Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas
Tarea 4

Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

4 de diciembre de 2017

1. Mostrar que la composición de relaciones es asociativa, es decir, si R, S y T son relaciones binarias, entonces

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

Demostración. .

$\subseteq$ Supongamos que $(a,b) \in R \circ (S \circ T)$. Entonces existe $c \in A$ tal que $(a,c) \in R$ y $(c,b) \in (S \circ T)$. Por definición, existe $d \in A$ tal que $(c,d) \in S$ y $(d,b) \in T$. Como $(a,c) \in R$ y $(c,d) \in S$, entonces $(a,d) \in R \circ S$. Además, $(d,b) \in T$ por lo que $(a,b) \in (R \circ S) \circ T$.

$\supseteq$ Supongamos que $(a,b) \in (R \circ S) \circ T$. Entonces, existe $c \in A$ tal que $(a,c) \in (R \circ S)$ y $(c,b) \in T$. Por definición, existe $d \in A$ tal que $(a,d) \in R$ y $(d,c) \in S$. Como $(d,c) \in S$ y $(c,b) \in T$, entonces tenemos que $(d,b) \in S \circ T$. Además, $(a,d) \in R$, por lo que $(a,b) \in R \circ (S \circ T)$.

□

2. Sean $A = \{0,1,2,3\}$, $R = \{(a,b) \mid a+1\}$ y $S = \{(a,b) \mid a = b+2\}$. Realice lo siguiente:

- Calcule R y S
  SOLUCIÓN: $R = \{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ y $S = \{(2,0),(3,1)\}$
- Calcule $R \circ S$
  SOLUCIÓN: $R \circ S = \{(1,0),(2,1)\}$
- Calcule R^3
  SOLUCIÓN: $\varnothing$.

3. Demuestra que $(R^{-1})^{-1} = R$.

Demostración. Tenemos que

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in (R^{-1})^{-1}$$

□

4. Para las siguientes relaciones, argumente si cumplen o no con las propiedades de reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad.

   - Sean R la relación definida en los números reales por xRy si y sólo si $x \leq y$.
     SOLUCIÓN:
     - Reflexividad. Esta relación cumple con esta propiedad ya que para cualquier $x \in R$ se tiene que xRx pues $x \leq x$.
     - Simetría. Esta relación no cumple con esta propiedad ya que $2, 3 \in R$ y entonces $2 \leq 3$ pero $3 \not\leq 2$.
     - Antisimetría. Esta relación cumple con esta propiedad ya que para cualquier $x, y \in R$ se tiene que si $xRy \wedge yRx$ entonces $x \leq y \wedge y \leq x$ y por la antisimétría de $\leq$, obtenemos que $x = y$.
     - Transitividad. Esta relación cumple con esta propiedad ya que para cualquier $x, y, z \in R$ se tiene que si $xRy \wedge yRz$ entonces $x \leq y \wedge y \leq z$ y por transitividad de $\leq$ obtenemos que $x \leq z$, lo cual implica que xRz.
   - Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (d, d)\}$
     SOLUCIÓN:
     - Reflexividad. Esta relación no cumple con esta propiedad ya que $(c, c) \notin R$.
     - Simetría. Esta relación no cumple con esta propiedad ya que $(a, c) \in R$ pero $(c, a) \notin R$.
     - Antisimetría. Esta relación no cumple con esta propiedad ya que $(a, b), (b, a) \in R$, pero $a \neq b$.
     - Transitividad. Esta relación no cumple con esta propiedad ya que $(a, b), (b, d) \in R$, pero $(a, d) \notin R$.
   - Sea $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ y R la relación $R = \{(a, b), (c, d)) \mid a + d = b + c\}$
     SOLUCIÓN:
     - Reflexividad. Esta relación cumple con esta propiedad ya que para cualquier $(a, b) \in R$ tenemos que $a + b = b + a$, por lo que $((a, b), (b, a)) \in R$.
     - Simetría. Esta relación cumple con esta propiedad ya que si $((a, b), (c, d)) \in R$ entonces $a + d = b + c$, y por la conmutatividad de la suma en $\mathbb{Z}$ tenemos que $c + b = d + a$, lo que implica que $((c, d), (a, b)) \in R$.
     - Antisimetría. Esta relación no cumple con esta propiedad ya que $((1, 1), (2, 2)), ((2, 2), (1, 1)) \in R$ pero $((1, 1) \neq (2, 2))$.
     - Transitividad. Esta relación cumple con esta propiedad ya que si $((a, b), (c, d)), ((c, d), (e, f)) \in R$ entonces $a + d = b + c \wedge c + f = d + e$. Sumando ambas igualdades tenemos que $a + d + c + f = b + c + d + e$ y usando la ley de la cancelación en la suma obtenemos $a + f = b + e$, lo que implica que $((a, b), (e, f)) \in R$.

5. Conteste los siguientes incisos.

   - ¿Puede una relación en un conjunto no ser reflexiva ni antirreflexiva? Justifique su respuesta.
     SOLUCIÓN: Sí. Consideremos el conjunto $A = \{1, 2\}$ y la relación $R = \{(1, 1)\}$. Como $(2, 2) \notin R$ entonces R no es reflexiva y como $(1, 1) \in R$ entonces R tampoco es antirreflexiva.
   - ¿Puede una relación en un conjunto ser simétrica y antisimetríca? ¿O ser asimétrica y antisimétrica también? Justifique su respuesta.
     SOLUCIÓN: Sí. Consideremos el conjunto $A = \{1, 2\}$ y las relaciones $R_1 = \{(1, 1)\}$ y $R_2 = \{(1, 2)\}$. Entonces tenemos que R_1 es simétrica y antisimétríca, mientras que R_2 es antisimétrica y asimétrica.

6. Muestre que una relación R sobre A:

   - Es reflexiva si y sólo si $I_A \subseteq R$

     Demostración. .

     $\Rightarrow$ Supongamos que R es reflexiva. Sea $x \in I_A$. Por definición, $x = (a, a)$ para algún $a \in A$. Por hipótesis, tenemos que $(a, a) \in R$, por lo que $x \in R$, lo que implica que $I_A \subseteq A$.

     $\Leftarrow$ Supongamos que $I_A \subseteq R$. Sea $a \in A$. Como $(a, a) \in I_A$, por hipótesis tenemos que $(a, a) \in R$, lo que implica que para cada $a \in A$ se tiene que $(a, a) \in R$, por lo que R es reflexiva.

     $\square$

   - Es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$

     Demostración. .

     $\Rightarrow$ Supongamos que R es simétrica. Entonces

     $$\begin{aligned}(a, b) \in R &\Leftrightarrow (b, a) \in R \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in R^{-1}\end{aligned}$$

     Por lo tanto, podemos concluir que $R = R^{-1}$.

     $\Leftarrow$ Supongamos que $R = R^{-1}$. Sea $(a, b) \in R$. por definición de R^{-1}, tenemos que $(b, a) \in R^{-1}$, pero por hipótesis $(b, a) \in R$. Por lo tanto, R es simétrica.

     $\square$

   - Es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$

     Demostración. .

     $\Rightarrow$ Supongamos que R es transitiva. Sea $(a, c) \in R \circ R$. Por definición de composición, existe $b \in A$ tal que $(a, b), (b, c) \in R$. Y por hipótesis, esto último implica que $(a, c) \in R$, por lo que podemos concluir que $R \circ R \subseteq R$.

     $\Leftarrow$ Supongamos que $R \circ R \subseteq R$. Sean $(a, b), (b, c) \in R$. Por definición de composición, tenemos que $(a, c) \in R \circ R$ y por hipótesis podemos concluir que $(a, c) \in R$. Por lo tanto, R es transitiva.

     $\square$

7. Sea $A = \mathbb{R}$. Definimos $R \subseteq A \times A$ donde $R = \{(x, y) \mid \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2y \rfloor\}$ donde $\lfloor 2x \rfloor$ se define como el mayor entero $i \in \mathbb{Z}$ tal que $i \leq x$.

