

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Estructuras Discretas  
Tarea 1

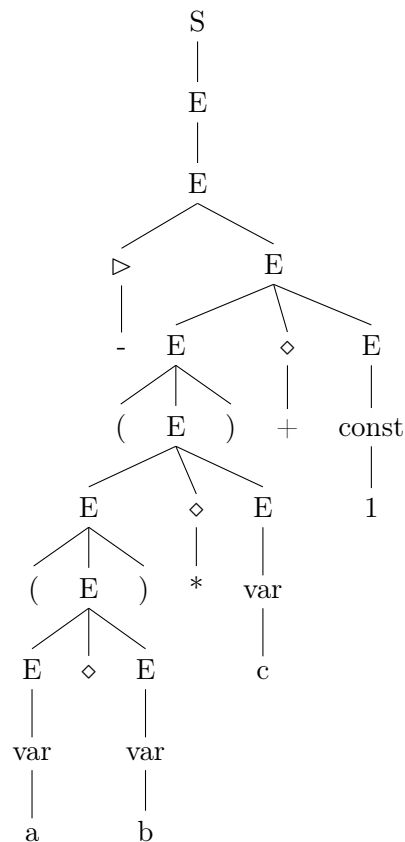
Rubí Rojas Tania Michelle  
taniarubi@ciencias.unam.mx  
# cuenta: 315121719

1 de septiembre de 2017

1. Demuestre que las siguientes expresiones están bien formadas.

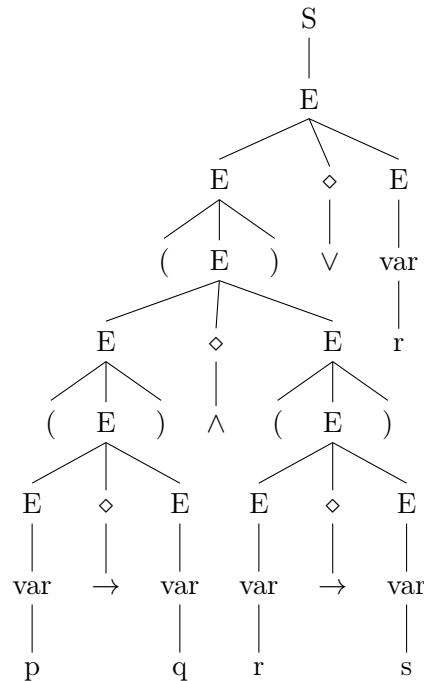
■  $-((a + b) * c) + 1$

SOLUCIÓN: Para mostrar que la expresión está bien formada, daremos su respectivo árbol de derivación.



- $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \vee r$

SOLUCIÓN: Para mostrar que la expresión está bien formada, daremos su respectivo árbol de derivación.



- Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones atómicas, cuáles son proposiciones no atómicas y cuáles no son proposiciones. Justifique su respuesta.

- El grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

- Para pasar el examen es necesario que los alumnos estudien, hagan la tarea y asistan a clase.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque puede descomponerse en más proposiciones debido a que contiene los conectivos lógicos *es necesario*, *e* *y*.

- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$

SOLUCIÓN: Esta oración no es una proposición ya que no puede calificarse como falso o verdadero.

- $x \neq y$ . (Donde el operador binario  $\neq$  evalúa a **verdadero** si  $x$  es distinto de  $y$  y a **falso** si  $x$  es igual a  $y$ )

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero (gracias a su operador binario), y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

- Asgard es el mundo de los AEsir y en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque contiene el conectivo lógico *y*.

3. De los incisos de la pregunta anterior que son proposiciones, exhiba una traducción al lenguaje de la lógica proposicional.

a)  $p$

Donde  $p$ : el grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

b)  $p \rightarrow (q \wedge r \wedge s)$

Donde

- $p$ : los alumnos pasan el examen.
- $q$ : los alumnos estudian.
- $r$ : los alumnos hacen la tarea.
- $s$ : los alumnos asisten a clase.

d)  $p$

Donde  $p$ :  $x \neq y$

e)  $p \wedge q$

Donde

- $p$ : Asgard es el mundo de los AEsir.
- $q$ : en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

4. Coloque los paréntesis en las siguientes expresiones de acuerdo a la precedencia y asociatividad de los operadores, sin preocuparse por la evaluación de la expresión.

a)  $-b + b * 2 - 4 \cdot a \cdot c / 2 \cdot a$

SOLUCIÓN:  $(((-b) + (b * 2)) - (((4 \cdot a) \cdot c) / 2) \cdot a))$

b)  $p \wedge q \vee r \rightarrow s \leftrightarrow p \vee q$

SOLUCIÓN:  $((((p \wedge q) \vee r) \rightarrow s) \leftrightarrow (p \vee q))$

c)  $a < b \wedge b < c \rightarrow a < b$

SOLUCIÓN:  $a < b \wedge b < c \rightarrow a < b$

d)  $a \cdot b - a \cdot c \leftrightarrow a > 0 \wedge b > c$

SOLUCIÓN:  $((a \cdot b) - (a \cdot c)) \leftrightarrow ((a > 0) \wedge (b > c))$

5. Ejecute las siguientes sustituciones textuales simultáneas, fijándose bien en la colocación de los paréntesis. Quite los paréntesis que son redundantes.

a)  $5x + 3y * a - 4y[y := x]$

SOLUCIÓN: La sustitución se aplica a la expresión más cercana, que en este caso es  $4y$ .

$$\begin{aligned} 5x + 3y * a - 4y[y := x] &= 5x + 3y * a - 4(x) \\ &= 5x + 3y * a - 4x \end{aligned}$$

b)  $(5x + 3y * a - 4y)[y := x]$

SOLUCIÓN: La sustitución se aplica a toda la expresión.

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y := x] &= (5x + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5x + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

c)  $(5x + 3y * a - 4y)[y, x := x, y]$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y, x := x, y] &= (5(y) + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5y + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

d)  $(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3]$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3] &= (5x + 3(x) * a - 4(x))[x := 3] \\ &= (5(3) + 3((3))) * a - 4((3)) \\ &= 15 + 9 * a - 12\end{aligned}$$

6. Para las siguientes expresiones, determine a qué esquema pertenecen, dé el rango y conector principal. Justifique su respuesta.

a)  $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r$

SOLUCIÓN: Esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q)[p, q := a \vee b, r][a, b := p \wedge q, r \rightarrow s] &= ((a \vee b) \rightarrow r)[a, b := p \wedge q, r \rightarrow s] \\ &= (((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r) \\ &= ((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conector principal es  $\rightarrow$ , de donde su rango izquierdo es  $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s))$  y su rango derecho es  $r$ .

b)  $p \vee q \rightarrow r \rightarrow s \leftrightarrow t$

SOLUCIÓN: Primero, le colocamos paréntesis a la expresión según la precedencia y la asociatividad de los conectivos.

$$(((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)$$

Así, esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

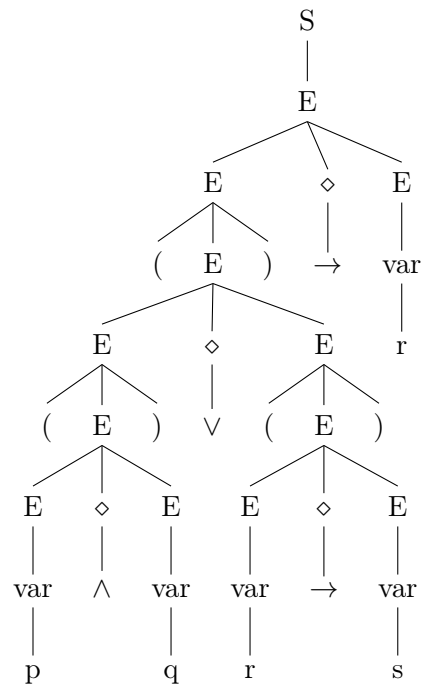
$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q)[p, q := a \rightarrow b, t][a, b := p \vee q, r \rightarrow s] &= ((a \rightarrow b) \leftrightarrow t)[a, b := p \vee q, r \rightarrow s] \\ &= (((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conector principal es  $\leftrightarrow$ , de donde su rango derecho es  $t$  y su rango izquierdo es  $((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$ .

