\boldsymbol{v}$ выполнялось неравенство

$$(\boldsymbol{x}(t'')-\boldsymbol{x}(t'))\cdot\boldsymbol{v}\leqslant\int\limits_{t'}^{t''}M_x\{\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))\cdot\boldsymbol{v}\}\,dt. \tag{27}$$

Необходимость вытекает из леммы 2. Докажем достаточность. Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет неравенству (27). При достаточно малом ε в замкнутой ε-окрестности дуги $t'\leqslant t\leqslant t''$ кривой $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ почти везде выполняется неравенство (14). Поэтому из (27) следует:

$$|\,\boldsymbol{x}(t'')-\boldsymbol{x}(t')\,|\leqslant\int\limits_{t'}^{t''}B(t)\,dt. \tag{28}$$

Так как это неравенство справедливо при любых t' и $t''>t'$, а функция $B(t)$ суммируема, то вектор-функция $\boldsymbol{x}(t)$ абсолютно непрерывна. Деля (27) на $t''-t'$ и полагая $t''\to t'+0$, получим, что при почти всех t функция $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет неравенству (9). В силу замечания к лемме 2, $\boldsymbol{x}(t)$ — решение уравнения (5).

Лемма 6. *Пусть уравнение* (5) *удовлетворяет условию* В *в области Q, содержащей замкнутое ограниченное множество D. Тогда все решения уравнения* (5) *на тех интервалах изменения t, на которых их графики содержатся в D, равностепенно непрерывны.*

Доказательство. Пусть D_ε — замкнутая ε-окрестность множества D, причем $D\subset D_\varepsilon\subset Q$. В D_ε почти всюду выполняется неравенство (14) с суммируемой функцией $B(t)$. Следовательно, для любого содержащегося в D решения $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (5) справедливы формулы (15), (16), где $|\,\varphi(t)\,|\leqslant B(t)$. Отсюда получается оценка (28), означающая равностепенную непрерывность решений (даже равностепенную абсолютную непрерывность).

2. Предельный переход в дифференциальном уравнении.

Теорема 3. *Пусть в области Q заданы уравнение* (5), *удовлетворяющее условию* В, *и уравнения*

$$\frac{d\boldsymbol{x}_k}{dt}=\boldsymbol{f}_k(t,\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{g}_k(t,\boldsymbol{x}_k)\quad(k=1,\,2,\,\ldots) \tag{29}$$

с измеримыми правыми частями. Пусть при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ последовательность решений $\boldsymbol{x}_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ уравнений (29) *содержится в замкнутой ограниченной области $D\subset Q$. Пусть для почти всех точек $(t,\boldsymbol{x})$ замкнутой ε-окрестности D_ε области D (где $D\subset D_\varepsilon\subset Q$) имеем*

$$\boldsymbol{f}_k(t,\boldsymbol{x})\in\prod_{\mu N=0}\operatorname{konv}\boldsymbol{f}(t,U(\boldsymbol{x},r_k)-N)\quad(k=1,2,\ldots), \tag{30}$$

$$r_k\to 0,\qquad|\,\boldsymbol{g}_k(t,\boldsymbol{x})\,|\leqslant\psi_k(t),\qquad\int\limits_{t_1}^{t_2}\psi_k(t)\,dt\to 0\quad(k\to\infty), \tag{30'}$$

где $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ — правая часть уравнения (5) (обозначения см. в § 1). *Тогда*:

а) *решения $\boldsymbol{x}_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ равностепенно непрерывны на отрезке*

$[t_1, t_2]$, *и, значит, из них можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность*;

б) *предельная функция* $\boldsymbol{x}(t)$ *любой равномерно сходящейся при* $k \to \infty$ *последовательности решений* $\boldsymbol{x}_k(t)$ *уравнений* (29) *есть решение уравнения* (5).

Замечание. Условие (30), очевидно, выполнено, если $\boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$. Условие (30) также выполнено, если $\boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x})$ есть среднее значение (с любым неотрицательным весом) функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ по n-мерной окрестности $U(\boldsymbol{x}, r_k)$ точки $\boldsymbol{x}$.

Доказательство. а) В силу условия В, функция $\boldsymbol{f}$ удовлетворяет неравенству (14) почти всюду в D_ε. Тогда при $r_k < \frac{\varepsilon}{2}$ функция $\boldsymbol{f}_k$ удовлетворяет тому же неравенству в $D_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Для любого $\eta > 0$ существует такое $k(\eta)$, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_k(t)\, dt < \frac{\eta}{2} \quad \text{при } k > k(\eta).$$

Вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta > 0$, что для любого множества $E \in [t_1, t_2]$ меры, меньшей, чем δ,

$$\int_E B(t)\, dt < \frac{\eta}{2}, \quad \int_E \psi_k(t)\, dt < \frac{\eta}{2} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ k(\eta)).$$

Тогда для любого множества $E \in [t_1, t_2]$ меры, меньшей, чем δ, и всех k

$$\int_E (B(t) + \psi_k(t))\, dt < \eta. \tag{31}$$

Так как при $r_k < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. при $k > k_1$, почти всюду в $D_{\frac{\varepsilon}{2}}$

$$| \boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_k(t, \boldsymbol{x}) | \leqslant B(t) + \psi_k(t),$$

то модуль приращения любого из решений $\boldsymbol{x}_k(t)$, $k > k_1$ на любом отрезке длины, меньшей δ, не превосходит η (это следует из неравенства (31) и оценки вида (28), полученной в лемме 6), т. е. решения $\boldsymbol{x}_k(t)$, $k > k_1$, равностепенно непрерывны (даже равностепенно абсолютно непрерывны). Добавление конечного числа решений $\boldsymbol{x}_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, k_1)$ не нарушает равностепенной непрерывности.

б) Пусть $\boldsymbol{x}_k(t) \to \boldsymbol{x}(t)$ равномерно на отрезке $[t_1, t_2]$. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Существует такое $k(\delta)$, что при $k > k(\delta)$

$$r_k < \frac{\delta}{2}, \quad | \boldsymbol{x}_k(t) - \boldsymbol{x}(t) | < \frac{\delta}{2}. \tag{32}$$

Согласно лемме 5, для любых t' и t'', где $t_1 \leqslant t' < t'' \leqslant t_2$, и любого вектора $\boldsymbol{v}$

$$(\boldsymbol{x}_k(t'') - \boldsymbol{x}_k(t')) \cdot \boldsymbol{v} \leqslant \int_{t'}^{t''} M_x \{[\boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x}_k(t)) + \boldsymbol{g}_k(t, \boldsymbol{x}_k(t))] \cdot \boldsymbol{v}\}\, dt. \tag{33}$$

Из неравенства $\sup(f+g) \leqslant \sup f + \sup g$ легко получить, что неравенство (33) не нарушается, если его правую часть разложить на два слагаемых, одно из которых содержит только $\boldsymbol{f}_k$, а другое — только $\boldsymbol{g}_k$. Первое слагаемое при $k > k(\delta)$, в силу (30) и (32), зависит лишь от значений функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}(t), \delta)$ и поэтому не превосходит

$$\int_{t'}^{t''} \operatorname{vrai} \max_{\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}(t), \delta)} (\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v})\, dt. \tag{34}$$

Второе слагаемое, в силу (30′), стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, предел левой части (33) при $k \to \infty$, т. е. $(\boldsymbol{x}(t'') - \boldsymbol{x}(t')) \cdot \boldsymbol{v}$, не превосходит выражения (34). Переходя в (34) к пределу при $\delta \to 0$ (подынтегральное выражение при достаточно малых δ не превосходит суммируемой функции $B(t) \cdot |\boldsymbol{v}|$) и пользуясь обозначением (2), мы получим, что функция $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет неравенству (27) и, следовательно, является решением уравнения (5).

Следствие. *Если уравнение* (5) *удовлетворяет условию* В, *то предел любой равномерно сходящейся последовательности его решений есть решение того же уравнения.*

3. Локальная теорема существования решения.

Теорема 4. *Пусть в области G правая часть уравнения* (5) *измерима и почти всюду удовлетворяет неравенству* (14), *где функция $B(t)$ суммируема. Тогда при любых начальных условиях $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$, где $(t_0, \boldsymbol{a}) \in G$, существует решение уравнения* (5), *удовлетворяющее этим начальным условиям и определенное на отрезке $[t_0 - d,\ t_0 + d]$, где d — таково, что $(n+1)$-мерный «цилиндр»*

$$|t - t_0| \leqslant d, \qquad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t^0 \pm d} B(t)\, dt \right| \tag{35}$$

находится целиком внутри G.

Доказательство. Пусть r_0 — расстояние от границы цилиндра (35) до границы области G. Обозначим через $\boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x})$ среднее арифметическое значений вектор-функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ в n-мерном шаре пространства x-ов с центром в точке $\boldsymbol{x}$ и радиусом $r_k = 2^{-k}$. Очевидно, при $0 < r_k < r_0$ функция $\boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x})$ определена почти всюду в «цилиндре» (35), измерима, непрерывна по $\boldsymbol{x}$ и удовлетворяет тому же неравенству (14), что и функция $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$. По теореме Каратеодори ([13], стр. 120) существует абсолютно непрерывная вектор-функция $\boldsymbol{x}_k(t)$, удовлетворяющая начальному условию $\boldsymbol{x}_k(t_0) = \boldsymbol{a}$ и почти всюду удовлетворяющая уравнению $\frac{d\boldsymbol{x}_k}{dt} = \boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x}_k)$. Согласно § 1, п. 4, б), $\boldsymbol{x}_k(t)$ является решением этого уравнения и в смысле определения I настоящей статьи. Легко видеть, что решение $\boldsymbol{x}_k(t)$ определено на отрезке $|t - t_0| \leqslant d$ и содержится в области (35). В силу теоремы 3, из последовательности решений $\boldsymbol{x}_k(t)$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, и предельная функция этой подпоследовательности есть решение уравнения (5) на этом же отрезке. Очевидно, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$.

4. О продолжаемости решений.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (5) *в области* Q *удовлетворяет условию* В. *Тогда любое его решение* $\boldsymbol{x}(t)$ *продолжаемо на интервал* (t_1, t_2), *где или* $t_2 = +\infty$, *или при* $t \to t_2 - 0$ *имеет место одно из трех*: а) $|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$; б) $\rho \to 0$ (ρ — *расстояние от точки* $(t, \boldsymbol{x}(t))$ *до границы области* Q); в) $\underline{\lim}\, |\boldsymbol{x}(t)| < \infty$, $\overline{\lim}\, \rho > 0$, $\lim \left(|\boldsymbol{x}(t)| + \frac{1}{\rho} \right) = \infty$.

Если область Q *замкнута, то случай* в) *невозможен, а в случае* б) *существует* $\lim\limits_{t \to t_2 - 0} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}$ *и точка* $(t_2, \boldsymbol{b})$ *лежит на границе области* Q.

Доказательство этой теоремы опирается лишь на теорему 4 и лемму 6 и проводится так же, как для уравнений с непрерывной правой частью.

§ 4. Некоторые свойства решений

1. Свойства интегральных воронок. Пусть в области Q $(n+1)$-мерного пространства $(t, \boldsymbol{x})$ дано дифференциальное уравнение (5), удовлетворяющее условию В. Интегральной воронкой множества $A \subset Q$ называется множество всех точек, лежащих на решениях, проходящих через точки множества A. Через $H(A;\ t_0,\ t_1)$ обозначим отрезок этой воронки, заключенный в полосе $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Предположим, что множество A ограничено, замкнуто, лежит в этой полосе и что любое решение, проходящее через любую точку множества A, при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ существует и принадлежит Q. Тогда: 1) множество $H(A; t_0, t_1)$ ограничено и замкнуто, а в случае связности множества A — связно; 2) для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $\delta < \delta(\varepsilon)$ любое решение, проходящее через любую точку множества A_δ (A_δ — δ-окрестность множества A), существует при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и отрезок воронки $H(A_\delta;\ t_0,\ t_1)$ содержится в ε-окрестности отрезка воронки $H(A; t_0, t_1)$.

Доказательство этих утверждений использует лишь факты, установленные в лемме 6, следствии из теоремы 3 и теореме 5, и проводится так же, как для уравнений с непрерывной правой частью или дисперсных динамических систем (см., например, [14], [15], [16]).

2. Связь решений дифференциальных уравнений с дисперсными динамическими системами. Известно [15], что решения системы дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью образуют дисперсную динамическую систему (в предположении, что каждое решение существует при $-\infty < t < \infty$).

Это справедливо и для системы (3) с разрывной правой частью, удовлетворяющей условию В. Если правая часть зависит от t, то получается дисперсная динамическая система в пространстве $(t, x_1, \ldots, x_n)$, а если не зависит,— то в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$.

Для доказательства достаточно заметить, что из леммы 6, следствия из теоремы 3 и из утверждений п. 1 § 4 (которые почти без изменений переносятся на случай замкнутой области Q) вытекает выполнение требований 1°–6° статьи [15].

Если, кроме того, при любых начальных условиях из области Q система уравнений (3) имеет единственное решение, то полученная дисперсная динамическая система будет динамической системой в обычном смысле.

3. Верхнее и нижнее решения. Теорема сравнения. Рассмотрим теперь не систему n уравнений, как было до сих пор, а одно (скалярное) уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{36}$$

в области G на плоскости (t, x).

Теорема 6. *Если уравнение* (36) *удовлетворяет условию* B *в области* G, *то среди всех решений этого уравнения, проходящих через произвольную фиксированную точку* (t_0, x_0), *есть верхнее решение* $\overline{x}(t)$ *и нижнее решение* $\underline{x}(t)$, *т. е. такие решения, что любое решение* $x(t)$, *проходящее через эту точку, удовлетворяет неравенствам* $\underline{x}(t) \leqslant x(t) \leqslant \overline{x}(t)$. *Вся область на плоскости* (t, x), *заключенная между графиками верхнего и нижнего решений, заполнена решениями уравнения* (36), *проходящими через ту же точку* (t_0, x_0).

Доказательство. В любой ограниченной замкнутой области $D \subset G$ функция f почти всюду удовлетворяет неравенству (14). В этом случае, как отмечалось в п. 4г) § 1, определения решения в § 1 и в работе [3] равносильны. Согласно теореме 1 работы [3], в этом случае существуют верхнее и нижнее решения уравнения (36). После этого остальные утверждения теоремы становятся очевидными.

Теорема 7. (Теорема сравнения.) *Если уравнения* (36) *и*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \tag{37}$$

удовлетворяют условию B *в области* G *и почти всюду в этой области* $F(t, x) > f(t, x)$, *то любое решение* $x(t)$ *уравнения* (36), *проходящее через точку* (t_0, x_0), *при* $t \geqslant t_0$ *не превосходит верхнего решения* $\overline{X}(t)$ *уравнения* (37), *проходящего через ту же точку.*

Доказательство. В § 1 работы [3] верхнее решение $\overline{X}(t)$ получается как предел последовательности функций $X_n(t)$, каждая из которых соответствует некоторому разбиению отрезка изменения t. Будем строить n-е разбиение и функции $X_n(t)$ и $x_n(t)$ следующим образом. Пусть t_0 — начальная точка, $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k$ — уже построенные точки разбиения, и функции $x_n(t)$ и $X_n(t)$ пусть уже определены на отрезке $[t_0, t_k]$, причем $x_n(t_0) = X_n(t_0) = x_0$, $x_n(t_k) \leqslant X_n(t_k)$.

1) Если $x_n(t_k) = X_n(t_k)$, то возьмем $t_{k+1} = t_k + 2^{-n}$ и при $t_k < t \leqslant t_{k+1}$ положим

$$x_n(t) = x_n(t_k) + \int_{t_k}^{t} \operatorname*{vrai\,max}_{|x - x_n(t_k)| \leqslant N_k(\tau)} f(\tau, x)\, d\tau,$$

где $N_k(\tau) = \int\limits_{t_k}^{\tau} (B(s) + 1)\, ds$, функция B — та же, что в (14). Функция $X_n(t)$ определяется аналогично, только f заменяется на F; при этом мажорирующая функция B должна быть одна и та же для f и F. Так как почти всюду $f(t, x) \leqslant F(t, x)$, то при $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ будем иметь: $x_n(t) \leqslant X_n(t)$.

2) Если же $x_n(t_k) < X_n(t_k)$, то при $t \geqslant t_k$ эти функции определяются так же, как в предыдущем случае, а число t_{k+1} берется равным $t_k + 2^{-n}$, если при $t_k \leqslant t \leqslant t_k + 2^{-n}$ имеем $x_n(t) \leqslant X_n(t)$; в противном случае следует взять t_{k+1} так, чтобы $x_n(t) \leqslant X_n(t)$ при $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ и $x_n(t_{k+1}) = X_n(t_{k+1})$.

Таким образом, $x_n(t) \leqslant X_n(t)$ для любого n. Значит, верхнее решение $\bar{x}(t) = \lim x_n(t)$ уравнения (36) не превосходит верхнего решения $\bar{X}(t) = \lim X_n(t)$ уравнения (37).

Теорема 7 обобщает «вторую теорему сравнения» ([13], стр. 85) на уравнения с разрывной правой частью. «Первая теорема сравнения» ([13], стр. 83) не обобщается, это можно показать на примерах.

Теорема 8. *Если абсолютно непрерывная функция $y(t)$ почти всюду на интервале (t_0, t_1) удовлетворяет неравенству*

$$\frac{dy(t)}{dt} \leqslant g(t, y(t)), \text{ где } g(t, y) \equiv M_y\{f(t, y)\}$$

(обозначение M см. п. 1 § 1), *причем $f(t, y)$ удовлетворяет условию* В *и $y(t_0) \leqslant x_0$, то при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеем $y(t) \leqslant \bar{x}(t)$, где $\bar{x}(t)$ — верхнее решение уравнения* (36) *с начальным условием $\bar{x}(t_0) = x_0$.*

Доказательство. Так как $g(t, y(t)) - \frac{dy(t)}{dt} = \varphi(t) \geqslant 0$ почти всюду и $y(t)$ — решение (в смысле § 1) уравнения

$$\frac{dy}{dt} = M_y\{f(t, y)\} - \varphi(t),$$

то, в силу теоремы 7, $y(t)$ при $t \geqslant t_0$ не превосходит верхнего решения $z(t)$ уравнения

$$\frac{dz}{dt} = M_z\{f(t, z)\}, \quad z(t_0) = x_0. \tag{38}$$

Из определения II § 1 и очевидных свойств символов M и m:

$$m\{f\} \leqslant m\{M\{f\}\}, \quad M\{M\{f\}\} = M\{f\},$$

следует, что любое решение уравнения (38) является решением уравнения (36). Значит, $y(t) \leqslant z(t) \leqslant \bar{x}(t)$.

Можно даже доказать, что верхние решения уравнений (36) и (38) совпадают при $t \geqslant t_0$.

§ 5. Теоремы о единственности и непрерывной зависимости решения

1. Определения. Для уравнения (5) в области G имеет место правосторонняя единственность решения, если для любой точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in G$ существует в области G при $t \geqslant t_0$ не более одного решения, удовлетворяющего начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

Для уравнения (5) в области G имеет место правосторонняя непрерывная зависимость решения от начальных условий, если для любого решения $\boldsymbol{x}(t)$ и любого конечного отрезка $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$, на котором это решение существует и проходит внутри области G, каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что для любого решения $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ уравнения (5) из неравенства

$|\tilde{x}(t_0) - x(t_0)| < \delta$ следует, что это решение при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ существует и удовлетворяет неравенству $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$.

Аналогично можно говорить о левосторонней (т. е. при $t \leqslant t_0$) и двусторонней единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий.

2. Оценка разности двух решений.

Теорема 9. *Пусть две системы уравнений* (в векторной записи)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad \frac{dz}{dt} = g(t, z) \tag{39}$$

в одной и той же области G удовлетворяют условию B. *Пусть для любых двух точек (t, x) и (t, z) области G, быть может, кроме точек множества меры нуль,*

$$(x - z)(f(t, x) - f(t, z)) \leqslant |x - z| \cdot L(t, |x - z|), \tag{40}$$

$$|g(t, x) - f(t, x)| \leqslant \psi(t), \tag{41}$$

где функция $L(t, u)$ измерима, $L(t, u) = 0$ при $u \leqslant 0$, $L(t, u) \leqslant K(t)$, $K(t)$ и $\psi(t)$ — суммируемые функции. Тогда для любых решений $x(t)$ и $z(t)$ уравнений (39), *удовлетворяющих начальным условиям*

$$x(t_0) = a, \ z(t_0) = b, \ \text{где} \ |a - b| \leqslant c,$$

и проходящих при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ в области G, имеем

$$|x(t) - z(t)| \leqslant u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

где $u(t)$ — верхнее решение уравнения $\frac{du}{dt} = L(t, u) + \psi(t)$ с начальным условием $u(t_0) = c$. (Для систем уравнений с непрерывной правой частью близкие по содержанию результаты получены в [16], теорема 27.)

Доказательство. Обозначим $x(t) - z(t) = y(t)$. Тогда

$$|y| \cdot \frac{d|y|}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d|y|^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(y \cdot y)}{dt} = y \cdot \frac{dy}{dt} = y \cdot \frac{dx}{dt} - y \cdot \frac{dz}{dt}. \tag{42}$$

В силу леммы 2 и соотношения (2) для почти всех t правая часть (42) при любом $\delta > 0$ не превосходит

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x' \in U(x,\delta)} (y \cdot f(t, x')) - \operatorname*{vrai\,min}_{z' \in U(z,\delta)} (y \cdot g(t, z')). \tag{43}$$

Согласно (1), для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие x^* и z^*, что

$$|x^* - x| < \delta, \quad |z^* - z| < \delta \tag{44}$$

и что выражение (43) будет меньше, чем

$$y \cdot f(t, x^*) - y \cdot g(t, z^*) + 2\varepsilon; \tag{45}$$

множества таких x^* и z^* имеют положительную меру. Так как уравнения (39) удовлетворяют условию В, то найдется такая суммируемая функция $B(t)$, что почти всюду в замкнутой окрестности дуг $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ решений $x(t)$ и $z(t)$

$$|f(t, x)| \leqslant B(t). \tag{46}$$

Пользуясь неравенствами (41), (44) и (46), получим, что выражение (45) не превосходит

$$(x^* - z^*) \cdot (f(t, x^*) - f(t, z^*)) + |y| \cdot \psi(t) + 4\delta B(t) + 2\varepsilon. \tag{47}$$

Согласно (40) первое слагаемое при почти всех t не превосходит

$$|x^* - z^*| \cdot L(t, |x^* - z^*|), \tag{48}$$

исключая лишь множества значений x^* и z^* меры нуль.

В силу свойств символа M (см. (2)) при почти всех t для почти всех u, где $u = |x^* - z^*|$,

$$L(t, |x^* - z^*)| \leqslant M_u\{L(t, |x^* - z^*|)\}. \tag{49}$$

Пусть теперь в (47) и (48) $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $x^* \to x$, $z^* \to z$, причем x^* и z^* принимают лишь такие значения, что выполняется неравенство (49). Вследствие полунепрерывности сверху функции $M_u\{L(t, u)\}$ относительно u верхний предел выражения (49) не превзойдет $M_u\{L(t, |y|)\}$, где $y = x - z$.

Из оценок (42)—(49) получим при почти всех t:

$$|y| \cdot \frac{d|y|}{dt} \leqslant |y| \cdot M_u\{L(t, |y|)\} + |y| \cdot \psi(t).$$

При $y(t) \neq 0$ отсюда следует:

$$\frac{d|y|}{dt} \leqslant M_u\{L(t, |y|)\} + \psi(t). \tag{50}$$

Если $y(t) = 0$ на множестве значений t положительной меры, то почти всюду на этом множестве $\frac{dy}{dt} = 0$ и неравенство (50) тоже выполнено, так как из условий теоремы следует, что $M_u\{L(t, 0)\} \geqslant 0$.

Итак, $|y(t)|$ почти всюду удовлетворяет неравенству (50). Отсюда и из теоремы 8 вытекает доказываемое утверждение.

3. Теорема единственности.

Теорема 10. *Пусть система уравнений* (3) *или в векторной записи* (5) *в области* G *удовлетворяет условию* В. *Пусть для любых двух точек* (t, x) *и* (t, z) *этой области, быть может, кроме точек множества меры нуль, при* $|x - z| < \varepsilon_0$, *где* $\varepsilon_0 > 0$, *имеет место неравенство* (40), *где функция* $L(t, u)$ — *такая же, как в теореме* 9. *Если уравнение* $\frac{du}{dt} = L(t, u)$ *для любого* t_0 *при начальном условии* $u(t_0) = 0$ *в области* $t \geqslant t_0$ *имеет только нулевое решение, то для системы* (3) *в области* G *имеет место правосторонняя единственность.*

Это утверждение вытекает из теоремы 9, если в ней положить $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \equiv \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, $\psi(t) \equiv 0$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Теорема 10 дает возможность из любой теоремы единственности для одного дифференциального уравнения сразу получить теорему единственности для системы уравнений.

Например, для уравнения (5) имеет место правосторонняя единственность, если выполнено неравенство (40), где $L(t, u) = K(t) \cdot \varphi(u)$, $K(t)$ суммируема, $\varphi(u)$ непрерывна и положительна при $u > 0$, $\int\limits_0^a \frac{du}{\varphi(u)} = \infty$ при любом $a > 0$. (Для уравнений с непрерывной правой частью аналогичные теоремы см. в [17], стр. 67, и в [16], теорема 14.)

В самом деле, в силу теоремы 10 достаточно доказать единственность для уравнения $\frac{du}{dt} = K(t)\varphi(u)$. Так как любое решение последнего уравнения удовлетворяет ему почти всюду (§ 1, п. 4б)), то единственность легко доказывается путем разделения переменных и интегрирования, как в [13], стр. 90.

Следствие. *Для уравнения* (5), *удовлетворяющего условию* B, *имеет место правосторонняя единственность, если для почти всех* $(t, \boldsymbol{x})$ *и* $(t, \boldsymbol{z})$, *где* $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, *имеем*

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})(\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z})) \leqslant K |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|^2, \quad K = \text{const}. \tag{51}$$

Замечание. Для дифференциальных уравнений (и систем) с разрывной правой частью теоремы единственности Перрона и Скорца — Драгони (см. [13], стр. 91—93, 97; [16], теоремы 13, 15) теряют силу, что видно на примере уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f(t, x) = \frac{x}{t}, \quad |x| \leqslant |t|; \quad f(t, x) = \operatorname{sgn} tx, \quad |x| \geqslant |t|.$$

4. Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения.

Теорема 11. *Пусть уравнения* (5) *и* (29) *удовлетворяют условиям теоремы* 3. *Пусть уравнение* (5) *при начальном условии* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$ *имеет на отрезке* $[t_0, t_1]$ *лишь одно* * *решение* $\boldsymbol{x}(t)$ *и это решение при* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *проходит внутри области* G. *Пусть* $\boldsymbol{x}_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — *последовательность решений уравнений* (29), $\boldsymbol{x}_k(t_k) = \boldsymbol{a}_k$, $t_k \to t_0$, $\boldsymbol{a}_k \to \boldsymbol{a}$ *при* $k \to \infty$. *Тогда на отрезке* $[t_0, t_1]$ *решение* $\boldsymbol{x}_k(t)$ *существует при достаточно больших* k *и равномерно сходится к* $\boldsymbol{x}(t)$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть D — множество точек $(t, \boldsymbol{x})$, для которых $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(t)| \leqslant \varepsilon$, где $\boldsymbol{x}(t)$ — данное решение, а ε так мало, что $D \subset G$. Если бы решения $\boldsymbol{x}_k(t)$ при сколь угодно больших k выходили на границу множества D при $t_0 < t < t_1$, то, в силу теоремы 3, из этих решений можно было бы выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, где $t^* \leqslant t_1$, к такому решению $\boldsymbol{x}^*(t)$ уравнения (5),

* Подразумевается, что и на любом меньшем отрезке $[t_0, t']$, где $t_0 < t' < t_1$, тоже не существует решения с тем же начальным условием, отличного от решения $\boldsymbol{x}(t)$.

что $x^*(t_0)=a=x(t_0)$, $|x^*(t^*)-x(t^*)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Это противоречит единственности решения с начальным условием $x(t_0)=a$.

Следствия. *Если уравнение* (5) *удовлетворяет условию* В *и при начальном условии* $x(t_0)=a$ *имеет на отрезке* $[t_0, t_1]$ *лишь одно* * *решение* $x(t)$, *то на этом отрезке*:

1) *Это решение непрерывно зависит* ** *от начальных условий* (см. п. 1 § 5) *и от правой части уравнения, т. е. решение изменяется меньше, чем на* ε, *если к правой части уравнения прибавить такую функцию* $g(t, x)$, *что* $|g(t, x)|\leqslant\psi(t)$, $\int\limits_{t_0}^{t_1}\psi(t)\,dt<\delta(\varepsilon)$.

2) *Решения уравнений* $\frac{dx_k}{dt}=f_k(t, x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, *где* $f_k(t, x)$ *есть среднее значение* (*с любым неотрицательным весом*) *функции* $f(t, x)$ *по n-мерной окрестности* $U(x, r_k)$ *точки* x, *с начальными условиями* $x_k(t_0)=a_k\to a$, *при* $r_k\to 0$ *равномерно сходятся к решению* $x(t)$ *уравнения* (5). (В силу сказанного в § 1, п. 4 д), это обобщает один из результатов работы [6].)

3) *Решение уравнения с запаздыванием*

$$\frac{dx_\delta(t)}{dt}=f(t, x_\delta(t-\tau)),\qquad 0\leqslant\tau\leqslant\delta,$$

с начальным условием $x_\delta(t_0)=a_\delta\to a$, *при* $\delta\to 0$ *равномерно сходится к решению* $x(t)$ *уравнения* (5); *при этом* τ *может зависеть от каких угодно факторов, лишь бы функция* $f(t, x_\delta(t-\tau)+y)$, *где* $x_\delta(t)$ — *рассматриваемое решение, была измерима по отношению к* (t, y).

4) *Если уравнение* (5) *имеет кусочно-непрерывную правую часть, то решения, получаемые когда переключение с одного режима на другой запаздывает* (*т. е. происходит после того, как решение пересечет поверхность разрыва правой части уравнения*), *равномерно сходятся к решению* $x(t)$ *уравнения* (5), *когда наибольшее время запаздывания* τ *стремится к нулю или наибольшее расстояние* d *точки переключения от поверхности разрыва стремится к нулю* (*для разных решений и в разных точках* τ *и* d *могут быть различными*).

Последнее утверждение обобщает результаты статьи [9], так как требуемая здесь правосторонняя единственность решения для уравнений, рассмотренных в [9], легко получается из леммы 3.

§ 6. Качественное исследование систем уравнений с разрывной правой частью

В § 6 будет показано, что многие теоремы и методы качественной теории дифференциальных уравнений применимы и к уравнениям с разрывной правой частью.

1. Теорема 12. *Пусть* S — *кусок поверхности в пространстве* $(t, x_1, \ldots x_n)$, *определяемый уравнением* $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)=0$. *Пусть в окрестности* S *функция* Φ *непрерывно дифференцируема и меняет знак при переходе через* S. *Обозначим через* U^+ (U^-) *ту часть окрестности*

* См. сноску на стр. 117.

** Другие теоремы о непрерывной зависимости см. в [4], [18], [11].

куска S, где $\Phi > 0$ ($\Phi < 0$). Если правые части системы (3) *удовлетворяют условию* A (§ 1) *и почти всюду в области U^+ (или, соответственно, U^-) удовлетворяют неравенству*

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} f_i \leqslant 0, \tag{52}$$

то никакое решение системы (3) *не может при возрастании t перейти на рассматриваемом куске поверхности S из $U^- + S$ в U^+ (соответственно, из U^- в $U^+ + S$). Если в $U^+ + S + U^-$ имеет место правосторонняя непрерывная зависимость решения от начальных условий, то никакое решение не может перейти из $U^- + S$ в U^+ и в том случае, когда условие* (52) *выполнено лишь в области U^-.*

Доказательство. Для любого решения в области U^+, в силу леммы 2 и формулы (2), при почти всех t имеем:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} f_i = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \cdot \operatorname{grad}\Phi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \lim_{\delta\to 0} \operatorname*{vrai\,max}_{\boldsymbol{x}' \in U(\boldsymbol{x}(t),\delta)} [\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}') \cdot \operatorname{grad}\Phi(t, \boldsymbol{x}(t))]. \tag{53}$$

При почти всех t вследствие ограниченности функции $\boldsymbol{f}$ в рассматриваемой окрестности и непрерывности $\operatorname{grad}\Phi$ в правой части неравенства $\Phi(t, \boldsymbol{x}(t))$ можно заменить на $\Phi(t, \boldsymbol{x}')$. В силу (52), почти всюду

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}') \cdot \operatorname{grad}\Phi(t, \boldsymbol{x}') \leqslant -\frac{\partial\Phi(t, \boldsymbol{x}')}{\partial t}.$$

Значит, при почти всех t выражение (53) неположительно. Следовательно, абсолютно непрерывная функция $\Phi(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ не возрастает, пока решение находится в U^+ (или U^-). Поэтому решение не может перейти из $U^- + S$ в U^+ (соответственно, из U^- в $U^+ + S$).

Пусть теперь имеет место правосторонняя непрерывная зависимость от начальных условий. Если бы некоторое решение переходило из S в U^+, то сколь угодно близкие решения переходили бы из U^- в U^+, что невозможно. Теорема доказана.

Теорема 12 в ряде случаев позволяет строить область, из которой не выходит ни одно решение системы (3), и, таким образом, исследовать устойчивость решения или же доказывать существование периодического решения для системы с периодической правой частью. Последнее основано на принципе неподвижной точки (см. [19], стр. 14—15), который применим и к уравнениям с разрывной правой частью при наличии правосторонней единственности и правосторонней непрерывной зависимости решения от начальных условий.

2. Об определении решения уравнения второго порядка. Решением уравнения $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ называется такая функция $x(t)$, что пара функций $x(t)$, $y(t) \equiv \dot{x}(t)$ является решением (в смысле § 1) системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(t, x, y)$, получаемой из данного уравнения путем замены $\dot{x} = y$.

Покажем, что такое определение решения имеет физический смысл в задачах о нелинейных колебаниях с разрывным трением. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = e(t), \tag{54}$$

где $g(x)$ непрерывна, внешняя сила $e(t)$ кусочно непрерывна, трение (зависящее от скорости) $f(y)$ разрывно при $y = 0$, причем $f(+0) = a > 0$, $f(-0) = -a < 0$. Это условие выполняется для «сухого» трения. Уравнение (54) заменим системой

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = e(t) - g(x) - f(y). \tag{55}$$

При $y \neq 0$ функция $f(y)$ непрерывна и решение системы понимается в обычном смысле. Если же скорость y в некоторый момент $t = t_1$ обращается в нуль, то надо различать два случая.

1) Сумма действующих сил (кроме трения) не превосходит трения покоя, т. е. $|e(t) - g(x)| \leqslant a$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Тогда тело остановится, т. е. будем иметь $\dot{y}(t) = 0$. Так как в этом случае

$$\dot{x}(t) = y(t) = 0, \quad e(t) - g(x) - f(+0) \leqslant \dot{y}(t) \leqslant e(t) - g(x) - f(-0),$$

то вектор $(x(t),\ y(t))$, где $y(t) = 0$, являющийся решением с физической точки зрения, будет также решением системы (55) в смысле определения I § 1.

2) При $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ $|e(t) - g(x)| > a$. Тогда ускорение не будет равно нулю, и при $t > t_1$ тело будет двигаться. При $t \neq t_1$ уравнение будет удовлетворяться в обычном смысле. Значит, при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon$ уравнение будет удовлетворяться и в смысле определения I § 1.

3. Существование периодического решения уравнения нелинейных колебаний.

Теорема 13. *Пусть в уравнении* (54):

1) *функция* $e(t)$ *измерима, имеет период* T, *и* $m \leqslant e(t) \leqslant M$;

2) *функция* $g(x)$ *удовлетворяет условию Липшица на любом конечном интервале*;

3) $g(x) \leqslant g_1$ *при* $x \leqslant x_1$, $g(x) \geqslant g_2$ *при* $x \geqslant x_2$;

4) *функция* $f(y)$ *непрерывна или имеет конечное число точек разрыва* $v_1, \ldots, v_s$ *первого рода*,

$$f(v_i + 0) - f(v_i - 0) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s);$$

на любом конечном интервале, не содержащем ни одной из точек разрыва, функция $f(y)$ *удовлетворяет условию Липшица*;

5) $f(y) \leqslant f_1$ *при* $y < y_1$, $f(y) \geqslant f_2$ *при* $y > y_2$, $y_1 < 0 < y_2$; $f(y) \leqslant d_1$ *при* $y_1 < y < 0$, $f(y) \geqslant d_2$ *при* $0 < y < y_2$;

6) $g_1 + d_1 < m$, $g_2 + d_2 > M$;

7) $\max\{g_1, M - f_2\} < \min\{g_2, m - f_1\}$.

Тогда уравнение (54) *имеет по меньшей мере одно решение периода* T. *Если*

$$f(+0) - f(-0) < \operatorname{vrai\,max} e(t) - \operatorname{vrai\,min} e(t),$$

то это периодическое решение отлично от $x(t) \equiv \text{const}$.

Доказательство. Для системы (55), заменяющей уравнение (54), легко проверить, что неравенство (51) выполнено, а значит, имеют место правосторонние единственность и непрерывная зависимость решения от начальных условий. Затем с помощью метода, изложенного в [20], и теоремы 12 на плоскости (x, y) можно построить односвязную область, из которой не выходит ни одно решение системы (55). После этого применение принципа неподвижной точки (см. конец п. 1 § 6) доказывает теорему.

Эта теорема обобщает и объединяет в одной формулировке утверждения о существовании периодического решения, доказанные для непрерывного трения в [20] и разрывного трения — в [21].

Замечание. Теорема остается справедливой, если в уравнении (54) заменить $f(\dot{x})$ на $f(x, \dot{x})$, где $f(x, y)$ может иметь разрывы (и притом первого рода) лишь на конечном числе прямых $y = v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и удовлетворяет (равномерно по x) всем условиям теоремы, наложенным на $f(y)$. Доказательство при этом не меняется.

4. Свойства автономных систем. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{56}$$

где функции f_i определены и измеримы в открытой или замкнутой области Q и ограничены в любой замкнутой ограниченной части ее. Для таких систем решения (в смысле § 1), особые точки, ω-предельные множества и точки обладают многими из свойств, доказанных в [22], стр. 26—33, для систем с непрерывной правой частью. Траекторией называется множество точек пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, лежащих на одном и том же решении системы (56). Точка $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ называется особой, если $x_1(t) \equiv a_1, \ldots$ $\ldots, x_n(t) \equiv a_n$ — решение системы (56). При отсутствии единственности решения некоторые из формулировок очевидным образом меняются. Например, теорема 8 ([22], стр. 30) заменяется следующей. Если q есть ω- (α-) предельная точка траектории L, то среди траекторий, проходящих через q, найдется такая, все точки которой тоже ω- (α-) предельные для траектории L. В доказательствах вместо непрерывной зависимости от начальных условий надо использовать лемму 6 и следствие из теоремы 3 § 3.

5. Автономная система двух уравнений. Пусть для системы

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \tag{57}$$

выполнены требования п. 4 § 6 и, кроме того, имеет место правосторонняя единственность (значит, в силу следствия 1 из теоремы 11, и правосторонняя непрерывная зависимость решения от начальных условий). Для таких систем остается справедливой (с некоторыми изменениями в формулировке) большая часть результатов, доказанных в § 1 гл. II книги [22] для систем с непрерывной правой частью. Например, траектория, имеющая общую точку со своим ω-предельным множеством, уже не обязательно является особой точкой или замкнутой кривой (как в теореме 1 на стр. 49 [22]), но всегда существует такое t_1, что полутраектория $t_1 \leqslant t < \infty$ является особой точкой или замкнутой кривой.

В доказательствах этих теорем в [22] непрерывность правой части уравнения используется лишь для построения такого отрезка нормали к траектории, который пересекается траекториями только в одном направлении. Для системы (57) с разрывной правой частью вместо этого надо сделать такое построение, как на рис. 2. Всякое решение, попавшее в δ-окрестность точки B (заштрихована на рис. 2), в силу правосторонней непрерывной зависимости от начальных условий, должно попасть оттуда в ε-окрестность точки C, не выходя до этого из ε-окрестности дуги BC и не пересекая дуг траекторий NBC и MF. Поэтому траектория $ABCDMF$ не может выйти из замкнутой области $NBCDMN$. Все остальные рассуждения на стр. 49—60 книги [22] почти без изменений остаются справедливыми и для систем (57) с разрывной правой частью*; изменения, вызванные наличием лишь правосторонней единственности, очевидны.

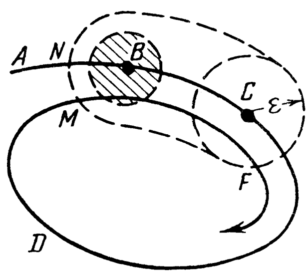

Рис. 2

Из полученных результатов следует, что для доказательства существования периодического решения системы (57) достаточно построить не содержащую особых точек кольцевую область, из которой не выходит ни одно решение этой системы. Таким образом, методы исследования уравнения нелинейных колебаний с самовозбуждением

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + g(x) = 0$$

остаются применимыми и в случае разрывных функций f и g.

§ 7. Теорема единственности для уравнений с кусочно непрерывной правой частью

1. Основные предположения. Пусть ограниченная область G пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ разделена гладкой поверхностью S на области G^- и G^+. В области G при $T_0 < t < T_1$ дана система уравнений (3), правые части f_i которой измеримы и ограничены в $(n+1)$-мерной области $Q = G \times (T_0, T_1)$. Пусть при любом постоянном $t \in (T_0, T_1)$ функции f_i непрерывны по $x_1, \ldots, x_n$ в областях G^- и G^+, и пусть существуют предельные значения функций f_i при приближении к любой точке поверхности S из областей G^- и G^+. Пусть при всех t в областях G^- и G^+

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leqslant K \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{58}$$

где K не зависит от $t, x_1, \ldots, x_n$.

Систему (3) будем записывать в векторной форме (5). Предельные значения вектора $\boldsymbol{f}$ при приближении к поверхности S из областей G^- и G^+ обозначим через $\boldsymbol{f}^-$ и $\boldsymbol{f}^+$. Буквой со значком N, например $\overset{+}{f}_N(t, x)$, будем обозначать проекцию (со знаком) соответствующего вектора на нормаль

* А также для любой дисперсной динамической системы на плоскости при наличии правосторонней единственности. Для обычных динамических систем на плоскости это утверждение содержится в [23].

к поверхности S в точке (t, x); положительное направление нормали — всегда от G^- к G^+.

2. Вспомогательные леммы.

Лемма 7. *Если во всех точках поверхности S вектор $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}^+ - \boldsymbol{f}^-$ направлен по нормали к поверхности (или равен нулю) и $h_N \leqslant 0$, то для системы (3) в области G имеют место правосторонняя единственность и непрерывная зависимость решения от начальных условий.*

Доказательство. В силу следствий из теорем 10 и 11 достаточно проверить выполнение неравенства (51). Если обе точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$ лежат с одной стороны от S, то неравенство (51) вытекает из (58). Если же $\boldsymbol{x} \in G^-$, $\boldsymbol{z} \in G^+$, то обозначим через $\boldsymbol{y}$ ближайшую к точке $\boldsymbol{z}$ точку пересечения отрезка $\boldsymbol{xz}$ с поверхностью S. Из неравенств (58) следует:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}^+(t, \boldsymbol{y})| &\leqslant K\,|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}| \cdot \mathrm{const}, \\ |\boldsymbol{f}^-(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| &\leqslant K\,|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \cdot \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{59}$$

Так как отрезок $\boldsymbol{yz}$ (кроме точки $\boldsymbol{y}$) лежит в G^+, а вектор $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}^+(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}^-(t, \boldsymbol{y})$ направлен в сторону области G^- по нормали к S в точке $\boldsymbol{y}$, то

$$(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{f}^+(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}^-(t, \boldsymbol{y})) \leqslant 0.$$

Это неравенство не нарушится, если вектор $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}$ заменить направленным в ту же сторону вектором $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}$. Из полученного неравенства и (59) вытекает неравенство (51).

Лемма 8. *Если $\overset{+}{f_N}(t, \boldsymbol{x}) \leqslant 0$ при $t_1 < t < t_2$, $\boldsymbol{x} \in S_0$, где S_0 — кусок поверхности S (открытая область на поверхности S), то при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ никакое решение не может выйти с S_0 в область G^+, не выходя сначала с S_0 в $G^- + S - S_0$.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Тогда найдется такое решение $\boldsymbol{x}(t)$ и такие числа t' и t'', что

$$t_1 \leqslant t' < t'' \leqslant t_2, \quad \boldsymbol{x}(t') \in S_0, \quad \boldsymbol{x}(t) \in G^+ \quad (t' < t \leqslant t''). \tag{60}$$

Пусть $r(\boldsymbol{x})$ — кратчайшее расстояние (по нормали к S) от точки $\boldsymbol{x} \in G^+$ до поверхности S. Тогда $r(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})|$, где $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) \in S$. Производная $\frac{dr(\boldsymbol{x}(t))}{dt}$ — это проекция вектора $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$ (равного $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$ при почти всех $t \in [t', t'']$ в силу п. 4б) § 1) на нормаль к поверхности S, проведенную из точки $\boldsymbol{x}(t)$. Обозначая через $\overset{+}{f_N}(t, \boldsymbol{x})$ проекцию вектора $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ на эту нормаль, получим для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ при почти всех t и $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) \in S_0$:

$$\frac{dr(\boldsymbol{x})}{dt} = \overset{+}{f_N}(t, \boldsymbol{x}) \leqslant \overset{+}{f_N}(t, \boldsymbol{x}) - \overset{+}{f_N}(t, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})).$$

В силу (58) правая часть не превосходит $Kn^2\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})|$. Итак, абсолютно непрерывная функция $r(\boldsymbol{x}(t))$ при почти всех $t \in [t', t'']$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{dr(\boldsymbol{x}(t))}{dt} \leqslant Kn^2 r(\boldsymbol{x}(t)).$$

Следовательно, $r(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant r(\boldsymbol{x}(t'))e^{Kn^2(t-t')}$ при $t' \leqslant t \leqslant t''$. Это противоречит (60).

Замечание. Заменяя t на $-t$ в лемме 8, получим следующее утверждение.

Если $f_N^+ \geqslant 0$ на S_0, то ни одно решение не может войти на S_0 непосредственно из области G^+.

Лемма 9. *Если при $t_1 < t < t_2$ во всех точках куска S_0 поверхности S имеем $f_N^+ > 0$, $f_N^- > 0$ (или при этих t во всех этих точках $f_N^+ < 0$, $f_N^- < 0$), то в области $G^- + S_0 + G^+$ имеют место единственность и непрерывная зависимость решения от начальных условий. Решения в этом случае на участке S_0 поверхности S переходят из G^- в G^+, имея лишь одну общую точку с поверхностью S (соответственно, переходят из G^+ в G^-).*

Доказательство. Из леммы 8 и замечания следует, что ни одно решение не может выйти с S_0 в G^- или войти на S_0 из G^+. Случай, когда решение $\boldsymbol{x}(t) \in S_0$ на некотором интервале (t', t''), невозможен, так как в силу определения I § 1 конец вектора $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$ при почти всех t должен лежать на отрезке, соединяющем концы векторов $\boldsymbol{f}^+$ и $\boldsymbol{f}^-$ и, следовательно, не может лежать в касательной плоскости к S (так как $f_N^+ > 0$, $f_N^- > 0$, то оба вектора $\boldsymbol{f}^+$ и $\boldsymbol{f}^-$ лежат по одну сторону от этой плоскости). Значит, если $\boldsymbol{x}(t_0) \in S_0$, то $\boldsymbol{x}(t) \in G^+$ при $t_0 < t < t_0 + \delta$.

Пусть теперь $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ — решения, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{y}(t_0) \in S_0$. Тогда при $t_0 < t < t_0 + \delta$ оба решения находятся в области G^+, где выполнено неравенство (58) и, следовательно, также (51). Значит, $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{y}(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$. Заменяя t на $-t$, получим, что при $t_0 - \delta_1 < t < t_0$ $\boldsymbol{x}(t) \in G^-$ и $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{y}(t)$.

Лемма 10. *Пусть функция $g(z_2, \ldots, z_n, t)$ непрерывно дифференцируема, а функция $f(z_2, \ldots, z_n, t)$ имеет непрерывные первые и вторые производные, может быть, кроме $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. Тогда существует функция $\psi(z_1, \ldots, z_n, t)$, имеющая непрерывные вторые производные, может быть, кроме $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, и удовлетворяющая при $z_1 = 0$ условиям $\psi = f$, $\frac{\partial\psi}{\partial z_1} = g$.*

Доказательство. Легко проверить, что функция

$$\psi(z_1, \ldots, z_n, t) =$$
$$= f(z_2, \ldots, z_n, t) + z_1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \ldots, z_n + u_n z_1, t)\, du_2 \ldots du_n$$

удовлетворяет всем требуемым условиям.

Лемма 11. *Пусть в каждой точке поверхности S $x_1 = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, где φ дважды непрерывно дифференцируема, задан непрерывно дифференцируемый некасательный вектор $\boldsymbol{h}(x_2, \ldots, x_n, t)$, $|\boldsymbol{h}| \geqslant \eta > 0$. Тогда в некоторой окрестности поверхности S существует преобразование координат $x_i = \Phi_i(z_1, \ldots, z_n, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с якобианом, отличным от нуля; после этого преобразования поверхность S будет выражаться уравнением $z_1 = 0$, а направление координатных линий z_1 (т. е. линий*

$z_2=\mathrm{const}, \ldots, z_n=\mathrm{const}$) *в точках поверхности* S *будет совпадать с направлением вектора* $\boldsymbol{h}$. *Функции* Φ_i *имеют непрерывные производные первого и второго порядков, может быть, кроме* $\dfrac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}$; *при* $z_1=0$ *функции* Φ_i *не зависят от* t.

Доказательство. Перейдем от координат $x_1, \ldots, x_n$ к криволинейным координатам $y_1, \ldots, y_n$, где

$$y_1=x_1-\varphi(x_2, \ldots, x_n), \quad y_2=x_2, \ldots, y_n=x_n. \tag{61}$$

Теперь поверхность S выражается уравнением $y_1=0$, а направление вектора $\boldsymbol{h}=(h_1, \ldots, h_n)$ — уравнениями $\dfrac{dx_1}{h_1}=\ldots=\dfrac{dx_n}{h_n}$ в старых координатах и уравнениями

$$\frac{dy_1}{g}=\frac{dy_2}{h_2}=\ldots=\frac{dy_n}{h_n}, \quad g=h_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}h_i \tag{62}$$

— в новых; $g\neq 0$, так как вектор $\boldsymbol{h}$ не касается поверхности S. Далее перейдем от $y_1, \ldots, y_n$ к $z_1, \ldots, z_n$ по формулам

$$y_1=z_1, \quad y_i=\psi_i(z_1, \ldots, z_n, t) \quad (i=2, \ldots, n), \tag{63}$$

где функции ψ_i имеют непрерывные первые и вторые производные, может быть, кроме $\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}$, и при $z_1=0$

$$\psi_i=z_i, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial z_1}=\frac{h_i}{g} \quad (i=2, \ldots, n); \tag{64}$$

в силу леммы 10 такие функции ψ_i существуют. Вдоль координатных линий z_1 имеем: $dz_2=\ldots=dz_n=dt=0$, т. е., в силу (63), $dy_i=\dfrac{\partial\psi_i}{\partial z_1}dy_1$ $(i=2, \ldots, n)$. Отсюда и из (64) и (62) следует, что при $z_1=0$ направление координатных линий z_1 совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{h}$. Выражая с помощью (61) и (63) $x_1, \ldots, x_n$ через $z_1, \ldots, z_n$, получим требуемое преобразование.

3. Теорема единственности.

