LA FUNZIONE ESPONENZIALE E IL LOGARITMO

APPUNTI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA I

G. MAUCERI

Indice

1. Introduzione

La funzione esponenziale è una delle funzioni più importanti in matematica. Essa gioca un ruolo cruciale nella teoria delle equazioni differenziali, in analisi armonica, in probabilità, in matematica applicata e in fisica. Vi sono molti modi di definire la funzione esponenziale (utilizzando la densità dei razionali nei reali, come somma di una serie di potenze, come soluzione di un'equazione differenziale, come inversa del logaritmo naturale…). In queste note abbiamo scelto di introdurre la funzione esponenziale a partire dalla legge degli esponenti, cioè dalla proprietà di trasformare somme in prodotti. Questa proprietà si esprime in termini più tecnici dicendo che la funzione esponenziale è un *omomorfismo* della struttura additiva dei numeri reali nella struttura moltiplicativa dei numeri reali positivi. Nella prima sezione mostreremo che questa proprietà caratterizza completamente la funzione esponenziale sui numeri razionali. Per caratterizzare l'esponenziale sui reali occorre aggiungere qualche ipotesi di regolarità, ad esempio che la funzione sia continua. Dimostreremo quindi che la funzione esponenziale in base $a > 0$ ha un unico prolungamento continuo da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ che soddisfa la legge degli esponenti e che nel punto 1 vale a. Nella terza sezione, dopo aver introdotto il numero e di Nepero come limite di una successione monotona, calcoliamo i limiti notevoli dell'esponenziale e del logaritmo, che sono alla base del calcolo differenziale di queste funzioni. Nella quarta sezione dimostriamo l'irrazionalità del numero e di Nepero, base dei logaritmi naturali. Nelle ultime due sezioni estendiamo le funzioni esponenziale e logaritmo al campo complesso e dimostriamo le identità di Eulero che legano la funzione esponenziale alle funzioni trigonometriche. Infine utilizziamo le identità di Eulero per estendere anche le funzioni trigonometriche al campo complesso.

2. La funzione esponenziale

Siano a un numero reale e n un intero ≥ 1. La potenza di base a e esponente n è definita ricorsivamente:

$$a^1 = a, \quad a^{n+1} = a \cdot a^n.$$

È facile dimostrare per induzione che

$$a^{m+n} = a^m a^n \tag{2.1}$$

per ogni coppia di numeri naturali m, $n \geq 1$. L'identità (2.1) è nota come *legge degli esponenti.*

Il seguente teorema mostra che, se la base a è positiva, c'è un unico modo di estendere la funzione $n \mapsto a^n$ da $\mathbb{Z}_+$ a $\mathbb{Q}$ preservando la validità della legge degli esponenti.

Teorema 2.1. *Sia f una funzione definita su $\mathbb{Q}$ tale che $f(1) = a$ e $f(r+s) = f(r)f(s)$, per ogni coppia di numeri razionali r e s. Allora per ogni razionale r si ha*

$$f(r) = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m}, & se\ r = m/n,\ con\ m, n \in \mathbb{Z}_+ \\ 1, & se\ r = 0 \\ \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, & se\ r = -m/n,\ con\ m, n \in \mathbb{Z}_+\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $f(0) = 1$ perché

$$a = f(1) = f(0+1) = f(0)f(1) = f(0)a.$$

Se $m \in \mathbb{Z}_+$, poiché $m = 1 + \ldots + 1$ (m volte), si ha che

$$f(m) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) \cdots f(1) = a^m.$$

Se $r = m/n$ con $m, n \in \mathbb{Z}_+$, poiché $m = r + \ldots + r$ (n volte), si ha che

$$a^m = f(m) = f(r + \cdots + r) = f(r) \cdots f(r) = f(r)^n.$$

Quindi $f(r) = \sqrt[n]{a^m}$.

Se $r = -m/n$ la conclusione segue dall'osservazione che

$$1 = f(0) = f(r + (-r)) = f(r)f(-r) = f(r)\sqrt[n]{a^{-m}}.$$

Quindi $f(r) = 1/\sqrt[n]{a^m}$. $\square$

Il Teorema 2.1 motiva la seguente definizione.

