

## 5. 表面輝度の揺らぎ (fluctuations of surface brightness)

1988 年、トンリー (Tonry) とシュナイダー (Schneider) は、銀河の表面輝度の揺らぎを用いて、その銀河までの距離を測定する手法を考案した。<sup>\*1</sup> この測定法のアイデアは銀河近くの光源の空間分布は”bumpy” (滑らかでない) ところから来ている。

ある銀河中の構成が光度に応じてグループ  $i$  で分けられていて、それに属する全ての星が絶対光度  $L_i$  を持つとする。その銀河を望遠鏡を覗いてカメラで銀河の写真 (単位時間で映像を撮るということ) を撮ることを考えて、その写真の”ある小さな部分” (例えば、1 ピクセルを考えるということ) に着目する。その”ある小さな部分”に写っている恒星の数を  $N_i$  とする (というか、しておく)。<sup>\*2</sup> グループ  $i$  に属する恒星の数ではないことに注意せよ。その”ある小さな部分”が受け取るエネルギーの量は、銀河までの距離を  $d$  とおけば

$$\ell = \sum_i \frac{N_i L_i}{4\pi d^2}$$

でかける。 $N_i$  が有限であるから、画像の”ある小さな部分”ごとの  $\ell$  というのは測定できる。では、その  $N_i$  が画像の場所によらずポアソン統計の法則に従うと仮定する。

ポアソン分布を (僕のために) 復習しておく、確率分布は

$$P(x = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

で与えられて、この確率分布は、ある”期間”に平均で  $\lambda$  回起こるような現象が、ある与えられた期間に  $X$  回発生する確率、に相当するんだ。この場合だと、平均  $\lambda = \langle N_i \rangle$  個の星があるような銀河の画像に、ある小さな部分に  $X$  個あるような確率、ということ。なので、だいたい平均から大きく外れることはない。それで、ポアソン分布の大事な性質は分散と平均が同じということ。

話を戻して、画像を見て、”ある小さな部分” (1 ピクセル) ごとに  $N_i$  の分散を考えてやれば、それは、平均  $\langle N_i \rangle$  に一致する。(次式の山かっこ” $\langle \rangle$ ”は画像のピクセルにおける統計平均。)

$$\langle (N_i - \langle N_i \rangle) (N_j - \langle N_j \rangle) \rangle = \delta_{ij} \langle N_i \rangle$$

ここで、 $\langle \ell \rangle$  の  $L_i$  は画像の場所によらないから、山かっこの外に出せる。

$$\langle \ell \rangle = \sum_i \frac{\langle N_i \rangle L_i}{4\pi d^2}$$

これらより、これで見かけの光度  $\ell$  の画像の”ある小さな部分” (1 ピクセル) ごとの分散、すなわち、揺らぎを考えてやると、

$$\begin{aligned} \langle (\ell - \langle \ell \rangle)^2 \rangle &= \left\langle \left( \sum_i \frac{N_i L_i}{4\pi d^2} - \sum_i \frac{\langle N_i \rangle L_i}{4\pi d^2} \right)^2 \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \frac{L_i L_j}{(4\pi d)^2} \underbrace{\langle (N_i - \langle N_i \rangle) (N_j - \langle N_j \rangle) \rangle}_{\delta_{ij} \langle N_i \rangle} \\ &= \frac{1}{(4\pi d)^2} \sum_i \langle N_i \rangle L_i^2 \end{aligned}$$

<sup>\*1</sup> 和訳では 1998 年になっている。謎だ。論文は、**J. Tonry and D. P. Schneider, Astron. J. 06, 807 (1988).**

<sup>\*2</sup> 正確にいうと、しておく、というのが正しい。というのは、たいていの場合、最も明るい恒星のみが分解可能で、 $N_i$  個の星全てを測定するというのは不可能であるから、観測量ではないのである。

よって、

$$\frac{\langle(\ell - \langle\ell\rangle)^2\rangle}{\langle\ell\rangle} = \frac{\bar{L}}{4\pi d^2} \quad \left(\bar{L} \equiv \frac{\sum_i \langle N_i \rangle L_i^2}{\sum_i \langle N_i \rangle L_i}\right)$$

という関係式を得る。 $\bar{L}$  は意味があつて、光度で重みをかけて平均をとった星の平均光度の意味を持つ。これが測られて、この関係式が較正されれば距離を求めることができる。が、星の平均光度というのがよくわからない。星の平均光度は、このスライドの説明では、銀河の面輝度を単位面積当たりの星の数で割ったものである。上で少しだけあった説明だが、最も明るい恒星のみが分解可能だった。 $L_i$  で重みをとって、それを平均光度で割っているということは、一番明るい星の寄与が大きいこと。なので、これを星の平均光度と考えられる、というのが今のところの僕の理解。

1997 年、トンリーらは<sup>\*3</sup>セファイド変光星の観測から距離のわかっている銀河の表面輝度揺らぎを研究することで、赤外波長域の絶対光度  $\bar{L}$  と等価な絶対等級  $\bar{M}_I$  として、

$$\bar{M}_I = (-1.74 \pm 0.07) + (4.5 \pm 0.25) [m_V - m_I - 1.15]$$

を得た。ここで、 $m_V - m_I$  は銀河の色 ( ) なるもの) を特徴づけるパラメタで、赤外線と可視光域における見かけの等級の差に等しい。 $(1.0 < m_V - m_I < 1.5)$  という仮定がある。<sup>\*4</sup> 上の式を用いて、より大きな red shift にある銀河の距離を求め、

$$H_0 = 81 \pm 6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

というハッブル定数を得た。

---

<sup>\*3</sup> シュナイダーはいなかった。

<sup>\*4</sup> らしい

## 5 宇宙膨張の動力学 (Dynamics of expansion)

宇宙膨張はアインシュタインの場の方程式に従い、便利な形でかける。

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}$$

ここで、 $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソル (Ricci tensor):

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}$$

で、慣習的に用いられるリッチテンソルと比べると符号が逆であることに注意。<sup>\*5</sup>そして、右辺の  $S_{\mu\nu}$  は、エネルギー・運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  で与えられる。

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\lambda}$$

僕の備忘録のためにこの方程式の形を導いておく。元のアインシュタインの場の方程式の形は、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} &= -8\pi G T_{\mu\nu} \\ \Leftrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\kappa}_{\kappa} &= -8\pi G T_{\mu\nu} \end{aligned}$$

両辺に  $g^{\mu\nu}$  をかけて、リッチテンソルのトレースをとる操作みたいなものをしてやれば、

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R^{\kappa}_{\kappa} &= -8\pi G g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ R^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\mu} R^{\kappa}_{\kappa} &= -8\pi G T^{\mu}_{\mu} \end{aligned}$$

ここで、四次元の時空を考えているので、 $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$  であるから、

$$R^{\mu}_{\mu} = 8\pi G T^{\mu}_{\mu}$$

これを元の場の方程式に代入してやれば、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (8\pi G T^{\mu}_{\mu}) &= -8\pi G T_{\mu\nu} \\ \Leftrightarrow R_{\mu\nu} &= -8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\mu}_{\mu}) \\ \Leftrightarrow R_{\mu\nu} &= -8\pi G S_{\mu\nu} \end{aligned}$$

