

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas
Tarea 1

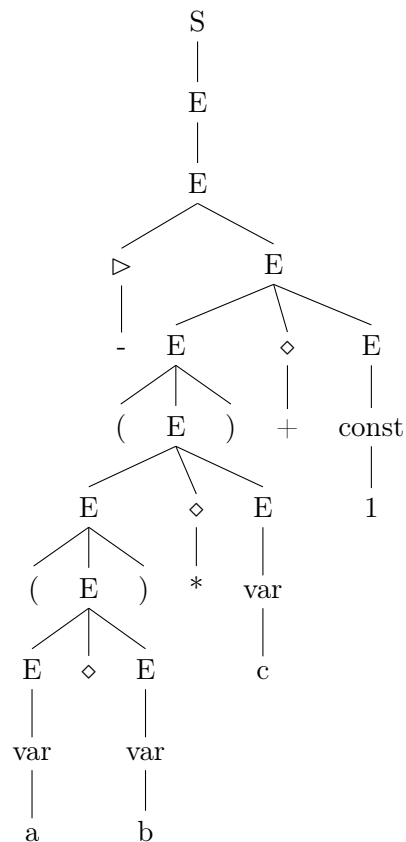
Rubí Rojas Tania Michelle
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

1 de septiembre de 2017

1. Demuestre que las siguientes expresiones están bien formadas.

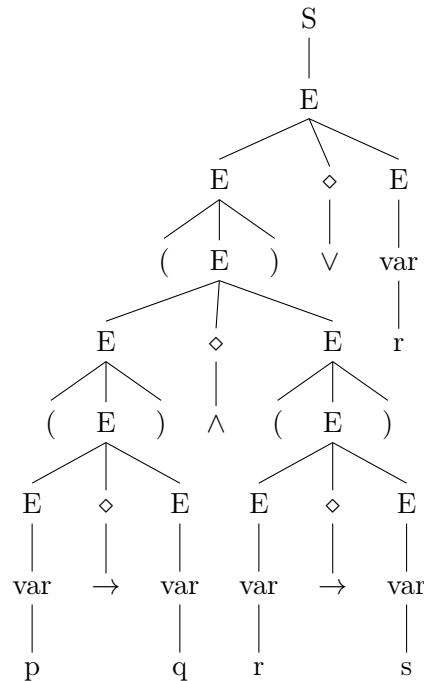
■ $-((a + b) * c) + 1$

SOLUCIÓN: Para mostrar que la expresión está bien formada, daremos su respectivo árbol de derivación.



- $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \vee r$

SOLUCIÓN: Para mostrar que la expresión está bien formada, daremos su respectivo árbol de derivación.



- Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones atómicas, cuáles son proposiciones no atómicas y cuáles no son proposiciones. Justifique su respuesta.

- El grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

- Para pasar el examen es necesario que los alumnos estudien, hagan la tarea y asistan a clase.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque puede descomponerse en más proposiciones debido a que contiene los conectivos lógicos *es necesario*, *e* *y*.

- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$

SOLUCIÓN: Esta oración no es una proposición ya que no puede calificarse como falso o verdadero.

- $x \neq y$. (Donde el operador binario \neq evalúa a **verdadero** si x es distinto de y y a **falso** si x es igual a y)

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero (gracias a su operador binario), y es atómica porque no puede descomponerse en más proposiciones debido a que no contiene conectivos lógicos.

- Asgard es el mundo de los AEsir y en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

SOLUCIÓN: Esta oración es una proposición ya que puede calificarse como falso o verdadero, y es compuesta porque contiene el conectivo lógico *y*.

3. De los incisos de la pregunta anterior que son proposiciones, exhiba una traducción al lenguaje de la lógica proposicional.

a) p

Donde p : el grito de Dolores, en 1810, sentó las bases para la independencia de México.

b) $p \rightarrow (q \wedge r \wedge s)$

Donde

- p : los alumnos pasan el examen.
- q : los alumnos estudian.
- r : los alumnos hacen la tarea.
- s : los alumnos asisten a clase.

d) p

Donde p : $x \neq y$

e) $p \wedge q$

Donde

- p : Asgard es el mundo de los AEsir.
- q : en Svartálfaheim habitan los Svartalfar.

4. Coloque los paréntesis en las siguientes expresiones de acuerdo a la precedencia y asociatividad de los operadores, sin preocuparse por la evaluación de la expresión.

a) $-b + b * 2 - 4 \cdot a \cdot c / 2 \cdot a$

SOLUCIÓN: $(((-b) + (b * 2)) - (((4 \cdot a) \cdot c) / 2) \cdot a))$

b) $p \wedge q \vee r \rightarrow s \leftrightarrow p \vee q$

SOLUCIÓN: $((((p \wedge q) \vee r) \rightarrow s) \leftrightarrow (p \vee q))$

c) $a < b \wedge b < c \rightarrow a < b$

SOLUCIÓN: $a < b \wedge b < c \rightarrow a < b$

d) $a \cdot b - a \cdot c \leftrightarrow a > 0 \wedge b > c$

SOLUCIÓN: $((a \cdot b) - (a \cdot c)) \leftrightarrow ((a > 0) \wedge (b > c))$

5. Ejecute las siguientes sustituciones textuales simultáneas, fijándose bien en la colocación de los paréntesis. Quite los paréntesis que son redundantes.

a) $5x + 3y * a - 4y[y := x]$

SOLUCIÓN: La sustitución se aplica a la expresión más cercana, que en este caso es $4y$.

$$\begin{aligned} 5x + 3y * a - 4y[y := x] &= 5x + 3y * a - 4(x) \\ &= 5x + 3y * a - 4x \end{aligned}$$

b) $(5x + 3y * a - 4y)[y := x]$

SOLUCIÓN: La sustitución se aplica a toda la expresión.

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y := x] &= (5x + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5x + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

c) $(5x + 3y * a - 4y)[y, x := x, y]$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} (5x + 3y * a - 4y)[y, x := x, y] &= (5(y) + 3(x) * a - 4(x)) \\ &= 5y + 3x * a - 4x \end{aligned}$$

d) $(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3]$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}(5x + 3y * a - 4y)[y := x][x := 3] &= (5x + 3(x) * a - 4(x))[x := 3] \\ &= (5(3) + 3((3))) * a - 4((3)) \\ &= 15 + 9 * a - 12\end{aligned}$$

6. Para las siguientes expresiones, determine a qué esquema pertenecen, dé el rango y conector principal. Justifique su respuesta.

a) $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r$

SOLUCIÓN: Esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q)[p, q := a \vee b, r][a, b := p \wedge q, r \rightarrow s] &= ((a \vee b) \rightarrow r)[a, b := p \wedge q, r \rightarrow s] \\ &= (((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r) \\ &= ((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conector principal es \rightarrow , de donde su rango izquierdo es $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s))$ y su rango derecho es r .

b) $p \vee q \rightarrow r \rightarrow s \leftrightarrow t$

SOLUCIÓN: Primero, le colocamos paréntesis a la expresión según la precedencia y la asociatividad de los conectivos.

$$(((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)$$

Así, esta expresión pertenece al esquema condicional, y para justificarlo mostraremos la sucesión de sustituciones textuales que se fueron realizando:

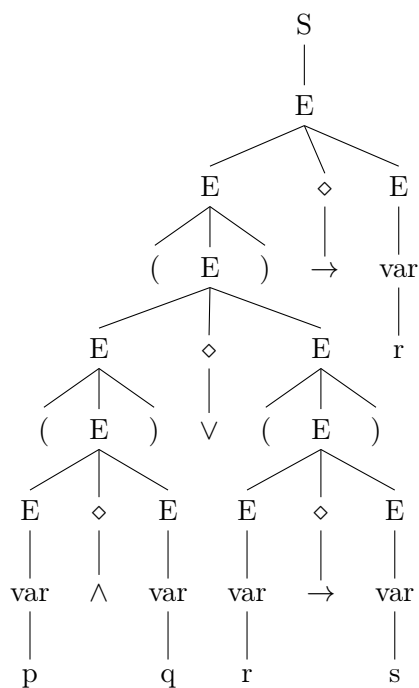
$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q)[p, q := a \rightarrow b, t][a, b := p \vee q, r \rightarrow s] &= ((a \rightarrow b) \leftrightarrow t)[a, b := p \vee q, r \rightarrow s] \\ &= (((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow t)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conector principal es \leftrightarrow , de donde su rango derecho es t y su rango izquierdo es $((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$.

7. Para cada una de las expresiones del ejercicio anterior, construya los árboles de análisis sintáctico.

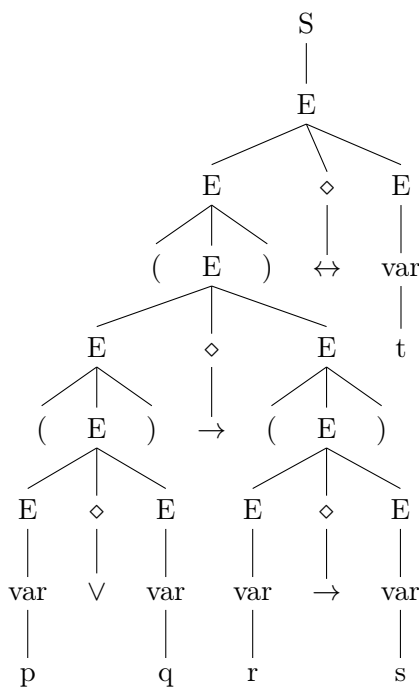
a) $((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow r$

SOLUCIÓN:



b) $p \vee q \rightarrow r \rightarrow s \leftrightarrow t$

SOLUCIÓN:



8. Llene las partes que faltan y escriba en qué consiste la expresión E .

a)

b)

9. Utilizando únicamente la tabla de equivalencias dada en clase, demuestre las siguientes equivalencias lógicas mediante razonamiento ecuacional. Justifique cada paso.

a) $(A \vee B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned} (A \vee B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \vee B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg A \vee Q) \wedge (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\ &\equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow \end{aligned}$$

□

b) $(A \wedge B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \vee (B \rightarrow Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee (Q \vee Q) && \text{idempotencia} \\ &\equiv (\neg A \vee Q) \vee (\neg B \vee Q) && \text{distributividad} \\ &\equiv (A \rightarrow Q) \vee (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow \end{aligned}$$

□

c) $(A \wedge B) \rightarrow Q \equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q)$

Demostración.

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \rightarrow Q &\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q && \text{equivalencia de } \rightarrow \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q && \text{De Morgan} \\ &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee Q) && \text{asociatividad} \\ &\equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q) && \text{equivalencia de } \rightarrow \end{aligned}$$

□

10. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si son o no satisfacibles. En caso de serlo, muestre un modelo para cada una de ellas, y en caso de no serlo, demuestre que cada estado evalúa a falso.

a) $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$

SOLUCIÓN: La fórmula no es satisfacible. Para demostrar que cada estado evalúa a falso, mostraremos su respectiva tabla de verdad.

P	Q	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \wedge \neg Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

b) $(\neg P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow ((S \wedge T) \rightarrow (U \vee P)))$

SOLUCIÓN: La fórmula es satisfacible. El modelo \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(P) = 1$, $\mathcal{I}(Q) = \mathcal{I}(R) = \mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(T) = \mathcal{I}(U) = 0$ hace que la expresión evalúe a verdadero.

11. Decida si los siguientes conjuntos son satisfacibles. Justifique su respuesta.

■ $\Gamma = \{p \rightarrow q, p \vee r \wedge s, q \rightarrow t\}$

SOLUCIÓN: El conjunto sí es satisfacible, basta considerar el modelo \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(s) = \mathcal{I}(t) = 1$.

■ $\Gamma = \{p \vee q \vee r, \neg(r \vee \neg s), s \leftrightarrow t, p \rightarrow \neg t, q \rightarrow (p \vee \neg t)\}$

SOLUCIÓN: El conjunto no es satisfacible. Supongamos que existe una interpretación \mathcal{I} que satisface a Γ . Entonces se tiene que $\mathcal{I}(\neg(r \vee \neg s)) = 1$, por lo que $\mathcal{I}(r) = 0$ e $\mathcal{I}(s) = 1$. Así $\mathcal{I}(t) = 1$ por $\mathcal{I}(s \leftrightarrow t) = 1$. Además $\mathcal{I}(p) = 0$ por $\mathcal{I}(p \rightarrow \neg t) = 1$. Así, $\mathcal{I}(q) = 0$ por $\mathcal{I}(q \rightarrow (p \vee \neg t)) = 1$. Pero con estos valores, $\mathcal{I}(p \vee q \vee r) = 0$. Por lo tanto, nuestro conjunto no es satisfacible.

12. Para los siguientes argumentos, decida si son correctos y en caso de no serlo dé una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión.

■ $p \rightarrow q, p \vee r, \neg(r \wedge s), / \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow (q \vee \neg s)$

SOLUCIÓN: Sí es correcto el argumento. Para que una interpretación \mathcal{I} haga falsa a la conclusión, debe de cumplir que $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 0$ e $\mathcal{I}(s) = 1$. Entonces, para que \mathcal{I} haga verdadera a $p \vee r$, se necesita que $\mathcal{I}(r) = 1$. Pero entonces, $\neg(r \wedge s)$ evalúa a falso. Así, toda interpretación que haga falsa a la conclusión debe de hacer falsa a al menos una de las premisas.

■ $p \vee q, \neg(p \wedge r), \neg q / \therefore r \rightarrow s$

SOLUCIÓN: Sí es correcto el argumento. Cualquier interpretación \mathcal{I} que haga falsa a la conclusión debe de cumplir que $\mathcal{I}(r) = 1$ e $\mathcal{I}(s) = 0$. En este caso, para que $\neg(p \wedge r)$ evalúe a verdadero, se necesita que $\mathcal{I}(p) = 0$. Además, para que $p \vee q$ evalúe a verdadero, tiene que suceder que $\mathcal{I}(q) = 1$. Sin embargo, esto último implica que $\neg q$ evalúa a falso, y por lo tanto, es imposible hacer verdaderas a todas las premisas si la conclusión es falsa.

13. Construya las siguientes derivaciones.

■ $p \wedge (\neg r \wedge \neg w), l, r \wedge z \vdash \neg r \wedge (l \wedge z)$

SOLUCIÓN:

1. $p \wedge (\neg r \wedge \neg w)$	Premisa
2. l	Premisa
3. $r \wedge z$	Premisa
4. z	E \wedge 3
5. $\neg r \wedge \neg w$	E \wedge 1
6. $\neg r$	E \wedge 5
7. $l \wedge z$	I \wedge 2, 4
8. $\neg r \wedge (l \wedge z)$	I \wedge 6, 7

- $p \vee \neg(r \vee s), r, l \rightarrow \neg p \vdash \neg l$

SOLUCIÓN:

1. $p \vee \neg(r \vee s)$	Premisa
2. r	Premisa
3. $l \rightarrow \neg p$	Premisa
4. $r \vee s$	I \vee 2
5. p	SD 1, 4
6. $\neg \neg p$	RE 5
7. $\neg l$	MT 6, 3

- $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow q)$

SOLUCIÓN:

1. $p \rightarrow q$	Premisa
2. $p \vee q$	Premisa
3. $\neg \neg p \vee q$	RE 2
4. $\neg p \rightarrow q$	RE 3
5. q	DCS 1, 4
6. $p \rightarrow q \vdash p \vee q \rightarrow q$	MTD 1 – 5
7. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow q)$	MTD 1 – 6

14. Construya la derivación del siguiente argumento para demostrar que es correcto.

Si procrastinas en Helheim o en Asgard, entonces eres un AEsir. Procastinas en Helheim. Pero, ser gobernado por Odín, es necesario para ser un AEsir. Por lo tanto, eres gobernado por Odín o procrastinas en Asgard.

Demostración. Primero, transformamos el argumento a lenguaje de lógica proposicional. Asignamos las siguientes variables proposicionales:

- p : Procastinas en Helheim.
- q : Procastinas en Asgard.
- r : Eres un AEsir.
- s : Eres gobernado por Odín.

Así, el argumento a verificar es: $(p \vee q) \rightarrow r, p, r \rightarrow s / \therefore s \vee q$.

Entonces

1.	$(p \vee q) \rightarrow r$	Premisa
2.	p	Premisa
3.	$r \rightarrow s$	Premisa
4.	$p \vee q$	IV 2
5.	r	MP 4, 1
6.	s	MP 5, 3
7.	$s \vee q$	IV 6

Por lo tanto, el argumento es correcto. □

15. Usando Tableaux, determine la correctud del siguiente argumento.

$$(P \vee Q) \rightarrow R, P, R \rightarrow T / \therefore T \vee Q$$

SOLUCIÓN: Para determinar la correctud del argumento, debemos comprobar que la siguiente fórmula es una tautología

$$(((P \vee Q) \rightarrow R) \wedge P \wedge (R \rightarrow T)) \rightarrow (T \vee Q)$$

Para ello, debemos construir el Tableaux para la negación de la fórmula anterior, es decir,

$$((\neg P \wedge Q) \vee R) \wedge P \wedge (\neg R \vee T) \wedge \neg T \wedge \neg Q$$

Así,

1.	$(\neg P \wedge Q) \vee R$	✓	
2.	$\neg R \vee T$	✓	
3.	P	✓	
4.	$\neg T$	✓	
5.	$\neg Q$		
6.	$\neg R$	✓	T ✓ ext. de β en 2
7.	$\neg P \wedge Q$	✓	R ✓ \otimes ext. de β en 1
8.	$\neg P$	\otimes	\otimes 4,6 ext. de α en 7
	\otimes	\otimes 6,7	
	\otimes	3,8	

Como el Tableaux es cerrado, eso significa que la fórmula es una tautología, y por lo tanto, el argumento es correcto.

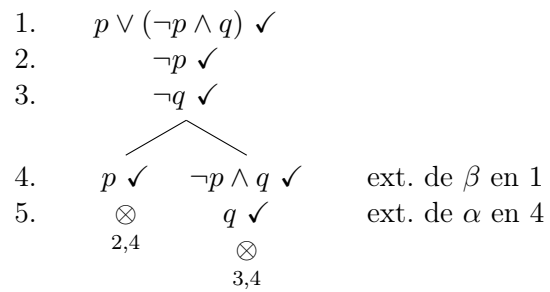
16. Usando Tableaux, demuestre que la siguiente fórmula es una tautología.

$$p \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow p \vee q$$

Demostración. Debemos construir el Tableaux de la negación de la fórmula, es decir, hay que construir el Tableaux para

$$p \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg p \wedge \neg q$$

Así,



Como el Tableaux es cerrado, eso significa que la fórmula es una tautología.

□