Facultad de Ciencias, UNAM
Lenguajes de Programación
Tarea 4

Hernández Salinas Óscar
Rubí Rojas Tania Michelle

23 de noviembre de 2020

1. Currifica cada uno de los siguientes términos:

   a) $\lambda abc.abc$
   Solución:
   $$\lambda abc.abc \to \lambda a.\lambda b.\lambda c.abc$$

   b) $\lambda abc.\lambda cde.acbdce$
   Solución:
   $$\lambda abc.\lambda cde.acbdce \to \lambda a.\lambda b.\lambda c.\lambda c.\lambda d.\lambda e.acbdce$$

   c) $(\lambda x.(\lambda xy.y)(\lambda zw.w))(\lambda uv.v)$
   Solución:
   $$(\lambda x.(\lambda xy.y)(\lambda zw.w))(\lambda uv.v) \to (\lambda x.(\lambda x.\lambda y.y)(\lambda z.\lambda w.w))(\lambda u.\lambda v.v)$$

2. Para cada uno de los siguientes términos, aplica $\alpha-$conversiones para obtener términos donde todas las variables de ligado sean distintas.

   a) $\lambda x.\lambda y.\ (\lambda x.y\ \lambda y.x)$
   Solución:
   $$\begin{aligned}\lambda x.\lambda y.\ (\lambda x.y\ \lambda y.x) &\equiv_\alpha \lambda a.\lambda y.\ (\lambda x.y\ \lambda y.x)[x := a]\\ &\equiv_\alpha \lambda a.\lambda y\ (\lambda x.y\ \lambda y.a)\\ &\equiv_\alpha \lambda a.\lambda b.\ (\lambda x.y\ \lambda y.a)[y := b]\\ &\equiv_\alpha \lambda a.\lambda b.\ (\lambda x.b\ \lambda y.a)\end{aligned}$$

   b) $\lambda x.\ (x\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ y)\ x))$
   Solución:
   $$\begin{aligned}\lambda x.\ (x\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ y)\ x)) &\equiv_\alpha \lambda a.\ (x\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ y)\ x))[x := a]\\ &\equiv_\alpha \lambda a.\ (a\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ y)\ a))\end{aligned}$$

   c) $\lambda a.\ (\lambda b.a\ \lambda b\ (\lambda a.a\ b))$
   Solución:
   $$\begin{aligned}\lambda a.\ (\lambda b.a\ \lambda b\ (\lambda a.a\ b)) &\equiv_\alpha \lambda x.\ (\lambda b.a\ \lambda b\ (\lambda a.a\ b))[a := x]\\ &\equiv_\alpha \lambda x.\ (\lambda b.x\ \lambda b\ (\lambda a.a\ b))\\ &\equiv_\alpha \lambda x.\ (\lambda y.x[b := y]\ \lambda z[b := z]\ (\lambda a.a\ b))\\ &\equiv_\alpha \lambda x.\ (\lambda y.x\ \lambda z\ (\lambda a.a\ b))\end{aligned}$$

3. Aplicar las $\beta-$reducciones correspondientes a las siguientes expresiones hasta llegar a una Forma Normal o justificar por qué dicha forma no existe. Indicar en cada paso la *redex* y el *reducto*. Considerar las siguientes definiciones:

$$I =_{\text{def}} \lambda x.x \qquad S =_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz)$$

$$K =_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.x \qquad \Omega =_{\text{def}} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$$

a) $\lambda x.xK\Omega$

Solución: Notemos que la expresión Ω diverge, pues

$$\begin{aligned}\Omega &=_{def} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\ &\to_\beta xx[x := (\lambda x.xx)] \\ &\to_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\ &= \Omega\end{aligned}$$

donde la expresión de color azul es el *redex*, y la expresión de color rojo es el *reducto*.