Definizione. Definiamo la funzione esponenziale in base $a > 0$ su $\mathbb{Q}$ ponendo

$$a^r = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m}, & \text{se } r = m/n, \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}_+ \\ 1, & \text{se } r = 0 \\ \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, & \text{se } r = -m/n, \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}_+ . \end{cases}$$

Utilizzando le proprietà della funzione radice n-esima è facile verificare che la funzione $r \mapsto a^r$ così definita soddisfa la legge degli esponenti; cioè

$$a^{r+s} = a^r a^s \qquad \forall r, s \in \mathbb{Q}.$$

Osservazione. La restrizione $a > 0$ è necessaria se vogliamo che la definizione sia indipendente dalla rappresentazione dei razionali come frazione. Ad esempio, $1/2 = 2/4$, ma mentre $(-3)^{2/4} = \sqrt[4]{(-3)^2} = \sqrt[4]{9}$ è ben definito, $(-3)^{1/2} = \sqrt{-3}$ non lo è.

Lasciamo al lettore, come esercizio, il compito di dimostrare che la funzione esponenziale su $\mathbb{Q}$ è sempre positiva, strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $a < 1$, costante uguale a 1 se $a = 1$. Inoltre $(a^r)^s = a^{rs}$, per ogni coppia di numeri razionali r e s. Se a e b sono due numeri reali positivi e $r \in \mathbb{Q}$ allora $a^r b^r = (ab)^r$.

La legge degli esponenti, da sola, non è sufficiente a caratterizzare l'estensione della funzione esponenziale su $\mathbb{R}$. Infatti si può dimostrare che esistono infinite funzioni su $\mathbb{R}$, che soddisfano la legge degli esponenti e che su $\mathbb{Q}$ coincidono con la funzione $r \mapsto a^r$ (la dimostrazione non è elementare e si basa sull'assioma della scelta, quindi è non costruttiva). Tuttavia si può ottenere l'unicità dell'estensione della funzione esponenziale imponendo una condizione di regolarità ulteriore. A questo scopo dimostriamo due risultati preliminari.

Lemma 2.2. *Siano f e g due funzioni continue su $\mathbb{R}$ le cui restrizioni a $\mathbb{Q}$ coincidono. Alllora $f = g$.*

Dimostrazione. Sia x un numero reale e (r_n) una successione di numeri razionali che converge a x. Allora $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} g(r_n) = g(x)$. $\square$

Lemma 2.3. *Se $a > 0$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$.*

Dimostrazione. Se $a = 1$ allora $a^{1/n} = \sqrt[n]{1} = 1$ per ogni n e la conclusione è ovvia. Supponiamo ora $a > 1$. Poniamo $b_n = a^{1/n} - 1$. Allora $b_n \geq 0$ e

$$a = (1 + b_n)^n > n\, b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

per la diseguaglianza di Bernoulli. Quindi $0 < b_n < a/n$ per ogni $n \geq 1$. Per il teorema del confronto

$$\lim_n a^{1/n} - 1 = \lim_n b_n = 0.$$

Questo prova che $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$ se $a > 1$. Se $0 < a < 1$ basta osservare che

$$\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1/a)^{1/n}} = 1.$$

□

Teorema 2.4. *Sia a un numero reale positivo. Esiste un'unica funzione continua $\exp_a$ su $\mathbb{R}$ tale $\exp_a(1) = a$ e $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ per ogni coppia di numeri reali x e y.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'unicità. Se f e g sono due funzioni che soddisfano le ipotesi del teorema, esse coincidono sui razionali, per il Teorema 2.1. Quindi $f = g$ per il Lemma 2.2.

Dimostriamo ora l'esistenza. Se $a = 1$ osserviamo che $1^r = 1$ per ogni r in $\mathbb{Q}$. Quindi la funzione costante che assume il valore 1 in tutti i punti di $\mathbb{R}$ è un prolungamento continuo della funzione esponenziale in base 1 sui razionali e soddisfa la legge degli esponenti.