という形に分けることができる。ポイントは、リッチテンソルのトレースを物質の項に押し付けるということ。話を戻す。

リッチテンソルを計算したい。Robertson-Walker 計量に対してのアフィン接続はすでに計算していて、ノンゼロの成分は、

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \\ \Gamma_{jl}^i &= K\tilde{g}_{jl}x^i \quad (\tilde{g}_{jl} \equiv \delta_{jl} + K\frac{x^j x^l}{1 - K\mathbf{x}^2}) \end{aligned}$$

---

<sup>\*5</sup> 電話帳の最初のページの方に、notation の表があった。

と、時間に関する添え字が、0 個もしくは 1 個であったことを思い出すと、少しだけ計算が簡単になる。リッチテンソルの  $i, j$  成分は、

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{\partial \Gamma_{ki}^k}{\partial x^j} - \left[ \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial t} \right] \\ &\quad + [\Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k] \\ &\quad - [\Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0l}^l] \\ R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{i0}^i}{\partial t} + \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j \end{aligned}$$

とわかる。ここでは、時間に関する添え字と空間に関する添え字の部分に分けて書いた。ところで、 $R_{0i}(=R_{i0})$  の計算は不要である。というのは、これはベクトルで、Robertson-Walker 計量の等方性の仮定から消えてしまうから。さて、この式に、一つ一つアフィン接続を代入して、リッチテンソルを求めてやりたい。そのために、アフィン接続のところを計算しておく。

$R_{ij}$  に関する部分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial t} &= \tilde{g}_{ij} \frac{d}{dt}(a\dot{a}) \\ &= \tilde{g}_{ij}(a\ddot{a} + \dot{a}^2) \\ \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k &= (a\dot{a}\tilde{g}_{ik})\left(\frac{\dot{a}}{a}\delta_{kj}\right) \\ &= \dot{a}^2 \tilde{g}_{ij} \\ \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0l}^l &= a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \cdot \frac{\dot{a}}{a}\delta_l^l \\ &= 3\dot{a}^2 \tilde{g}_{ij} \end{aligned}$$

$R_{00}$  に関する部分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{i0}^i}{\partial t} &= 3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ \Gamma_{0j}^i \Gamma_{i0}^j &= 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \end{aligned}$$

これらをリッチテンソルの各項に代入してあげると、 $R_{ij}$  は、

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \tilde{R}_{ij} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial t} \\ &\quad + \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 \\ &\quad - \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0l}^l \\ \rightarrow R_{ij} &= \tilde{R}_{ij} - 2\dot{a}^2 \tilde{g}_{ij} - a\ddot{a}\tilde{g}_{ij} \end{aligned}$$

とわかる。ここで、 $\tilde{R}_{ij}$  は、純粋な空間の添え字のみを持つリッチテンソルである。

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k - \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k$$

これを計算したい。手っ取り早く答えを得るために、原点 ( $x^i = 0$ ) 近傍にあるような空間座標系 ( $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + O(\mathbf{x}^2)$ ) を考えて、結果を空間座標全ての変換に対して不変な形式で表そう。さすれば、Robertson-Walker

計量の一様性によって、結果が全ての場所によって正しいことが示される。これは、粒子の軌跡を計算した際にも用いたテクニック。第二項と、第三項は、 $x^i$  の2次の項が出てくるので落とせる。したがって、

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{li}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x^l} = K\delta_{ij} - 3K\delta_{ij} = -2K\delta_{ij}$$

とわかる。これより、

$$\tilde{R}_{ij} = -2K\tilde{g}_{ij}$$

のように書き換えられて、 $g_{ij}$  に比例しているので、ちゃんと一様性の仮定を満たしていることが確認できる。この結果は、空間成分のテンソル (three-tensors) の間の等式で、 $\mathbf{x} = 0$  から任意の点に移動されるような変換を含む、全ての空間座標系について成り立つ。よって、(1.5.12) は全ての場所であり立つので、結局、 $R_{ij}$  は、

$$R_{ij} = -[2K + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}] \tilde{g}_{ij}$$

一方、 $R_{00}$  も

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{i0}^i}{\partial t} + \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j \\ &= 3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\ &= 3 \frac{\ddot{a}}{a} \end{aligned}$$

とわかる。これで、全てのリッチテンソルが計算できた。

さて、次は、アインシュタイン方程式の右辺： $S_{ij}$  と  $S_{00}$  を計算したい。エネルギー・運動量テンソル (式 (1.1.31)):

$$T^{00} = \rho(t), \quad T^{0i} = 0, \quad T^{ij} = \tilde{g}^{ij}(\mathbf{x})a^{-2}(t)p(t)$$

を、

$$T_{00} = \rho, \quad T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = a^2 p \tilde{g}_{ij}$$

と書いておく。添え字を下に移した分、 $a^{-2} \rightarrow a^2$  となっていることに注意。<sup>\*6</sup>

これを用いると、 $S_{ij}$  は、

$$\begin{aligned} S_{ij} &= T_{ij} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} a^2 \left( \underbrace{T_k^k}_{g^{ik}T_{ki}=g^{ik}g_{ki}p} + \underbrace{T_0^0}_{g^{0\mu}T_{\mu 0}=-\rho} \right) \\ &= a^2 p \tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2} a^2 \tilde{g}_{ij} (3p - \rho) \\ &= \frac{1}{2} (\rho - p) a^2 \tilde{g}_{ij} \end{aligned}$$

また、 $S_{00}$  は

$$\begin{aligned} S_{00} &= T_{00} + \frac{1}{2} (T_k^k + T_0^0) = \rho + \frac{1}{2} (3p - \rho) \\ &= \frac{1}{2} (\rho + 3p) \end{aligned}$$

---

<sup>\*6</sup> (僕の備忘録) そもそも、 $T^{ij}$  はどうしてこういう形だったけ、ということ、一様性より、比例係数が時間の関数で、等方性より、 $\mathbf{x} = 0$  における mean が  $\delta_{ij}$  に比例、すなわち、 $g_{ij}$  に比例しないといけなかったから。

ここは、あらかじめ  $T^\lambda_\lambda$  を計算しておけば簡単にすむ。

いよいよ、アインシュタインの場の方程式  $R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}$  を計算する。まず、 $\mu = i, \nu = j$  の成分について考えると、

$$\begin{aligned} & -[2K + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}] \tilde{g}_{ij} = -8\pi G \frac{1}{2}(\rho - p)a^2 \tilde{g}_{ij} \\ \Rightarrow & -[2K + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}] = -4\pi G(\rho - p)a^2 \\ \Rightarrow & -\frac{2K}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho - p) \end{aligned}$$

と、式 (1.5.17) が得られる。次に、 $\mu = \nu = 0$  の成分について考えると、

$$\begin{aligned} R_{00} &= -8\pi G S_{00} \\ \Rightarrow & 3\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G \frac{1}{2}(\rho + 3p) \\ \Rightarrow & \frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(3p + \rho) \end{aligned}$$

と、式 (1.5.18) が得られる。

この二式を変形して、フリードマン (Friedmann) 方程式とエネルギー・運動量保存則を導く。まず、フリードマン方程式。フリードマン方程式を導くには、 $\ddot{a}$  を消去すればよい。式 (1.5.17) の三倍して、両辺を足せば、

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi G \rho a^2}{3}$$

ともとまる。

さて、エネルギー・運動量保存則は、フリードマン方程式:

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi G \rho a^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$$

を時刻  $t$  について微分して、

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} &= \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + \frac{2K\dot{a}}{a^3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + \frac{K}{a^2} \\ \rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{3}\left(\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}}\right) + \underbrace{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2}_{=8\pi G\rho/3 - K/a^2} + K/a^2 \\ \rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{3}\left(\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + 2\rho\right) \end{aligned}$$

これを、アインシュタインの場の方程式の  $\mu = \nu = 0$  の成分から得られる式 (1.5.18) と比べて、 $\ddot{a}$  を消去してあ

げれば、

$$\begin{aligned}
-\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho) &= \frac{4\pi G}{3}(\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + 2\rho) \\
-3p - \rho &= \dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + 2\rho \\
\rightarrow \dot{\rho} &= \frac{\dot{a}}{a}(-3p - 3\rho) \\
\rightarrow \dot{\rho} &= -\frac{3\dot{a}}{a}(p + \rho)
\end{aligned}$$

と求められる。

この後に Weinberg は、”(This should come as no surprise. Under all circumstances, the energy- momentum conservation law may be derived as a consequence of the Ein- stein field equations.)” これは特に驚くことではなくて、あらゆる状況下において、エネルギー運動量の保存則はアインシュタイン方程式から導くことができる。。。 どういうことだろう。？アインシュタイン方程式の両辺を取ってあげると、左辺は、ビアンキ (Bianchi) の恒等式より 0 となっていて、エネルギー運動量保存則  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  が導けるということ、かと思う。

では、これらの式をどう活用するかというと、圧力  $p(t)$  を固有エネルギー密度  $\rho$  の関数として与えれば、エネルギー運動量保存則を解くことで、 $\rho$  を  $a$  の関数としてとき、そしてその解をフリードマン方程式に用いることで、 $a$  を  $t$  の関数として解くことができる。

さて、フリードマン方程式を導く際に、少なくとも物質が非相対論的な場合に成り立つ別の導出法があるのでその紹介をする。膨張宇宙から切り離された共動的な球を考える。その球の中心にある典型的な銀河において、それ以外は無。中心以外は、何も物質がない。ここで、バーコフ (Birkhoff) の定理「ある任意の点の周りで球対称な系では、この点を中心とする空っぽの球の計量は平坦な空間の計量と等しくなければならない。」を考える。系が球対称であれば、球の外側がどうであろうとこの定理は成り立つ。<sup>\*7</sup> さて、この球の中に物質を入れて、 $\mathbf{X} = 0$  に置かれた対象中心から距離に比例するように速度を与える。

$$\dot{\mathbf{X}} = H(t)\mathbf{X}$$

ここで、 $\mathbf{X}$  の成分  $X^i$  は通常のデカルト座標で、共動座標  $x^i$  ではない。(大文字と小文字で区別する。) 共動座標ではないので、別にベクトルの成分がゼロでなくても良い。ここで与えられた速度場は、一様性の原理を満たすことに注意する。 $\mathbf{X}_1$  にある共動的粒子 (?) (co-moving particle) と  $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{X}_2$  にある共動的粒子の相対的な速度場は、 $\dot{\mathbf{X}}_1 - \dot{\mathbf{X}}_2 = H(t)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$  となる。この式 (72) の解は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t H(t)dt\right)\mathbf{X}(t_0) \\
&:= \frac{a(t)}{a(t_0)}\mathbf{X}(t_0)
\end{aligned}$$

である。ただし、 $a(t)$  は、

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \exp\left(\int_{t_0}^t H(t)dt\right) \iff \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t)$$

---

<sup>\*7</sup> Wikipedia によると、この定理は、「一般相対性理論において、真空場の方程式の球対称解は必ず静的で漸近的平坦であるという定理。」らしい。

とおいた。今考えている共動的な球の半径を（膨張宇宙に比べて (?)）あまり大きくとらないようにとれば、 $\mathbf{X}$  が小さいので、球に入れた物質の膨張速度は非相対論的なので、重力場は弱く (?) できる。結果、物質の運動をニュートン力学を用いて追うことができる。<sup>\*8</sup>位置  $\mathbf{X}$  にある質量  $m$  の粒子がもつ運動エネルギーは、

$$\text{Kinetic Energy} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{X}}^2 = \frac{m\dot{a}^2\mathbf{X}^2}{2a^2}$$

この粒子の位置より内部にある球の質量は、 $M(\mathbf{X}) = 4\pi\rho|\mathbf{X}|^3/3$  なので、

$$\text{Potential Energy} = -\frac{GmM(\mathbf{X})}{|\mathbf{X}|} = -\frac{4\pi Gm\rho|\mathbf{X}|^2}{3}$$

エネルギー保存則から、

$$\begin{aligned} E &= \text{Kinetic Energy} + \text{Potential Energy} \\ &= \frac{m|\mathbf{X}(t_0)|^2}{a^2(t_0)} \left[ \frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G\rho a^2}{3} \right] = \text{Constant}. \end{aligned}$$

これが、

$$E = -\frac{Km|\mathbf{X}(t_0)|^2}{2a^2(t_0)}$$

と同定すれば、フリードマン方程式 ((62)) と一致。 $E \geq 0$  のとき、すなわち、 $K = 0, -1$  のとき、粒子は無限遠方まで脱出できる。 $E < 0$ 、すなわち、 $K = +1$  のとき、脱出速度より小さいので、膨張はやがて止まり、（2粒子で考えたとき）互いの方向に向かって落下してしまう。

## 5.1 宇宙膨張についてフリードマン方程式から考察

さて、相対論的な式に話を戻そう。非相対論の前の話を思い出すと、圧力  $p$  をエネルギー密度  $\rho$  の関数として与えて保存則を与えて解いて、 $\rho$  を  $a$  の関数として表してから、フリードマン方程式に用いて、というのが解法としてあった。しかしながら、 $\rho$  が  $a$  にどのように依存するかがわからなくとも、フリードマン方程式から宇宙膨張の一般的性質について重要な知見が実は得られる。

まず、エネルギー密度が正 ( $\rho > 0$ ) の場合、宇宙膨張が止まる可能性は  $K = +1$ 、すなわち、空間の幾何为正の曲率 (球面) の場合で、これが唯一である。唯一の証明はしていないが、まあそれは置いておいて、ハッブル定数  $H_0 \equiv \dot{a}(t_0)/a(t_0)$  がどのような値であっても、現在の宇宙の臨界密度  $\rho_{0, \text{crit}}$  を定義できる。

$$\rho_{0, \text{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878 \times 10^{-29} h^2 \text{g/cm}^3$$

ここで、 $h$  はハッブル定数を  $H_0 = h \times 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  と表したときの無次元数だった。 $(h \sim 0.7)$

フリードマン方程式によると、宇宙の組成に関して何を仮定しようが、曲率定数  $K$  は現在の密度  $\rho_0$  が、それぞれ、現在の宇宙臨界密度  $\rho_{0, \text{crit}}$  より大きい、等しい、または、小さいかによって、 $+1$ 、 $0$ 、または  $-1$  をとる。

