

Facultad de Ciencias, UNAM
Lenguajes de Programación
Tarea 4

Hernández Salinas Óscar
Rubí Rojas Tania Michelle

23 de noviembre de 2020

1. Currifica cada uno de los siguientes términos:

a) $\lambda abc.abc$

SOLUCIÓN:

$$\lambda abc.abc \rightarrow \lambda a.\lambda b.\lambda c.abc$$

b) $\lambda abc.\lambda cde.acbdce$

SOLUCIÓN:

$$\lambda abc.\lambda cde.acbdce \rightarrow \lambda a.\lambda b.\lambda c.\lambda c.\lambda d.\lambda e.acbdce$$

c) $(\lambda x.(\lambda xy.y)(\lambda zw.w))(\lambda uv.v)$

SOLUCIÓN:

$$(\lambda x.(\lambda xy.y)(\lambda zw.w))(\lambda uv.v) \rightarrow (\lambda x.(\lambda x.\lambda y.y)(\lambda z.\lambda w.w))(\lambda u.\lambda v.v)$$

2. Para cada uno de los siguientes términos, aplica α -conversiones para obtener términos donde todas las variables de ligado sean distintas.

a) $\lambda x.\lambda y. (\lambda x.y \lambda y.x)$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \lambda x.\lambda y. (\lambda x.y \lambda y.x) &\equiv_{\alpha} \lambda a.\lambda y. (\lambda x.y \lambda y.x)[x := a] \\ &\equiv_{\alpha} \lambda a.\lambda y (\lambda x.y \lambda y.a) \\ &\equiv_{\alpha} \lambda a.\lambda b. (\lambda x.y \lambda y.a)[y := b] \\ &\equiv_{\alpha} \lambda a.\lambda b. (\lambda x.b \lambda y.a) \end{aligned}$$

b) $\lambda x. (x (\lambda y. (\lambda x.x y) x))$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \lambda x. (x (\lambda y. (\lambda x.x y) x)) &\equiv_{\alpha} \lambda a. (x (\lambda y. (\lambda x.x y) x))[x := a] \\ &\equiv_{\alpha} \lambda a. (a (\lambda y. (\lambda x.x y) a)) \end{aligned}$$

c) $\lambda a. (\lambda b.a \lambda b (\lambda a.a b))$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \lambda a. (\lambda b.a \lambda b (\lambda a.a b)) &\equiv_{\alpha} \lambda x. (\lambda b.a \lambda b (\lambda a.a b))[a := x] \\ &\equiv_{\alpha} \lambda x. (\lambda b.x \lambda b (\lambda a.a b)) \\ &\equiv_{\alpha} \lambda x. (\lambda y.x[b := y] \lambda z[b := z] (\lambda a.a b)) \\ &\equiv_{\alpha} \lambda x. (\lambda y.x \lambda z (\lambda a.a b)) \end{aligned}$$

3. Aplicar las β -reducciones correspondientes a las siguientes expresiones hasta llegar a una Forma Normal o justificar por qué dicha forma no existe. Indicar en cada paso la *redex* y el *reducto*. Considerar las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} I &=_{\text{def}} \lambda x.x & S &=_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz) \\ K &=_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.x & \Omega &=_{\text{def}} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \end{aligned}$$

a) $\lambda x.xK\Omega$

SOLUCIÓN: Como la expresión ya no puede reducirse más mediante β -reducciones ya que no tiene espacios (y por lo tanto, no tiene aplicaciones de función), entonces ya se encuentra en Forma Normal.

b) $(\lambda x.x (II)) z$

SOLUCIÓN: Tenemos que

$$\begin{aligned} (\lambda x.x (II)) z &=_{\text{def}} (\lambda x.x (\lambda x.x \lambda x.x)) z \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda x.x (x[x := \lambda x.x])) z \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda x.x (\lambda x.x)) z \\ &\rightarrow_{\beta} (x[x := (\lambda x.x)]) z \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda x.x) z \\ &\rightarrow_{\beta} x[x := z] \\ &\rightarrow_{\beta} z \end{aligned}$$

donde las expresiones en color azul son el *redex* y las expresiones en color rojo son el *reducto*. Ahora bien, como la expresión z ya no puede reducirse más mediante β -reducciones, entonces ya se encuentra en Forma Normal.

c) $(\lambda u.\lambda v. (\lambda w.w (\lambda x.xu)) v) y (\lambda z.\lambda y.zy)$

