Calcul diferenţial

1.1 Limite de funcţii

Fie $k, p \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. În cazul în care vom considera norme pe spaţiile $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^p$, le vom nota $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$, respectiv. Uneori vom nota ambele norme prin $\|\cdot\|$, contextul permiţându-ne să deducem pe care dintre spaţii este considerată norma respectivă. Cu A' se notează mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A, şi fie $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$.

Definiţia 1.1 *Spunem că funcţia f* ***are limita*** *ℓ* ***în punctul*** *a, şi notăm*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell, \text{ sau } f(x) \to \ell \text{ pentru } x \to a,$$

dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Observaţia 1.2 *Punctul a nu trebuie să aparţină neapărat mulţimii A, însă trebuie să existe puncte în mulţimea A oricât de apropiate de a, noţiunea de limită exprimând intuitiv faptul că, atunci când punctele din domeniul funcţiei se apropie de punctul a, atunci valorile funcţiei f în aceste puncte se apropie oricât de mult de punctul limită ℓ.*

Teorema 1.3 (Caracterizarea cu şiruri a limitei) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to \ell. \tag{1.2}$$

Corolarul 1.4 *Dacă există $(x_n), (u_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a, u_n \to a$, iar $f(x_n) \to \ell_1, f(u_n) \to \ell_2$, cu $\ell_1 \neq \ell_2$, atunci nu există limita funcţiei f în punctul a.*

Exerciţiul 1.5 *Să se arate că* $\lim_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$.

Soluţie. *Să observăm că* $\left|\sqrt{x+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon$. *Dacă* $\varepsilon \in (0, 2)$, *alegem* $\delta := \varepsilon(4 - \varepsilon) > 0$. *Atunci*

$$\begin{aligned}
|x-3| < \delta &\Rightarrow -\varepsilon(4-\varepsilon) < x - 3 \Rightarrow (2-\varepsilon)^2 < x + 1 \Rightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x+1}, \\
|x-3| < \delta &\Rightarrow x - 3 < \varepsilon(4-\varepsilon) < \varepsilon(4+\varepsilon) \Rightarrow x + 1 < (2+\varepsilon)^2 \\
&\overset{0<x+1}{\Rightarrow} \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pentru $\varepsilon > 2$, *alegem* $\delta := 4 > 0$. *Atunci*

$$\begin{aligned}
|x-3| < \delta &\Rightarrow -4 < x-3 \Rightarrow 0 < x+1 \Rightarrow 2-\varepsilon < 0 < \sqrt{x+1},\\
|x-3| < \delta &\Rightarrow x-3 < 4 < \varepsilon(4+\varepsilon) \Rightarrow x+1 < (2+\varepsilon)^2\\
&\overset{0<x+1}{\Rightarrow} \sqrt{x+1} < 2+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, pentru orice $\varepsilon > 0$, *am găsit* $\delta > 0$ *astfel încât, dacă* $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, *cu* $|x-3| < \delta$, *avem* $\left|\sqrt{x+1}-2\right| < \varepsilon$. *Folosind caracterizarea* $\varepsilon - \delta$, *rezultă afirmaţia dorită.*

Exerciţiul 1.6 *Să se arate că funcţia* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ *are limita* 0 *în punctul* $(0,0)$.

Soluţie. *Observăm mai întâi că* $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ *pentru orice* $(x,y) \neq (0,0)$.

Într-adevăr, pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -(x^2+y^2) \leq 2xy \leq (x^2+y^2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 \geq 0 \\ (x+y)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Deducem de aici că

$$0 \leq |f(x,y)| = |xy| \cdot \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|xy|}{2}.$$

Considerăm $\varepsilon > 0$ *arbitrar şi definim* $\delta := \sqrt{\varepsilon}$. *Dacă* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *are proprietatea că* $\|(x,y)-(0,0)\|_2 < \delta$, *rezultă* $\max\{|x|,|y|\} \leq \delta = \sqrt{\varepsilon}$, *deci*

$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{|xy|}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Folosind caracterizarea $\varepsilon - \delta$, *rezultă concluzia.*

Exerciţiul 1.7 *Să se arate că nu există limita funcţiei* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ *în punctul* 0.

Soluţie. *Să considerăm şirurile* $(x_n), (u_n)$ *date prin* $x_n := \dfrac{1}{n\pi}$, $u_n := \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi să observăm că* $x_n \to 0, u_n \to 0$.

Însă $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$, *iar* $f(u_n) = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$.

Aplicând Corolarul 1.4, *obţinem că nu există limita funcţiei* f *în punctul* 0.

Exerciţiul 1.8 *Să se arate că nu există limita funcţiei* $f : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *în punctul* $(0,0)$.

Soluţie. *Considerăm şirurile* $(u_n), (v_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, *ambele convergente la* $(0,0)$, *date prin* $u_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $v_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Atunci*

$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2},$$
$$f(v_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5} \to \frac{2}{5}.$$

Aplicăm Corolarul 1.4 şi deducem că nu există limita funcţiei f *în punctul* $(0,0)$.

Să observăm în continuare că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcţii cu valori reale. Într-adevăr, având date funcţia f şi $x \in A$, dacă notăm

$$f(x) = y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p,$$

putem defini în punctul x funcţiile f_i, $i \in \overline{1,p}$, prin $f_i(x) := y_i$. Construim aşadar funcţiile $f_i : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,p}$ astfel încât

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{1.3}$$

Invers, considerând un sistem format din p funcţii cu valori reale $f_i : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,p}$, putem defini funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ prin relaţia (1.3).

Dacă avem $k, p > 1$, funcţia f se numeşte **funcţie vectorială de argument vectorial**, iar funcţiile f_i sunt numite **funcţiile componente**, sau **funcţiile coordonate** ale funcţiei f, şi scriem $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$. În cazul $k = 1, p > 1$, funcţia f se numeşte **funcţie vectorială de argument real**, iar dacă $k > 1, p = 1$, funcţia f se numeşte **funcţie reală de argument vectorial**. Dacă $k = p = 1$, funcţia f se numeşte **funcţie reală de argument real**.

Are loc rezultatul:

Teorema 1.9 *Fie funcţia* $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A'$. *Atunci* f *are limita* $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ *în punctul* a *dacă şi numai dacă există simultan* $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i, i = \overline{1,p}$.

Teorema de mai sus permite reducerea studiului limitelor funcţiilor vectoriale de argument vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ la studiul limitelor funcţiilor componente $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

1.1.1 Limită după o direcţie. Limită parţială

Fie o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $a = (a_1, a_2, ..., a_k)$, $v = (v_1, v_2, ..., v_k) \in \mathbb{R}^k$.

Definiţia 1.10 *Spunem că funcţia f **are limită în direcţia** v în punctul a dacă mulţimea $B := \{t \in \mathbb{R} \mid a + tv \in A\}$ este nevidă, $0 \in B'$ şi există $\ell \in \mathbb{R}^p$ astfel încât*

$$\lim_{t\to 0} f(a + tv) = \lim_{t\to 0} f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, ..., a_k + tv_k) = \ell.$$

*În acest caz, elementul ℓ se numeşte **limita în direcţia** v a funcţiei f în punctul a.*
*În cazul particular $v := e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, vom spune că funcţia f **are limită parţială în raport cu variabila** x_i în punctul a, iar ℓ se numeşte **limita parţială în raport cu variabila** x_i a funcţiei f în punctul a. Aşadar,*

$$\lim_{t\to 0} f(a + te_i) = \lim_{t\to 0} f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_k) = \ell.$$

Legătura între limita unei funcţii şi limita după o direcţie este dată în următoarea teoremă.

Teorema 1.11 *Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, iar $v \in \mathbb{R}^k$ este un vector astfel încât mulţimea $D = A \cap \{a + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ este nevidă şi $a \in D'$, atunci există limita în direcţia v a funcţiei f în punctul a şi este egală cu ℓ.*

Observaţia 1.12 *Din teorema anterioară rezultă că, dacă obţinem pentru o direcţie $v \in \mathbb{R}^k$ că limita direcţională $\lim\limits_{t\to 0} f(a + tv)$ nu există, sau depinde de direcţia v, atunci nu va exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. În ultimul caz, această metodă de a arăta că nu există limita se mai numeşte **metoda direcţiilor variabile**.*

Reciproca teoremei anterioare nu are loc, după cum o arată următorul exemplu.

Exerciţiul 1.13 *Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Să se arate că f are limită în orice direcţie în punctul $(0, 0)$, dar limita funcţiei f (în raport cu ansamblul variabilelor) nu există.*
Soluţie. *Fie $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Atunci*

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f((0, 0) + t(\cos\alpha, \sin\alpha)) &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)\\ &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{t^2 \sin\alpha\cos\alpha}{t^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

Aşadar, funcţia f are limită în punctul $(0, 0)$ în orice direcţie $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. De asemenea, pentru $\alpha = 0$ şi $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ne va rezulta că există limitele paţiale în raport cu x şi cu y în $(0, 0)$, ambele egale cu 0. După cum am văzut însă într-un exerciţiu anterior, nu există limita funcţiei f în punctul $(0, 0)$.

