Universidade do Minho

Mestrado Integrado em Engenharia informática

Mdio

Grupo 39

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Trabalho Prático 3

Janeiro 2020

Ana Margarida Campos

A85166

Tânia Rocha

A85176

Ana Catarina Gil

A85266

Índice

Introdução

Este trabalho foi proposto pelos docentes da unidade curricular de Modelos Determinísticos de Investigação Operacional.

Este refere-se a um projeto composto por atividades em que nos é dado o tempo de duração associado a cada uma e o respetivo grafo, sendo repartido em 3 partes.

O objetivo é realizar o projeto na menor duração possível, tendo como restrições a limitação de recursos e a decisão de como as durações das atividades devem ser reduzidas, de modo a realizar o projeto numa nova duração desejada, com um custo suplementar mínimo.

PARTE 0

Apresentação da nova rede

O maior número do nosso grupo é o 85266. Posto isto, tal como descrito no enunciado, era necessário remover determinadas atividades, que no nosso caso é apenas a atividade 6.

De seguida é apresentado o grafo resultante:

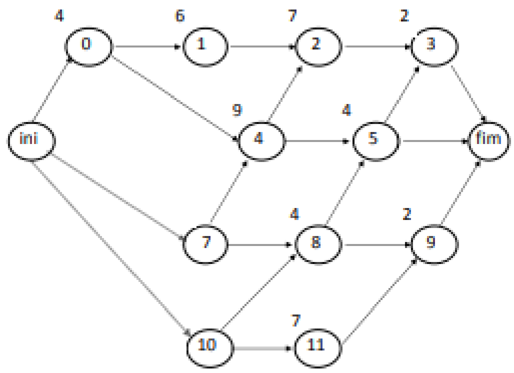

Figura 1 - Grafo Resultante

Caminho Crítico

Como auxilio, para achar o caminho crítico, correspondente ao caminho mais longo entre o vértice que define o início do projeto e o vértice que define o fim do projeto, foi necessário recorrer ao software LPSolve.

Variável de decisão:

$$\textbf{Xij=} \begin{cases} 1 \text{ , caso o arco ij pretensa ao caminho critico} \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases}$$

Parâmetros: Duração em cada arco.

Restrições: As restrições traduzem a conservação do fluxo em cada vértice, ou seja, o número de unidades que entra no vértice j deve ser igual ao número de unidades que dele saem.

Função Objetivo: Como queremos maximizar o caminho, construímos uma função linear que soma todas as variáveis de decisão associadas ao seu custo.

```
/* Objective function */
max: 4 x01 + 4 x04 + 6 x12 + 7 x23 + 2 x3f + 9 x42 + 9 x45 + 4 x53 +
4 x5f + 6 x74 + 6 x78 + 4 x85 + 4 x89 + 2 x9f + 8 x108 + 8 x1011 + 7 x119;

/* Variable bounds */
vertice_i: xi0 + xi7 + xi10 = 1;
vertice_0: xi0 = x01 + x04;
vertice_1: x01 = x12;
vertice_2: x12 + x42 = x23;
vertice_3: x23 + x53 = x3f;
vertice_4: x04 + x74 = x42 + x45;
vertice_5: x45 + x85 = x53 + x5f;
vertice_7: xi7 = x74 + x78;
vertice_8: x78 + x108 = x85 + x89;
vertice_9: x89 + x119 = x9f;
vertice_10: xi10 = x108 + x1011;
vertice_11: x1011 = x119;
```

Figura 2- Input no LPSolve

Variables	result
	24
x01	0
x04	0
x12	0
x23	1
x3f	1
x42	1
x45	0
x53	0
x5f	0
x74	1
x78	0
x85	0
x89	0
x9f	0
x108	0
x1011	0
x119	0
xi0	0
xi7	1
xi10	0

Figura 3 - Output do LPSolve

Após estes resultados, verificamos que o caminho crítico corresponde às atividades 7,4,2 e 3, com uma duração de 24 unidades de tempo.

Diagrama de Gantt

Para a construção do diagrama de Gantt, foi também necessário recorrer ao LPSolve com o objetivo de minimizar o tempo de execução total do projeto obedecendo a todas as precedências.

Variável de decisão: ti : tempo de inicio da atividade i.

Parâmetros: Duração em cada arco.

Restrições: As restrições traduzem as relações de precedência entre as atividades.
A função **ti** + **di** designa o tempo de conclusão da atividade i.

