

Relaciones Binarias

Tania Michelle Rubí Rojas

Semestre 2023-1

Desafío 02

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta:

- ① **Encuentra** dos ejemplos de una relación binaria R tal que cumpla

$$R^{-1} = \text{im}(R) \times \text{dom}(R)$$

- ② **Responde** lo siguiente:

- Sean R, S, T y U conjuntos cualesquiera tales que $R \neq \emptyset$ y $T \neq \emptyset$.

$$\text{¿Es cierto que } R \subseteq S \text{ y } T \subseteq U \Leftrightarrow R \times T \subseteq S \times U?$$

- ¿Qué sucede si no se pide la restricción $R \neq \emptyset$ y $T \neq \emptyset$?

- ③ Considera los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \mid x \text{ es una persona que vive en México}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ es un estado de la República Mexicana}\}$$

Definimos las siguientes relaciones binarias:

- $R \subseteq A \times B$ tal que $uRv \Leftrightarrow u$ vive en v .
- $S \subseteq A \times B$ tal que $uSv \Leftrightarrow u$ trabaja en v .

Describe las siguientes relaciones binarias:

- a) $R \cap S$ b) $R \cup S$ c) $R^{-1} \cap S$ d) $R \cap S^{-1}$.

- ④ Considera las siguientes relaciones binarias:

- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $xRy \Leftrightarrow x$ divide a y
- $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $xSy \Leftrightarrow 5x \leq y$

Determina cuáles de los siguientes pares ordenados satisfacen las siguientes relaciones:

- a) $R \cup S$; $(2, 6), (3, 17), (2, 1), (0, 0)$ b) $R \cap S$; $(3, 6), (1, 2), (2, 12)$
c) R^{-1} ; $(1, 5), (2, 8), (3, 15)$ d) S^{-1} ; $(1, 1), (2, 10), (4, 8)$

- ⑤ **Realiza** lo siguiente:

- Sean R, S y T relaciones binarias cualesquiera. ¿Es cierto que $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$?
- En caso de que sea afirmativo, ¿qué implica esta igualdad?

- ⑥ Sea el conjunto $X = \{\star, a, \bullet\}$. Definimos la relación $\sigma \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ como

$$A\sigma B \Leftrightarrow \text{la cardinalidad de } A \text{ y } B \text{ es la misma}$$

Determina cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**.

- a) $\{\star, a\}R\{a, \bullet\}$ b) $\{\star\}R\{\star, a\}$ c) $\{\bullet\}R\{a\}$

- ⑦ Sea H el conjunto de todos los seres humanos y A el conjunto de todos los animalitos. **Define** una relación R tal que $R \subseteq H \times A$.

- 17 Sea P el conjunto de todas las personas. Definimos la relación binaria $R \subseteq P^2$ como sigue:

$$uRv \Leftrightarrow u \text{ es hijo de } v$$

Realiza lo siguiente:

- ¿Cuál es el dominio y la imagen de R ?
- **Calcula:**

a) R^2 b) R^3 c) R^{-1} d) R^{-2} e) R^{-3}

- 18 Sea S el conjunto de todas las cadenas de 0's y 1's de longitud 4. Definimos la relación binaria $R \subseteq S^2$ como sigue:

$$sRt \Leftrightarrow s \text{ tiene los mismos dos primeros caracteres que } t$$

Determina cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**:

a) $(0100, 0110) \in R$ b) $(0011, 1100) \in R$ c) $(0000, 0001) \in R$ d) $(1000, 0100) \in R$

- 19 Sean los conjuntos

$$A = \{3, 4, 5\} \qquad B = \{4, 5, 6\}$$

Definimos la relación binaria $R \subseteq A \times B$ como sigue:

$$R = \{(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$$

Realiza lo siguiente:

- **Da** una definición formal por comprensión para R .
- **Calcula** R^{-1}
- **Calcula** $R \circ R$

- 20 **Encuentra** dos ejemplos de una relación binaria R tal que $R^{-1} \neq \text{im}(R) \times \text{dom}(R)$

