Autómatas y Lenguajes Formales
Tarea 0

Rubí Rojas Tania Michelle

Martes 21 de agosto de 2018

1. Busca los axiomas de Zermelo-Frankel de la Teoría de Conjuntos y cópialos aquí.
   Solución:

   - **Axioma 1** (de existencia). Hay un conjunto que no tiene elementos.
   - **Axioma 2** (de extensión). Si todo elemento de A es un elemento de B y todo elemento de B es un elemento de A, entonces $A = B$.
   - **Axioma 3** (Esquema de comprensión). Sea P una fórmula. Para cualquier conjunto A hay un conjunto B tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y satisface la fórmula P.
   - **Axioma 4** (del Par). Para cualesquiera conjuntos A y B hay un conjunto C tal que $x \in C$ si y sólo si $x = A$ o $x \in B$.
   - **Axioma 5** (de unión). Para cualquier conjunto S, existe un conjunto U tal que $x \in U$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in S$.
   - **Axioma 6** (del Conjunto Potencia). Para cualquier conjunto X, existe un conjunto S tal que $A \in S$ si y sólo si $A \subseteq X$.
   - **Axioma 7** (de Fundación). En cada conjunto no vacío A existe $u \in A$ tal que u y A son ajenos.
   - **Axioma 8** (de Infinitud). Existe un conjunto inductivo.

2. Busca el axioma de elección y cópialo aquí.
   Solución: "Toda familia de conjuntos no vacíos posee una función de elección."

3. ¿Todos los conjuntos forman un conjunto? Justifica tu respuesta.
   Solución: Se puede explicar con un ejemplo análogo: un conjunto que consta de libros no es miembro de sí mismo porque el conjunto en sí no es un libro. Así es más claro ver que todos los conjuntos **no** forman un conjunto, ya que el conjunto de todos los conjuntos pertenece a este conjunto pero a su vez no pertenece a este conjunto. Esto es una paradoja.

4. Sean $A :=$ {a,b,c,d}, $B :=$ {1,2,3}

   - Da una relación de A en B que no sea función.
     Solución: $R =$ {(a,1), (a,2)}
   - Da una relación de A en B que sea una función suprayectiva.
     Solución: $S =$ {(a,1), (b,1), (c,2), (d,3)}
   - Da una relación de A en B que sea una función pero que no sea suprayectiva.
     Solución: $T =$ {(a,1), (b,1), (c,2), (d,2)}

- ¿Puede haber una función de A en B inyectiva? Justifica tu respuesta.
  SOLUCIÓN: No, ya que para que exista una función inyectiva entonces los elementos del dominio tienen que dar con elementos distintos del codominio al aplicar la función, pero el conjunto A tiene 4 elementos mientras que el conjunto B tiene 3 elementos; por lo tanto no es posible que los elementos del dominio vayan a dar a elementos distintos del codomonio ya que la cardinalidad de A es mayor que la de B.

5. ¿Cuál es la diferencia entre un orden total y un buen orden?
   SOLUCIÓN: Un órden es total si cualesquiera dos elementos de A son comparables, lo que significa que no necesariamente tiene que existir un elemento mínimo; mientras que un buen órden es un orden lineal (total) donde cada conjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo. Un ejemplo claro de esta diferencia es el órden de los números enteros ya que es un órden total pero no es un buen órden debido a la falta de un elemento mínimo.

6. Sea A un conjunto, la *potencia* de A se define como:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

   Demuestra que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

   Demostración. Es claro que la función $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ definida por $g(a) = \{a\}$ es inyectiva. Ahora, sea $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ cualquier función. Veamos que f no puede ser suprayectiva.
   Sea $A_0 = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Afirmamos que A_0 no pertenece al rango de f. Supongamos lo contrario, es decir, que para alguna $x \in A$, $f(x) = A_0$. Existen dos posibilidades:

   i) Si $x \in A_0$, por definición de A_0, entonces $x \notin f(x) = A_0$. Por lo tanto, $x \in A_0$ y $x \notin A_0$, lo cual es una contradicción.
   ii) Si $x \notin A_0$ entonces $x \in f(x) = A_0$. Por lo tanto, $x \in A_0$ y $x \notin A_0$, lo cual es una contradicción.

   En ambos casos se llega a una contradicción, así A_0 no pertenece a la imagen de f y por lo tanto f no es suprayectiva.

