

# Definición Recursiva de Conjuntos

Tania Michelle Rubí Rojas

Semestre 2023-1

## Desafío 04

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta:

- ① Para el siguiente conjunto

$$S = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

**realiza** lo siguiente.

- **Da** la definición por extensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $16 \in S$  y  $5 \notin S$ .

- ② Para el siguiente conjunto

$$S = \{2^n - 2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n > 0\}$$

**realiza** lo siguiente.

- **Da** la definición por extensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $30 \in S$  y  $2 \in S$ .

- ③ Para el siguiente conjunto

$$S = \{a^n bc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

**realiza** lo siguiente.

- **Da** la definición por extensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $aabcc \in S$  y  $aabbcc \notin S$ .

- ④ Sea  $S$  el conjunto de los números naturales. Para dicho conjunto, **realiza** lo siguiente:

- **Da** la definición por comprensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $5 \in S$  y  $2 \in S$ .

- ⑤ ¿Todo conjunto puede ser definido de manera recursiva?

- ⑥ ¿Cuáles son las características de una definición recursiva?

7 Sea  $A \subseteq \mathbb{Z}$  un conjunto cuya definición recursiva es la siguiente:

- i)  $1 \in A$
- ii) Si  $a \in A$  entonces  $a \in A$
- iii) Estos y sólo estos son elementos de  $A$ .

**Resuelve** lo siguiente:

- ¿Cuál es el pegamento, el antecedente y el consecuente de cada una de las reglas de la definición?
- **Escribe** por extensión y comprensión el conjunto  $A$ .

8 Sea  $S$  el conjunto de los números negativos que son pares. Para dicho conjunto, **realiza** lo siguiente:

- **Da** la definición por comprensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $-10 \in S$  y  $0 \notin S$

9 Sea  $S$  el conjunto de los números enteros que son impares. Para dicho conjunto, **realiza** lo siguiente:

- **Da** la definición por comprensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $-3 \in S$  y  $7 \in S$ .

10 Sea  $S$  el conjunto de todas las cadenas de ceros y unos. Para dicho conjunto, **realiza** lo siguiente:

- **Da** la definición por comprensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $0101 \in S$  y  $031 \notin S$

11 Para el siguiente conjunto

$$S = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n > 0\}$$

**realiza** lo siguiente.

- **Da** la definición por extensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $0011 \in S$  y  $00001111 \in S$

12 Sea  $S$  el conjunto de todas las cadenas de ceros y unos que terminan con un cero. Para dicho conjunto, **realiza** lo siguiente:

- **Da** la definición por extensión del conjunto  $S$ .
- **Define** a  $S$  recursivamente.
- ¿Tu definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de tu definición y cada uno de los componentes de las reglas que definiste.
- Usando la definición que escribiste en el inciso anterior, muestra que  $111010 \in S$  y  $1 \notin S$

13 ¿Una definición recursiva puede tener más de una regla recursiva? **Justifica** tu respuesta con un ejemplo.

14 Sea  $F$  un conjunto cuya definición recursiva es la siguiente:

- i)  $1 \in F$
- ii) Si  $n \in F$  entonces  $n^2 + n + 3 \in F$
- iii) Estos y sólo estos son elementos de  $F$ .

¿Cuáles de los siguientes elementos pertenecen a  $F$ ?

- a) 52
- b) 33
- c) 106

15 Sea  $S$  un conjunto de números cuya definición recursiva es la siguiente:

- i)  $2 \in S$
- ii) Si  $n \in S$  entonces  $n + 3 \in S$  y  $2 * n \in S$  (donde  $+$ ,  $*$  denotan, respectivamente, la suma y multiplicación habitual de números naturales).
- iii) Estos y sólo estos son elementos de  $S$ .

**Resuelve** lo siguiente:

- **Da** la definición por comprensión del conjunto  $S$ .
- ¿Los elementos 6, 7, 19 pertenecen a  $S$ ?
- ¿La definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de la definición y cada uno de los componentes de las reglas definidas.

16 Sea  $S$  un conjunto de cadenas cuya definición recursiva es la siguiente:

- i)  $a \in S$
- ii)  $b \in S$
- iii) Si  $x \in S$  entonces  $xb \in S$ .
- iiii) Estos y sólo estos son elementos de  $S$ .

**Resuelve** lo siguiente:

- **Da** la definición por comprensión del conjunto  $S$ .
- ¿Los elementos  $a, aba, bbbbb$  pertenecen a  $S$ ?
- ¿La definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de la definición y cada uno de los componentes de las reglas definidas.

17 Sea  $S$  un conjunto de cadenas cuya definición recursiva es la siguiente:

- i)  $pqq \in S$
- ii) Si  $x, y \in S$  entonces  $pxqq, qqxp, xy \in S$
- iii) Estos y sólo estos son elementos de  $S$ .

**Resuelve** lo siguiente:

- **Da** la definición por comprensión del conjunto  $S$ .
- ¿Los elementos  $ppqqqq, qqpp, qqqqqqpppp$  pertenecen a  $S$ ?
- ¿La definición es correcta? **Justifica** tu respuesta mostrando cada uno de los componentes de la definición y cada uno de los componentes de las reglas definidas.

18 Sea  $M$  el conjunto de números naturales que son impares cuya definición recursiva es la siguiente:

- i)  $1 \in M$
- ii) Si  $n \in M$  entonces  $n + 2 \in M$
- iii) Este es el conjunto  $M$

¿La definición recursiva de  $M$  es correcta, válida y finita?

- 19 ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son **verdaderas**?
- Una definición recursiva es válida si y sólo si construye todos los elementos del conjunto en cuestión.
  - La regla de extremo garantiza que las reglas base y las reglas recursivas son las únicas maneras de obtener o construir elementos del conjunto.
- 20 ¿Una definición recursiva puede tener más de un caso base?