もし、 $3p + \rho > 0$  ならば、場の方程式:  $3\ddot{a}/a = -4\pi G(3p + \rho)$  から、 $\ddot{a}/a < 0 \Rightarrow \ddot{a}/a \leq 0$  である。ここで、 $3p + \rho > 0$  ということは、真空のエネルギー密度がなければ物質と放射のいかなる組み合わせに対しても成り立

---

<sup>\*8</sup> この論理が少し怖い。



つ。<sup>\*9</sup>これは、 $a$  が振動解を持っているみたいなおものである。したがって、宇宙膨張は過去のある時点で、 $a = 0$  となる点から始まったことになり、また、現在の宇宙年齢  $t_0$  は、ハッブル時間より大きくなることはない。

$$t_0 < H_0^{-1}$$

証明:  $f(t) := H_0^{-1}(t) - t > 0$  ( $t > 0$ ) を示せばよい。

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{\dot{a}} - t \right) \\ &= \frac{\dot{a}^2 - a\ddot{a}}{\dot{a}^2} - 1 \\ &= - \left( \frac{a}{\dot{a}} \right)^2 \underbrace{\frac{\ddot{a}}{a}}_{<0} > 0 \end{aligned}$$

したがって、 $f(t)$  は狭義単調増加関数である。また、先の考察より、 $a = 0$  となる点から始まったのだった。そこを  $t = 0$  としてとってやることにすると、 $f(0) = 0$  これらより、 $t > 0$  において  $f(t) \geq 0$ 。よって示せた。

もし、 $K = +1$  で宇宙膨張が止まると、 $\ddot{a}/a \leq 0$  である限り、宇宙は特異点  $a = 0$  に向かって収縮する。振動解のような理解で良いと思う。

さて、先ほどの場の方程式:  $3\ddot{a}/a = -4\pi G(3p + \rho)$  を使えば、減速パラメーター:  $q_0 \equiv -\ddot{a}(t_0)a(t_0)/\dot{a}^2(t_0)$  に関する一般公式:

$$q_0 = \frac{4\pi G(\rho_0 + 3p_0)}{3H_0^2} = \frac{\rho_0 + 3p_0}{2\rho_{0, \text{crit}}}$$

が得られる。なお、添え字の 0 は現在での値を表す。もし、

1. 現在の宇宙の密度 (density of universe) が非相対論的物質で支配されているなら、 $p_0 \gg p_0$  である。<sup>\*10</sup>  $q_0 > 1/2$ 、 $q_0 = 1/2$ 、もしくは  $q_0 < 1/2$  に応じて、曲率定数  $K$  は、 $+1$ 、 $0$ 、もしくは、 $-1$  の値をとる。<sup>\*11</sup>
2. 一方で、宇宙の密度が相対論的物質で支配されているならば、 $p_0 = \rho_0/3$  であり、 $K = 0$  での減速パラメーターの値は  $q_0 = -1$  である。<sup>\*12</sup>
3. 最後に、真空のエネルギーで支配されているならば、 $p_0 = -\rho_0$  であり、 $K = 0$  での減速パラメーターの値は  $q_0 = -1$

ただし、上の計算では  $\rho_0 = \rho_{0, \text{crit}}$  としている。

これらの結果には特異な側面がある。フリードマン方程式の右辺の:  $\rho a^2$  への寄与は、 $a \rightarrow 0$  において、非相対論的物質、相対論的物質についてそれぞれは  $a^{-1}$ 、 $a^{-2}$  と増加する。<sup>\*13</sup>したがって、宇宙膨張の十分に早期の段階では、曲率定数  $K$  を無視しても大丈夫で、フリードマン方程式は、

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \approx \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (a \rightarrow 0)$$

<sup>\*9</sup> どう証明? 後にありそう

<sup>\*10</sup> (Cold Matter (e.g. dust))  $p = 0$  なぜか?、それはおいておく。仮定みたいなのだと思う。物理的意味はなんだろう。。。? 単純に遅いと、第 0 成分がないということでもいいのか。

<sup>\*11</sup> なぜか? それはおいておく。

<sup>\*12</sup>  $K \neq 0$  の場合は?

<sup>\*13</sup> これは、1.1 時空の幾何学で三つの例について、状態方程式  $p = w\rho$  を使って保存則を解いた時に出てきた結果を使っている。

となる。すなわち、宇宙早期の密度は、基本的に臨界密度  $3H^2/8\pi G$  に等しい。ここで、もちろん  $H \equiv \dot{a}/a$  だけど、現在のハッブル定数ではなく、“ $a \rightarrow 0$  の時期におけるハッブル定数”である。一方、のちに見るように、現在の宇宙全エネルギー密度は未だ臨界密度に近い。<sup>\*14</sup> 何十億年 ( $10^9$  年) 経っているのにも関わらず、 $\rho$  がいまだに  $\rho_{\text{crit}}$  に等しいのはどういうことだろう？と疑問に持つ人はいるわけで、これはしばしば平坦性問題 (flatness problem.) と呼ぶ。

平坦性問題について考えてみる。この問題の最も単純な解は、単に我々が空間的に平坦な宇宙 (Euclidean) に住んでいるというものである。そこでは、 $K = 0$  であり、 $\rho$  は常に  $\rho_{\text{crit}}$  と等しい。この解に比べてより支持される解はインフレーション理論によって与えられる。これは4章までのお楽しみ。少しだけお話しすると、 $K = 0$  である必要はなく、 $\rho \approx \rho_{\text{crit}}$  で始まる必要もないが、宇宙は早期において、 $\rho/\rho_{\text{crit}}$  が急速に1に近づくような急激な進化をし、現在の  $\rho (= \rho_0)$  が、 $\rho_{\text{crit}}$  に非常に近いと期待される。そのため、 $K = 0$  をとる必要はないと言ったけれども、 $K = 0$  とするのはよい近似。

$K = 0$  の場合、1.1 節で述べた、3つの特別な場合 (冷たい物質、暑い物質、真空エネルギー) において、フリードマン方程式の解は常に単純になる。

**非相対論的な物質** :  $p = 0$ 、保存則から、 $\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-4}$  で、 $K = 0$  のフリードマン方程式の解は、

$$a(t) \propto t^{2/3}$$

これより、 $q_0 \equiv -a\ddot{a}/\dot{a}^2 = 1/2$ 、および、次の宇宙年齢と、ハッブル定数  $H_0 = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$  との間の単純な関係式：

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6.52 \times 10^9 h^{-1} \text{yr}$$

を得る。これらの式から、エネルギー密度は、 $\rho = 1/6\pi G t^2$  で与えられる。<sup>\*15</sup> これは、**アインシュタイン・ド・ジッターモデル** (Einstein de Sitter model) として知られている。このモデルは、昔、何年にもわたって最も支持されていたけれども、宇宙年齢はある種の構成の年齢に比べて小さすぎる。このことは後で見る。

**相対論的な物質** :  $p = \rho/3$ 、保存則から、 $\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-4}$  で、 $K = 0$  の時の解は、

$$a(t) \propto \sqrt{t}$$

これより、 $q_0 \equiv +1$  である。宇宙年齢とハッブル定数の間の関係式は、

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}$$

となって、ある時刻  $t$  におけるエネルギー密度は、 $\rho = 3/32\pi G t^2$  となる。

**真空のエネルギー**：まず、 $p = -\rho$  の説明をしていなかったのです。ローレンツ変換に対する不変性の考察より、局所慣性系では真空のエネルギー・運動量テンソル  $T_V^{\mu\nu}$  ( $V$  は Vacuum の意味) は、ミンコフスキー時空の計量  $\eta^{\mu\nu}$  に比例しなければならなかった。(ここで、 $n^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$  をとる。) したがって、一般の座標系では、 $T_V^{\mu\nu} \propto g^{\mu\nu}$  とならなければならない。この結果を、重力場がある場合の完全流体のエネルギー運動量テンソル (B.43):

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \rho) u^\mu u^\nu, \quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$$

<sup>\*14</sup> これは、三つの場合分けした時の計算にも使った。

<sup>\*15</sup> フリードマン方程式を解いて、

と見比べれば、真空の圧力は  $p_V = -\rho_V$  で与えられることがわかり、そのときのエネルギー運動量テンソルは、 $T_V^{\mu\nu} = -\rho_V g^{\mu\nu}$  である。他の勝手な形式のエネルギーがないもとで、これは保存則 (conservation law):  $0 = T_V^{\mu\nu}; \mu = g^{\mu\nu} \partial \rho_V / \partial x^\mu$  を満たす。よって、 $\rho_V$  というのは、時空の場所によらない定数であることが導かれる。 $K = 0$  のフリードマン方程式:  $\dot{a}^2 = 8\pi G \rho a^2 > 0$  から、 $\rho_V > 0$  が要請されて、 $\dot{a} = Ha$  で、

$$a(t) = \exp\left(\int H dt\right) \\ \propto \exp(Ht) \quad (\text{for } H = \text{const})$$

である。ここでハッブル定数は本当に定数で、

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_V}{3}}$$

となる。 $q_0 = -1$  で、宇宙年齢は無限大である。このモデルは、**ド・ジッターモデル** (de Sitter model) として知られている。たとえ、現在における宇宙の密度が定数である真空エネルギーに支配されていたとしても、過去では物質あるいは放射 (非相対論的な物質、相対論的な物質) が重要であり、宇宙年齢は有限である。真空のエネルギーがない場合と比べて、このモデルの宇宙年齢は大きい。

次に、より一般に  $K$  についての制約を外してみる。 $K$  が勝手な値を持ち、真空エネルギー、非相対論的な物質、相対論的な物質がそれぞれ臨界密度の比として  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_M$ ,  $\Omega_R$ 、(それぞれ、アインシュタイン方程式の  $\Lambda$ , Matter, Relative から来ている。) を持つような場合、

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[ \Omega_\Lambda + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_R \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right]$$

つまり、現在時刻における真空エネルギー密度、非相対論的な物質のエネルギー密度、および相対論的な物質<sup>\*16</sup>のエネルギー密度は、それぞれ、

$$\rho_{V0} \equiv \frac{3H_0^2 \Omega_\Lambda}{8\pi G}, \quad \rho_{M0} \equiv \frac{3H_0^2 \Omega_M}{8\pi G}, \quad \rho_{R0} \equiv \frac{3H_0^2 \Omega_R}{8\pi G}$$

で与えられて、これを使えば、フリードマン方程式は、

$$\Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_R + \Omega_K = 1, \quad \Omega_K \equiv -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}$$

とかける。今は、フリードマン方程式を書き換えただけ。それで、この形式で、フリードマン方程式を考えてやる。

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi G \rho a^2}{3} \\ \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \left[ \Omega_\Lambda + \Omega_K \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_R \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right]$$

なので、 $x \equiv a/a_0 = 1/(1+z)$  で書き換えると、

$$\frac{\dot{x}^2}{x^2} = H_0^2 [\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}] \\ \rightarrow dt = \frac{dx}{H_0 x \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \\ = \frac{-dz}{H_0 (1+z) \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_R (1+z)^4}}$$

---

<sup>\*16</sup> つまり、放射

を得る。したがって、もし時刻  $t = 0$  を赤方偏移無限大とするならば、赤方偏移  $z$  を持つ光が放たれた時刻は次の式で与えられる。

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}$$

特に、この式で  $z = 0$  としてみれば、すなわち、 $x = 1$  まで積分すれば、現在の宇宙年齢を計算できる。

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}$$

光度距離:  $d_L = a(t_0)r_1(1+z)$  と角径距離:  $d_A = a(t_1)r_1$  を計算したい。そのためには、赤方偏移  $z$  で観測される光源の動径座標  $r(z)$  を知らねばならない。これは、式 (1.2.2):

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

と、

$$d(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r & K = +1 \\ \sinh^{-1} r & K = -1 \\ r & K = 0 \end{cases}$$

を思い出せば、

$$\begin{aligned} r(z) &= S \left[ \int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right] \\ &= S \left[ \frac{1}{a_0 H_0} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \right] \end{aligned}$$

で与えられ、 $S$  は、

$$S[y] \equiv \begin{cases} \sin y & K = +1 \\ y & K = 0 \\ \sinh y & K = -1 \end{cases}$$

のいずれかである。この表式は、フリードマン方程式を密度のパラメーターで書き換えた表式 (式 (1.5.40)) を用いて、 $a_0 H_0$  を  $\Omega_K$  に関して書き換えることで、より便利な表式:

$$a_0 r(z) = \frac{1}{H_0 \Omega_K^{1/2}} \sinh \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \right]$$

となって、これは全ての曲率で使える。(この式は  $\Omega_K \rightarrow 0$  において、滑らかな極限をもち<sup>\*17</sup>、それは、曲率ゼロでの結果を与える、 $\sinh ix = ix$  など、云々。)

これより、光度距離:  $d_L = a(t_0)r_1(1+z)$  は、

$$d_L(z) = a_0 r(z)(1+z) = \frac{1+z}{H_0 \Omega_K^{1/2}} \sinh \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \right]$$

---

<sup>\*17</sup> 明らか。

$K = 0$  では、 $\Omega_K = 0$  であるから、

$$d_L(z) = a_0 r_1(1+z) = \frac{1+z}{H_0} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}$$

となる。

$\Omega_R$  は  $\Omega_M$  よりも非常に小さく、上の式の積分は、 $\Omega_R$  が 0 であろうとなかろうと、積分の下限りが  $z \rightarrow \infty$  で収束するために、ここでは良い近似で  $\Omega_R = 0$  ととれる。これは 2.1 節で見る。

角径距離はテキストでは省略されてる。。。ので僕も省略。

減速パラメータ  $q_0$  を密度のパラメータ  $\Omega$  で表したい。圧力とエネルギー密度の比  $w = p/\rho$  を考えると、それは、真空、(非相対論的) 物質、放射 (相対論的物質) に対して、それぞれ、 $-1, 0, 1/3$  をとる。したがって、現在の圧力  $p_0$  は、

$$p_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left( -\Omega_\Lambda + \frac{1}{3}\Omega_R \right)$$

そして、 $q_0$  は、

$$q_0 = \frac{4\pi G (3p_0 + \rho_0)}{3H_0^2} = \frac{1}{2} (\Omega_M - 2\Omega_\Lambda + 2\Omega_R)$$

となる。

ところで、なぜ僕らは  $\Omega_K$  や  $\Omega_M$  などの値に興味を持つのだろうか？理由の一つは、それらを知ること、現在の宇宙膨張がいずれ止まるかがわかるから、というのがある。式 (1.5.38):

