

Tarea Examen 3  
Análisis de Algoritmos

Fecha de entrega: Diciembre 11 de 2020.  
No se reciben tareas después de esta fecha.

Todas sus respuestas deben estar plenamente justificadas.

1. Un pescador está sobre un océano rectangular. El valor del pez en el punto  $(i, j)$  está dado por un arreglo  $A$  de dimensión 2  $(n \times m)$ . Diseña un algoritmo que calcule el máximo valor de pescado que un pescador puede atrapar en un camino desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha. El pescador solo puede moverse hacia abajo o hacia la derecha, como se ilustra en la siguiente figura
2. Dados dos árboles generadores  $T$  y  $R$  de una gráfica  $G$ . Muestra cómo encontrar la secuencia más corta de árboles generadores  $T_0, T_1, \dots, T_k$  tal que,  $T_0 = T$ ,  $T_k = R$ , y cada árbol  $T_i$  difiere del anterior  $T_{i-1}$  agregando y borrando una arista.
3. Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices. Un subconjunto  $S$  de los vértices de  $G$  es independiente si cualesquiera dos elementos de  $S$  no son adyacentes. En general, el problema de encontrar el conjunto independiente de una gráfica, es un problema NP-completo. Pero en algunos casos, este problema puede resolverse eficientemente. Sea  $T$  un árbol con raíz con  $n$  vértices. Cada nodo  $v \in T$  tiene asociado un peso  $w(v)$ . Utilizando programación dinámica, encuentre un algoritmo de tiempo lineal para encontrar el conjunto independiente de  $T$  de peso máximo.
4. Mientras caminas por la playa encuentras un cofre de tesoros. El cofre contiene  $n$  tesoros con pesos  $w_1, \dots, w_n$  y valores  $v_1, \dots, v_n$ . Desafortunadamente sólo tienes una maleta que solo tiene capacidad de carga  $M$ . Afortunadamente los tesoros se pueden romper si es necesario. Por ejemplo, la tercera parte de un tesoro  $i$  tiene peso  $\frac{w_i}{3}$  y valor  $\frac{v_i}{3}$ .
  - Describe un algoritmo voraz de tiempo  $\Theta(n \log n)$  que resuelve este problema.
  - ¿Se puede mejorar el tiempo de ejecución de tu algoritmo a  $\Theta(n)$ ? Si es un no, explica por qué, si es un sí menciona el cambio.
5. Un grupo de personas quiere comprar un ramo de flores, y el florista que las vende quiere maximizar sus ganancias al venderlas. Para esto ha decidido determinar el precio de las flores que cada cliente compra como sigue: el precio de su primera flor será  $(0 + 1) \times c$ , donde  $c$  es el precio original de la flor, el costo de su segunda flor será  $(1 + 1) \times c$  y así sucesivamente. Dado un grupo de  $n$  personas, un número  $m$  de flores que desean comprar, y el costo original  $c$  de las flores, diseñe un algoritmo que en tiempo  $O(n \log n)$  minimice el costo total que los clientes tienen que pagar para que entre todos compren todas las flores.
6. Sean  $k, n \in \mathbb{N}$ . El problema de los huevos, es el siguiente: Tenemos un edificio con  $n$  pisos, y  $k$  huevos. Sabemos que hay un piso  $f$  tal que si dejamos caer un huevo

desde el piso  $f$ , se estrellará. Si dejamos caer un huevo desde un piso  $r$  tal que  $r < f$  el huevo no se estrellará, y si dejamos caer el huevo desde un piso  $r \geq f$  el huevo se estrellará (es posible que  $f = 1$ , en cuyo caso, el huevo siempre se estrellará. Si  $f = n + 1$ , el huevo nunca se estrellará). **Una vez que un huevo se estrella, no lo podemos usar nuevamente.** Si dispone que  $k$  huevos, ¿Cuál es el menor número de experimentos (dejar caer un huevo) tiene que hacer para determinar  $f$ ? Sea  $E(k, n)$ , el mínimo número de experimentos que tiene que hacer para determinar  $f$ .

- a) Pruebe que  $E(1, n) = n$
  - b) Encuentre una recurrencia para  $E(k, n)$ . Utilize programación dinámica para encontrar  $E(k, n)$ . ¿Qué tan rápido es su algoritmo?
7. Construye el árbol de Huffman para codificar el siguiente texto:
- "La rabia es como el picante. Una pizca te despierta, pero en exceso te adormece"*
8. Supongamos que el mago Merlin tiene un conjunto  $A[1, \dots, n]$  de pociones las cuales puede mezclar de dos consecutivas con un costo de  $A[i] * A[i + 1]$  y resulta en la poción  $A[i] + A[i + 1]$ . Merlin quiere mezclar todas sus pociones pero con el mínimo costo.
- a) Diseña un algoritmo que garantice unir todas las pociones con un costo mínimo.
  - b) ¿Cuál es el mínimo costo si se tienen 5 pociones cuyos valores son: 1, 9, 6, 2, 3?