Limita direcţională poate oferi uneori informaţii suplimentare utile despre limita unei funcţii într-un punct, după cum se va vedea din exerciţiile următoare.

Exerciţiul 1.14 *Să se arate funcţia* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^3y^2 \sin y + x^2y^3 \sin x}{x^4 + y^4}$$

are limita nulă în punctul $(0,0)$.
Soluţie. *Să observăm că, pentru orice direcţie* $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, *avem*

$$\lim_{t\to 0} f((0,0) + t(h_1,h_2)) = \lim_{t\to 0} t\frac{h_1^3h_2^2\sin(th_2) + h_1^2h_2^3\sin(th_1)}{h_1^4 + h_2^4} = 0.$$

Rezultă că, dacă există, limita funcţiei în punctul $(0,0)$ *va fi egală cu* 0.
Folosind că

$$(x^2 - y^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2,$$

obţinem

$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{|x|^3 y^2 + x^2 |y|^3}{x^4 + y^4} \leq \frac{1}{2}\left(|x| + |y|\right).$$

Cum limita în punctul $(0,0)$ *a funcţiei din dreapta este* 0 *în mod evident, ne va rezulta (folosind, de exemplu, criteriul de tip* $\varepsilon - \delta$*), concluzia.*

Exerciţiul 1.15 *Să se arate că nu există limita funcţiei*

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x \neq y\} \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \frac{y^2 - z^2}{x - y},$$

în punctul $(0,0,0)$.
Soluţie. *Cum*

$$\lim_{t\to 0} f((0,0,0) + t(h_1,h_2,h_3)) = \lim_{t\to 0} t\frac{h_2^2 - h_3^2}{h_1 - h_2} = 0,$$

rezultă că, dacă există, limita funcţiei în punctul $(0,0,0)$ *va fi egală cu* 0.
Considerând însă şirul

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent la $(0,0,0)$ *în* $\mathbb{R}^3$, *vom avea că*

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right) = 1,$$

ceea ce arată că nu există limita funcţiei în punctul $(0,0,0)$.

1.2 Continuitate

Definiţia 1.16 *Spunem că funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ ***este continuă în punctul*** $a \in A$ *dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Dacă funcţia f *nu este continuă în punctul* $a \in A$, *vom spune că* f *este* ***discontinuă în punctul*** a, *sau că* a *este un* ***punct de discontinuitate*** *pentru funcţia* f.

Vom spune că funcţia f *este* ***continuă pe o mulţime*** $B \subset A$ *dacă* f *este continuă în orice punct* $x \in B$.

Observaţia 1.17 *Remarcăm mai întâi faptul că noţiunea de continuitate, spre deosebire de cea de limită, nu are sens decât pentru punctele mulţimii* A, *domeniul de definiţie al funcţiei* f.

De asemenea, să observăm că, dacă a *este un punct izolat al mulţimii* A, *atunci funcţia* f *este continuă în* a.

Aşadar, problema continuităţii se va pune doar în punctele de acumulare ale mulţimii A. Examinând definiţia de mai sus, observăm similitudinea cu definiţia limitei unei funcţii într-un punct, ceea ce ne permite enunţarea următoarei teoreme de caracterizare, a cărei demonstraţie evidentă o omitem.

Teorema 1.18 (Caracterizare a continuităţii cu limita) *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A' \cap A$. *Atunci* f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Teorema 1.19 (Caracterizarea cu şiruri a continuităţii) *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A$. *Atunci* f *este continuă în punctul* a *dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to f(a). \tag{1.5}$$

Exerciţiul 1.20 *Să se arate că funcţia:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie. *În orice punct* $(a,b) \neq (0,0)$, *funcţia este continuă, aşa cum rezultă cu uşurinţă din definiţia cu şiruri.*

Pentru a dovedi continuitatea în $(0,0)$, *observăm că:*

$$\left|x^3\right| \leq \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} \text{ şi } \left|y^3\right| \leq \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

de unde rezultă:

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{2\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Dacă $(x_n, y_n) \to (0,0)$, *atunci* $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to 0$, *deci:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Aşadar, f *este continuă şi în* $(0,0)$.

Următoarea teoremă permite caracterizarea continuităţii unei funcţii vectoriale de variabilă vectorială prin intermediul proprietăţii similare a funcţiilor componente.

Teorema 1.21 *Fie* $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ *şi* $a \in A$. *Atunci* f *este continuă în punctul* a *dacă şi numai dacă funcţiile* $f_1, f_2, ..., f_p : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *sunt continue în* a.