Facultad de Ciencias, UNAM
Redes Neuronales
The Art of Nomography I: Geometric Design

Rubí Rojas Tania Michelle

24 de marzo de 2020

Este ensayo habla sobre la descripción general de cómo funcionan los *nomogramas* y cómo se construyen desde cero. Esta primer parte, en particular, aborda los diseños a escala recta.

La *Nomografía* es la representación gráfica de las relaciones o leyes matemáticas. Fue inventada en 1880 por *Phillbert Maurice d'Ocagne* y fue utilizada ampliamente por ingenieros ya que gracias a éstas se podían realizar cálculos gráficos (rápidos) de fórmulas complicadas con una precisión práctica.

Junto con las matemáticas involucradas, se utilizó mucho ingenio en el diseño de los nomogramas para aumentar su utilidad y precisión. Se escribieron varios libros sobre *nomografía*, pero con la difusión de las calculadoras y computadoras, eventualmente comenzaron a desaparecer (muy rara vez aparece un *nomograma* en un *entorno moderno*). La teoría de los *nomogramas* "se basa en todos los aspectos de la geometría analítica, descritiva y proyectiva, los diversos campos del álgebra y otros campos matemáticos"[Douglas].

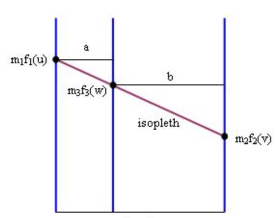
La forma más simple de *nomograma* es una escala tipo Fahrenheit vs. Celsius vista desde un termómetro analógico o una tabla de conversión. El espacio lineal se puede reemplazar con el espacio logarítmico para manejar las conversiones que involucran potencias. Una regla de cálculo (considerada también como un *nomograma*) está diseñada para proporcionar operaciones aritméticas básicas con el fin de resolver una amplia variedad de ecuaciones con una secuencia de pasos, mientras que el *nomograma tradicional* está diseñado para resolver una ecuación específica en un sólo paso.

La mayoría de los *nomogramas* aquí presentados son las formas clásicas que consisten en tres o más escalas rectas o curvas, cada una representando una función de una sola variable que aparece en una ecuación. Una regla, llamda *línea de índice*, se coloca a través de estas escalas a valores conocidos de estas variables, y el valor de una variable desconocida se encuentra en el punto cruzado en esa escala. Esto proporciona un medio analógico para calcular la solución de una ecuación que involucra una incógnita.

1. **La geometría de los nomogramas**

   Podemos diseñar *nomogramas* compuestos de escalas rectas mediante el análisis de sus propiedades geométricas, y se puede constuir una variedad de nomogramas interesantes a partir de éstas derivaciones (éstos son los más frecuentes).

   El siguiente gráfico



   muestra un *nomograma* básico de escala paralela para calcular

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$$

Cada función representada es una escala vertical que utiliza un factor de escala correspondiente (también llamado *módulo de escala*) a m_1, m_2 o m_3, el cual proporciona un *nomograma* de tamaño conveniente. El espaciado de las líneas se muestra como a y b. Por triángulos similares, tenemos que

$$\frac{[m_1 f_1(u) - m_3 f_3(w)]}{a} = \frac{[m_3 f_3(w) - m_2 f_2(v)]}{b}$$

el cual puede ser reorganizado como

$$m_1 f_1(u) + (\frac{a}{b}) m_2 f_2 = (1 + \frac{a}{b}) m_3 f_3(w)$$

Entonces, para llegar a la ecuación original tenemos que cancelar todos los términos que involucran a m, a y b, lo cual se logra al establecer

$$m_1 = (\frac{a}{b}) m_2 = (1 + \frac{a}{b}) m_3$$

La mitad izquierda de esta relación proporciona la escala relativa de las dos escalas externas y las partes externas proporcionan la escala de la escala media

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a}{b m_3} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Hay que tener en cuenta que la línea de base no tiene que ser perpendicular a las escalas para que la proporción de triángulo similar sea válida.

Ahora $a = b$ para el caso donde la escala media se encuentra a medio camino entre las escalas externas (en este caso $m_1 = m_2$ y $m_3 = \frac{m_2}{2}$). Para un rango más pequeño y una mayor precisión para una escala externa, podemos cambiar su escala m y mover la línea media lejos de ella y hacia la otra escala externa. De hecho, si la escala desconocida W tiene un rango muy pequeño, se puede mover afuera de las otras dos escalas para ampliar la escala. Las adiciones a u, v o w simplemente desplazan los valores de la escala hacia arriba o hacia abajo. Los multiplicadores de u, v y w multiplican el valor al dibujar escalas (no se incliyen en los valores de m de los cálculos anteriores). Restar un valor simplemente invierte la dirección arriba/abajo de la escala, y si dos valores son negativos, sus escalas simplemente pueden intercambiarse. Un ejemplo de ésto se representa en el siguiente *nomograma*:

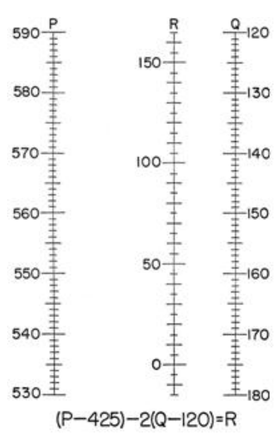


Figura 1: Nomograma de escala paralela para $(u - 425) - 2(v - 120) = w$

Trazar escalas logarítmicas en lugar de lineales expande el uso de *nomogramas* de escala paralela a ecuaciones muy complicadas. El uso de logaritmos permite que las multiplicaciones se representen mediante adiciones y las potencias se representen mediante multiplicaciones de acuerdo con las siguientes reglas:

$$\log(cd) = \log(c) + \log(d)$$

$$\log c^d = d \log c$$

Por lo que, si tenemos una ecuación de la forma

$$f_1(u) \times f_2(v) = f_3(w)$$

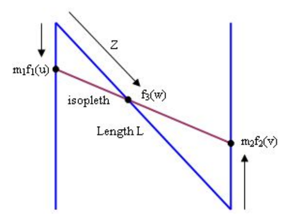
entonces podemos reemplazarla con

$$\log[f_1(u) \times f_2(v)] = \log f_3(w)$$

Así convertimos la ecuación original en una sin multiplicación de variables. Tengamos en cuenta que no hay necesidad de resolver simbólicamente la variable (simplemente graficamos estos registros en las escalas), lo cual es una ventaja significativa cuando llegamos a ecuaciones más complicadas.

2. **Gráficos N o Z**

Un *nomograma* como el siguiente



se llama *Gráfico N*, o más comúnmente, *Gráfico Z* debido a su forma. La escala media inclinada une a los valores de referencia de las dos escalas externas (que se trazan en oposición). La línea media puede inclinarse en cualquier dirección volteándo el diagrama y puede ser sólo una sección parcial anclada en un extremo o flotando en el medio si no se necesita toda la escala en el problema. El *Gráfico Z* se puede usar para resolver una ecuación de 3 variables de la forma

$$f_3(w) = \frac{f_1(u)}{f_2(v)}$$

Por triángulos similares, tenemos que

$$\frac{m_1 f_1(u)}{m_2 f_2(v)} = \frac{Z}{[L - Z]}$$

Sustituyendo $f_3(w)$ por $\frac{f_1(u)}{f_2(v)}$ y reorganizando los términos obtenemos la distancia a lo largo de Z para las marcas de verificación correspondientes a $f_3(w)$:

$$Z = \frac{L f_3(w)}{[\frac{m_2}{m_1} + f_3(w)]}$$

La escala $f_3(w)$ no tiene un factor de escala uniforme m_3 como antes. El gráfico Z realiza una división con escalas lineales para u y v. Las escalas lineales del Gráfico Z son mucho más adecuadas para combinar una división con una suma/resta, que las escalas paralelas compuestas con sus escalas logarítmicas. Además, tenemos un gráfico Z para la multiplicación. También es posible deslizar las escalas externas hacia arriba o hacia abajo sin cambiar la marca de espaciado de la escala Z, ya que gira gracias a sus puntos finales (los triángulos aún son similares), dando como resultado un *nomograma* con una escala Z perpendicular.

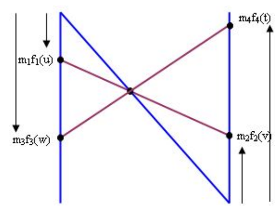
3. **Gráficos proporcionales**

   Los gráficos proporcionales resuelven una ecuación de 4 incógnitas del tipo

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

Si tomamos el diagrama del gráfico Z y un segundo isopleto que intersecta la línea Z en el mismo punto que el primero, entonces tenemos triángulos similares:

$$\frac{m_1 f_1(u)}{m_2 f_2(v)} = \frac{m_3 f_3(w)}{m_4 f_4(t)}$$



que coincide con la ecuación anterior si elegimos la escala de las escalas externas de modo que obtenemos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

Después, sobreponemos dos variables en cada escala exterior con esta relación de factores de escalado, como se muestra en el siguiente *nomograma*:

