Facultad de Ciencias, UNAM
Lenguajes de Programación
Tarea 4

Hernández Salinas Óscar
Rubí Rojas Tania Michelle

23 de noviembre de 2020

1. Currifica cada uno de los siguientes términos:

   a) $\lambda abc.abc$
   Solución:
   $$\lambda abc.abc \to \lambda a.\lambda b.\lambda c.abc$$

   b) $\lambda abc.\lambda cde.acbdce$
   Solución:
   $$\lambda abc.\lambda cde.acbdce \to \lambda a.\lambda b.\lambda c.\lambda c.\lambda d.\lambda e.acbdce$$

   c) $(\lambda x.(\lambda xy.y)(\lambda zw.w))(\lambda uv.v)$
   Solución:
   $$(\lambda x.(\lambda xy.y)(\lambda zw.w))(\lambda uv.v) \to (\lambda x.(\lambda x.\lambda y.y)(\lambda z.\lambda w.w))(\lambda u.\lambda v.v)$$

2. Para cada uno de los siguientes términos, aplica $\alpha-$conversiones para obtener términos donde todas las variables de ligado sean distintas.

   a) $\lambda x.\lambda y.\ (\lambda x.y\ \lambda y.x)$
   Solución:
   $$\begin{aligned}\lambda x.\lambda y.\ (\lambda x.y\ \lambda y.x) &\equiv_\alpha \lambda a.\lambda y.\ (\lambda x.y\ \lambda y.x)[x := a]\\ &\equiv_\alpha \lambda a.\lambda y\ (\lambda x.y\ \lambda y.a)\\ &\equiv_\alpha \lambda a.\lambda b.\ (\lambda x.y\ \lambda y.a)[y := b]\\ &\equiv_\alpha \lambda a.\lambda b.\ (\lambda x.b\ \lambda y.a)\end{aligned}$$

   b) $\lambda x.\ (x\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ y)\ x))$
   Solución:
   $$\begin{aligned}\lambda x.\ (x\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ y)\ x)) &\equiv_\alpha \lambda a.\ (x\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ y)\ x))[x := a]\\ &\equiv_\alpha \lambda a.\ (a\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ y)\ a))\end{aligned}$$

   c) $\lambda a.\ (\lambda b.a\ \lambda b\ (\lambda a.a\ b))$
   Solución:
   $$\begin{aligned}\lambda a.\ (\lambda b.a\ \lambda b\ (\lambda a.a\ b)) &\equiv_\alpha \lambda x.\ (\lambda b.a\ \lambda b\ (\lambda a.a\ b))[a := x]\\ &\equiv_\alpha \lambda x.\ (\lambda b.x\ \lambda b\ (\lambda a.a\ b))\\ &\equiv_\alpha \lambda x.\ (\lambda y.x[b := y]\ \lambda z[b := z]\ (\lambda a.a\ b))\\ &\equiv_\alpha \lambda x.\ (\lambda y.x\ \lambda z\ (\lambda a.a\ b))\end{aligned}$$

3. Aplicar las $\beta-$reducciones correspondientes a las siguientes expresiones hasta llegar a una Forma Normal o justificar por qué dicha forma no existe. Indicar en cada paso la *redex* y el *reducto*. Considerar las siguientes definiciones:

$$I =_{\text{def}} \lambda x.x \qquad S =_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz)$$
$$K =_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.x \qquad \Omega =_{\text{def}} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$$

a) $\lambda x.xK\Omega$

Solución: Como la expresión ya no puede reducirse más mediante $\beta-$reducciones ya que no tiene espacios (y por lo tanto, no tiene aplicaciones de función), entonces ya se encuentra en Forma Normal.

b) $(\lambda x.x\ (II))\ z$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
(\lambda x.x\ (II))\ z &=_{def} (\lambda x.x\ (\lambda x.x\ \lambda x.x))\ z \\
&\to_\beta (\lambda x.x\ (x[x := \lambda x.x]))\ z \\
&\to_\beta (\lambda x.x\ (\lambda x.x))\ z \\
&\to_\beta (x[x := (\lambda x.x)])\ z \\
&\to_\beta (\lambda x.x)\ z \\
&\to_\beta x[x := z] \\
&\to_\beta z
\end{aligned}$$

donde las expresiones en color azul son el *redex* y las expresiones en color rojo son el *reducto*. Ahora bien, como la expresión `z` ya no puede reducirse más mediante $\beta-$ reducciones, entonces ya se encuentra en Forma Normal.

c) $(\lambda u.\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xu))\ v)\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy)$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
(\lambda u.\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xu))\ v)\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy) &\to_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xu))[u := v])\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xu))[u := v])\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w[u := v]\ (\lambda x.xu)[u := v]))\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w[u := v]\ (\lambda x.xu[u := v])))\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.x[u := v]\ u[u := v])))\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xv)))\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda w.w\ (\lambda x.xv))[v := y]\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda w.w[v := y]\ (\lambda x.xv)[v := y])\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda w.w[v := y]\ (\lambda x.xv[v := y]))\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda w.w\ (\lambda x.x[v := y]\ v[v := y]))\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda w.w\ (\lambda x.xy))\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (w[w := (\lambda x.xy)])\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta (\lambda x.xy)\ (\lambda z.\lambda y.zy) \\
&\to_\beta xy[x := (\lambda z.\lambda y.zy)] \\
&\to_\beta x[x := (\lambda z.\lambda y.zy)]\ y[x := (\lambda z.\lambda y.zy)] \\
&\to_\beta (\lambda z.\lambda y.zy)y \\
&\to_\beta \lambda y.zy[z := y] \\
&\to_\beta \lambda y.zy[z := y] \\
&\to_\beta \lambda y.z[z := y]\ y[z := y] \\
&\to_\beta \lambda y.yy
\end{aligned}$$

donde las expresiones en color azul son el *redex* y las expresiones en color rojo son el *reducto*. Ahora bien, como la expresión $\lambda y.yy$ ya no puede reducirse más mediante $\beta-$ reducciones, entonces ya se encuentra en Forma Normal.

d) $S\ (KI)\ (KI)$

SOLUCIÓN: Tenemos que

$$\begin{aligned}
S\ (KI)\ (KI) &\equiv (S\ (KI))\ (KI)\\
&=_{def} (S\ (\lambda x.\lambda y.x\ \lambda x.x))\ (\lambda x.\lambda y.x\ \lambda x.x)\\
&\to_\beta (S\ (\lambda y.x[x := \lambda x.x]))\ (\lambda y.x[x := \lambda x.x])\\
&\to_\beta (S\ (\lambda y.x[x := \lambda x.x]))\ (\lambda y.x[x := \lambda x.x])\\
&\to_\beta (S\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&=_{def} (\lambda x.\lambda y.\lambda z.xz\ (yz)\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda y.\lambda z.xz[x := (yz)]\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda y.\lambda z.xz[x := (yz)]\ (\lambda y.\lambda x.x)\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda y.\lambda z.xz[x := (yz)]\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda y.\lambda z.x[x := (yz)]\ z[x := (yz)]\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda y.\lambda z.(yz)z\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.(yz)z[y := (\lambda y.\lambda x.x)])\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.(yz)z[y := (\lambda y.\lambda x.x)])\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.(yz)[y := (\lambda y.\lambda x.x)]\ z[y := (\lambda y.\lambda x.x)])\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.(y[y := (\lambda y.\lambda x.x)]\ z[y := (\lambda y.\lambda x.x)])\ z)\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.((\lambda y.\lambda x.x)z)z)\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.(\lambda x.x[y := z])z)\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.(\lambda x.x[y := z])z)\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.(\lambda x.x)z)\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.(x[x =: z]))\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta (\lambda z.z)\ (\lambda y.\lambda x.x)\\
&\to_\beta z[z := (\lambda y.\lambda x.x)]\\
&\to_\beta (\lambda y.\lambda x.x)
\end{aligned}$$

donde las expresiones en color azul son el *redex* y las expresiones en color rojo son el *reducto*. Ahora bien, como la expresión $\lambda y.\lambda x.x$ ya no puede reducirse más mediante $\beta-$reducciones, entonces ya se encuentra en Forma Normal.

4. De acuerdo a la representación de números (Numerales de Church) y representación de booleanos en el Cálculo λ:

   a) Define la función $<$ que decide si un número es menor a otro.

   SOLUCIÓN: Como ya tenemos definida la función $\geq$, entonces podemos definir la función $<$ como la negación de $\geq$; pues si x no es estrictamente mayor o igual a y entonces eso implica que necesariamente x es menor que y. Por lo tanto,

$$< \ =_{def}\ \lambda a.\lambda b.\neg(\geq ab)$$

   b) Define la función disyunción $\leftrightarrow$ (equivalencia) sobre booleanos.

   SOLUCIÓN: Sabemos que

$$p \to q \equiv \neg p \lor q \qquad\qquad p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$$

   Por lo que podemos definir las funciones

$$\to\ =_{def}\ \lambda a.\lambda b. \lor (\neg a)b \qquad\qquad \leftrightarrow\ =_{def}\ \lambda a.\lambda b. \land (\to ab)(\to ba)$$

c) Define la función disyunción exclusiva *xor* sobre booleanos.

SOLUCIÓN:

$$xor =_{def} \lambda a.\lambda b.a(bFT)(bTF)$$

5. Dada la siguiente expresión en RACKET: