

Facultad de Ciencias, UNAM

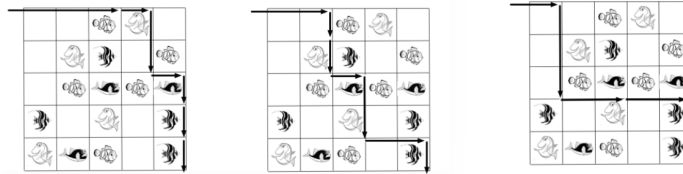
Análisis de Algoritmos

Tarea 3

Rubí Rojas Tania Michelle

11 de diciembre de 2020

1. Un pescador está sobre un océano rectangular. El valor del pez en el punto (i, j) está dado por un arreglo A de dimensión $2(n \times m)$. Diseña un algoritmo que calcule el máximo valor de pescado que un pescador puede atrapar en un camino desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha. El pescador sólo puede moverse hacia abajo o hacia arriba, como se ilustra en la siguiente figura:



2. Dados dos árboles generadores T y R de una gráfica G . Muestra cómo encontrar la secuencia más corta de árboles generadores T_0, T_1, \dots, T_k tal que $T_0 = T, T_k = R$, y cada árbol T_i difiere del anterior T_{i-1} agregando y borrando una arista.
3. Sea G una gráfica con n vértices. Un subconjunto S de los vértices de G es independiente si cualesquiera dos elementos de S no son adyacentes. En general, el problema de encontrar el conjunto independiente de una gráfica es un problema NP -completo. Pero en algunos casos, este problema puede resolverse eficientemente. Sea T un árbol con raíz con n vértices. Cada nodo $v \in T$ tiene asociado un peso $w(v)$. Utilizando programación dinámica, encuentre un algoritmo de tiempo lineal para encontrar el conjunto independiente de T de peso máximo.
4. Mientras caminas por la playa encuentras un cofre de tesoros. El cofre contiene n tesoros con pesos w_1, \dots, w_n y valores v_1, \dots, v_n . Desafortunadamente, sólo tienes una maleta que sólo tiene capacidad de carga M . Afortunadamente, los tesoros se pueden romper si es necesario. Por ejemplo, la tercera parte de un tesoro i tiene peso $\frac{w_i}{3}$ y valor $\frac{v_i}{3}$.
 - Describe un algoritmo voraz de tiempo $\theta(n \log n)$ que resuelve este problema.

SOLUCIÓN:

 - ¿Se puede mejorar el tiempo de ejecución de tu algoritmo a $\theta(n)$? Si es un no, explica por qué; si es un sí, menciona el cambio.
5. Un grupo de personas quiere comprar un ramo de flores, y el florista que las vende quiere maximizar sus ganancias al venderlas. Para esto ha decidido determinar el precio de las flores que cada cliente compra como sigue: el precio de su primer flor será $(0 + 1) \times c$, donde c es el precio original de la flor; el costo de la segunda flor será $(1 + 1) \times c$, y así sucesivamente. Dado un grupo de n personas, un número n de flores que desean comprar, y el costo original c de las flores, diseñe un algoritmo que en tiempo $O(n \log n)$ minimice el costo total que los clientes tienen que pagar para que entre todos compren todas las flores.

6. Sean $k, n \in \mathbb{N}$. El problema de los huevos, es el siguiente: tenemos un edificio con n pisos y k huevos. Sabemos que hay un piso f tal que si dejamos caer un huevo desde el piso f , se estrellará. Si dejamos caer un huevo desde un piso r tal que $r < f$, el huevo no se estrellará, y si dejamos caer el huevo desde un piso $r \geq f$, el huevo se estrellará (es posible que $f = 1$, en cuyo caso, el huevo siempre se estrellará. Si $f = n + 1$, el huevo nunca se estrellará). **Una vez que un huevo se estrellará, no lo podemos usar nuevamente.** Si disponemos de k huevos, ¿cuál es el menor número de experimentos (dejar caer un huevo) que se tienen que hacer para determinar a f ? Sea $E(k, n)$ el mínimo número de experimentos que tiene que hacer para determinar a f .
- a) Pruebe que $E(1, n) = n$.
- b) Encuentre una recurrencia para $E(k, n)$. Utilice programación dinámica para encontrar $E(k, n)$. ¿Qué tan rápido es su algoritmo?
7. Construye el árbol de Huffman para codificar el siguiente texto:

"La rabia es como el picante. Una pizza te despierta, pero en exceso te adormece"

SOLUCIÓN: Primero, ignorando mayúsculas, vamos a crear una tabla de frecuencias para los símbolos y letras en nuestro texto

símbolo	frecuencia
b	1
u	1
x	1
z	1
.	1
,	1
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
□	14

Figura 1: Tabla de frecuencias ordenada

Luego, realizaremos las actualizaciones de la tabla de frecuencias:

símbolo	frecuencia
x	1
z	1
.	1
,	1
bu	2
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
□	14

Tabla 1: Unimos los símbolos b y u

símbolo	frecuencia
.	1
,	1
bu	2
xz	2
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
□	14

Tabla 2: Unimos los símbolos x y z

símbolo	frecuencia
bu	2
xz	2
.,	2
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
□	14

Tabla 3: Unimos los símbolos . y ,

símbolo	frecuencia
.,	2
d	2
l	2
m	2
n	3
s	3
buxz	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
□	14

Tabla 4: Unimos los símbolos bu y xz

símbolo	frecuencia
l	2
m	2
n	3
s	3
buxz	4
.,d	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
□	14

Tabla 5: Unimos los símbolos ., y d

símbolo	frecuencia
n	3
s	3
buxz	4
.,d	4
lm	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
a	8
e	13
□	14

Tabla 6: Unimos los símbolos l y m

símbolo	frecuencia
buxz	4
.,d	4
lm	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
ns	6
a	8
e	13
□	14

Tabla 7: Unimos los símbolos n y s

símbolo	frecuencia
lm	4
i	4
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
ns	6
buxz.,d	8
a	8
e	13
□	14

Tabla 8: Unimos los símbolos buxz y .,d

símbolo	frecuencia
p	4
r	4
t	4
c	5
o	5
ns	6
buxz.,d	8
lmi	8
a	8
e	13
□	14

Tabla 9: Unimos los símbolos lm y i

símbolo	frecuencia
t	4
c	5
o	5
ns	6
buxz.,d	8
lmi	8
pr	8
a	8
e	13
□	14

Tabla 10: Unimos los símbolos p y r

símbolo	frecuencia
o	5
ns	6
buxz.,d	8
lmi	8
pr	8
a	8
tc	9
e	13
□	14

Tabla 11: Unimos los símbolos **t** y **c**

símbolo	frecuencia
buxz.,d	8
lmi	8
pr	8
a	8
tc	9
ons	11
e	13
□	14

Tabla 12: Unimos los símbolos **o** y **ns**

símbolo	frecuencia
pr	8
a	8
tc	9
ons	11
e	13
□	14
buxz.,dlmi	16

Tabla 13: Unimos los símbolos **buxz.**, **d** y **lmi**

símbolo	frecuencia
tc	9
ons	11
e	13
□	14
buxz.,dlmi	16
pra	16

Tabla 14: Unimos los símbolos **pr** y **a**

símbolo	frecuencia
e	13
□	14
buxz.,dlmi	16
pra	16
tcons	20

Tabla 15: Unimos los símbolos **tc** y **ons**

símbolo	frecuencia
buxz.,dlmi	16
pra	16
tcons	20
e □	27

Tabla 16: Unimos los símbolos **e** y **□**

símbolo	frecuencia
tcons	20
e □	27
buxz.,dlmipra	32

Tabla 17: Unimos los símbolos **buxz.**, **dlmi** y **pra**

símbolo	frecuencia
buxz.,dlmipra	32
tconse □	47

Tabla 18: Unimos los símbolos **tcons** y **e □**

buxz.,dlmipransotce □	79
-----------------------	----

Tabla 19: Unimos los símbolos **buxz.**, **dlmipra** y **tconse □**

Así, el árbol de Huffman se vería de la forma:

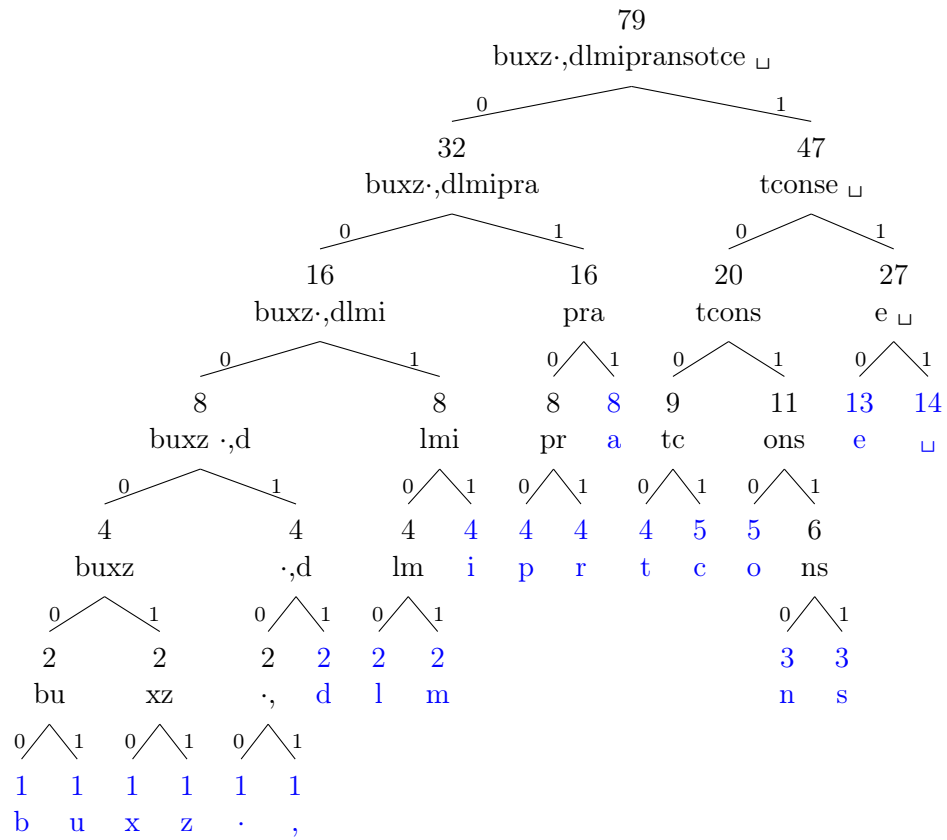


Figura 2: Árbol de Huffman

Por lo tanto, la codificación de cada símbolo sería

símbolo	codificación
b	000000
u	000001
x	000010
z	000011
.	000100
,	000101
d	00011
l	00100
m	00101
i	0011
p	0100
r	0101
a	011
t	1000
c	1001
o	1010
n	10110
s	10111
e	110
	111

8. Supongamos que el mago Merlín tiene un conjunto $A[1, \dots, n]$ de pociones, las cuales puede mezclar de

dos maneras consecutivas con un costo de $A[i] \times A[i + 1]$ y resulta en la poción $A[i] + A[i + 1]$. Merlín quiere mezclar todas las pociones pero con el mínimo costo.

- a)* Diseña un algoritmo que garantice unir todas las pociones con un costo mínimo.
- b)* ¿Cuál es el mínimo costo si se tienen 5 pociones cuyos valores son: 1, 9, 6, 23?