

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas
Tarea 3

Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

3 de noviembre de 2017

1. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$.

a) $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.

$n = 1$. Este caso se cumple ya que

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1)^3 = (2(1)-1)^3 = (1)^3 = 1 = 1(2(1)-1) = (1)^2(2(1)^2-1)$$

- Hipótesis de inducción.

Supongamos que el resultado es cierto para $n \geq 1$, es decir, supongamos que se cumple

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

- Paso inductivo.

Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n+1$, es decir, que se cumple

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1)^3 = (n+1)^2(2(n+1)^2-1) = (n+1)^2(2n^2+4n+1).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} &= \left(\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 \right) + (2(n+1)-1)^3 \\ &= (n^2(2n^2-1)) + (2(n+1)-1)^3 \\ &= (2^4 - n^2) + (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1) \\ &= 2^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \\ &= (n+1)^2(2n^2+4n+1) \end{aligned}$$

por H.I.

desarrollando términos

agrupando términos semejantes

factorizando

□

b) $\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.

$n = 0$ Este caso se cumple ya que

$$\sum_{i=0}^0 \frac{i}{2^i} = \frac{0}{1} = 0 = 2 - 2 = 2 - \frac{2}{1} = 2 - \frac{0+2}{2^0}$$

- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 0$, es decir, supongamos que se cumple $\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.
- Paso inductivo.
Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n + 1$, es decir, que se cumple $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$
Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{2^i} &= \left(\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i} \right) + \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \right) && \text{por H.I.} \\
&= \left(2 - \frac{n+2}{2^n} \right) + \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \right) && \text{asociatividad} \\
&= 2 - \left(\frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \right) && \text{resolviendo suma} \\
&= 2 - \left(\frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \right) && \text{simplificando} \\
&= 2 - \left(\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} \right) && \text{simplificando} \\
&= 2 - \left(\frac{n+3}{2^{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

□

2. Demuestre cada una de las siguientes desigualdades para los valores de $n \in \mathbb{N}$ especificados.

a) $(1 + \frac{1}{n})^n < n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.
 $n = 3$. Este caso se cumple ya que $(1 + \frac{1}{3})^3 = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27} < 3$.
- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 3$, es decir, supongamos que se cumple $(1 + \frac{1}{n})^n < n$.
- Paso inductivo.
Tenemos que demostrar que la fórmula se cumple para $n + 1$, es decir, que se cumple $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} < n + 1$.
Sabemos que, por propiedades en los números reales, se cumple $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, y por lo tanto, $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$. Además, si a y b son reales, se tiene que $a < b \Rightarrow a^n < b^n$, $n \in \mathbb{N}$. Podemos utilizar este resultado con la desigualdad $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$, y desarrollar para utilizar nuestra hipótesis.

Entonces

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} &< \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} && \text{por la observación anterior} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) && \text{descomponiendo la expresión anterior} \\
&< n \left(1 + \frac{1}{n} \right) && \text{por H.I.} \\
&= n + 1 && \text{simplificando}
\end{aligned}$$

□

b) $7n < 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 6$

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.
 $n = 6$. Este caso se cumple ya que $7(6) = 42 < 64 = 2^6$.
- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 6$, es decir, supongamos que se cumple $7n < 2^n$.
- Paso inductivo.
Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n+1$, es decir, que se cumple $7(n+1) < 2^{n+1}$.
Entonces

$$\begin{array}{ll}
 7(n+1) = 7n + 7 & \text{simplificando} \\
 < 2^n + 7 & \text{por H.I.} \\
 < 2^n + 2^n & \text{ya que } 7 < 2^n \text{ con } n \geq 6 \\
 = 2 \cdot 2^n & \text{simplificando} \\
 = 2^{n+1} & \text{simplificando}
 \end{array}$$

□

3. Demuestre que

$$\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.
 $n = 2$. Este caso se cumple ya que $\prod_{i=2}^2 \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2(2)}$
- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq 2$, es decir, supongamos que se cumple $\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$
- Paso inductivo.
Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n+1$, es decir, que se cumple $\prod_{i=2}^{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^{n+1} &= \left(\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2} \right) \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
&= \left(\frac{n+1}{2n} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) && \text{por H.I.} \\
&= \left(\frac{n+1}{2n} \right) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \right) && \text{resolviendo resta} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+2n)}{2n(n+1)^2} && \text{resolviendo multiplicación} \\
&= \frac{n^2+2n}{2n(n+1)} && \text{eliminando el término } (n+1) \\
&= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} && \text{factorizando} \\
&= \frac{n+2}{2n+2} && \text{eliminando el término } n \text{ y simplificando}
\end{aligned}$$

□

4. Sean $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}^\times}$ la sucesión definida por $r_1 = 1$, y $r_{n+1} = 4r_n + 7$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $r_n = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)$ para cada $n \in \mathbb{N}^\times$.

Demostración. Inducción sobre n .

- Base de inducción.

$n = 1$. Este caso se cumple ya que $r_1 = 1 = \frac{1}{3}(3) = \frac{1}{3}(10 \cdot 1 - 7) = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^0 - 7) = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{1-1} - 7)$

- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para $n+1$, es decir, supongamos que se cumple $r_n = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)$.

- Paso inductivo.

Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n+1$, es decir, que se cumple $r_{n+1} = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^n - 7)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= 4r_n + 7 && \text{definición recursiva de } r_{n+1} \\
&= 4\left(\frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)\right) + 7 && \text{definición recursiva de } r_n \\
&= \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} \cdot 4 - 7 \cdot 4) + 7 && \text{conmutatividad y simplificando} \\
&= \frac{1}{3}(10 \cdot 4^n - 7(1+3)) + 7 && \text{simplificando y aplicando } 4 = 3 + 1 \\
&= \frac{1}{3}(10 \cdot 4^n - 7 + 21) + 7 && \text{simplificando} \\
&= \frac{1}{3}(10 \cdot 4^n - 7) - \frac{1}{3} \cdot 21 + 7 && \text{sacando al 21} \\
&= \frac{1}{3}(10 \cdot 4^n - 7) - 7 + 7 && \text{resolviendo multiplicación} \\
&= \frac{1}{3}(10 \cdot 4^n - 7) && \text{simplificando}
\end{aligned}$$

□

5. Sean $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $d_0 = 2, d_1 = 3$, y $d_n = d_{n-1} \cdot d_{n-2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Encuentre una fórmula explícita para d_n , y demuestre por inducción que su fórmula funciona.

Demostración. La fórmula explícita propuesta es $d_n = 2^{F_{n-1}} \cdot 3^{F_n}$, con $n \geq 1$ y donde F_n es el n -ésimo número de Fibonacci.

Demostraremos que la fórmula es válida utilizando inducción fuerte sobre n .

- Base de inducción.

$n = 1$. Este caso se cumple ya que $d_1 = 3 = 1 \cdot 3 = 2^0 \cdot 3^1 = 2^{F_0} \cdot 3^{F_1} = 2^{F_{1-1}} \cdot 3^{F_1}$

- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para n , es decir, supongamos que se cumple para $d_n = 2^{F_{n-1}} \cdot 3^{F_n}$.

- Paso inductivo.

Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n + 1$, es decir, que se cumple $d_{n+1} = 2^{F_n} \cdot 3^{F_{n+1}}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= d_{(n+1)-1} \cdot d_{(n+1)-2} && \text{definición recursiva de } d_n \\
 &= d_n \cdot d_{n-1} && \text{simplificando} \\
 &= 2^{F_{n-1}} \cdot 3^{F_n} \cdot 2^{F_{(n-1)-1}} \cdot 3^{F_{n-1}} && \text{por H.I.} \\
 &= 2^{F_{n-1}} \cdot 2^{F_{n-2}} \cdot 3^{F_n} \cdot 3^{F_{n-1}} && \text{simplificando y aplicando conmutatividad} \\
 &= 2^{F_{n-1}+F_{n-2}} \cdot 3^{F_n+F_{n-1}} && \text{simplificando} \\
 &= 2^{F_n} \cdot 3^{F_{n+1}} && \text{definición de } F_n \text{ y } F_{n+1}
 \end{aligned}$$

□

6. Sea $spar(n)$ la función definida como $spar(n) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$. Defina una implementación recursiva llamada $f(n)$ para la función $spar(n)$. Demuestre que $f(n) = n(n + 1)$.

Demostración. Definimos la función como $f(0) = 0, f(n + 1) = f(n) + 2(n + 1)$. Demostraremos, por inducción sobre n , que $f(n) = n(n + 1)$.

- Base de inducción.

$n = 0$. Este caso se cumple ya que $f(0) = 0 = 0(1) = 0(0 + 1)$.

- Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es válido para n , es decir, supongamos que se cumple $f(n) = n(n + 1)$.

- Paso inductivo.