7. Para cada una de las expresiones del ejercicio anterior, construya los árboles de análisis sintáctico.

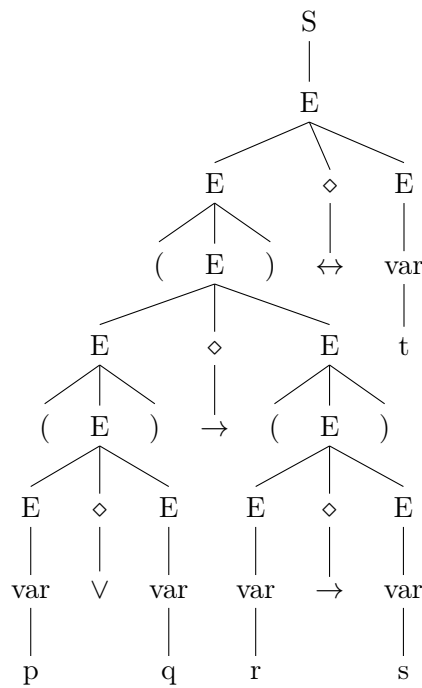
a)  $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r$

SOLUCIÓN:



b)  $p \vee q \rightarrow r \rightarrow s \leftrightarrow t$

SOLUCIÓN:



8. Llene las partes que faltan y escriba en qué consiste la expresión  $E$ .

a)

b)

9. Utilizando únicamente la tabla de equivalencias dada en clase, demuestre las siguientes equivalencias lógicas mediante razonamiento ecuacional. Justifique cada paso.

a)  $(A \vee B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q)$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} (A \vee B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \vee B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg A \vee Q) \wedge (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\ &\equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow \end{aligned}$$

□

b)  $(A \wedge B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \vee (B \rightarrow Q)$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee (Q \vee Q) && \text{idempotencia} \\ &\equiv (\neg A \vee Q) \vee (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\ &\equiv (A \rightarrow Q) \vee (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow \end{aligned}$$

□

c)  $(A \wedge B) \rightarrow Q \equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q)$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee Q) && \text{asociatividad} \\ &\equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow \end{aligned}$$

□

10. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si son o no satisfacibles. En caso de serlo, muestre un modelo para cada una de ellas, y en caso de no serlo, demuestre que cada estado evalúa a falso.

a)  $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$

SOLUCIÓN: La fórmula no es satisfacible. Para demostrar que cada estado evalúa a falso, mostraremos su respectiva tabla de verdad.

$P$	$Q$	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \wedge \neg Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

b)  $(\neg P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow ((S \wedge T) \rightarrow (U \vee P)))$

SOLUCIÓN: La fórmula es satisfacible. El modelo  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I}(P) = 1$ ,  $\mathcal{I}(Q) = \mathcal{I}(R) = \mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(T) = \mathcal{I}(U) = 0$  hace que la expresión evalúe a verdadero.

11. Decida si los siguientes conjuntos son satisfacibles. Justifique su respuesta.

■  $\Gamma = \{p \rightarrow q, p \vee r \wedge s, q \rightarrow t\}$

SOLUCIÓN:

■  $\Gamma = \{p \vee q \vee r, \neg(r \vee \neg s), s \leftrightarrow t, p \rightarrow \neg t, q \rightarrow (p \vee \neg t)\}$

12. Para los siguientes argumentos, decida si son correctos y en caso de no serlo dé una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión.

■  $p \rightarrow q, p \vee r, \neg(r \wedge s), / \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow (q \vee \neg s)$

■  $p \vee q, \neg(p \wedge r), \neg q / \therefore r \rightarrow s$

13. Construya las siguientes derivaciones.

■  $p \wedge (\neg r \wedge \neg w), l, r \wedge z \vdash \neg r \wedge (l \wedge z)$

SOLUCIÓN:

1. $p \wedge (\neg r \wedge \neg w)$	Premisa
2. $l$	Premisa
3. $r \wedge z$	Premisa
4. $z$	E $\wedge$ 3
5. $\neg r \wedge \neg w$	E $\wedge$ 1
6. $\neg r$	E $\wedge$ 5
7. $l \wedge z$	I $\wedge$ 2, 4
8. $\neg r \wedge (l \wedge z)$	I $\wedge$ 6, 7

■  $p \vee \neg(r \vee s), r, l \rightarrow \neg p \vdash \neg l$

SOLUCIÓN:

1. $p \vee \neg(r \vee s)$	Premisa
2. $r$	Premisa
3. $l \rightarrow \neg p$	Premisa
4. $r \vee s$	I $\vee$ 2
5. $p$	SD 1, 4
6. $\neg \neg p$	RE 5
7. $\neg l$	MT 6, 3

