Estructuras Discretas
Tarea 2
Fecha de entrega: Viernes 3 de noviembre del 2017

Profesor: Karla Vargas
Ayudantes: Diana Montes y Pedro Cervantes

IMPORTANTE: Resuelve de manera ordenada los siguientes ejercicios. Indica claramente el número de pregunta que estás resolviendo, dónde empieza y dónde termina. Escribe de manera ordenada las preguntas, empieza por la 1, luego la 2, etc. Se penalizarán las tareas que no se entreguen con letra clara o con preguntas desordenadas.

1. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$.

   a) $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$. *b)* $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

2. Demuestre cada una de las siguientes desigualdades para los valores de $n \in \mathbb{N}$ especificados.

   a) $(1+\frac{1}{n})^n < n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$.

   b) $7n < 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 6$.

3. Demuestre que

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

   Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

4. Sea $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}^\times}$ la sucesión definida por $r_1 = 1$, y $r_{n+1} = 4r_n + 7$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $r_n = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)$ para cada $n \in \mathbb{N}^\times$.

5. Sea $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $d_0 = 2$, $d_1 = 3$, y $d_n = d_{n-1} \cdot d_{n-2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Encuentre una fórmula explícita para d_n, y demuestre por inducción que su fórmula funciona.

6. Sea $spar(n)$ la función definida como $spar(n) = 2+4+6+\cdots+2n$. Defina una implementación recursiva llamada $f(n)$ para la función $spar(n)$. Demuestre que $f(n) = n(n+1)$.

7. Una cadena de caracteres es palíndroma si es de la forma ww^R donde w^R es w escrita de atrás hacia adelante, por ejemplo 0110,*abbbba*,*holaaloh*.

Defina al conjunto de las cadenas palíndromas recursivamente, y demuestre mediante inducción estructural, que todas las cadenas palíndromas definidas tienen un número par de símbolos. Observación: a pesar de que la cadena *anitalavalatina* es un palíndromo, no cumple con la estructura ww^R.

8. La función snoc en listas se define como sigue

$$\text{snoc } \ c \ [x_1, ..., x_n] = [x_1, ..., x_n, c]$$

   a) De una implementación recursiva para snoc.

   b) Demuestre, usando la definición recursiva, que:

$$\text{snoc } \ c \ (xs \sqcup ys) = xs \sqcup (\text{snoc } \ c \ ys)$$

9. Considere la siguiente función misteriosa mist

$$\text{mist } [] \ ys = ys$$

$$\text{mist } (x : xs) \ ys = \text{mist } \ xs \ (x : ys)$$

   a) ¿Qué hace la función mist?

   b) Muestre que rev $xs =$ mist $xs[]$, con rev la operación reversa sobre cadenas definidas cómo sigue:

$$\text{rev } [] = []$$

$$\text{rev } (a : ls) = \text{rev } \ ls \sqcup [a]$$

10. Sea A una fórmula de la lógica proposicional cuyos únicos conectivos son $\wedge, \vee, \neg$. Definimos la fórmula dual de A, denotada como A_D, intercambiando $\wedge$ por $\vee$, $\vee$ por $\wedge$ y reemplazando a cada variable p por su negación $\neg p$. Por ejemplo, $A = (r \vee q) \wedge \neg p$, $A_D = (\neg r \wedge \neg q) \vee \neg\neg p$

   a) Defina recursivamente una función dual tal que $\text{dual}(A) = A_D$.

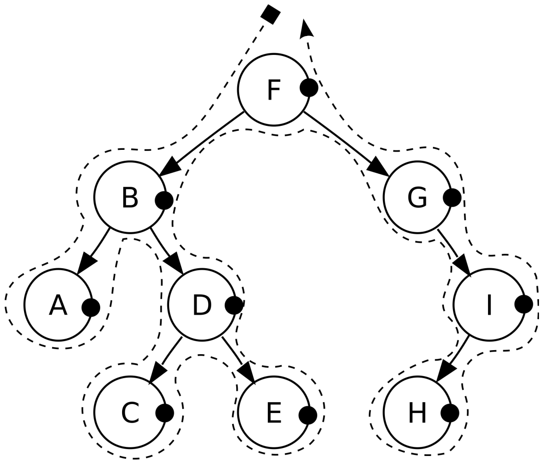
   b) Muestre que $\neg A \equiv A_D$ mediante inducción sobre las fórmulas.

11. Resuelva los siguientes incisos para árboles binarios

   a) Defina recursivamente una función $\text{hmi}(T)$ que devuelve la hoja más a la izquiera en un árbol binario.

   b) La distancia entre la raíz r de un árbol binario T hacía algún otro nodo p, es el número de aristas (líneas) que hay entre ambos nodos y la altura o profundidad de un árbol se define como la máxima distancia entre la raíz y alguna hoja más 1. Demuestre que el número máximo de hojas en un árbol de altura n es 2^{n-1}.

   c) De una definición recursiva que devuelva en una lista recorrido en post-orden de los árboles binarios. Si se tiene el siguiente árbol T, el resultado de el recorrido es el siguiente:



$$\text{post-order}(T) = [A, C, E, D, B, H, I, G, F]$$