Así, la expresión original $\lambda x.xK\Omega$ diverge y por lo tanto no tiene Forma Normal.

b) $(\lambda x.x\ (II))\ z$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}(\lambda x.x\ (II))\ z &=_{def} (\lambda x.x\ (\lambda x.x\ \lambda x.x))\ z \\ &\to_\beta (\lambda x.x\ (x[x := \lambda x.x]))\ z \\ &\to_\beta (\lambda x.x\ (\lambda x.x))\ z \\ &\to_\beta (x[x := \lambda x.x])\ z \\ &\to_\beta (\lambda x.x)\ z \\ &\to_\beta x[x := z] \\ &\to_\beta z\end{aligned}$$

donde las expresiones en color azul son el *redex* y las expresiones en color rojo son el *reducto*. Ahora bien, como la expresión z ya no puede reducirse más mediante $\beta-$ reducciones, entonces ya se encuentra en Forma Normal.

c) $(\lambda u.\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xu))\ v)\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy)$

SOLUCIÓN: Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\lambda u.\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xu))\ v)\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy) &\rightarrow_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xu))[u := v])\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xu))[u := v])\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w[u := v]\ (\lambda x.xu)[u := v]))\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w[u := v]\ (\lambda x.xu)[u := v]))\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.x[u := v]\ u[u := v])))\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda v.\ (\lambda w.w\ (\lambda x.xv)))\ y\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda w.w\ (\lambda x.xv))[v := y]\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda w.w[v := y]\ (\lambda x.xv)[v := y])\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda w.w[v := y]\ (\lambda x.xv[v := y]))\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda w.w\ (\lambda x.x[v := y]\ v[v := y]))\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda w.w\ (\lambda x.xy))\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (w[w := \lambda x.xy])\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta (\lambda x.xy)\ (\lambda z.\lambda y.zy)\\
&\rightarrow_\beta xy[x := \lambda z.\lambda y.zy]\\
&\rightarrow_\beta x[x := \lambda z.\lambda y.zy]\ y[x := \lambda z.\lambda y.zy]\\
&\rightarrow_\beta (\lambda z.\lambda y.zy)y\\
&\rightarrow_\beta (\lambda y.zy[z := y])\\
&\rightarrow_\beta (\lambda y.zy[z := y])\\
&\rightarrow_\beta (\lambda y.z[z := y]\ y[z := y])\\
&\rightarrow_\beta (\lambda y.yy)
\end{aligned}
$$

d) $S\ (KI)\ (KI)$

Solución: Tenemos que

$$
\begin{aligned}
S\ (KI)\ (KI) \equiv{} & (S\ (KI))\ (KI) \\
=_{def}{} & (S\ (\lambda x.\lambda y.x\ \lambda x.x))\ (\lambda x.\lambda y.x\ \lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (S\ (\lambda y.x[x := \lambda x.x]))\ (\lambda y.x[x := \lambda x.x]) \\
\to_\beta{} & (S\ (\lambda y.x[x := \lambda x.x]))\ (\lambda y.x[x := \lambda x.x]) \\
\to_\beta{} & (S\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
=_{def}{} & (\lambda x.\lambda y.\lambda z.xz\ (yz)\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda y.\lambda z.xz[x := yz]\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda y.\lambda z.xz[x := yz]\ (\lambda y.\lambda x.x)\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda y.\lambda z.xz[x := yz]\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda y.\lambda z.x[x := yz]\ z[x := yz]\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda y.\lambda z.(yz)z\ (\lambda y.\lambda x.x))\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda z.(yz)z[y := \lambda y.\lambda x.x])\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda z.(yz)z[y := \lambda y.\lambda x.x])\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda z.(yz)[y := (\lambda y.\lambda x.x)]\ z[y := \lambda y.\lambda x.x])\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda z.(y[y := \lambda y.\lambda x.x]\ z[y := \lambda y.\lambda x.x])\ z)\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda z.((\lambda y.\lambda x.x)z)z)\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda z.(\lambda x.x[y := z])z)\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda z.(\lambda x.x[y := z])z)\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda z.(\lambda x.x)z)\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda x.x[z =: z])\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda x.x[z =: z])\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & (\lambda x.x)\ (\lambda y.\lambda x.x) \\
\to_\beta{} & x[x := \lambda y.\lambda x.x] \\
\to_\beta{} & \lambda y.\lambda x.x
\end{aligned}
$$

donde las expresiones en color azul son el *redex* y las expresiones en color rojo son el *reducto*. Ahora bien, como la expresión $\lambda y.\lambda x.x$ ya no puede reducirse más mediante $\beta-$reducciones, entonces ya se encuentra en Forma Normal.

4. De acuerdo a la representación de números (Numerales de Church) y representación de booleanos en el Cálculo λ:

   a) Define la función $<$ que decide si un número es menor a otro.

   b) Define la función disyunción $\leftrightarrow$ (equivalencia) sobre booleanos.

   c) Define la función disyunción exclusiva *xor* sobre booleanos.

5. Dada la siguiente expresión en RACKET: