Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas
Tarea 2

Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

2 de octubre de 2017

1. Sean $f^{(1)}, g^{(2)}$ símbolos de función, $P^{(1)}$ símbolo de predicado. Clasifica las siguientes fórmulas como términos, fórmulas atómicas, fórmulas cuantificadas (con cuantificadores pero con presencias de variables libres) o enunciados (fórmulas con cuantificadores sin variables libres); según el caso, justifica tu respuesta.

   a) $f(g(a,b))$
   Solución: Es un término. Como las constantes a y b son términos, entonces $g(a,b)$ también es un término ya que es un símbolo de función aplicado a términos.

   b) $\neg\forall x\forall y(P(f(x)) \wedge Q(x,y))$
   Solución: Es un enunciado, ya que es una fórmula cuantificada sin variables libres.

   c) $P(g(f(x),y))$
   Solución: Es una fórmula atómica, ya que es un símbolo de predicado aplicado a un término.

   d) $\exists x\forall y\exists z(R(x,y,z) \wedge Q(x,f(y)) \to P(g(x,y)))$
   Solución: Es un enunciado, ya que es una fórmula cuantificada sin variables libres.

   e) $\forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge R(y,z)) \vee \exists z(Q(x,y,z))$
   Solución: Es una fórmula cuantificada, ya que las variables x y y aparecen como variables libres en la fórmula $\exists z(Q(x,y,z))$.

2. Traduce los siguientes enunciados a lógica de predicados. Indica de manera clara la traducción de los predicados que utilizarás y el Universo de discurso.

   Solución: El Universo del discurso serán todas las personas, mientras que los predicados a utilizar son

   - $V(x)$: x es voluntario.
   - $A(x,y)$: x ayuda a y.
   - $M(x)$: x es mexicano.
   - $L(x)$: x es militar.
   - $J(x)$: x es japonés.
   - $N(x)$: x es alemán.

Además, usaremos la constante a : Armando.

a) Todos los voluntarios ayudan a alguien.
SOLUCIÓN: $\forall x(V(x) \to \exists y(A(x,y)))$

b) Armando puede ayudar únicamente a un mexicano.
SOLUCIÓN: $\forall x \forall y(M(x) \land M(y) \land A(a,x) \land A(a,y) \to x = y)$

c) Ningún militar puede ayudar a todas las personas.
SOLUCIÓN: $\forall x(L(x) \to \exists y(\neg A(x,y)))$

d) Hay un mexicano al que todos los militares y japoneses lo ayudan.
SOLUCIÓN: $\exists x \forall y(M(x) \land (L(y) \land J(y) \to A(y,x)))$

e) Algún mexicano ayuda a todos o a nadie.
SOLUCIÓN: $\exists x(M(x) \land (\forall y(A(x,y)) \lor \forall z(\neg A(x,z))))$

f) Hay algún mexicano que no puede ser ayudado por algún japonés.
SOLUCIÓN: $\exists x \exists y(M(x) \land J(y) \land \neg A(y,x))$

g) Algunos alemanes sólo ayudan a mexicanos.
SOLUCIÓN: $\exists x \forall y(N(x) \land (A(x,y) \to M(y)))$

h) Exactamente una persona ayuda a todos menos a sí misma.
SOL.: $\exists x(\neg A(x,x) \land \forall y(x \neq y \to A(x,y)) \land \forall w(\neg A(w,w) \land \forall z(w \neq z \to A(w,z))) \to x = w)$

i) Exactamente una persona sólo se ayuda a sí misma.
SOL.: $\exists x(A(x,x) \land \forall y(x \neq y \to \neg A(x,y)) \land \forall w(A(w,w) \land \forall z(w \neq z \to \neg A(w,x))) \to x = w)$

j) Algunos militares no ayudan a los mexicanos.
SOLUCIÓN: $\exists x \forall y(L(x) \land (M(y) \to \neg A(x,y)))$

k) Todos los voluntarios japoneses ayudan a algún mexicano.
SOLUCIÓN: $\forall x(V(x) \land J(x) \to \exists y(M(y) \land A(x,y)))$

l) Armando ayuda a los mexicanos, por lo tanto los voluntarios Ayudarán a los mexicanos.
SOLUCIÓN: $\forall x(M(x) \to A(a,x)) \to \forall y \forall z(V(y) \land M(z) \to A(y,z))$

3. Considera los siguientes predicados

- $P(x)$: x es un número par.
- $M(x,y)$: x es menor que y.
- $G(x,y)$: la división de x entre y está dentro del conjunto.

Y los siguientes enunciados

- $\forall x \forall y(M(x,y) \to \exists z(M(x,z) \land M(z,y)))$
- $\forall x(P(x) \to M(0,x))$
- $\forall x \forall y(x \neq 0 \land y \neq 0 \to (G(x,y) \land G(y,x)))$
- La negación del inciso $c)$

Evalúa su valor de verdad con respecto a los siguientes Universos del discurso. Para aquellos enunciados que sean falsos, exhibe un contraejemplo.

a) Los números naturales (el 0 también es natural).

SOLUCIÓN:

- $\forall x \forall y (M(x, y) \to \exists z (M(x, z) \land M(z, y)))$
  El enunciado evalúa a falso. Si tomamos $x = 1$ y $y = 2$, entonces notamos que en los números naturales, no hay un número entre el 1 y el 2.
- $\forall x (P(x) \to M(0, x))$
  El enunciado evalúa a verdadero. En los números naturales, cualquier número par es mayor que el 0.
- $\forall x \forall y (x \neq 0 \land y \neq 0 \to (G(x, y) \land G(y, x)))$
  El enunciado evalúa a falso. Si tomamos $x = 1$ y $y = 2$ entonces tenemos que $\frac{1}{2} = 0.5$ y éste no pertence al conjunto de los naturales.
- La negación del inciso c)
  El enunciado evalúa a verdadero. Se afirma que existen dos números naturales x y y tales que son diferente de cero y la división $\frac{x}{y}$ o $\frac{y}{x}$ se encuentra dentro del conjunto; así, como sabemos que si tomamos $x = 1$ y $y = 2$ entonces $\frac{2}{1}$ se encuentra dentro del conjunto.

b) Los números reales.

SOLUCIÓN:

- $\forall x \forall y (M(x, y) \to \exists z (M(x, z) \land M(z, y)))$
  El enunciado evalúa a verdadero. Sabemos que hay una infinidad de números entre cualesquiera dos números.
- $\forall x (P(x) \to M(0, x))$
  El enunciado evalúa a falso. En los números reales, hay una infinidad de números pares que son menores al 0.
- $\forall x \forall y (x \neq 0 \land y \neq 0 \to (G(x, y) \land G(y, x)))$
  El enunciado evalúa a verdadero. En los números reales, para cualesquiera dos números x y y, las divisiones $\frac{x}{y}$ y $\frac{y}{x}$ se encuentran dentro del conjunto.
- La negación del inciso c)
  El enunciado evalúa a falso, ya que el inciso anterior evalúa a verdadero.

c) Los números enteros.

SOLUCIÓN:

- $\forall x \forall y (M(x, y) \to \exists z (M(x, z) \land M(z, y)))$
  El enunciado evalúa a falso. Si tomamos $x = 1$ y $y = 2$, entonces notamos que en los números naturales, no hay un número entre el 1 y el 2.
- $\forall x (P(x) \to M(0, x))$
  El enunciado evalúa a falso. En los números enteros, hay una infinidad de números pares que son menores al 0.
- $\forall x \forall y (x \neq 0 \land y \neq 0 \to (G(x, y) \land G(y, x)))$
  El enunciado evalúa a falso. Si tomamos $x = 1$ y $y = 2$, entonces tenemos que $\frac{1}{2} = 0.5$ no se encuentra dentro del conjunto.
- La negación del inciso c) El enunciado evalúa a verdadero. Se afirma que existen dos números naturales x y y tales que son diferente de cero y la división $\frac{x}{y}$ o $\frac{y}{x}$ se encuentra dentro del conjunto; así, como sabemos que si tomamos $x = 1$ y $y = 2$ entonces $\frac{2}{1}$ se encuentra dentro del conjunto.

4. El micromundo de figuras tiene los enunciados siguientes:

   - $T(x), C(x)$ y $S(x)$ tales que x es triángulo, cuadrado o círculo, respectivamente.
   - $P(x), M(x)$ y $G(x)$ tales que x es pequeño, mediano o grande, respectivamente.
   - $Su(x, y), N(x, y), E(x, y)$ y $O(x, y)$ para indicar que x está al sur, norte, este u oeste de y, respectivamente.
   - $Co(x, y)$ y $R(x, y)$ para indicar que x está en la misma columna o renglón que y, respectivamente.

   Para cada una de las siguientes fórmulas, escribe su traducción al español, da un micromundo no vacío donde la fórmula sea verdad y uno donde sea falsa.

   a) $\exists x \exists y \exists z(T(x) \land C(y) \land S(z) \land N(x, y) \land N(y, z))$
   b) $\forall x(S(x) \to \neg G(x)) \land \forall x(C(x) \to \exists y(Co(x, y) \land T(x) \land P(x)))$
   c) $\forall x \exists y(R(x, y) \to (M(x) \lor G(y)))$
   d) $\exists x(C(x) \land \forall y(N(y, x) \to P(y) \lor S(y))) \land \forall w(C(w) \to \exists y(G(y) \land E(y, w)))$