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[ \Omega_\Lambda + \Omega_M \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_R \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \right]$$

によれば、膨張が止まるには、 $u \equiv a(t)/a(t_0) > 1^{*18}$  とおいた、この三次方程式:

$$\Omega_\Lambda u^3 + \Omega_K u + \Omega_M = 0$$

に  $u > 1$  において、実解がなければならない。というか、膨張が止まって、収縮する条件と考えた方がわかりやすい。この表式の  $u = 1$  における値は  $+1$ 。もし  $\Omega_\Lambda < 0$  なら、上式の左辺はどこか中間の  $u$  で左辺がゼロになるはずであり (中間値の定理とかいうんでしたっけ)、このとき膨張は止まる。たとえ、 $\Omega_\Lambda \geq 0$  出会っても、 $\Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_M$  が十分に負であれば、膨張を止めることができる。そして、それは何よりも  $K = +1$  を要請する。これが、膨張を止める時に  $K = +1$  を要請するからくりであると、相対論の場合でも今わかった。

**歴史ノート 1:** アインシュタイン方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\lambda_\lambda = -8\pi GT_{\mu\nu}^M + 8\pi G\rho_V g_{\mu\nu}$$

で、次のように変形できる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}^M$$

ここで、

$$\Lambda = 8\pi G\rho_V$$

---

\*18 放射を無視しているけれども、宇宙が膨張するにつれて、それはますます重要でなくなるから問題はない。

であり、この  $\Lambda$  は宇宙定数 (cosmological constant.) として知られている。この項は、昔、宇宙が静的であるべきという条件が本質であると思われていたときに、そのような静的な解を満たすためにアインシュタインによって、1917 年に導入された。場の方程式から分かるように、 $\rho + 3p = 0$  ( $\rightarrow \dot{\rho} = 0$ ) かつ  $K = 8\pi G\rho a^2/3$  ( $\rightarrow \dot{a} = 0$ ) のときのみ静的な宇宙の解は存在する。もし、宇宙の中身が真空のエネルギーと非相対論的な物質だけに限られていれば、 $\rho = \rho_M + \rho_V$ ,  $p = -\rho_V$ , そして  $\rho_M \geq 0$  である。これらの条件から  $\rho_M = 2\rho_V \geq 0$ 、ひいては  $K > 0$  が得られる。これは、すなわち、 $K = +1$  を意味するので、 $a$  は決められた値  $a_E = 1/\sqrt{8\pi G\rho_V} = 1/\sqrt{\Lambda}$  をとる。このモデルは**アインシュタインモデル** (Einstein model.) として知られている。

アインシュタイン自身は気づかなかったが、この彼の宇宙論モデルは不安定であった。もし、 $a$  が  $a_E$  よりほんの小さければ、 $\rho_M$  は  $2\rho_V$  よりほんのすこし大きく、したがって、 $\ddot{a}/a < 0$ 、すなわち、 $a$  は減少し始める。 $a$  が  $a_E$  よりほんのすこし大きいときも同様のことが言えて、 $a$  が増加し始める。 $K = +1$  と  $\Lambda > 0$  を持ち、 $a$  がアインシュタイン半径  $a = a_E$  で物質密度が  $\rho_M = 2\rho_V$  の状態から始まって、無限に膨張するモデル (もしくは、 $a$  が  $a = 0$  で始まって、 $t \rightarrow \infty$  で  $a_E$  に近づき、そこで  $\rho_M = 2\rho_V$  となるようにちょうど必要な物質質量をも持つようなモデル) は**エディントン・ルメートル** (Eddington-Lematre models.) として知られている。また、 $K = +1$  の下で、 $a = 0$  ですこしだけ物質があつて、アインシュタイン半径の近くで長い時間を使って、そしてまた半径が無限へと行く、ド・ジッターモデルに到達するようなモデルもあつて、それを**ルメートルモデル** (Lematre models.) という。

奇妙な話であるが、ド・ジッターもまた静的な宇宙を満たすために宇宙モデルを発明した。アインシュタインだけではないのだ。彼は、 $a \propto \exp(Ht)$  というモデルを作っていたのにも関わらず。ド・ジッターが提案した時間に依存しない計量は、

$$d\tau^2 = (1 - r^2/R^2) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

あるいは、 $r = R \sin \chi$  を使って書き直すと、

$$d\tau^2 = \cos^2 \chi dt^2 - R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2)$$

ここで、 $R = \sqrt{3/\Lambda}$  は定数である。ド・ジッターははじめ、この計量が  $\Gamma_{00}^i \neq 0$  を与え、つまり、座標系が共動的でないことに気づいていなかったようだ。のちになって、ようやく、共動的な空間座標と宇宙論における標準の時間を用いることで、ド・ジッターのモデルが  $K = 0$  と  $a \propto \exp(t/R)$  を持つロバートソン・ウォーカーの計量と等価であることが示された。

宇宙膨張の発見以後、宇宙論の学者らは、静的宇宙への興味を失った。アインシュタインに関しては、宇宙定数を導入したことを後悔し、これを最大の誤りと嘆いたらしい。しかしながら、実は、理論的には真空のエネルギーがゼロでないと考える理由があり、それにそれがゼロでないという観測的な根拠さえある。これは次節で見る。これをワインバーグ先生は、アインシュタインの誤りや、宇宙定数を導入したのではなく、彼が導入したことを誤りだと考えたことが誤りだったのだ、と評している。

**歴史ノート 1** : 定常宇宙論 (steady state theory) として知られるボンディ (Bondi) とゴールド (Gold)、あるいは少し異なったバージョンだけでもホイル (Hoyle) による宇宙モデルがある。このモデルでは、物理的なものは何一つとして変化しない。ハッブル定数は本当に定数であり<sup>\*19</sup>、ド・ジッターモデルのように  $a(t) \propto \exp(Ht)$  を持つ。曲率を一定に保つには、 $K = 0$  が必要。また、 $\rho$  が宇宙膨張に対して一定であるには、新しい物質がた

---

<sup>\*19</sup> 変な言い方だと思う。



えず生成されねばならない。宇宙マイクロ波背景放射の発見以後、定常宇宙論でその本来の形式のものは、ほとんどのところ完全に放棄されている。これは2章で見る。

## 6 大きな赤方偏移における距離 (Distances at large redshift)

さて、距離と赤方偏移の関係の説明に戻る。 $z > 0.1$  のような、光源の特異速度が無視できるくらいの状況を考えると、これは距離の決定に宇宙膨張を考慮する必要がある。

ここからは文章が続く。要点だけ適当に列挙していく。

### 6.1 標準光源の考察

標準光源は基本的に Ia 型超新星。長年にわたって使われてきたのは、大きな銀河団の中の最も明るい星であった。

しかしながら、欠点が二つ。銀河の絶対光度は宇宙論的な時間スケールで大きく変化すること。一つ目は、大きな最大光度の銀河が存在するようなより大きな銀河団を選ぶ選択バイアスがある。二つ目は、ほぼ同時期に二つのグループ (超新星宇宙論プロジェクト、高赤方偏移超新星探査チーム) によって Ia 型超新星の観測が行われた。

超新星宇宙論プロジェクトの結果が図 6.1 にある。この結果より、99% の信頼度で、 $\Omega_\Lambda \leq 0$  を棄却する。平坦な宇宙 ( $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1$ ) の下で、

$$\Omega_M = 0.28^{+0.09}_{-0.08} (1\sigma \text{ statistical})^{+0.05}_{-0.04} (\text{identified systematics})$$

を与え、これより宇宙年齢は、

$$t_0 = 13.4^{+1.3}_{-1.0} \times 10^9 \left( \frac{70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}{H_0} \right) \text{ yr}$$

もし、 $\Omega_M = 0.28$  で、平坦な宇宙を仮定すれば、宇宙膨張は加速している。

高赤方偏移超新星探査チームの結果が図 6.1 にある。空間の曲率の仮定によらず、99.7% の信頼度で  $\Omega_\Lambda > 0$  と結論した。平坦な宇宙モデルにおける最良適合値は  $\Omega_M = 0.28 \pm 0.10$  と  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$  で宇宙年齢は、 $(14.2 \pm 1.5) \times 10^9 \text{ y}$  である。 $\Omega_M \geq 0$  のみを仮定し、より自由度の多い光度曲線のモデルを用いて、彼らは、99.5% の信頼度で  $q_0 < 0$  と結論した。すなわち、加速膨張を強く示唆した。

両グループとも  $\Omega_\Lambda$  と  $\Omega_M$  の線型結合を与えることを認識している、とのことだが、なんでこんなことを考えているのか。というのは、線形結合に現れる”負号”が大事で、物質と真空のエネルギーが宇宙の加速膨張に対しての逆の効果をもたらすことに起因していることが大事。物質は膨張を減速させて、正の真空エネルギーは膨張を加速させる。 $(q_0 = (\Omega_M - 2\Omega_\Lambda + 2\Omega_R)/2)$  例えば、超新星宇宙論プロジェクトでは、 $0.8\Omega_M - 0.6\Omega_\Lambda$ 、高赤方偏移超新星探査チームでは、 $\Omega_M - \Omega_\Lambda$  やら、 $1.4\Omega_M - \Omega_\Lambda$  である。これらの線型結合に現れる負号は真空のエネルギーのように振る舞うエネルギー成分の存在を示していて、この成分は**ダークエネルギー**と呼ばれている。余談だが、宇宙論的距離にある Ia 型超新星の観測を  $q_0$  の測定だとみなすのは正しくない。

次に、高赤方偏移超新星探査チームは、超新星を見つけてその時間発展をおったりして、最良適合値を得た。

さて、少しデータの特徴について。 $\Omega_\Lambda > \Omega_M$  を示す超新星のデータの重要な特徴は、Ia 型超新星の見かけの光度が赤方偏移とともに減少するスピードがインシュタイン-ド・ジッターモデル ( $\Omega_M = 1, \Omega_\Lambda = 0$ ) で期待されるものよりも早いことである。真空エネルギーが見かけの光度に及ぼす効果は、真空エネルギーが優勢な平坦

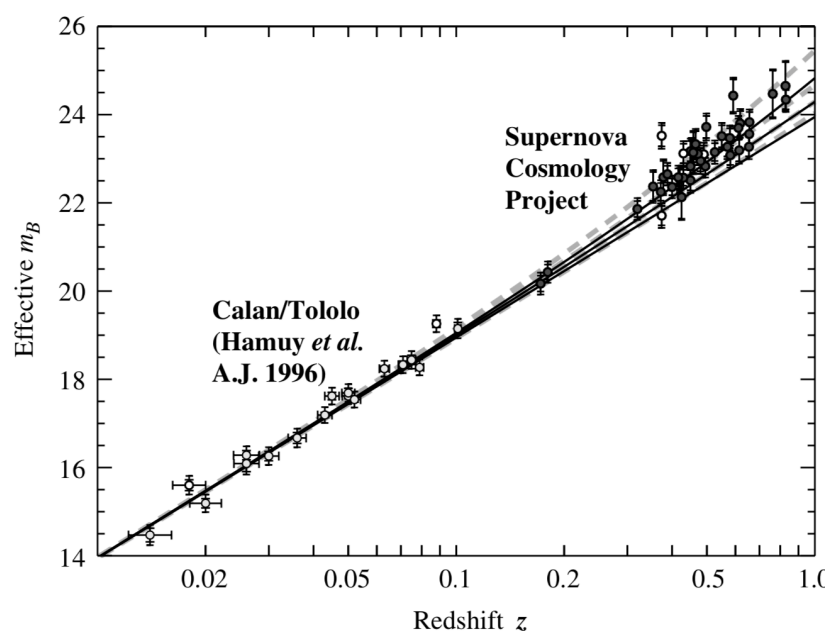


図 1

な宇宙と、空っぽの宇宙、二つの極端な宇宙モデルで計算された光度距離を比較することによって、調べられる。

$$d_L(z) = \frac{z + z^2}{H_0} \quad (\text{vacuum dominated})$$

$$d_L(z) = \frac{z + z^2/2}{H_0} \quad (\text{empty})$$

まあ明らかに、真空エネルギーは全ての  $z$  において光度距離を増加させるように働くことがわかる。(図 6.1)

両方のチームともに、彼らが測定した光度距離と Ia 型超新星の赤方偏移の関係が真空エネルギー優勢の宇宙の関係に近いことを発見した。この事実は、宇宙膨張が物質に支配されていて、そこそこ大きい赤方偏移の見かけの光度が  $q_0 = 0$  の場合に比べて大きい、という従来の期待と反するものだった。 $q_0$  の定義に  $-$  がついている理由は、この予想のために正の値をとるようにしていたためである。

加速膨張と見かけ光度の現象の関係はどのように理解できるかというと、1.5 節でやたニュートン的な宇宙モデルに基づいて議論ができる。

まあ、見かけの光度の現象が加速膨張じゃなくて、光源と僕らの間に介在する物質による光の吸収、散乱で生じている可能性はある。そのような効果は、その結果に生じる見かけの色なるものの変化を考えればよく、色を慎重に測定することによって解決できる。しかしながら、簡単ではない。色を変えずに、見かけの光度を減らすなんらかの銀河間媒体 (グレイダスト) を考えることは可能。

この問題は、ハッブル深宇宙探査 (Hubble Deep Field) の領域中にある赤方偏移  $z = 1.7 \pm 0.1$  の銀河で発見された超新星 SN1997ff の研究と、新しくできた「より高赤方偏移の」超新星チーム (Higher-z Supernova Team) が発見した新しい Ia 型超新星の解析によって解決されている。(ので、心配ない。) 図 6.1 はそれを表していて、二つの宇宙モデルから計算された光度距離の差を表している。あまりわからないが説明しておく、高赤方偏移において、超新星から放たれた光が僕らに向かって飛んできている時間の大部分は物質が優勢である。したがって、その頃の宇宙膨張は減速しているはず。これらの新しい超新星の見かけの光度は、光度距離と赤方偏移の間に線形関係を仮定していたけれども、これより大きいはずであり、光の吸収や散乱では説明ができない。図 6.1



