Autómatas y Lenguajes Formales
Tarea 1

Rubí Rojas Tania Michelle

13 de septiembre de 2018

1. Si A es un lenguaje, demuestra que $(A^*)^* = A^*$.

   Demostración: Supongamos que A es un lenguaje.

$$
\begin{aligned}
x \in (A^*)^* &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (\bigcup_{j=0}^{\infty} A^j)^i \\
&\Leftrightarrow \exists k, m_1, ..., m_k \in \mathbb{N} : x = x_1, ..., x_k; x_1 \in A^{m_1}, ..., x_k \in A^{m_k} \\
&\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N} : x \in A^r, r = m_1 + ... + m_k \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i \\
&\Leftrightarrow x \in A^*
\end{aligned}
$$

$\square$

2. Si A, B y C son lenguajes, prueba que $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

   Demostración: Supongamos que A, B y C son lenguajes.

   $\subseteq$) Sea $x \in A(B \cup C)$. Entonces $x = ak$ para las cadenas $a \in A$ y $k \in B \cup C$, por lo que $a \in A$ y ($k \in B$ ó $k \in C$).

   i) $a \in A$ y $k \in B$. Entonces $ak \in AB$ y por la definición de unión concluimos que $x = ak \in AB \cup AC$.

   ii) $a \in A$ y $k \in C$. Entonces $ak \in AC$ y por la definición de unión concluimos que $x = ak \in AB \cup AC$.

   $\supseteq$) Sea $x \in AB \cup AC$. Entonces $x \in AB$ ó$x \in AC$.

   i) $x \in AB$. Entonces $x = ab$ para las cadenas $a \in A$ y $b \in B$. Por la definición de la unión tenemos que $b \in B \cup C$. Por lo tanto, $x = ab \in A(B \cup C)$.

   ii) $x \in AC$. Entonces $x = ac$ para las cadenas $a \in A$ y $c \in C$. Por la definición de la unión tenemos que $c \in B \cup C$. Por lo tanto, $x = ac \in A(B \cup C)$.

$\square$

¿Es cierto que $A(B \cap C) = AB \cap AC$? Argumenta su respuesta.
SOLUCIÓN:
No es cierto. Para justificarlo mostraré un contraejemplo: Sean $A = \{x, \epsilon\}$, $B = \{\epsilon\}$ y $C = \{x\}$. Entonces $AB = \{x, \epsilon\}$, $AC = \{x^2, x\}$ y $B \cap C = \varnothing$, de donde $A(B \cap C) = \varnothing \neq \{x\} = AB \cap AC$.

3. Muestra que los lenguajes regulares son cerrados bajo intersección utilizando autómatas finitos deterministas.

   Demostración: Supongamos que A y B son lenguajes regulares. Entonces existen autómatas finitos deterministas $M_A = (Q_A, \sum, \delta_A, q_A, F_A)$ y $M_A = (Q_B, \sum, \delta_B, q_B, F_B)$ tales que reconocen a A y B, respectivamente. Ahora, construimos un autómata finito determinista $M = (Q, \sum, \delta, q_0, F)$ tal que definido como

   i) $Q = Q_A \times Q_B = \{(q_1, q_2) : q_1 \in Q_A \wedge q_2 \in Q_B\}$
   ii) $\sum =$ es el mismo alfabeto que en M_A y M_B.
   iii) $\delta((q_1, q_2), x) = (\delta_A(q_1, x), \delta_B(q_2, x))$
   iv) $q_0 = (q_1, q_2)$
   v) $F = F_A \times F_B = \{(q_1, q_2) : q_1 \in F_A \wedge q_1 \in F_B\}$

   reconoce a $A \cap B$.
   Entonces sólo queda probar que el lenguaje aceptado por M es igual a $A \cap B$.

   P.D. $L(M) = A \cap B$.

   $\subseteq$) Sea $x \in L(M)$. Entonces $\delta^*(q_0, x) \in F$ de donde $\delta^*((q_1, q_2), x)$ por la definición de q_0. Luego, por la definición de δ^* tenemos que $(\delta^*(q_1, x), \delta^*(q_2, x)) \in F$ por lo que $\delta^*_A(q_1, x) \in F_A$ y $\delta^*_B(q_2, x) \in F_B$. Finalmente, $x \in A$ y $x \in B$. Por lo tanto, $x \in A \cap B$.

