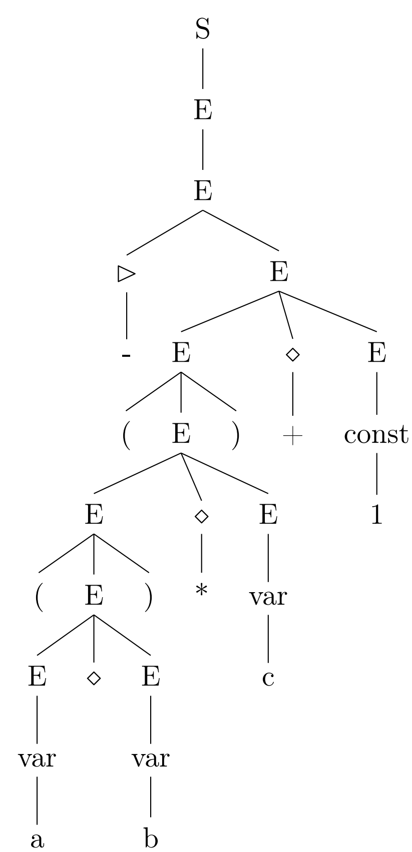
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas
Tarea 1

Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

1 de septiembre de 2017

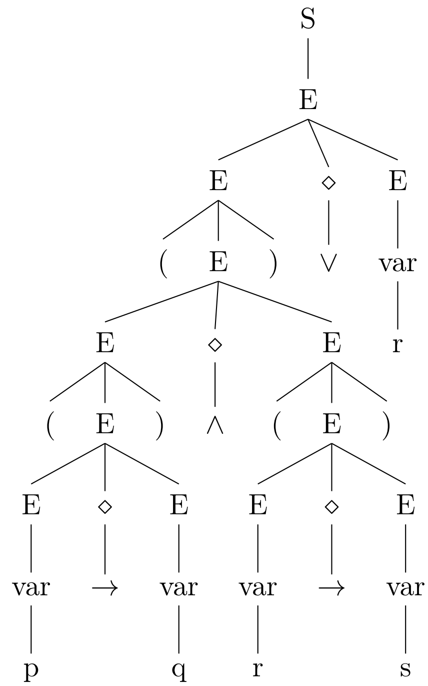
1. Demuestre que las siguientes expresiones están bien formadas.

   - $-((a+b)*c)+1$
     Solución: Para mostrar que la expresión está bien formada, daremos su respectivo árbol de derivación.



- $((p \to q) \land (r \to s)) \lor r$

  Solución: Para mostrar que la expresión está bien formada, daremos su respectivo árbol de derivación.

2. Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones atómicas, cuáles son proposiciones no atómicas y cuáles no son proposiciones. Justifique su respuesta.

   a) El grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

      Solución: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

   b) Para pasar el examen es necesario que los alumnos estudien, hagan la tarea y asistan a clase.

      Solución: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque puede descomponerse en más proposiciones debido a que contiene los conectivos lógicos *es necesario*, e *y*.

   c) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$

      Solución: Esta oración no es una proposición ya que no puede calificarse como falso o verdadero.

   d) $x \neq y$. (Donde el operador binario $\neq$ evalúa a **verdadero** si x es distinto de y y a **falso** si x es igual a y)

      Solución: Esta oración es una proposición ya que puede calificase como falso o verdadero (gracias a su operador binario), y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

   e) Asgard es el mundo de los AEsir y en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

      Solución: Esta oración es una proposción ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque contiene el conectivo lógico *y*.

