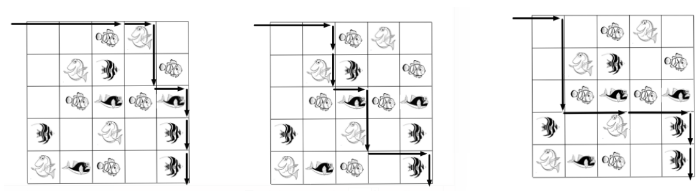
Facultad de Ciencias, UNAM
Análisis de Algoritmos
Tarea 3

Rubí Rojas Tania Michelle

11 de diciembre de 2020

1. Un pescador está sobre un océano rectangular. El valor del pez en el punto (i, j) está dado por un arreglo A de dimensión $2(n \times m)$. Diseña un algoritmo que calcule el máximo valor de pescados que un pescador puede atrapar en un camino desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha. El pescador sólo puede moverse hacia abajo o hacia la derecha, como se ilustra en la siguiente figura:



SOLUCIÓN: Queremos encontrar el máximo valor de peces que podemos obtener al realizar únicamente movimiéntos hacia la derecha y hacia abajo. Así, nuestro objetivo será modificar la matriz A de tal manera que en cada sub-instancia del problema tengamos en $A[i][j]$ el valor máximo de pescaditos que el pescador puede atrapar desde $A[0][0]$ hasta $A[i][j]$ realizando sólo dos tipos de movimiéntos. De esta forma, al tener cada celda de A actualizada como describimos anteriormente, al final bastará regresar el valor de $A[n-1][m-1]$, pues ésta contendrá el valor máximo de pescaditos que deseamos.

Así, consideremos los siguientes puntos:

- El caso base sería que la celda $A[0][0]$ no puede ser actualizada. Esto se debe a que el valor en esa celda es el máximo que el pescador puede obtener si va desde $A[0][0]$ a $A[0][0]$ (no se mueve).
- Para el primer renglón de A, bastará con ir obteniéndo la suma acumulada de la celda inmediatamente a la izquierda de la actual. Si pensamos que el pescador se está moviéndo siempre hacia la derecha en la primer fila, es decir, el pescador sólo se mueve sobre $A[0][j]$ con $j \in \{0, \ldots, m-1\}$; entonces

$$A[0][j] = A[0][j-1] + A[0][j]$$

  Esto se debe a que al sumar el valor de la celda actual que tiene el valor del pez en ese lugar, junto con el máximo que puede obtener el pescador moviéndose solamente hacia la derecha desde $M[0][0]$ hasta una celda previa que ya contiene el máximo, entonces obtenemos el valor deseado.

  Demostración. Inducción sobre la columna j.

  - Caso base. Cuando $j = 0$, entonces $A[0][0]$ tiene ya el máximo valor que el pescador puede obtener (por el punto anterior).
  - Hipótesis de inducción. Supongamos que se cumple para k, es decir, supongamos que $A[0][k]$ tiene el valor máximo que el pescador puede obtener moviéndose siempre a la derecha sobre el primer renglón hasta ese punto.

- Paso inductivo. Queremos probar que se cumple para $A[0][k+1]$. Entonces

$$A[0][k+1] = A[0][k] + A[0][k+1] \qquad\qquad \text{por definición}$$

  Por hipótesis de inducción tenemos que $A[0][k]$ tiene el valor máximo que el pescador puede obtener moviéndose a la derecha desde $A[0][0]$ hasta $A[0][k]$. Así, para obtener el máximo hasta la celda que le sigue a la derecha, basta con sumarle el valor que tiene actualmente. Por lo tanto, si actualizamos $A[0][k+1]$ con $A[0][k] + A[0][k+1]$ entonces obtendremos el valor máximo hasta este punto.

Por lo tanto, si hacemos que $A[0][j] = A[0][j-1] + A[0][j]$, entonces obtendremos en cada celda del primer renglón el valor máximo que el pescador puede conseguir moviéndose siempre a la derecha sobre el primer renglón.

□

- De manera análoga, tenemos el caso para la primer columna de A. Será suficiente con ir obteniéndo la suma acumulada de la celda inmediatamente arriba de la actual. Si pensamos que el pescador siempre se está moviéndo hacia abajo en la primer columna, es decir, el pescador sólo se mueve sobre $A[i][0]$ con $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$; entonces

$$A[i][0] = A[i-1][0] + A[i][0]$$

Esto se debe a que al sumar el valor de la celda actual que tiene el valor del pez en ese lugar, junto con el máximo que puede obtener el pescador moviéndose solamente hacia abajo desde $A[0][0]$ hasta una celda previa que ya contiene el máximo, entonces obtenemos el valor deseado.

Demostración. Inducción sobre el renglón i.

- Caso base. Cuando $i = 0$, entonces $A[0][0]$ tiene ya el máximo valor que el pescador puede obtener (por el primer punto).
- Hipótesis de inducción. Supongamos que se cumple para k, es decir, supongamos que se cumple que $A[k][0]$ tiene el valor máximo que el pescador puede obtener moviéndose siempre hacia abajo sobre la primer columna hasta ese punto.
- Paso inductivo. Queremos probar que se cumple para $A[k+1][0]$. Entonces

$$A[k+1][0] = A[k][0] + A[k+1][0] \qquad\qquad \text{por definición}$$

  Por hipótesis de inducción tenemos que $A[k][0]$ tiene el valor máximo que el pescador puede obtener moviéndose a la derecha desde $A[0][0]$ hasta $A[k][0]$. Así, para obtener el máximo hasta la celda que le sigue abajo, basta con sumarle el valor que tiene actualmente. Por lo tanto, si actualizamos $A[k+1][0]$ con $A[k][0] + A[k+1][0]$, entonces obtendremos el valor máximo hasta este punto.

Por lo tanto, si hacemos que $A[i][0] = A[i-1][0] + A[i][0]$, entonces obtendremos en cada celda de la primer columna el valor máximo que el pescador puede conseguir moviéndose siempre hacia abajo sobre la primer columna.

□

- Para actualizar la parte de la matriz A que falta, entonces es suficiente considerar el valor actual de cada celda que contiene el valor del pez en ese lugar del océano junto con el máximo valor en las celdas inmediatamente arriba y a la izquierda de la actual, es decir,

$$A[i][j] = A[i][j] + max\,\{A[i-1][j], A[i][j-1]\}$$

Esto lo haremos para las entradas (i, j) con $i \in \{1, \ldots, n-1\}, j \in \{1, \ldots, j-1\}$.
Mostraremos que gracias a esta expresión, cada celda tendrá el valor máximo que el pescador puede conseguir moviéndose desde $M[0][0]$ hasta $M[i][j]$ con movimiéntos únicamente hacia la derecha o hacia abajo.

Demostración. Inducción sobre el renglón i.

- Caso base. Como $i = 1$, entonces debemos mostrar que

$$A[1][j] = A[1][j] + max\,\{A[0][j], A[1][j-1]\}$$

  Demostración. Inducción sobre la columna j.

  - Caso base. Como $j = 1$, entonces

  $$A[1][1] = A[1][1] + max\,\{A[0][1], A[1][0]\}$$

    Así, tendremos que $A[1][1]$ contiene el máximo valor que el pescador puede conseguir moviéndose solamente a la derecha o hacia abajo desde $A[0][0]$ y hasta $A[1][1]$. Por las demostraciones anteriores sabemos que $A[0][1]$ ya tiene el máximo valor que puede conseguir el pescador moviéndose solamente hacia la derecha de la posición inicial y $A[1][0]$ ya tiene el máximo valor que puede conseguir el pescador moviéndose solamente hacia abajo desde $A[0][0]$. Entonces basta con sumarle el valor de la celda actual $A[1][1]$ al valor más grande de las dos opciones que se tienen por la restricción de los movimientos para obtener el valor máximo deseado. Por lo tanto, este caso se cumple.
  - Hipótesis de inducción. Supongamos que se cumple para k, es decir, supongamos que $A[1][k]$ tiene el valor máximo que el pescador puede obtener moviéndose con las restricciones dadas hasta ese punto desde $A[0][0]$.
  - Paso inductivo. Queremos probar que se cumple para $A[1][k+1]$. Entonces

  $$A[1][k+1] = A[1][k+1] + max\,\{A[0][k+1], A[1][k]\} \qquad \text{por definición}$$

    Por el paso inductivo del primer renglón tenemos que $A[0][k+1]$ ya tiene el máximo valor que puede obtener el pescador moviéndose solamente hacia la derecha. Luego, por hipótesis de inducción, $A[1][k]$ ya tiene el máximo valor que el pescador puede obtener moviéndose con las restricciones dadas hasta ese punto desde $A[0][0]$. Así, al considerar el valor máximo de estos dos óptimos, se obtiene el óptimo al moverse a la derecha o hacia abajo desde $A[0][0]$; y solo falta sumar el valor actual de $A[1][k+1]$ para obtener el máximo valor deseado.

  □

- Hipótesis de inducción. Supongamos que se cumple para k, es decir, supongamos que $A[k][j]$ tiene el valor máximo que el pescador puede obtener moviéndose hacia abajo o hacia la derecha desde $A[0][0]$ hasta $A[k][j]$.
- Paso inductivo. Queremos mostrar que se cumple para $k+1$. Entonces

$$A[k+1][j] = A[k+1][j] + max\,\{A[k][j], A[k][j-1]\}$$

  Por hipótesis de inducción tenemos que $A[k][j], A[k][j-1]$ tienen ya el valor máximo que el pescador puede obtener moviéndose hacia abajo o hacia la derecha desde $A[0][0]$ hasta $A[k][j]$ y $A[k][j-1]$, respectivamente. Así, al considerar el valor máximo de estos dos, se obtiene el óptimo deseado. Así, sumando el valor actual de $A[k+1][j]$ obtenemos el valor máximo buscado.

Por lo tanto, cada entrada (i, j) de la matriz A con $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ tendrá el valor máximo que el pescador puede obtener moviéndose solamente a la derecha o hacia abajo desde el punto inicial $A[0][0]$ si

$$A[i][j] = A[i][j] + max\,\{A[i-1][j], A[i][j-1]\}$$

□

Esto lo podemos traducir como el siguiente algoritmo:

1. Definimos $i = j = 0$.
2. Mientras j sea menor que m, hacemos
$$A[0][j] = A[0][j-1] + A[0][j]$$
Aumentamos en una unidad a j.
3. Mientras i sea menor que n, hacemos
$$A[i][0] = A[i-1][0] + A[i][0]$$
Aumentamos en una unidad a i.
4. Definimos $i = j = 1$.
5. Mientras i sea menor que n, hacemos
    - Mientras j sea menor que m, hacemos
    $$A[i][j] = A[i][j] + max\,\{A[i-1][j], A[i][j-1]\}$$
    Aumentamos en una unidad a j.

    Aumentamos en una unidad a i.
6. Regresamos $A[n-1][m-1]$.

Ahora bien, los ciclos `while` de los pasos 2 y 3 nos toman $\Theta(m)$ y $\Theta(n)$, respectivamente; pues estamos recorriendo una sola vez un renglón y una columna. Y el ciclo `while` del paso 5 nos toma $\Theta(nm)$, ya que estamos recorriendo lo que queda de la matriz A (entrada por entrada). Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo es de $\Theta(nm)$.

2. Dados dos árboles generadores T y R de una gráfica G. Muestra cómo encontrar la secuencia más corta de árboles generadores $T_0, T_1, \ldots, T_k$ tal que $T_0 = T, T_k = R$, y cada árbol T_i difiere del anterior T_{i-1} agregando y borrando una arista.

3. Sea G una gráfica con n vértices. Un subconjunto S de los vértices de G es independiente si cualesquiera dos elementos de S no son adyacentes. En general, el problema de encontrar el conjunto independiente de una gráfica es un problema $NP-$completo. Pero en algunos casos, este problema puede resolverse eficientemente. Sea T un árbol con raíz con n vértices. Cada nodo $v \in T$ tiene asociado un peso $w(v)$. Utilizándo programación dinámica, encuentre un algoritmo de tiempo lineal para encontrar el conjunto independiente de T de peso máximo.

    Solución: Queremos encontrar el conjunto de vértices en el árbol T tal que ninguno de sus vértices es adyacente a otro y que maximiza la suma de los pesos de los nodos, es decir, el conjunto V de vértices tal que para ningún par de ellos existe alguna arista que los conecte y que maximiza la suma de los pesos de los nodos. Para ello, caractetizaremos la substructura óptima del problema para resolverlo usando programación dinámica. Consideraremos cada subárbol de T como un subproblema, y por lo tanto nuestro objetivo es relacionar la solución de todo el árbol con las soluciones de los subárboles. De esta forma, notemos que si denotamos a la raíz del árbol como un vértice arbitrario v, entonces hay dos posibilidades:

    - El vértice v forma parte del conjunto independiente de peso máximo de T. Esto implica que los hijos de v no pueden pertenecer al conjunto deseado, pues sabemos que los vértices no deben de estar conectados por alguna arista. Así, este conjunto consiste en v más la unión de los conjuntos independientes de peso máximo de los subárboles de los nietos de v.
    - El vértice v no forma parte del conjunto independiente de peso máximo de T. Entonces este conjunto es simplemente la unión de los conjuntos independientes de peso máximo de los subárboles de los hijos de v.

Con estas dos observaciones es posible escribir nuestro paso recursivo: Sea $T(v)$ la longitud (peso) del conjunto independiente de peso máximo en el subárbol cuya raíz es v, entonces

$$T(v) = \begin{cases} w(v) & \text{si } v \text{ es una hoja} \\ max \left\{ w(v) + \sum_{x \,\in\, \text{nietos de } v} T(x), \sum_{x \,\in\, \text{hijos de } v} T(x) \right\} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

Mostraremos que $T(v)$ es correcto.

Demostración. Inducción sobre el vértice v.

- Caso base. Si v es una hoja, entonces $T(v) = w(v)$. Esto es correcto ya que no tiene subárboles que contengan un conjunto independiente de peso máximo, por lo que este único vértice es el conjunto de peso máximo que buscamos.
- Hipótesis de inducción. Supongamos que esta función se cumple para k, es decir, supongamos que

$$T(k) = max \left\{ w(k) + \sum_{x \,\in\, \text{nietos de } k} T(x), \sum_{x \,\in\, \text{hijos de } k} T(x) \right\}$$

  contiene el tamaño del conjunto independiente de peso máximo en el subárbol cuya raíz es k.
- Paso inductivo. Veamos que esto se cumple para $k+1$. Entonces

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + 1 && T \text{ abre sumas} \\ &= T(k) + w(u) && \text{un vértice } u \text{ más} \\ &= max \left\{ w(k) + \sum_{x \,\in\, \text{nietos de } k} T(x), \sum_{x \,\in\, \text{hijos de } k} T(x) \right\} + w(u) && \text{H.I} \end{aligned}$$

  Por hipótesis de inducción, tenemos que $T(k)$ tiene el tamaño del conjunto independiente de peso máximo en el subárbol cuya raíz es k. Así, al sumar el peso del vétice $w(u)$ estamos obteniéndo el tamaño máximo del conjunto independiente de peso máximo en el subárbol cuya raíz es $k+1$.

Por lo tanto, el algoritmo es correcto.

□

Así, gracias a la programación dinámica, efectivamente 1 regresa el conjunto independiente de peso máximo de T.

Ahora bien, veamos que este algoritmo es de tiempo lineal. Notemos que debemos calcular el peso máximo del conjunto independiente que tiene cada vértice del árbol como raíz una sola vez. En las siguientes veces que se desee consultar el valor, este ya estará almacenado en el arreglo de programación dinámica T y podemos indexarlo y regresar su valor en tiempo constante. Así, calcularlos toma tiempo $O(n)$ porque hay n nodos en el árbol T. Luego, para cada vértice, el algoritmo sólo mira a sus hijos y a sus nietos; por lo que cada vértice v se mira sólo tres veces: cuando lo miramos como raíz, cuando lo miramos como hijo y cuando lo miramos como nieto. Así, a cada nodo lo miramos un número constante de veces y sólamente en una ocasión (la primera) es cuando hacemos la llamada para calcular su valor. Por lo tanto, la complejidad total de nuestro algoritmo es $O(|V|)$.

4. Mientras caminas por la playa encuentras un cofre de tesoros. El cofre contiene n tesoros con pesos $w_i, \ldots, w_n$ y valores $v_1, \ldots, v_n$. Desafortunadamente, sólo tienes una maleta que sólo tiene capacidad de carga M. Afortunadamente, los tesoros se pueden romper si es necesario. Por ejemplo, la tercera parte de un tesoro i tiene peso $\frac{w_i}{3}$ y valor $\frac{v_i}{3}$.

- Describe un algoritmo voraz de tiempo $\theta(n \log n)$ que resuelve este problema.

  Solución: Como podemos romper los tesoros, entonces una buena idea para atacar este problema es calcular el valor del costo unitario de cada uno de los n tesoros que encontremos, esto con el objetivo de poder seleccionar aquellos tesoros que nos aportan mayor valor y tienen un menor peso. Luego, ordenamos los tesoros, en orden descendente, de acuerdo a su valor de costo unitario. Lo ordenamos de esta forma para ir tomándo siempre a los tesoros que nos aportan mayor valor en tiempo constante. Después, iremos metiéndo a la mochila los tesoros enteros que están al inicio de la lista ordenada si el peso de éstos no es mayor a la capacidad de la mochila. En otro caso, partimos el tesoro actual que intentamos meter para quedarnos sólo con una fracción del mismo. De esta forma, metemos a la mochila todos los tesoros con mayor costo unitario que podamos, y cuando ya no sea posible meter más tesoros enteros, simplemente cortamos el tesoro final en la fracción que nos falta. Terminamos cuando llenamos completamente la mochila.

  Así, esto se traduce al siguiente algoritmo:

  1. Obtenemos el valor del costo unitario de cada uno de los n tesoros, es decir, calculamos

     $$u_i = \frac{v_i}{w_i} \qquad \text{con } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

  2. Ordenamos los n tesoros, en orden descendente, de acuerdo a su valor de costo unitario u_i. Así, supongamos que esta nueva lista es de la forma

     $$l = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

  3. Sean M la capacidad de la mochila y c la capacidad actual de la misma en un momento dado. Escogemos el tesoro t_i con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de la lista l.
     - Si $c \geq w_i$, entonces metemos al tesoro t_i a la mochila (pues podemos cargar con la totalidad del tesoro) y la capacidad actual es actualizada como $c = c - w_i$.
     - Si $c < w_i$, entonces tomamos únicamente una parte del tesoro t_i. Esta fracción será lo que nos falte para terminar de llenar la mochila, es decir, tomamos la parte $\frac{c_i}{w_i}$ del tesoro. Terminamos.

  Este algoritmo funciona porque siempre garantizamos que metemos a la mochila los tesoros con mayor costo unitario, lo que implica que siempre metemos a aquellos tesoros que nos aportan mayor valor con menos peso. Metemos a los primeros k tesoros con mayor costo unitario (de esta forma, obtenemos la mayor ganancia en tesoros con el menor peso) hasta llenar la mochila. Los $k-1$ tesoros que elegimos se meten enteros a la mochila, mientras que el $k-$ésimo elemento termina de llenar la mochila con la parte fraccional que falta. De esta forma, como tomamos únicamente a los que nos aportan mayor costo unitario, logramos maximizar el valor de los tesoros que metemos a la mochila.

  Ahora bien, calcular el valor de costo unitario para cada uno de los n tesoros nos toma tiempo lineal, ya que recorremos toda la lista de los n tesoros. Ordenar la lista usando `HeapSort` nos toma $\Theta(n \log n)$. Luego, en el peor de los casos, se verifica que cada uno de los n tesoros entre en la mochila, por lo que esto nos tomará tiempo lineal, pues recorremos toda la lista de los tesoros. Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo es $\Theta(n \log n)$.

- ¿Se puede mejorar el tiempo de ejecución de tu algoritmo a $\theta(n)$? Si es un no, explica por qué; si es un sí, menciona el cambio.

  Solución: Sí es posible mejorar la complejidad, y para lograrlo seguiremos el siguiente algoritmo

  1. Obtenemos el valor del costo unitario de los n tesoros, esta vez sin ordenarlos. Así, supongamos que el conjunto de valores unitarios es

     $$\rho = \{\frac{v_1}{w_1}, \ldots, \frac{v_n}{w_n}\}$$

  2. Encontramos la mediana del conjunto ρ usando el algoritmo Select, visto en clase. Recordemos que Select funciona de la siguiente manera:

a) Separar a los n elementos en $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ grupos de 5 elementos cada uno (a lo más un grupo de tamaño $n \pmod 5$)).

b) Encontrar la mediana de cada uno de los $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ grupos (los cuales están ordenados por inserción y tomamos al elemento de enmedio; si el grupo tiene un número par de elementos, tomamos a la mayor de las medianas)

c) Usamos SELECT recursivamente para encontrar la mediana x del conjunto de $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ medianas encontradas en el paso anterior (si el conjunto de medianas es de longitud par, entonces tomamos la más pequeña).

d) Luego, dividimos el conjunto de entrada con elemento pivote x (la mediana de las medianas) usando el algoritmo PARTITION (del algoritmo QuickSort). Sea k el número de elementos en la parte inferior de la partición, de manera que x es el $k-$ésimo elemento y $n-k$ es el número de elementos en la parte superior.

e) Si $i = k$, entonces regresamos a x. En otro caso, usamos SELECT recursivamente para encontrar el $i-$ésimo elemento más pequeño en el lado inferior si $i < k$, o el $(i-k)-$ésimo elemento más pequeño en el lado superior si $i > k$.

