

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas
Tarea 2

Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

2 de octubre de 2017

1. Sean $f^{(1)}, g^{(2)}$ símbolos de función, $P^{(1)}$ símbolo de predicado. Clasifica las siguientes fórmulas como términos, fórmulas atómicas, fórmulas cuantificadas (con cuantificadores pero con presencias de variables libres) o enunciados (fórmulas con cuantificadores sin variables libres); según el caso, justifica tu respuesta.

a) $f(g(a, b))$

SOLUCIÓN: Es un término. Como las constantes a y b son términos, entonces $g(a, b)$ también es un término ya que es un símbolo de función aplicado a términos.

b) $\neg \forall x \forall y (P(f(x)) \wedge Q(x, y))$

SOLUCIÓN: Es un enunciado, ya que es una fórmula cuantificada sin variables libres.

c) $P(g(f(x), y))$

SOLUCIÓN: Es una fórmula atómica, ya que es un símbolo de predicado aplicado a un término.

d) $\exists x \forall y \exists z (R(x, y, z) \wedge Q(x, f(y)) \rightarrow P(g(x, y)))$

SOLUCIÓN: Es un enunciado, ya que es una fórmula cuantificada sin variables libres.

e) $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge R(y, z)) \vee \exists z (Q(x, y, z))$

SOLUCIÓN: Es una fórmula cuantificada, ya que las variables x y y aparecen como variables libres en la fórmula $\exists z (Q(x, y, z))$.

2. Traduce los siguientes enunciados a lógica de predicados. Indica de manera clara la traducción de los predicados que utilizarás y el Universo de discurso.

SOLUCIÓN: El Universo del discurso serán todas las personas, mientras que los predicados a utilizar son

- $V(x)$: x es voluntario.
- $A(x, y)$: x ayuda a y .
- $M(x)$: x es mexicano.
- $L(x)$: x es militar.
- $J(x)$: x es japonés.
- $N(x)$: x es alemán.

Además, usaremos la constante a : Armando.

- a) Todos los voluntarios ayudan a alguien.

SOLUCIÓN: $\forall x(V(x) \rightarrow \exists y(A(x, y)))$

- b) Armando puede ayudar únicamente a un mexicano.

SOLUCIÓN: $\forall x\forall y(M(x) \wedge M(y) \wedge A(a, x) \wedge A(a, y) \rightarrow x = y)$

- c) Ningún militar puede ayudar a todas las personas.

SOLUCIÓN: $\forall x(L(x) \rightarrow \exists y(\neg A(x, y)))$

- d) Hay un mexicano al que todos los militares y japoneses lo ayudan.

SOLUCIÓN: $\exists x\forall y(M(x) \wedge (L(y) \wedge J(y) \rightarrow A(y, x)))$

- e) Algún mexicano ayuda a todos o a nadie.

SOLUCIÓN: $\exists x(M(x) \wedge (\forall y(A(x, y)) \vee \forall z(\neg A(x, z))))$

- f) Hay algún mexicano que no puede ser ayudado por algún japonés.

SOLUCIÓN: $\exists x\exists y(M(x) \wedge J(y) \wedge \neg A(y, x))$

- g) Algunos alemanes sólo ayudan a mexicanos.

SOLUCIÓN: $\exists x\forall y(N(x) \wedge (A(x, y) \rightarrow M(y)))$

- h) Exactamente una persona ayuda a todos menos a sí misma.

SOL.: $\exists x(\neg A(x, x) \wedge \forall y(x \neq y \rightarrow A(x, y)) \wedge \forall w(\neg A(w, w) \wedge \forall z(w \neq z \rightarrow A(w, z))) \rightarrow x = w)$

- i) Exactamente una persona sólo se ayuda a sí misma.

SOL.: $\exists x(A(x, x) \wedge \forall y(x \neq y \rightarrow \neg A(x, y)) \wedge \forall w(A(w, w) \wedge \forall z(w \neq z \rightarrow \neg A(w, z))) \rightarrow x = w)$

- j) Algunos militares no ayudan a los mexicanos.

SOLUCIÓN: $\exists x\forall y(L(x) \wedge (M(y) \rightarrow \neg A(x, y)))$

- k) Todos los voluntarios japoneses ayudan a algún mexicano.

SOLUCIÓN: $\forall x(V(x) \wedge J(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge A(x, y)))$

- l) Armando ayuda a los mexicanos, por lo tanto los voluntarios Ayudarán a los mexicanos.

SOLUCIÓN: $\forall x(M(x) \rightarrow A(a, x)) \rightarrow \forall y\forall z(V(y) \wedge M(z) \rightarrow A(y, z))$

3. Considera los siguientes predicados

- $P(x)$: x es un número par.
- $M(x, y)$: x es menor que y .
- $G(x, y)$: la división de x entre y está dentro del conjunto.

Y los siguientes enunciados

- $\forall x\forall y(M(x, y) \rightarrow \exists z(M(x, z) \wedge M(z, y)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow M(0, x))$
- $\forall x\forall y(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow (G(x, y) \wedge G(y, x)))$
- La negación del inciso c)

Evalúa su valor de verdad con respecto a los siguientes Universos del discurso. Para aquellos enunciados que sean falsos, exhibe un contraejemplo.

a) Los números naturales (el 0 también es natural).

SOLUCIÓN:

- $\forall x \forall y (M(x, y) \rightarrow \exists z (M(x, z) \wedge M(z, y)))$
El enunciado evalúa a falso. Si tomamos $x = 1$ y $y = 2$, entonces notamos que en los números naturales, no hay un número entre el 1 y el 2.
- $\forall x (P(x) \rightarrow M(0, x))$
El enunciado evalúa a verdadero. En los números naturales, cualquier número par es mayor que el 0.
- $\forall x \forall y (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow (G(x, y) \wedge G(y, x)))$
El enunciado evalúa a falso. Si tomamos $x = 1$ y $y = 2$ entonces tenemos que $\frac{1}{2} = 0.5$ y éste no pertenece al conjunto de los naturales.
- La negación del inciso c)
El enunciado evalúa a verdadero. Se afirma que existen dos números naturales x y y tales que son diferente de cero y la división $\frac{x}{y}$ o $\frac{y}{x}$ se encuentra dentro del conjunto; así, como sabemos que si tomamos $x = 1$ y $y = 2$ entonces $\frac{2}{1}$ se encuentra dentro del conjunto.

b) Los números reales.

SOLUCIÓN:

- $\forall x \forall y (M(x, y) \rightarrow \exists z (M(x, z) \wedge M(z, y)))$
El enunciado evalúa a verdadero. Sabemos que hay una infinidad de números entre cualesquiera dos números.
- $\forall x (P(x) \rightarrow M(0, x))$
El enunciado evalúa a falso. En los números reales, hay una infinidad de números pares que son menores al 0.
- $\forall x \forall y (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow (G(x, y) \wedge G(y, x)))$
El enunciado evalúa a verdadero. En los números reales, para cualesquiera dos números x y y , las divisiones $\frac{x}{y}$ y $\frac{y}{x}$ se encuentran dentro del conjunto.
- La negación del inciso c)
El enunciado evalúa a falso, ya que el inciso anterior evalúa a verdadero.

c) Los números enteros.

SOLUCIÓN:

- $\forall x \forall y (M(x, y) \rightarrow \exists z (M(x, z) \wedge M(z, y)))$
El enunciado evalúa a falso. Si tomamos $x = 1$ y $y = 2$, entonces notamos que en los números naturales, no hay un número entre el 1 y el 2.
- $\forall x (P(x) \rightarrow M(0, x))$
El enunciado evalúa a falso. En los números enteros, hay una infinidad de números pares que son menores al 0.
- $\forall x \forall y (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow (G(x, y) \wedge G(y, x)))$
El enunciado evalúa a falso. Si tomamos $x = 1$ y $y = 2$, entonces tenemos que $\frac{1}{2} = 0.5$ no se encuentra dentro del conjunto.
- La negación del inciso c) El enunciado evalúa a verdadero. Se afirma que existen dos números naturales x y y tales que son diferente de cero y la división $\frac{x}{y}$ o $\frac{y}{x}$ se encuentra dentro del conjunto; así, como sabemos que si tomamos $x = 1$ y $y = 2$ entonces $\frac{2}{1}$ se encuentra dentro del conjunto.

4. El micromundo de figuras tiene los enunciados siguientes:

- $T(x)$, $C(x)$ y $S(x)$ tales que x es triángulo, cuadrado o círculo, respectivamente.
- $P(x)$, $M(x)$ y $G(x)$ tales que x es pequeño, mediano o grande, respectivamente.
- $Su(x, y)$, $N(x, y)$, $E(x, y)$ y $O(x, y)$ para indicar que x está al sur, norte, este u oeste de y , respectivamente.
- $Co(x, y)$ y $R(x, y)$ para indicar que x está en la misma columna o renglón que y , respectivamente.

Para cada una de las siguientes fórmulas, escribe su traducción al español, da un micromundo no vacío donde la fórmula sea verdad y uno donde sea falsa.

a) $\exists x \exists y \exists z (T(x) \wedge C(y) \wedge S(z) \wedge N(x, y) \wedge N(y, z))$

SOLUCIÓN: Existe un triángulo, un cuadrado y un círculo tales que el triángulo se encuentra al norte del cuadrado y el cuadrado se encuentra al norte del círculo.

b) $\forall x (S(x) \rightarrow \neg G(x)) \wedge \forall x (C(x) \rightarrow \exists y (Co(x, y) \wedge T(x) \wedge P(x)))$

SOLUCIÓN: Cualquier círculo no es grande y para todo cuadrado existe un triángulo pequeño que se encuentra en la misma columna.













c) $\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow (M(x) \vee G(y)))$

SOLUCIÓN: Para cualquier figura x existe otra figura y tal que si x está en el mismo renglón que y , entonces x es mediana o y es grande.









d) $\exists x (C(x) \wedge \forall y (N(y, x) \rightarrow P(y) \vee S(y))) \wedge \forall w (C(w) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge E(y, w)))$

SOLUCIÓN: Hay un cuadrado tal que para cualquier figura que se encuentre al norte se tiene que esa figura es pequeña o es un círculo. Además, para cualquier cuadrado w existe una figura grande que se encuentra al este de w .

El siguiente micromundo modela a todas las fórmulas cuando son verdaderas:

	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1				
R_2				
R_3				

Y el siguiente micromundo modela a todas las fórmulas cuando son falsas:

	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1				
R_2				
R_3	