

Facultad de Ciencias, UNAM
Lenguajes de Programación
Tarea 2

Hernández Salinas Óscar
Rubí Rojas Tania Michelle

19 de octubre de 2020

1. Define las siguientes funciones sobre expresiones del lenguaje WAE:

- a) La función `libres`: $WAE \rightarrow (\text{listof symbol})$ que dada una expresión de tipo WAE devuelve una lista con los identificadores libres (sin repeticiones) contenidos en ésta.

SOLUCIÓN:

```
(define (libres expr)
  (type-case WAE expr
    [id (i) (list i)]
    [num (n) '()]
    [add (lhs rhs) (union (libres lhs) (libres rhs))]
    [sub (lhs rhs) (union (libres lhs) (libres rhs))]
    [with (id value body)
      (union (libres-aux value (list id))
              (libres-aux body (list id))))])

(define (libres-aux expr lst)
  (type-case WAE expr
    [id (i) (if (not (member? i lst))
                 (list i)
                 '())]
    [num (n) '()]
    [add (lhs rhs) (union (libres-aux lhs lst) (libres-aux rhs lst))]
    [sub (lhs rhs) (union (libres-aux lhs lst) (libres-aux rhs lst))]
    [with (id value body)
      (union (libres-aux value (union lst (list id)))
              (libres-aux body (union lst (list id))))])])
```

- b) La función `ligadas: WAE → (listof symbol)` que dada una expresión de tipo WAE devuelve una lista con identificadores ligados (sin repeticiones) contenidos en ésta.

SOLUCIÓN:

```
(define (ligadas expr)
  (type-case WAE expr
    [id (i) '()]
    [num (n) '()]
    [add (lhs rhs) (union (ligadas lhs) (ligadas rhs))]
    [sub (lhs rhs) (union (ligadas lhs) (ligadas rhs))]
    [with (id value body)
      (union (ligadas-aux value (list id))
              (ligadas-aux body (list id))))])

(define (ligadas-aux expr lst)
  (type-case WAE expr
    [id (i) (if (member? i lst)
                 (list i)
                 '())]
    [num (n) '()]
    [add (lhs rhs) (union (ligadas-aux lhs lst) (ligadas-aux rhs lst))]
    [sub (lhs rhs) (union (ligadas-aux lhs lst) (ligadas-aux rhs lst))]
    [with (id value body)
      (union (ligadas-aux value (union lst (list id)))
              (ligadas-aux body (union lst (list id))))])
```

- c) La función `de-ligado: WAE → (listof symbol)` que dada una expresión de tipo WAE devuelve una lista con identificadores de ligado (sin repeticiones) contenidos en ésta.

SOLUCIÓN:

```
(define (de-ligado expr)
  (type-case WAE expr
    [id (i) '()]
    [num (n) '()]
    [add (lhs rhs) (union (de-ligado lhs) (de-ligado rhs))]
    [sub (lhs rhs) (union (de-ligado lhs) (de-ligado rhs))]
    [with (id value body)
      (union (list id) (de-ligado value) (de-ligado body))])
```

2. Sea e una expresión del lenguaje WAE. Suponiendo que $(\text{libres } e) = '()$, demostrar o dar un contraejemplo de la siguiente desigualdad.

$$(\text{length } (\text{ligada } e)) \leq (\text{length } (\text{de-ligado } e))$$

Demostración. Sea e la siguiente expresión del lenguaje WAE

`{with {a 17} {+ a {+ a {+ a {+ a a}}}}}`

donde el símbolo de color azul es una variable de **de-ligado** y los símbolos de color rojo son variables **ligadas**. Notemos, además, que no tenemos variables **libres**.

Así,

$$(\text{length}(\text{ligada } e)) = 5 \not\leq 1 (\text{length}(\text{de-ligado } e))$$

Por lo tanto, la desigualdad $(\text{length}(\text{ligada } e)) \leq (\text{length}(\text{de-ligado } e))$ es falsa.

□

3. Realiza las siguientes sustituciones cuidando el alcance de las variables correspondientes. Indica para cada expresión los identificadores libres, de ligado y ligados.

a) $\{\text{with } \{w \{- u \ 8\}\} \{\text{with } \{v \ 5\} \{+ w \{+ y \ x\}\}\} [x := \{+ u \ v\}]\}$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} &= \{\text{with } \{w \{- u \ 8\}[x := \{+ u \ v\}]\} \{\text{with } \{v \ 5\} \{+ w \{+ y \ x\}\}[x := \{+ u \ v\}]\} \\ &= \{\text{with } \{w \{- u[x := \{+ u \ v\}] \ 8[x := \{+ u \ v\}]\} \\ &\quad \{\text{with } \{v \ 5[x := \{+ u \ v\}]\} \{+ w \{+ y \ x\}[x := \{+ u \ v\}]\}\} \\ &= \{\text{with } \{w \{- u \ 8\}\} \{\text{with } \{v \ 5\} \{+ w[x := \{+ u \ v\}] \{+ y \ x\}[x := \{+ u \ v\}]\}\} \\ &= \{\text{with } \{w \{- u \ 8\}\} \{\text{with } \{v \ 5\} \{+ w \{+ y[x := \{+ u \ v\}] \ x[x := \{+ u \ v\}]\}\}\} \\ &= \{\text{with } \{w \{- u \ 8\}\} \{\text{with } \{v \ 5\} \{+ w \{+ y \{+ u \ v\}\}\}\} \end{aligned}$$

Donde las variables de color azul son **de-ligado**, las de color rojo son **ligadas** y las de color verde son **libres**.

b) $\{\text{with } \{y \{+ x \ v\}\} \{\text{with } \{z \ x\} \{- x \{- y \ z\}\}\} [x := \{- y \ z\}]\}$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} &= \{\text{with } \{y \{+ x \ v\}[x := \{- y \ z\}]\} \{\text{with } \{z \ x\} \{- x \{- y \ z\}\} [x := \{- y \ z\}]\} \\ &= \{\text{with } \{y \{+ x[x := \{- y \ z\}] \ v[x := \{- y \ z\}]\} \\ &\quad \{\text{with } \{z \ x[x := \{- y \ z\}]\} \{- x \{- y \ z\}[x := \{- y \ z\}]\}\} \\ &= \{\text{with } \{y \{+ \{- y \ z\} \ v\}\} \{\text{with } \{z \{- y \ z\}\} \{- x[x := \{- y \ z\}] \{- y \ z\}[x := \{- y \ z\}]\}\} \\ &= \{\text{with } \{y \{+ \{- y \ z\} \ v\}\} \\ &\quad \{\text{with } \{z \{- y \ z\}\} \{- \{- y \ z\} \{- y[x := \{- y \ z\}] \ z[x := \{- y \ z\}]\}\}\} \\ &= \{\text{with } \{y \{+ \{- y \ z\} \ v\}\} \{\text{with } \{z \{- y \ z\}\} \{- \{- y \ z\} \{- y \ z\}\}\} \end{aligned}$$

Donde las variables de color azul son **de-ligado**, las de color rojo son **ligadas** y las de color verde son **libres**.

c) $\{\text{with } \{y \{- z \ 3\}\} \{+ x \{+ y \ 11\}\} [x := \{- y \{z \ 23\}\}]\}$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} &= \{\text{with } \{y \{- z \ 3\}[x := \{- y \{- z \ 23\}\}]\} \{+ x \{+ y \ 11\}[x := \{- y \{- z \ 23\}\}]\} \\ &= \{\text{with } \{y \{- z[x := \{- y \{- z \ 23\}\}] \ 3[x := \{- y \{- z \ 23\}\}]\} \\ &\quad \{+ x[x := \{- y \{- z \ 23\}\}] \{+ y \ 11[x := \{- y \{- z \ 23\}\}]\}\} \\ &= \{\text{with } \{y \{- z \ 3\}\} \\ &\quad \{+ \{- y \{- z \ 23\}\} \{+ y[x := \{- y \{- z \ 23\}\}] \ 11[x := \{- y \{- z \ 23\}\}]\}\} \\ &= \{\text{with } \{y \{- z \ 3\}\} \{+ \{- y \{z \ 23\}\} \{+ y \ 11\}\} \end{aligned}$$

Donde las variables de color azul son **de-ligado**, las de color rojo son **ligadas** y las de color verde son **libres**.

4. Convierte las siguientes expresiones a su respectiva versión usando índices de *De Bruijn*.

a) {with {a 2}
 {with {b 3}
 {with {c 4}
 {with {d {+ a {- b c}}}
 {with {f {with {a {+ b c}} a}}
 {+ d {with {b {- d f}} {- b c}}}}}}}}}

SOLUCIÓN:

```
{with 2
  {with 3
    {with 4
      {with {+ <:2> {- <:1> <:0>}}
        {with {with {+ <:2> <:1>} <:0>}
          {+ <:1> {with {- <:1> <:0>} {- <:0> <:2>}}}}}}}}}
```

b) {with {{a 2} {b 3} {c {with {{a 2}} {+ 2 3}}}}
 {with {{d 8}}
 {with {{a c} {b {- 8 d}} {c {+ b b}}} {
 {with {{g {with {{z a} {y b} {z d}} 1}}} {
 {+ g {- d c}}}}}}}}}

SOLUCIÓN:

```
{with {2 3 {with {2} {+ 2 3}}}
  {with {8}
    {with {{<:1, 2> {{- 8 <:0, 0>}} {{+ <:1, 1> <:1, 1>}}}
      {with {{with {{<:0, 0>} <:0, 1>} <:1, 0>}} 1}}
        {+ <:0, 0> {- <:2, 0> <:1, 2>}}}}}}}
```

5. Dadas las siguientes expresiones representadas mediante índices de *De Bruijn*, obtén su respectiva versión usando identificadores de variables.

a) {with {+ 2 3}
 {with 17
 {with {+ <:0> <:0>}
 {with {- <:0> {+ <:1> <:2>}}
 {with {with 2 {+ <:0> 3}}
 {- <:3> {+ <:2> {+ <:0> <:1>}}}}}}}}}

SOLUCIÓN:

```
{with {x {+ 2 3}}
  {with {y 17}
    {with {z {+ y y}}
      {with {w {- z {+ y x}}}
        {with {v {with {a 2} {+ a 3}}}
          {- y {+ z {+ v w}}}}}}}}}
```

b) `{with {1 2 3}
 {with {4 5 6}
 {with {{with {{+ <:0 1> <:1 2>} {- <:1 1> <:0 0>}} 3}}
 {with {<:0 0>}
 {+ <:3 2> {+ <:2 1> {+ <:1 0> <:0 0>}}}}}}}}`

SOLUCIÓN:

```
{with {{a 1} {b 2} {c 3}}
  {with {{d 4} {e 5} {f 6}}
    {with {{g {with {{h {+ e c}} {i {- b d}}} 3}}
      {with {j g}
        {+ c {+ e {+ g j}}}}}}}}
```

6. Determina el valor de la siguiente expresión y responde las siguientes preguntas: ¿puede haber otro resultado correcto? ¿por qué? ¿cuál es el correcto?

```
{with {a 2}
  {with {b 3}
    {with {c {+ a b}}
      {with {a -2}
        {with {b -3}
          {+ c c}}}}}}
```

SOLUCIÓN:

```
{with {a 2} {with {b 3} {with {c {+ a b}} {with {a -2} {with {b -3} {+ c c}}}}}}
={with {c {+ 2 3}} {with {a -2} {with {b -3} {+ c c}}}}
={with {c 5} {with {a -2} {with {b -3} {+ c c}}}}
={+ 5 5}
=10
```

La expresión nos puede dar dos diferentes valores dependiendo si se ocupa alcance dinámico o estático y los dos valores son correctos dependiendo de cómo esté implementado el lenguaje en el que estemos trabajando.

Usando alcance estático nos da: 10

Usando alcance dinámico nos da: -10