

Facultad de Ciencias, UNAM  
Análisis de Algoritmos  
Tarea 2

Rubí Rojas Tania Michelle

10 de noviembre de 2020

1. Sea  $M[1 \dots n][1 \dots n]$  una matrix de  $n \times n$ , en el que cada renglón y cada columna están ordenados en orden creciente. Suponga que no hay dos elementos iguales.

- a) Diseña un algoritmo que encuentre la posición de un valor  $k$  en  $M$  o que determine si que no está.  
¿Cuántas comparaciones usa tu algoritmo en el peor caso?

SOLUCIÓN: Como los elementos de las columnas y las filas están ordenados de forma creciente, entonces podemos buscar el valor de  $k$  buscando en submatrices desde uno de los extremos, en particular, desde el extremo superior derecho de la matriz. Usando la información que nos proporciona la matriz, podemos encontrar un camino que nos lleve al valor indicado. Esto se puede hacer con el siguiente algoritmo:

- 1) Definimos `fila = 1` y `columna = n`.
- 2) Mientras `fila` sea menor o igual a  $n$  y `columna` sea mayor que 0, hacemos:
  - Si  $M[\text{fila}][\text{columna}] = k$ , entonces regresamos la tupla  $(i, j)$ . Terminamos.
  - Si  $M[\text{fila}][\text{columna}] < k$ , entonces incrementamos en una unidad el valor de `fila`.
  - En otro caso, entonces disminuimos en una unidad el valor de `columna`.
- 3) Si llegamos a este punto, es que no hemos encontrado el valor del elemento que nos piden, por lo que simplemente regresamos un  $-1$ . Terminamos.

Este algoritmo funciona porque en cada submatriz de tamaño  $\text{fila} \times \text{columna}$  garantizamos que está el elemento que buscamos. Como iniciamos a comparar desde el elemento que está en la esquina superior derecha de la matriz, entonces si hay un elemento mayor que él, éste debería de estar en alguna de las filas que están abajo de él (ya que las columnas y las filas están ordenadas). Pero si es menor que él, entonces debería de estar en alguna de las columnas anteriores. De acuerdo a esto, vamos actualizando nuestra posición (lo que implica que iremos reduciendo el tamaño de la submatriz donde debería de estar el elemento que buscamos) y aplicamos el mismo razonamiento para los elementos en cada una de las nuevas posiciones hasta encontrar al elemento deseado.

Ahora bien, en el peor caso, recorreremos toda una fila y toda una columna de la matriz para encontrar el valor que buscamos. Cada uno de estos recorridos nos toma tiempo lineal, por lo que la complejidad total del algoritmo será de  $O(n) + O(n) = O(n)$ . Usando este mismo razonamiento, como la matriz es cuadrada, entonces a lo más hacemos  $2n - 1$  comparaciones para buscar al elemento en el peor caso.

- b) Describe y analiza un algoritmo para resolver el siguiente problema en tiempo lineal. Dados 4 índices  $i, j, i', j'$  como entrada, calcule el número de elementos de  $M$  que son más pequeños que  $M[i][j]$  y más grandes que  $M[i'][j']$ .

SOLUCIÓN: Primero, veamos cómo podemos calcular el número de elementos de  $M$  que son más pequeños que  $M[i][j]$ . Los elementos sobre los cuales tenemos certeza de que son menores que  $M[i][j]$  están en el subarreglo de tamaño  $i \times j$  (los que están por encima de  $M[i][j]$  y a la izquierda de éste). A este número le restamos una unidad para no considerar al propio elemento, por lo que tendremos  $(i \times j) - 1$  elementos que forzosamente son menores a  $M[i][j]$  (esto se debe a que los elementos de

las filas y las columnas están ordenados de forma creciente). Ahora bien, puede que existan más elementos que sean menores que  $M[i][j]$  y que se encuentren a su derecha y por encima de la fila  $i$ . Para poder determinar el número de elementos menores que  $M[i][j]$  en este subarreglo, entonces comparamos a  $M[i][j]$  con cada  $M[i-1][j+k]$ , donde  $k \in \{1, 2, \dots, (n-j)\}$ . Entonces, mientras  $j+k$  sea menor o igual a  $n$ , hacemos

- 1) Si  $M[i-1][j+k] < M[i][j]$ , eso significa que todos los elementos anteriores a  $M[i-1][j+k]$  dentro de esa columna deberían de ser menores que  $M[i][j]$ , por transitividad. Así, tenemos  $i-1$  elementos adicionales que son menores que  $M[i][j]$ . Aumentamos en una unidad el valor de  $k$ , para así movernos a la siguiente columna.
- 2) En otro caso, tenemos que subir una fila más arriba para verificar si los elementos anteriores a  $M[i-1][j+k]$  dentro de esa columna son menores a  $M[i][j]$ .
  - La suma de los elementos menores a  $M[i][j]$  se realizará de manera análoga al paso anterior, considerando los  $i-m$  elementos que fueron menores por transitividad, donde  $m$  fue el número de filas hacia arriba que tuvimos que subir para que se cumpliera  $M[i-m][j+k] < M[i][j]$ .
  - Si encontramos a un elemento  $A[i-m][j+k] < M[i][j]$  entonces sumamos  $i-m$  elementos a nuestra cuenta y nos movemos a la columna de la derecha, para realizar el procedimiento del paso 1, pero desde la posición actual donde nos encontramos y con los valores  $i-m$ ,  $j+k$  correspondientes.
  - Si llegamos al primer elemento de la columna, y tenemos que este elemento tampoco es menor que  $M[i][j]$ , eso significa que ya no hay elementos más a la derecha que puedan ser menores que  $M[i][j]$ , así que terminamos de buscar y nos quedamos con la cuenta de los elementos que llevamos.
- 3) Una vez que terminamos el ciclo del punto anterior, significa que ya no podemos recorrer más la matriz (o que ya no debemos, por el último punto del paso 2). Así que terminamos y regresamos la cuenta de los números menores a  $M[i][j]$  que llevamos.

Ahora, para poder encontrar la cantidad de elementos que son mayores que  $M[i'][j']$ , usaremos un algoritmo análogo al anterior. Los elementos que forzosamente son mayores a  $M[i'][j']$  son aquellos que están por debajo de  $M[i'][j']$  y a la derecha de éste. Así, hay  $((n-i')+1) \times ((n-j')+1)$  elementos dentro de este subarreglo. Nuevamente, disminuimos una unidad para no contar al propio elemento. Entonces, hay  $((((n-i')+1) \times ((n-j')+1))) - 1$  elementos que son forzosamente mayores que  $M[i'][j']$ . Luego, puede que existan más elementos que sean mayores que  $M[i'][j']$  a su izquierda y por debajo de la fila  $i'$ . Para poder determinar el número de elementos que son mayores que  $M[i'][j']$  en este subarreglo, entonces comparamos a  $M[i'][j']$  con cada  $M[i'+1][j'-k]$ , donde  $k \in \{1, 2, \dots, (n-j')\}$ . Entonces, mientras  $j'-k$  sea mayor o igual a 1, hacemos:

- 1) Si  $M[i'+1][j'-k] > M[i'][j']$ , eso significa que todos los elementos siguientes a  $M[i'+1][j'-k]$  dentro de esa columna deberían de ser mayores que  $M[i'][j']$ , por transitividad. Así, tenemos  $i'+1$  elementos adicionales que son mayores que  $M[i'][j']$ . Disminuimos en una unidad el valor de  $k$ , para así movernos a la columna anterior (una a la izquierda).
- 2) En otro caso, tenemos que bajar una fila para verificar si los elementos siguientes a  $M[i'+1][j'-k]$  dentro de esa columna son mayores a  $M[i'][j']$ .
  - La suma de los elementos mayores a  $M[i'][j']$  se realizará de manera análoga al paso anterior, considerando los  $i+m$  elementos que fueron mayores por transitividad, donde  $m$  es el número de filas hacia abajo que tuvimos que recorrer para que se cumpliera  $M[i'+m][j'-k] < M[i'][j']$ .
  - Si encontramos a un elemento  $A[i'+m][j'-k] < M[i'][j']$  entonces sumamos  $i+m$  elementos a nuestra cuenta y nos movemos a la columna de la izquierda para realizar el procedimiento del paso 1, pero desde la posición actual donde nos encontramos y con los valores  $i+m$ ,  $j-k$  correspondientes.
  - Si llegamos al último elemento de la columna, y tenemos que este elemento tampoco es mayor que  $M[i'][j']$ , eso significa que ya no hay elementos más a la izquierda que puedan ser mayores

que  $M[i'][j']$ , así que terminamos de buscar y nos quedamos con la cuenta de los elementos que llevamos.

- 3) Una vez que terminamos el ciclo del punto anterior, significa que ya no podemos recorrer más la matriz (o que ya no debemos, por el último punto del paso 2). Así que terminamos y regresamos la cuenta de los números menores a  $M[i'][j']$  que llevamos.

Este algoritmo funciona porque contemplamos todos las *zonas* o subarreglos cuyos elementos podrían ser menores (mayores) que  $M[i][j]$ .

Ahora bien, para encontrar la cantidad de elementos que son menores a  $M[i][j]$  sólo recorreremos linealmente a la matriz, y en el peor de los casos tenemos que recorrer toda una columna y toda una fila; por lo que la complejidad para obtener esta cantidad de elementos será  $O(n)$ . De manera análoga, para encontrar la cantidad de elementos que son mayores a  $M[i'][j']$ , el algoritmo toma tiempo lineal. Así, la complejidad total del algoritmo nos tomará tiempo  $O(n)$ .

2. **Permutaciones de Josephus:** Supongamos que  $n$  personas están sentadas alrededor de una mesa circular con  $n$  sillas, y que tenemos un entero positivo  $m \leq n$ . Comenzando con la persona con etiqueta 1, (moviéndonos siempre en la dirección de las manecillas del reloj) comenzamos a remover los ocupantes de las sillas como sigue: Primero eliminamos la persona con etiqueta  $m$ . Recursivamente, eliminamos al  $m$ -ésimo elemento de los elementos restantes. Este proceso continua hasta que las  $n$  personas han sido eliminadas. El orden en que las personas han sido eliminadas, se le conoce como la  $(n, m)$ -permutación de Josephus. Por ejemplo si  $n = 7$  y  $m = 3$ , la  $(7, 3)$ -permutación de Josephus es:  $\{3, 6, 2, 7, 5, 1, 4\}$ .

- a) Supongamos que  $m$  es constante. De un algoritmo lineal para generar la  $(n, m)$ -permutación de Josephus.

SOLUCIÓN: Usaremos una lista circular para este caso. Las listas circulares tienen las mismas propiedades que las listas ligadas, sólo se añade que la cola y la cabeza están conectadas.

Como tenemos  $n$  personas alrededor de la mesa, entonces creamos una lista circular `listaC` de longitud  $n$ , cuyos elementos son los enteros  $1, 2, 3, \dots, n$ . Pero también necesitamos una lista vacía `listaP` para ir agregando la  $(n, m)$ -permutación de Josephus, así que también la creamos. Ahora lo que tenemos que hacer es encontrar al  $m$ -ésimo elemento de `listaC` desde nuestra posición actual (esto lo hacemos moviéndonos  $m - 1$  lugares desde donde estamos, e iniciamos en la cabeza), lo agregamos a `listaP`, lo eliminamos de `listaC` y repetimos el proceso hasta que eliminemos a todos los elementos de la lista. Esto se puede ver con el siguiente algoritmo:

- 1) Nos posicionamos en la cabeza de `listaC`.
- 2) Si la longitud de `listaC` es igual a 1, entonces simplemente agregamos el elemento en la cabeza de `listaC` a `listaP`.
- 3) Avanzamos  $m - 1$  posiciones a la derecha de la lista para encontrar al  $m$ -ésimo elemento de la lista (esto porque comenzamos a contar a partir del siguiente elemento). Lo agregamos a `listaP`, actualizamos nuestra posición actual en `listaC` a la posición siguiente de donde estamos y eliminamos al elemento anterior (que es el  $m$ -ésimo). Repetimos este proceso (comenzando por el paso 2) desde nuestra posición actual (que es la posición siguiente del elemento que eliminamos) hasta que la longitud de `listaC` sea igual a 1 (pues ya sólo agregamos a `listaP` al elemento que nos hace falta).
- 4) Regresamos `listaP`.

Este algoritmo funciona porque en cada iteración nos aseguramos de encontrar al  $m$ -ésimo elemento e ir actualizando nuestra posición correctamente. Como la lista es circular, entonces podemos ir *dando vueltas* en la lista y sólo nos vamos moviendo  $m - 1$  lugares para ir encontrando la posición deseada. Además, nos aseguramos de eliminar al  $m$ -ésimo elemento e ir actualizando nuestras referencias adecuadamente.

Finalmente, crear a `listaC` nos toma tiempo lineal (ya que le agregamos  $n$  elementos) y crear a `listaP` nos toma tiempo constante (pues es vacía). Como  $m \in O(1)$ , entonces movernos  $m - 1$  posiciones a la derecha nos tomará también tiempo constante. Pero esto lo hacemos  $n - 1$  veces, por lo que esto

también nos cuesta tiempo lineal en total. Agregar un elemento a `listaP` nos toma tiempo constante (pues lo estamos agregando al final). Y eliminar al elemento también nos toma tiempo constante (pues siempre eliminamos al elemento anterior, y para hacer esto sólo actualizamos las referencias de los nodos; por lo que nunca recorremos la lista para poder eliminarlo), pero esto lo hacemos también  $n - 1$  veces, por lo que en total nos toma tiempo lineal. Así, como realizamos puras operaciones lineales a lo largo de este algoritmo, entonces la complejidad total de éste es de  $O(n)$ .

Un ejemplo para ilustrar el algoritmo sería el siguiente: si  $n = 5$  y  $m = 4$ , entonces

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Figura 1: `listaC.cabeza.elemento = 1`;  $m - 1 = 3$  y `listaP = []`

1	2	3	5
---	---	---	---

Figura 2: `listaP = [4]`, `posicionActual.elemento = 5`

1	2	5
---	---	---

Figura 3: `listaP = [4, 3]`, `posicionActual.elemento = 5`

1	2
---	---

Figura 4: `listaP = [4, 3, 5]`, `posicionActual.elemento = 1`

1
---

Figura 5: `listaP = [4, 3, 5, 2]`, `posicionActual.elemento = 1`

1
---

Figura 6: `listaC.length = 1` => `listaP = [4, 3, 5, 2, 1]` Terminamos

- b) Supongamos que  $m$  no es constante. Describa un algoritmo con complejidad  $O(n \log n)$  para encontrar la  $(n, m)$ -permutación de Josephus.

SOLUCIÓN: Para este caso, utilizaremos un árbol binario balanceado cuyas hojas tendrán como elemento a los enteros del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , respectivamente; por lo que tendremos  $n$  hojas. Además, se debe cumplir que los nodos padres de las hojas tengan como elemento el número de hojas que tienen. El resto de los nodos internos tendrán como elemento el número de hojas que tienen sus dos subárboles (cada nodo obtiene esto sumando los elementos que tienen sus nodos hijos, pues desde la propiedad anterior estamos garantizando que los padres de las hojas nos proporcionan esta información). La construcción de este árbol la haremos de abajo hacia arriba, y será como sigue:

- Construimos  $n$  hojas cuyos elementos son  $1, 2, \dots, n$ ; respectivamente. Además, los marcamos como no visitados.
- Para crear los padres de las hojas:
  - Calculamos  $\text{altura} = \lceil \log(n) \rceil + 1$ .
  - Tomamos el primer par de hojas (de izquierda a derecha) y construimos al nodo padre. Éste tendrá como elemento al número 2, ya que tiene dos hojas.
  - Después, tomamos el siguiente par de hojas y realizamos el paso anterior.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que sólo podemos tomar uno, es decir, sólo queda o sólo hay una hoja en el nivel, entonces construimos al nodo padre y su elemento será el número 1, pues sólo tiene una hoja. Pasamos al siguiente punto del algoritmo.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que ya no hay nodos (es decir, el número de hojas era par), entonces pasamos al siguiente punto del algoritmo.
- Una vez que terminamos de construir los nodos padre de las hojas, disminuimos en uno la variable **altura**.
- Para crear los nodos internos faltantes:
 

Mientras **altura** sea mayor que 1, hacemos lo siguiente para los últimos nodos padres que hayamos creado (la primera iteración es sobre los padres de las hojas, después será sobre los padres de los padres de las hojas y así sucesivamente);

  - Tomamos los primeros dos nodos y construimos el nodo padre. El elemento del padre tendrá la suma de los elementos de sus hijos, por lo que `padre.elemento = padre.izquierdo.elemento + padre.derecho.elemento`.
  - Después tomamos el siguiente par de nodos y realizamos el paso anterior.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos sólo podemos tomar uno, es decir, sólo queda un nodo en el nivel, entonces construimos un nodo padre, y tendrá como hijos a este último nodo y al último nodo padre que construimos. El elemento de este nuevo nodo padre será la suma de los elementos de sus hijos. Disminuimos en una unidad a la variable **altura** y volvemos a repetir el proceso, pero ahora sobre los nuevos nodos padres que hemos creado.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que ya no hay nodos (es decir, el número de nodos era par), entonces disminuimos en una unidad a la variable **altura** y volvemos a repetir el proceso, pero ahora sobre los nuevos nodos padres que hemos creado.
- Cuando llegamos a que **altura** es menor o igual a 1, significa que ya construimos la raíz del árbol. Terminamos.

Ahora necesitamos una forma de recorrer el árbol de tal forma que podamos encontrar cualquiera de las  $m$  posiciones que necesitemos buscar. Para buscar nuestra hoja, nos apoyaremos de la información que contiene cada uno de nuestros nodos internos. Cada nodo conoce el número de elementos de  $n$  que contiene cada uno de sus subárboles, así que usando esto podemos determinar, estando desde la raíz del árbol, hacia cuál de los subárboles debemos movernos. Este proceso lo hacemos recursivamente (desde la raíz de los subárboles) hasta que encontramos la hoja que necesitamos.

Esto se puede ver con el siguiente algoritmo:

- 1) Nos posicionamos en la raíz del árbol y hacemos **nodo = raiz**.
- 2) Mientras el hijo izquierdo del **nodo** no sea una hoja, hacemos:
  - Si  $m$  es menor o igual al elemento del hijo izquierdo del **nodo**, entonces nos movemos al subárbol izquierdo de éste, es decir, **nodo = nodo.hijoIzquierdo**.
  - En otro caso, actualizamos el valor de  $i$  como  $m = m - \text{nodo.hijoIzquierdo.elemento}$ , y nos movemos al subárbol derecho; es decir, **nodo = nodo.hijoDerecho**.
- 3) Para este punto, los hijos del **nodo** serán ambos hojas (si es que tiene dos). Así que tenemos dos opciones:
  - Si  $m$  es igual a 1 pero el hijo izquierdo ya ha sido visitado, entonces nos movemos a la hoja derecha; es decir, **nodo = nodo.hijoDerecho**.

- Si  $m$  es igual a 1, entonces nos movemos a la hoja izquierda; es decir, `nodo = nodo.hijoIzquierdo`. Marcamos como visitada a la hoja. Terminamos.
- En otro caso, nos movemos a la hoja derecha; es decir, `nodo = nodo.hijoDerecho`. Marcamos como visitada a la hoja. Terminamos.

Una vez que tenemos una forma de buscar en el árbol, ya podemos comenzar a buscar la  $(n - m)$  permutación de Josephus. Iniciamos en la primer posición, que sería el número 1. Le sumamos  $(m - 1)$  (para poder obtener la  $m$ -ésima posición) y lo buscamos en el árbol. Una vez que lo encontramos, guardamos el valor de su elemento en una lista y lo eliminamos. Actualizamos nuestras referencias (la próxima posición inicial es la posición siguiente del elemento que eliminamos) y repetimos este proceso hasta que hayamos eliminado a todos los elementos en el árbol.

El algoritmo entero sería como:

- 1) Construimos el árbol con las  $n$  hojas y creamos una lista vacía `listaP`.
- 2) Definimos `posicion = 1`, un contador  $i = 1$  y `len = n`.
- 3) Mientras  $i$  sea menor o igual que `len`:
  - Calculamos `posicion = posicion + (m-1)`
  - Si  $n$  es menor que `posicion` entonces actualizamos el valor de la posición como `posicion = ((posicion-1) % n) + 1`
  - Buscamos a `posicion` en el árbol. Una vez que estemos en la hoja correspondiente, guardamos el valor de la hoja en `listaP` y *eliminamos* al elemento: siguiendo el mismo camino que recorrió nuestro algoritmo de búsqueda, vamos a disminuir en una unidad el valor de todos los nodos visitados durante la búsqueda.
  - Disminuimos en una unidad a  $n$  e incrementamos en una unidad al contador  $i$ .
- 4) Regresamos `listaP`. Terminamos.

El algoritmo funciona por cómo está construido el árbol y porque gracias a las operaciones que realizamos, podemos obtener correctamente al  $m$ -ésimo elemento y mantener actualizadas nuestras referencias. El árbol está construido de tal forma que los nodos internos nos proporcionen información valiosa para hacer la búsqueda de elementos hojas en el árbol (cada nodo sabe cuántas hojas contienen sus dos subárboles). La búsqueda de elementos en el árbol funciona correctamente gracias a que en cada iteración garantizamos que el subárbol en el que nos posicionamos contiene al  $m$ -ésimo elemento (como los nodos contienen el número de hojas que tiene cada uno de sus subárboles, entonces así podemos decidir a cuál subárbol movernos, y cada vez que nos movemos al subárbol derecho, actualizamos el valor de la posición que buscamos). Al momento de eliminar, basta con que borremos todas las referencias que indican que en esa hoja hay un elemento. Así, al momento de buscar nuevamente otro elemento en el árbol, gracias a cómo lo hace, podemos ignorar los subárboles donde no hay elementos y además como actualizamos parte del árbol (el recorrido de la hoja hacia la raíz), entonces siempre mantenemos las referencias actualizadas para poder saber cuántas hojas tiene cada subárbol. Luego, para calcular la  $m$ -ésima posición, damos  $m - 1$  saltos para poder encontrar la siguiente posición a eliminar. En dado caso de que la suma que realicemos esté fuera del rango  $n$ , tenemos que calcular  $((posicion-1) \% n) + 1$  para poder regresar nuestro valor de nuevo al rango  $n$  y que además sea el correcto. Así que por esto podemos garantizar que las referencias están siempre actualizadas y que siempre vamos a poder calcular la  $m$ -ésima posición correctamente.

Ahora bien, notemos que construir el árbol nos toma  $O(n)$  ya que lo estamos construyendo de abajo hacia arriba, y progresivamente vamos formando los  $n - 1$  nodos internos. Crear la lista vacía nos toma tiempo constante. Buscar al  $m$ -ésimo elemento nos toma  $O(\log n)$  ya que en el peor de los casos recorreremos la altura del árbol (pues los elementos que buscamos son hojas), pero esto lo hacemos  $n$  veces, por lo que nos toma  $O(n \log n)$  esta operación en total. La operación eliminar no elimina nodos del árbol, lo único que hace es borrar las referencias de él en el árbol al disminuir en una unidad todos los elementos en los nodos visitados al momento de buscar la hoja (hacemos como que no existe). Entonces, tenemos que recorrer en el peor de los casos la altura del árbol, por lo que nos toma tiempo  $O(\log n)$ . Pero, esta operación la realizamos  $n$  veces, así que en total nos toma tiempo  $O(n \log n)$ . El

resto de las operaciones que realizamos son constantes, pues sólo hacemos asignaciones. Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo es de  $O(n \log n)$ .

Un ejemplo para ilustrar la construcción del árbol y la búsqueda de un elemento sería el siguiente: si  $n = 5$  (tenemos 5 hojas) y buscamos al elemento 3, entonces el árbol se vería como

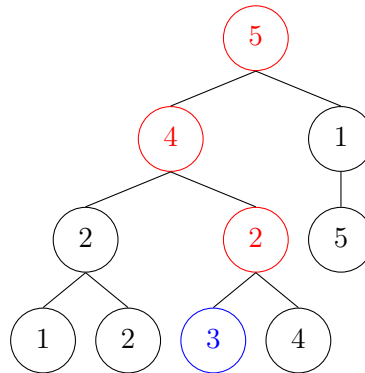


Figura 7: En color rojo está el camino a seguir para encontrar al elemento 3

3. Queremos ordenar una lista  $S$  de  $n$  enteros que contiene muchos elementos duplicados. Supongamos que los elementos de  $S$  sólo toman  $O(\log n)$  valores distintos.

- Encuentre un algoritmo que toma a lo más  $O(n \log n)$  tiempo para ordenar  $S$ .
- ¿Por qué esto no viola la cota inferior de  $O(n \log n)$  para el problema de ordenación?

4. Dado un arreglo  $A$  de  $n$  números, queremos contestar la pregunta ¿Hay algún elemento de  $A$  que aparezca al menos  $\frac{n}{3}$  veces? Encuentre un algoritmo lineal para resolver este problema.

SOLUCIÓN: Primero, necesitamos encontrar los elementos que son candidatos a que se repitan  $\frac{n}{3}$  veces. A lo más podemos tener 3 candidatos, pues en caso de que éstos se repitan  $\frac{n}{3}$  veces, entonces obtenemos el tamaño completo del arreglo. Así, creamos un arreglo auxiliar  $B$  de tamaño 3. La estrategia es recorrer el arreglo  $A$  una primera vez para poder encontrar a los candidatos. Esto se hará como sigue:

- Definimos los contadores  $cc_1 = cc_2 = cc_3 = 0$ . A cada uno de estos contadores le corresponde una entrada del arreglo  $B$ , respectivamente.
- Definimos un contador  $i = 3$  para recorrer el arreglo.
- Agregamos a los tres primeros elementos de  $A$  al arreglo  $B$  y aumentamos en una unidad a los tres contadores  $cc$ .
- Mientras  $i < n$ , hacemos:
  - Si  $A[i]$  es igual a uno de los elementos de  $B$ , entonces aumentamos su respectivo contador.
  - En caso contrario, le restamos una unidad a todos nuestros contadores  $cc$  y colocamos a  $A[i]$  en cualquier posición del arreglo  $B$  cuyo contador sea igual a 0.

Una vez que tenemos a nuestros candidatos, entonces le cambiamos el valor a nuestras variables  $cc$  (ya que el valor que tenían antes ya no importa):

$$c_1 = B[0] \quad c_2 = B[1] \quad c_3 = B[2]$$

las cuales tendrán ahora los valores de cada uno de nuestros candidatos. Así, basta con recorrer el arreglo  $A$  como sigue:

- Definimos una variable  $i = 0$  para recorrer el arreglo.
- Mientras  $i < n$ , hacemos:

- Si  $A[i]$  es igual a  $c_1$ , entonces aumentamos en una unidad al contador  $cc_1$ .
- Si  $A[i]$  es igual a  $c_2$ , entonces aumentamos en una unidad al contador  $cc_2$ .
- Si  $A[i]$  es igual a  $c_3$ , entonces aumentamos en una unidad al contador  $cc_3$ .

Si hay algún contador  $cc$  que sea igual a  $\frac{n}{3}$ , entonces regresamos **true**. En caso contrario, regresamos **false**.

El algoritmo funciona porque garantizamos que el arreglo auxiliar  $B$  contendrá al elemento que se repite  $\frac{n}{3}$  veces. Esto se debe a que si existe tal elemento, entonces debería de aparecer un número suficiente de veces para que el arreglo lo guarde. Es decir, la primera parte del algoritmo se encarga de buscar a los elementos que se repiten más. Si un elemento se repite una cantidad *significativa* de veces, entonces al momento de restar una unidad a los contadores, este elemento no podrá ser eliminado; o bien, si es eliminado, eventualmente volverá a guardarse en  $B$ . Así, podemos estar seguros de que guardamos al menos a un elemento que cumple la propiedad solicitada.

Ahora bien, encontrar a los elementos candidatos nos cuesta  $3 \cdot O(n) = O(n)$ , pues en el peor de los casos debemos recorrer todo el arreglo auxiliar  $B$  (de tamaño 3)  $n$  veces. Luego, recorreremos todo el arreglo  $A$  para poder contar el número de apariciones de los candidatos, y eso nos toma tiempo lineal. El resto de las operaciones nos toman tiempo constante. Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo es de  $O(n) + O(n) = O(n)$ .

5. Sea  $A[1, \dots, n]$  un arreglo de números reales. Diseña un algoritmo que realice cualquier secuencia de las siguientes operaciones:

- $Add(i, y)$ , suma el valor  $y$  al  $i$ -ésimo número.

SOLUCIÓN: Sea  $n$  la longitud del arreglo  $A$ . Para ejecutar esta operación, primero realizaremos un preprocesamiento de la información. Lo que haremos será construir un árbol binario balanceado donde las hojas de éste tendrán como elementos a los números reales de  $A$  (sin cambiar su orden de aparición). Además, se debe cumplir que los nodos padres de las hojas tengan como elemento el número de hojas que tienen. El resto de los nodos internos tendrán como elemento el número de hojas que tienen sus dos subárboles (cada nodo obtiene esto sumando los elementos que tienen sus nodos hijos, pues desde la propiedad anterior estamos garantizando que los padres de las hojas nos proporcionan esta información). La construcción de éste árbol la haremos de abajo hacia arriba, y será como sigue:

- Construimos  $n$  hojas cuyos elementos serán los elementos del arreglo  $A$ , es decir, los elementos  $A[1], A[2], \dots, A[n]$ .
- Para crear los padres de las hojas:
  - Calculamos **altura** =  $\lceil \log(n) \rceil + 1$ .
  - Tomamos el primer par de hojas (de izquierda a derecha) y construimos al nodo padre. Éste tendrá como elemento al número 2, ya que tiene dos hojas.
  - Después, tomamos el siguiente par de hojas y realizamos el paso anterior.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que sólo podemos tomar uno, es decir, sólo queda o sólo hay una hoja en el nivel, entonces construimos al nodo padre y su elemento será el número 1, pues sólo tiene una hoja. Pasamos al siguiente punto del algoritmo.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que ya no hay nodos (es decir, el número de hojas era par), entonces pasamos al siguiente punto del algoritmo.
- Una vez que terminamos de construir los nodos padre de las hojas, disminuimos en uno la variable **altura**.
- Para crear los nodos internos faltantes:
 

Mientras **altura** sea mayor que 1, hacemos lo siguiente para los últimos nodos padres que hayamos creado (la primera iteración es sobre los padres de las hojas, después será sobre los padres de los padres de las hojas y así sucesivamente);



- Tomamos los primeros dos nodos y construimos el nodo padre. El elemento del padre tendrá la suma de los elementos de sus hijos, por lo que  
`padre.elemento = padre.izquierdo.elemento + padre.derecho.elemento.`
- Después tomamos el siguiente par de nodos y realizamos el paso anterior.
- Si al momento de querer tomar un par de nodos sólo podemos tomar uno, es decir, sólo queda un nodo en el nivel, entonces construimos un nodo padre, y tendrá como hijos a este último nodo y al último nodo padre que construimos. El elemento de este nuevo nodo padre será la suma de los elementos de sus hijos. Disminuimos en una unidad a la variable `altura` y volvemos a repetir el proceso, pero ahora sobre los nuevos nodos padres que hemos creado.
- Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que ya no hay nodos (es decir, el número de nodos era par), entonces disminuimos en una unidad a la variable `altura` y volvemos a repetir el proceso, pero ahora sobre los nuevos nodos padres que hemos creado.
- Cuando llegamos a que `altura` es menor o igual a 1, significa que ya construimos la raíz del árbol. Terminamos.

Sabemos que un árbol puede implementarse en un arreglo, así que este procedimiento se realizará dentro de uno para ocupar el arreglo que se nos permite usar como espacio extra.

Una vez que tengamos el árbol construido, entonces debemos recorrerlo de tal forma que lleguemos al  $i$ -ésimo elemento de  $A$ , para luego sumarle el valor de  $y$ . Esto lo podemos lograr realizando el siguiente algoritmo:

- a) Nos posicionamos en la raíz del árbol y hacemos `nodo = raiz`.
- b) Mientras el hijo izquierdo del `nodo` no sea una hoja, hacemos:
  - Si  $i$  es menor o igual al elemento del hijo izquierdo del `nodo`, entonces nos movemos al subárbol izquierdo de éste, es decir, `nodo = nodo.hijoIzquierdo`.
  - En otro caso, actualizamos el valor de  $i$  como  $i = i - \text{nodo.hijoIzquierdo.elemento}$  y nos movemos al subárbol derecho; es decir, `nodo = nodo.hijoDerecho`.
- c) Para este punto, los hijos del `nodo` serán ambos hojas (si es que tiene dos). Así que tenemos dos opciones:
  - Si  $i$  es igual a 1, entonces nos movemos a la hoja izquierda; es decir, `nodo = nodo.hijoIzquierdo`.
  - En otro caso, nos movemos a la hoja derecha; es decir, `nodo = nodo.hijoDerecho`.
- d) Al elemento de `nodo` le sumamos el valor  $y$ . Terminamos.

Este algoritmo funciona porque en cada iteración siempre garantizamos estar en el subárbol donde se encuentra el  $i$ -ésimo elemento. Primero nos posicionamos en la raíz del árbol, y la variable `nodo` nos ayuda a mantener la referencia sobre el nodo en el que estamos posicionados en este momento. Luego hacemos un recorrido entre los nodos internos hasta que llegamos a uno donde su hijo izquierdo es una hoja (sólo verificamos al hijo izquierdo, por que un nodo interno puede tener uno o dos hijos, y si sólo tiene uno, entonces será el izquierdo). Durante este recorrido tenemos dos casos: nos movemos al subárbol izquierdo o al subárbol derecho. Para tomar esta decisión, debemos comparar al elemento del hijo izquierdo del nodo donde estamos posicionados con nuestro índice  $i$ . Como los nodos internos *saben* cuántos elementos de  $A$  tienen sus subárboles, entonces si  $i$  es menor o igual a `nodo.hijoIzquierdo.elemento` eso quiere decir que el elemento  $i$  se encuentra dentro del rango de elementos que contiene el subárbol izquierdo de `nodo`. En caso contrario, debe estar en el subárbol derecho de `nodo`. Pero, si nos movemos al subárbol derecho debemos de actualizar el valor de  $i$ , así que le restamos el número de elementos de  $A$  donde sabemos que  $i$  no va a estar (esto para que tenga el valor adecuado respecto al nuevo subárbol con el que vamos a tratar). Una vez que encontramos al nodo interno cuyos hijos (si es que tiene dos) son hojas, entonces tenemos dos opciones: elegir la hoja izquierda o la derecha. Esta decisión la tomaremos dependiendo del valor que tenga  $i$  en ese momento. Si  $i$  es igual a 1 entonces el elemento que buscamos está en la hoja izquierda. En caso contrario, el elemento que buscamos está en la hoja derecha. Por los cambios que sufre  $i$  en el recorrido de nodos internos, entonces los valores finales que puede tomar  $i$  son 1 o 2; así que dependiendo de

esto, decidimos la hoja que le corresponde. Finalmente, como encontramos la hoja que contiene al  $i$ -ésimo elemento de  $A$ , simplemente le sumamos el valor de  $y$  y terminamos.

La construcción del árbol nos toma  $O(n)$  en tiempo y en espacio (ya que lo construimos de abajo hacia arriba y progresivamente vamos formando los  $n - 1$  nodos internos). Luego, como los elementos del arreglo  $A$  se encuentran en las hojas, entonces en el peor de los casos tenemos que recorrer la altura del árbol para encontrar al elemento que deseamos. Y como sumar el elemento  $y$  con el elemento encontrado nos toma tiempo constante, entonces la complejidad total del algoritmo de búsqueda es de  $O(\log n)$ .

Un ejemplo para ilustrar el algoritmo sería el siguiente: si  $A = [7, 14, 2, 8, 9, 11, 0, -1, 1]$  y  $\text{Add}(7, 6)$ , entonces

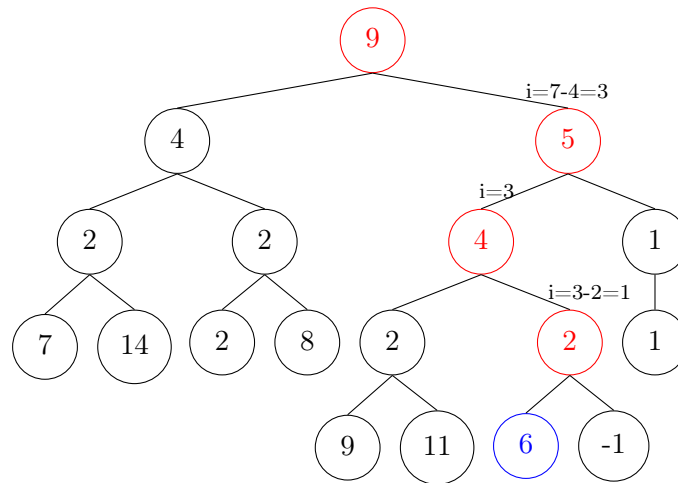


Figura 8: En color rojo está el recorrido para llegar al elemento  $i = 7$ .

- $\text{Partial} - \text{sum}(i)$ , regresa la suma de los primeros  $i$  números, es decir,  
 $\text{Partial} - \text{sum}(i) = A[1] + \dots + A[i]$

SOLUCIÓN: Usaremos básicamente el árbol del inciso anterior para el preprocesamiento de la información, sólo le agregaremos la propiedad de que cada nodo tiene una llave. La llave de las hojas será el valor de su elemento. Las llaves de los nodos padre de las hojas será la suma de las llaves de sus hijos. Las llaves de los demás nodos internos serán la suma de las llaves de sus subárboles (cada nodo obtiene esto sumando las llaves que tienen sus hijos, pues desde la propiedad anterior estamos garantizando que los padres de las hojas nos proporcionan esta información). La construcción de éste árbol la haremos de abajo hacia arriba, y será como sigue:

- Construimos  $n$  hojas cuyos elementos serán los elementos del arreglo  $A$ , es decir, los elementos  $A[1], A[2], \dots, A[n]$ . El valor de las llaves de las hojas será el mismo que el valor de su elemento.
- Para crear los padres de las hojas:
  - Calculamos  $\text{altura} = \lceil \log(n) \rceil + 1$ .
  - Tomamos el primer par de hojas (de izquierda a derecha) y construimos al nodo padre. Éste tendrá como elemento al número 2, ya que tiene dos hojas. Su llave será la suma de las llaves de sus hijos, es decir, de sus dos hojas.
  - Después, tomamos el siguiente par de hojas y realizamos el paso anterior.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que sólo podemos tomar uno, es decir, sólo queda o sólo hay una hoja en el nivel, entonces construimos al nodo padre y su elemento será el número 1, pues sólo tiene una hoja. Su llave será la misma que la de su hijo. Pasamos al siguiente punto del algoritmo.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que ya no hay nodos (es decir, el número de hojas era par), entonces pasamos al siguiente punto del algoritmo.

- Una vez que terminamos de construir los nodos padre de las hojas, disminuimos en uno la variable **altura**.
- Para crear los nodos internos faltantes:  
Mientras **altura** sea mayor que 1, hacemos lo siguiente para los últimos nodos padres que hayamos creado (la primera iteración es sobre los padres de las hojas, después será sobre los padres de los padres de las hojas y así sucesivamente);
  - Tomamos los primeros dos nodos y construimos el nodo padre. El elemento del padre tendrá la suma de los elementos de sus hijos, por lo que  
`padre.elemento = padre.izquierdo.elemento + padre.derecho.elemento`. Su llave será la suma de las llaves de sus hijos, por lo que `padre.llave = padre.izquierdo.llave + padre.derecho.llave`.
  - Después tomamos el siguiente par de nodos y realizamos el paso anterior.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos sólo podemos tomar uno, es decir, sólo queda un nodo en el nivel, entonces construimos un nodo padre, y tendrá como hijos a este último nodo y al último nodo padre que construimos. El elemento de este nuevo nodo padre será la suma de los elementos de sus hijos. Su llave será la suma de las llaves de sus hijos. Disminuimos en una unidad a la variable **altura** y volvemos a repetir el proceso, pero ahora sobre los nuevos nodos padres que hemos creado.
  - Si al momento de querer tomar un par de nodos tenemos que ya no hay nodos (es decir, el número de nodos era par), entonces disminuimos en una unidad a la variable **altura** y volvemos a repetir el proceso, pero ahora sobre los nuevos nodos padres que hemos creado.
- Cuando llegamos a que **altura** es menor o igual a 1, significa que ya construimos la raíz del árbol. Terminamos.

Sabemos que un árbol puede implementarse en un arreglo, así que este procedimiento se realizará dentro de uno para ocupar el arreglo que se nos permite usar como espacio extra.

Notemos que las llaves de los padres de cada uno de los subárboles contendrán la suma de los elementos de las hojas que contiene cada subárbol. Así, una vez que tengamos el árbol construido, podemos recorrerlo de tal forma que lleguemos al  $i$ -ésimo elemento de  $A$  y que durante ese recorrido, también podamos obtener la suma de los primeros  $i$  elementos. Esto lo podemos lograr realizando el siguiente algoritmo:

- Nos posicionamos en la raíz del árbol y hacemos `nodo = raiz`. Además, creamos un contador `suma = 0`.
- Mientras el hijo izquierdo del `nodo` no sea una hoja, hacemos:
  - Si  $i$  es menor o igual al elemento del hijo izquierdo del `nodo`, entonces nos movemos al subárbol izquierdo de éste, es decir, `nodo = nodo.hijoIzquierdo`.
  - En otro caso, actualizamos el valor de  $i$  como  $i = i - \text{nodo.hijoIzquierdo.elemento}$ , actualizamos el valor de `suma` como `suma = suma + nodo.hijoIzquierdo.llave` y nos movemos al subárbol derecho; es decir, `nodo = nodo.hijoDerecho`.
- Para este punto, los hijos del `nodo` serán ambos hojas (si es que tiene dos). Así que tenemos dos opciones:
  - Si  $i$  es igual a 1, entonces nos movemos a la hoja izquierda; es decir, `nodo = nodo.hijoIzquierdo`.
  - En otro caso, nos movemos a la hoja derecha; es decir, `nodo = nodo.hijoDerecho`.
- Hacemos `suma = suma + nodo.llave`.
- Regresamos `suma`. Terminamos.

Este algoritmo funciona porque en cada iteración siempre estamos en el subárbol donde se encuentra el  $i$ -ésimo elemento y porque gracias a las llaves siempre podemos obtener la suma de los elementos anteriores al  $i$ -ésimo. Por el inciso anterior, sabemos que este algoritmo efectivamente encuentra al  $i$ -ésimo elemento, lo único que agregamos es que cada vez que nos movemos al subárbol derecho

estamos sumando el valor de la llave de su nodo hermano al contador **suma**, el cual llevará la suma de los elementos anteriores a  $i$  (al menos, hasta que llegamos al nodo hoja que buscamos). Como los cambios a la derecha que estamos contando son aquellos que están en el recorrido de la búsqueda que hacemos desde la raíz hasta el  $i$ -ésimo elemento, entonces así nos aseguramos de no contar de más ni de menos. Por lo que, cuando llegamos al  $i$ -ésimo elemento, ya tenemos en el contador **suma** la suma de los  $(i - 1)$  elementos de  $A$ , así que sólo sumamos la llave del  $i$ -ésimo elemento con el valor actual del contador y así obtenemos la suma de los primeros  $i$  elementos de  $A$ .

Ahora bien, por el inciso anterior sabemos que el preprocesamiento de la información nos toma tiempo lineal. Y como la suma de los primeros  $i$  elementos la hacemos al momento de recorrer el árbol hasta llegar al elemento hoja que buscamos, entonces en el peor de los casos debemos recorrer la altura del árbol, por lo que podemos realizar esta operación en  $O(\log n)$ .

Un ejemplo para ilustrar el algoritmo sería el siguiente: si  $A = [5, 6, 40, 25, 8, 7]$  e  $i = 5$ , entonces

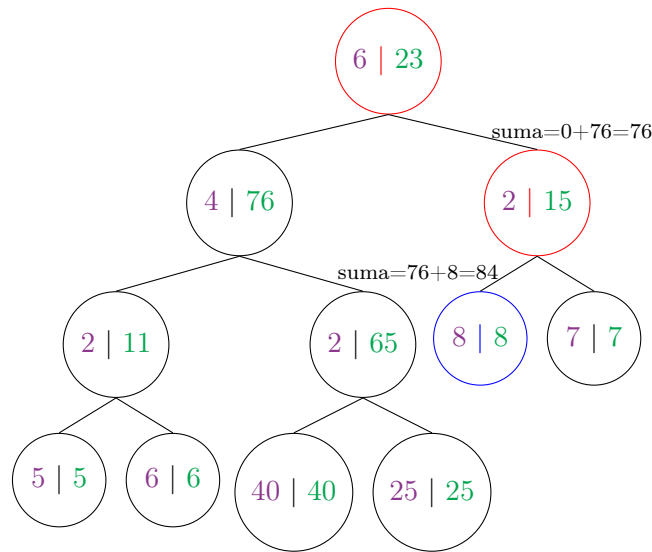


Figura 9: En color **fucsia** están los elementos, en color **Verde** están las llaves y en color **rojo** está el camino para encontrar al **i-ésimo** elemento

6. Sea  $A$  un arreglo de  $n$  números enteros distintos. Suponga que  $A$  tiene la siguiente propiedad: existe un índice  $1 \leq k \leq n$  tal que  $A[1], \dots, A[k]$  es una secuencia incremental y  $A[k + 1], \dots, A[n]$  es una secuencia decremental.

- a) Diseña y analiza un algoritmo eficiente para encontrar  $k$ .

SOLUCIÓN: Tenemos que nuestro arreglo está dividido en dos subarreglos, el primero ordenado en forma creciente y el segundo está ordenado en forma decreciente. Supongamos que  $B$  y  $C$  son los subarreglos contenidos en el arreglo  $A$ , respectivamente. Entonces, al subarreglo  $B$  le corresponden las entradas  $A[1], A[2], \dots, A[k]$  del arreglo  $A$ , mientras que al subarreglo  $C$  le corresponden las entradas  $A[k + 1], A[k + 2], \dots, A[n]$  del arreglo  $A$ . Así, para encontrar el valor de  $k$ , lo que debemos hacer es buscar al elemento  $A[i]$  tal que

$$A[i - 1] < A[i] > A[i + 1] \quad (1)$$

es decir, al elemento en el arreglo cuyos elementos adyacentes son menores que él; y por lo tanto, es el elemento que está al final del subarreglo  $B$ . Esto se debe a que los subarreglos  $B$  y  $C$  están ordenados de forma creciente y decreciente, respectivamente.

Ahora bien, utilizaremos el método *divide y vencerás* para resolver este problema:

- 1) Calculamos la operación  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  para encontrar el índice del elemento que se encuentra a la mitad del arreglo.

- 2) Si el elemento  $A[\lceil \frac{n}{2} \rceil]$  cumple las condiciones de la expresión 1, entonces hemos encontrado al elemento en el índice  $k$ . Regresamos a  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Terminamos.
- 3) En caso contrario, tenemos tres posibles opciones:
  - $A[i-1] > A[i] > A[i+1]$ . Entonces, el elemento pertenece al subarreglo  $C$ . Volvemos al paso 1, pero aplicamos el algoritmo sobre la mitad izquierda del arreglo (ya que nos pasamos del final del subarreglo  $B$ ).
  - $A[i-1] < A[i] < A[i+1]$ . Entonces, el elemento pertenece al subarreglo  $B$ . Volvemos al paso 1, pero aplicamos el algoritmo sobre la mitad derecha del arreglo (ya que todavía no alcanzamos el final de este subarreglo).
  - $A[i-1] > A[i] < A[i+1]$ . Este caso no puede pasar, por cómo están ordenados los subarreglos.

Este algoritmo funciona porque siempre garantizamos estar en el subarreglo que contiene al índice  $k$ . Esto pasa gracias a las comparaciones que hacemos para saber a cuál de las mitades del arreglo actual nos debemos mover. Así, nos movemos hasta encontrar el elemento que buscamos (el cual estará en la posición  $k$ ).

Ahora bien, el algoritmo trabaja sobre subarreglos de tamaño  $\frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{8}, \dots, 1$  para buscar al elemento que deseamos; por lo que esto nos tomará tiempo  $O(\log n)$ . Y como el resto de las operaciones (las comparaciones) nos toma tiempo constante, entonces la complejidad total del algoritmo es de  $O(\log n)$ .

- b) Si no conoces el valor de  $n$ , cómo resuelves el problema.

SOLUCIÓN: Como no sabemos cuál es la longitud del arreglo  $A$ , entonces necesitamos ver una forma de calcularla. Para resolver esto, los índices que vamos a ir revisando son aquellos que sean potencias de 2, es decir, los índices  $2^i$  tales que  $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Si al momento de querer acceder a la posición  $2^i$  nos regresa una excepción del tipo `IndexOutOfBoundsException`, entonces sabemos que el tamaño del arreglo se encuentra ubicado en el intervalo  $2^{i-1} < n < 2^i$ , por lo que éste tendrá una longitud de  $m = 2^{i-1}$ . Así, podemos aplicar búsqueda binaria en este intervalo. Si encontramos un índice  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  que cumple la condición de que su elemento anterior existe y su elemento siguiente no existe (manda una excepción), entonces hemos encontrado el final del arreglo  $A$ . En otro caso,

- Si la posición que revisamos durante esta búsqueda binaria regresa una excepción, entonces ésta se repite sobre la mitad izquierda del intervalo.
- En caso contrario, se repite sobre la mitad derecha del intervalo. Y así sucesivamente hasta encontrar el tamaño del arreglo  $n$ .

Una vez que encontramos la longitud del arreglo (la cual será  $2^{i-1} + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ ), entonces simplemente aplicamos el algoritmo del inciso anterior para poder encontrar el valor de  $k$ .

