Funciones

Tania Michelle Rubí Rojas

Semestre 2023-1

Desafío 03

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta:

1. **Indica** si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.
   - Si dos elementos en el dominio de una función son iguales, entonces sus imagénes en el codominio son iguales.
   - Dos funciones definidas de manera diferente nunca pueden ser iguales.

2. Sean el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función $f : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{Z}$ definida de la siguiente manera:

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{si X tiene un número par de elementos} \\ 1 & \text{si X tiene un número impar de elementos} \end{cases}$$

   Determina lo siguiente:

   a) $f(\{4, 1, 3\})$ b) $f(\{2, 3\})$ c) $f(\varnothing)$ d) $f(\{5, 2, 3, 4\})$

3. Sea la función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ que está definida de la siguiente manera:

$$f(n) = \text{la suma de los divisores positivos de } n$$

   Determina lo siguiente:

   a) $f(1)$ b) $f(5)$ c) $f(15)$ d) $f(21)$

4. **Indica** si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.
   - Una función puede tener la misma entrada para más de una salida.
   - El conjunto de todas las cadenas de ceros y unos es contable.

5. Sea P el conjunto de todas las personas. **Da** dos ejemplos de funciones de P a P que sean inyectivas, pero no subrayectivas.

6. **Indica** si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.
   - Sean X y Y conjuntos. Si $f : X \to Y$ es cualquier función, entonces $I_Y \circ f = f$, donde I_Y es la función identidad en Y.
   - Si $f : X \to Y$ es una función inyectiva y sobreyectiva con la función inversa $f^{-1} : Y \to X$, entonces $f \circ f^{-1} = I_Y$, donde I_Y es la función identidad en Y.

7. Para las funciones definidas en los ejercicios 2 y 3, **responde** lo siguiente:
   - ¿Cuál es el dominio de f?
   - ¿Cuál es la imagen de f?
   - ¿Cuál es su regla de correspondencia?
   - ¿Quién es f^{-1}?
   - ¿Quién es $f \circ f$?

8. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{u\}$ conjuntos. **Resuelve** lo siguiente:
   - **Encuentra** todas las funciones de X a Y.
   - ¿Cuántas de esas funciones son inyectivas? ¿Cuántas son suprayectivas?

(9) **Indica** si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

- Sean A, B y C conjuntos. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones y $g \circ f$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.
- Sean A, B y C conjuntos. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones y $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

(10) **Indica** si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

- Sean A, B y C conjuntos. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones y $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.
- Sean A, B y C conjuntos. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones y $g \circ f$ es suprayectiva, entonces f es suprayectiva.

(11) Sea S el conjunto de todos los subconjuntos finitos de enteros positivos. Sea la función $f : \mathbb{Z}^+ \to S$ que está definida de la siguiente manera:

$$f(n) = \text{el conjunto de divisores positivos de } n$$

Determina lo siguiente:

a) $f(21)$ b) $f(17)$ c) $f(15)$ d) $f(1)$

(12) Sea P el conjunto de todas las personas. **Da** dos ejemplos de funciones de P a P que sean suprayectivas, pero no inyectivas.

(13) **Indica** si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

- Cualquier conjunto infinito contiene un subconjunto infinito contable.
- La unión de dos conjuntos infinitos contables es infinito contable.

(14) **Indica** si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

- Sean A, B, C y D conjuntos. Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son funciones, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Sea A un conjunto. Sean las funciones $f : A \to A$, $g : A \to A$ y $h : A \to$. Si h es inyectiva y $h \circ f = h \circ g$, entonces $f = g$.

(15) ¿Cuál es la diferencia entre una relación binaria y una función?

(16) ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones?

$$R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad \text{donde } (x, y) \in R \leftrightarrow x = y^2$$
$$S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \qquad \text{donde } xRy \leftrightarrow x + y \text{ es par}$$

En caso de que alguna lo sea,

- ¿Cuál es su dominio?
- ¿Cuál es su codominio?
- ¿Cuál es su regla de correspondencia?
- ¿Cuál es su función inversa?
- ¿Cuál es el resultado de componer la función consigo misma?

17 ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones?

$$T \subseteq \{1,2,3\} \times \{\varnothing, a, b\} \qquad \text{donde } T = \{(1,\varnothing),(2,\varnothing),(3,a),(1,b)\}$$
$$U \subseteq \{1,2,3\} \times \{\varnothing, a, b\} \qquad \text{donde } U = \{(1,a),(2,b),(3,\varnothing),(1,a)\}$$

En caso de que alguna lo sea,

- ¿Cuál es su dominio?
- ¿Cuál es su codominio?
- ¿Cuál es su regla de correspondencia?
- ¿Cuál es su función inversa?
- ¿Cuál es el resultado de componer la función consigo misma?

18 ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones?

$$R \subseteq \{1,2,3\} \times \{\varnothing, a, b\} \qquad \text{donde } R = \{(2,b),(3,\varnothing)\}$$
$$A = \{1,2,3\} \qquad \text{donde } S = \{(x,y) \in A^2 \mid x+1 = y\}$$

En caso de que alguna lo sea,

- ¿Cuál es su dominio?
- ¿Cuál es su codominio?
- ¿Cuál es su regla de correspondencia?
- ¿Cuál es su función inversa?
- ¿Cuál es el resultado de componer la función consigo misma?

19 Sean A, B y C conjuntos no vacíos. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
- Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces f es suprayectiva.

20 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$. Definimos la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{a\}$ como sigue:

$$f(x) = a + \frac{b}{x}$$

Demuestra que f es una función biyectiva.