   □

7. Busca las siguientes definiciones y cópialas aquí:

   - Relación de equivalencia
     DEFINICIÓN: Dado un conjunto no vacío A, decimos que una relación R es una relación de equivalencia sobre A si y sólo si R es reflexiva sobre A, es simétrica y es transitiva. Además, si a R b, es común decir que a es equivalente a b.
   - Partición de un conjunto
     DEFINICIÓN: Sean A e I dos conjuntos no vacíos tales que para cada $i \in I$, existe un subconjunto A_i de A. Decimos que el conjunto

$$P = \{A_i : i \in I\}$$

     es una partición de A si y sólo si

     i) para toda $i \in I$, $A_i \neq \varnothing$
     ii) si $i, j \in I$ son tales que $A_i \neq A_j$, entonces $A_i \cap A_j = \varnothing$
     iii) para toda $a \in A$, hay $i \in I$ tal que $a \in A_i$

- Conjunto cociente
  Definición: Sea A un conjunto no vacío y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. El conjunto cociente de A bajo $\sim$, denotado $A/\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia inducidas por $\sim$. Es decir,

  $$A/\sim = \{[a] \colon a \in A\}$$

8. Sea $A := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Considera la siguiente relación en $\mathcal{P}(A) : X \sim Y$ si y sólo si $|X| = |Y|$. Utiliza las definiciones del inciso anterior:

   - Muestra que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(A)$.

     Demostración. Veamos que $\sim$ es reflexiva. Sea X un conjunto. Como $X = X$ entonces $|X| = |X|$, por lo que $\sim$ es reflexiva. Ahora, veamos que $\sim$ es simétrica. Sean X y Y conjuntos tales que $X \sim Y$. Por definición tenemos que $|X| = |Y|$ y por la conmutatividad de la igualdad tenemos que $|Y| = |X|$. Por lo tanto, $\sim$ es simétrica. Finalmente, veamos que $\sim$ es transitiva. Sean X, Y y Z conjuntos tales que $X \sim Y$ y $Y \sim Z$. Entonces, por definición, tenemos que $|X| = |Y|$ y $|Y| = |Z|$, respectivamente. Por la transitividad de la igualdad obtenemos que $|X| = |Z|$. Por lo tanto, $\sim$ es transitiva.
     Por lo tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

   - ¿Cuántas clases de equivalencia hay bajo esta relación?
     Solución: Hay 5 clases de equivalencia, una por cada cardinalidad que puede arrojar la relación, es decir, puede ser que $|A| = 4$, $|A| = 3$, $|A| = 2$, $|A| = 1$, $|A| = 0$, de aquí salen las diferentes clases de equivalencia.

   - ¿Cuál es el conjunto cociente inducido por esta relación de equivalencia?
     Solución: El conjunto cociente inducido por esta relación de equivalencia es el conjunto potencia, es decir, $A/\sim = \mathcal{P}(A)$.

9. Demuestra que toda relación de equivalencia induce una partición, y que toda partición induce una relación de equivalencia.

   Demostración. Primero veamos que toda relación de equivalencia induce una partición. Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida en un conjunto $A \neq \varnothing$. Entonces

   i) pd. Si $a \in A$, entonces $[a] \neq \varnothing$.
      Sea $a \in A$. Como la relación es reflexiva, sabemos que $a \sim a$, por lo cual $a \in [a]$ y $a \neq \varnothing$.

   ii) pd. Para cualesquiera $a, a' \in A$, si $[a] \neq [a']$ entonces $[a] \cap [a'] = \varnothing$.
       Sean $a, a' \in A$. Supongamos que $[a] \neq [a']$, de donde tenemos que $a \nsim a'$, y por lo tanto $[a] \cap [a'] = \varnothing$.

   iii) pd. Para toda $a \in A$, existe $a' \in A$ tal que $a \in [a']$.
        Usando el inciso $i)$ de esta demostración vemos que para toda $a \in A$, existe a misma tal que $a \in [a]$.

   Con lo anterior probamos que toda relación de equivalencia induce una partición.

   Ahora, veamos que toda partición induce una relación de equivalencia. Sean $A \neq \varnothing$ y $P = \{A_i \mid i \in I\}$ una partición de A. Definimos la siguiente relación $\sim_p$ sobre A: $a \sim_p b$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $a \in A_i$ y $b \in A_i$. Veamos que $\sim_p$ es una relación de equivalencia.

i) Reflexividad. Sea $a \in A$. Como $\{A_i \mid i \in I\}$ es una partición de A, existe $i \in I$ tal que $a \in A_i$. Así, $a \in A_i$ y $a \in A_i$. Entonces $a \sim_p a$ y por lo tanto $\sim_p$ es reflexiva.

ii) Simetría. Sean $a, b \in A$ tales que $a \sim_p b$. Por definición, existe $i \in I$ tal que $a \in A_i$ y $b \in A_i$. Pero entonces existe $i \in I$ tal que $b \in A_i$ y $a \in A_i$, por lo que $b \sim_p a$. Así, $\sim_p$ es simétrica.

iii) Transitividad. Sean $a, b, c \in A$ tales que $a \sim_p b$ y $b \sim_p c$. Entonces, por definición, existen $i, j \in I$ tales que $a \in A_i$, $b \in A_i$ y $b \in A_j$, $c \in A_j$, respectivamente. Como $b \in A_i$ y $b \in A_j$, entonces $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Así, por la contrapositiva de la segunda condición de una partición, tenemos que $A_i = A_j$. Luego, existe $i \in I$ tal que $a \in A_i$ y $c \in A_i$. Por lo tanto, $a \sim_p c$, y $\sim_p$ es transitiva.

