1.1 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n

1.1.1 Forma generală

Definiţia 1.1 *O **ecuaţie diferenţială liniară de ordin** n este o ecuaţie de forma:*

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \tag{1.1}$$

*unde a_1, $a_2, \ldots, a_n$, f sunt funcţii contiune de la un interval nevid deschis $\mathbb{I}$ în $\mathbb{R}$, iar $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ este funcţia necunoscută. Dacă în ecuaţia diferenţială (1.1) avem $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte **liniară omogenă** de ordin n. În caz contrar ecuaţia diferenţială (1.1) se numeşte **liniară neomogenă**.*

Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială liniară de ordin n :

Să se determine funcţia $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$, $\mathbb{I}$ un interval nevid deschis în $\mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = -a_1(t)x^{(n-1)}(t) - \cdots - a_{n-1}(t)x'(t) - a_n(t)x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_{00}, x'(t_0) = x_{10}, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1,0} \end{cases}, \tag{1.2}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, f$ sunt funcţii contiune pe $\mathbb{I}$, $t_0, x_{i0} \in \mathbb{R}$,$i = \overline{0, n}$.

Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy: reamintim că prin intermediul transformărilor

$$\begin{cases} (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) \\ \mathbf{g}\,(t, y_1, \ldots, y_n) = (y_2, \ldots, y_n, f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)) \end{cases},$$

ecuaţia (1.2) poate fi rescrisă echivalent ca un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu n funcţii necunoscute:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

unde $f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = -a_1(t)y_n(t) - \cdots - a_{n-1}(t)y_2(t) - a_n(t)y_1(t) + f(t)$.

Teorema 1.2 *Fie $f, a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}$. Pentru orice $t_0 \in \mathbb{I}$, şi orice $x_{i0} \in \mathbb{R}$,$i = \overline{0, n-1}$ problema (1.2) admite soluţie unică definită într-o vecinătate suficient de mică a lui t_0.*

Observaţia 1.3 *În cazul în care ecuaţia (1.2) are coeficienţi constanţi, atunci ea are soluţie unică.*

1.1.2 Soluţia generală a ecuaţiei omogene

Considerăm aplicaţia:

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \tag{1.3}$$

definită de

$$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x, \forall x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}.$$

Observăm că ecuaţia liniară omogenă de ordin n se poate scrie de forma

$$\mathcal{L}(x) = 0, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}. \tag{1.4}$$

Propoziţia 1.4 *Funcţia (1.3) este o aplicaţie liniară între spaţiile* $(\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ *şi* $(\mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

Propoziţia 1.5 *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1.4),* $\mathbb{V} = \{x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) : \mathcal{L}(x) = 0\}$ *este un subspaţiu liniar al lui* $(\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

Teorema 1.6 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.

Definiţia 1.7 *Funcţiile* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ *se numesc* ***liniar dependente*** *pe* $\mathbb{I}$, *dacă există* $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $(c_1, \ldots, c_n) \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$ *astfel încât* $c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t) = \theta_{\mathbb{V}}, \forall t \in \mathbb{I}$. *În caz contrar funcţiile* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ *se numesc* ***liniar independente*** *pe* $\mathbb{I}$.

Propoziţia 1.8 *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sunt* n *soluţii liniar independente ale problemei (1.4), atunci soluţia generală a acestei probleme este de forma*

$$x(t, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t); c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}. \tag{1.5}$$

Definiţia 1.9 *Dacă funcţiile* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ *sunt liniar independente, atunci ele poartă numele de* ***sistem fundamental*** *de soluţii ale ecuaţiei (1.4).*

Observaţia 1.10 *Determinarea soluţiei generale revine la determinarea unui sistem fundamental de soluţii.*

Definiţia 1.11 *Fie funcţiile* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$. *Se numeşte* ***wronskianul*** *acestor funcţii determinantul:* $W[t, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$.

Teorema 1.12 *Funcţiile* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ *sunt liniar dependente dacă şi numai dacă wronskianul lor este diferit de zero,* $W[t, x_1, x_2, \ldots, x_n] = 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Teorema 1.13 *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ *atunci*

$$W[t, x_1, x_2, \ldots, x_n] = W[t_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds}, \forall t \in \mathbb{I}, \tag{1.6}$$

iar t_0 *este un punct arbitrar, fixat din* $\mathbb{I}$.

Propoziţia 1.14 *Oricare ar fi n funcţii din* $\mathbb{V}$*, wronskianul lor este sau identic nul sau diferit de zero în orice punct din* $\mathbb{I}$.

Exemplul 1.15 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$t^2 x'' - 5tx' + 8x = 0, t \neq 0,$$

ştiind că admite ca soluţii particulare $x_1(t) = t^2, x_2(t) = t^4$.

Rezolvare. Se verifică prin calcul direct că $x_1(t) = t^2$ şi $x_2(t) = t^4$ sunt soluţii ale ecuaţiei date. Verificăm dacă sunt liniar independnte.

$W[t, x_1, x_2] = \begin{vmatrix} t^2 & t^4 \\ 2t & 4t^3 \end{vmatrix} = 2t^5 \neq 0.$

Deci pe orice interval închis din $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ soluţia generală este de forma $x(t, c_1, c_2) = c_1 t^2 + c_2 t^4, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

1.1.3 Soluţia generală a ecuaţiei neomogene

Considerăm ecuaţia diferenţială liniară de ordin n neomogenă

$$\mathcal{L}(x) = f; x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), f, a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}. \tag{1.7}$$

Teorema 1.16 *Dacă* $x_o(t, c_1, \ldots, c_n)$ *este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordin n, (1.4), iar* $x_p(t)$ *este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene de ordin n, (1.7), atunci*

$$x(t, c_1, \ldots, c_n) = x_o(t, c_1, \ldots, c_n) + x_p(t)$$

este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.7).

Deci problema determinării soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene de ordin n, în ipoteza că se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii, revine la *determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene*. Metoda generală de aflare a soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene este cunoscută sub numele de **metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange**.

Teorema 1.17 *Dacă* $x_o(t, c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t); c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$ *este soluţia generală a ecuaţiei omogene (1.4), atunci o soluţie particulară* x_p *a ecuaţiei neomogene (1.7) este de forma*

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t), t \in \mathbb{I}, \tag{1.8}$$

unde $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$ *sunt soluţii ale sistemului*

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \dots \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}. \tag{1.9}$$

Exemplul 1.18 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$t^2 x'' - 5tx' + 8x = t, t \neq 0,$$

ştiind că ecuaţia omogenă admite ca soluţii particulare $x_1(t) = t^2, x_2(t) = t^4$.

Rezolvare. Ecuaţia se scrie sub foma

$$x'' - \frac{5}{t}x' + \frac{8}{t^2}x = \frac{1}{t}. \tag{1.10}$$

Ştim din Exerciţiul (1.15) că soluţia generală a ecuaţiei omogene este $x_o(t, c_1, c_2) = c_1 t^2 + c_2 t^4, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $x_p(t) = C_1(t)t^2 + C_2(t)t^4$. Calculăm derivatele lui x_p şi impunem condiţiile precizate în Teorema (1.17).

$x_p'(t) = C_1'(t)t^2 + C_1(t)2t + C_2'(t)t^4 + C_2(t)4t^3 \Rightarrow C_1'(t)t^2 + C_2'(t)t^4 = 0$

$x_p''(t) = C_1'(t)2t + C_1(t)2 + C_2'(t)4t^3 + C_2(t)12t^2$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă (1.10) şi obţinem

$C_1'(t)2t + C_1(t)2 + C_2'(t)4t^3 + C_2(t)12t^2 - 10C_1(t) - 20C_2(t)t^2 + 8C_1(t) + 8C_2(t)t^2 = \frac{1}{t}$.

Rezultă sistemul:

$\begin{cases} C_1'(t)t^2 + C_2'(t)t^4 = 0 \\ C_1'(t)2t + C_2'(t)4t^3 = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow C_1'(t) = \frac{-t^3}{2t^5} = -\frac{1}{2t^2}, C_2'(t) = \frac{t}{2t^5} = \frac{1}{2t^4}.$

$C_1(t) = \frac{1}{2t}, C_2(t) = -\frac{1}{6t^3} \Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{2t}t^2 - \frac{1}{6t^3}t^4 \Rightarrow x_p(t) = \frac{t}{2} - \frac{t}{6} \Rightarrow x_p(t) = \frac{t}{3}$.

Soluţia generală

$x(t, c_1, c_2) = c_1 t^2 + c_2 t^4 + \frac{t}{3}$. □

1.1.4 Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Definiţia 1.19 *O* ***ecuaţie diferenţială liniară de ordin*** n ***cu coeficienţi constanţi*** *este o ecuaţie de forma:*

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t) \tag{1.11}$$

unde f este o funcţie contiunuă de la un interval nevid $\mathbb{I}$ din $\mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale, iar $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ este funcţia necunoscută. Dacă în ecuaţia diferenţială (1.11) avem $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte ***liniară omogenă*** *de ordin n cu coeficienţi constanţi. În caz contrar ecuaţia diferenţială (1.11) se numeşte* ***liniară neomogenă***.

Definim funcţia liniară
$\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$
$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x$.
Ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordin n cu coeficienţi constanţi poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{L}(x) = 0, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordin n cu coeficienţi constanţi, fiind un caz particular al ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordin n, toate rezultatele obţinute pentru acestea rămân valabile şi aici.

Ne propunem *să determinăm efectiv soluţia generală* a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n cu coeficienţi constanţi. Pentru aceasta căutăm soluţii ale ecuaţiei (1.12) de forma $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$. Are loc relaţia

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} P(\lambda), t \in \mathbb{I}. \tag{1.13}$$

unde

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{1.14}$$

Polinomul $P(\lambda)$ se numeşte **polinom caracteristic**, iar ecuaţia

$$P(\lambda) = 0 \tag{1.15}$$

se numeşte **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei (1.12).

Teorema 1.20 *Funcţia $x(t) = e^{\lambda t}$ este soluţie a ecuaţiei (1.12) dacă şi numai dacă este soluţie a ecuaţiei caracteristice (1.15).*

Teorema 1.21 *Dacă polinomul $P(\lambda)$ are n rădăcini (reale sau complexe) distincte, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, atunci sistemul de funcţii $\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right)$ este un sistem fundamental de soluţii pentu ecuaţia (1.12).*

Definiţia 1.22 *Se numeşte* ***cvasipolinom*** *o expresie de forma:*

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{m} P_i(t) e^{\lambda_i t}, \tag{1.16}$$

unde P_i sunt polinoame în variabila t.

Lemma 1.23 *Fie Q un cvasipolinom de forma (1.16) astfel încât $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j; i, j = \overline{1, m}$. Atunci are loc implicaţia:*

$$Q(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow P_i \equiv 0, 1 \leq i \leq m.$$

Presupunem că ecuaţia caracteristică (1.15) are $1 \leq m < n$ rădăcini distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ cu multiplicităţile $n_1, \ldots, n_m, n_1 + \ldots + n_m = n$.

Teorema 1.24 *Sistemul de funcţii*

$$\left(t^k e^{\lambda_j t} \mid 0 \leq k \leq n_j - 1, 1 \leq j \leq m\right) \tag{1.17}$$

este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (1.12).

Observaţia 1.25 *Remarcăm că dacă $x(t) = u(t) + iv(t)$ este o soluţie a ecuaţiei omogene $\mathcal{L}(x) = 0$, atunci $\mathcal{L}(u + iv) = \mathcal{L}(u) + i\mathcal{L}(v) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(u) = 0, \mathcal{L}(v) = 0$. Dacă $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \Rightarrow t^k e^{\lambda_j t} = t^k(e^{\alpha_j t}\cos\beta_j + ie^{\alpha_j t}\sin\beta_j) = t^k e^{\alpha_j t}\cos\beta_j + it^k e^{\alpha_j t}\sin\beta_j$. Deci $u(t) = t^k e^{\alpha_j t}\cos\beta_j$ şi $v(t) = t^k e^{\alpha_j t}\sin\beta_j$ sunt soluţii ale ecuaţiei (1.12). Deci asociem valorilor proprii λ_j şi $\overline{\lambda_j}$ de ordin de multiplicitate cu n_j următorul sistem de $2n_j$ funcţii reale*

$$\left(t^k e^{\alpha_j t}\cos\beta_j, t^k e^{\alpha_j t}\sin\beta_j \mid 0 \leq k \leq n_j\right). \tag{1.18}$$

Exemplul 1.26 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$\begin{cases} x''' + 3x'' - x' - 3x = 0, \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = -1. \end{cases}$$

Rezolvare. Căutăm soluţii ale ecuaţiei de forma $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$. Calculăm derivatele $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $x'''(t) = \lambda^3 e^{\lambda t}$ şi le înlocuim în ecuaţie. Obţinem ecuaţia caracteristică $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi distincte, rezultă că sistemul de funcţii $(x_1(t) = e^{-3t}, x_2(t) = e^t, x_3(t) = e^{-t})$ este un sistem fundamental de soluţii $\Rightarrow x(t, c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$. Determinăm soluţia particulară impunând condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 + c_3 \\ x'(0) = -3c_1 + c_2 - c_3 \\ x'(0) = 9c_1 + c_2 + c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -3c_1 + c_2 - c_3 = 1 \\ 9c_1 + c_2 + c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{8} \\ c_2 = \frac{3}{8} \\ c_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$x(t) = -\frac{1}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$. □

Exemplul 1.27 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x^{(IV)} + 2x'' + x = 0.$$

Rezolvare. Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -i, \lambda_{3,4} = i$. Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt complexe şi multiple cu ordinul de multiplicitate 2.

Sistemul de funcţii $(\sin t, \cos t, t\sin t, t\cos t)$ este un sistem fundamental de soluţii. Rezultă soluţia generală $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 t \sin t + c_4 t \cos t$. □

Exemplul 1.28 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x^{(V)} - x^{(IV)} - x' + x = 0.$$

Rezolvare. Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -1, \lambda_{4,5} = 1$. Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt şi reale şi complexe, simple şi multiple.

Sistemul de funcţii $(\sin t, \cos t, e^{-t}, e^t, te^t)$ este un sistem fundamental de soluţii. Rezultă soluţia generală $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 e^{-t} + c_4 e^t + c_5 te^t$. □

Considerăm cazul ecuaţiei diferenţiale liniare de ordin n neomogenă cu coeficienţi constanţi. Considerăm ecuaţia

$$\mathcal{L}(x) = f, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}). \tag{1.19}$$

Din Teorema 1.16 ştim că soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $x(t, c_1, \ldots, c_n) = x_o(t, c_1, \ldots, c_n) + x_p(t)$ unde $x_o(t, c_1, \ldots, c_n)$ este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordin n, (1.4), iar $x_p(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene de ordin n. În momentul de faţă ştim să determinăm efectiv soluţia generală $x_o(t, c_1, \ldots, c_n)$ a ecuaţiei omogene ataşate, iar din Teorema 1.17, aplicând metoda variaţiei constantelor lui Lagrange, putem determina $x_p(t)$. Astfel problema determinării soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n neomogenă cu coeficienţi constanţi este complet rezolvată.

Exemplul 1.29 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$\begin{cases} x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}, t \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ x(0) = 1, x'(0) = -1. \end{cases}$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene. Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (\lambda^2+1) \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene folosind metoda variaţiei constantelor.

$x_p(t) = u_1(t) \sin t + u_2(t) \cos t$

$x_p'(t) = u_1'(t) \sin t + u_1(t) \cos t + u_2'(t) \cos t - u_2(t) \sin t \Rightarrow u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = 0$

$x_p''(t) = u_1'(t) \cos t - u_1(t) \sin t - u_2'(t) \sin t - u_2(t) \cos t \Rightarrow u_1'(t) \cos t - u_2'(t) \sin t = \dfrac{1}{\cos t}$.

Rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = 0 \\ u_1'(t) \cos t - u_2'(t) \sin t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{u'_1} = \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ \frac{1}{\cos t} & -\sin t \end{vmatrix} = -1, \Delta_{u'_2} = \begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = \operatorname{tg} t \Rightarrow$$
$u'_1(t) = 1 \Rightarrow u_1(t) = t; u'_2(t) = -\operatorname{tg} t \Rightarrow u_2(t) = \ln|\cos t|.$

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este $x_p(t) = t\sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t|$. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este:

$x(t, c_1, c_2) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t\sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t|$. □

În aplicaţiile tehnice apar probleme care necesită determinarea soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi în care funcţia f este un cvasipolinom sau o sumă de cvasipolinoame. Deoarece am demonstrat în Teorema 1.24 că un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (1.12) este format numai din cvasipolinoame (sau o combinaţie liniară de cvasipolinoame) rezultă că o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, în cazul în care termenul liber este un cvasipolinom (sau o combinaţie liniară de cvasipolinoame), poate fi tot un cvasipolinom (sau o combinaţie liniară de cvasipolinoame). În aceste cazuri se poate determina direct o soluţie particulară a ecuaţie neomogene folosind rezultatele ce urmează.

Cazul I.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i t^i. \tag{1.20}$$

Lemma 1.30 *Dacă $\lambda = 0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (1.15), atunci ecuaţia diferenţială (1.19) are o soluţie particulară de forma*

$$x_p(t) = \sum_{i=0}^{m} \mu_i t^i. \tag{1.21}$$

unde coeficienţii $\mu_i, i = \overline{0, m}$ se obţin din sistemul

$$\begin{cases} a_n \mu_m = b_m \\ m a_{n-1} \mu_m + a_n \mu_{m-1} = b_{m-1} \\ m(m-1) a_{n-2} \mu_m + m a_{n-1} \mu_{m-1} + a_n \mu_{m-2} = b_{m-2} \\ \dots \end{cases} \tag{1.22}$$

Exemplul 1.31 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' - x = t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci $x_p(t) = at^2 + bt + c \Rightarrow x'_p(t) = 2at + b, x''_p(t) = 2a$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:

$2a - at^2 - bt - c = t^2 \Rightarrow a = -1, b = 0, c = -2 \Rightarrow x_p(t) = -t^2 - 2$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - t^2 - 2$. □

Lemma 1.32 *Dacă $\lambda = 0$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (1.15) de ordin de multiplicitate s, atunci ecuaţia diferenţială (1.19) are o soluţie particulară de forma*

$$x_p(t) = t^s \sum_{i=0}^{m} \mu_i t^i. \tag{1.23}$$

Exemplul 1.33 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x^{(IV)} - 4x'' = 8t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 0$ este rădăcină de ordin de multiplicitate doi a ecuaţiei caracteristice, deci $x_p(t) = t^2(at^2 + bt + c) \Rightarrow x_p'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct$, $x_p''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$, $x_p'''(t) = 24at + 6b, x_p^{(IV)}(t) = 24a$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:

$24a - 48at^2 - 24bt - 8c = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{6}, b = 0, c = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = -t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t} - t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$. □

Cazul II.

$$f(t) = e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{m} b_i t^i.$$

Lemma 1.34 *Dacă $\lambda = \alpha$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (1.19) admite o soluţie particulară de forma*

$$x_p(t) = e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{m} \mu_i t^i.$$

Coeficienţii $\mu_i, i = \overline{1, m}$ se obţin prin identificare rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \mu_m P(\alpha) = b_m \\ \mu_m C_m^{m-1} P'(\alpha) + \mu_m P(\alpha) = b_{m-1} \\ \dots \\ \mu_m C_m^i P^{(m-i)}(\alpha) + \mu_{m-1} C_{m-1}^i P^{(m-i-1)}(\alpha) + \dots + \mu_k C_k^i P^{(k-i)}(\alpha) + \dots + \\ +\mu_i P(\alpha) = b_i \\ \dots \\ \mu_m P^{(m)}(\alpha) + \mu_{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) + \dots + \mu_k P^{(k)}(\alpha) + \dots + \mu_0 P(\alpha) = b_0. \end{cases}$$

Exemplul 1.35 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' - 3x' + 2x = 8t^2 e^{3t}.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 3$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci

$x_p(t) = e^{3t}(at^2 + bt + c) \Rightarrow$

$x_p'(t) = 3e^{3t}\left(at^2 + bt + c\right) + e^{3t}\left(2at + b\right),$

$x_p''(t) = 9e^{3t}\left(at^2 + bt + c\right) + 4e^{3t}\left(2at + b\right) + e^{3t}2a.$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:

$24a - 48at^2 - 24bt - 8c = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{6}, b = 0, c = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = -t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right).$

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right).$

□

Lemma 1.36 *Dacă $\lambda = \alpha$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice de ordin de multiplicitate s, atunci ecuaţia diferenţială (1.19) admite o soluţie particulară de forma*

$$x_p(t) = t^s e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{m} \mu_i t^i.$$

Coeficienţii $\mu_i, i = \overline{1, m}$ se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \mu_m C_m^{m-s} P^{(s)}(\alpha) = b_m \\ \mu_m C_m^{m-s-1} P^{(s+1)}(\alpha) + \mu_{m-1} C_{m-1}^{m-s-1} P^{(s)}(\alpha) = b_{m-1} \\ \cdots \\ \mu_m P^{(s+m)}(\alpha) + \mu_{m-1} P^{(s+m-1)}(\alpha) + \cdots + \mu_0 P^{(s)}(\alpha) = b_0. \end{cases}$$

Exemplul 1.37 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 3$ este rădăcină de ordin doi a ecuaţiei caracteristice, deci

$x_p(t) = t^2 e^{3t}(at^2 + bt + c) \Rightarrow$

$x_p'(t) = 3e^{3t}\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) + e^{3t}\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right),$

$x_p''(t) = 9e^{3t}\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) + 6e^{3t}\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right) + e^{3t}(12at^2 + 6bt + 2c).$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă, simplificăm prin e^{3t} şi obţinem: $9\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) + 6\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right) + (12at^2 + 6bt + 2c) - 18\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) - 6\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right)$
$+$
$+9\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{2}{3}, b = 0, c = 0 \Rightarrow x_p(t) = -\dfrac{2}{3}t^4.$

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} - \dfrac{2}{3}t^4.$ □

Cazul III.

$$f(t) = e^{\alpha t}\left[P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\right]. \tag{1.24}$$

Lemma 1.38 *Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$ nu este rădăcină a polinomului caracteristic, ecuaţia diferenţială (1.19) are soluţia particulară de forma*

$$x_p(t) = e^{\alpha t}\left[A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t\right] \tag{1.25}$$

unde A şi B sunt polinoame cu coeficienţi reali de de acelaşi grad şi anume egal cu cel mai mare dintre gradele polinoamelor P şi Q.

Lemma 1.39 *Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$ este rădăcină de ordin s a polinomului caracteristic, ecuaţia diferenţială (1.19) are soluţia particulară de forma*

$$x_p(t) = t^s e^{\alpha t}\left[A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t\right] \tag{1.26}$$

unde A şi B sunt polinoame cu coeficienţi reali de de acelaşi grad şi anume egal cu cel mai mare dintre gradele polinoamelor P şi Q. În cazul în care $\lambda = \alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, se ia $s = 0$.

Exemplul 1.40 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' - 6x' + 9x = 10\sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci $x_p(t) = a\sin t + b\cos t \Rightarrow x_p'(t) = a\cos t - b\sin t$, $x_p''(t) = -a\sin t - b\cos t$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem: $-a\sin t - b\cos t - 6(a\cos t - b\sin t) + 9(a\sin t + b\cos t) = 10\sin t \Rightarrow$ $\begin{cases} 8a + 6b = 10 \\ -6a + 8b = 0 \end{cases}$, cu solutia : $\left\{b = \frac{3}{5}, a = \frac{4}{5}\right\}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \dfrac{4}{5}\sin t + \dfrac{3}{5}\cos t$. □

Exemplul 1.41 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' + x = 10\sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1\cos t + c_2\sin t$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = i$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice de ordin de multiplicitate $s = 1$, deci $x_p(t) = t(a\sin t + b\cos t) \Rightarrow x_p'(t) = (a\sin t + b\cos t) + t(a\cos t - b\sin t)$, $x_p''(t) = 2(a\cos t - b\sin t) + t(-a\sin t - b\cos t)$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem: $2(a\cos t - b\sin t) + t(-a\sin t - b\cos t) + t(a\sin t + b\cos t) = 10\sin t \Rightarrow$ $\begin{cases} 2a = 0 \\ -2b = 10 \end{cases}$, cu solutia : $\left\{b = -\frac{1}{5}, a = 0\right\}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t\dfrac{1}{5}\sin t$.
$\square$

Teorema 1.42 (principiul superpoziţiei) *Dacă $x_i, i = \overline{1,r}$ sunt soluţii ale ecuaţiei $\mathcal{L}(x_i) = f_i$ cu $f_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ şi cu $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$, atunci $x = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i x_i$ este soluţie a ecuaţiei $\mathcal{L}(x) = f$ unde $f = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i f_i$.*

Exemplul 1.43 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' - 9x = e^{3t}\cos t + te^{-3t} + t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Utilizând principiul superpoziţiei, notăm $f_1(t) = e^{3t}\cos t$, $f_2(t) = te^{-3t}$, $f_3(t) = t^2$ şi determinăm soluţii particulare ale ecuaţiilor $x'' - 9x = f_i$, $i = 1, 2, 3$. Fie ele x_{p_i}. Atunci $x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3}$.

Considerăm pe rând ecuaţiile: $x'' - 9x = e^{3t}\cos t$, $x'' - 9x = te^{-3t}$, $x'' - 9x = t^2$.

Fie ecuaţia $x'' - 9x = e^{3t}\cos t$. Atunci $x_{p_1}(t) = ae^{3t}\cos t + be^{3t}\sin t$. $x'_{p_1}(t) = 3ae^{3t}\cos t - ae^{3t}\sin t + 3be^{3t}\sin t + be^{3t}\cos t$, $x''_{p_1}(t) = 8ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t + 8be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t$. Înlocuim în ecuatia neomogenă si obtinem:

$8ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t + 8be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t - 9(ae^{3t}\cos t + be^{3t}\sin t)$
$= -ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t - be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t \Rightarrow$
$-ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t - be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t = e^{3t}\cos t$
$\begin{cases} -a + 6b = 1 \\ -6a - b = 0 \end{cases}, \Rightarrow \left\{a = -\frac{1}{37}, b = \frac{6}{37}\right\} \Rightarrow x_{p_1}(t) = -\frac{1}{37}e^{3t}\cos t + \frac{6}{37}e^{3t}\sin t.$

Considerăm ecuaţia $x'' - 9x = te^{-3t}$. Deoarece $\lambda = -3$ este rădăcină de ordin întâi a polinomului caracteristic, atunci $x_{p_2}(t) = t(ct + d)e^{-3t}$.

$x'_{p_2}(t) = (2ct + d)\,e^{-3t} - 3\,(ct^2 + dt)\,e^{-3t}$, $x''_{p_2}(t) = 2ce^{-3t} - 3\,(2ct + d)\,e^{-3t} - 3\,(2ct + d)\,e^{-3t} + 9(ct^2 + dt)e^{-3t}$

$2ce^{-3t} - 3\,(2ct + d)\,e^{-3t} - 3\,(2ct + d)\,e^{-3t} + 9(ct^2 + dt)e^{-3t} - 9((ct^2 + dt)e^{-3t}) = te^{-3t}$

$2ce^{-3t} - 12e^{-3t}ct - 6e^{-3t}d = te^{-3t} \Rightarrow$
$\begin{cases} -12c = 1 \\ 2c - 6d = 0 \end{cases}, \Rightarrow \left\{d = -\frac{1}{36}, c = -\frac{1}{12}\right\} \Rightarrow x_{p_2}(t) = t(-\frac{1}{12}t - \frac{1}{36})e^{-3t}.$

Considerăm ecuaţia $x'' - 9x = t^2 \Rightarrow x_{p_3}(t) = mt^2 + nt + p$, $x'_{p_3}(t) = 2mt + n$, $x''_{p_3}(t) = 2m$

$2m + 9(mt^2 + nt + p) = t^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 9m = 1 \\ 9n = 0 \\ 2m + 9p = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ n = 0, m = \tfrac{1}{9}, p = -\tfrac{2}{81} \right\} \Rightarrow$$

$x_{p_3}(t) = \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}$.

Soluţia generală este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{37}e^{3t}\cos t + \frac{6}{37}e^{3t}\sin t + t(-\frac{1}{12}t - \frac{1}{36})e^{-3t} + \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}$. $\square$

Etapele de rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior cu coeficienţi constanţi sunt:

-determinarea polinomului caracteristic,

-scrierea soluţiei generale a ecuaţiei omogene ţinând seama de natura rădăcinilor polinomului caracteristic,

-determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene fie cu metoda variaţiei constantelor fie, dacă este posibil, utilizând forma particulară a termenului liber,

-sumarea celor două soluţii.