Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

i. ecuaţia omogenă

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \tag{3.1}$$

ii. ecuaţia neomogenă

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \tag{3.2}$$

unde $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ iar f este funcţie continuă pe intervalul $[\,a, b\,]$.

Metoda de integrare a ecuaţiei omogene (3.1) a fost dată prima dată de L. Euler şi se bazează pe urmă toarea identitate

$$L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} P(\lambda) \tag{3.3}$$

unde L este operatorul diferenţial

$$L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x,$$

definit pe mulţimea funcţiilor de clasă $C^n(\mathbb{R})$, iar P este **polinomul caracteristic**

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{3.4}$$

Soluţiile **ecuaţiei caracteristice** $P(\lambda) = 0$ adică

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{3.5}$$

se numesc **rădăcini caracteristice.**

Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ distincte sunt rădăcinile caracteristice atunci funcţiile

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{\lambda_n t}$$

sunt liniar independente.
În această situaţie forma generală a soluţiei ecuaţiei omogene este

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}. \tag{3.6}$$

Teorema 3.1

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *rădăcinile ecuaţiei caracteristice* (3.5), *de multiplicităţi* $k_1, k_2, \ldots, k_p$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$. *Atunci următorul sistem de funcţii este sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă* (3.1)

$$\begin{array}{lllll} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & t^2 e^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & t^2 e^{\lambda_2 t}, & \ldots, & t^{k_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ e^{\lambda_p t}, & te^{\lambda_p t}, & t^2 e^{\lambda_p t}, & \ldots, & t^{k_p - 1} e^{\lambda_p t}, \end{array} \tag{3.7}$$

iar soluţia generală a ecuaţiei omogene este combinaţie liniară, cu coeficienţi reali, a funcţiilor din tabloul (3.7).

Dacă $\lambda = \alpha \pm j\beta$ ($j^2 = -1$) sunt rădăcini caracteristice complex conjugate de multiplicitate k fiecare, atunci în tabloul sistemului fundamental de soluţii vom considera funcţiile

$$\begin{array}{l} e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t \\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t \\ t^2e^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^2e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \ldots,\ \ldots \\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{array} \tag{3.8}$$

Pentru determinarea soluţiei generale a **ecuaţiei neomogene** (3.2).
Dacă $\widetilde{x}$ este o soluţie particulară a ecua ţiei neomogene (3.2) şi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene asociate (3.1) atunci soluţia generală a ecuaţiei neomogene (3.2) este

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \ldots + C_n x_n(t) + \widetilde{x}(t), \quad t \in [\,a, b\,] \quad (3.9)$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt constante reale arbitrare.

Pentru determinarea soluţiei particulare $\widetilde{x}$ putem folosi una dintre următoerele metode:

[I] **metoda variaţiei constantelor** când se caută $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = K_1(t)x_1(t) + K_2(t)x_2(t) + \ldots + K_n(t)x_n(t) \tag{3.10}$$

unde funcţiile $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sunt funcţii necunoscute ale căror derivate sunt soluţii pentru **sistemul variaţiei constantelor**

$$\begin{cases} K_1'x_1 + K_2'x_2 + \ldots + K_n'x_n = 0 \\ K_1'x_1' + K_2'x_2' + \ldots + K_n'x_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_1'x_1^{(n-2)} + K_2'x_2^{(n-2)} + \ldots + K_n'x_n^{(n-2)} = 0 \\ K_1'x_1^{(n-1)} + K_2'x_2^{(n-1)} + \ldots + K_n'x_n^{(n-1)} = f(t). \end{cases} \tag{3.11}$$

[II] **metoda coeficienţilor nedeterminaţi**, când soluţia particulară $\widetilde{x}$ se alege după forma termenului liber $f(t)$ în următoarele situaţii:

1. dacă $\underline{f(t) = P(t)}$, P este un polinom de gradul m, atunci se alege $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = t^{\ell} \cdot Q(t) \tag{3.12}$$

unde Q este un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi $\mathrm{grad}\,(Q) = \mathrm{grad}\,(P)$ iar ℓ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = 0$ în ecuaţia caracteristică. Dacă $\lambda = 0$ nu este rădăcină caracteristică se ia $\ell = 0$.

2. dacă $\underline{f(t) = e^{at}P(t)}$, P este un polinom de gradul m, atunci se alege $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = t^{\ell} \cdot e^{at} \cdot Q(t) \tag{3.13}$$

unde Q este un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi $\mathrm{grad}\,(Q) = \mathrm{grad}\,(P)$ iar ℓ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = a$ în ecuaţia caracteristică. Dacă $\lambda = a$ nu este rădăcină caracteristică se ia $\ell = 0$.

3. dacă $\underline{f(t) = P_1(t)\cos(bt) + P_2(t)\sin(bt)}$, atunci se alege $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = t^{\ell} \cdot [Q_1(t)\cos(bt) + Q_2(t)\sin(bt)] \qquad (3.14)$$

unde ℓ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = \pm jb$ în ecuaţia caracteristică, iar

$$\text{grad}\,(Q_1) = \text{grad}\,(Q_2) = \max\{\text{grad}\,(P_1),\ \text{grad}\,(P_2)\}.$$

Dacă $\lambda = \pm ib$ nu este rădăcină caracteristică se ia $\ell = 0$.

4. dacă $\underline{f(t) = e^{at}[P_1(t)\cos(bt) + P_2(t)\sin(bt)]}$, atunci se alege $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = t^{\ell} \cdot e^{at} \cdot [Q_1(t)\cos(bt) + Q_2(t)\sin(bt)] \tag{3.15}$$

unde ℓ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = a \pm jb$ în ecuaţia caracteristică, iar

$$\text{grad}\,(Q_1) = \text{grad}\,(Q_2) = \max\{\text{grad}\,(P_1),\ \text{grad}\,(P_2)\}.$$

Dacă $\lambda = a \pm ib$ nu este rădăcină caracteristică se ia $\ell = 0$.

Exemplul 3.1

Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor:

1. $x'' + x = t^2 + t$,
2. $x''' - 3x'' = 18t + 12$,
3. $x'' - x = te^t$
4. $x'' - 7x' + 6x = 37 \sin t$,
5. $x'' + 4x = t \sin 2t$
6. $x'' + 2x' + 2x = te^{-t} + e^{-t} \cos t$.

Ecuaţii Euler - Cauchy

Sunt ecuaţiile de forma

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} t x' + a_n x = 0 \tag{3.16}$$

unde $a_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, n}$.
Dacă $t > 0$ facem schimbarea de variabilă independentă

$$t = e^s \tag{3.17}$$

Dacă $t < 0$ notăm $t = -e^s$.

Au loc imediat formulele de derivare

$$x' = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{e^s} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad tx' = \dot{x}$$

$$x'' = \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{t^2} \quad \Rightarrow \quad t^2x'' = \ddot{x} - \dot{x}.$$

Procedeul continuă. Prin înlocuire în ecuaţie se obţine o ecuaţie cu coeficienţi constanţi.