Definimos a m como la mediana del conjunto ρ.

3. Creamos tres nuevos conjuntos C_1, C_2, C_3 tal que
   - C_1 tendrá los costos unitarios cuyos valores sean estrictamente mayores a la mediana m, es decir,
   $$C_1 = \{\frac{v_i}{w_i} \mid \frac{v_i}{w_i} > m, 1 \leq i \leq n\} \qquad \text{con } W_1 = \sum_{i \in C_1} w_1$$
   Este conjunto se refiere a los tesoros que nos conviene tener, pues tienen mayor valor por unidad.
   - C_2 tendrá los costos unitarios cuyos valores sean igual a la mediana m, es decir,
   $$C_2 = \{\frac{v_i}{w_i} \mid \frac{v_i}{w_i} = m, 1 \leq i \leq n\} \qquad \text{con } W_2 = \sum_{i \in C_2} w_i$$
   - C_3 tendrá los costos unitarios cuyos valores sean estrictamente menores a la mediana m, es decir,
   $$C_3 = \{\frac{v_i}{w_i} \mid \frac{v_i}{w_i} < m, 1 \leq i \leq n\} \qquad W_3 = \sum_{i \in C_3} w_i$$
4. De esta forma,
   - Si $W_1 > M$, es decir, si la suma de los costos unitarios de los tesoros en el conjunto C_1 es mayor que la capacidad de la mochila, entonces aplicamos recursivamente el algoritmo sobre el conjunto C_1 para quedarnos con los tesoros que valen más.
   - Sino, mientras no excedamos la capacidad de la mochila y C_2 no sea vacío, entonces vamos metiéndo los tesoros del conjunto C_2 (cuyo costo unitario es igual a la mediana m) a la mochila.
     - Si se llena la mochila, entonces regresamos los los tesoros correspondientes al conjunto C_1 y a los tesoros que logramos agregar del conjunto C_2.
     - Sino, reducimos la capacidad de la mochila en $W_1 + W_2$, pues estamos considerándo los tesoros correspondientes a C_1 y C_2. Como aún hay espacio en la mochila, entonces hacemos recursión sobre el conjunto C_3; lo que hará que regresemos los tesoros en los conjuntos C_1, C_2 y los que logremos agregar a la mochila del conjunto C_3 durante esa llamda recursiva.

   Este algoritmo funciona porque gracias a la obtención de la mediana podemos encontrar a aquellos tesoros cuyo costo unitario es el mayor (éstos son aquellos que nos importan). De esta forma, podemos garantizar que siempre vamos agregándo a la mochila aquellos tesoros que nos conviene meter a la mochila. Vamos revisándo conjunto por conjunto para poder seleccionar los tesoros que queremos, los cuales son aquellos que son mayores a la mediana (si logramos tomar todo el

conjunto, entonces los siguientes que nos convienen son los que son iguales a la mediana, y así sucesivamente). Gracias a las llamadas recursivas logramos ir metiéndo los tesoros que más nos convienen en ese momento, esto mientras haya lugar en la mochila. Así, podemos obtener los tesoros que maximizan la ganancia.
Ahora bien, obtener el valor del costo unitario de cada uno de los n tesoros nos toma $\Theta(n)$, pues siemore debemos recorrer toda la lista de tesoros. Encontrar la mediana de un conjunto de tamaño n nos toma $O(n)$, por lo visto en clase. Crear los nuevos tres conjuntos nos toma $\Theta(n)$, pues basta con recorrer el arreglo para poder colocar a cada uno de los valores en el nuevo conjunto que le corresponde. Luego, el paso recursivo considera a lo más la mitad del conjunto actual (por cómo están separados los conjuntos), por lo que la función de recurrencia sería

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

donde $O(n)$ corresponde a las observaciones anteriores. Así, esta recurrencia podemos resolverla utilizándo el Teorema Maestro:
Como nuestra expresión es de la forma

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k$$

donde a, b, c, k son constantes, entonces podemos solucionar la recurrencia como sigue:
Si $a = 1, b = 2, c = 1, k = 1$, se cumple que

$$a < b^k = 1 < 2^k$$

por lo que $T(n) \in \Theta(n^k)$ y obtenemos la solución $\Theta(n^1) = \Theta(n)$. Así, la complejidad total de nuestro algoritmo es $\Theta(n)$.

5. Un grupo de n personas quiere comprar un ramo de m flores, cada flor va a tener un costo asociado c_i, pero si un cliente ha comprado c veces entonces el dueño del puesto le vende la flor i en costo $(c+1)v_i$. Diseña un algoritmo que en tiempo $O(m \log m)$ minimice el costo de comprar todas las flores.

   Solución: Sabemos que entre más flores compre una persona más grande será el costo que tendrá que pagar, por lo que el objetivo es minimizar el número máximo de flores que cualquier persona compra, esto para que las compras se distribuyan lo más uniformemente posible. Además, debemos optimizar el órden en que compramos las flores, por lo que tenemos que comprar primero las flores más caras (el costo adicional que necesitamos pagar después es lineal en c_i). Así, podemos intuir que primero debemos ordenar las flores (en órden descendente) de acuerdo a su costo c_i; y después distribuirlas uniformemente entre las personas que compran las más caras primero. Siguiéndo esta idea, planteamos el siguiente algoritmo:

   1. Ordenamos las m flores, en órden descendente, de acuerdo a su costo asociado c_i. Supongamos que la lista ordenada es de la siguiente forma:

   $$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$$

   2. Definimos una variable `cc=0`, la cual se encargará de llevar el valor del costo de comprar todas las flores. Además, definimos una variable `ad = 0`, la cual se encargará de indicar cuál es el costo adicional que debemos agregarle al costo de nuestras flores actuales.
      - Si el número de flores es menor o igual al número de personas, entonces regresamos la suma del costo de todas las flores, es decir,

      $$cc = c_1 + c_2 + \ldots + c_m$$

      - En otro caso, mientras $i = 0$ sea menor que m hacemos:

- Sumamos el valor del costo de las primeras m flores dentro de la lista C (pues el valor adicional es 0); luego sumamos el valor del costo de las siguientes m flores, pero multiplicándo el costo de cada una de las flores por $[ad + 1]$ con $i \in \{1, 2, \ldots\}$, y así sucesivamente. Esto se puede modelar con lo siguiente:

  ```
  cc += (ad + 1) * C[i]
  ```
- Si $i + 1 \pmod{n}$ es igual a cero, esto implica que hemos agregado ya las n flores y debemos aumentar en una unidad nuestro costo adicional.
- Incrementamos en una unidad a nuestra variable i.

- Regresamos `cc`.

Este algoritmo funciona porque siempre garantizamos que las flores con un costo asociado más grande sean las que tengan un valor adicional menor. Como tenemos una lista C con los costos ordenados, entonces podemos acceder a las flores con mayor valor en tiempo constante. El caso trivial es cuando el número de flores m es menor o igual que el número de personas, ya que podemos darle a lo más a cada persona una flor, así que nuestro costo adicional siempre es 0 y esto resulta en sumar los costos de todas las flores m. Luego, cuando $m > n$ lo que hacemos es darle las primeras n flores a cada una de las n personas, donde el costo adicional es de 0 (pues es la primer flor). Posteriormente, le damos las siguientes n flores a cada una de las n personas, lo que implica que nuestro costo adicional aumentará en una unidad y serán más caras que su precio original (pero como está ordenada la lista C entonces sabemos que la suma de estos nuevos costos no es más grande que si hubiéramos multiplicado por este costo adicional actual a la suma de las m flores anteriores). Repetimos este proceso hasta que las flores se hayan terminado, sumándo siempre bloques de n flores con un costo adicional dado y en caso de que lleguemos al punto donde el número de flores que nos quedan sin repartir es menor que el número de personas, entonces simplemente las distribuimos entre las personas que podamos, pero sin perder de vista el valor adicional que les corresponde en ese momento. Así, como las estamos distribuyéndo uniformemente entre las personas, siguiéndo esta idea podemos garantizar que obtenemos el mínimo costo de comprar todas las flores.

Ahora bien, sabemos que ordenar las flores nos toma $\Theta(m \log m)$. Obtener la suma de los costos de las m flores nos toma $\Theta(m)$, pues siempre debemos recorrer todo el arreglo C. Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo es de $\Theta(m \log m)$.

6. Sean $k, n \in \mathbb{N}$. El problema de los huevos, es el siguiente: tenemos un edificio con n pisos y k huevos. Sabemos que hay un piso f tal que si dejamos caer un huevo desde el piso f, se estrellará. Si dejamos caer un huevo desde un piso r tal que $r < f$, el huevo no se estrellará, y si dejamos caer el huevo desde un piso $r \geq f$, el huevo se estrellará (es posible que $f = 1$, en cuyo caso, el huevo siempre se estrellará. Si $f = n+1$, el huevo nunca se estrellará). **Una vez que un huevo se estrella, no lo podemos usar nuevamente**. Si disponemos de k huevos, ¿cuál es el menor número de experimentos (dejar caer un huevo) que se tienen que hacer para determinar a f? Sea $E(k, n)$ el mínimo número de experimentos que tiene que hacer para determinar a f.

   a) Pruebe que $E(1, n) = n$.

   Demostración. Inducción sobre el número de pisos n.

   - Caso base. Si $n = 1$ entonces el número mínimo de experimentos para determinar a f es 1, pues sólo hay un piso. Como $n = 1$, entonces sólo pueden pasar dos cosas:
     - El huevo se rompe, lo que implica que $f = 1$. Por lo que $n = 1$ es el mínimo número de experimentos para determinar a f.
     - El huevo no se rompe, lo que implica que $f = n + 1$. El problema nos dice que en este caso, el huevo nunca se rompe, pero como ya no podemos subir más pisos, entonces sabemos que el número mínimo para determinar a f es 1.
   - Hipótesis de inducción. Supongamos que se cumple para k, es decir, supongamos que

     $$E(1, k) = k$$

es el número mínimo de experimentos para determinar a f si sólo tenemos un huevo.

- Paso inductivo. Queremos probar que se cumple para $k+1$. Entonces

$$E(1, k+1) = k+1$$

Tenemos dos posibles casos:

  - El huevo se rompe, lo que implica que $f = k+1$. Por hipótesis de inducción, tenemos que k es el número mínimo de experimentos para determinar a f si sólo tenemos un huevo. Así, para obtener el número mínimo de experimentos del siguiente piso debemos sumar este valor más uno.
  - El huevo no se rompe, lo que implica que $f = k+2$. El problema nos dice que en este caso, el huevo nunca se rompe, pero como ya no podemos subir más pisos, entonces sabemos que el número mínimo para determinar a f es $k+1$.

Por lo tanto, el número mínimo de experimentos para determinar a f es n si sólo tenemos un huevo.

□

Otra forma de ver este problema es que, como sólo tenemos un huevo, entonces en el peor caso necesitamos tirar n veces el huevo para encontrar a f (pues comenzamos desde el piso 1 y terminamos en el piso n). Debemos avanzar piso por piso ya que si lo hacemos de otra forma (de dos en dos, por ejemplo) no tenemos forma de saber en qué piso se rompe el huevo. De esta forma, $E(1, n) = n$.

b) Encuentre una recurrencia para $E(k, n)$. Utilice programación dinámica para encontrar $E(k, n)$. ¿Qué tan rápido es su algoritmo?

Solución: Debemos tener en cuenta las siguientes observaciones

- Si un huevo se ha roto, entonces ya no podemos volver a utilizarlo.
- Un huevo se puede reutilizar si y sólo si sobrevive a la caída.
- Si un huevo se rompe en el piso t, entonces éste también se romperá en los todos los $t+1$ pisos.
- Si un huevo sobrevive a la caída en el piso t, entonces éste también sobrevivirá a la caída de todos los $t-1$ pisos.

De esta forma, si tenemos k huevos y n pisos, podemos considerar dos casos al momento de que un huevo es lanzado desde el piso t, con $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

- El huevo se rompe. Esto implica que todos los pisos arriba del piso t rompen el huevo, pero los que están por debajo del piso t debemos considerárlos aún (pues el piso seguro más alto está en algún lugar por debajo de t). Así, el problema se reduce a $k-1$ huevos y $t-1$ pisos por revisar.
- El huevo no se rompe. Esto implica que todos los pisos por debajo del piso t tampoco rompen el huevo, pero los que están por arriba del piso t debemos considerárlos aún (pues el piso seguro más alto está por arriba de t). Así, el problema se reduce a k huevos y $n-t$ pisos por revisar.

Notemos que necesitamos minimizar el número de experimentos en el peor de los casos, así que tomamos el máximo valor de estas dos situaciones, y seleccionamos el piso que produce el mínimo número de experimentos.

De esta forma, si $E(k, n)$ es la función que calcula el número mínimo de experimentos para determinar a f, entonces

$$E(k, n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ n & \text{si } k = 1 \\ 1 + min\left\{max\left\{E(k-1, t-1), E(k, n-t)\right\}\right\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Mostraremos la correctud de esta función.

Demostración. Inducción sobre el número de huevos k.

- Caso base.
- Hipótesis de inducción.
- Paso inductivo.

□

Esto se traduce al siguiente algoritmo:

1. Definimos la matriz $E[k+1][n+1]$ y la variable $i = 1$.
2. Mientras i sea menor o igual a k, hacemos:
   - $E[i][1] = 1$
   - $E[i][0] = 0$
   - Aumentamos en una unidad a i.
3. Definimos la variable $j = 1$.
4. Mientras j sea menor o igual a n, hacemos
   - $E[1][j] = j$
5. Definimos las variables $i = j = 2$, $t = 1$ y $m = 0$.
6. Mientras i sea menor o igual a k, hacemos:
   - Mientras j sea menor o igual a n, hacemos:
     - $E[i][j] = \infty$
     - Mientras t sea menor o igual a j
       - $m = 1 + min\{max\{E[i-1][t-1], E[i][j-t]\}\}$
       - Si m es menor que $E[i][j]$, entonces $E[i][j] = m$.
       - Incrementamos en una unidad a t.
     - Incrementamos en una unidad a j.
   - Incrementamos en una unidad a i.
7. Regresamos $E[k, n]$.

Ahora bien, los ciclos de los pasos 2. y 3. nos toman $O(k)$ y $O(n)$, respectivamente; pues recorren la matriz E en una sola dirección. El ciclo en el paso 6. nos toma $O(kn^2)$, pues usamos un ciclo k veces y un ciclo n^2 veces para cada huevo. Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo es $O(kn^2)$.

7. Construye el árbol de Huffman para codificar el siguiente texto:

"La rabia es como el picante. Una pizca te despierta, pero en exceso te adormece"

Solución: Primero, ignorándo mayúsculas, vamos a crear una tabla de frecuencias para los símbolos y letras en nuestro texto

símbolo	frecuencia
b	1
u	1
x	1
z	1
.	1
,	1
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
␣	14

Figura 1: Tabla de frecuencias ordenada

Luego, realizaremos las actualizaciones de la tabla de frecuencias:

símbolo	frecuencia
x	1
z	1
.	1
,	1
bu	2
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
␣	14

Tabla 1: Unimos los símbolos `b` y `u`

símbolo	frecuencia
.	1
,	1
bu	2
xz	2
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
␣	14

Tabla 2: Unimos los símbolos `x` y `z`

símbolo	frecuencia
bu	2
xz	2
.,	2
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
␣	14

Tabla 3: Unimos los símbolos `.` y `,`

símbolo	frecuencia
.,	2
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
buxz	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
␣	14

Tabla 4: Unimos los símbolos `bu` y `xz`

símbolo	frecuencia
l	2
m	2
n	3
s	3
buxz	4
.,d	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
␣	14

Tabla 5: Unimos los símbolos `.,` y `d`

símbolo	frecuencia
n	3
s	3
buxz	4
.,d	4
lm	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
␣	14

Tabla 6: Unimos los símbolos `l` y `m`

símbolo	frecuencia
buxz	4
.,d	4
lm	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
ns	6
a	8
e	13
␣	14

Tabla 7: Unimos los símbolos `n` y `s`

símbolo	frecuencia
lm	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
ns	6
buxz.,d	8
a	8
e	13
␣	14

