Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

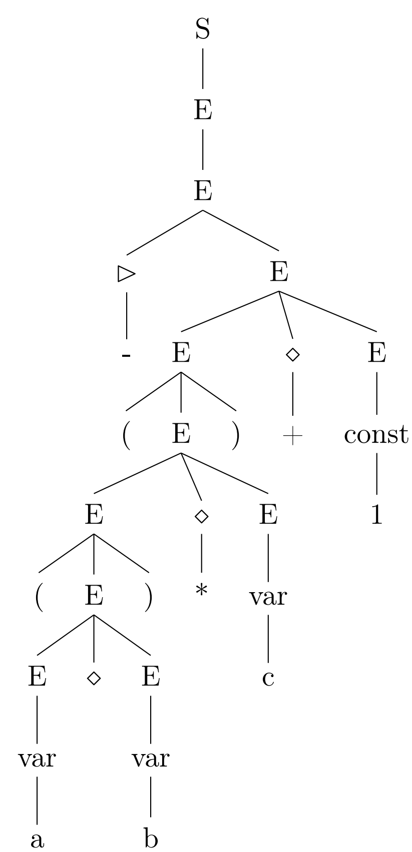
Estructuras Discretas
Tarea 1

Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

1 de septiembre de 2017

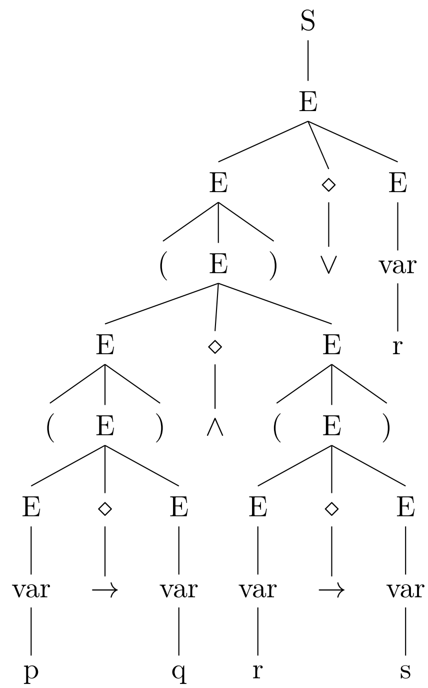
1. Demuestre que las siguientes expresiones están bien formadas.

   - $-((a+b)*c)+1$
     Solución: Para mostrar que la expresión está bien formada, daremos su respectivo árbol de derivación.



- $((p \to q) \land (r \to s)) \lor r$

  Solución: Para mostrar que la expresión está bien formada, daremos su respectivo árbol de derivación.

2. Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones atómicas, cuáles son proposiciones no atómicas y cuáles no son proposiciones. Justifique su respuesta.

   a) El grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

      Solución: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

   b) Para pasar el examen es necesario que los alumnos estudien, hagan la tarea y asistan a clase.

      Solución: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque puede descomponerse en más proposiciones debido a que contiene los conectivos lógicos *es necesario*, e *y*.

   c) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$

      Solución: Esta oración no es una proposición ya que no puede calificarse como falso o verdadero.

   d) $x \neq y$. (Donde el operador binario $\neq$ evalúa a **verdadero** si x es distinto de y y a **falso** si x es igual a y)

      Solución: Esta oración es una proposición ya que puede calificase como falso o verdadero (gracias a su operador binario), y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

   e) Asgard es el mundo de los AEsir y en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

      Solución: Esta oración es una proposción ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque contiene el conectivo lógico *y*.

3. De los incisos de la pregunta anterior que son proposiciones, exhiba una traducción al lenguaje de la lógica proposicional.

   a) p
   Donde p : el grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

   b) $p \to (q \wedge r \wedge s)$
   Donde
      - p : los alumnos pasan el examen.
      - q : los alumnos estudian.
      - r : los alumnos hacen la tarea.
      - s : los alumnos asisten a clase.

   d) p
   Donde $p :\ x \neq y$

   e) $p \wedge q$
   Donde
      - p : Asgard es el mundo de los AEsir.
      - q : en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

4. Coloque los paréntesis en las siguientes expresiones de acuerdo a la precedencia y asociatividad de los operadores, sin preocuparse por la evaluación de la expresión.

   a) $-b + b**2 - 4 \cdot a \cdot c/2 \cdot a$
   Solución: $(((-b) + (b**2)) - ((((4 \cdot a) \cdot c)/2) \cdot a))$

   b) $p \wedge q \vee r \to s \leftrightarrow p \vee q$
   Solución: $((((p \wedge q) \vee r) \to s) \leftrightarrow (p \vee q))$

   c) $a < b \wedge b < c \to a < b$
   Solución: $a < b \wedge b < c \to a < b$

   d) $a \cdot b - a \cdot c \leftrightarrow a > 0 \wedge b > c$
   Solución: $(((a \cdot b) - (a \cdot c)) \leftrightarrow ((a > 0) \wedge (b > c)))$

5. Ejecute las siguientes sustituciones textuales simultáneas, fijándose bien en la colocación de los paréntesis. Quite los paréntesis que son redundantes.

   a) $5x + 3y * a - 4y[y := x]$
   Solución: La sustitución se aplica a la expresión más cercana, que en este caso es $4y$.

$$\begin{aligned} 5x + 3y * a - 4y[y := x] &= 5x + 3y * a - 4(x) \\ &= 5x + 3y * a - 4x \end{aligned}$$

   b) $(5x + 3y * a - 4y)[y := x]$
   Solución: La sustitución de aplica a toda la expresión.

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y := x] &= (5x + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5x + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

   c) $(5x + 3y * a - 4y)[y,\ x := x,\ y]$
   Solución:

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y,\ x := x,\ y] &= (5(y) + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5y + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

d) $(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3]$
SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3] &= (5x + 3(x) * a - 4(x))[x := 3]\\ &= (5(3) + 3((3))) * a - 4((3))\\ &= 15 + 9 * a - 12\end{aligned}$$

6. Para las siguientes expresiones, determine a qué esquema pertenecen, dé el rango y conectivo principal. Justifique su respuesta.

a) $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r$
SOLUCIÓN: Esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q)[p,\ q := a \vee b,\ r][a,\ b := p \wedge q,\ r \rightarrow s] =& ((a \vee b) \rightarrow r)[a,\ b := p \wedge q,\ r \rightarrow s]\\ =& (((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r)\\ =& ((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conectivo principal es $\rightarrow$, de donde su rango izquierdo es $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s))$ y su rango derecho es r.

b) $p \vee q \rightarrow r \rightarrow s \leftrightarrow t$
SOLUCIÓN: Primero, le colocamos paréntesis a la expresión según la precedencia y la asociatividad de los conectivos.

$$(((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)$$

Así, esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

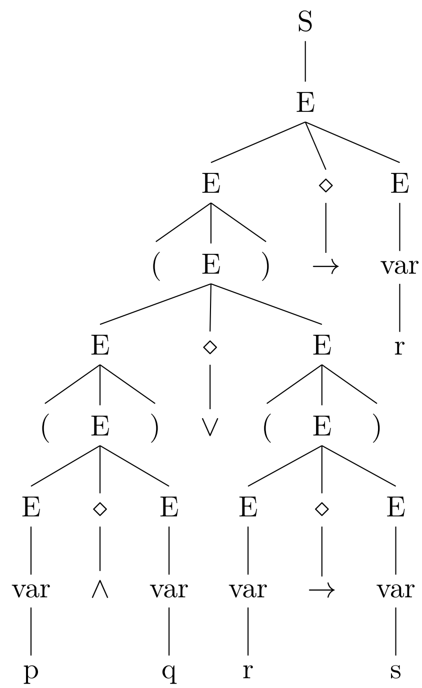
$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q)[p,\ q := a \rightarrow b,\ t][a,\ b := p \vee q,\ r \rightarrow s] =& ((a \rightarrow b) \leftrightarrow t)[a,\ b := p \vee q,\ r \rightarrow s]\\ =& (((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conectivo principal es $\leftrightarrow$, de donde su rango derecho es t y su rango izquierdo es $((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$.