   $\supseteq$) Sea $x \in A \cap B$. Entonces $x \in A$ y $x \in B$, de donde $\delta^*_A(q_A, x) \in F_A$ y $\delta^*_B(q_B, x) \in F_B$. Luego, por la definición de F tenemos que $(\delta^*(q_1, x), \delta^*(q_2, x)) \in F$ por lo que $\delta^*((q_A, q_B), x) \in F$ por la definición de δ^*. Finalmente, $\delta^*(q_0, x) \in F$ por la definición de q_0. Por lo tanto, $x \in L(M)$.

   □

4. Demuestra que cualquier conjunto finito de cadenas es un lenguaje regular.

   Demostración: Si A es el conjunto vacío entonces está definido por la expresión regular $\emptyset$, por lo que A es un lenguaje regular. Si A es algún lenguaje finito compuesto por las cadenas s_1, s_2, ..., s_n para algún entero positivo n, entonces está definido por la expresión regular $s_1 + s_2 + ... + s_n$, por lo que A es un lenguaje regular. Por lo tanto, cualquier conjunto finito de cadenas es un lenguaje regular.

   □

5. Demuestra que para todas las cadenas x, $y \in \sum^*$ se cumple $\delta^*(q,\, xy) = \delta^*(\delta^*(q,\, x),\, y)$.

   Demostración: Inducción sobre $|y|$.
   Base de inducción: Veamos que se cumple para $|y| = 0$.
   Si $|y| = 0$ entonces $y = \epsilon$. Luego

$$\begin{aligned}
\delta^*(q, xy) &= \delta^*(q, x\epsilon) && \text{definición de } y \\
&= \delta^*(q, x) && \text{definición de } \epsilon \\
&= \delta^*(q, x\epsilon) && \text{definición de } \epsilon \\
&= \delta^*(\delta^*(q, x), \epsilon) && \text{definición de } \delta^* \\
&= \delta^*(\delta^*(q, x), y) && \text{definición de } y
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, se cumple para $|y| = 0$.

Hipótesis de inducción: Supongamos que se cumple para $0 \leq |y| \leq n$, es decir, que se cumple para $\delta^*(q,\, xy) = \delta^*(\delta^*(q,\, x),\, y)$.

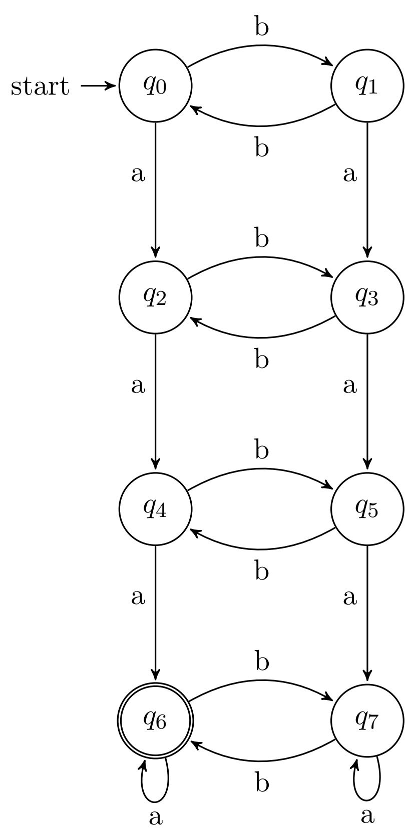
Paso inductivo: Queremos probar que se cumple para $|y| = n + 1$.
Sea $y = za$ con $z \in \sum^*$, $a \in \sum$ y $|z| = n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\delta^*(q, xy) &= \delta^*(q, xza) && \text{definición de } y \\
&= \delta(\delta^*(q, xz), a) && \text{definición de } \delta^* \\
&= \delta(\delta^*(\delta^*(q, x), z), a) && \text{hipótesis de inducción} \\
&= \delta^*(\delta^*(q, x), za) && \text{definición de } \delta^* \\
&= \delta^*(\delta^*(q, x), y) && \text{definición de } y
\end{aligned}$$

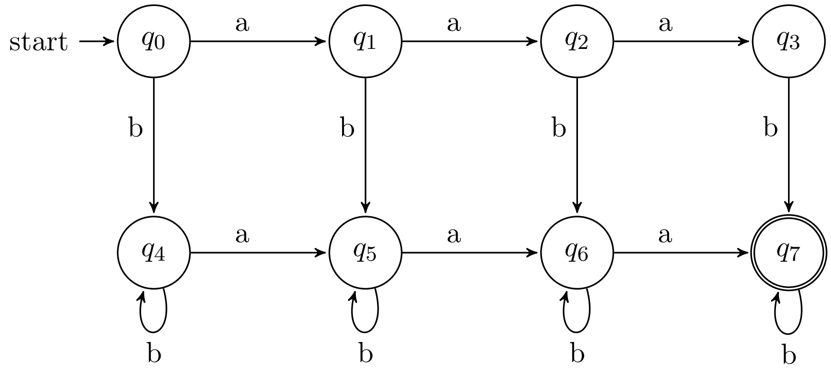
□

6. Para cada uno de los siguientes lenguajes diseña un AFD que lo reconozca:

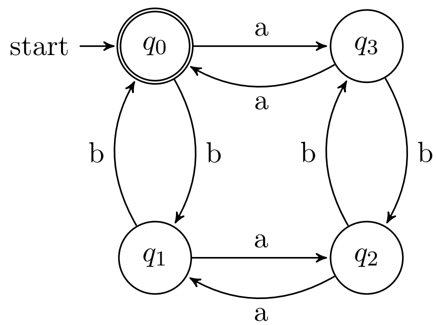
- $\{w \mid w$ contiene al menos tres a y un número par de $b.\}$
  Solución:



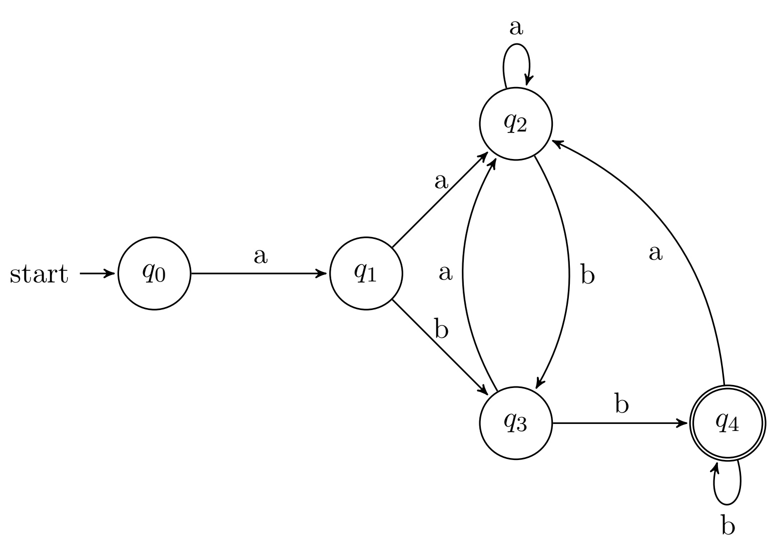
- $\{\ w \mid w$ contiene exactamente tres a y una $b\}$
  Solución:



- $\{w \mid w$ es una cadena de longitud par y contiene un número par de $b\}$
  Solución:

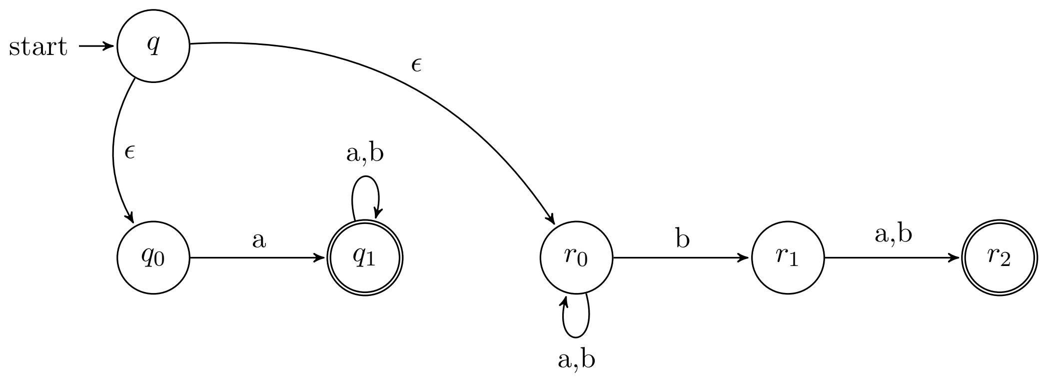


- $\{w \mid w$ empieza con a y termina con dos $b\}$
  Solución:

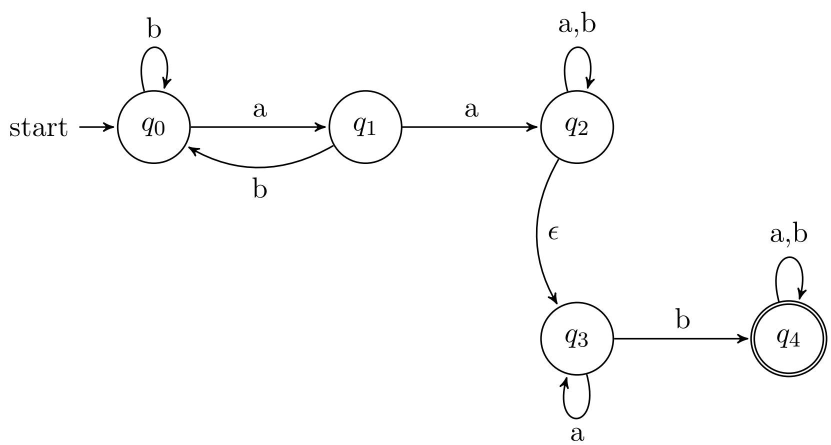


7. Para cada uno de los siguientes lenguajes diseña un AFN (puede o no tener transiciones-ϵ) que lo reconozca:

   - $\{w \mid w$ es una cadena que contiene una a en la primer posición o una b en la penúltima posición$\}$
     Solución:



   - $\{xy \mid x$ contiene la subcadena aa e y contiene una $b\}$
     Solución:



8. Si A es un lenguaje regular, demuestra que $A^R = \{w^R | w \in A\}$.

   Demostración: Supongamos que A es un lenguaje regular. Sea E una expresión regular para A. Vamos a mostrar que hay otra expresión regular E^R tal que $A(E^R) = (A(E))^R$, es decir, el lenguaje de E^R es la reversa del lenguaje E.

   Inducción sobre E.
   Base de inducción:
   Si E es ϵ, $\varnothing$ o un símbolo a, entonces $E^R = E$.
   Paso inductivo:
   Hay tres casos, dependiendo de la forma de E.

   i) $E = F + G$. La reversa de la unión de dos lenguajes se obtiene calculando la reversa de los dos lenguajes y tomando la unión de estos lenguajes. Por lo tanto, $E^R = F^R + G^R$.

   ii) $E = FG$. En general, si una cadena $w \in A(E)$ es la concadenación de $w_1 \in A(F)$ y $w_2 \in A(G)$, entonces $w^R = w_2^R w_1^R$. Por lo tanto $E^R = G^R F^R$.

iii) $E = F^*$. Cada cadena $w \in A(E)$ puede ser escrita como $w_1 w_2 ... w_n$, donde cada $w_i \in A(F)$. Pero $w^R = w_n^R ... w_2^R w_1^R$ y cada $w_i^R \in A(E^R)$, así $w^R \in A((F^R)^*)$.
Inversamente, cada cadena en $A((F^R)^*)$ es de la forma $w_1 w_2 ... w_n$ donde cada w_i es la reversa de una cadena en $A(F)$. La reversa de esta cadena está en $A(F)$ que está en $A(E)$. Por lo tanto, gracias a las observaciones anteriores tenemos que $E^R = (F^R)^*$.

□

9. Elige dos autómatas del ejercicio 6 y minimízalos. También elige un autómata del ejercicio 7 y minimízalo.
Solución:
Del ejercicio 6 escogí los últimos dos autómatas. La minimización la presento a continuación:

i) $\{w \mid w$ es una cadena de longitud par y contiene un número par de $b\}$
Sea $X = \{q_0\}$ el conjunto de estados finales y $Y = \{q_1, q_2, q_3\}$ el conjunto de estados restantes. Entonces obtenemos las siguientes tablas:

	a	b
q_0	Y	Y

	a	b
q_1	Y	X
q_2	Y	Y
q_3	X	Y

.

