

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas
Tarea 3

Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

3 de noviembre de 2017

1. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$.

a) $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.

$n = 1$. Este caso se cumple ya que

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1)^3 = (2(1)-1)^3 = (1)^3 = 1 = 1(2(1)-1) = (1)^2(2(1)^2-1)$$

- Hipótesis de inducción.

Supongamos que el resultado es cierto para $n \geq 1$, es decir, supongamos que se cumple

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

- Paso inductivo.

Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n+1$, es decir, que se cumple

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1)^3 = (n+1)^2(2(n+1)^2-1) = (n+1)^2(2n^2+4n+1).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} &= \left(\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 \right) + (2(n+1)-1)^3 \\ &= (n^2(2n^2-1)) + (2(n+1)-1)^3 \\ &= (2^4 - n^2) + (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1) \\ &= 2^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \\ &= (n+1)^2(2n^2+4n+1) \end{aligned}$$

por H.I.

desarrollando términos

agrupando términos semejantes

factorizando

□

b) $\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.

$n = 0$ Este caso se cumple ya que

$$\sum_{i=0}^0 \frac{i}{2^i} = \frac{0}{1} = 0 = 2 - 2 = 2 - \frac{2}{1} = 2 - \frac{0+2}{2^0}$$

- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 0$, es decir, supongamos que se cumple $\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.
- Paso inductivo.
Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n + 1$, es decir, que se cumple $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$
Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{2^i} &= \left(\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i} \right) + \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \right) && \text{por H.I.} \\
&= \left(2 - \frac{n+2}{2^n} \right) + \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \right) && \text{asociatividad} \\
&= 2 - \left(\frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \right) && \text{resolviendo suma} \\
&= 2 - \left(\frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \right) && \text{simplificando} \\
&= 2 - \left(\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} \right) && \text{simplificando} \\
&= 2 - \left(\frac{n+3}{2^{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

□

2. Demuestre cada una de las siguientes desigualdades para los valores de $n \in \mathbb{N}$ especificados.

- a) $(1 + \frac{1}{n})^n < n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.
 $n = 3$. Este caso se cumple ya que $(1 + \frac{1}{3})^3 = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27} < 3$.
- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 3$, es decir, supongamos que se cumple $(1 + \frac{1}{n})^n < n$.
- Paso inductivo.
Tenemos que demostrar que la fórmula se cumple para $n + 1$, es decir, que se cumple $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} < n + 1$.
Sabemos que, por propiedades en los números reales, se cumple $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, y por lo tanto, $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$. Además, si a y b son reales, se tiene que $a < b \Rightarrow a^n < b^n$, $n \in \mathbb{N}$. Podemos utilizar este resultado con la desigualdad $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$, y desarrollar para utilizar nuestra hipótesis.

Entonces

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} &< \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} && \text{por la observación anterior} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) && \text{descomponiendo la expresión anterior} \\
&< n \left(1 + \frac{1}{n} \right) && \text{por H.I.} \\
&= n + 1 && \text{simplificando}
\end{aligned}$$

□

b) $7n < 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 6$

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.

$n = 6$. Este caso se cumple ya que $7(6) = 42 < 64 = 2^6$.

- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 6$, es decir, supongamos que se cumple $7n < 2^n$.

- Paso inductivo.

Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n+1$, es decir, que se cumple $7(n+1) < 2^{n+1}$.

Entonces

$$\begin{aligned} 7(n+1) &= 7n + 7 && \text{simplificando} \\ &< 2^n + 7 && \text{por H.I.} \\ &< 2^n + 2^n && \text{ya que } 7 < 2^n \text{ con } n \geq 6 \\ &= 2 \cdot 2^n && \text{simplificando} \\ &= 2^{n+1} && \text{simplificando} \end{aligned}$$

□

3. Demuestre que

$$\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.

$n = 2$. Este caso se cumple ya que $\prod_{i=2}^2 \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2(2)}$

- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 2$, es decir, supongamos que se cumple $\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

- Paso inductivo.

Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n+1$, es decir, que se cumple $\prod_{i=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^{n+1} &= \left(\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2} \right) \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
&= \left(\frac{n+1}{2n} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) && \text{por H.I.} \\
&= \left(\frac{n+1}{2n} \right) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \right) && \text{resolviendo resta} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+2n)}{2n(n+1)^2} && \text{resolviendo multiplicación} \\
&= \frac{n^2+2n}{2n(n+1)} && \text{eliminando el término } (n+1) \\
&= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} && \text{factorizando} \\
&= \frac{n+2}{2n+2} && \text{eliminando el término } n \text{ y simplificando}
\end{aligned}$$

□

4. Sean $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}^\times}$ la sucesión definida por $r_1 = 1$, y $r_{n+1} = 4r_n + 7$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $r_n = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)$ para cada $n \in \mathbb{N}^\times$.
5. Sean $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $d_0 = 2, d_1 = 3$, y $d_n = d_{n-1} \cdot d_{n-2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Encuentre una fórmula explícita para d_n , y demuestre por inducción que su fórmula funciona.
6. Sea $spar(n)$ la función definida como $spar(n) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$. Defina una implementación recursiva llamada $f(n)$ para la función $spar(n)$. Demuestre que $f(n) = n(n+1)$.
7. Una cadena de caracteres es palíndroma si es de la forma ww^R donde w^R es w escrita de atrás hacia adelante, por ejemplo, 0110, *abbbba*, *holaaloh*. Defina al conjunto de las cadenas palíndromas recursivamente, y demuestre mediante inducción estructural, que todas las cadenas palíndromas definidas tienen un número par de símbolos.
8. La función *snoc* en listas se define como sigue:

$$snoc \ c [x_1, \dots, x_n] = [x_1, \dots, x_n, c]$$

- a) De una implementación recursiva para *snoc*.
- b) Demuestre, usando la definición recursiva, que:

$$snoc \ c \ (xs_ys) = xs_ (snoc \ c \ ys)$$

9. Considere la siguiente función misteriosa *mist*

$$\begin{aligned}
mist \ [] \ ys &= ys \\
mist \ (x : xs) \ ys &= mist \ xs \ (x : ys)
\end{aligned}$$

- a) ¿Qué hace la función *mist*?
- b) Muestre que $rev \ xs = mist \ xs \ []$, con *rev* la operación reversa sobre cadenas definidas cómo sigue:

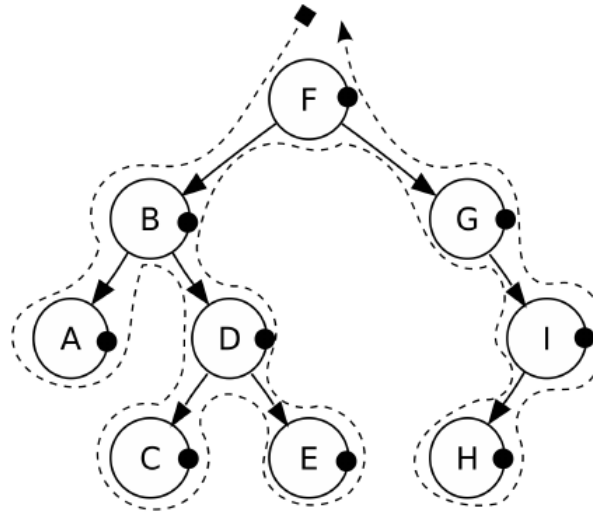
$$\begin{aligned} rev [] &= [] \\ rev (a : ls) &= rev ls_ [a] \end{aligned}$$

10. Sea A una fórmula de la lógica proposicional cuyos únicos conectivos son \wedge, \vee, \neg . Definimos la fórmula dual de A , denotada como A_D , intercambiando \wedge por \vee , \vee por \wedge y reemplazando a cada variable p por su negación $\neg p$. Por ejemplo, $A = (r \vee q) \wedge \neg p$, $A_D = (\neg r \wedge \neg q) \vee \neg \neg p$.

- Defina recursivamente una función dual tal que $dual(A) = A_D$.
- Muestre que $\neg A \equiv A_D$ mediante inducción sobre fórmulas.

11. Resuelva los siguientes incisos para árboles binarios.

- Defina recursivamente una función $hmi(T)$ que devuelve la hoja más a la izquierda en un árbol binario.
- La distancia entre la raíz r de un árbol binario T hacia algún otro nodo p es el número de aristas (líneas) que hay entre ambos nodos y la altura o profundidad de un árbol se define como la máxima distancia entre la raíz y alguna hoja más 1. Demuestre que el número máximo de hojas en un árbol de altura n es 2^{n-1} .
- De una definición recursiva que devuelva en una lista el recorrido post-orden de los árboles binarios. Si se tiene el siguiente árbol T , el resultado del recorrido es el siguiente:



$$\text{post-order}(T) = [A, C, E, D, B, H, I, G, F]$$