Tabla 8: Unimos los símbolos `buxz` y `.,d`

símbolo	frecuencia
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
ns	6
buxz.,d	8
lmi	8
a	8
e	13
␣	14

Tabla 9: Unimos los símbolos `lm` y `i`

símbolo	frecuencia
t	4
c	5
o	5
ns	6
buxz.,d	8
lmi	8
pr	8
a	8
e	13
␣	14

Tabla 10: Unimos los símbolos `p` y `r`

símbolo	frecuencia
o	5
ns	6
buxz.,d	8
lmi	8
pr	8
a	8
tc	9
e	13
␣	14

Tabla 11: Unimos los símbolos `t` y `c`

símbolo	frecuencia
buxz.,d	8
lmi	8
pr	8
a	8
tc	9
ons	11
e	13
␣	14

Tabla 12: Unimos los símbolos `o` y `ns`

símbolo	frecuencia
pr	8
a	8
tc	9
ons	11
e	13
␣	14
buxz.,dlmi	16

Tabla 13: Unimos los símbolos `buxz.,d` y `lmi`

símbolo	frecuencia
tc	9
ons	11
e	13
␣	14
buxz.,dlmi	16
pra	16

Tabla 14: Unimos los símbolos `pr` y `a`

símbolo	frecuencia
e	13
␣	14
buxz.,dlmi	16
pra	16
tcons	20

Tabla 15: Unimos los símbolos `tc` y `ons`

símbolo	frecuencia
buxz.,dlmi	16
pra	16
tcons	20
e ␣	27

Tabla 16: Unimos los símbolos `e` y ␣

símbolo	frecuencia
tcons	20
e ␣	27
buxz.,dlmipra	32

Tabla 17: Unimos los símbolos `buxz.,dlmi` y `pra`

símbolo	frecuencia
buxz·,dlmipra	32
tconse ␣	47

Tabla 18: Unimos los símbolos `tcons` y `e ␣`

buxz·,dlmipransotce ␣	79

Tabla 19: Unimos los símbolos `buxz.,dlmipra` y `tconse ␣`

Así, el árbol de Huffman se vería de la forma:

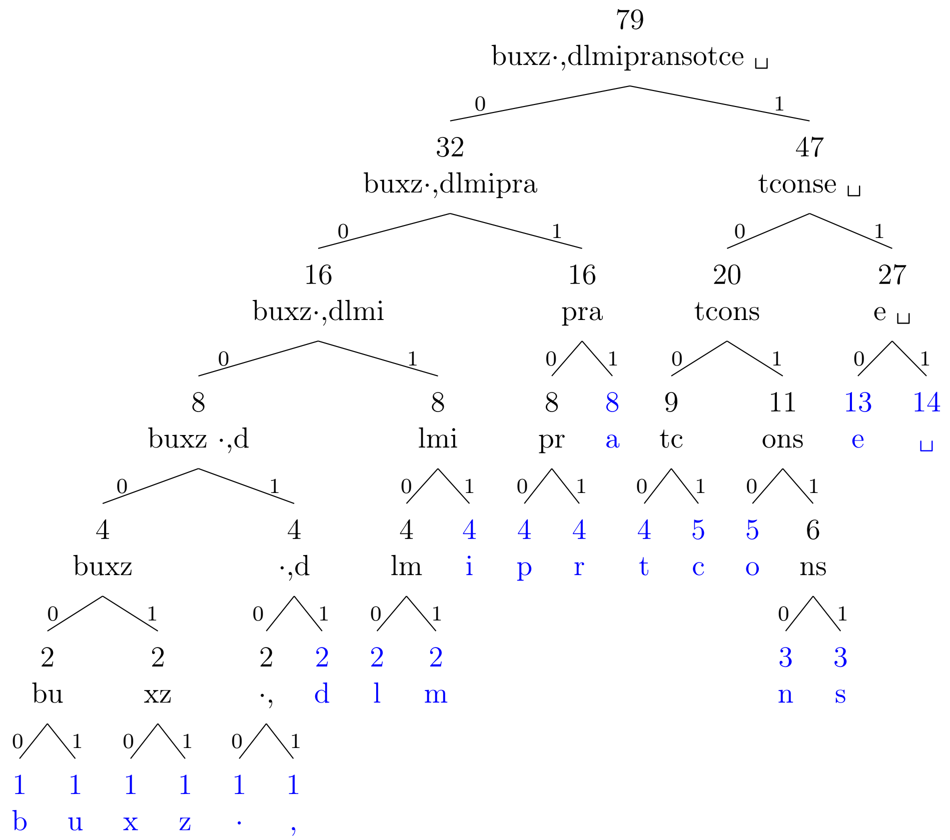


Figura 2: Árbol de Huffman

Por lo tanto, la codificación de cada símbolo sería

símbolo	codificación
b	000000
u	000001
x	000010
z	000011
·	000100
,	000101
d	00011
l	00100
m	00101
i	0011
p	0100
r	0101
a	011
t	1000
c	1001
o	1010
n	10110
s	10111
e	110
␣	111

8. Supongamos que el mago Merlín tiene un conjunto $A[1,\ldots,n]$ de pociones, las cuales puede mezclar de

dos maneras consecutivas con un costo de $A[i] \times A[i+1]$ y resulta en la poción $A[i] + A[i+1]$. Merlín quiere mezclar todas las pociones pero con el mínimo costo.

a) Diseña un algoritmo que garantice unir todas las pociones con un costo mínimo.

b) ¿Cuál es el mínimo costo si se tienen 5 pociones cuyos valores son: $1, 9, 6, 23$?