Como ningún estado tiene caractetísticas en común con algún otro de su conjunto entonces el autómata ya no se puede minimizar más. Por lo tanto, el autómata minimizado es el autómata original.

ii) $\{w \mid w$ empieza con a y termina con dos $b\}$
Sea $X = \{q_4\}$ el conjunto de estados finales y $Y = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ el conjunto de estados restantes. Entonces obtenemos las siguientes tablas:

	a	b
q_4	Y	X

	a	b
q_0	Y	
q_1	Y	Y
q_2	Y	Y
q_3	Y	X

.

Como q_1 y q_2 tienen caractetísticas en común, entonces repetimos el proceso anterior, pero ahora con los siguientes conjuntos: $X = \{q_4\}$, $Y = \{q_0, q_2\}$ y $Z = \{q_1, q_2\}$. Entonces obtenemos las siguientes tablas:

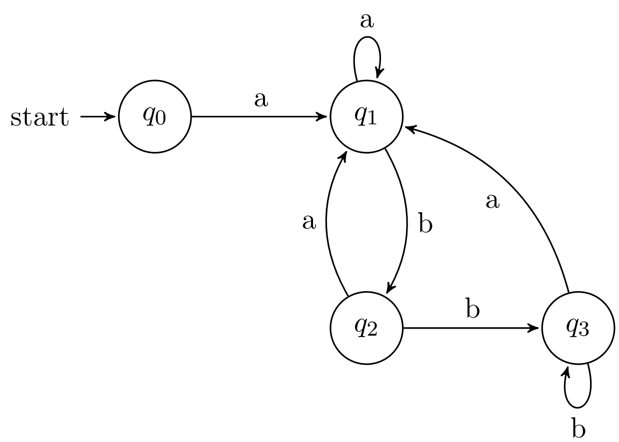
	a	b
q_4	Z	X

	a	b
q_0	Z	
q_3	Z	X

	a	b
q_1	Z	Y
q_2	Z	Y

.

Por lo tanto, el autómata minimizado sería de la siguiente forma:



Del ejercicio 7 escogí el último autómata, y la minimización se presenta a continuación:

i) $\{xy \mid x$ contiene la subcadena aa e y contiene una $b\}$
Primero hallamos las clausuras respecto a ϵ.

- $C - \epsilon(0) = \{q_0\}$
- $C - \epsilon(1) = \{q_1\}$
- $C - \epsilon(2) = \{q_2\} \cup \{q_3\}$
- $C - \epsilon(3) = \{q_3\}$
- $C - \epsilon(4) = \{q_4\}$

Luego, elaboramos la tabla de transiciones del $AFN - \epsilon$.

Q	ϵ	a	b
q_0	$\varnothing$	q_1	q_0
q_1	$\varnothing$	q_2	q_0
q_2	q_3	q_2	q_2
q_3	$\varnothing$	q_3	q_4
q_4	$\varnothing$	q_4	q_4

.

Ahora, hacemos una tabla de conversion para eliminar las transiciones-ϵ.

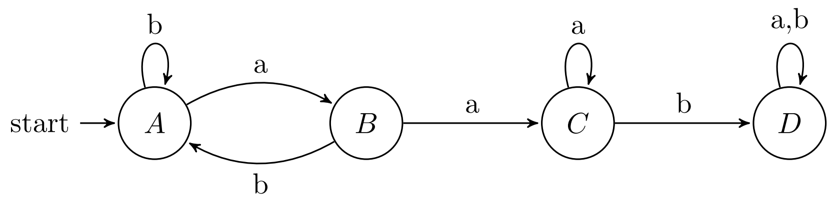
Q	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2\} \cup \{q_3\}$	$\{q_0\}$
$\{q_2\} \cup \{q_3\}$	$\{q_2\} \cup \{q_3\}$	$\{q_2\} \cup \{q_4\} \cup \{q_3\}$
$\{q_2\} \cup \{q_4\} \cup \{q_3\}$	$\{q_2\} \cup \{q_4\} \cup \{q_3\}$	$\{q_2\} \cup \{q_4\} \cup \{q_3\}$

Así, tenemos que $A = \{q_0\}$, $B = \{q_1\}$, $C = \{\{q_2\} \cup \{q_3\}\}$ y $D = \{\{q_2\} \cup \{q_4\} \cup \{q_3\}\}$. De donde obtenemos la siguiente tabla:

Q	a	b
A	B	A
B	C	A
C	C	D
D	D	D

.

