Inducción Matemática

Tania Michelle Rubí Rojas

Semestre 2023-1

Desafío 13

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta:

1. **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

[tcbox raise base]$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

2. **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$$4 | (3^{2n} + 7)$$

3. **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \geq 4 \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$$2^n \leq n! \leq n^n$$

4. **Demuestra** usando **inducción fuerte** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

[tcbox raise base]$$F_n \leq \left(\tfrac{12}{7}\right)^n$$

donde F_n es el n-ésimo número de la serie de Fibonacci.

5. **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

[tcbox raise base]$$(11)^{n+2} + (12)^{2n+1} \text{ es divisible entre } 133$$

6. **Nubecita** define la secuencia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_n &= 2a_{n-1} - a_{n-2} && \text{para toda } n \geq 3 \end{aligned}$$

Demuestra usando **inducción fuerte** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$$a_n = n$$

(7) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$[\text{tcbox raise base}]\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(8) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$[\text{tcbox raise base}]x^{m+n} = x^m x^n$$

(9) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$[\text{tcbox raise base}]\sum_{i=0}^{n} 9 \cdot 10^i = 10^{n+1} - 1$$

(10) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 1$ se cumple que

$$[\text{tcbox raise base}]\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

(11) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 6$ se cumple que

$$[\text{tcbox raise base}]3^n < n!$$

(12) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$[\text{tcbox raise base}]\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$$

(13) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]n es un número par o impar

(14) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible entre 9

15 **Nubecita** realiza un experimento con diferentes computadoras y obtiene como resultado las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_0 &= 3 \\ c_1 &= 7 \\ c_{n+2} &= 3c_{n+1} - 2c_n & n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Demuestra usando **inducción fuerte** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$c_n = 2^{n+2} - 1$

16 **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

[tcbox raise base]2^{2n} es múltiplo de 3

17 **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$5|(n^5 - n)$

18 **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

[tcbox raise base]$2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$

19 **Demuestra** usando **inducción fuerte** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

[tcbox raise base]$12|(n^4 - n^2)$

20 **Nubecita** define la siguiente secuencia como sigue:

$$\begin{aligned} d_0 &= 2 \\ d_1 &= 5 \\ d_n &= 5d_{n-1} - 6d_{n-2} & n > 1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Demuestra usando **inducción fuerte** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$d_n = 2^n + 3^n$

21 **Demuestra** usando **inducción fuerte** que si n es un número entero mayor qye 1, entonces n es un primo o n se puede escribir como el producto de primos.

(22) **Nubecita** define la siguiente secuencia como sigue:

$$
\begin{aligned}
d_0 &= 1 \\
d_1 &= 4 \\
d_n &= 4(d_{n-1} - d_{n-2}) && n > 1 \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Demuestra usando **inducción fuerte** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$d_n = 2^n(n+1)$

(23) **Demuestra** usando **inducción fuerte** que cualquier entero $n \geq 12$ puede ser escrito de la forma $n = 4a + 5b$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

(24) Considera la siguiente función definida recursivamente:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f(n) &= f(n-1) + 3
\end{aligned}
$$

Demuestra usando **inducción** que $f(n) = 3n + 1$.

(25) **Demuestra** usando **inducción fuerte** que para toda $n \geq 3 \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$F_n > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$

donde F_n es el n-ésimo número de la serie de Fibonacci.

(26) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

[tcbox raise base]$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$

(27) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

[tcbox raise base]$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

(28) **Nubecita** define la siguiente secuencia como sigue:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 8 \\
a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} && n \geq 3 \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Demuestra usando **inducción fuerte** que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n$

(29) **Demuestra** usando **inducción** que un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos.

(30) **Demuestra** usando **inducción** que un conjunto de n elementos tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ subconjuntos con 2 elementos.

(31) ¿Cuáles son las diferencias entre la inducción matemática convencional y la inducción matemática fuerte?

(32) **Demuestra** usando **inducción** que para toda $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ se cumple que

[tcbox raise base]$n! + k$ es divisible por k

33 **Demuestra** usando **inducción** que para cualquier entero impar positivo se cumple que

[tcbox raise base]$(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + \cdots + (-2)^n = \frac{1-2^{n+1}}{3}$

34 **Demuestra** usando **inducción** que para cualquier entero $n \geq 2$ se cumple que

[tcbox raise base]$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} < \frac{n^2}{n+1}$

35 **Demuestra** usando **inducción** que para cualquier entero $n \geq 2$ se cumple que

[tcbox raise base]$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

36 Sea $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$s_1 = \frac{9}{10}$$
$$s_2 = \frac{10}{11}$$
$$s_k = s_{k-1} \cdot s_{k-2}$$

para todo entero $k \geq 3$. **Demuestra** usando **inducción fuerte** que para cualquier entero positivo se cumple que

[tcbox raise base]$0 < s_n \leq 1$

37 **Demuestra** usando **inducción** que para cualquier entero $n \geq 3$ se cumple que

[tcbox raise base]$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$

38 Un juego consiste en dos jugadores y dos pilas de monedas, cada una con el mismo número $n \geq 1$ de monedas. Los jugadores se turnan, y cada turno permite a un jugador eliminar cualquier número de monedas de uno de los montones. El juego continúa hasta que se hayan eliminado todas las monedas de ambos montones. El ganador es el jugador que retira la(s) última(s) moneda(s). Utiliza **inducción fuerte** para **demostrar** que el jugador que va en segundo lugar siempre va a ganar.

39 Utiliza **inducción fuerte** para **demostrar** que todo entero positivo puede ser escrito como la suma de potencias de dos (es decir, todo entero positivo tiene una representación binaria).

40 Utiliza **inducción fuerte** para **demostrar** que

[tcbox raise base]$\sqrt{2}$ es irracional

41 Un rompecabezas se arma uniendo sucesivamente piezas que encajan en bloques. Se realiza un movimiento cada vez que se agrega una pieza a un bloque, o cuando se unen dos bloques. Utiliza **inducción fuerte** para **demostrar** que sin importar la secuencia de movimientos, se requieren exactamente $n - 1$ movimientos para armar un rompecabezas que tiene n piezas.

42 **Demuestra** usando **inducción** que cualquier entero $n \geq 18$ puede ser escrito de la forma $n = 4a + 7b$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

43 **Realiza** lo siguiente:

- **Determina** qué números $n \in \mathbb{Z}^+$ pueden ser escritos de la forma $n = 4a + 11b$, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.
- **Demuestra** tu afirmación usando **inducción**.

44 **Demuestra** usando **inducción** que si $n \in \mathbb{Z}^+$ es par, entonces n^2 también lo es.