Supponiamo ora $a > 1$ e dimostriamo che per ogni x in $\mathbb{R}$ esiste

$$\lim_{\substack{r\to x\\ r\in\mathbb{Q}}} a^r$$

Poiché la funzione $r \mapsto a^r$ è strettamente crescente su $\mathbb{Q}$, per il teorema sul limite delle funzioni monotone, esistono

$$\begin{aligned} \lim_{r\to x-} a^r &= \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}, \\ \lim_{r\to x+} a^r &= \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, x < r\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

e si ha $\lim_{r\to x-} a^r \leq \lim_{r\to x+} a^r$. Per dimostrare che i due limiti sono uguali consideriamo due successioni di numeri razionali, (r_n) e (s_n), tali che (r_n) tende crescendo a x, (s_n) tende decrescendo a x e $s_n - r_n < 1/n$, per ogni $\in \mathbb{N}_+$. Allora, per la (2.2),

$$a^{r_n} \leq \lim_{r\to x-} a^r \leq \lim_{r\to x+} a^r \leq a^{s_n}.$$

Pertanto

$$1 \leq \frac{\lim\limits_{r\to x+} a^r}{\lim\limits_{r\to x-} a^r} \leq \frac{a^{s_n}}{a^{r_n}} = a^{s_n - r_n} \leq a^{1/n}.$$

Per il Lemma 2.3 e il teorema sul confronto dei limiti ne segue che $\lim_{r\to x-} a^r = \lim_{r\to x+} a^r$. Pertanto per ogni x in $\mathbb{R}$ esiste $\lim_{r\to x} a^r$. Definiamo

$$\exp_a x = \lim_{\substack{r\to x\\ r\in\mathbb{Q}}} a^r.$$

Dimostriamo ora che $\exp_a r = a^r$ per ogni r in $\mathbb{Q}$. Poiché $(r + 1/n)$ è una successione di numeri razionali diversi da r che converge a r,

$$\exp_a r = \lim_{n\to\infty} a^{r+1/n} = \lim_{n\to\infty} a^r a^{1/n} = a^r.$$

Quindi la funzione $\exp_a$ è un'estensione a $\mathbb{R}$ della funzione $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$. In particolare $\exp_a 1 = a$. Osserviamo che, se (r_n) è una qualunque successione di numeri razionali che converge a x, si ha

$$\exp_a x = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}. \tag{2.3}$$

Infatti, poiché $\exp_a x = \lim_{r\to x} a^r$, per la caratterizzazione del limite mediante successioni, la (2.3) è certamente vera se $r_n \neq x$ per ogni n. Inoltre la restrizione $r_n \neq x$ può essere rimossa, perché se x è razionale $\exp_a x = a^x$.

Per dimostrare che la funzione $\exp_a$ soddisfa l'identità

$$\exp_a(x + y) = \exp_a x \exp_a y \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R},$$

consideriamo due successioni di numeri razionali (r_n) e (s_n) che convergono a x e a y rispettivamente. Allora $(r_n + s_n)$ è una successione di numeri razionali che converge a $x + y$ e

$$\exp_a(x + y) = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \lim_{n\to+\infty} a^{s_n} = \exp_a x \exp_a y.$$

Dimostriamo ora che la funzione $x \mapsto \exp_a x$ è positiva e strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Infatti, per la (2.2), si ha

$$\exp_a x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\} = \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, x < r\}. \tag{2.4}$$

In particolare $\exp_a x > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Inoltre, se x e $y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, presi due numeri razionali r e s tali che $x < r < s < y$, per la (2.4) si ha $\exp_a x \le a^r < a^s \le \exp_a y$.

Infine, per dimostrare la continuità di $\exp_a$ su $\mathbb{R}$, proviamo che $\lim_{h\to0} \exp_a(x + h) = \exp_a x$, per ogni x in $\mathbb{R}$. Poiché $\exp_a(x + h) = \exp_a x \exp_a h$, è sufficiente provare che $\lim_{h\to0} \exp_a h = 1$. Poiché la funzione $\exp_a$ è crescente esiste il limite per $h \to 0+$ e, per determinarlo, è sufficiente calcolarlo su una successione di numeri razionali positivi che tende a zero, ad esempio $(1/n)$, per cui si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \exp_a(1/n) = \lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1.$$

In modo analogo, utilizzando la successione $(-1/n)$, si dimostra che anche anche il limite di $\exp_a h$ per $h \to 0-$ esiste e vale 1. Quindi $\lim_{h\to0} \exp_a h = 1$.

Il teorema è così dimostrato quando la base a è maggiore o uguale a 1. Se $0 < a < 1$ è facile verificare che la funzione $\exp_a = 1/\exp_{1/a}$, che è ben definita perché $1/a > 1$, soddisfa la tesi. $\square$

Definizione. La funzione $\exp_a$ si dice funzione esponenziale in base a su $\mathbb{R}$. Se a è un numero reale positivo e x è un numero reale qualsiasi, la potenza a^x è, per definizione, il numero reale $\exp_a x$.

Il seguente teorema riassume alcune delle proprietà della funzione esponenziale su $\mathbb{R}$.

Teorema 2.5. *La funzione $x \mapsto a^x$ è positiva e strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$, costante uguale a 1 se $a = 1$. Inoltre valgono le identità*

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (ab)^x &= a^x b^x \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}$$

per ogni x, y e b in $\mathbb{R}$, $b > 0$.

Dimostrazione. Le prime proprietà, fino alle legge degli esponenti inclusa, sono già state dimostrate nel Teorema 2.4. L'identità $a^{-x} = 1/a^x$ segue dalla legge degli esponenti, perché $a^x a^{-x} = a^0 = 1$. Per il Lemma 2.2, per dimostrare la terza identità è sufficiente osservare che essa vale per x razionale. Per dimostrare l'ultima identità cominciamo con l'osservare che essa è vera se y è razionale. Infatti, se $y = m/n$ con m, n interi e $n > 0$, si ha che

$$\begin{aligned} (a^x)^{m/n} &= \sqrt[n]{(a^x)^m} \\ &= \sqrt[n]{a^{xm}} \\ &= (a^{xm})^{1/n} \\ &= a^{xm/n}. \end{aligned}$$

La conclusione segue dal Lemma 2.2, perchè le funzioni $y \mapsto (a^x)^y$ e $y \mapsto a^{xy}$ sono continue su $\mathbb{R}$ e coincidono su $\mathbb{Q}$. □

Esaminiamo ora i limiti della funzione esponenziale all'infinito.

Proposizione 2.6. *Se $a > 1$*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0. \tag{2.5}$$

Se $0 < a < 1$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty. \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $a > 1$. Poiché la funzione è crescente i limiti esistono e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{n\to+\infty} a^n, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{n\to\infty} a^{-n}.$$

Scriviamo $a = 1 + b$, con $b > 0$. Allora, per ogni intero positivo n,

$$a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{1+nb}.$$

Pertanto $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} a^{-n} = 0$ per il teorema del confronto. Questo prova la (2.5). Per dimostrare la (2.6) basta osservare che, se $0 < a < 1$, allora $1/a > 1$ e $a^x = (1/a)^{-x}$. □

La proposizione seguente, che è una generalizzazione della Proposizione 2.6, mostra che, se la base a è maggiore di 1, la funzione esponenziale tende all'infinito per $x \to \infty$ e tende a 0 per $x \to -\infty$ "più rapidamente" di qualunque potenza di x.

Proposizione 2.7. *Sia $k \in \mathbb{N}_+$. Se $a > 1$*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^k\, a^x = 0. \tag{2.7}$$

Se $0 < a < 1$

$$\lim_{x\to+\infty} x^k\, a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x^k} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\infty, & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Supponiamo $a > 1$. Proviamo dapprima che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n+1} = +\infty. \tag{2.9}$$

Infatti, scrivendo $a = 1 + b$, con $b > 0$, e utilizzando la formula del binomio di Newton, si ha

$$a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb + n(n-1)b^2 \geq n(n-1)\, b^2.$$

Quindi, per il teorema del confronto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} \frac{n}{n+1} \geq \lim_{n\to\infty} (n-1)b^2 \;\lim \frac{n}{n+1} = +\infty.$$

Questo dimostra la (2.9). Pertanto, per la definizione di limite, fissato $y \in \mathbb{R}$ esiste un naturale n_y tale che $a^n/(n+1) > y$ se $n \geq n_y$. Allora, se $x > n_y + 1$ e $n = [x]$ (la parte intera di x)

$$\frac{a^x}{x} > \frac{a^n}{n+1} > y,$$

cioè

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty. \tag{2.10}$$

Il primo limite in (2.7) si ottiene da (2.10) con il cambiamento di variabile $x = ky$. Infatti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^k} = \lim_{y\to\infty} \frac{a^{ky}}{(ky)^k} = \frac{1}{k^k} \lim_{y\to\infty} \left(\frac{a^y}{y}\right)^k = +\infty.$$

Il secondo limite segue dal primo con il cambiamento di variabile $y = -x$. I limiti per $0 < a < 1$ si ottengono dai precedenti osservando che $a^x = b^{-x}$ con $b = 1/a > 1$. $\square$

Corollario 2.8. *Se $a \neq 1$ l'immagine della funzione esponenziale in base a è $\mathbb{R}_+$.*

Dimostrazione. Sia $y > 0$ fissato. Per la Proposizione 2.6 esistono due numeri reali t e z tali che $a^t < y$ e $a^z > y$. Per il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue esiste un numero reale x compreso tra t e z tale che $a^x = y$. $\square$

Se $a \neq 1$ la funzione esponenziale in base a è strettamente monotona. Pertanto essa è invertibile. La sua inversa è definita su $\mathbb{R}_+$ e ha come immagine $\mathbb{R}$.

Definizione. L'inversa della funzione esponenziale in base a si dice *logaritmo in base* a e si denota con il simbolo $\log_a$.

Teorema 2.9. *La funzione $\log_a$ è continua su $\mathbb{R}_+$, strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$. Essa soddisfa le seguenti identità*

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a x^y &= y \log_a x \\
\log_b x &= \log_b a \cdot \log_a x.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Le proprietà di continuità e di monotonia del logaritmo seguono dai teoremi di continuità e monotonia della funzione inversa. La prima identità è una conseguenza immediata della legge degli esponenti. Per dimostrarla basta applicare il $\log_a$ al primo e all'ultimo termine dell'identità $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$. Per dimostrare la seconda si applica il $\log_a$ al primo e all'ultimo termine dell'identità $a^{y \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^y = x^y$. Per dimostrare l'ultima identità si applichi $\log_b$ al primo e all'ultimo termine dell'identità $x = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = b^{\log_b a \log_a x}$. $\square$

Corollario 2.10. *Siano a e b numeri reali positivi. Allora $b^x = a^{x \log_a b}$ per ogni x in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata delle identità $a^{x \log_a b} = (a^{\log_a b})^x = b^x$. $\square$

Proposizione 2.11. *Se $a > 1$*

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Se $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty.$$

Dimostrazione. Proviamo il secondo limite nel caso $a > 1$. Fissato $y \in \mathbb{R}$, poiché il logaritmo in base a è crescente, se $x > a^y$ si ha che $\log_a(x) > y$. Questo prova che $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$. Alternativamente, possiamo usare il teorema sul limite della funzione composta:

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \lim_{y\to+\infty} \log_a(a^y) = \lim_{y\to+\infty} y = +\infty.$$

Lasciamo al lettore come esercizio il compito di provare gli altri casi. □

Poiché abbiamo definito la potenza con esponente reale possiamo ora considerare, per ogni esponente reale α, la funzione potenza $x \mapsto x^\alpha$, definita per x in $\mathbb{R}_+$.

Proposizione 2.12. *La funzione potenza $x \mapsto x^\alpha$ è continua su $\mathbb{R}_+$, positiva e strettamente crescente se $\alpha > 0$, strettamente decrescente se $\alpha < 0$.*

Dimostrazione. Sia a un numero reale maggiore di 1. Allora, per il Teorema 2.9, $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$ è una funzione continua perché composta di funzioni continue. Se $\alpha > 0$ è strettamente crescente perché composta di funzioni strettamente crescenti. Se $\alpha < 0$ la funzione è strettamente decrescente, perché $x^\alpha = 1/x^{-\alpha}$. □

3. Il numero e di Nepero

In questo paragrafo calcoleremo alcuni limiti notevoli che sono alla base delle formule del calcolo differenziale per le funzioni esponenziali e logaritmiche. Per prima cosa definiamo il numero e di Nepero, come limite di una particolare successione limitata. Siano (a_n) e (b_n) le successioni definite da

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Lemma 3.1. *La successione (a_n) è crescente, la successione (b_n) è decrescente, e $a_n < b_n$ per ogni intero $n \geq 1$.*

Dimostrazione. Utilizzeremo la disuguaglianza di Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

valida per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per $x \geq -1$, la cui dimostrazione si ottiene facilmente per induzione. Per provare che la successione (a_n) è crescente basta dimostrare che $a_n \geq a_{n-1}$, per ogni $n \geq 2$. Questa disuguaglianza equivale a

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right),$$

cioè ancora a

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\geq 1-\frac{1}{n}$$

Quest'ultima disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Bernoulli, ponendo $x = -1/n^2$. Per provare la decrescenza della successione (b_n) basta dimostrare che $b_n < b_{n-1}$, per ogni $n \leq 2$. Con ragionamenti analoghi a quelli utilizzati in precedenza si vede che questo equivale a provare la disuguaglianza

