



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Выпускная квалификационная работа по теме

«Управление в моделях межвидового взаимодействия»

Студентка 415 группы
Т. Е. Морозова *Научный руководитель*
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2018

Содержание

1	Введение	3
2	Общие свойства системы	3

1 Введение

Рассматривается модель пищевой цепи с управлением без внутривидовой конкуренции, состоящая из четырех звеньев и описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + u_1 - b_1x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - b_2x_3 + c_2x_1), \\ \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + u_2 - b_3x_4 + c_3x_2), \\ \dot{x}_4 = x_4(-r_4 + c_4x_3). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x_i , $i = \overline{1,4}$ — численности популяций видов, $r_1 + u_1$ — рождаемость первого вида, $r_2, r_3 - u_2, r_4$ — смертности остальных видов, b_1, b_2, b_3 и c_2, c_3, c_4 отвечают за взаимодействие между популяциями. Все параметры строго положительны, а управления берутся из интервалов $U_1^* = [u_1^{min}, u_1^{max}]$, $U_2^* = [u_2^{min}, u_2^{max}]$ соответственно.

В данной работе основной целью является исследование свойств и синтеза управления для задачи быстрогодействия во множество положений равновесия.

2 Общие свойства системы

Из биологической интерпретации вытекает, что численность популяции не может быть отрицательной. В следующем утверждении будет показано, что система удовлетворяет этому свойству.

Утверждение 1. *Множество $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i > 0, i = \overline{1,4}\}$ инвариантно относительно системы (??).*

Доказательство.

Из системы (??) видно, что при обнулении координат, обнуляются соответственно и выражения для \dot{x}_i , так что координаты не могут поменять знак. Интегрируя в обратном времени, получим, что координаты не могут обнулиться.

□

Рассмотрим положения равновесия (??) как функцию управления:

$$P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)), \text{ где} \\ P_1(u) = \frac{r_2c_4 + b_2r_4}{c_2c_4}, \quad P_2(u) = \frac{r_1 + u_1}{b_1}, \quad P_3(u) = \frac{r_4}{c_4}, \quad P_4(u) = \frac{c_3(r_1 + u_1) + (u_2 - r_3)b_1}{b_1b_3}. \quad (2)$$

Заметим, что от управления существенно зависят только вторая и четвертая координата, поэтому в дальнейшем будем обозначать $P(u) = (P_1, P_2(u), P_3, P_4(u))$.

Множество положений равновесия $E = \{P(u) \mid u \in U^*\}$ представляет из себя параллелограмм в пространстве (x_2, x_4) . В нашей работе мы предполагаем его непустоту, для этого введем ограничение на параметры задачи:

$$P_4(u_1^{min}, u_2^{min}) > 0.$$

Наша задача состоит в исследовании возможности перевода системы (??) во множество E при кусочно-непрерывном управлении из U_1^*, U_2^* .

В работе [?] найден первый интеграл системы (??) :

$$K(x, u) = x_1 - P_1 \ln x_1 + \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u) \ln x_2) + \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3) + \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u) \ln x_4). \quad (3)$$

Докажем, что функция $K(x, u)$ сильно выпукла по x и имеет минимум по x в точке $(P(u), u)$.

Утверждение 2. Функция $K(x, u)$ сильно выпукла на любом выпуклом ограниченном подмножестве \mathbb{R}_+^4 , а ее глобальный минимум по x достигается в точке $(P(u), u)$.

Доказательство.

Рассмотрим гессиан функции $K(x, u)$:

$$H = \text{diag} \left(\frac{P_1}{x_1^2}, \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2^2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3 x_3^2}, \frac{P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4^2} \right).$$

Очевидно, он больше нуля при всех $x_i > 0$, следовательно, функция выпукла.

Обозначим

$$\begin{aligned} K_1(x_1) &= x_1 - P_1 \ln x_1, \quad K_2(x_2, u) = \frac{b_1}{c_2}(x_2 - P_2(u) \ln x_2), \\ K_3(x_3) &= \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3}(x_3 - P_3 \ln x_3), \quad K_4(x_4, u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4}(x_4 - P_4(u) \ln x_4), \end{aligned}$$

тогда $K(x, u) = K_1(x_1) + K_2(x_2, u) + K_3(x_3) + K_4(x_4, u)$. Поскольку

$$\begin{aligned} K'_1(x_1) &= 1 - \frac{P_1}{x_1}, \quad K'_2(x_2, u) = \frac{b_1}{c_2} - \frac{P_2(u)b_1}{c_2 x_2}, \\ K'_3(x_3) &= \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} - \frac{b_1 b_2 P_3}{c_2 c_3 x_3}, \quad K'_4(x_4, u) = \frac{b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} - \frac{b_1 b_2 b_3 P_4(u)}{c_2 c_3 c_4 x_4}, \end{aligned}$$

глобальный минимум K_i достигается при $x_i = P_i$, следовательно, глобальный минимум $K(x, u)$ достигается в точке $(P(u), u)$.

Докажем сильную выпуклость. Возьмем $x_i \leq \mu, i = \overline{1, 4}$, где $\mu \geq \max \{P_i \mid i = \overline{1, 4}\}$. Тогда $H \geq \delta \cdot I$, где

$$\delta = \min \left(P_1, \frac{P_2(u)b_1}{c_2}, \frac{P_3 b_1 b_2}{c_2 c_3}, \frac{P_4(u)b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} \right) / \mu^2.$$

Таким образом $\langle Hx, x \rangle \geq \langle \delta Ix, x \rangle = \delta \|x\|^2$, что и завершает доказательство. □

Утверждение 3. В системе (1) в области \mathbb{R}_+^4 не могут возникать особые режимы управления.

Доказательство.

Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина для нашей системы.

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x_1 (r_1 + u_1 - b_1 x_2) + \psi_2 x_2 (-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1) + \psi_3 x_3 (-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2) + \psi_4 x_4 (-r_4 + c_4 x_3),$$

где $\psi(t) \in C$, $\psi(t) \neq 0$ и удовлетворяет сопряженной системе:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -(\psi_1(r_1 + u - b_2 x_2) + \psi_2 x_2 c_2), \\ \dot{\psi}_2 = -(-b_1 \psi_1 x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1) + \psi_3 x_3 c_3), \\ \dot{\psi}_3 = -(-b_2 \psi_2 x_2 + \psi_3(-r_3 + u_2 - b_3 x_4 + c_3 x_2) + \psi_4 x_4 c_4), \\ \dot{\psi}_4 = -(b_3 \psi_3 x_3 + \psi_4(-r_4 + c_4 x_3)). \end{cases}$$

Из принципа максимума $H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = \sup_{u \in U^*} H(\psi, x, u)$.

Посчитаем производную H по u :

$$H'_u = (\psi_1 x_1, \psi_3 x_3) \text{ откуда } u_1^* = \begin{cases} u_1^{max}, & \psi_1 x_1 \geq 0, \\ u_1^{min}, & \psi_1 x_1 < 0. \end{cases}, \quad u_2^* = \begin{cases} u_2^{max}, & \psi_3 x_3 \geq 0, \\ u_2^{min}, & \psi_3 x_3 < 0. \end{cases}$$

Особый режим будет возникать, если хотя бы одна из компонент управления определяется неоднозначно, то есть либо $\psi_1 x_1 = 0$, либо $\psi_3 x_3 = 0$ на ненулевом промежутке времени. Так как в нашей системе x_1 и x_3 положительны, учитываются только ψ_1, ψ_3 .

Рассмотрим оба варианта.

1. Пусть $\psi_1(t) = 0, t \in [t_1 t_2]$. Рассмотрим последовательно $\dot{\psi}_i$ и убедимся, что все сопряженные переменные нулевые.

Если $\psi_1(t) = 0$ на промежутке $[t_1, t_2]$, то $\dot{\psi}_1 = 0$ на этом же временном отрезке. Но тогда из первого сопряженного уравнения $\psi_2 = 0$, следовательно и $\dot{\psi}_2 = 0, t \in [t_1, t_2]$, а тогда из второго сопряженного уравнения $\psi_3 = 0, t \in [t_1, t_2]$. Аналогично $\dot{\psi}_3 = 0, t \in [t_1, t_2]$ и из третьего сопряженного уравнения $\psi_4 = 0, t \in [t_1, t_2]$, что противоречит невырожденности $\psi(t)$.

2. Пусть $\psi_3(t) = 0, \psi_1(t) \neq 0, t \in [t_1 t_2]$, тогда и $\dot{\psi}_3(t) = 0$ на том же временном отрезке. Таким образом $-b_2 \dot{\psi}_2 x_2 + \psi_4 x_4 c_4 = 0$. Возьмем производную по времени от этого выражения:

$$\begin{aligned} 0 &= -b_2(\dot{\psi}_2 x_2 + \psi_2 \dot{x}_2) + c_4(\dot{\psi}_4 x_4 + \psi_4 \dot{x}_4) = \\ &= -b_2(-x_2(-b_1 \psi_1 x_1 + \psi_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1)) + \psi_2 x_2(-r_2 - b_2 x_3 + c_2 x_1)) + \\ &\quad + c_4(\psi_4 x_4(-r_4 + c_4 x_3) + \psi_4 x_4(-r_4 + c_4 x_3)) = -b_1 b_2 x_1 x_2 \psi_1. \end{aligned}$$

Но $x_1, x_2, \psi_1 \neq 0$, а значит, мы получили противоречие, что и завершает доказательство. \square

Вернемся к $K(x, u)$. Уменьшая ее, мы будем приближаться к положению равновесия. Посчитаем производную $\frac{dK(x, u^0)}{dt}$ при некотором $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ в силу системы (??) :

$$\begin{aligned} \frac{dK(x, u_0)}{dt} &= \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial K(x, u_0)}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \\ &= -\frac{1}{c_2 c_3 c_4} ((u_2 - u_2^0)(b_1 b_2 (r_4 - c_4 x_3)) + c_3 (u_1 - u_1^0)(b_2 r_4 + c_4 r_2 - c_2 c_4 x_1)) = \\ &= \frac{b_1 b_2}{c_2 c_3} (u_2 - u_2^0)(x_3 - P_3) + (u_1 - u_1^0)(x_1 - P_1). \end{aligned}$$

Заметим, что равновесие по x_1 и x_3 разделяет все пространство на четыре области, в каждой из которых будет свой минимизатор.

1. В области $x_1 > P_1, x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}, u_1^0 = u_1^{max}, u_3 = u_3^{min}, u_3^0 = u_3^{max}$.
2. В области $x_1 > P_1, x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{min}, u_1^0 = u_1^{max}, u_3 = u_3^{max}, u_3^0 = u_3^{min}$.

3. В области $x_1 < P_1, x_3 > P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}, u_1^0 = u_1^{min}, u_3 = u_3^{min}, u_3^0 = u_3^{max}$.
4. В области $x_1 < P_1, x_3 < P_3$ производная будет минимальной при $u_1 = u_1^{max}, u_1^0 = u_1^{min}, u_3 = u_3^{max}, u_3^0 = u_3^{min}$.

Введем 4 функции:

$$K_1(x) = K(x, u_1^{min}, u_2^{min}), K_2(x) = K(x, u_1^{max}, u_2^{min}),$$

$$K_3(x) = K(x, u_1^{min}, u_2^{max}), K_4(x) = K(x, u_1^{max}, u_2^{max}).$$

Беря управление, минимизирующее производную $\frac{dK, u^0}{dt}$ в соответствующей области, мы будем уменьшать три функции, а четвертая будет постоянной. Процесс будет повторяться до тех пор, пока мы не попадем на положение равновесия, где все четыре функции станут постоянными. Докажем, что за конечное время мы придем в положение равновесия, то есть с какого-то момента времени функции K_i станут постоянными.

Однако неопределенность возникает на самих гиперповерхностях $x_1 = P_1, x_3 = P_3$. Если возникает скользящий режим, то управлять системой становится затруднительно ввиду неоднозначности управления.

Рассмотрим подробнее, когда возникают скользящие режимы. Перепишем нашу систему в виде:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x, t) < 0 \\ f_2(x), & \sigma(x, t) > 0. \end{cases}$$

Достаточное условие скользящего режима на отрезке $x \in [a, b]$ в этом случае будет:

$$\begin{cases} \lim_{\sigma \rightarrow 0+0} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} f_2(x) < 0 \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0-0} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} f_1(x) > 0. \end{cases} \quad \forall x \in [a, b] \subset \{x \mid \sigma(x, t) = 0\}$$

Таким образом мы можем рассматривать динамическую систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x, t) < 0 \\ f_s(x), & \sigma(x, t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x, t) > 0. \end{cases}$$

Регуляризуем скользящий режим таким образом, чтобы не уходить с линии переключения. Для этого применим метод продолжения Филиппова:

$$f_s(x) = \alpha f_1(x) + (1 - \alpha) f_2(x), \text{ где}$$

$$\alpha \in [0, 1] : \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} f_s(x) = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle \nabla(\sigma), f_1 \rangle}{\langle \nabla(\sigma), f_1 - f_2 \rangle}.$$

Будем рассматривать отдельно случай скользящего режима по первой координате и по третьей.

В первом случае $f_1(x) = f(x, u_1^{max}, u_2^0), f_2(x) = f(x, u_1^{min}, u_2^0), \sigma(x, t) = \sigma(x) = x_1 - P_1$.

Мы предполагаем, что по x_3 скользящего режима пока нет и вторая компонента управления определяется однозначно.

Тогда получим, что скользящий режим возникает при

$$\begin{cases} \lim_{x_1 - P_1 \rightarrow 0+0} x_1(r_1 + u_1^{min} - b_1 x_2) > 0, \\ \lim_{x_1 - P_1 \rightarrow 0-0} x_1(r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2) < 0, \end{cases}$$

откуда $P_2(u_1^{min}) < x_2 < P_2(u_1^{max})$.

То есть при таких x_2 , если мы находимся вблизи гиперповерхности $x_1 = P_1$ с соответствующей стороны, у нас возникает по первой координате скользящий режим. Тогда, применяя метод Филиппова, получим

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x), & \sigma(x, t) < 0 \\ \alpha_1 f_1(x) + (1 - \alpha_1) f_2(x), & \sigma(x, t) = 0 \\ f_2(x), & \sigma(x, t) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \begin{cases} f(x, u_1^{max}, u_2^0), & \sigma(x, t) < 0 \\ f(x, \alpha_1 u_1^{min} + (1 - \alpha_1) u_1^{max}, u_2^0), & \sigma(x, t) = 0 \\ f(x, u_1^{min}, u_2^0), & \sigma(x, t) > 0. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{r_1 + u_1^{max} - b_1 x_2}{u_1^{max} - u_1^{min}}.$$

Во втором случае аналогично получим, что скользящий режим по третьей координате возникает, если $\frac{c_3 x_2 - r_3 + u_2^{min}}{b_3} < x_4 < \frac{c_3 x_2 - r_3 + u_2^{max}}{b_3}$.

После регуляризации получаем

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(x, u_1^0, u_2^{max}), & \sigma(x, t) < 0 \\ f(x, u_1^0, \alpha_2 u_2^{min} + (1 - \alpha_2) u_2^{max}), & \sigma(x, t) = 0 \\ f(x, u_1^0, u_2^{min}), & \sigma(x, t) > 0. \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \frac{-r_3 + u_2^{max} - b_3 x_4 + c_3 x_2}{u_2^{max} - u_2^{min}}.$$

Список литературы

- [1] *Massarelli N., Hoffman K., Previte J. P.* Effect of parity on productivity and sustainability of Lotka–Volterra food chains. // Mathematical Biology. December of 2014. 1609–1626.