Função Objetivo: Como queremos minimizar o tempo de execução, minimizados a variável tf, uma vez que esta representa o tempo final.

```
/* função objectivo */
min: tf ;
/* restrições */
arco_01: t1 >= t0 + 4 ;
arco_12: t2 >= t1 + 6 ;
arco_23: t3 >= t2 + 7 ;
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_04: t4 >= t0 + 4 ;
arco_42: t2 >= t4 + 9 ;
arco_53: t3 >= t5 + 4 ;
arco_3f: tf >= t3 + 2 ;
arco_45: t5 >= t4 + 9 ;
arco_5f: tf >= t5 + 4 ;
arco_74: t4 >= t7 + 6 ;
arco_85: t5 >= t8 + 4 ;
arco_9f: tf >= t9 + 2 ;
arco_67: t7 >= ti + 0 ;
arco_78: t8 >= t7 + 6 ;
arco_89: t9 >= t8 + 4 ;
arco_610: t10 >= ti + 0 ;
arco_108: t8 >= t10 + 8 ;
arco_119: t9 >= t11 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 + 8;
```

Figura 5 - Input do LPSolve

Variables	result
	24
t0	0
t1	4
t10	0
t11	8
t2	15
t3	22
t4	6
t5	15
t7	0
t8	8
t9	15
tf	24
ti	0

Figura 4 - Output do LPSolve

Como observado na figura 4, a duração do projeto é 24 unidades de tempo.

De seguida, está apresentado o diagrama de Gantt resultante:

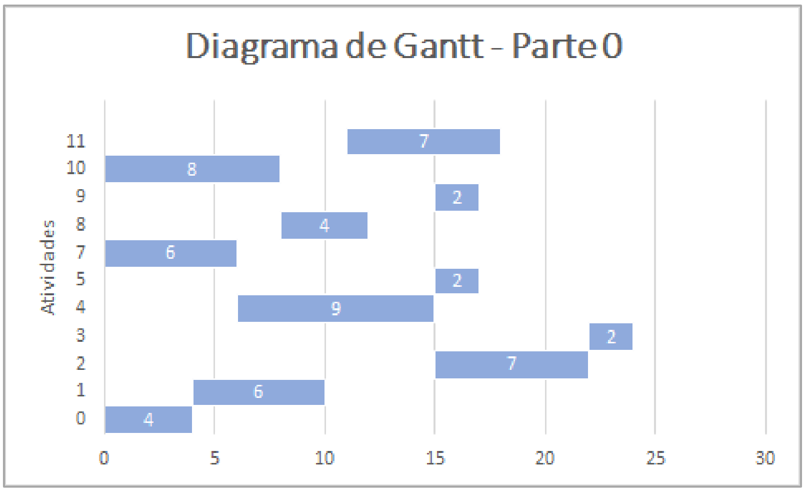

Figura 6 - Diagrama de Gantt

Como já era de esperar, os resultados obtidos presentes nas figuras 2 e 4 são iguais, ou seja, o caminho mais longo é também o caminho com o menor tempo necessário para completar a execução do projeto.

PARTE 1

Formulação do Problema

Tal como pedido no enunciado, foram escolhidas três atividades que decorrem em paralelo. Para auxiliar esta escolha, baseamo-nos no diagrama de Gantt exibido no capítulo anterior, escolhendo, portanto, as atividades 0, 7 e 10.

Com vista a sequenciar a execução destas tarefas decidimos adicionar restrições de não simultaneidade.

Para isso, começamos por criar variáveis binárias do tipo:

$$\textbf{yijk} = \begin{cases} 1 \text{ , caso a sequencia de utilização seja atividade i - atividade j - atividade k} \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases}$$

Representadas por y0710, y0107, y7010, y7100, y1007 e y1070, cada uma delas associadas às seis sequências alternativas possíveis de utilização do equipamento partilhado.

De forma a garantir que apenas uma destas sequências é satisfeita, o somatório de todas a variáveis binarias é igual a 1.