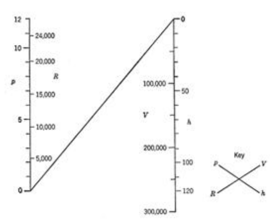


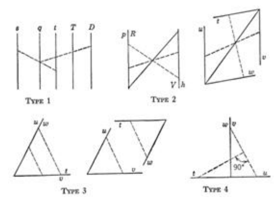
Figura 2: Nomograma de Josephs

Otro tipo de gráfico proporcional utiliza líneas cruzadas dentro de un área encuadrada. Por ejemplo, tomando los factores de escala anterior para las cuatro variables están dados por

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

donde éstos están relacionados como antes con las escalas u, v, w y t, respectivamente.

Pero hay otros tipos de gráficos proporcionales. En las etiquetas como Tipo 3, se dibuja una isopleta entre dos variables de escala, luego se mueve en paralelo hasta que abarca el tercer valor de la variable y la cuarta variable desconocida. En el *nomograma de Tipo* 4, la segunda isopleta se dibuja de manera perpendicular a la primera.

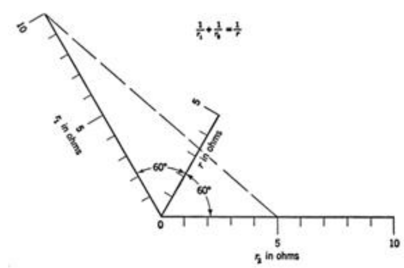


4. **Gráficos de escala concurrente**

   El gráfico concurrente resuelve una ecuación del tipo

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

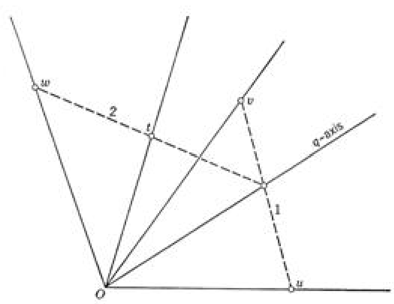
   La resistencia efectiva de dos resistencias paralelas está dada por esta ecuación, y un *nomograma de escala concurrente* de la forma



   La derivación es algo complicada, pero al final los factores de escala m deben cumplir las condiciones

$$m_1 = m_2 = \frac{m_3}{2\,cos(A)}$$

   donde A es el ángulo entre la escala u y la escala v, y también el ángulo entre la escala v y la escala w. El factor de escala m_3 corresponde a la escala w. Los ceros de las escalas deben encontrarse en el vértice. Por ejemplo, si se elige que el ángulo A sea 60° entonces $2\,cos(A) = 1$ y los tres factores de escala son idénticos, así como se muestra a continuación:



   Y para resolver la ecuación

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} + \frac{1}{f_4(t)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

   se reorganiza como

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)} - \frac{1}{f_4(t)}$$

   Después, las dos mitades se igualan a un valor intermedio f_q. Se crea una escala concurrente compuesta de manera similar a otras escalas compuestas como se muestra en la figura anterior (aquí se elige que A sea inferior a 60°).

5. **Gráficos de 4 variables**

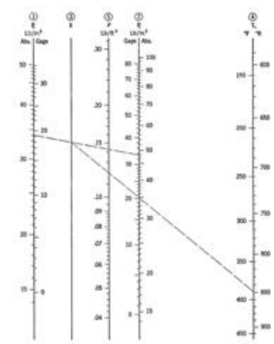
   Una ecuación de 4 variables con una incógnita puede representarse como una combinación de dos gráficos separados de cualquier tipo. Primero se divide la ecuación en dos partes en tres variables que son iguales entre sí. Por ejemplo, para

$$f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) = f_4(t)$$

   y t como incógnita, podemos reorganizar la ecuación en

$$f_1(u) + f_2(v) = f_4(t) - f_3(w)$$

   Se crea una variable k para igualar esta suma. Luego se crea una *escala en blanco* para k para de tal forma que un *nomograma* de escala parelela para $f_1 + f_2 = k$ marca un *punto de pivote* en la escala de k. Se utiliza una segunda alineación de regla desde este punto para $f_4 - f_3 = k$ para encontrar $f_4(t)$. La escala para u, v, w y la posición elegida para la escala k se pueden optimizar para minimizar los errores en el punto de pivote para pequeños errores en la alineación de la regla.



6. **Gráficos de escala curva**

   Es posible derivar geométricamente relaciones para *nomogramas* que tienen una o más escalas curvas, pero el diseño de éstos es más sencillo si se utilizan determinantes (esto es lo que abordan en la segunda parte del ensayo).