SOLUCIÓN: Tenemos que

$$\begin{aligned} (\lambda u.\lambda v. (\lambda w.w (\lambda x.xu)) v) y (\lambda z.\lambda y.zy) &\rightarrow_{\beta} (\lambda v. (\lambda w.w (\lambda x.xu))[u := v]) y (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda v. (\lambda w.w (\lambda x.xu))[u := v]) y (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda v. (\lambda w.w[u := v] (\lambda x.xu)[u := v])) y (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda v. (\lambda w.w[u := v] (\lambda x.xu[u := v]))) y (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda v. (\lambda w.w (\lambda x.x[u := v] u[u := v]))) y (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda v. (\lambda w.w (\lambda x.xv))) y (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda w.w (\lambda x.xv))[v := y] (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda w.w[v := y] (\lambda x.xv)[v := y]) (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda w.w[v := y] (\lambda x.xv[v := y])) (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda w.w (\lambda x.x[v := y] v[v := y])) (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda w.w (\lambda x.xy)) (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (w[w := (\lambda x.xy)]) (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda x.xy) (\lambda z.\lambda y.zy) \\ &\rightarrow_{\beta} xy[x := (\lambda z.\lambda y.zy)] \\ &\rightarrow_{\beta} x[x := (\lambda z.\lambda y.zy)] y[x := (\lambda z.\lambda y.zy)] \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda z.\lambda y.zy)y \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda y.zy[z := y] \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda y.zy[z := y] \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda y.z[z := y] y[z := y] \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda y.yy \end{aligned}$$

donde las expresiones en color azul son el *redex* y las expresiones en color rojo son el *reducto*. Ahora bien, como la expresión $\lambda y.yy$ ya no puede reducirse más mediante β -reducciones, entonces ya se encuentra en Forma Normal.

d) $S (KI) (KI)$

SOLUCIÓN: Tenemos que

$$\begin{aligned}
S (KI) (KI) &\equiv (S (KI)) (KI) \\
&=_{def} (S (\lambda x.\lambda y.x \lambda x.x)) (\lambda x.\lambda y.x \lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (S (\lambda y.x[x := \lambda x.x])) (\lambda y.x[x := \lambda x.x]) \\
&\rightarrow_{\beta} (S (\lambda y.x[x := \lambda x.x])) (\lambda y.x[x := \lambda x.x]) \\
&\rightarrow_{\beta} (S (\lambda y.\lambda x.x)) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&=_{def} (\lambda x.\lambda y.\lambda z.xz (yz) (\lambda y.\lambda x.x)) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda z.xz[x := (yz)] (\lambda y.\lambda x.x)) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda z.xz[x := (yz)] (\lambda y.\lambda x.x) (\lambda y.\lambda x.x)) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda z.xz[x := (yz)] (\lambda y.\lambda x.x)) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda z.x[x := (yz)] z[x := (yz)] (\lambda y.\lambda x.x)) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda z.(yz)z (\lambda y.\lambda x.x)) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.(yz)z[y := (\lambda y.\lambda x.x)]) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.(yz)z[y := (\lambda y.\lambda x.x)]) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.(yz)[y := (\lambda y.\lambda x.x)] z[y := (\lambda y.\lambda x.x)]) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.(yz[y := (\lambda y.\lambda x.x)] z[y := (\lambda y.\lambda x.x)]) z) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.((\lambda y.\lambda x.x)z)z) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.(\lambda x.x[y := z])z) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.(\lambda x.x[y := z])z) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.(\lambda x.x)z) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.(x[x := z])) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda z.z) (\lambda y.\lambda x.x) \\
&\rightarrow_{\beta} z[z := (\lambda y.\lambda x.x)] \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda x.x)
\end{aligned}$$

donde las expresiones en color azul son el *redex* y las expresiones en color rojo son el *reducto*. Ahora bien, como la expresión $\lambda y.\lambda x.x$ ya no puede reducirse más mediante β -reducciones, entonces ya se encuentra en Forma Normal.

4. De acuerdo a la representación de números (Numerales de Church) y representación de booleanos en el Cálculo λ :

a) Define la función $<$ que decide si un número es menor a otro.

SOLUCIÓN:

b) Define la función disyunción \leftrightarrow (equivalencia) sobre booleanos.

SOLUCIÓN: Sabemos que

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Entonces,

Así, podemos definir la función

$$\leftrightarrow =_{def} (\lambda x. \lambda y. \wedge (\rightarrow xy)(\rightarrow yx))$$

c) Define la función disyunción exclusiva xor sobre booleanos.

SOLUCIÓN:

5. Dada la siguiente expresión en RACKET: