Relaciones de Orden y de Equivalencia

Semestre 2023-1

Desafío 07

Tania Michelle Rubí Rojas

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta:

(1) Sea $A = \{a, b, c\}$.

- **Describe** todas las relaciones de orden parcial sobre A.
- **Describe** todas las relaciones de orden parcial sobre A para las que a es un elemento máximo.
- **Describe** todas las relaciones de orden parcial sobre A para las que b es un elemento maximal.

(2) Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todas los estados de México que tengan aeropuertos. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{E}$ como sigue:

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{es posible tomar un avión desde el estado } x \text{ y llegar al estado } y \text{ usando vuelo directo}$$

Nota: Se considera que existe un vuelo entre dos estados si ambos estados tienen un aeropuerto.

Realiza lo siguiente:

- **Describe** la cerradura transitiva de $\sim$.
- ¿La cerradura transitiva de $\sim$ es un orden parcial? ¿Por qué?
- En caso de que $\sim$ sea de orden parcial, **responde** lo siguiente:
  - ¿Cuáles son los elementos maximales y minimales de $(\mathcal{E}, \sim)$?
  - ¿Cuál es el elemento mínimo y máximo de $(\mathcal{E}, \sim)$?
- Sea $\sim\sim$ la relación sobre el conjunto

  $$M = \{\text{Baja California Sur, CDMX, Nuevo León, Yucatán}\}$$

  tal que

  $$\begin{aligned} \sim\sim = \{&(\text{CDMX, Nuevo León}), (\text{Nuevo León, Baja California Sur}),\\ &(\text{CDMX, Yucatán}), (\text{CDMX, CDMX}), (\text{Nuevo León, Nuevo León}),\\ &(\text{Baja California Sur, Baja California Sur}), (\text{Yucatán, Yucatán})\} \end{aligned}$$

  Si $\sim\sim$ es de orden parcial, **dibuja** su diagrama de Hasse. En caso contrario, **explica** por qué no es de orden parcial.

(3) **Realiza** lo siguiente:

- **Encuentra** todas las posibles particiones del conjunto $\{a, b, c, d\}$, donde a, b, c y d son todos distintos entre sí.
- Para cada una de las particiones del inciso anterior, **da** la relación de equivalencia asociada.

(4) **Determina** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A, entonces $R \cup S$ es una relación de equivalencia sobre A.
- Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A tal que $R \cup S$ es una relación de equivalencia, entonces tanto R como S son relaciones de equivalencia.

5. **Determina** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A, entonces $R \cap S$ es una relación de equivalencia sobre A.
- Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A tal que $R \cap S$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R como S son relaciones de equivalencia sobre A.

6. **Determina** si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que lo sean, **determina** las clases de equivalencia y **da** la partición inducida por dichas relaciones. En caso de que alguna no lo sea, **justifica** por qué no.

- Sea $X = \{a, b, c\}$. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{P}(X)$ como

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{ el número de elementos en } A \text{ es igual al número de elementos en } B$$

- Sea X un conjunto no vacío y $Y \subseteq X$. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{P}(X)$ como sigue:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cap Y = B \cap Y$$

7. **Determina** si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que lo sean, **determina** las clases de equivalencia y **da** la partición inducida por dichas relaciones. En caso de que alguna no lo sea, **justifica** por qué no.

- Sea C el conjunto de todas las cadenas de a's y de b's cuya longitud es 4. Definimos la relación $\sim$ sobre C como sigue:

$$s \sim t \Leftrightarrow s \text{ tiene los dos mismos primeros caracteres que } t$$

- Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{P}(X)$ como sigue:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{el número de elementos en } A \text{ es menor que el número de elementos en } B$$

8. **Determina** si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que lo sean, **determina** las clases de equivalencia y **da** la partición inducida por dichas relaciones. En caso de que alguna no lo sea, **justifica** por qué no.

- Sea S el conjunto de todas las cadenas de ceros, unos y dos, cuya longitud es 2. Definimos la relación $\sim$ sobre S como sigue:

$$s \sim t \Leftrightarrow \text{ si la suma de los caracteres de } s \text{ es igual a la suma de los caracteres en } t$$

- Sea X un conjunto no vacío. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{P}(X)$ como sigue:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

9. **Determina** si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que lo sean, **determina** las clases de equivalencia y **da** la partición inducida por dichas relaciones. En caso de que alguna no lo sea, **justifica** por qué no.

- Sea X un conjunto no vacío. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{P}(X)$ como sigue:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \neq B$$

- Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathbb{R}$ como sigue:

$$x \sim y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$$

10. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Para cada una de las siguientes particiones de X, **determina** la relación de equivalencia inducida por ésta, **mostrando** todos sus elementos.

- $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
- $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$
- $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

11 **Determina** si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que lo sean, **determina** las clases de equivalencia y **da** la partición inducida por dichas relaciones. En caso de que alguna no lo sea, **justifica** por qué no.

