
Mission 07, Start!
Estructuras Discretas
Semestre 2023-1
December 3, 2023

Tania Michelle Rubí Rojas

Nombre y número de cuenta: _____

Notación y convenciones para el examen:

- $0 \in \mathbb{N}$
- $\gcd(a, b)$ hace referencia al máximo común divisor de dos números enteros a y b .
- $[x]$ representa la clase de equivalencia de a .
- A/R representa el conjunto cociente de A bajo R .
- $\{0, 1, 00, 11, 101, 000, 010, 111, \dots\}$ es el conjunto de todas las cadenas de ceros y unos.

1. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

Ⓐ Definimos la relación R sobre \mathbb{Z} como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow \gcd(x, y) = 1$$

Entonces R es una relación de equivalencia.

Ⓑ Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Sean X un conjunto diferente del vacío y $h : X \rightarrow A$ una función inyectiva. Definimos la relación R sobre X como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow h(x) \preceq h(y)$$

Entonces (X, R) es un conjunto parcialmente ordenado.

Ⓒ Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definimos la relación R sobre A como sigue:

$$\{(1, 1), (6, 5), (2, 2), (5, 6), (3, 3), (6, 4), (4, 4), (4, 6), \\ (5, 5), (5, 4), (6, 6), (4, 5), (2, 3), (3, 2)\}$$

Entonces las clases de equivalencia de R son:

$$[1] = \{1\} \qquad [2] = [3] = \{2, 3\} \qquad [4] = [5] = [6] = \{4, 5, 6\}$$

Ⓓ Sea W el conjunto de todas las palabras en español. Definimos la relación R sobre W como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ tiene el mismo número de letras que } y$$

Entonces R es una relación de equivalencia cuyo conjunto cociente es

$$A/R = \{\{\text{las palabras que tienen una letra}\}, \\ \{\text{las palabras que tienen dos letras}\}, \\ \{\text{las palabras que tienen tres letras}\}, \\ \dots\}$$

Ⓔ Ninguna de las anteriores.

2. Sea R una relación reflexiva y transitiva sobre un conjunto no vacío A . Definimos la relación S como sigue:

$$xSy \Leftrightarrow xRy \text{ y } yRx$$

¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ Si wRz, wSa y zSb entonces aRb .
- Ⓑ S es un orden total.
- Ⓒ Sea el conjunto cociente A/S . Definimos la relación binaria T sobre A/S de la siguiente manera:

$$[x]T[y] \Leftrightarrow xRy$$

Entonces $(A/S, T)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

- Ⓓ S es una relación de equivalencia.
- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ Sea S el conjunto de todas las cadenas de ceros y unos cuya longitud es mayor o igual a tres. Definimos la relación R sobre S como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ tiene los primeros tres caracteres que } y$$

Entonces la clase de equivalencia de 01010101 y 11111 es el conjunto de todas las cadenas que empiezan con 010 y 111, respectivamente.

- Ⓑ Definimos la relación R sobre \mathbb{R} como sigue:

$$R = \{(x, y) \mid \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2y \rfloor\}$$

donde $\lfloor 2x \rfloor$ se define como el mayor entero $i \in \mathbb{Z}$ tal que $i \leq 2x$. Entonces R es una relación de equivalencia y las clases de equivalencia de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ son $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$ y $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 1\}$, respectivamente.

- Ⓒ Definimos la relación binaria R sobre \mathbb{Z} como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ y } y \text{ tienen la misma paridad (par o impar)}$$

Entonces R **no** es una relación de equivalencia.

- Ⓓ Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definimos la relación R sobre A como sigue:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 4), \\ (4, 1), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 5)\}$$

Entonces $\{1, 3, 4\}$ y $\{2, 3, 5\}$ son dos clases de equivalencia de R .

- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- (a) Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto finito no vacío A , entonces todas las clases de equivalencia de R tienen el mismo número de elementos.
- (b) Sea A un conjunto. Definimos la relación binaria R sobre $\mathcal{P}(A)$ como sigue:

$$R = \{(X, Y) \mid X \text{ tiene la misma cardinalidad que } Y\}$$

Entonces R es de equivalencia

- (c) Sea P el conjunto de todas las personas vivas. Definimos la relación R sobre P como sigue:

$$R = \{(p, q) \mid \text{la edad de } p \text{ es menor que la edad de } q\}$$

Entonces R es un orden parcial.

- (d) En un conjunto parcialmente ordenado, un elemento maximal siempre es un elemento máximo.
- (e) Ninguna de las anteriores.

5. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- (a) Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Sean $x, y \in A$. Entonces

$$[x] \neq [y] \Leftrightarrow (x, y) \notin R$$

- (b) Sean R y S relaciones sobre un conjunto A . Si R y S son relaciones de equivalencia, entonces $R \cap S$ también lo es.
- (c) Sea (A, \preceq) un orden total. Si A tiene un elemento maximal m , entonces m es un elemento máximo.
- (d) Sea R una relación binaria sobre un conjunto A . Si R es simétrica y antisimétrica, entonces R también es reflexiva.
- (e) Ninguna de las anteriores.

6. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- (a) Definimos la relación R sobre \mathbb{N}^2 como sigue:

$$((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow a + b = c + d$$

Entonces R **no** es una relación de equivalencia.

- (b) Definimos la relación R sobre \mathbb{N}^2 como sigue:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow b = d$$

Entonces R **no** es una relación de equivalencia.

- (c) Sean (A, \preceq) un orden parcial y $X \subseteq A$. Si X tiene dos elementos maximales distintos, entonces X no tiene máximo.
- (d) La relación vacía sobre \emptyset es una relación de equivalencia y un orden parcial.
- (e) Ninguna de las anteriores.

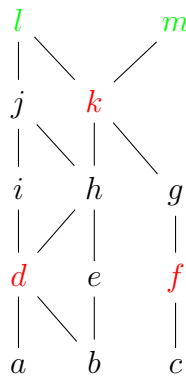
7. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ Un conjunto parcialmente ordenado puede tener más de un elemento mínimo.
- Ⓑ Sea $A = \{1, 2, 3\}$. La partición $P = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ induce la siguiente relación de equivalencia sobre A :

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

- Ⓒ La relación vacía sobre un conjunto no vacío A es siempre una relación de equivalencia.
- Ⓓ Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A , entonces $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$.
- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

8. Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ Si $B = \{l, m\}$ entonces las cotas inferiores de B en A son $\{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ y el ínfimo de B no existe.
- Ⓑ Si $B = \{d\}$ entonces las cotas superiores de B en A son $\{h, i, j, k, l, m\}$ y el supremo de B no existe.
- Ⓒ Si $B = \{d, f, k\}$ entonces el supremo de B es k y las cotas superiores de B en A son $\{k, l, m\}$.
- Ⓓ (A, \preceq) no tiene elemento mínimo y, si $B = \{d, f, k\}$, entonces supremo de B es k .
- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

9. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ Un elemento máximo nunca puede ser un elemento maximal.
- Ⓑ Todos los elementos de un conjunto parcialmente ordenado son comparables.
- Ⓒ Todo orden total es una relación de equivalencia.
- Ⓓ Definimos la relación R sobre \mathbb{Z} como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow 2 \text{ divide a } x + y$$

Entonces R es una relación de equivalencia cuyo conjunto cociente es $\mathbb{Z}/R = \{[0], [1]\}$.

- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

10. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- (a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Definimos la relación R sobre A^2 como sigue:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ y } b \geq d$$

Entonces R **no** es un orden parcial.

- (b) Sea A un conjunto no vacío. Sean R y S relaciones de equivalencia sobre A tales que inducen la misma partición en A . Entonces $R = S$.
- (c) Sean A un conjunto no vacío y $f : A \rightarrow A$ una función. Definimos la relación binaria R sobre A como sigue:

$$R = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$$

Entonces R es una relación de equivalencia.

- (d) Sea P el conjunto de todos los planetas. Definimos la relación R sobre $P \times \mathbb{Z}^+$ como sigue:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x \text{ está a la posición } y \text{ respecto al Sol}$$

Entonces R es un orden parcial.

- (e) Ninguna de las anteriores.

11. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- (a) En un conjunto parcialmente ordenado pueden existir elementos maximales sin que necesariamente exista un elemento máximo.
- (b) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Definimos la relación R sobre A como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow y = x^k \quad \text{para alguna } k \in \mathbb{N}$$

Entonces (A, R) es un conjunto totalmente ordenado.

- (c) Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Sean $x, y \in A$. Entonces

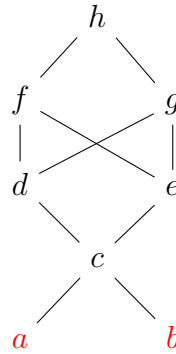
$$x \in [y] \Leftrightarrow [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

- (d) Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Si m es cota superior de $S \subseteq A$, entonces m es un elemento maximal de A .
- (e) Ninguna de las anteriores.

12. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- (a) Un conjunto parcialmente ordenado puede tener más de un elemento máximo.
- (b) Sean A un conjunto finito no vacío y (A, \preceq) un COPO. Entonces (A, \preceq) tiene al menos un elemento maximal y otro minimal.
- (c) Sea R una relación reflexiva sobre un conjunto A . Entonces R es una relación de equivalencia si y sólo si el hecho de que $(x, y), (x, z) \in R$ implica que $(y, z) \in R$.
- (d) Sea R una relación binaria sobre un conjunto infinito A . Si R es una relación de equivalencia, entonces R tiene una infinita cantidad de clases de equivalencia.
- (e) Ninguna de las anteriores.

13. Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ El elemento maximal de A es h y A no tiene elemento minimal.
- Ⓑ Si $B = \{a, b\}$, entonces B no tiene cota inferior en A y la cota superior de B en A es $\{h, f, d, g, e, c\}$.
- Ⓒ Si $B = \{a, b\}$, entonces el supremo de B es c y el ínfimo de B no existe.
- Ⓓ El elemento máximo de A es h y A no tiene elemento mínimo.
- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

14. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ Definimos la relación R sobre \mathbb{Z}^+ como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2^k \quad \text{con } k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Entonces R es una relación de equivalencia.

- Ⓑ Sea S el conjunto de todas las cadenas de ceros y unos. Definimos la relación R sobre S como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ tiene la misma cantidad de ceros que } y$$

Entonces R es una relación de equivalencia.

- Ⓒ Sea $A = \{a, b\}$. Entonces todas las posibles relaciones de equivalencia sobre A son

$$R_1 = \{(a, a), (b, b)\}$$

$$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)\}$$

Además, las particiones que inducen son $\{\{a\}, \{b\}\}$ y $\{\{a, b\}\}$, respectivamente.

- Ⓓ Sea R una relación binaria sobre un conjunto A . Si R es simétrica y transitiva, entonces R debe ser reflexiva.
- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

15. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ Sea R una relación binaria sobre un conjunto A . Si R es un orden parcial y $B \subseteq A$, entonces $R \cap B^2$ es un orden parcial sobre B .
- Ⓑ Sea R una relación de equivalencia definida sobre un conjunto A . Entonces
$$R = \{(x, x) \mid x \in A\}$$
 si y sólo si para toda $x \in A$ sucede que $[x] = \{x\}$
- Ⓒ Sean R y S dos relaciones binarias sobre un conjunto A tal que S está definida como sigue:

$$S = \{(x, y) \mid (x, z) \in R \text{ y } (z, y) \in R \text{ para alguna } z \in A\}$$

Si R es una relación de equivalencia, entonces S también lo es.

- Ⓓ Sea R una relación reflexiva y transitiva sobre un conjunto A . Entonces $R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia sobre A .
- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

16. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

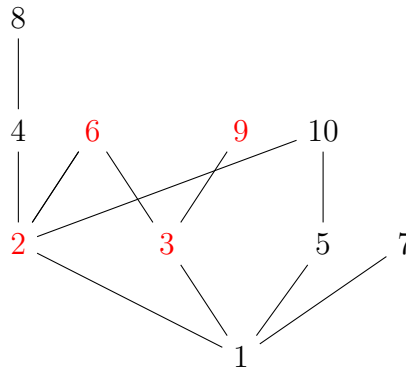
- Ⓐ No existe una relación binaria R sobre un conjunto A tal que R sea reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica al mismo tiempo.
- Ⓑ Supongamos que R es una relación binaria de orden parcial sobre un conjunto A y que $B \subseteq A$. Entonces R también es un orden parcial sobre B .
- Ⓒ Si R y S son relaciones de equivalencia sobre un conjunto A , entonces $R \cup S$ también es una relación de equivalencia.
- Ⓓ Sea P el conjunto de todas las personas vivas. Definimos la relación R sobre P como sigue:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x \text{ es al menos tan alto como } y$$

Entonces R es una relación de equivalencia.

- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

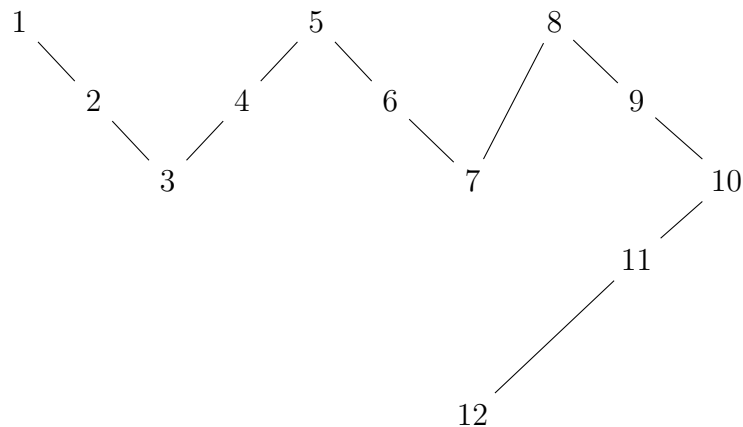
17. Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ Si $B = \{2, 3, 6, 9\}$ entonces los elementos maximales de (A, \preceq) son $\{6, 9\}$ y B no tiene supremo.
- Ⓑ Si $B = \{2, 3, 6, 9\}$ entonces los elementos minimales de (A, \preceq) son $\{2, 3\}$ y B no tiene cota inferior en A .
- Ⓒ Si $B = \{2, 3, 6, 9\}$ entonces el ínfimo de B es 1.
- Ⓓ Si $B = \{2, 3, 6, 9\}$ entonces B no tiene elemento máximo ni mínimo y la cota superior de B en A es 8.
- Ⓔ Ninguna de las anteriores.

18. Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Ⓐ El único elemento minimal de A es 12, lo que implica que éste es el elemento mínimo de A . Por otro lado, los elementos maximales de A son $\{1, 5, 8\}$.
- Ⓑ Es cierto que $7 \preceq 12$ y $12 \preceq 7$.
- Ⓒ El conjunto A no tiene supremo, pero su ínfimo es el elemento 12.
- Ⓓ A no tiene elemento máximo ni mínimo.
- Ⓔ Ninguna de las anteriores.