Examen 13

Tania Michelle Rubí Rojas

Semestre 2023-1

Versión 03

Nombre y número de cuenta: ____________________

Indicaciones especiales:

- No se pueden utilizar resultados que resuelvan directamente los ejercicios.
- Para cada ejercicio, si así lo requiere, se debe indicar claramente sobre cuál variable se está realizando la inducción.
- Para cada ejercicio, si así lo requiere, se debe indicar claramente cuál es el caso base, la hipótesis de inducción y el paso inductivo; además de indicar cuál es la conclusión obtenida de la demostración.
- Se debe justificar cada uno de los pasos que se realicen.
- La letra debe ser lo más clara posible. En caso de que sea ilegible, la calificación automática será de cero.

1. Definimos la función factorial como sigue:

$$n! = \begin{cases} 1 & n < 2 \\ (n-1)! \times n & n > 1 \end{cases}$$

De acuerdo a esto, **demuestra** usando **inducción matemática** que para cualquier entero positivo n se cumple que

$$3^n \leq (n+2)!$$

2. **Demuestra** usando **inducción fuerte** que todo número entero positivo puede escribirse como una suma de potencias de 2 que sean distintas.

3. En una granja con mucho folklore se discute acerca del siguiente razonamiento:

> El día que nace un becerro, cualquiera lo puede cargar con facilidad. Y los becerros no crecen demasiado en un día, entonces si puedes cargar a un becerro un día, lo puedes cargar también al día siguiente. Siguiendo con este razonamiento, entonces también debería serte posible cargar al becerro el día siguiente y el siguiente y así sucesivamente. Pero después de un año, el becerro se va a convertir en una vaca adulta de 1000kg, algo que claramente ya no puedes cargar.

Demuestra, si es posible, que el argumento es correcto usando **inducción**. En caso contrario, **justifica ampliamente** en donde está el error en el razonamiento inductivo.

4. Sea `spar(n)` la función definida como

$$\texttt{spar(n)} = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$$

Realiza lo siguiente:

- **Define** una función recursiva llamada $f(n)$ para la función `spar(n)`.
- **Demuestra** usando **inducción matemática** que $f(n) = n(n+1)$

5. Definimos la sucesión r_i para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ como sigue:

$$r_1 = 1$$
$$r_{n+1} = 4r_n + 7$$

Demuestra usando **inducción fuerte** que

$$r_n = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.