- Sea P el conjunto de todas las personas. Definimos la relación R sobre P como sigue:

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ es más alto que } b\}$$

- Sea P el conjunto de todas las personas. Definimos la relación S sobre P como sigue:

$$S = \{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ en algún momento han vivido en el mismo país}\}$$

12 **Determina** si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que lo sean, **determina** las clases de equivalencia y **da** la partición inducida por dichas relaciones. En caso de que alguna no lo sea, **justifica** por qué no.

- Sea P el conjunto de todas las personas. Definimos la relación R sobre P como sigue:

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ están enamorados}\}$$

- Sea P el conjunto de todas las personas. Definimos la relación S sobre P como sigue:

$$S = \{(a, b) \mid b \text{ tiene más mascotas que } a\}$$

13 **Determina** si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que lo sean, **determina** las clases de equivalencia y **da** la partición inducida por dichas relaciones. En caso de que alguna no lo sea, **justifica** por qué no.

- Sea P el conjunto de todas las personas. Definimos la relación R sobre P como sigue:

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ tienen la misma altura}\}$$

- Sea P el conjunto de todas las personas. Definimos la relación S sobre P como sigue:

$$S = \{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ tienen el mismo color de cabello}\}$$

14 Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Para cada una de las siguientes particiones de X, **determina** la relación de equivalencia inducida por ésta, **mostrando** todos sus elementos.

- $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$
- $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$

15 **Determina** si las siguientes relaciones son de equivalencia. En caso de que lo sean, **determina** las clases de equivalencia y **da** la partición inducida por dichas relaciones. En caso de que alguna no lo sea, **justifica** por qué no.

- Definimos la relación R sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow x + y \text{ es par}$$

- Definimos la relación R sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow 7 \text{ divide a } n - m$$

16 Definimos a $\mathcal{I}$ como el conjunto de instrucciones que deben realizarse para preparar cereal con leche.

I. Tomamos un plato hondo para poner la mezcla.
II. Tomamos la caja del cereal.
III. Servimos la porción de cereal deseada en el plato.
IV. Tomamos el cartón de leche
V. Servimos la porción de leche deseada en el plato.

Algunas instrucciones deben realizarse antes que otras. Por ejemplo, la instrucción I debe realizarse antes que la instrucción III. Por otro lado, otras instrucciones se pueden realizar en cualquier orden, como es el caso de las instrucciones I y II.

Dicho esto, definimos la relación $\sim$ sobre como sigue:

$$i \sim j \Leftrightarrow i = j \text{ o la instrucción } i \text{ debe realizarse antes que la instrucción } j$$

Realiza lo siguiente:

- **Describe** la relación $\sim$, **mostrando** todos sus elementos.
- **Representa** gráficamente la relación $\sim$ usando gráficas dirigidas.
- ¿$\sim$ es reflexiva?
- ¿$\sim$ es antirreflexiva?
- ¿$\sim$ es simétrica?
- ¿$\sim$ es asimétrica?
- ¿$\sim$ es antisimétrica?
- ¿$\sim$ es transitiva?
- ¿$\sim$ es un orden parcial?
- **Dibuja** su diagrama de Hasse sobre el conjunto {(I, IV), (I,I), (III,V)}

17 Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las personas que han vivido. Definimos la relación $\mathcal{HH}$ sobre $\mathcal{H}$ como sigue:

$$p \sim q \Leftrightarrow p \text{ es ancestro de } q \text{ o } p = q$$

Realiza lo siguiente:

- ¿$\mathcal{H}$ es reflexiva?
- ¿$\mathcal{H}$ es antirreflexiva?
- ¿$\mathcal{H}$ es simétrica?
- ¿$\mathcal{H}$ es asimétrica?
- ¿$\mathcal{H}$ es antisimétrica?
- ¿$\mathcal{H}$ es transitiva?
- ¿$\mathcal{H}$ es un orden parcial?
- **Determina** los elementos minimales y maximales de $(\mathcal{H}, \sim)$
- **Determina** las cotas superiores e inferiores de $(\mathcal{H}, \sim)$
- **Determina** el elemento supremo e ínfimo de $(\mathcal{H}, \sim)$

18 Sea $(\mathcal{P}(1, 2, 3), \subseteq)$ un conjunto parcialmente ordenado. **Encuentra** dos elementos en dicho conjunto que no sean comparables.

19 Sea S el conjunto de todas las cadenas de a's y b's. Definimos la relación binaria R sobre S como sigue:

$$sRt \Leftrightarrow \text{ la longitud de } s \text{ es menor o igual a la longitud de } t$$

Determina si R es un orden parcial.

20 Definimos la relación binaria R sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como sigue:

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (a < c) \vee (a = c \wedge b \leq d)$$

Determina si R es un orden parcial.

21 Definimos la relación binaria R sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow x + y \text{ es par}$$

Determina si R es un orden parcial.

22 Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Definimos la relación R sobre A como sigue:

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (c,a), (a,d), (c,d), (b,c), (b,d), (b,a)\}$$

Determina si R es un orden total.

23 Sea $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Definimos la relación binaria R sobre A como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow \frac{x}{y} \text{ es impar}$$

¿Es R un orden parcial? En caso afirmativo, ¿es un orden total?

24 Definimos la relación binaria R sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow x - y \text{ es par}$$

¿Es R un orden parcial? En caso afirmativo, ¿es un orden total?