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n},$$

che segue dalla disuguaglianza di Bernoulli ponendo $x = 1/(n^2-1)$. Infine, per provare che $a_n < b_n$, basta osservare che $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n > a_n$. □

Proposizione 3.2. *Le successione* (a_n) *e* (b_n) *convergono allo stesso limite.*

Dimostrazione. Poiché $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$, le due successioni sono limitate. Quindi esse convergono a dei limiti finiti per il teorema sul limite delle successioni monotone. I limiti coincidono perché $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$. □

Il limite delle due successioni (a_n) e (b_n) si dice *numero di Nepero o di Eulero* e si denota con la lettera e. Successive approssimazione del numero e si possono ottenere utilizzando le stime $a_n < e < b_n$ per ogni $n \geq 1$. Una approssimazione di e con 12 cifre decimali è 2.718281828459. Il numero e è irrazionale. La dimostrazione di questo fatto verrà data nella sezione 4. Si può dimostrare anche che il numero e non è algebrico, cioè non è radice di alcun polinomio a coefficienti razionali. Per questo motivo si dice che e è un numero *trascendente*. Se si sceglie e come base per i logaritmi si ottengono i *logaritmi Neperiani o naturali*, così detti perché la scelta di e come base porta a formule particolarmente semplici nel calcolo differenziale. La funzione logaritmo naturale si denota con il simbolo ln o anche log, omettendo l'indicazione della base. Utilizzeremo ora la formula

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e \tag{3.1}$$

per calcolare alcuni limiti notevoli. Consideriamo la funzione $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, definita quando la base è positiva, cioè per $x \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

Proposizione 3.3. *Si ha*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il limite a $+\infty$. Se $n \le x < n+1$ e $n > 0$ si ha

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n}.$$

Per le proprietà di monotonia delle potenze sia rispetto alla base che rispetto all'esponente, si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Il primo e l'ultimo termine in questa catena di disuguaglianze tendono a e, per la (3.1). Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{k\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1} = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

Pertanto, per il teorema del confronto dei limiti,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Per calcolare il limite a $-\infty$ basta effettuare la sostituzione $x = -t - 1$. Si ottiene così

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

□

I seguenti limiti notevoli giocheranno un ruolo importante nel calcolo differenziale del logaritmo e dell'esponenziale.

Proposizione 3.4. *Si ha*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= 1\\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} &= 1.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Effettuando il cambiamento di variabile $x = 1/y$, si ottiene che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to0+}\ln(1+x)^{1/x}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{y})^y\\ &= \ln e = 1.\end{aligned}$$

Il limite per $x \to 0-$ si calcola in modo simile. Il secondo limite si riconduce al primo, mediante il cambiamento di variabile $e^x - 1 = y$. $\square$

Osservazione. Poiché i limiti notevoli dell'esponenziale e del logaritmo assumono una forma più semplice quando la base è e, in analisi si preferisce lavorare quasi sempre con questa base, riconducendo l'esponenziale e il logaritmo in base diversa a quelli in base e mediante le formule

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad \log_a x = \ln x / \ln a.$$

Corollario 3.5. *Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Allora*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{\log a} \\ \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \log a. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Utilizzando la formula di cambiamento di base

$$\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a},$$

si ottiene che

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

Per calcolare il secondo limite si usa la formula $a^x = e^{x \ln a}$ e il cambiamento di variabile $y = x \ln a$. $\square$

4. L'irrazionalità di e

In questo paragrafo dimostriamo che il numero e è irrazionale utilizzando la formula di Taylor dell'esponenziale.

Teorema 4.1. *Il numero e è irrazionale.*

Dimostrazione. Sia T_n il polinomio di Mac Laurin di ordine n della funzione $x \mapsto e^x$. Dalla formula del resto di Lagrange abbiamo che esiste un numero reale c, $0 < c < 1$, tale che

$$e - T_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Poiché $1 < e^c < e < 3$, si ha che

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Moltiplicando per $n!$ si ottiene

$$0 < en! - n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)}.$$

Se e fosse razionale, cioè $e = p/q$ con p e q in N_+, scegliendo per n un multiplo di q maggiore di 3, si avrebbe che il numero intero $en! - n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ sarebbe minore di $3/4$. Questo è assurdo. $\square$

Osservazione. La dimostrazione del Teorema 4.1 fornisce un'altra espressione del numero e. Infatti si ha che

$$e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{o}^{n} \frac{1}{k!}.$$

L'errore commesso approssimando e mediante questa formula tende a zero molto rapidamente al crescere di n.