Este algoritmo funciona porque vamos dando brincos de tamaño  $2^i$  para poder acotar un intervalo donde se debe de encontrar el último elemento de  $A$  (el cual nos dará la longitud del arreglo). Si al momento de dar los brincos nos encontramos con que esa posición del arreglo no existe (regresa una excepción) entonces sabemos que el final del arreglo se encuentra en el intervalo  $2^{i-1} < n < 2^i$ , donde  $2^i$  fue la posición que nos regresó la excepción. Una vez teniendo este intervalo, basta aplicar búsqueda binaria para encontrar al elemento que se encuentra al final del arreglo.

Ahora bien, encontrar el valor de  $i$  que nos manda la excepción (es decir, encontrar el intervalo para acotar el tamaño del arreglo) nos cuesta  $O(\log n)$  ya que calculamos el  $(\log n)$  a *manita*. Luego, la búsqueda binaria que realizamos dentro del intervalo para poder encontrar el último elemento del arreglo nos cuesta  $O(\log n)$ . Finalmente, aplicar el algoritmo del inciso anterior también nos toma  $O(\log n)$ , por lo que la complejidad total del algoritmo es de  $O(\log n)$ .

7. You are a young scientist who just got a new job in a large team of 100 people (you the 101- st). A friend of yours who you believe told you that you have more honest colleagues than liars, and that that's all what he can tell you, where a liar is a person who can either lie or tell the truth, while an honest person is one who always tells the truth. Of course, you'd like to know exactly your honest colleagues and the liars, so that you decide to start an investigation, consisting of a series of questions you are going to ask your colleagues. Since you don't wish to look suspicious, you decide to ask only questions of the form "Is Mary

an honest person?” and of course, to ask as few questions as possible. Can you sort out all your honest colleagues? What’s the minimum number of questions you’d ask in the worst case? You can assume that your colleagues know each other well enough to say if another person is a liar or not. (Hint: Group people in pairs  $(X,Y)$  and ask  $X$  the question “Is  $Y$  honest?” and  $Y$  the question “Is  $X$  honest?”. Analyze all the four possible answers. Once you find an honest person, you can easily find all the others. Challenge: can you solve this enigma asking less than 280 questions in total?)

Generalize the strategy above and show that given  $n$  people such that less than half are liars, you can sort them out in honest persons and liars by asking  $\theta(n)$  questions.

SOLUCIÓN: Sabemos que hay más honestos que mentirosos, lo que implica que más de la mitad de las personas son honestas. La estrategia será encontrar a una persona honesta para que nos indique si las demás personas son honestas o mentirosas (esto porque un honesto siempre dice la verdad). Para encontrar al honesto, vamos a agrupar a las  $n$  personas en pares de la forma  $(X,Y)$ . Así, tenemos dos casos:

- $n$  es par. Entonces logramos formar todos nuestros pares sin problemas. Luego, le preguntamos a  $X$  si  $Y$  es honesto y le preguntamos a  $Y$  si  $X$  es honesto. De acuerdo a sus respuestas, tenemos cuatro posibles opciones:
  - $X$  y  $Y$  responden que la otra persona es honesta. Por lo que **respuesta** = YY.
  - $X$  responde que  $Y$  es honesto, pero  $Y$  responde que  $X$  no lo es. Por lo que **respuesta** = YN.
  - $X$  responde que  $Y$  no es honesta, pero  $Y$  responde que  $X$  sí lo es. Por lo que **respuesta** = NY.
  - $X$  y  $Y$  responden que la otra persona no es honesta. Por lo que **respuesta** = NN.

Gracias a estas respuestas, tenemos lo siguiente:

- Si de la pareja  $(X,Y)$  obtenemos una **respuesta** del tipo NY ó YN, eso implica que al menos una persona es mentirosa. Entonces, descartamos esta pareja. Como eliminamos a una persona honesta y a una mentirosa, entonces se mantiene el hecho de que tenemos más honestos que mentirosos.
- Si de la pareja  $(X,Y)$  obtenemos una **respuesta** del tipo NN, eso implica que al menos una persona es mentirosa. Entonces, descartamos esta pareja. Como eliminamos a una persona honesta y a una mentirosa, entonces se mantiene el hecho de que tenemos más honestos que mentirosos.
- Si de la pareja  $(X,Y)$  obtenemos una **respuesta** del tipo YY, eso implica que ambas personas son honestas o son mentirosas. Entonces, nos quedamos con una persona del par. Notemos que como hay más honestos que mentirosos, entonces siempre tendremos una pareja de honestos. Luego, si ambos eran mentirosos, entonces eliminamos a un mentiroso; y si ambos eran honestos, entonces eliminamos a un honesto. Por esto, se mantiene el hecho de que tenemos más honestos que mentirosos.

En esta primera pasada sobre las parejas, en el peor de los casos (todas las parejas cumplen que sus **respuestas** son del tipo YY) obtenemos a lo más  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  parejas, pues no podemos descartar a ninguna. Notemos además que ocupamos  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  comparaciones.

Ahora bien, aplicamos este mismo razonamiento para las  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  parejas que nos quedan, y así sucesivamente. Como hay más honestos que mentirosos y a las  $n$  personas las agrupamos en parejas, entonces necesariamente nos quedan dos personas al final del proceso. Y como siempre se mantuvo la invariante, entonces la persona que nos queda al final es una persona honesta.

- $n$  es impar. Entonces nos sobra una persona al momento de formar los pares. Esa persona la apartamos, y realizamos el proceso del inciso anterior con las parejas que sí logramos formar. Tenemos dos casos:
  - La última pareja que obtenemos tiene una **respuesta** del tipo NY, YN o NN. Entonces, descartamos a esa pareja y nos quedamos con la persona que aislamos, pues esa debería de ser la persona honesta (ya que hay más honestos que mentirosos).
  - La última pareja que obtenemos tiene una **respuesta** del tipo YY. Entonces, obtenemos a una persona honesta. Así, ya no es necesaria la comparación con la persona que aislamos, pues no importa si es honesta o mentirosa, ya que encontramos a una persona honesta.

Una vez que encontramos a una persona honesta, como él siempre dice la verdad, entonces ya sólo queda preguntarle por las demás  $n - 1$  personas para poder clasificarlas en honestas y mentirosas.

Este algoritmo funciona porque, utilizando las diferentes respuestas que podemos obtener de nuestras parejas, siempre garantizamos que se cumpla la invariante sobre que hay más honestos que mentirosos.

Ahora bien, el tiempo para encontrar a una persona honesta está dado por la recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & n > 1 \end{cases}$$

donde  $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$  se refiere a resolver el problema con el mismo algoritmo, pero con a lo más  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  pares; mientras que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  se refiere al número de comparaciones por parejas que debemos de realizar para partir el problema aproximadamente a la mitad. Tenemos que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  es claramente lineal. Luego, el proceso *recursivo* del algoritmo se realiza sobre un número de pares  $\frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{8}$ , etc. Así, podemos considerar la serie geométrica:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^i &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot n\right)^i \\ &= n \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= n \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= n \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = n \cdot 1 = n \end{aligned}$$

Por lo que, la solución de la recurrencia es

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n) = \Theta(n)$$

Así, necesitamos  $\Theta(n)$  comparaciones para obtener a una persona honesta. Y como sólo resta hacer  $n - 1$  comparaciones para poder clasificar a las personas en honestas y mentirosas, entonces necesitamos  $\Theta(n - 1)$  comparaciones. Por lo tanto, necesitamos

$$\Theta(n) + \Theta(n - 1) = \Theta(n)$$

comparaciones en total para resolver el problema.

En particular, si  $n = 100$  entonces tenemos que  $n$  es par. Aplicamos la estrategia explicada anteriormente para resolver el problema, así que nosotros sabemos que el número mínimo de preguntas que debemos realizar en el peor caso es de  $100 + (100 - 1) = 199$ . También podemos notar que sí se puede resolver el problema en menos de 280 preguntas.

8. Suponga que tenemos dos arreglos ordenados  $A[1 \dots n]$  y  $B[1 \dots n]$  y un entero  $k$ . Describe un algoritmo para encontrar el  $k$ -ésimo elemento en la unión de  $A$  y  $B$ . Por ejemplo, si  $k = 1$ , tu algoritmo debe regresar al elemento más pequeño de  $A \cup B$ ; si  $k = n$ , tu algoritmo debe regresar la mediana de  $A \cup B$ . Puedes suponer que los arreglos no contienen duplicados. Tu algoritmo debe tener complejidad de tiempo  $\Theta(\log n)$ . Hint: Primero resuelve el caso especial  $k = n$ .