25 Definimos la relación binaria R sobre Z^+ como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow x = y^k \qquad \text{con } k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

¿Es R un orden parcial? En caso afirmativo, ¿es un orden total?

26 Sea P el conjunto de todas las personas. Definimos la relación binaria R sobre P como sigue:

$$xRy \Leftrightarrow \frac{x}{y} \text{ es impar}$$

¿Es R un orden parcial? En caso afirmativo, ¿es un orden total?

27 Sean R y S dos relaciones de orden parcial sobre un conjunto A. Definimos una relación T sobre el conjunto A como sigue:

$$xTy \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$$

Determina si T es un orden parcial sobre T.

28 Sea $A = \{0, 1\}$. **Describe** todas las relaciones de orden parcial sobre A.

29 Sea $A = \{0, 1, 2\}$. **Realiza** lo siguiente:

- **Describe** todas las relaciones de orden parcial sobre A donde 0 es un elemento máximo.
- **Describe** todas las relaciones de orden parcial sobre A donde 0 es un elemento mínimo.

30 Supongamos que R es una relación reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica sobre un conjunto A. ¿Qué podemos concluir acerca de la relación R?

31 Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Si R tiene sólo una clase de equivalencia, ¿cómo es la relación R?

32 Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Si $|X| = |R|$, ¿cómo es la relación R?

33 Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **Proporciona** una relación de equivalencia R sobre A que tenga exactamente cuatro clases de equivalencia.

34 ¿Cuántas relaciones de equivalencia hay en el conjunto $\{1, 2, 3\}$? **Escribe** cada una de ellas.

35 Sean X y Y conjuntos distintos del vacío. Sea $f : X \to Y$ una función. Definimos el conjunto S como sigue:

$$S = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$$

¿Es S una partición de X? En caso afirmativo, **describe** una relación de equivalencia que genere esta partición.

36 Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. **Define** una función f de A al conjunto de clases de equivalencia de A mediante la regla de correspondencia

$$f(x) = [x]$$

¿Cuándo sucede que $f(x) = f(y)$?

37 Sea R una relación sobre un conjunto A. Sea `refl`, `sim` y `trans` la cerradura reflexiva, simétrica y transitiva de R, respectivamente. **Muestra** que `trans(sim(refl(`R`)))` es una relación de equivalencia que contiene a R.

38 Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son **verdaderas**?

- Si $(a, b) \notin R$, entonces $[a] = [b]$.
- Si $[a] = [b]$, entonces $[a] \cap [b] = \varnothing$.

39 Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto no vacío A y sean $a, b \in A$. **Demostrar** que

$$[a] = [b] \Leftrightarrow aRb$$

40 Sea A un conjunto tal que $|A| = 10$ y sea R una relación de equivalencia sobre A. Sean $x, y, z \in A$ tal que $|[x]| = 3, |[y]| = 5$ y $|[z]| = 1$. ¿Cuántas clases de equivalencia tiene R?

41 ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?

- Definimos la relación R sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 \leq 7$$

- Definimos la relación S sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$aSb \Leftrightarrow a + b \equiv 0 \pmod 5$$

42 ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?

- Definimos la relación R sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$aRb \Leftrightarrow 2a + 5b \equiv 0 \pmod 7$$

- Definimos la relación S sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$aSb \Leftrightarrow a^2 + b^{=}0$$

43 Sea R una relación simétrica y transitiva sobre un conjunto A. **Demuestra** que si para cada $x \in A$ existe una $y \in A$ tal que $(x, y) \in R$, entonces R es una relación de equivalencia.

44 Sea R una relación reflexiva y transitiva sobre un conjunto A. Sea S una relación binaria sobre el conjunto A tal que $(x, y) \in S$ si y sólo si $(x, y), (y, x) \in R$. **Demuestra** que S es una relación de equivalencia.

45 Para cada uno de los siguientes diagramas de Hasse, **realiza** lo siguiente:

- **Describe** todos los pares ordenados del orden parcial.
- **Describe** los elementos minimales y maximales, además del máximo y del mínimo (si es que existen).

3

e d

b c

a) a

g

e f

d

a b) b c

g

f

d e

b c

a c)

46 Sea $\mathcal{E}$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ que tienen un número par de elementos. Para el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{E}, \subseteq)$ se consideran los elementos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 3\}$.

- **Encuentra** cuatro cotas superiores para $\{A, B\}$.
- ¿Tiene $\{A, B\}$ supremo en $(\mathcal{E}, \subseteq)$?

47 Sea $\mathcal{C}$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. ¿Tiene $(\mathcal{C}, \subseteq)$ algún elemento maximal o minimal?

48 Para cada uno de los siguientes diagramas de Hasse, **realiza** lo siguiente:

- **Encuentra** las cotas superiores e inferiores del subconjunto B en A. parcial.
- **Encuentra** el supremo y el ínfimo del conjunto B.

3

a) $B = \{c, d, e\}$

a b

c

d e

f g

b) $B = \{4, 5, 6\}$

1 2

3

4 5

6 7

8

c) $B = \{2, 3, 4\}$

1

2

3 4

5 6