5. L'esponenziale e il logaritmo nel campo complesso

Vogliamo ora estendere la funzione esponenziale al campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ in modo tale che che continui a valere la legge degli esponenti $a^{z+w} = a^z a^w$ per ogni coppia di numeri complessi z e w. Naturalmente vogliamo che la restrizione dell'esponenziale ai numeri reali coincida con la funzione $x \mapsto a^x$ già definita. Consideriamo dapprima il caso in cui la base è e. La definizione di e^z che daremo è motivata dalle seguenti considerazioni euristiche.

Se $z = x + iy$, con x e y reali, per la legge degli esponenti dovremo avere che

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Poiché e^x è già definito per x reale, è sufficiente definire l'esponenziale di un numero immaginario puro iy. Imponiamo la condizione che la funzione $y \mapsto e^{iy}$ soddisfi l'identità[1]

$$\frac{d}{dy} e^{iy} = i e^{iy}. \tag{5.1}$$

È immediato verificare che la funzione $f(y) = \cos y + i \sin(y)$ soddisfa l'equazione

$$f' = if \tag{5.2}$$

Infatti

$$f'(y) = -\sin y + i \cos y = i(\cos y + i \sin y) = if(y).$$

Inoltre $f(0) = 1 = e^{iy}$. Essa è anche l'unica funzione che soddisfi queste due condizioni, come mostra il lemma seguente.

[1] Si può dimostrare che una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soddisfa le legge degli esponenti se e solo è derivabile ed esiste un numero complesso w tale tale che $f'(y) = wf(y)$, per ogni y in $\mathbb{R}$. Pertanto è naturale richiedere che la funzione $y \mapsto e^{iy}$ soddisfi la (5.1).

Lemma 5.1. *Sia $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione derivabile che soddisfa l'equazione (5.2) e la condizione iniziale $g(0) = 1$. Allora $g(y) = \cos y + i \sin y$.*

Dimostrazione. Questo risultato è una conseguenza del teorema generale di unicità della soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Tuttavia ne diamo una dimostrazione semplice, che non utilizza la teoria delle equazioni differenziali. Consideriamo il rapporto $g(y)/f(y)$. (Possiamo dividere per $f(y)$, perché $|f(y)|^2 = \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \neq 0$). Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{g(y)}{f(y)} &= \frac{f(y)g'(y) - g(y)f'(y)}{f(y)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $g(y) = cf(y)$ e $c = 1$ perché $g(0) = f(0) = 1$. □

La discussione precedente motiva la seguente definizione

Definizione. L'esponenziale del numero complesso $z = x + iy$, con x e y reali, è definito da

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Proposizione 5.2. *La funzione esponenziale complessa gode delle seguenti proprietà:*

$$e^{z+w} = e^z e^w \tag{5.3}$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z} \tag{5.4}$$

$$e^{\overline{z}} = \overline{e^z} \tag{5.5}$$

$$|e^z| = e^{\Re z} \tag{5.6}$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \tag{5.7}$$

per ogni z e w in $\mathbb{C}$. Inoltre la funzione $x \mapsto e^{zx}$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$\frac{d}{dz} e^{zx} = ze^{zx}.$$

La verifica è semplice e viene lasciata la lettore. Se $z = x+iy$ è un numero complesso la cui rappresentazione polare è $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, con $r = |z|$ e $\theta \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere $z = re^{i\theta}$. Si noti che un numero complesso ha modulo 1 se e solo se esso ha la forma $z = e^{i\theta}$, per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. L'argomento θ è individuato a meno di multipli interi di 2π. Si chiama *argomento principale del numero complesso z* la funzione Arg : $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$ che associa ad ad ogni numero complesso $z \neq 0$ il suo argomento compreso tra $-\pi$ e π.

Consideriamo ora la funzione esponenziale come funzione definita su $\mathbb{C}$ a valori in $\mathbb{C}$.

Proposizione 5.3. *La funzione esponenziale ha come immagine* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Essa è periodica di periodo* $2\pi i$. *La sua restrizione alla striscia orizzontale*

$$S = \{z : -\pi < \Im z \leq \pi\}$$

è iniettiva.

