Relaciones 02: La venganza

Tania Michelle Rubí Rojas

Semestre 2023-1

Desafío 06

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta:

1. Sea A un conjunto y $R = \varnothing \subset A^2$ la relación vacía.
   Responde:
   - ¿R es reflexiva sobre $\varnothing$?
   - ¿R es reflexiva sobre cualquier conjunto $A \neq \varnothing$?
   - ¿R es antirreflexiva?
   - ¿R es simétrica?
   - ¿R es antisimétrica?
   - ¿R es asimétrica?
   - ¿R es transitiva?

2. Para cada uno de los siguientes incisos, **proporciona** un ejemplo de una relación R definida sobre un conjunto A que cumpla lo siguiente y **justifica** tu respuesta, y en caso de que no sea posible, **justifica** por qué no lo es.
   - R es transitiva, pero no es reflexiva sobre A ni simétrica.
   - R no es reflexiva ni antirreflexiva.
   - R es simétrica y transitiva, pero no reflexiva sobre A.
   - R es reflexiva y antisimétrica.

3. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definimos la relación R como sigue:
   $$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,5)\}$$
   Realiza lo siguiente:
   - **Representa gráficamente** la relación R usando gráficas dirigidas.
   - **Determina** si la relación R es reflexiva sobre A, antirreflexiva sobre A, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

4. Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Definimos las relaciones R, S y T sobre A de la siguiente manera:
   $$R = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,3), (2,2), (3,0)\}$$
   $$S = \{(0,0), (0,3), (1,0), (1,2), (2,0), (3,2)\}$$
   $$T = \{(0,2), (1,0), (2,3), (3,1)\}$$
   Determina la cerradura transitiva de las relaciones R, S y T.

5. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, cuyo Universo del Discurso es $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Definimos las relaciones R y S sobre $\mathcal{P}(A)$ como sigue:
   $$R = \{(X, Y) \mid X \cap Y = \varnothing\}$$
   $$S = \{(X, Y) \mid X - Y^c\}$$
   Determina si R y S son reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas.

6. Sean R y S relaciones sobre el conjunto X. **Analiza** las siguientes afirmaciones. Si alguna es verdadera, **explica** ampliamente por qué. En caso contrario, **proporciona** un ejemplo donde no se cumpla.

   - Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cap S$ es antisimétrica.
   - Si R es antisimétrica, entonces R^{-1} es antisimétrica.
   - Si R y S son simétricas, entonces $S \circ R$ es simétrica.

7. Sean $A = \{1, 2, 3\}$. Definimos la relación R sobre A, respectivamente, como sigue:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$$

   Realiza lo siguiente:

   - **Determina** la cerradura reflexiva de R.
   - **Determina** la cerradura simétrica de R.
   - **Determina** la cerradura transitiva de R.

8. Para cada una de las siguientes relaciones, **determina** si son reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.

   - Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los árboles binarios cuyos nodos están etiquetados con elementos en $\mathbb{N}$. Definimos la relación R como sigue:

$$ARB \Leftrightarrow A \text{ tiene la misma altura que } B$$

   - Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los árboles binarios cuyos nodos están etiquetados con elementos en $\mathbb{N}$. Definimos la relación R como sigue:

$$ARB \Leftrightarrow \text{el número de nodos de } A \text{ es mayor que el número de nodos de } B$$

9. Para cada una de las siguientes relaciones, **determina** si son reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.

   - Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los árboles binarios cuyos nodos están etiquetados con elementos en $\mathbb{N}$. Definimos la relación R como sigue:

$$ARB \Leftrightarrow A \text{ tiene el mismo número de hojas que } B$$

   - Sea $\mathcal{L}_A$ el conjunto de todas las listas cuyos elementos se encuentran en el conjunto A. Definimos la relación R como sigue:

$$(l_1, l_2) \in R \Leftrightarrow \text{la cabeza de la lista } l_1 \text{ es diferente a la cabeza de la lista } l_2$$

10. Para cada una de las siguientes relaciones, **determina** si son reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.

    - Sea $\mathcal{L}_A$ el conjunto de todas las listas cuyos elementos se encuentran en el conjunto A. Definimos la relación R como sigue:

$$(l_1, l_2) \in R \Leftrightarrow \text{la longitud de la lista } l_1 \text{ es mayor o igual que la longitud de la lista } l_2$$

    - Sea $\mathcal{L}_A$ el conjunto de todas las listas cuyos elementos se encuentran en el conjunto A. Definimos la relación R como sigue:

$$(l_1, l_2) \in R \Leftrightarrow \text{los elementos de la lista } l_1 \text{ son iguales a los elementos de la lista } l_2$$

11 Sean R y S relaciones sobre el conjunto X. **Analiza** las siguientes afirmaciones. Si alguna es verdadera, **explica** ampliamente por qué. En caso contrario, **proporciona** un ejemplo donde no se cumpla.

- Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ es reflexiva.
- Si R es transitiva, entonces R^{-1} es transitiva.
- Si R y S son transitivas, entonces $S \circ R$ es transitiva.

12 **Analiza** las siguientes afirmaciones. Si alguna es verdadera, **explica** ampliamente por qué. En caso contrario, **proporciona** un ejemplo donde no se cumpla.

- Todas las relaciones que son asimétricas también son antirreflexivas.
- Todas las relaciones que son antisimétricas y transitivas también son asimétricas.
- Todas las relaciones que no son transitivas son antirreflexivas.

13 **Analiza** las siguientes afirmaciones. Si alguna es verdadera, **explica** ampliamente por qué. En caso contrario, **proporciona** un ejemplo donde no se cumpla.

- Existe una relación R sobre un conjunto X que es reflexiva, pero no transitiva.
- Existe una relación R sobre un conjunto X que no es reflexiva pero sí es asimétrica.
- Existe una relación R sobre un conjunto X que es reflexiva y transitiva, pero no es asimétrica.
- Existe una relación R sobre un conjunto X que no es simétrica, pero sí es transitiva y antirreflexiva.

14 Para cada una de las siguientes relaciones, **determina** si son reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.

- Sea P el conjunto de todas las personas vivas. Definimos la relación R como sigue:

$$(p, q) \in R \Leftrightarrow p \text{ y } q \text{ se conocen}$$

- Sea P el conjunto de todas las personas vivas. Definimos la relación R como sigue:

$$pRq \Leftrightarrow p \text{ y } q \text{ hablan el mismo idioma}$$

15 Para cada una de las siguientes relaciones, **determina** si son reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.

- Sea P el conjunto de todas las personas vivas. Definimos la relación R como sigue:

$$pRq \Leftrightarrow p \text{ y } q \text{ tienen la misma edad}$$

- Sea P el conjunto de todas las personas vivas. Definimos la relación R como sigue:

$$pRq \Leftrightarrow p \text{ y } q \text{ tienen un amigo en común}$$

16 Para cada una de las siguientes relaciones, **determina** si son reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.

- Definimos la relación R sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$R = \{(a, b) \mid a - b \text{ es un número entero positivo impar}\}$$

- Definimos la relación S sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$S = \{(a, b) \mid a = b^2\}$$