CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI

GM

Sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Denotiamo con $\mathcal{F}_c$ l'insieme delle funzioni definite in un intorno bucato del punto c, che può essere diverso per ogni funzione.

Definizione 1. Date due funzioni $f, g \in \mathcal{F}_c$ diremo che

(i) f è *trascurabile* rispetto a g per $x \to c$ se esiste una funzione $\omega \in \mathcal{F}_c$ tale che $\lim_{x\to c} \omega(x) = 0$ e
$$f(x) = g(x)\omega(x)$$
per ogni x in un intorno bucato di c;

(ii) f è *asintotica* a g per $x \to c$ se esiste una funzione $h \in \mathcal{F}_c$ tale che $\lim_{x\to c} h(x) = 1$ e
$$f(x) = g(x)h(x)$$
per ogni x in un intorno bucato di c.

Notazione. Se f è trascurabile rispetto a g per $x \to c$ scriveremo $f \ll_c g$ oppure $f \ll g$ per $x \to c$. Se f è asintotica rispetto a g scriveremo $f \sim_c g$ oppure $f \sim g$ per $x \to c$.

Se $g \in \mathcal{F}_c$ l'insieme $\{f \in \mathcal{F}_c : f \ll g, \text{per } x \to c\}$ si denota con $o_c(g)$ oppure semplicemente con $o(g)$ quando è chiaro che stiamo considerando il comportamento per $x \to c$ (leggi "o-piccolo" di g per x tendente a c). Quindi la notazione $f \ll_c g$ è equivalente a $f \in o_c(g)$. Più spesso, con un abuso di notazione, si scrive $f = o_c(g)$.

Proposizione 2. *Supponiamo che g sia diversa da zero in un intorno di c. Allora*

(i) $f \ll_c g$ *se e solo se* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ii) $f \sim_c g$ *se e solo se* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Esercizio. Verificare che sussistono le seguenti relazioni:

$$1-\cos x \ll_0 x; \qquad x-\sin x \ll_0 x^2; \qquad x^3 \ll_0 x;$$

$$x \ll_{+\infty} x^3; \qquad x^{10} \ll_{+\infty} \mathrm{e}^x; \qquad \mathrm{e}^x \ll_{-\infty} x^{-10}$$

$$\sin x \sim_0 x; \qquad 1-\cos x \sim_o \tfrac{x^2}{2}; \qquad x-\sin x \sim_0 \tfrac{x^3}{6};$$

$$\ln(1+x) \sim_0 x; \qquad \sqrt{1+2x^3} \sim_{+\infty} \sqrt{2}x^{3/2}; \qquad 3x^4 - x\cos \sim_{-\infty} 3x^4.$$

Se f e g sono entrambe infinitesime per $x \to c$ e $f \ll_c g$ si dice anche che f è *infinitesima di ordine superiore* a g per $x \to c$ oppure che f *tende a zero più velocemente* di g per $x \to c$. Se f e g sono entrambe infinite per $x \to c$ e $f \ll_c g$ si dice anche che g è *infinita di ordine superiore* a f per $x \to c$ oppure che g *tende a infinito più velocemente* di f per $x \to c$.

Il seguente risultato risulta molto utile nel calcolo dei limiti delle forme indeterminate.

Teorema 3. *Siano f, g, f_1, g_1 funzioni in $\mathcal{F}_c$ e supponiamo che $g(x) \neq 0$ in un intorno bucato di c.*

(i) *Se $f_1 \ll_c f$ e $g_1 \ll_c g$ allora*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(ii) *Se $f_1 \sim_c f$ e $g_1 \sim_c g$ allora*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Dimostrazione. Se $f_1 \ll_c f$ e $g_1 \ll_c g$ allora $f_1 = f\omega$ e $g_1 = g\eta$ con ω e η infinitesime per $x \to c$. Quindi

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x\to c} \frac{1+\omega(x)}{1+\eta(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se $f_1 \sim_c f$ e $g_1 \sim_c g$ allora $f_1 = fh$ e $g_1 = gk$ con $h, k \to 1$ per $x \to c$. Quindi

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \lim_{x\to c} \frac{h(x)}{k(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

□

Ci riferiremo a (i) come al *principio di eliminazione* dei termini trascurabili e alla (ii) come al *principio di sostituzione* dei termini asintotici. Vediamo in un esempio come si possa applicare queste principi nel calcolo dei limiti di forme indeterminate. Supponiamo di voler calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2) + x\ln(1+x^2)\mathrm{e}^x}{1 - \cos x + \mathrm{e}^{x^3} - 1},$$

che si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Si può verificare facilmente, usando l'Hôpital oppure i limiti notevoli, che per $x \to 0$

$$x\ln(1+x^2)\mathrm{e}^x \ll \sin(3x^2) \sim 3x^2$$
$$\mathrm{e}^{x^3} - 1 \ll 1 - \cos x \sim x^2/2$$

Applicando dapprima il principio di eliminazione e, successivamente, il principio di sostituzione, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2) + x\ln(1+x^2)\mathrm{e}^x}{1 - \cos x + \mathrm{e}^{x^3} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2/2} = 6.$$

Il problema che si pone a questo punto è: come riconoscere i termini trascurabili e come trovare dei termini che siano asintotici a quelli presenti nel limite e che siano più semplici? Per rispondere a queste domande è utile soffermarci a considerare alcune proprietà delle relazioni $\ll$ e $\sim$.

Proposizione 4. *La relazione* $\ll_c$ *è transitiva su* $\mathcal{F}_c$*:*

$$f \ll_c g, \quad g \ll_c h \quad \Longrightarrow \quad f \ll_c h \qquad \forall f, g, h \in \mathcal{F}_c.$$

La relazione $\sim_c$ *è una relazione di equivalenza su* $\mathcal{F}_c$*, cioè*

(a) *è riflessiva:* $f \sim_c f$*;*
(b) *è simmetrica:* $f \sim_c g \quad \Longrightarrow g \sim_c f$*;*
(b) *è transitiva:* $f \sim_c g, \quad g \sim_c h \quad \Longrightarrow f \sim_c h$*.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Osservazione. È facile verificare che $f \ll_c f$ se e solo se $f = 0$ in qualche intorno di c. Indichiamo con $\mathcal{Z}_c$ il sottoinsieme di $\mathcal{F}_c$ delle funzioni nulle in qualche intorno bucato di c. Allora la relazione $\ll_c$ è transitiva e non-riflessiva su $\mathcal{F}_c \setminus \mathcal{Z}_c$, cioè è una relazione di ordine (parziale) stretto. Parziale qui si riferisce al fatto che non tutte le funzioni in $\mathcal{F}_c$ sono confrontabili. Ad esempio le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = x\sin(1/x)$ non sono confrontabili in 0.

Proposizione 5. *Le relazioni* $\ll_c$ *e* $\sim_c$ *soddisfano le seguenti proprietà*

(a) $f_1 \ll_c g$ *e* $f_2 \ll_c g \quad \Longrightarrow \quad f_1 + f_2 \ll_c g$*;*

(b) $f_1 \sim_c \alpha g$ *e* $f_2 \sim_c \beta g$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f_1 + f_2 \sim_c (\alpha + \beta) g$*;*

(c) $f_1 \ll_c g_1$ *e* $f_2 \ll_c g_2 \implies f_1 f_2 \ll_c g_1 g_2$ *;*

(d) $f_1 \sim_c g_1$ *e* $f_2 \sim_c g_2 \implies f_1 f_2 \sim_c g_1 g_2$ *;*

(e) $f \ll_c g$ *e* $g \sim_c h \implies f \ll_c h$ *;*

(f) $f \sim_c g$ *e* $g \ll_c h \implies f \ll_c h$ *.*

(g) *Sia* $\phi \in \mathcal{F}_p$ *tale che* $\phi \to c$ *per* $x \to p$ *e* $\phi(y) \neq c$ *per ogni* y *in un intorno bucato di* p*. Allora*

(g.1) $f \ll_c g \implies f \circ \phi \ll_p g \circ \phi$ *;*
(g.2) $f \sim_c g \implies f \circ \phi \sim_p g \circ \phi$ *.*

Dimostrazione. Sono tutte facili verifiche, a partire dalle definizioni di $\ll_c$ e $\sim_c$. Ad esempio verifichiamo la (b). Se $f_1 = \alpha g h_1$ e $f_2 = \beta g h_2$ con $h_1, h_2 \to 1$ allora $f_1 f_2 = (\alpha + \beta)\, gh$ dove $h = (\alpha h_1 + \beta h_2)/(\alpha + \beta) \to 1$. La (g) utilizza il teorema sul limite della funzione composta. □

Osservazione. È importante osservare che le seguenti implicazioni, apparentemente plausibili, sono invece **FALSE**

(F.1) $f_1 \ll_c g_1$ e $f_2 \ll_c g_2 \implies f_1 + f_2 \ll_c g_1 + g_2$.

(F.2) $f_1 \sim_c g_1$ e $f_2 \sim_c g_2 \implies f_1 + f_2 \sim_c g_1 + g_2$.

(F.3) $f \sim_c g \implies \phi \circ f \sim_c \phi \circ g$.

Il lettore verifichi che un controesempio di (F.1) per $x \to 0$ è dato dalle funzioni $f_1 = f_2 = x^2$, $g_1 = x$, $g_2 = -\sin(x)$, un controesempio di (F.2) per $x \to 0$ è dato dalle funzioni $f_1 = x + x^3$, $f_2 = -\sin x$, $g_1 = x$, $g_2 = -x$ e un controesempio di (F.3) per $x \to +\infty$ è dato dalle funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - x$ e $\phi(y) = \mathrm{e}^y$.

Tutte le considerazioni precedenti si applicano, con le ovvie modifiche, a funzioni che sono definite in un intorno destro o sinistro di c. In particolare i principi di eliminazione e di sostituzione valgono anche per limiti sinistri o destri.

Applicazione al calcolo dei limiti. Supponiamo di voler calcolare un limite della forma

$$\lim_{x \to c} \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_k}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n},$$

dove $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m$ sono funzioni in $\mathcal{F}_c$. La procedura da seguire è

(1) determinare nel numeratore e nel denominatore separatamente i termini trascurabili e quelli dominanti.
(2) Se vi è un unico termine dominante, tutti i termini trascurabili rispetto ad esso possono essere eliminati, per il principio di eliminazione.
(3) Se i termini dominanti sono più d'uno, occorre considerare la loro somma come un unico termine e verificare se tale somma non sia trascurabile rispetto agli altri termini.
(4) Una volta individuati i termini dominanti al numeratore e al denominatore, sostituirli con termini più semplici ad essi asintotici.

Consideriamo ad esempio il seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x + 1 - \cos x + \ln(1+x^3)}{x + e^{x^2} - 1 - \sin x}.$$

Al numeratore abbiamo che per $x \to 0+$

$$\sin x \sim x, \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad \ln(1+x^3) \sim x^3.$$

Pertanto c'è un unico termine dominante, che è $\sin(x)$. Possiamo quindi eliminare i termini $1 - \cos x$ e $\ln(1+x^3)$ e sostituire $\sin x$ con x.

Al denominatore abbiamo

$$x, \qquad e^{x^2} - 1 \sim x^2, \qquad -\sin x \sim -x.$$

I termini dominanti sono due, x e $-\sin x$, la cui somma deve quindi essere considerata come un unico termine, $x - \sin x$. Poiché

$$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \ll x^2 \sim e^{x^2} - 1,$$

il termine dominante al denominatore risulta essere in realtà $e^{x^2} - 1 \sim x^2$. In conclusione si ha che

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x + 1 - \cos x + \ln(1+x^3)}{x + e^{x^2} - 1 - \sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x^2} = +\infty.$$

Consideriamo ancora un esempio

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(2x)\sin(3x^3) - \sin(\pi x^2)\sqrt{1-\cos(\pi x)}}{\sqrt{x^3+3x}\ \arctan(3x) - x\ln^2(2\sqrt[3]{\sin x} + 1)}.$$

Esaminiamo i termini al numeratore: per $x \to 0+$

$$\cos(2x) \sim 1, \qquad \sin(3x^3) \sim 3x^3, \qquad -\sin(\pi x^2) \sim -\pi x^2, \qquad \sqrt{1-\cos(\pi x)} \sim \frac{\pi x}{\sqrt{2}}.$$

Quindi

$$\cos(2x)\ \sin(3x^3) \sim 3x^3; \qquad -\sin(\pi x^2)\sqrt{1-\cos(\pi x)} \sim -\frac{\pi^2 x^3}{\sqrt{2}}.$$

Poiché $3-\frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \neq 0$, per il punto (b) della Proposizione 5 possiamo concludere che

$$\cos(2x)\sin(3x^3) - \sin(\pi x^2)\sqrt{1-\cos(\pi x)} \sim \left(3 - \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\right) x^3$$

Esaminiamo ora il denominatore

$$\sqrt{x^2+3x} \sim \sqrt{3x}, \qquad \arctan(3x) \sim 3x, \qquad \ln^2(2\sqrt[3]{\sin x + 1}) \sim \ln^2(2).$$

Allora

$$\sqrt{x^2+3x}\ \arctan(3x) \sim 3\sqrt{3}\, x^{3/2}, \qquad x\ln^2(2\sqrt[3]{\sin x + 1}) \sim \ln^2(2)\, x.$$

Quest'ultimo termine è quello dominante e quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(2x)\sin(3x^3) - \sin(\pi x^2)\sqrt{1-\cos(\pi x)}}{\sqrt{x^3+3x}\ \arctan(3x) - x\ln^2(2\sqrt[3]{\sin x + 1})} = \lim_{x\to 0+} \frac{\left(3-\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\right)x^3}{\ln^2(2)x} = 0.$$

Ordini di infinitesimo e di infinito, parti principali.

Per talune applicazioni (studio della convergenza di integrali impropri e di serie) è utile introdurre una misura della velocità con cui una funzione infinitesima tende a zero o una funzione infinita tende a infinito. A tale fine occorre introdurre una funzione campione, che svolge il ruolo di unità di misura. Cominciamo con il considerare il caso degli infinitesimi. Fissato un punto $c \in \overline{\mathbb{R}}$ scegliamo una funzione u, definita e positiva in un intorno bucato di c, infinitesima per $x \to c$, che svolgerà il ruolo di infinitesimo campione.

Definizione 6. Si dice che una funzione $f \in \mathcal{F}_c$ è infinitesima di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \to c$ (rispetto a u) se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tale che

$$f(x) \sim \lambda\, u(x)^\alpha \qquad \text{per } x \to c. \tag{1}$$

In tal caso la funzione $\lambda\, u(x)^\alpha$ è detta la *parte principale* di f per $x \to c$, (rispetto all'infinitesimo campione u).

Osserviamo che u^α è ben definita, perché abbiamo supposto che u fosse strettamente positiva in un intorno bucato di c. Inoltre, poiché u è positiva, la (1) equivale a

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lambda \neq 0.$$

Talvolta accade che il limite non esista, ma esistano separatamente il limite destro e sinistro

$$\lim_{x\to c-} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lambda_-, \qquad \lim_{x\to c+} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lambda_+,$$

con λ_- e λ_+ numeri reali diversi da 0. Anche in tal caso diremo che f è infinitesima di ordine α per $x \to c$.

Usualmente, come infinitesimo campione si sceglie la funzione

$$u(x) = \begin{cases} |x-c| & \text{se } c \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{|x|} & \text{se } c = \pm\infty. \end{cases}$$

Esempi.

(1) La funzione $1-\cos x$ è infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$, perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

La parte principale di $1-\cos x$ per $x \to 0$ è $x^2/2$.

(2) La funzione $x - \sin x$ è infinitesima di ordine 3 per $x \to 0$, perché

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x-\sin x}{|x|^3} = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{x-\sin x}{|x|^3} = \frac{1}{6}$$

La parte principale di $x - \sin x$ per $x \to 0$ è $x^3/6$.

(3) Non tutte le funzioni infinitesime in un punto ammettono ordine rispetto al campione scelto. Ad esempio, la funzione $x\ln(x)$ non ha ordine rispetto a $u(x) = |x|$ per $x \to 0+$. Infatti

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\ln x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ -\infty, & \text{se } \geq 1. \end{cases}$$

Pertanto non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite esiste finito e diverso da 0.

Le definizione di ordine di infinito è analoga. Fissato un infinito campione u per $x \to c$, si dice che una funzione $f \in \mathcal{F}_c$ è infinita di ordine α per $x \to c$, rispetto a u, se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tale che

$$f(x) \sim \lambda\, u(x)^\alpha \qquad \text{per } x \to c. \tag{2}$$

In tal caso λu^α si dice parte principale dell'infinito f per $x \to c$. Anche in questo caso la relazione (2) equivale a

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lambda \neq 0$$

e valgono le considerazioni sui limiti destro e sinistro quando il limite non esiste.

Gli infiniti campione di uso più comune sono

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-c|} & \text{se } c \in \mathbb{R}, \\ |x| & \text{se } c = \pm\infty. \end{cases}$$

Esempi.

(1) La funzione $\sqrt{1+x^3}$ è infinita di ordine $3/2$ per $x \to +\infty$, perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^{3/2}} = 1.$$

La sua parte principale per $x \to +\infty$ è $x^{3/2}$.

(2) La funzione $1/(1-\sin x)$ è infinita di ordine 2 per $x \to \pi/2$, perché

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{1-\sin x}}{\frac{1}{(x-\pi/2)^2}} = 2$$

La sua parte principale di $x - \sin x$ per $x \to \pi/2$ è $2/(x-\pi/2)^2$.