3. De los incisos de la pregunta anterior que son proposiciones, exhiba una traducción al lenguaje de la lógica proposicional.

   a) p
      Donde p : el grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.
   b) $p \rightarrow (q \wedge r \wedge s)$
      Donde
      - p : los alumnos pasan el examen.
      - q : los alumnos estudian.
      - r : los alumnos hacen la tarea.
      - s : los alumnos asisten a clase.
   d) p
      Donde p : $x \neq y$
   e) $p \wedge q$
      Donde
      - p : Asgard es el mundo de los AEsir.
      - q : en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

4. Coloque los paréntesis en las siguientes expresiones de acuerdo a la precedencia y asociatividad de los operadores, sin preocuparse por la evaluación de la expresión.

   a) $-b + b**2 - 4 \cdot a \cdot c/2 \cdot a$
      Solución: $(((-b) + (b**2)) - ((((4 \cdot a) \cdot c)/2) \cdot a))$
   b) $p \wedge q \vee r \rightarrow s \leftrightarrow p \vee q$
      Solución: $((((p \wedge q) \vee r) \rightarrow s) \leftrightarrow (p \vee q))$
   c) $a < b \wedge b < c \rightarrow a < b$
      Solución: $a < b \wedge b < c \rightarrow a < b$
   d) $a \cdot b - a \cdot c \leftrightarrow a > 0 \wedge b > c$
      Solución: $(((a \cdot b) - (a \cdot c)) \leftrightarrow ((a > 0) \wedge (b > c)))$

5. Ejecute las siguientes sustituciones textuales simultáneas, fijándose bien en la colocación de los paréntesis. Quite los paréntesis que son redundantes.

   a) $5x + 3y * a - 4y[y := x]$
      Solución: La sustitución se aplica a la expresión más cercana, que en este caso es $4y$.

$$\begin{aligned} 5x + 3y * a - 4y[y := x] &= 5x + 3y * a - 4(x) \\ &= 5x + 3y * a - 4x \end{aligned}$$

   b) $(5x + 3y * a - 4y)[y := x]$
      Solución: La sustitución de aplica a toda la expresión.

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y := x] &= (5x + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5x + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

   c) $(5x + 3y * a - 4y)[y,\ x := x,\ y]$
      Solución:

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y,\ x := x,\ y] &= (5(y) + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5y + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

d) $(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3]$
SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3] &= (5x + 3(x) * a - 4(x))[x := 3]\\ &= (5(3) + 3((3))) * a - 4((3))\\ &= 15 + 9 * a - 12\end{aligned}$$

6. Para las siguientes expresiones, determine a qué esquema pertenecen, dé el rango y conectivo principal. Justifique su respuesta.

a) $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r$
SOLUCIÓN: Esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q)[p,\ q := a \vee b,\ r][a,\ b := p \wedge q,\ r \rightarrow s] =& ((a \vee b) \rightarrow r)[a,\ b := p \wedge q,\ r \rightarrow s]\\ =& (((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r)\\ =& ((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conectivo principal es $\rightarrow$, de donde su rango izquierdo es $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s))$ y su rango derecho es r.

b) $p \vee q \rightarrow r \rightarrow s \leftrightarrow t$
SOLUCIÓN: Primero, le colocamos paréntesis a la expresión según la precedencia y la asociatividad de los conectivos.

$$(((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)$$

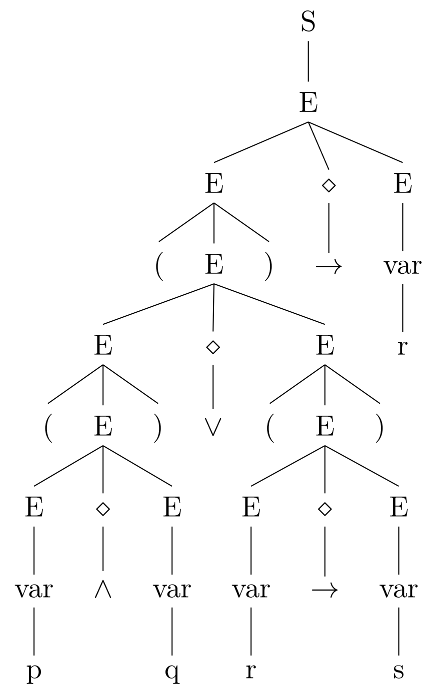
Así, esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q)[p,\ q := a \rightarrow b,\ t][a,\ b := p \vee q,\ r \rightarrow s] =& ((a \rightarrow b) \leftrightarrow t)[a,\ b := p \vee q,\ r \rightarrow s]\\ =& (((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)\end{aligned}$$

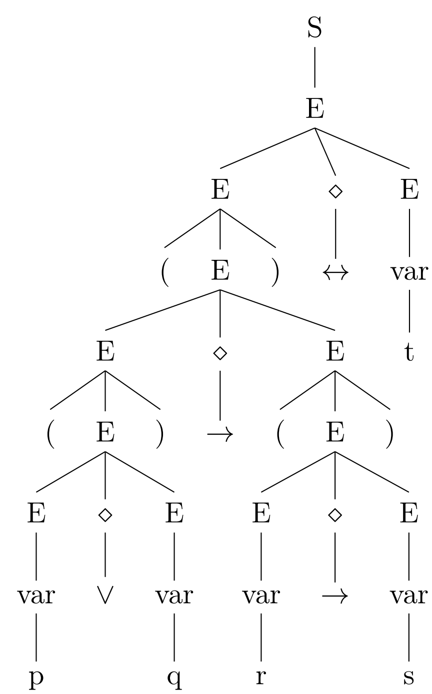
Por lo tanto, el conectivo principal es $\leftrightarrow$, de donde su rango derecho es t y su rango izquierdo es $((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$.

7. Para cada una de las expresiones del ejercicio anterior, construya los árboles de análisis sintáctico.

a) $((p \wedge q) \vee (r \to s)) \to r$
Solución:



b) $p \vee q \to r \to s \leftrightarrow t$
Solución:



8. Llene las partes que faltan y escriba en qué consiste la expresión E.

   a)

   b)

9. Utilizando únicamente la tabla de equivalencias dada en clase, demuestre las siguientes equivalencias lógicas mediante razonamiento ecuacional. Justifique cada paso.

   a) $(A \vee B) \to Q \equiv (A \to Q) \wedge (B \to Q)$

   Demostración.

$$\begin{aligned} (A \vee B) \to Q &\equiv \neg(A \vee B) \vee Q && \text{equivalencia de } \to \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg A \vee Q) \wedge (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\ &\equiv (A \to Q) \wedge (B \to Q) && \text{equivalencia de } \to \end{aligned}$$

□

   b) $(A \wedge B) \to Q \equiv (A \to Q) \vee (B \to Q)$

   Demostración.

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \to Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \to \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee (Q \vee Q) && \text{idempotencia} \\ &\equiv (\neg A \vee Q) \vee (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\ &\equiv (A \to Q) \vee (B \to Q) && \text{equivalencia de } \to \end{aligned}$$

□

   c) $(A \wedge B) \to Q \equiv A \to (B \to Q)$

   Demostración.

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \to Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \to \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee Q) && \text{asociatividad} \\ &\equiv A \to (B \to Q) && \text{equivalencia de } \to \end{aligned}$$

□

10. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si son o no satisfacibles. En caso de serlo, muestre un modelo para cada una de ellas, y en caso de no serlo, demuestre que cada estado evalúa a falso.

   a) $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$

   Solución: La fórmula no es satisfacible. Para demostrar que cada estado evalúa a falso, mostraremos su respectiva tabla de verdad.

P	Q	$((P \vee Q)$	$\wedge$	$\neg P)$	$\wedge$	$\neg Q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1

b) $(\neg P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow ((S \wedge T) \rightarrow (U \vee P)))$

SOLUCIÓN: La fórmula es satisfacible. El modelo $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(P) = 1$, $\mathcal{I}(Q) = \mathcal{I}(R) = \mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(T) = \mathcal{I}(U) = 0$ hace que la expresión evalúe a verdadero.

11. Decida si los siguientes conjuntos son satisfacibles. Justifique su respuesta.

- $\Gamma = \{p \rightarrow q,\ p \vee r \wedge s,\ q \rightarrow t\}$
  SOLUCIÓN:
- $\Gamma = \{p \vee q \vee r,\ \neg(r \vee \neg s),\ s \leftrightarrow t,\ p \rightarrow \neg t,\ q \rightarrow (p \vee \neg t)\}$

12. Para los siguientes argumentos, decida si son correctos y en caso de no serlo dé una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión.

- $p \rightarrow q,\ p \vee r,\ \neg(r \wedge s),\ / \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow (q \vee \neg s)$
- $p \vee q,\ \neg(p \wedge r),\ \neg q\ / \therefore r \rightarrow s$

13. Construya las siguientes derivaciones.

- $p \wedge (\neg r \wedge \neg w),\ l,\ r \wedge z \vdash \neg r \wedge (l \wedge z)$
- $p \vee \neg(r \vee s),\ r,\ l \rightarrow \neg p \vdash \neg l$
- $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow q)$

14. Construya la derivación del siguiente argumento para demostrar que es correcto.

Si procastinas en Helheim o en Asgard, entonces eres un AEsir. Procastinas en Helheim. Pero, ser gobernado por Odín, es necesario para ser un AEsir. Por lo tanto, eres gobernado por Odín o procastinas en Asgard.

Demostración. Primero, transformamos el argumento a lenguaje de lógica proposicional. Asignamos las siguientes variables proposicionales:

- p : Procastinas en Helheim.
- q : Procastinas en Asgard.
- r : Eres un AEsir.
- s : Eres gobernado por Odín.

Así, el argumento a verificar es: $(p \vee q) \rightarrow r,\ p,\ r \rightarrow s\ / \therefore\ s \vee q$.

Entonces

1.	$(p \vee q) \to r$	Premisa
2.	p	Premisa
3.	$r \to s$	Premisa
4.	$p \vee q$	I$\vee$ 2
5.	r	MP $4, 1$
6.	s	MP $5, 3$
7.	$s \vee q$	I$\vee$ 6

Por lo tanto, el argumento es correcto. $\square$

15. Usando Tableaux, determine la correctud del siguiente argumento.

$$(P \vee Q) \to R,\ P,\ R \to T \ / \therefore T \vee Q$$

SOLUCIÓN: Para determinar la correctud del argumento, debemos comprobar que la siguiente fórmula es una tautología

$$(((P \vee Q) \to R) \wedge P \wedge (R \to T)) \to (T \vee Q)$$

Para ello, debemos constuir el Tableaux para la negación de la fórmula anterior, es decir,

$$((\neg P \wedge Q) \vee R) \wedge P \wedge (\neg R \vee T) \wedge \neg T \wedge \neg Q$$

Así,

1.	$(\neg P \wedge Q) \vee R$ ✓			
2.	$\neg R \vee T$ ✓			
3.	P ✓			
4.	$\neg T$ ✓			
5.	$\neg Q$			
6.	$\neg R$ ✓		T ✓	ext. de β en 2
7.	$\neg P \wedge Q$ ✓	R ✓	$\otimes$ 4,6	ext. de β en 1
8.	$\neg P$	$\otimes$ 6,7		ext. de α en 7
	$\otimes$ 3,8			

Como el Tableaux es cerrado, eso significa que la fórmula es una tautología, y por lo tanto, el argumento es correcto.

16. Usando Tableaux, demuestre que la siguiente fórmula es una tautología.

$$p \vee (\neg p \wedge q) \to p \vee q$$

Demostración. Debemos construir el Tableaux de la negación de la fórmula, es decir, hay que constuir el Tableaux para

$$p \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg p \wedge \neg q$$

Así,

$$
\begin{array}{lccl}
1. & \multicolumn{2}{c}{p \vee (\neg p \wedge q) \checkmark} & \\
2. & \multicolumn{2}{c}{\neg p \checkmark} & \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg q \checkmark} & \\
4. & p \checkmark & \neg p \wedge q \checkmark & \text{ext. de } \beta \text{ en } 1 \\
5. & \underset{2,4}{\otimes} & q \checkmark & \text{ext. de } \alpha \text{ en } 4 \\
 & & \underset{3,4}{\otimes} &
\end{array}
$$

Como el Tableaux es cerrado, eso significa que la fórmula es una tautología.

$\square$