- $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow q)$

SOLUCIÓN:

1. $p \rightarrow q$	Premisa
2. $p \vee q$	Premisa
3. $\neg \neg p \vee q$	RE 2
4. $\neg p \rightarrow q$	RE 3
5. $q$	DCS 1, 4
6. $p \rightarrow q \vdash p \vee q \rightarrow q$	MTD 1 – 5
7. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow q)$	MTD 1 – 6

14. Construya la derivación del siguiente argumento para demostrar que es correcto.

Si procrastinas en Helheim o en Asgard, entonces eres un AEsir. Procastinas en Helheim. Pero, ser gobernado por Odín, es necesario para ser un AEsir. Por lo tanto, eres gobernado por Odín o procrastinas en Asgard.

*Demostración.* Primero, transformamos el argumento a lenguaje de lógica proposicional. Asignamos las siguientes variables proposicionales:

- $p$  : Procastinas en Helheim.
- $q$  : Procastinas en Asgard.
- $r$  : Eres un AEsir.
- $s$  : Eres gobernado por Odín.

Así, el argumento a verificar es:  $(p \vee q) \rightarrow r, p, r \rightarrow s / \therefore s \vee q$ .

Entonces

1. $(p \vee q) \rightarrow r$	Premisa
2. $p$	Premisa
3. $r \rightarrow s$	Premisa
4. $p \vee q$	IV 2
5. $r$	MP 4, 1
6. $s$	MP 5, 3
7. $s \vee q$	IV 6

Por lo tanto, el argumento es correcto. □

15. Usando Tableaux, determine la correctud del siguiente argumento.

$$(P \vee Q) \rightarrow R, P, R \rightarrow T / \therefore T \vee Q$$

SOLUCIÓN: Para determinar la correctud del argumento, debemos comprobar que la siguiente fórmula es una tautología

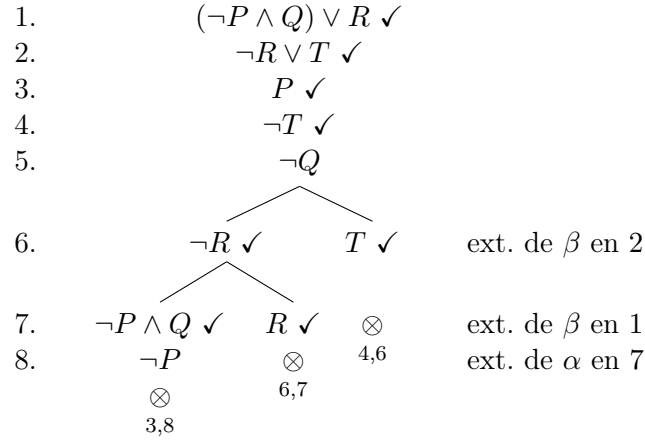
$$(((P \vee Q) \rightarrow R) \wedge P \wedge (R \rightarrow T)) \rightarrow (T \vee Q)$$



Para ello, debemos construir el Tableau para la negación de la fórmula anterior, es decir,

$$((\neg P \wedge Q) \vee R) \wedge P \wedge (\neg R \vee T) \wedge \neg T \wedge \neg Q$$

Así,



Como el Tableau es cerrado, eso significa que la fórmula es una tautología, y por lo tanto, el argumento es correcto.

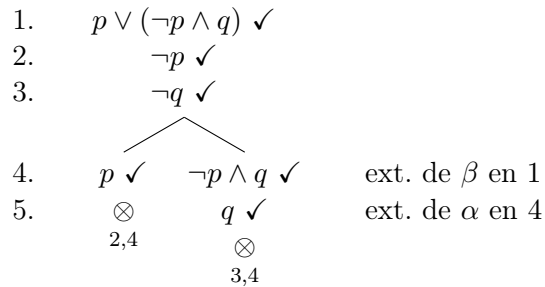
16. Usando Tableau, demuestre que la siguiente fórmula es una tautología.

$$p \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow p \vee q$$

*Demostración.* Debemos construir el Tableau de la negación de la fórmula, es decir, hay que construir el Tableau para

$$p \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg p \wedge \neg q$$

Así,



Como el Tableau es cerrado, eso significa que la fórmula es una tautología.

□