7. Para cada una de las expresiones del ejercicio anterior, construya los árboles de análisis sintáctico.

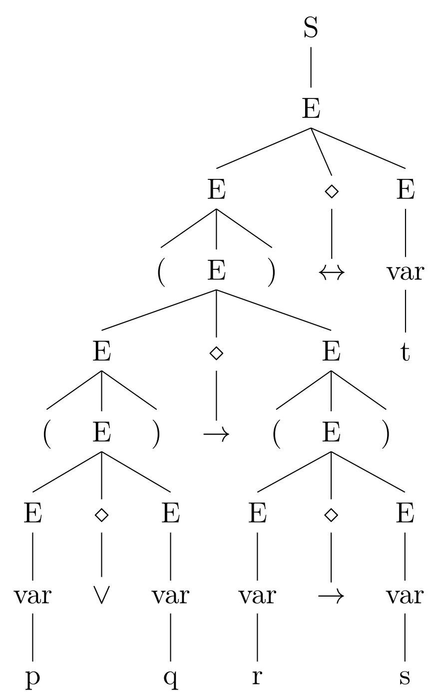
   a) $((p \wedge q) \vee (r \to s)) \to r$

      SOLUCIÓN:



   b) $p \vee q \to r \to s \leftrightarrow t$

      SOLUCIÓN:



8. Llene las partes que faltan y escriba en qué consiste la expresión E.

a) $$\frac{p \quad\quad\quad\quad \leftrightarrow p \vee 0}{p \vee 0 \vee Q \quad \leftrightarrow \quad ?}$$

Solución: Si consideramos la expresión $E = r \vee Q$, entonces, suponiendo que $p \leftrightarrow p \vee 0$, la regla de Leibniz implica que $E[r ::= p \vee 0] = E[r ::= p]$; en otras palabras, obtenemos la siguiente instancia de la regla Leibniz.

$$\frac{p \quad\quad\quad\quad \leftrightarrow p \vee 0}{p \vee 0 \vee Q \quad \leftrightarrow \quad p \vee Q}.$$

b) $$\frac{b \cdot c \quad\quad\quad\quad = y + w}{x + y + w \quad = \quad ?}$$

Solución: Si consideramos la expresión $E = x + z$, entonces, suponiendo que $b \cdot c = y + w$, la regla de Leibniz implica que $E[z ::= y + w] = E[z ::= b \cdot c]$; en otras palabras, obtenemos la siguiente instancia de la regla de Leibniz.

$$\frac{b \cdot c \quad\quad = \quad y + w}{x + y + w \quad = x + b \cdot c}.$$

9. Utilizando únicamente la tabla de equivalencias dada en clase, demuestre las siguientes equivalencias lógicas mediante razonamiento ecuacional. Justifique cada paso.

a) $(A \vee B) \to Q \equiv (A \to Q) \wedge (B \to Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(A \vee B) \to Q &\equiv \neg(A \vee B) \vee Q && \text{equivalencia de } \to \\
&\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\
&\equiv (\neg A \vee Q) \wedge (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\
&\equiv (A \to Q) \wedge (B \to Q) && \text{equivalencia de } \to
\end{aligned}$$

□

b) $(A \wedge B) \to Q \equiv (A \to Q) \vee (B \to Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(A \wedge B) \to Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \to \\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee (Q \vee Q) && \text{idempotencia} \\
&\equiv (\neg A \vee Q) \vee (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\
&\equiv (A \to Q) \vee (B \to Q) && \text{equivalencia de } \to
\end{aligned}$$

□

c) $(A \wedge B) \to Q \equiv A \to (B \to Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(A \wedge B) \to Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \to \\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\
&\equiv \neg A \vee (\neg B \vee Q) && \text{asociatividad} \\
&\equiv A \to (B \to Q) && \text{equivalencia de } \to
\end{aligned}$$

□

10. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si son o no satisfacibles. En caso de serlo, muestre un modelo para cada una de ellas, y en caso de no serlo, demuestre que cada estado evalúa a falso.

   a) $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$

   SOLUCIÓN: La fórmula no es satisfacible. Para demostrar que cada estado evalúa a falso, mostraremos su respectiva tabla de verdad.

P	Q	$((P \vee Q)$	$\wedge$	$\neg P)$	$\wedge$	$\neg Q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1

   b) $(\neg P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow ((S \wedge T) \rightarrow (U \vee P)))$

   SOLUCIÓN: La fórmula es satisfacible. El modelo $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(P) = 1$, $\mathcal{I}(Q) = \mathcal{I}(R) = \mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(T) = \mathcal{I}(U) = 0$ hace que la expresión evalúe a verdadero.

11. Decida si los siguientes conjuntos son satisfacibles. Justifique su respuesta.

   - $\Gamma = \{p \rightarrow q,\ p \vee r \wedge s,\ q \rightarrow t\}$

     SOLUCIÓN: El conjunto sí es satisfacible, basta considerar el modelo $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(s) = \mathcal{I}(t) = 1$.

   - $\Gamma = \{p \vee q \vee r,\ \neg(r \vee \neg s),\ s \leftrightarrow t,\ p \rightarrow \neg t,\ q \rightarrow (p \vee \neg t)\}$

     SOLUCIÓN: El conjunto no es satisfacible. Supongamos que existe una interpretación $\mathcal{I}$ que satisface a Γ. Entonces se tiene que $\mathcal{I}(\neg(r \vee \neg s)) = 1$, por lo que $\mathcal{I}(r) = 0$ e $\mathcal{I}(s) = 1$. Así $\mathcal{I}(t) = 1$ por $\mathcal{I}(s \leftrightarrow t) = 1$. Además $\mathcal{I}(p) = 0$ por $\mathcal{I}(p \rightarrow \neg t) = 1$. Así, $\mathcal{I}(q) = 0$ por $\mathcal{I}(q \rightarrow (p \vee \neg t)) = 1$. Pero con estos valores, $\mathcal{I}(p \vee q \vee r) = 0$. Por lo tanto, nuestro conjunto no es satisfacible.

12. Para los siguientes argumentos, decida si son correctos y en caso de no serlo dé una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión.

   - $p \rightarrow q,\ p \vee r,\ \neg(r \wedge s),\ / \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow (q \vee \neg s)$

     SOLUCIÓN: Sí es correcto el argumento. Para que una interpretación $\mathcal{I}$ haga falsa a la conclusión, debe de cumplir que $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 0$ e $\mathcal{I}(s) = 1$. Entonces, para que $\mathcal{I}$ haga verdadera a $p \vee r$, se necesita que $\mathcal{I}(r) = 1$. Pero entonces, $\neg(r \wedge s)$ evalúa a falso. Así, toda interpretación que haga falsa a la conclusión debe de hacer falsa a al menos una de las premisas.

   - $p \vee q,\ \neg(p \wedge r),\ \neg q\ / \therefore r \rightarrow s$

     SOLUCIÓN: Sí es correcto el argumento. Cualquier interpretación $\mathcal{I}$ que haga falsa a la conclusión debe de cumplir que $\mathcal{I}(r) = 1$ e $\mathcal{I}(s) = 0$. En este caso, para que $\neg(p \wedge r)$ evalúe a veradero, se necesita que $\mathcal{I}(p) = 0$. Además, para que $p \vee q$ evalúe a verdadero, tiene que suceder que $\mathcal{I}(q) = 1$. Sin embargo, esto último implica que $\neg q$ evalúa a falso, y por lo tanto, es imposible hacer verdaderas a todas las premisas si la conclusión es falsa.

13. Construya las siguientes derivaciones.

   - $p \wedge (\neg r \wedge \neg w),\ l,\ r \wedge z \vdash \neg r \wedge (l \wedge z)$
     SOLUCIÓN:

1. $p \wedge (\neg r \wedge \neg w)$	Premisa
2. l	Premisa
3. $r \wedge z$	Premisa
4. z	E$\wedge$ 3
5. $\neg r \wedge \neg w$	E$\wedge$ 1
6. $\neg r$	E$\wedge$ 5
7. $l \wedge z$	I$\wedge$ $2, 4$
8. $\neg r \wedge (l \wedge z)$	I$\wedge$ $6, 7$

   - $p \vee \neg(r \vee s),\ r,\ l \to \neg p \vdash \neg l$
     SOLUCIÓN:

1. $p \vee \neg(r \vee s)$	Premisa
2. r	Premisa
3. $l \to \neg p$	Premisa
4. $r \vee s$	I$\vee$ 2
5. p	SD $1, 4$
6. $\neg\neg p$	RE 5
7. $\neg l$	MT $6, 3$

   - $\vdash (p \to q) \to (p \vee q \to q)$
     SOLUCIÓN:

1. $p \to q$	Premisa
2. $p \vee q$	Premisa
3. $\neg\neg p \vee q$	RE 2
4. $\neg p \to q$	RE 3
5. q	DCS $1, 4$
6. $p \to q \vdash p \vee q \to q$	MTD $1 - 5$
7. $\vdash (p \to q) \to (p \vee q \to q)$	MTD $1 - 6$

14. Construya la derivación del siguiente argumento para demostrar que es correcto.

    Si procastinas en Helheim o en Asgard, entonces eres un AEsir. Procastinas en Helheim. Pero, ser gobernado por Odín, es necesario para ser un AEsir. Por lo tanto, eres gobernado por Odín o procastinas en Asgard.

    Demostración. Primero, transformamos el argumento a lenguaje de lógica proposicional. Asignamos las siguientes variables proposicionales:

    - p : Procastinas en Helheim.
    - q : Procastinas en Asgard.

- r : Eres un AEsir.
- s : Eres gobernado por Odín.

Así, el argumento a verificar es: $(p \vee q) \to r,\ p,\ r \to s\ /\therefore\ s \vee q$.

Entonces

1.	$(p \vee q) \to r$	Premisa
2.	p	Premisa
3.	$r \to s$	Premisa
4.	$p \vee q$	I$\vee$ 2
5.	r	MP $4, 1$
6.	s	MP $5, 3$
7.	$s \vee q$	I$\vee$ 6

Por lo tanto, el argumento es correcto. □

15. Usando Tableaux, determine la correctud del siguiente argumento.

$$(P \vee Q) \to R,\ P,\ R \to T\ /\therefore T \vee Q$$

Solución: Para determinar la correctud del argumento, debemos comprobar que la siguiente fórmula es una tautología

$$(((P \vee Q) \to R) \wedge P \wedge (R \to T)) \to (T \vee Q)$$

Para ello, debemos constuir el Tableaux para la negación de la fórmula anterior, es decir,

$$((\neg P \wedge Q) \vee R) \wedge P \wedge (\neg R \vee T) \wedge \neg T \wedge \neg Q$$

Así,

$$
\begin{array}{llll}
1. & (\neg P \wedge Q) \vee R\ \checkmark & & \\
2. & \neg R \vee T\ \checkmark & & \\
3. & P\ \checkmark & & \\
4. & \neg T\ \checkmark & & \\
5. & \neg Q & & \\
6. & \neg R\ \checkmark \qquad T\ \checkmark & & \text{ext. de } \beta \text{ en } 2 \\
7. & \neg P \wedge Q\ \checkmark \quad R\ \checkmark \quad \underset{4,6}{\otimes} & & \text{ext. de } \beta \text{ en } 1 \\
8. & \neg P \qquad \underset{6,7}{\otimes} & & \text{ext. de } \alpha \text{ en } 7 \\
 & \underset{3,8}{\otimes} & &
\end{array}
$$

Como el Tableaux es cerrado, eso significa que la fórmula es una tautología, y por lo tanto, el argumento es correcto.

16. Usando Tableaux, demuestre que la siguiente fórmula es una tautología.

$$p \vee (\neg p \wedge q) \to p \vee q$$

Demostración. Debemos construir el Tableaux de la negación de la fórmula, es decir, hay que constuir el Tableaux para

$$p \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg p \wedge \neg q$$

Así,

$$\begin{array}{lcccl}
1. & & p \vee (\neg p \wedge q)\ \checkmark & & \\
2. & & \neg p\ \checkmark & & \\
3. & & \neg q\ \checkmark & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
4. & p\ \checkmark & & \neg p \wedge q\ \checkmark & \text{ext. de } \beta \text{ en } 1 \\
5. & \underset{2,4}{\otimes} & & q\ \checkmark & \text{ext. de } \alpha \text{ en } 4 \\
 & & & \underset{3,4}{\otimes} &
\end{array}$$

Como el Tableaux es cerrado, eso significa que la fórmula es una tautología.

□