- 21 Sea el conjunto $X = \{a, b, c\}$. Definimos la relación σ sobre $\mathcal{P}(X)$ como sigue:

$$A\sigma B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

a) $\{a\}\sigma\{c\}$ b) $\{a, b, c\}\sigma\{a, b, b, c\}$ c) $\{a, b\}\sigma\{b, a\}$ d) $\{a, b\}\sigma\{b, c\}$

- 22 Sean los conjuntos

$$A = \{x \mid x \text{ es un personaje ficticio}\}$$

$$B = \{y \mid y \text{ es un oficio}\}$$

Definimos la relación $\sigma \subseteq A \times B$ como sigue:

$$x\sigma y \Leftrightarrow x \text{ puede trabajar o ha trabajado en } y$$

Responde lo siguiente:

- ¿Qué elementos están relacionados con Barbie?
- ¿Qué elementos están relacionados con Bob Esponja?
- ¿Para todo elemento $y \in B$ existe un elemento $x \in A$ tal que $x\sigma y$?
- ¿Para todo elemento $x \in A$ existe un elemento $y \in B$ tal que $x\sigma y$?

- 23** Considera las siguientes dos relaciones binarias definidas sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{aligned} R &= \{(2, 2), (5, 1), (2, 3), (5, 2), (2, 1)\} \\ S &= \{(3, 4), (5, 3), (6, 6), (1, 4), (4, 3)\} \end{aligned}$$

Describe las siguientes relaciones por extensión.

- a) $R \circ R$ b) $R \circ S$ c) $S \circ R$

- 24 Considera los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{ll} A = \{1, 2, 3, 4, 5\} & B = \{3, 4, 5\} \\ C = \{1, 4, 6, 16\} & D = \{1, 2, 4, 6, 8\} \end{array}$$

Definimos las siguientes relaciones binarias:

- $R \subseteq A \times B$ tal que $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 5$
- $S \subseteq A \times C$ tal que $(x, y) \in S \Leftrightarrow y = x^2$
- $T \subseteq D^2$ tal que $(x, y) \in T \Leftrightarrow 3$ divide a $x + y$.

Realiza lo siguiente:

- **Determina** las relaciones R, S y T , escribiendo todos sus elementos.
- **Determina** los dominios e imágenes de las tres relaciones.

- 25 Considera las siguientes dos relaciones binarias definidas sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{aligned} R &= \{(2, 2), (5, 1), (2, 3), (5, 2), (2, 1)\} \\ S &= \{(3, 4), (5, 3), (6, 6), (1, 4), (4, 3)\} \end{aligned}$$

Describe las siguientes relaciones por extensión.

- a) $R \circ S^{-1}$ b) $S \circ R^{-1}$ c) $S^{-1} \circ S$

- 26** Sea S el conjunto de todas las cadenas de 0 's, 1 's y 2 's de longitud 5. Definimos la relación $R \subseteq S^2$ como sigue:

$sRt \Leftrightarrow$ la suma de los caracteres de s es igual a la suma de los caracteres de t

Determina cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**:

- a) $(01210, 02200) \in R$ b) $(01011, 21001) \in R$ c) $(22120, 02121) \in R$ d) $(12200, 21110) \in R$

- (27) Definimos una relación $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ como sigue:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow 5 \text{ divide a } (x^2 - y^2)$$

- 28** Considera los siguientes conjuntos:

$$A = \{(0, 0), (0, 1)\} \quad B = \{\star, \bullet\}$$

Calcula:

- a) A^2 b) B^2 c) $\mathcal{P}(A^2)$ d) $\mathcal{P}(B^2)$ e) $A \times B$

- (29)** Encuentra tres ejemplos de relaciones R y S tales que $S \circ R \neq R \circ S$

- (30)** Sea $A = \{1, 2\}$. **Calcula** el conjunto $\mathcal{P}(A) \times A$.

- 31** ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Sean A, B, C y D conjuntos. Si $A \times B \subseteq C \times D$ entonces $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.
- Sean A, B, C y D conjuntos. Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$, **demuestra** que $A \times B \subseteq C \times D$.

- (32)** ¿Existe un conjunto A tal que cumpla que $A \subseteq A \times A$?