Dimostrazione. Poiché $|e^z| = e^{\Re z} > 0$ per ogni numero complesso z, 0 non appartiene all'immagine dell'esponenziale. Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ di modulo $r \neq 0$ e argomento θ. Allora, se $z = \log r + i\theta$, si ha $e^z = re^{i\theta} = w$. Questo dimostra che l'immagine dell'esponenziale è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La (5.7) mostra che l'esponenziale è periodica di periodo $2\pi i$. Per concludere la dimostrazione del teorema basta provare che essa è iniettiva sulla striscia S. A questo scopo osserviamo che la controimmagine di 1 è $\{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$. Infatti se $e^z = 1$, con $z = x + iy$, si ha $e^x = |e^z| = 1$ e $\cos y + i \sin y = 1$. Quindi $x = 0$ e $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ora, se $e^z = e^w$, si ha $e^{z-w} = 1$ e quindi $z - w = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. La costante k è 0 se z e $w \in S$. □

La restrizione della funzione $\exp : S \to \mathbb{C}$ è quindi invertibile.

Definizione. Si chiama *determinazione principale del logaritmo complesso* la funzione $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S$, inversa della restrizione dell'esponenziale alla striscia S.

Proposizione 5.4. *La determinazione principale del logaritmo soddisfa l'identità*

$$\log z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

per ogni $z \neq 0$.

Sostituendo la striscia S con una qualunque striscia orizzontale di ampiezza 2π si ottengono altre determinazioni del logaritmo complesso.

Proposizione 5.5. *Se* z *e* w *sono due numeri complessi tali che* $zw \neq 0$, *allora*

$$\log(zw) = \log z + \log w + 2\pi i \; n(z, w),$$

dove

$$n(z, w) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq \pi, \\ 1 & \text{se} \quad -2\pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq -\pi, \\ -1 & \text{se} \quad \pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq 2\pi, \end{cases} \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Scriviamo $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\phi}$, con $\theta = \operatorname{Arg} z$ e $\phi = \operatorname{Arg} w$. Allora $zw = r\rho e^{i(\theta+\phi)}$, con $-2\pi < \theta + \phi \leq 2\pi$. Pertanto, se $n(z, w)$ è l'intero definito da (5.8), $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w + 2\pi n(z, w)$. La conclusione segue dalla Proposizione 5.4. □

Possiamo ora definire le potenze complesse di un numero complesso diverso da 0.

Definizione. Se w e z sono due numeri complessi e $w \neq 0$, definiamo

$$w^z = e^{z \log w}.$$

Il lettore può facilmente verificare che le potenze complesse soddisfano le seguenti regole.

Proposizione 5.6. *Siano w, z e ζ numeri complessi. Allora*

$$\begin{aligned} w^{z+\zeta} &= w^z w^\zeta, && \text{se } w \neq 0, \\ (z\zeta)^w &= z^w \zeta^w \, e^{2\pi i w \; n(z,\zeta)}, && \text{se } z\zeta \neq 0, \end{aligned}$$

dove $n(z,\zeta)$ è l'intero definito nella Proposizione 5.5.

6. Le funzioni trigonometriche nel campo complesso

L'identità $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ stabilisce una relazione tra l'esponenziale e le funzioni trigonometriche. Considerando separatamente la parte reale e la parte immaginaria di $e^{i\theta}$ si ottengono le sorprendenti identità di Eulero

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{6.1}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{6.2}$$

Queste identità sono del tutto inaspettate a partire dalla definizione geometrica di seno e coseno. Si notino l'analogia e le differenze con le relazioni corrispondenti per le funzioni iperboliche

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \tag{6.3}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}. \tag{6.4}$$

Le identità di Eulero possono essere utilizzate per definire le funzioni trigonometriche nel campo complesso.

Definizione. Dato un numero complesso z, definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{6.5}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{6.6}$$

Proposizione 6.1. *Se* $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$, *si ha*

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \tag{6.7}$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \tag{6.8}$$

Lasciamo al lettore la cura di dimostrare la Proposizione 6.1, utilizzando la definizione di $\cos z$, $\sin z$ e dell'esponenziale complessa.

Le altre funzioni trigonometriche (tangente, secante, cosecante, ...) si definiscono mediante il seno e il coseno. Per concludere osserviamo che valgono le seguenti identità

$$\cos ix = \cosh x \tag{6.9}$$

$$\sin ix = i \sinh x. \tag{6.10}$$