SOLUCIÓN: Primero resolveremos el caso especial  $k = n$ , es decir, analizaremos un algoritmo para encontrar al  $n$ -ésimo elemento de  $A \cup B$ . Como no tenemos elementos duplicados, y ambos arreglos son de longitud  $n$ , entonces  $|A \cup B| = 2n$ . Así, el  $n$ -ésimo elemento de  $A \cup B$  será su mediana. Para encontrarla, vamos a posicionarnos en las medianas de  $A$  y  $B$  por separado, los comparamos y vemos cómo son entre sí.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que

$$M_A = A[\lceil \frac{n}{2} \rceil] \leq B[\lceil \frac{n}{2} \rceil] = M_B$$

pues, en otro caso, basta con que intercambiémos los nombres. Como los arreglos están ordenados, entonces

$$\begin{aligned} A[1], \dots, A[\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1] &< A[\lceil \frac{n}{2} \rceil] \\ &\leq B[\lceil \frac{n}{2} \rceil] \\ &< B[\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1], \dots, B[n] \end{aligned}$$

Así, la mediana de  $A$  puede ser a lo más mayor o igual a los  $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  elementos anteriores a él en  $A$  y a los  $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  elementos anteriores a la mediana de  $B$ . Por lo que, a lo más tenemos

$$M_A = A[\lceil \frac{n}{2} \rceil] \geq 2 \left( \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \right) \approx n - 2 < n$$

Esto significa que no importa cómo vayan a estar acomodados los elementos anteriores a  $M_A$  en  $A \cup B$  junto con los elementos anteriores a  $M_B$  (de los cuales no sabemos nada), a lo más se tendría un número de ellos menor a  $n$ ; lo que implica que el  $n$ -ésimo elemento de  $A \cup B$  no puede estar en  $A[1], \dots, A[\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1]$  independientemente de los elementos menores a  $M_B$ , pues nunca sumarán más de  $n$  elementos en total. Así, podemos descartar esta parte.

Luego, tenemos al menos  $n$  elementos que son menores o iguales a  $M_B$ : los elementos  $B[1], \dots, B[\lceil \frac{n}{2} \rceil]$  y los elementos  $A[1], \dots, A[\lceil \frac{n}{2} \rceil]$ ; por lo que

$$2 \left( \lceil \frac{n}{2} \rceil \right) \approx n$$

Notemos además que pueden existir elementos que sean mayores o iguales a  $M_B$  y que estén ubicados a la derecha de  $M_A$  (de los cuales no sabemos nada). Por lo que, hay al menos  $n$  elementos en  $A \cup B$  hasta llegar a  $M_B$ . Por ende, el  $n$ -ésimo elemento no puede estar en  $B[\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1], \dots, B[n]$ , ya que contiene elementos que están *más allá* del elemento que buscamos. Así, podemos descartar esta parte.

De esta forma, descartamos una mitad de cada uno de los arreglos  $A$  y  $B$ . Aplicamos este mismo razonamiento en las mitades  $A[\lceil \frac{n}{2} \rceil], \dots, A[n]$  y  $B[1], \dots, B[\lceil \frac{n}{2} \rceil]$ ; y así sucesivamente. Si en algún punto llegamos a tener dos subarreglos con un solo elemento, entonces tenemos que regresar el menor de éstos o su promedio (dependiendo de cómo definamos la mediana). Y si el tamaño de los dos arreglos es dos, entonces tomamos al menor de los primeros dos elementos de cada arreglo, los sumamos con el menor de los segundos y el resultado lo dividimos entre dos para encontrar la mediana.

Este algoritmo funciona porque nos encargamos de descartar las mitades de los arreglos con los que vamos trabajando en las cuales no puede estar el  $n$ -ésimo elemento que buscamos. Así, garantizamos que siempre tenemos a los subarreglos donde el  $n$ -ésimo elemento de  $A \cup B$  sí puede estar. Además, al final realizamos las operaciones correspondientes para poder encontrar correctamente a nuestra mediana.

Luego, como siempre estamos trabajando con subarreglos de tamaño  $\frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{8}, \dots, 1$  para ambos  $A$  y  $B$  (en el peor de los casos) y el resto de nuestras operaciones nos cuestan tiempo constante, entonces este algoritmo en total nos toma

$$\Theta(\log n) + \Theta(\log n) = \Theta(\log n).$$

Finalmente, podemos generalizar este algoritmo para encontrar al  $k$ -ésimo elemento de  $A \cup B$  bajo las mismas hipótesis iniciales. Consideramos ahora a las medianas de los arreglos  $A$  y  $B$  como  $M_A = A[\lceil \frac{n}{2} \rceil]$  y  $M_B = B[k - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1]$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad, si tenemos que

$$B[k - \lceil \frac{n}{2} \rceil] < A[\lceil \frac{n}{2} \rceil] < B[k - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1]$$

entonces  $M_B - 1 < M_A < M_B$ . Esto quiere decir que como  $M_A$  es más grande que

$$(k - \lceil \frac{n}{2} \rceil) + (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) = k - 1$$



elementos de ambos arreglos  $A$  y  $B$ , entonces  $M_A$  debe de ser el elemento  $(k - 1) + 1 = k$  que buscamos (pues no hay duplicados). Luego, si  $M_A < M_B - 1$  entonces  $M_A$  puede ser mayor a lo más de

$$(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) + (k - \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) = k - 2$$

elementos. Y como  $k - 2 < k$ , entonces, usando un argumento similar para cuando resolvimos  $k = n$ , el  $k$ -ésimo elemento no puede estar en  $A[1], \dots, A[\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1]$ . Análogamente, tenemos al menos

$$(k - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) + \lceil \frac{n}{2} \rceil = k + 1$$

elementos menores o iguales que  $M_B$  en  $A \cup B$ . Como  $k < k + 1$ , entonces al menos hay  $k$  elementos al llegar a  $M_B$  en  $A \cup B$ . Así, podemos descartar a  $B[k - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2], \dots, B[n]$ .

De esta forma, descartamos una mitad de ambos arreglos  $A$  y  $B$ . Aplicamos este mismo razonamiento en las mitades  $A[\lceil \frac{n}{2} \rceil], \dots, A[n]$  y  $B[1], \dots, B[k - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1]$ , y así sucesivamente. Si al final obtenemos un arreglo de longitud 1 o 2, aplicamos la misma lógica que usamos cuando resolvimos  $k = n$ .

Este algoritmo funciona porque siempre garantizamos buscar en subarreglos donde el  $k$ -ésimo elemento de  $A \cup B$  debería de estar. Esto lo hacemos al ir descartando las mitades donde el elemento  $k$  definitivamente no podría estar.

Luego, como siempre estamos trabajando con subarreglos de tamaño  $\frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{8}, \dots, 1$  para ambos arreglos  $A$  y  $B$  (en el peor de los casos) y el resto de las operaciones nos cuestan tiempo constante, entonces el algoritmo en total nos toma

$$\Theta(\log n) + \Theta(\log n) = \Theta(\log n)$$

9. Considera que un río fluye de norte a sur con caudal constante. Suponga que hay  $n$  ciudades en ambos lados del río, es decir  $n$  ciudades a la izquierda del río y  $n$  ciudades a la derecha. Suponga también que dichas ciudades fueron numeradas de 1 a  $n$ , pero se desconoce el orden. Construye el mayor número de puentes entre ciudades con el mismo número, tal que dos puentes no se intersecten.

SOLUCIÓN: Supongamos que las ciudades a la izquierda del río son  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y las ciudades a la derecha del río son  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Como las ciudades fueron etiquetadas con un número del 1 al  $n$ , entonces definimos una función **etiqueta** que nos regresa el número que le fue asignado a cada una de las ciudades. Luego, escogemos las ciudades de un lado del río para poder Sin pérdida de generalidad, digamos que escogemos las ciudades del lado izquierdo del río para etiquetarlas y ordenarlas. Así, las ciudades de ese lado del río quedarían como:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \rightarrow a_1 \\ c_2 &= 2 \rightarrow a_2 \\ &\dots \\ c_n &= n \rightarrow a_n \end{aligned}$$

y

$$c_1 < c_2 < \dots < c_n$$

Ahora bien, mientras ordenamos las ciudades del lado izquierdo del río, también vamos a ir moviendo las ciudades que estaban asociadas