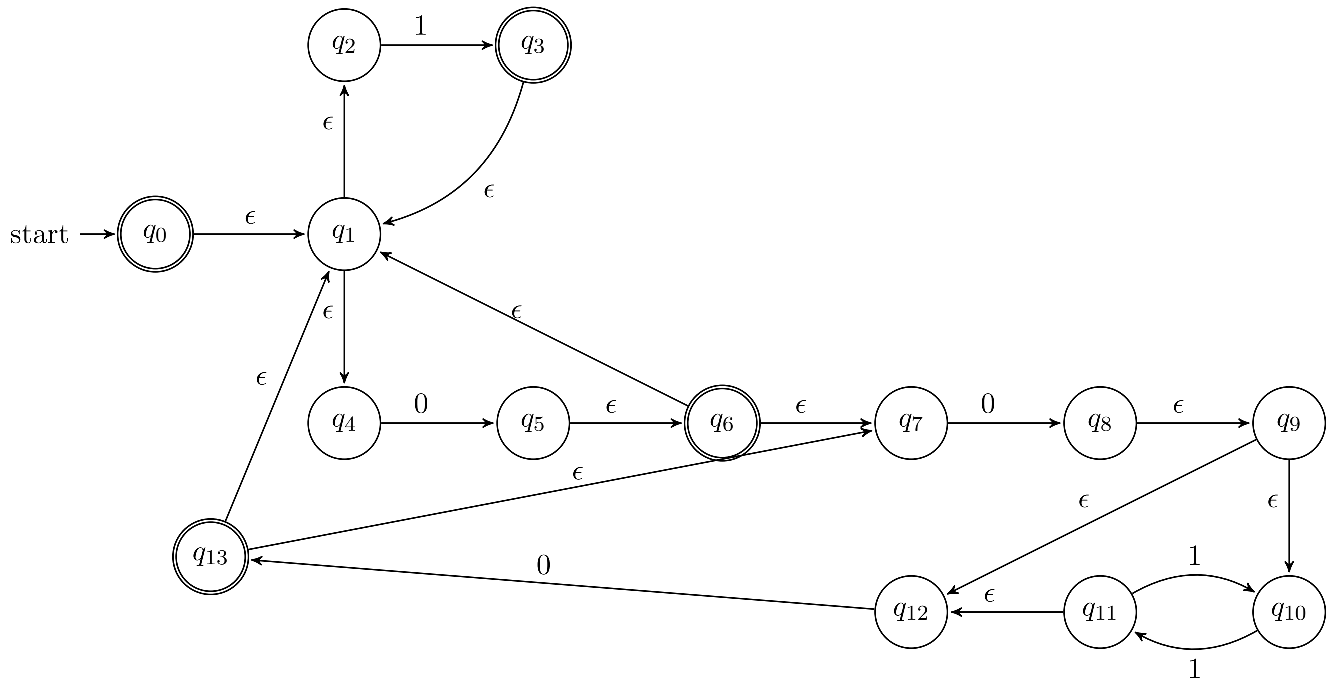
Por lo tanto, el autómata minimizado es de la siguiente forma:



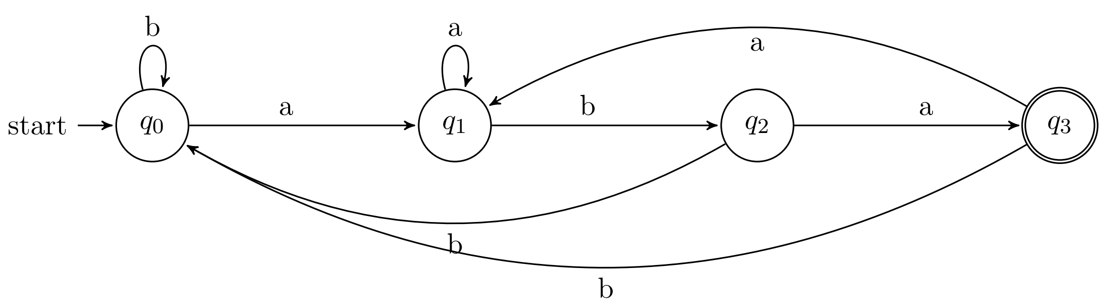
10. Expresiones regulares:

   - Da una expresión regular que genere cada uno de los lenguajes del ejercicio 6.
     - $\{w \mid w$ contiene al menos tres a y un número par de $b.\}$
       Solución: $(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*(bb)^*(a+b)^*+$
       $(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*(bb){*}(a+b)^*a(a+b)^*+$
       $(a+b)^*a(a+b)^*(bb)^*(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*+$
       $(a+b)^*(bb)^*(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*$.
     - $\{w \mid w$ contiene exactamente tres a y una $b\}$
       Solución: $(aaab) + (aaba) + (abaa) + (baaa)$
     - $\{w \mid w$ es una cadena de longitud par y contiene un número par de $b\}$
       Solución: $((bb)^*(a+b)(bb)^*(a+b)(bb)^*)^*$
     - $\{w \mid w$ empieza con a y termina con dos $b\}$
       Solución: $a(a+b)^*bb$

- Construye un autómata finito (puede ser no determinista) que reconozca el lenguaje generado por la expresión $(1 + 0(01^*0)^*)^*$.
Solución:



- Construye un AFN que reconozca el lenguaje generado por la expresión $(a + b)^*aba$.
Solución:



11. Usando el lema del bombeo, prueba que los siguientes lenguajes no son regulares.

- $\{x \mid x \text{ es una cadena palíndroma}\}$

Demostración: Veamos que L no es regular.

i) Sea $k \geq 0$.
ii) $xyz = 0^k1^k0^k$ con $x = \epsilon$, $y = 0^k$ y $z = 1^k0^k$.
iii) Ten u, v, w tales que $y = uvw$ con $v \neq \epsilon$.
iv) Sea $i = 2$. Entonces $|uv^iw| > k$ por lo que $xuv^iwz \notin L$.

Por lo tanto, L no es un lenguaje regular.

□

- $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

  Demostración: Veamos que L no es regular.

  i) Sea $k \geq 0$.
  ii) $xyz = a^{2^k}$ con $x = a^n$, $y = a^m$, $z = a^p$ tal que $n + m + p = 2^k$.
  iii) Ten u, v, w tales que $y = uvw$ con $v \neq \epsilon$.
  iv) Sea $i = 2$. Entonces $|uv^iw| > k$ por lo que $xuv^iwz \notin L$.

  □

- $\{x \mid x$ tiene el mismo número de a y $b\}$

  Demostración: Veamos que L no es un lenguaje regular.

  i) Sea $k \geq 0$.
  ii) $xyz = a^kb^k$ con $x = \epsilon$, $y = a^k$ y $z = b^k$.
  iii) Ten u, v, w tales que $y = uvw$ con $v \neq \epsilon$.
  iv) Sea $i = z$. Entonces $|uv^iw| > k$ por lo que $xuv^iwz \notin L$.

  Por lo tanto, L no es un lenguaje regular.

  □

12. Utilizando el teorema de Myhill-Nerode demuestra que cada uno de los lenguajes del inciso anterior no son regulares.

- $\{x \mid x$ es una cadena palíndroma$\}$

  Demostración: Primero tomamos dos cadenas cualesquiera, sean $x = a^ib$ y $y = a^jb$ con $i \neq j$. Ahora, sea $z = a^i$. Entonces $xz = a^iba^i \in L$ pues xz es palíndroma pero $yz = a^jba^i \notin L$ ya que yz no es palíndroma.
  Por lo tanto, L no es un lenguaje regular.

  □

- $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

  Demostración: Primero tomamos dos cadenas cualesquiera, sean $x = a^{2^i+1}$ y $y = a^{2^j+2}$, con $i \neq j$. Ahora, sea $z = a^{2^i+3}$. Entonces $xz = a^{2^{i+1}+4} \in L$ pues $2^{i+1} + 4$ es claramente par, pero $yz = a^{2^i+2^j+5} \notin L$ ya que $2^i + 2j + 5$ es impar porque dos números pares más uno impar da como resultado un número impar.
  Por lo tanto, L no es un lenguaje regular.

  □

- $\{x \mid x$ tiene el mismo número de a y $b\}$

  Demostración: Primero tomamos dos cadenas cualesquiera, sean $x = a^i$ y $y = a^j$, con $i \neq j$. Ahora, sea $z = b^i$. Entonces $xz = a^ib^i \in L$ pues xz tiene el mismo número de a y b pero $yz = a^jb^i \notin L$ ya que yz no tiene el mismo número de a y b.
  Por lo tanto, L no es un lenguaje regular.

  □