Tenemos que demostrar que la fórmula es válida para $n + 1$, es decir, que se cumple $f(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 f(n + 1) &= f(n) + 2(n + 1) && \text{definición recursiva de } f(n + 1) \\
 &= n(n + 1) + 2(n + 1) && \text{por H.I.} \\
 &= n^2 + n + 2n + 2 && \text{simplificando} \\
 &= n^2 + 3n + 2 && \text{agrupando términos semejantes} \\
 &= (n + 1)(n + 2) && \text{factorizando}
 \end{aligned}$$

□

7. Una cadena de caracteres es palíndroma si es de la forma ww^R donde w^R es w escrita de atrás hacia adelante, por ejemplo, 0110, *abbbba*, *holaaloh*. Defina al conjunto de las cadenas palíndromas recursivamente, y demuestre mediante inducción estructural, que todas las cadenas palíndromas definidas tienen un número par de símbolos.

Demostración. Sea Σ el alfabeto sobre el cual construiremos a los palíndromos. Definimos al conjunto P de las cadenas palíndromas de la siguiente forma

- i) Para cada $a \in \Sigma$, $aa^R \in P$.
- ii) Si v y w son cadenas tales que vv^R y ww^R son elementos de P , entonces también wvv^Rw^R lo es.
- iii) Sólo las cadenas obtenidas con las reglas i) y ii) son elementos de P .

Ahoran demostraremos que todos los elementos del conjunto P tienen un número par de símbolos, utilizando inducción estructural.

- Base de inducción.
Cualquier cadena en P construida con la regla i) es de la forma aa^R para algún símbolo en Σ , por lo que tiene exactamente dos elementos.
- Hipótesis de inducción. Supongamos que uu^R y vv^R son cadenas en P , y que ambas tienen un número par de símbolos.
- Paso inductivo.
Demostraremos que la cadena uvv^Ru^R se puede obtener con la regla ii) a partir de las cadenas u y v , que tiene un número par de símbolos. Como el número de símbolos uvv^Ru^R es la suma del número de símbolos en uu^R y vv^R , por la hipótesis tenemos que éstas cadenas tienen longitud par; y como la suma de un par con otro par es un par, podemos concluir que el resultado deseado.

□

8. La función *snoc* en listas se define como sigue:

$$\text{snoc } c [x_1, \dots, x_n] = [x_1, \dots, x_n, c]$$

- a) De una implementación recursiva para *snoc*.

SOLUCIÓN: Definimos la función *snoc* de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{snoc } c [] &= [c] \\ \text{snoc } c (a : xs) &= (a : \text{snoc } c xs) \end{aligned}$$

- b) Demuestre, usando la definición recursiva, que:

$$\text{snoc } c (xs_ys) = xs_(\text{snoc } c ys)$$

Demostración. Inducción estructural sobre xs .

- Base de inducción.
 $xs = []$. Este caso se cumple ya que $\text{snoc } c ([]_ys) = \text{snoc } c ys = []_(\text{snoc } c ys)$
- Hipótesis de inducción. Supongamos que se cumple $\text{snoc } c (xs_ys) = xs_(\text{snoc } c ys)$.

- Paso inductivo.

Debemos demostrar que para cualquier a , se cumple que $snoc\ c\ ((a : xs)_ys) = (a : xs)_(snoc\ c\ ys)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
snoc\ c\ ((a : xs)_ys) &= snoc\ c\ (a : (xs_ys)) && \text{asociatividad de la concatenación} \\
&= (a : snoc\ c\ (xs_ys)) && \text{definición recursiva de } snoc \\
&= (a : xs_ (snoc\ c\ ys)) && \text{por H.I.} \\
&= (a : xs)_(snoc\ c\ ys) && \text{asociatividad de la concatenación}
\end{aligned}$$

□

9. Considere la siguiente función misteriosa *mist*

$$\begin{aligned}
mist\ []\ ys &= ys \\
mist\ (x : xs)\ ys &= mist\ xs\ (x : ys)
\end{aligned}$$

a) ¿Qué hace la función *mist*?

SOLUCIÓN: La función *mist* recibe dos listas xs y ys , y concatena la reversa de xs con ys .

b) Muestre que $rev\ xs = mist\ xs\ []$, con *rev* la operación reversa sobre cadenas definidas cómo sigue:

$$\begin{aligned}
rev\ [] &= [] \\
rev\ (a : xs) &= rev\ xs_ [a]
\end{aligned}$$

Demostración. Inducción estructural sobre xs .

- Base de inducción.

$xs = []$. Este caso se cumple ya que $rev\ [] = [] = mist\ []\ []$.

- Hipótesis de inducción. Supongamos que se cumple $rev\ xs = mist\ xs\ []$.

- Tenemos que demostrar que para cualquier a , se cumple $rev\ (a : xs) = mist\ (a : xs)\ []$.

Entonces

$$\begin{aligned}
rev\ (a : xs) &= rev\ xs_ [a] && \text{definición recursiva de } rev \\
&= (mist\ xs\ [])_ [a] && \text{por H.I.} \\
&= mist\ xs\ (a : []) && \text{propiedades de } [] \\
&= mist\ (a : xs)\ [] && \text{definición recursiva de } mist
\end{aligned}$$

□

10. Sea A una fórmula de la lógica proposicional cuyos únicos conectivos son \wedge, \vee, \neg . Definimos la fórmula dual de A , denotada como A_D , intercambiando \wedge por \vee , \vee por \wedge y reemplazando a cada variable p por su negación $\neg p$. Por ejemplo, $A = (r \vee q) \wedge \neg p$, $A_D = (\neg r \wedge \neg q) \vee \neg \neg p$.

a) Defina recursivamente una función dual tal que $dual(A) = A_D$.

SOLUCIÓN: Definimos la función $dual(A)$ de la siguiente forma

- $dual(p) = \neg p$
- $dual(true) = false$
- $dual(false) = true$
- $dual(\neg A) = \neg dual(A)$

- $dual(A \wedge B) = dual(A) \vee dual(B)$
- $dual(A \vee B) = dual(A) \wedge dual(B)$.

b) Muestre que $\neg A \equiv A_D$ mediante inducción sobre fórmulas.

Demostración. Inducción sobre las fórmulas.

- Base de inducción.

A es atómica (no tiene operadores). Este caso se cumple, ya que, por la reflexividad de \equiv , tenemos que

- $A = p \Rightarrow dual(p) = \neg p \equiv \neg p$
- $A = true \Rightarrow dual(true) = false \equiv false$
- $A = false \Rightarrow dual(false) = true \equiv true$

- Hipótesis de inducción. Supongamos que $\neg A \equiv A_D$ y $\neg B \equiv B_D$.

- Paso inductivo.

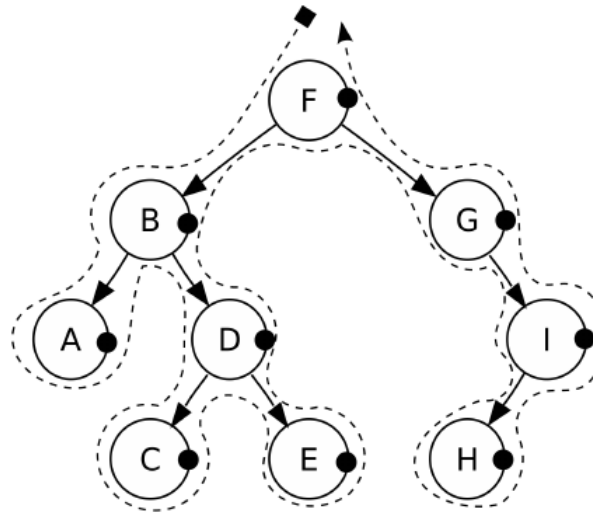
Tenemos que

- $A = \neg A \Rightarrow dual(\neg A) = \neg dual(A) \equiv \neg \neg A$
- $A = A \wedge B \Rightarrow dual(A \wedge B) = dual(A) \vee dual(B) \equiv \neg A \vee \neg B \equiv \neg(A \wedge B)$
- $A = A \vee B \Rightarrow dual(A \vee B) = dual(A) \wedge dual(B) \equiv \neg A \wedge \neg B \equiv \neg(A \vee B)$

□

11. Resuelva los siguientes incisos para árboles binarios.

- Defina recursivamente una función $hmi(T)$ que devuelve la hoja más a la izquierda en un árbol binario.
- La distancia entre la raíz r de un árbol binario T hacia algún otro nodo p es el número de aristas (líneas) que hay entre ambos nodos y la altura o profundidad de un árbol se define como la máxima distancia entre la raíz y alguna hoja más 1. Demuestre que el número máximo de hojas en un árbol de altura n es 2^{n-1} .
- De una definición recursiva que devuelva en una lista el recorrido post-orden de los árboles binarios. Si se tiene el siguiente árbol T , el resultado del recorrido es el siguiente:



$post-order(T) = [A, C, E, D, B, H, I, G, F]$