Apresentação dos ficheiros Input e Output

```
/* função objectivo */
min: tf ;
/* restrições */

y0710+y0107+y7010+y7100+y1007+y1070=1;
arco_01: t1 >= t0 + 4 ;
arco_12: t2 >= t1 + 6 ;
arco_23: t3 >= t2 + 7 ;
arco_i0: t0 = ti + 0*y0710 + 0*y0107+ + 6*y7010 + 8*y1007 + 14*y7100 + 14*y1070;
arco_04: t4 >= t0 + 4 ;
arco_42: t2 >= t4 + 9 ;
arco_53: t3 >= t5 + 4 ;
arco_3f: tf >= t3 + 2 ;
arco_45: t5 >= t4 + 9 ;
arco_5f: tf >= t5 + 4 ;
arco_74: t4 >= t7 + 6 ;
arco_85: t5 >= t8 + 4 ;
arco_9f: tf >= t9 + 2 ;
arco_67: t7 = ti + 0*y7010 + 0*y7100 + 4*y0710 + 8*y1070 + 12*y0107+ + 12*y1007;
arco_78: t8 >= t7 + 6 ;
arco_89: t9 >= t8 + 4 ;
arco_610: t10 = ti + 0*y1007 + 0*y1070+ 6*y7100 + 4*y0107+ + 10*y0710+ 10*y7010;
arco_108: t8 >= t10 + 8 ;
arco_119: t9 >= t11 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 + 8;

bin y0710,y0107,y7010,y7100,y1007,y1070;
int ti,t0,t1,t2,t3,t4,t5,t7,t8,t9,t10,t11,tf;
```

Figura 8 - Input no LPSolve

Variables	MILP ...	result
	28	28
tf	28	28
t3	26	26
t9	25	25
t5	22	22
t2	19	19
t8	18	18
t11	18	18
t1	13	13
t4	10	10
t10	10	10
t7	4	4
y0710	1	1
y0107	0	0
y7010	0	0
y7100	0	0
y1007	0	0
y1070	0	0
t0	0	0
ti	0	0

Figura 7 - Output do LPSolve

Como observado na figura 7, a duração do projeto passou a ser 28 unidades de tempo.

Apresentação do plano de execução

De seguida, está apresentado o diagrama de Gantt resultante dos dados obtidos anteriormente:

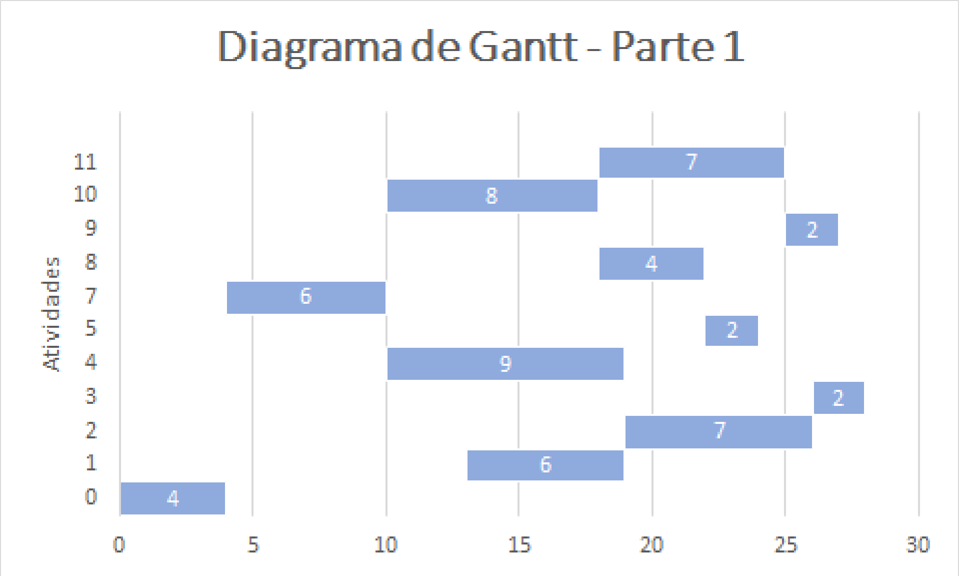

Figura 9 – Diagrama de Gantt

Comparando ambos os diagramas de Gantt representados pelas figuras 6 e 9, neste último reparamos que as atividades 0, 7 e 10 já não ocorrem paralelamente, mas sim sequencialmente, tal como era esperado.

