

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas
Tarea 1

Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx

cuenta: 315121719

1 de septiembre de 2017

1. Demuestre que las siguientes expresiones están bien formadas.

- $-((a + b) * c) + 1$
- $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \vee r$

2. Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones atómicas, cuáles son proposiciones no atómicas y cuáles no son proposiciones. Justifique su respuesta.

a) El grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

b) Para pasar el examen es necesario que los alumnos estudien, hagan la tarea y asistan a clase.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque puede descomponerse en más proposiciones debido a que contiene los conectivos lógicos *es necesario*, e *y*.

c) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$

SOLUCIÓN: Esta oración no es una proposición ya que no puede calificarse como falso o verdadero.

d) $x \neq y$. (Donde el operador binario \neq evalúa a **verdadero** si x es distinto de y y a **falso** si x es igual a y)

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero (gracias a su operador binario), y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

e) Asgard es el mundo de los AEsir y en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque contiene el conectivo lógico *y*.

3. De los incisos de la pregunta anterior que son proposiciones, exhiba una traducción al lenguaje de la lógica proposicional.

a) p

Donde p : el grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

b) $p \rightarrow (q \wedge r \wedge s)$

Donde

- p : los alumnos pasan el examen.
- q : los alumnos estudian.
- r : los alumnos hacen la tarea.
- s : los alumnos asisten a clase.

d) p

Donde p : $x \neq y$

e) $p \wedge q$

Donde

- p : Asgard es el mundo de los AEsir.
- q : en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

4. Coloque los paréntesis en las siguientes expresiones de acuerdo a la precedencia y asociatividad de los operadores, sin preocuparse por la evaluación de la expresión.

a) $-b + b * 2 - 4 \cdot a \cdot c / 2 \cdot a$

SOLUCIÓN: $(((-b) + (b * 2)) - (((4 \cdot a) \cdot c) / 2) \cdot a))$

b) $p \wedge q \vee r \rightarrow s \leftrightarrow p \vee q$

SOLUCIÓN: $((((p \wedge q) \vee r) \rightarrow s) \leftrightarrow (p \vee q))$

c) $a < b \wedge b < c \rightarrow a < b$

SOLUCIÓN: $a < b \wedge b < c \rightarrow a < b$

d) $a \cdot b - a \cdot c \leftrightarrow a > 0 \wedge b > c$

SOLUCIÓN: $((a \cdot b) - (a \cdot c)) \leftrightarrow ((a > 0) \wedge (b > c))$

5. Ejecute las siguientes sustituciones textuales simultáneas, fijándose bien en la colocación de los paréntesis. Quite los paréntesis que son redundantes.

a) $5x + 3y * a - 4y[y := x]$

SOLUCIÓN: La sustitución se aplica a la expresión más cercana, que en este caso es $4y$.

$$\begin{aligned} 5x + 3y * a - 4y[y := x] &= 5x + 3y * a - 4(x) \\ &= 5x + 3y * a - 4x \end{aligned}$$

b) $(5x + 3y * a - 4y)[y := x]$

SOLUCIÓN: La sustitución se aplica a toda la expresión.

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y := x] &= (5x + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5x + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

c) $(5x + 3y * a - 4y)[y, x := x, y]$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y, x := x, y] &= (5(y) + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5y + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

d) $(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3]$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3] &= (5x + 3(x) * a - 4(x))[x := 3] \\ &= (5(3) + 3((3))) * a - 4((3)) \\ &= 15 + 9 * a - 12\end{aligned}$$

6. Para las siguientes expresiones, determine a qué esquema pertenecen, dé el rango y conector principal. Justifique su respuesta.

a) $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r$

SOLUCIÓN: Esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q)[p, q := a \vee b, r][a, b := p \wedge q, r \rightarrow s] &= ((a \vee b) \rightarrow r)[a, b := p \wedge q, r \rightarrow s] \\ &= (((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r) \\ &= ((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conector principal es \rightarrow , de donde su rango izquierdo es $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s))$ y su rango derecho es r .

b) $p \vee q \rightarrow r \rightarrow s \leftrightarrow t$

SOLUCIÓN: Primero, le colocamos paréntesis a la expresión según la precedencia y la asociatividad de los conectivos.

$$(((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)$$

Así, esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q)[p, q := a \rightarrow b, t][a, b := p \vee q, r \rightarrow s] &= ((a \rightarrow b) \leftrightarrow t)[a, b := p \vee q, r \rightarrow s] \\ &= (((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conector principal es \leftrightarrow , de donde su rango derecho es t y su rango izquierdo es $((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$.

7. Para cada una de las expresiones del ejercicio anterior, construya los árboles de análisis sintáctico.
8. Llene las partes que faltan y escriba en qué consiste la expresión E .
9. Utilizando únicamente la tabla de equivalencias dada en clase, demuestre las siguientes equivalencias lógicas mediante razonamiento ecuacional. Justifique cada paso.

a) $(A \vee B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned}(A \vee B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \vee B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg A \vee Q) \wedge (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\ &\equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow\end{aligned}$$

□

b) $(A \wedge B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \vee (B \rightarrow Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 (A \wedge B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\
 &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\
 &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee (Q \vee Q) && \text{idempotencia} \\
 &\equiv (\neg A \vee Q) \vee (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\
 &\equiv (A \rightarrow Q) \vee (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow
 \end{aligned}$$

□

c) $(A \wedge B) \rightarrow Q \equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 (A \wedge B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\
 &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\
 &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee Q) && \text{asociatividad} \\
 &\equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow
 \end{aligned}$$

□

10. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si son o no satisfacibles. En caso de serlo, muestre un modelo para cada una de ellas, y en caso de no serlo, demuestre que cada estado evalúa a falso.

a) $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$

SOLUCIÓN: La fórmula no es satisfacible. Para demostrar que cada estado evalúa a falso, mostraremos su respectiva tabla de verdad.

P	Q	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \wedge \neg Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

b) $(\neg P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow ((S \wedge T) \rightarrow (U \vee P)))$

SOLUCIÓN: La fórmula es satisfacible. El modelo \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(P) = 1, \mathcal{I}(Q) = \mathcal{I}(R) = \mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(T) = \mathcal{I}(U) = 0$ hace que la expresión evalúe a verdadero.

11. Decida si los siguientes conjuntos son satisfacibles. Justifique su respuesta.

- $\Gamma = \{p \rightarrow q, p \vee r \wedge s, q \rightarrow t\}$
- $\Gamma = \{p \vee q \vee r, \neg(r \vee \neg s), s \leftrightarrow t, p \rightarrow \neg t, q \rightarrow (p \vee \neg t)\}$

12. Para los siguientes argumentos, decida si son correctos y en caso de no serlo dé una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión.

- $p \rightarrow q, p \vee r, \neg(r \wedge s), / \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow (q \vee \neg s)$

$$\blacksquare p \vee q, \neg(p \wedge r), \neg q / \therefore r \rightarrow s$$

13. Construya las siguientes derivaciones.

$$\blacksquare p \wedge (\neg r \wedge \neg w), l, r \wedge z \vdash \neg r \wedge (l \wedge z)$$

$$\blacksquare p \vee \neg(r \vee s), r, l \rightarrow \neg p \vdash \neg l$$

$$\blacksquare \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow q)$$

14. Construya la derivación del siguiente argumento para demostrar que es correcto.

Si procrastinas en Helheim o en Asgard, entonces eres un AEsir. Procastinas en Helheim. Pero, ser gobernado por Odín, es necesario para ser un AEsir. Por lo tanto, eres gobernado por Odín o procrastinas en Asgard.

15. Usando Tableaux, determine la correctud del siguiente argumento.

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R, P, R \rightarrow T / \therefore T \vee Q$$

16. Usando Tableaux, demuestre que la siguiente fórmula es una tautología.

$$p \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow p \vee q$$