Теорема 14. *Пусть система* (3) *удовлетворяет условиям* п. 1 § 7, *и, кроме того, поверхность* S — *дважды гладкая* *, *а функции* f_N^- *и* f_N^+ *непрерывны по* $t, x_1, \ldots, x_n$ *при* $(x_1, \ldots, x_n)\in S$, *и вектор* $\boldsymbol{h}$ *непрерывно дифференцируем. Если в каждой точке поверхности* S *выполнено хотя бы одно из неравенств* $f_N^->0$ *или* $f_N^+<0$, *не обязательно одно и то же во всех точках поверхности, то в области* G *для системы* (3) *имеют место правосторонняя единственность и непрерывная зависимость решения от начальных условий.*

* Т. е. в окрестности каждой ее точки уравнение поверхности можно разрешить относительно одной из координат: $x_i=\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, причем функция φ имеет непрерывные вторые производные.

Доказательство. В каждой точке поверхности S выполняется хотя бы одно из трех условий

$$f_N^+ - f_N^- < 0, \tag{65}$$

$$f_N^- > 0, \quad f_N^+ > 0, \tag{66}$$

$$f_N^- < 0, \quad f_N^+ < 0. \tag{67}$$

Если при каком-нибудь $t = t_0$ в какой-нибудь точке выполнено условие (66) или (67), то вследствие непрерывности f_N^- и f_N^+ найдется такая окрестность этой точки и такое число $\delta > 0$, что на куске поверхности S, попавшем в эту окрестность, то же самое условие выполнено при $|t - t_0| < \delta$. Согласно лемме 9, в этой окрестности имеет место двусторонняя единственность.

Если при каком-нибудь $t = t_0$ в какой-нибудь точке поверхности S выполнено условие (65), то найдется такая окрестность этой точки, что в этой окрестности уравнение поверхности S можно разрешить относительно одной из координат, например $x_1 = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, где функция φ дважды непрерывно дифференцируема, и на куске поверхности S, содержащемся в этой окрестности, имеем $f_N^+ - f_N^- < 0$ при $|t - t_0| < \delta$, $\delta > 0$. В этой окрестности сделаем такое преобразование координат, как в лемме 11, взяв $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}^+ - \boldsymbol{f}^-$. Тогда система (3) перейдет в систему

$$\frac{dz_j}{dt} = F_j(z_1, \ldots, z_n, t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{68}$$

где функции F_j определяются из уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} F_j + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{69}$$

(детерминант $\left|\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial z_j}\right|_{i,j=1,\ldots,n}$ системы (69), в силу леммы 11, отличен от нуля в некоторой окрестности рассматриваемого куска поверхности S). Легко видеть, что в этой окрестности функции F_j удовлетворяют требованиям п. 1 § 7 и могут быть разрывны лишь при $z_1 = 0$. Из (69) следует, что величины разрывов $F_j^+ - F_j^- = H_j$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j}\right|_{z_1=0} \cdot H_j = h_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{70}$$

Из леммы 11 следует, что $\left.\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial z_1}\right|_{z_1=0} = \dfrac{h_i}{g}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому система (70) имеет единственное (ее детерминант не равен нулю) решение $H_1 = g$, $H_2 = \ldots = H_n = 0$.

Итак, для системы (68) вектор разрыва $\boldsymbol{H}$ направлен по нормали к плоскости разрыва $z_1 = 0$. Он направлен в ту сторону от этой плоскости, куда перешла область G^- при сделанном преобразовании, так как вектор $\boldsymbol{h}$ был направлен в сторону области G^-. В силу леммы 7, для системы (68) имеет место правосторонняя единственность. Из теоремы 2 следует, что то же справедливо и для системы (3) в окрестности рассматриваемого куска поверхности S.

Итак, в окрестности любой точки поверхности S имеет место правосторонняя единственность. Это же справедливо для точек, не лежащих на S (так как вне S выполняется неравенство (58), а значит и (51)). Следовательно, в области G имеет место правосторонняя единственность, а в силу следствия 1 из теоремы 11 — и правосторонняя непрерывная зависимость решения от начальных условий.

Замечание 1. Теорема 14 остается справедливой, если поверхность S имеет край, при условии, что в каждой точке края выполняется или неравенство (66), или неравенство (67), или равенства $f^+ = f^- = 0$.

Замечание 2. Теорема 14 охватывает также и такие условия, когда за конечный промежуток времени решение бесконечное число раз входит на поверхность разрыва и сходит с нее. При этом множество значений t, при которых решение находится на S, может быть любым замкнутым множеством (в статье [5] это множество — не любое). Тем не менее, в этом случае, в силу теорем 3, 4, 14, 11, сохраняются многие из обычных свойств решений: существование, продолжаемость, правосторонняя единственность и непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения, а также свойства, выраженные в следствиях из теоремы 11.

Результаты исследования случая, когда имеются несколько пересекающихся поверхностей разрыва, будут опубликованы отдельно.

(Поступило в редакцию 22/IX 1958 г.)

Литература

1. C. Caratheodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1927.
2. A. Rosenthal, Über die Existenz der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, Sitzungsber. Heidelberger Akad., Math.-naturw. Klasse, **19** Abhandl. (1929), 3—10.
3. Е. Е. Викторовский, Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений, Матем. сб., **34(76)** (1954), 213—248.
4. J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Чехосл. матем. журн., **7**, № **3** (1957), 418—449.
5. Ю. К. Солнцев, Об устойчивости по Ляпунову положений равновесия системы двух дифференциальных уравнений в случае разрывных правых частей, Ученые записки МГУ, матем., **4**, вып. **148** (1951), 144—180.
6. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Труды Третьего матем. съезда, т. 1 (1956), 217—218.
7. R. Reissig, Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockener Reibung, Math. Nachr., **11**, N **6** (1954), 345—384.
8. J. André, P. Seibert, Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungsproblemen auftreten. I, Arch. der Math., **7**, N 2 (1956), 148—156.
9. J. André, P. Seibert, Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungsproblemen auftreten. II, Arch. der Math., **7**, N **3** (1956), 157—164.

10. М. А. Айзерман, Ф. Я. Гантмахер, Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, Прикл. матем. и мех., **21**, № **5** (1957), 659—669.
11. Я. Курцвейль, Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями, Прикл. матем. и мех., **22**, № **1** (1958), 27—45.
12. Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. 1, ГТТИ, Москва — Ленинград 1933.
13. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2, Москва, ИИЛ, 1954.
14. E. Kamke, Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, Acta Math., **58**, N **1** (1932), 57—85.
15. Б. М. Будак, Понятие движения в обобщенной динамической системе, Ученые записки МГУ, матем., **5**, вып. **155** (1952), 174—194.
16. H. Eltermann, Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Zeitschr., **62**, N **4** (1955), 469—501.
17. М. Ф. Бокштейн, Теоремы существования и единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Ученые записки МГУ, матем., вып. **15** (1939), 3—72.
18. Я. Курцвейль, З. Ворел, О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра, Чехосл. матем. журн., **7**, № **4** (1957), 568—583.
19. Б. П. Демидович, Существование периодических решений для некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Вестник МГУ, № **2** (1949), 13—25.
20. R. Reissig, Periodische Erregung eines einfachen Schwingers mit Selbststeuerung, Math. Nachr., **15**, N **3** (1956), 181—190.
21. R. Reissig, Über die Stabilität gedämpfter erzwungener Bewegungen mit linearer Rückstellkraft (Ergänzung), Math. Nachr., **14**, N **1** (1955), 17—20.
22. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1949.
23 В. В. Немыцкий. Структура одномерных предельных интегральных многообразий на плоскости в трехмерном пространстве, Вестник МГУ, № **10** (1948), 49—61.