Validação de Resultados

arco_01: t1 >= t0 + 4 ; ⇔ 13 >= 0 + 4 ✓

arco_12: t2 >= t1 + 6 ; ⇔ 19 >= 13 + 6 ✓

arco_23: t3 >= t2 + 7 ; ⇔ 26 >= 19 + 4 ✓

arco_i0: t0 = ti + 0*y0710 + 0*y0107+ + 6*y7010 + 8*y1007 + 14*y7100 + 14*y1070;

⇔ 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 ✓

arco_04: t4 >= t0 + 4 ; ⇔ 10 >= 0 + 4 ✓

arco_42: t2 >= t4 + 9 ; ⇔ 19 >= 10 +9 ✓

arco_53: t3 >= t5 + 4 ; ⇔ 26 >= 22 + 4 ✓

arco_3f: tf >= t3 + 2 ; ⇔ 28 >= 26 + 2 ✓

arco_45: t5 >= t4 + 9 ; ⇔ 22 >= 10 + 9 ✓

arco_5f: tf >= t5 + 4 ; ⇔ 28 >= 22 + 4 ✓

arco_74: t4 >= t7 + 6 ; ⇔ 10 >= 4 + 6 ✓

arco_85: t5 >= t8 + 4 ; ⇔ 22 >= 18 + 4 ✓

arco_9f: tf >= t9 + 2 ; ⇔ 28 >= 25 + 2 ✓

arco_67: t7 = ti + 0*y7010 + 0*y7100 + 4*y0710 + 8*y1070 + 12*y0107+ + 12*y1007;

⇔ 4 = 0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 ✓

arco_78: t8 >= t7 + 6 ; ⇔ 18 >= 4 + 6 ✓

arco_89: t9 >= t8 + 4 ; ⇔ 25 >= 18 + 4 ✓

arco_610: t10 = ti + 0*y1007 + 0*y1070+ 6*y7100 + 4*y0107+ + 10*y0710+ 10*y7010;

⇔ 10 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 10 + 0 ✓

arco_108: t8 >= t10 + 8 ; ⇔ 18 >= 10 + 8 ✓

arco_119: t9 >= t11 + 7 ; ⇔ 25 >= 18 + 7 ✓

arco_1011: t11 >= t10 + 8; ⇔ 18 >= 10 + 8 ✓

y0710+y0107+y7010+y7100+y1007+y1070=1; ⇔ 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 ✓

Substituindo na função objetivo:

tf = 28 ⇔ 28 = 28

PARTE 2

Formulação do Problema

Nesta parte temos como objetivo decidir como devem ser reduzidas as durações das atividades, de modo a realizar o projeto na nova duração desejada com um custo suplementar mínimo.

Variável de decisão: **rji :** redução do custo j para a atividade i.

ti : tempo de início da atividade i.

Parâmetros: Custo de cada rij e o custo normal para cada atividade.

Restrições: ti >= ti – r1i – r2i + di, a função ti - rji + di designa o tempo de conclusão da atividade i após a redução do custo j.

Função Objetivo: Como queremos minimizar o custo associado à redução das durações das atividades, construímos uma função linear que soma todas as variáveis de decisão do tipo rji, associando-as ao seu custo.

Apresentação dos ficheiros Input e Output

```
// custo associado à redução das durações das actividades
min: 200 r10 + 600 r11 + 1000 r12 + 200 r13 + 800 r14 + 1600 r15 + 0 r17 + 200 r18 + 0 r19+ 1000 r110+ 600 r111
+ 100 r20 + 300 r21 + 500 r22 + 100 r23 + 400 r24 + 800 r25 + 0 r27 +100 r28 + 0 r29 + 500 r210+ 300 r211;

// tempo máximo para concluir o projecto
tf<=24-3;

// relações de precedência
arco_01: t1 >= t0 - r10 - r20 + 4 ;
arco_12: t2 >= t1 - r11 - r21 + 6 ;
arco_23: t3 >= t2 - r12 - r22 + 7 ;
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_04: t4 >= t0 - r10 - r20 + 4 ;
arco_42: t2 >= t4 - r14 - r24 + 9 ;
arco_53: t3 >= t5 - r15 - r25 + 4 ;
arco_3f: tf >= t3 - r13 - r23 + 2 ;
arco_45: t5 >= t4 - r14 - r24 + 9 ;
arco_5f: tf >= t5 - r15 - r25 + 4 ;
arco_74: t4 >= t7 - r17 - r27 + 6 ;
arco_85: t5 >= t8 - r18 - r28 + 4 ;
arco_9f: tf >= t9 - r19 - r29 + 2 ;
arco_i7: t7 >= ti+0;
arco_78: t8 >= t7 - r17 - r27 + 6 ;
arco_89: t9 >= t8 - r18 - r28 + 4 ;
arco_i10: t10 >= ti+0;
arco_108: t8 >= t10 - r110 - r210+ 8 ;
arco_119: t9 >= t11 - r111 - r211 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 - r110 - r210+ 8;

// reduções máximas permitidas
r10 <= 0.5;
r11 <= 1;
r12 <= 3;
r13 <= 0.5;
r14 <= 2;
r15 <= 0.5;
r17 <= 0;
r18 <= 0.5;
r19 <= 0;
r110 <= 0.5;
r111 <= 1;

r20 <= 0.5;
r21 <= 1;
r22 <= 1;
r23 <= 0.5;
r24 <= 1;
r25 <= 0.5;
r27 <= 0;
r28 <= 0.5;
r29 <= 0;
r210 <= 0.5;
r211 <= 1;
```

Figura 10 - Output LPSolve

Variables	result
	1050
r10	0
r11	0
r110	0
r111	0
r12	0
r13	0,5
r14	0
r15	0
r17	0
r18	0
r19	0
r20	0
r21	0
r210	0
r211	0
r22	1
r23	0,5
r24	1
r25	0
r27	0
r28	0
r29	0
t0	0
t1	4
t10	0
t11	8
t2	14
t3	20
t4	6
t5	14
t7	0
t8	8
t9	15
tf	21
ti	0

Figura 11- Input LPSolve

Como observado na figura 11, a duração do projeto passou a ser 21 unidades de tempo, gastando 1050 UM.

Para isso, foram utilizadas : a redução a custo c1 na atividade 3, a redução a custo c2 na atividade 2, a redução a custo c2 na atividade 3 e a redução a custo c2 na atividade 4.

Apresentação do plano de execução

De seguida, está apresentado o diagrama de Gantt resultante dos dados obtidos anteriormente:

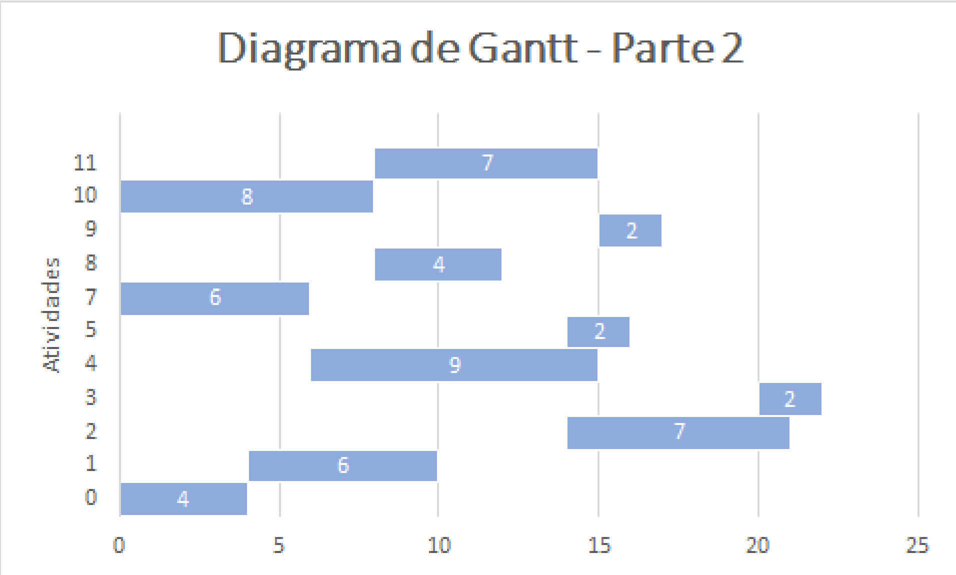

Figura 12- Diagrama de Gantt

Validação de Resultados

arco_01: t1 >= t0 - r10 - r20 + 4 ⇔ 4>=0-0-0+4 ✓

arco_12: t2 >= t1 - r11 - r21 + 6 ⇔ 14>=4-0-0+6 ✓

arco_23: t3 >= t2 - r12 - r22 + 7 ⇔ 20>=14-0-1+7

arco_i0: t0 >= ti + 0 ⇔ 0>=0+0 ✓

arco_04: t4 >= t0 - r10 - r20 + 4 ⇔ 6>=0-0-0+4 ✓

arco_42: t2 >= t4 - r14 - r24 + 9 ⇔ 14>=6-0-1+9 ✓

arco_53: t3 >= t5 - r15 - r25 + 4 ⇔ 20>=14-0-0+4 ✓

arco_3f: tf >= t3 - r13 - r23 + 2 ⇔ 21>=20-0.5-0.5+2 ✓

arco_45: t5 >= t4 - r14 - r24 + 9 ⇔ 14>=6-0-1+9 ✓

arco_5f: tf >= t5 - r15 - r25 + 4 ⇔ 21>=14-0-0+4 ✓

arco_74: t4 >= t7 - r17 - r27 + 6 ⇔ 6>=0-0-0+6 ✓

arco_85: t5 >= t8 - r18 - r28 + 4 ⇔ 14>=0-0-0+4 ✓

arco_9f: tf >= t9 - r19 - r29 + 2 ⇔ 21>=15-0-0+2 ✓

arco_i7: t7 >= ti+0 ⇔ 0>=0+0 ✓

arco_78: t8 >= t7 +0 ⇔ 0>=0+0 ✓

arco_89: t9 >= t8 - r18 - r28 + 4 ⇔ 15>=0-0-0+4 ✓

arco_i10: t10 >= ti+0 ⇔ 0>=0+0 ✓

arco_108: t8 >= t10 +0 ⇔ 0>=0+0 ✓

arco_119: t9 >= t11 - r111 - r211+ 7 ⇔ 15>=8-0-0+7 ✓

arco_1011: t11 >= t10 - r110 - r210+ 8 ⇔ 8>=0-0-0+8 ✓