Por lo tanto, $\sim_p$ es una relación de equivalencia sobre A.

$\square$

10. Enuncia el principio de inducción matemática para números natuales.
Solución:
Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y cumple que

i) $0 \in A$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}(n \in A \Rightarrow s(n) \in A)$

entonces $A = \mathbb{N}$.

11. Utilizando inducción matemática demuestra lo siguiente:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 1$ es impar.

  Demostración. Inducción sobre n.
  Base de inducción. Si $n = 0$, entonces $0^2 + 0 + 1 = 1$, el cual es claramente impar pues $1 = 2(0) + 1$.

  Hipótesis de inducción. Supongamos que $n^2 + n + 1$ es impar, es decir, que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + n + 1 = 2s + 1$.

  Paso inductivo. Queremos mostrar que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $(n+1)^2 + n + 2 = 2t + 1$. Efectuando las operaciones adecuadas tenemos que $(n+1)^2 + n + 2 = (n^2 + 2n + 1) + n + 2$. Reagrupando obtenemos que $(n^2 + n + 1) + 2n + 2$. Así, aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $(2s + 1) + 2n + 2 = 2(s + (n + 1)) + 1$. Por lo tanto, si tomamos $t = s + (n + 1)$ obtenemos que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $(n+1)^2 + n + 2 = 2t + 1$.

  $\square$

- Si $|A| = n$, entonces $\mathcal{P}(A) = 2^n$.

  Demostración. Inducción sobre n.
  Base de inducción. Si $|A| = 0$ entonces $A = \varnothing$, de donde tenemos que $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ y así $|\mathcal{P}(\varnothing)| = 2^0 = 1$.
  Hipótesis de inducción. Supongamos que se cumple para $n = k > 0$ y designamos por A a un conjunto de cardinalidad $k + 1$.
  Paso inductivo. Sea $x \in A$ un elemento arbitrario. Es claro que $|A - \{x\}| = k$ y aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $|\mathcal{P}(A - \{x\})| = 2^k$. Ahora, dado cualquier subconjunto $B \in \mathcal{P}(A)$ obtenemos un subconjunto de $A - \{x\}$ si pasó una y sólo una de las siguientes dos cosas:

i) B permaneció inalterado en $A - \{x\}$; i.e. x no era un elemento de B.

ii) B proviene de cierto conjunto $B' = B \cup \{x\}$; i.e. x era un elemento de B.

Conforme hacemos variar a los subconjuntos de A de acuerdo con las opciones anteriores obtenemos a todos los subconjuntos de $A - \{x\}$. En consecuencia obtenemos finalmente que $|\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(A - \{x\})| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

$\square$

- Si $n \geq 5$, entonces $n^2 < 2^n$.

  Demostración. Inducción sobre n.
  Base de inducción. Como $5^2 = 25$ y $2^5 = 32$, tenemos que $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.
  Hipótesis de inducción. Sea $n \geq 5$ y supongamos que $n^2 < 2^n$.
  Paso inductivo. Queremos mostrar que $(n+1)^2 < 2^{n+1}$.
  Tenemos que $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2$ por hipótesis de inducción. Luego, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 > n^2 + n^2 > n^2 + n \cdot n > n^2 + 4n$ pues remplazamos a n con 4 ya que $n > 4$. Entonces $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 > n^2 + n^2 > n^2 + n \cdot n > n^2 + 4n > n^2 + 2n + 2n > n^2 + 2n + 1$ pues $2n > 1$ ya que $n > 4$. Por lo tanto $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 > n^2 + n^2 > n^2 + n \cdot n > n^2 + 4n > n^2 + 2n + 2n > n^2 + 2n + 1 > (n+1)^2$ que es lo que se quería probar.

  $\square$

- Si $n \geq 4$, entonces $2^n < n!$

  Demostración. Inducción sobre n.
  Base de inducción. Como $2^4 = 16$ y $4! = 24$, entonces $2^4 = 16 < 24 = 4!$.
  Hipótesis de inducción. Sea $n \geq 4$ y supongamos que $2^n < n!$.
  Paso inductivo. Queremos mostrar que $2^{n+1} < (n+1)!$
  Como $n \geq 4$ tenemos que $2 < n + 1$. Además, por hipótesis de inducción, $2^n < n!$. Entonces $2^n \cdot 2 < n! \cdot (n+1)$. Por lo tanto, $2^{n+1} < (n+1)!$

  $\square$