   - Verifique que R sea una relación de equivalencia.

     SOLUCIÓN:

     - Relexividad. Sea $x \in R$. Es claro que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$, por lo que $(x, x) \in R$.
     - Simetría. Sea $(x, y) \in R$. Entonces $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2y \rfloor$, y por la conmutatividad de la igualdad, tenemos que $\lfloor 2y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. Por lo tanto, $(y, x) \in R$.
     - Transitividad. Sean $(x, y), (y, z) \in R$. Entonces $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2y \rfloor \wedge \lfloor 2y \rfloor = \lfloor 2z \rfloor$. Por la transitividad de la igualdad tenemos que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2z \rfloor$, lo que implica que $(x, z) \in R$.

- Determine las clases de equivalencia de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$.
  SOLUCIÓN: Como $\lfloor 2(\frac{1}{4}) \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$ entonces tenemos que la clase de equivalencia de $\frac{1}{4}$ es el conjunto

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \;:\; \lfloor 2x \rfloor = 0\} &= \{x \in \mathbb{R} \;:\; 0 \leq 2x < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \;:\; 0 \leq x < \frac{1}{2}\}\end{aligned}$$

  Y como $\lfloor 2(\frac{1}{2}) \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$ entonces tenemos que la clase de equivalencia de $\frac{1}{4}$ es el conjunto

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \;:\; \lfloor 2x \rfloor = 1\} &= \{x \in \mathbb{R} \;:\; 1 \leq 2x < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \;:\; \frac{1}{2} \leq x < 1\}\end{aligned}$$

- Describa la partición de $\mathbb{R}$ en clases de equivalencia.
  SOLUCIÓN: Sean $C_1 = \{[x, x + \frac{1}{2}) \;:\; x \in \mathbb{Z}\}$ y $C_2 = \{[x + \frac{1}{2}, x + 1) \;:\; x \in \mathbb{Z}\}$. La partición de R en clases de equivalencia está dada por $P = C_1 \cup C_2$.

8. Determine si las siguientes relaciones son de equivalencia. Si lo son, demuestre cada una de las propiedades, si no lo son, exhiba un ejemplo de por qué no se cumple alguna propiedad.

   - $R = \{(a, b) \;:\; a, b \in \mathbb{Z}, a + b \text{ es impar}\}$
     SOLUCIÓN: No es una relación de equivalencia pues no cumple con la propiedad de reflexividad. Para cualquier $a \in \mathbb{Z}$ tenemos que $a + a = 2a$, que es par, por lo que $(a, a) \notin R$.
   - $R = \{(a, b) \;:\; a, b \in \mathbb{Z}, a + b \text{ es par}\}$

     Demostración. .

     - Reflexividad. Para cualquier $a \in R$, tenemos que $a + a = 2a$, que es par, por lo que $(a, a) \in R$.
     - Simetría. Si $(a, b) \in R$ entonces $a + b$ es par, y como $a + b = b + a$, eso implica que $b + a$ es par. Por lo tanto, $(b, a) \in R$.
     - Transitividad. Si $(a, b), (b, c) \in R$ entonces $a + b$ y $b + c$ son pares, es decir, existen $r, s \in R$ tales que $a + b = 2r$ y $b + c = 2s$. Igualando ambas expresiones obtenemos que

$$\begin{aligned}a + b + b + c &= 2r + 2s \\ a + 2b + c &= 2r + 2s \\ a + c &= 2r + 2s + 2b \\ a + c &= 2(r + s + b)\end{aligned}$$

       Como $a + c$ es par, entonces podemos concluir que $(a, c) \in R$.

     □

   - $R = \{(a, b) \;:\; a, b \in \mathbb{Z}, |a - b| \leq 5\}$
     SOLUCIÓN: No es una relación de equivalencia ya que no cumple con la propiedad de transitivdad. Esto porque $(0, 5), (5, 10) \in R$ pero $(0, 10) \notin R$ pues $|0 - 10| = 10 \nleq 5$.
   - $R = \{(a, b) \;:\; a, b \in \mathbb{Z}, |a - b| < 1\}$
     SOLUCIÓN: No es una relación de equivalencia ya que no cumple con la propiedad de transitividad. Esto porque $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1) \in R$ pero $(0, 1) \notin R$ pues $|0 - 1| = 1 \nless 1$.

9. Una partición P_1 es un refinamiento de la partición P_2 si cada conjunto P_1 es subconjunto de algún conjunto en P_2. Muestre que la partición formada por las clases de congruencia módulo 6 es un refinamiento de la partición formada por las clases de congruencia módulo 3.

   Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \equiv b\ (mod\, 6)$, es decir, 6 divide a $a - b$. Por definición, esto significa que $a - b = 6k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Así, $(a - b) = 3(2k)$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto, podemos concluir que 3 divide a $a - b$, es decir, $a \equiv b(mod\, 3)$. Esto demuestra que si $a \equiv b(mod\, 6)$, entonces $(a \equiv b)(mod\, 3)$.

   Consideremos ahora al entero a, a X, su clase de equivalencia bajo la congruencia módulo 6 y a Y, su clase de equivalencia bajo la congruencia módulo 3. Por lo demostrado anteriormente, si $b \in X$ entonces $b \in Y$, por lo que $X \subseteq Y$. Así, toda clase de congruencia módulo 6 está contenida en una clase de congruencia módulo 3, y por lo tanto, la partición formada por las clases de congruencia módulo 6 es un refinamiento de la partición formada por las clases de congruencia módulo 3.

   □

10. Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$, y sea $\preceq$ la relación sobre A definida por $a \preceq b$ si y sólo si $b = a^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, para cada $a, b \in A$. Demuestre que $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. ¿Es $(A, \preceq)$ un conjunto totalmente ordenado?

    Demostración. .

    - Reflexividad. Sea $a \in \mathbb{N}$. Es claro que $a = a^1$, por lo que $a \preceq a$.
    - Antisimetría. Si $a \preceq b$ y $b \preceq a$ entonces existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $b = a^r$ y $a = b^s$. Sustituyendo el valor de b de la primera expresión en la segunda obtenemos que $a = (a^r)^s = a^{rs}$, lo que implica que $rs = 1$. Como r y s son naturales, entonces forzosamente $r = 1 = s$, por lo que $a = b$.
    - Transitividad. Si $a \preceq b$ y $b \preceq c$ entonces $b = a^r$ y $c = b^s$ para algunos $r, s \in \mathbb{N}$. Sustituyendo el valor de b de la primer expresión en la segunda obtenemos que $c = (a^r)^s$ de donde $c = a^{r \cdot s}$, lo que implica que $a \preceq c$.

    El orden $\preceq$ no es total. Como $2 \neq 3$ y sólo estan permitidos los exponentes naturales, entonces no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k = 3$, o que $3^k = 2$, por lo que $2 \npreceq 3$ y $3 \npreceq 2$. Así, $\preceq$ no es tricotómica, y por lo tanto, no es un orden total.

    □

11. Sea A un conjunto no vacío, y sea R una relación sobre A. La relación R es un cuasi-orden si es reflexiva y transitiva. Suponga que R es un cuasi-orden. Sea $\sim$ la relación sobre A definida por $x \sim y$ si y sólo si xRy y yRx para cualesquiera $x, y \in A$.

    - Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
    - Sean $x, y, a, b \in A$. Demuestre que si xRy y $y \sim b$, entonces aRb.
    - Considere el conjunto $A/\sim$ definida por $[x]S[y]$ si y sólo si xRy. Demuestre que $(A/\sim, S)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

12. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado, sea X un conjunto, y sea $h : X \to A$ una función inyectiva. Sea $\preceq'$ la relación sobre X definida por $x \preceq' y$ si y sólo si $h(x) \preceq h(y)$, para cada $x, y \in X$. Demuestre que $(X, \preceq')$ es un conjunto parcialmente ordenado.