Reduções máximas permitidas:

r10 <= 0.5 ⇔ 0<=0.5 ✓

r11 <= 1 ⇔ 0<=1 ✓

r12 <= 3 ⇔ 0<=3 ✓

r13 <= 0.5 ⇔ 0.5<=0.5 ✓

r14 <= 2 ⇔ 0<=2 ✓

r15 <= 0.5 ⇔ 0<=0.5 ✓

r17 <= 0 ⇔ 0<=0 ✓

r18 <= 0.5 ⇔ 0<=0.5 ✓

r19 <= 0 ⇔ 0<=0 ✓

r110 <= 0.5 ⇔ 0<=0.5 ✓

r111 <= 1 ⇔ 0<=1 ✓

r20 <= 0.5 ⇔ 0<=0.5 ✓

r21 <= 1 ⇔ 0<=1 ✓

r22 <= 1 ⇔ 1<=1 ✓

r23 <= 0.5 ⇔ 0.5<=0.5 ✓

r24 <= 1 ⇔ 1<=1 ✓

r25 <= 0.5 ⇔ 0<=0.5 ✓

r27 <= 0 ⇔ 0<=0 ✓

r28 <= 0.5 ⇔ 0<=0.5 ✓

r29 <= 0 ⇔ 0<=0 ✓

r210 <= 0.5 ⇔ 0<=0.5 ✓

r211 <= 1 ⇔ 0<=1 ✓

tf <= 21 ⇔ 21 = 21 ✓

Substituíndo na função objetivo:

min: 200 r10 + 600 r11 + 1000 r12 + 200 r13 + 800 r14 + 1600 r15 + 0 r17 + 200 r18 + 0 r19+ 1000 r110+ 600 r111 + 100 r20 + 300 r21 + 500 r22 + 100 r23 + 400 r24 + 800 r25 + 0 r27 +100 r28 + 0 r29 + 500 r210+ 300 r211

⇔

200*0 + 600*0 + 1000*0 + 200*0.5 + 800*0 + 1600*0 + 0*0 + 200*0 + 0*0+ 1000*0 + 600*0

+ 100*0 + 300*0 + 500*1 + 100*0.5 + 400*1 + 800*0 + 0*0 +100*0 + 0*0 + 500*0 + 300*0 ✓

Conclusão

No desenvolvimento deste trabalho foi-nos permitido a aplicação de diversos conhecimentos adquiridos nas aulas práticas e teóricas desta unidade curricular. Este possibilitou a resolução de soluções ótimas de um grafo que pode ser decomposto num conjunto de atividades com durações determinísticas. Além disso, também nos permitiu aprofundar conhecimentos sobre o método do caminho crítico (*critical path method, CPM*), diagrama de *Gantt* e sobre o balanceamento entre a duração do projeto e o seu custo. Como auxílio à execução deste projeto foi utilizado o software *LPSolve*, utilizado também nos trabalhos anteriormente feitos, que permite a obtenção de soluções ótimas de maneira rápida e eficiente.

Em suma, consideramos que o trabalho cumpre todos os objetivos propostos inicialmente.