Programação Linear

Formulação e resolução de problemas

Elisa Correia de Barros
Departamento de Gestão Industrial – Instituto Politécnico de Bragança

Programação Linear

Podemos entender o termo "Programação" como "Planeamento" e a qualificação "Linear" deixa antever que as relações matemáticas utilizadas são funções lineares.

A Programação Linear (uma sub-classe de problemas de Programação Matemática) pode ser considerada uma ciência que estuda formas de resolver problemas de otimização em que, quer as condições quer o objetivo podem ser expressos por relações lineares (equações e inequações do primeiro grau).

Assim, a Programação Linear pode ser considerada uma ciência voltada para a resolução de problemas reais, em que se procura trazer para o campo de tomada de decisões (Economia, Medicina, Agricultura, etc.) os métodos próprios de outras áreas científicas; refere-se a um conjunto de métodos cujo objetivo principal é tirar o maior proveito possível de sistemas económicos, industriais, militares, ..., cuja estrutura possa ser definida matematicamente.

Formulação de um problema Programação Linear (PL)

Um problema de Programação Linear terá sempre as seguintes componentes:

- Variáveis de Decisão - quantidades que se pretendem determinar.
- Restrições – definem os valores admissíveis (e não admissíveis) para as variáveis de decisão, sendo definidas pelos vários recursos disponíveis e pelas limitações técnicas do problema; a solução ótima terá que as respeitar.
- Função Objetivo – define o critério de avaliação das várias soluções admissíveis

Que podemos designar por:

- Variáveis de Decisão

  $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$

- Coeficientes da Função Objetivo

  $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$

- Termos Independentes

  $b_1, b_2, b_3, \ldots$

- Coeficientes técnicos relativos a cada um dos recursos

  $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{21}, a_{22}, \ldots a_{31}, a_{32}, \ldots$

Problema formulado:

maximizar (minimizar) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots$

Sujeito a

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots \leq = \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots \leq = \geq b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots \leq = \geq b_3$

...

$x_1, x_2, x_3, \ldots \geq 0$

Exemplo:

Uma empresa produz um modelo de secretária e um modelo de estante, utilizando para esse efeito uma secção de Embutidura e outra de Acabamento.
Os tempos necessários para a produção de cada um dos modelos são (em horas):

	Embutidura	Acabamento
Secretária	2	4
Estante	4	4

A capacidade (disponibilidade mensal) da secção de Embutidura é de 720 horas, e a do Acabamento é de 880 horas. Os lucros obtidos na comercialização destes produtos são de 6 u.m. por cada secretária e 3 u.m. por cada estante. Sabe-se que as vendas máximas da secretária estão limitadas a 160 unidades mensais.
Determinar o plano de produção mensal de forma a maximizar o lucro obtido.

Escolha das Variáveis de Decisão:

- A empresa produz modelos de secretárias e de estantes. Quantos modelos de secretárias e de estantes vão ser produzidos mensalmente?
  - x_1: quantidade de secretárias a fabricar
  - x_2: quantidade de estantes a fabricar

Restrições do problema:

- $2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 720$
  - $2\,x_1$ é o número de horas utilizadas na produção de uma secretária na secção de embutidura

- $4\,x_2$ é o número de horas utilizadas na produção de uma estante na secção de embutidura
- 720 é o número de horas disponíveis na secção de embutidura

❖ $4\,x_1 + 4\,x_2 \leq 880$

- $4\,x_1$ é o número de horas utilizadas na produção de uma secretária na secção de acabamento
- $4\,x_2$ é o número de horas utilizadas na produção de uma estante na secção de acabamento
- 880 é o número de horas disponíveis na secção de acabamento

❖ $x_1 \leq 160$

- representa o número de secretárias que são absorvidas pelo mercado

❖ $x_1, x_2 \geq 0$

- o número de secretárias e de estantes deve ser não negativo

Função Objetivo:

Neste caso, como queremos saber o lucro mensal da empresa vamos resolver um problema de maximização.

❖ $6\,x_1 + 3\,x_2$

- $6\,x_1$ é o lucro (em u.m.) obtido pela venda de uma secretária
- $3\,x_2$ é o lucro (em u.m.) obtido pela venda de uma estante

Problema formulado:

Maximizar $z = 6\,x_1 + 3\,x_2$

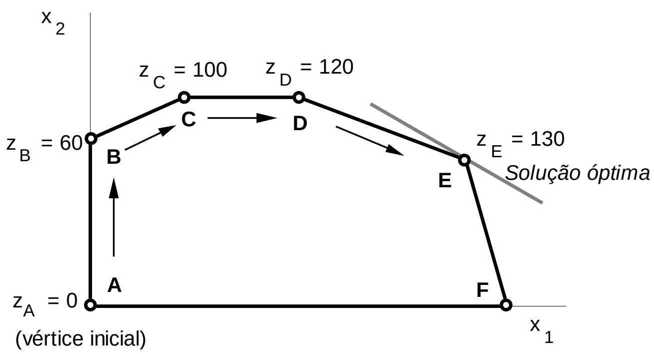
sujeito a:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 4\,x_2 &\leq 720 \\ 4\,x_1 + 4\,x_2 &\leq 880 \\ x_1 \qquad &\leq 160 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolução de problemas PL com o Método Simplex

O conjunto de todas as soluções admissíveis de um modelo de PL é um conjunto convexo. Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então há pelo menos uma solução ótima que é um ponto extremo (vértice) do conjunto convexo de soluções admissíveis do problema PL.

O método Simplex baseia-se no facto de a solução ótima se encontrar obrigatoriamente num vértice do domínio das soluções admissíveis. É um *processo iterativo* iniciado num vértice qualquer, passando-se para um vértice adjacente a que corresponda um melhor valor da função objetivo.



Caso haja mais do que um vértice com melhor valor para a FO, seguir a direção a que corresponda um maior incremento unitário da FO.

Redução do problema à Forma Canónica

Para se obter uma solução inicial de um problema e proceder à sua otimização é necessário fazer algumas alterações ao problema para este fique na chamada *Forma Canônica*.

As restrições do tipo desigualdade são convertidas em igualdades por adição (restrições com sinal $\leq$) ou subtração (restrições com sinal $\geq$) de *variáveis de folga* (slack variables) ou *variáveis desvio*. Uma variável folga é uma variável não negativa a quantidade não utilizada de um recurso:

maximizar $\quad Z= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$

(minimizar)

Sujeito a

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3$

...

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1, x_2, x_3, ... , x_n \geq 0$

$b_1, b_2, b_3, ... , b_m \geq 0$

Redução do problema anterior à Forma Canónica

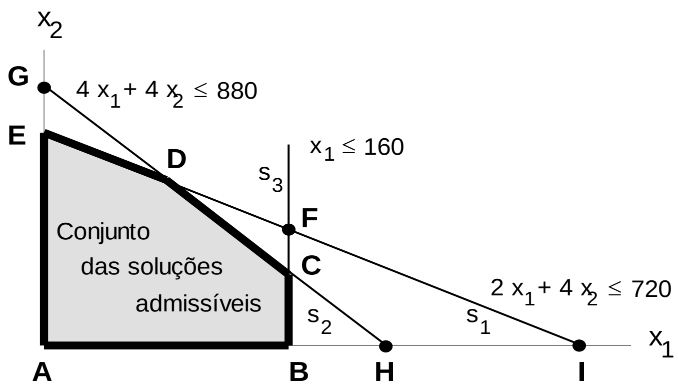
$$\begin{array}{lllll} \text{Maximizar} & z = 6x_1 + 3x_2 & & & \\ \text{sujeito a:} & 2x_1 + 4x_2 + s_1 & & & = 720 \\ & 4x_1 + 4x_2 & + s_2 & & = 880 \\ & x_1 & & + s_3 & = 160 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & & & \end{array}$$

Determinação de solução básica admissível inicial
(selecção do vértice inicial)

Quando está na forma canónica, ao igualar as variáveis folga ao coeficiente do lado direito, obtém-se uma Solução Básica Admissível (SBA) inicial. Esta terá que:

- respeitar todas as restrições do problema (é admissível)
- existem *m* variáveis não negativas (variáveis básicas)
- existem *n-m* variáveis iguais a 0 (variáveis não básicas)

Vejamos a resolução gráfica do problema anterior:



O conjunto das soluções admissíveis é o poliedro delimitado pelos vértices ABCDE. As SBA e as SBNA em cada vértice são seguintes:

Vértice	Soluções básicas admissíveis				
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
A	0	0	720	880	160
B	160	0	400	240	0
C	160	60	160	0	0
D	80	140	0	0	80
E	0	180	0	160	160

Vértice	Soluções básicas não admissíveis				
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
F	160	100	0	*-160*	0
G	0	220	*-160*	0	160
H	220	0	280	0	*-60*
I	360	0	0	*-560*	*-200*

A determinação de uma solução básica admissível inicial é fácil no caso de problemas de PL em que as restrições sejam todas do tipo ≤..

Faz-se:

$$\forall_{j\,(j=1,\ldots,N-m)}: \ x_j = 0$$

$$\forall_{j\,(j=1,\ldots,m)}: \ s_j = b_j$$

$$Z - c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n = 0$$

As variáveis de decisão são variáveis não básicas e as variáveis de folga são variáveis básicas. A função objetivo é zero.

No exemplo:

Solução básica admissível (ponto **A**):	$x_1 = x_2 = 0$ $s_1 = 720$ $s_2 = 880$ $s_3 = 160$

Var. básicas: s_1, s_2, s_3

Var. não básicas: x_1, x_2

Z = 0

Uma vez determinada SBA inicial temos que melhorar a solução (caso seja possível) passando para uma outra SBA (um vértice adjacente no poliedro):

- escolher uma variável não básica para entrar Base
- escolher uma variável básica para sair Base
- determinar o valor das diversas variáveis e de Z na nova solução

O algoritmo Simplex vai repetir os passos enumerados anteriormente até que não seja possível melhor o valor de Z, ou seja, até encontrar uma solução ótima (caso exista).

Solução Básica Admissível inicial (vértice A):

$$\boxed{\begin{aligned} s_1 &= 720 - 2\,x_1 - 4\,x_2 \\ s_2 &= 880 - 4\,x_1 - 4\,x_2 \\ s_3 &= 160 - x_1 \\ z &= z_0 + 6\,x_1 + 3\,x_2 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{lllll} 2\,x_1 + 4\,x_2 & + s_1 & & & = 720 \\ 4\,x_1 + 4\,x_2 & & + s_2 & & = 880 \\ x_1 & & & + s_3 & = 160 \\ 6\,x_1 + 3\,x_2 & = z - z_0 = z - 0 & & & \end{array}}$$

Para simplificar a aplicação do método Simplex usamos a forma tabular:

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	valor
s_1	2	4	1	0	0	720
s_2	4	4	0	1	0	880
◀ s_3	1	0	0	0	1	160
z	6	3	0	0	0	$-z_0 = 0$
	▲					

- **Base** - representa as variáveis básicas
- **valor** - representa o valor das variáveis básicas
- a matriz dos coeficientes das variáveis básicas forma uma matriz identidade
- os coeficientes das variáveis básicas na função objetivo são nulos
- assinala-se com uma seta (▲) a variável não básica que entra na base, depois de confirmar que a solução não é ótima
- assinala-se com uma seta (◀) a variável que sai da base

❖ Procedimento para a seleção da variável que entra na base:

maximizar z ⇒ selecionar, de entre as variáveis que têm *coeficientes positivos*, a que tiver o coeficiente com *maior valor absoluto*

minimizar z ⇒ selecionar, de entre as variáveis que têm *coeficientes negativos*, a que tiver o coeficiente com *maior valor absoluto*

❖ Procedimento para a seleção da variável que sai da base:

- consideram-se os coeficientes positivos situados na coluna com uma seta (▲) $a_{ij}^* > 0$
- calculam-se os cocientes b_i / a_{ij}^*
  (b_i representa os valores das variáveis básicas)
- seleciona-se, para sair da base, a variável básica com menor valor b_i / a_{ij}^*

Na segunda iteração obtiveram-se as seguintes equações:

$$\begin{array}{l} x_1 = 160 - s_3 \\ s_1 = 400 + 2\,s_3 - 4\,x_2 \\ s_2 = 240 + 4\,s_3 - 4\,x_2 \\ z = 960 - 6\,s_3 + 3\,x_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 + s_3 = 160 \\ + 4\,x_2 + s_1 - 2\,s_3 = 400 \\ + 4\,x_2 + s_2 - 4\,s_3 = 240 \\ + 3\,x_2 - 6\,s_3 = z - 960 \end{array}$$

A este conjunto de equações corresponde o quadro vértice B:

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	valor
s_1	0	4	1	0	-2	400
s_2	0	4	0	1	-4	240
x_1	1	0	0	0	1	160
z	0	3	0	0	-6	-960

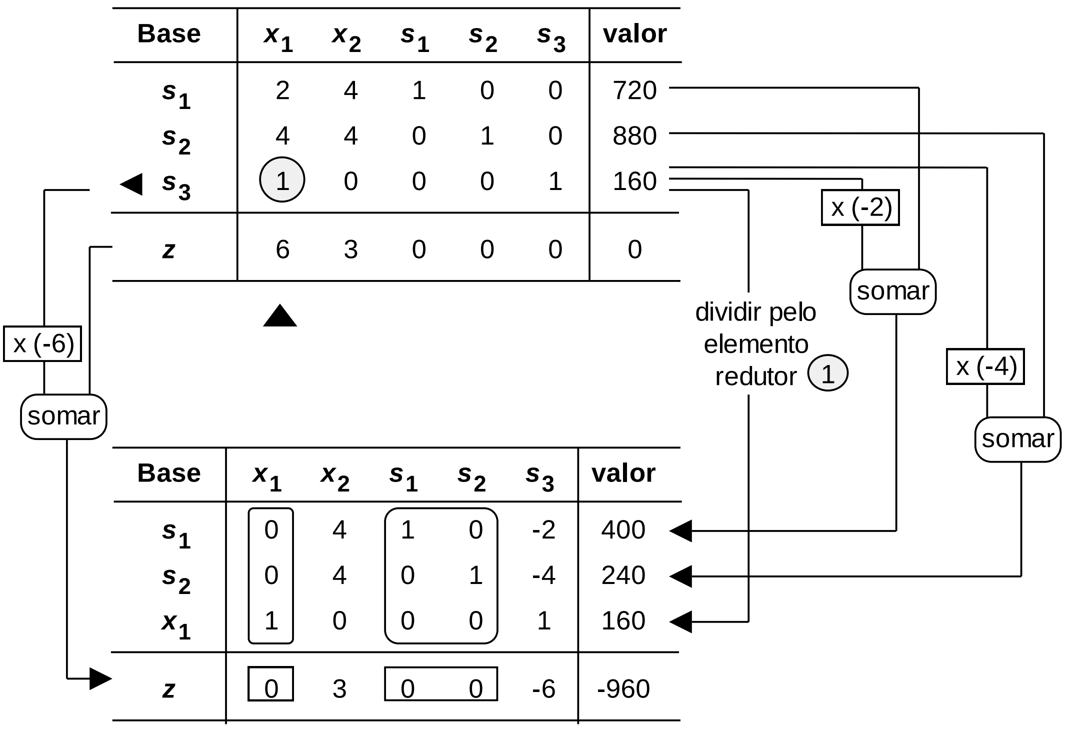
Vejamos como obter o quadro **B** a partir do quadro **A**

Regra: os coeficientes da variável que entra para a base (x_1) devem ser transformados de forma a tomarem os valores:

1 - na linha correspondente à variável que sai da base

0 - nas restantes linhas, incluindo a linha da FO - z

Para esta transformação recorre-se à propriedade de que um sistema de equações não se altera se se combinarem linearmente quaisquer das equações.



Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	valor
s_1	2	4	1	0	0	720
s_2	4	4	0	1	0	880
s_3	1	0	0	0	1	160
z	6	3	0	0	0	0

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	valor
s_1	0	4	1	0	-2	400
s_2	0	4	0	1	-4	240
x_1	1	0	0	0	1	160
z	$\boxed{0}$	3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	-6	-960

Solução do quadro B:

x_1 **= 160** s_1 **= 400**
x_2 **= 0** s_2 **= 240**
Z = 960 s_3 **= 0**

Esta solução ainda não é ótima pois no quadro anterior existe um coeficiente positivo na linha da função objetivo (situado na coluna variável x_2). Tem então que se iniciar um novo ciclo do algoritmo para se alcançar uma nova solução (entra x_2, sai s2, …).

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	valor
s_1	0	4	1	0	-2	400
s_2	0	4	0	1	-4	240
x_1	1	0	0	0	1	160
z	0	3	0	0	-6	-960

dividir pelo elemento redutor 4

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	valor
s_1	0	4	1	0	-2	400
s_2	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	1	0	0	0	1	160
z	0	3	0	0	-6	-960

x (-4)

somar

x (-3)

somar

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	valor
s_1	0	0	1	-1	2	160
x_2	0	1	0	1/4	-1	60
x_1	1	0	0	0	1	160
z	0	0	0	-3/4	-3	-1140

Solução ótima encontrada (todos os coeficientes de **Z** são não negativos):

$$x_1 = 160 \qquad s_1 = 160$$
$$x_2 = 60 \qquad s_2 = 0$$
$$Z = 1140 \qquad s_3 = 0$$