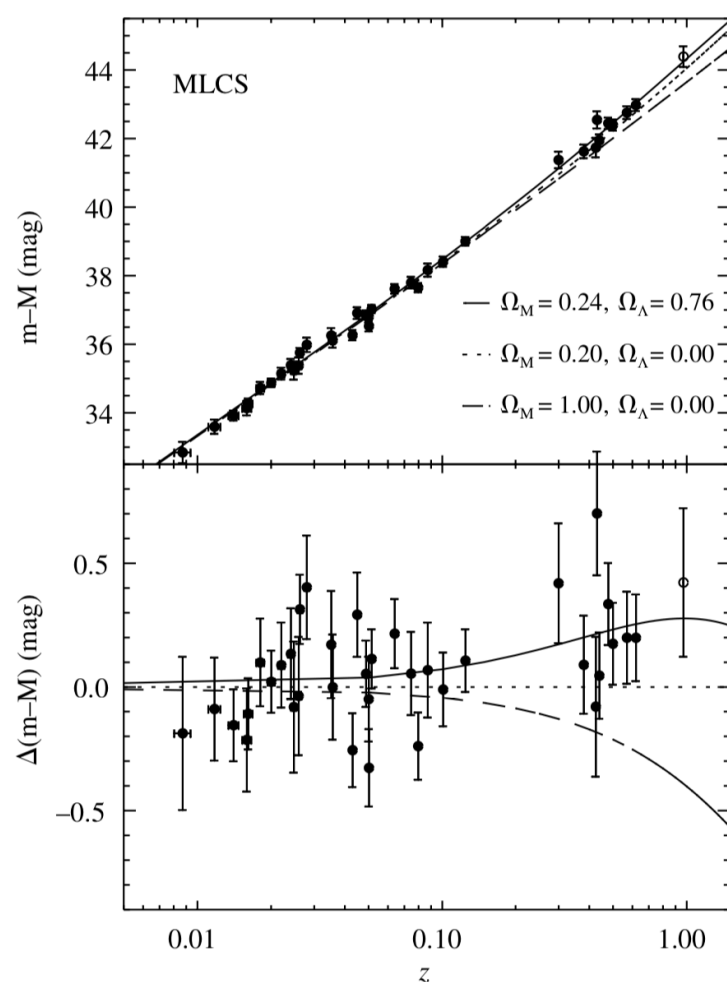


図 2

をみると、 $z > 1.25$  では観測結果を説明する。グレイダスト、 $\Omega_\Lambda = 0$  から期待される結果とは矛盾。これらの結論は、ハッブル望遠鏡を用いた、赤方偏移が 0.5 程度の Ia 型超新星の光度距離の測定によってさらに強化されて、物質優勢期から真空エネルギー優勢期への移行に関するさらなる証拠が与えられ、さらにこれから、 $z > 1$  における圧力とエネルギー密度の比が  $-1$  と無矛盾であること、その時間変化が早くないことが示された。

さて、実はもう一つ深刻な問題があって、Ia 型超新星の絶対光度が、超新星の起こる時期に依存する可能性があるということである。だが、銀河の場合、遠方にあるほど早期の姿を見ていることになるので、超新星の光度に対する進化の効果は、銀河全体に対するものほど重要ではないと思われる。<sup>\*20</sup> 例えそうであっても、Ia 型超新星の絶対光度は超新星の元となる二つの星の化学組成に影響を受け、そしてそれは親銀河の進化に影響されるので、そのような効果は超新星の絶対光度と減光時間、および絶対光度と本来の色との間の相関を考慮することで減らすことができるそうだ。

他にひょっとすると、超新星の見かけの光度と赤方偏移の関係に寄与するかもしれない影響は、

1. 弱い重力レンズ効果。これは非常に小さい領域のみを観測しているので小さいと考えられている。

<sup>\*20</sup> 少し曖昧

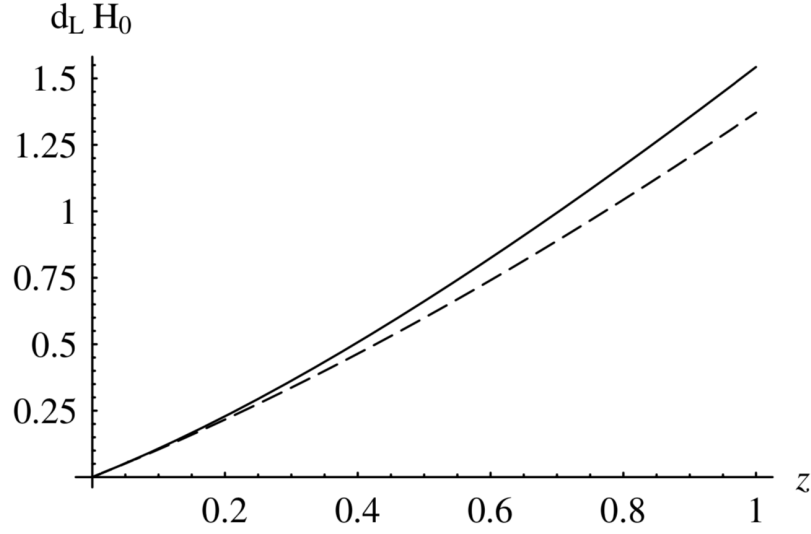


図 3

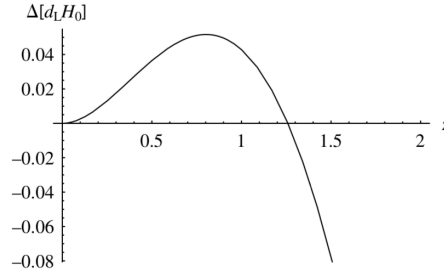


Figure 1.4: The luminosity distance times  $H_0$  for the realistic case  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ,  $\Omega_M = 0.3$ ,  $\Omega_K = \Omega_R = 0$ , minus its value for the empty case  $\Omega_K = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = \Omega_M = \Omega_R = 0$ , plotted against redshift.

図 4

SN1997f の見かけの光度は重力レンズによって増光されていて云々、というお話があったけれども、結果的には重力レンズの効果は小さいと報告された。

2. 宇宙の物質分布の非一様性によって加速膨張が生じるというお話がある。が、十分に大きな空間スケールで平均化した宇宙が高精度で一様であるから、これもありそうにないでしょ、と思われている。
3. 測定の精度を悪くする不訂正。というのは観測所はいっぱいあるから。それらの観測所間の結果を比較する際に様々な較正誤差が生じる可能性。これは実験で頑張るしかない。人の手によるもの。
4. 測定器が限られた波長領域のみに感度があるという問題。これは歴史的に、高赤方偏移における光度距離の測定を難しくしてきた。宇宙論的赤方偏移は光源の見かけ色を変えてしまうために、見かけの光度が測定される感度を変えてしまう。これを考慮するために、いわゆる K 補正 (K-correction) を用いて、観測された見かけの等級は較正される。これは暗黒エネルギー発見前に導かれていおり、以後、改良されている。

さて、これらの加速膨張の観測から得られることは、定数である真空のエネルギーの存在と無矛盾であるが、このエネルギー密度が本当に定数であるか、ということの証明にはなっていない。加速膨張は  $3\ddot{a}/a = \rho + 3p < 0$  であることを要請するが、それは通常物質や放射ではあり得ない。この成分が暗黒エネルギー (dark energy)

と呼ばれる所以である。

暗黒エネルギーが定数でないという可能性は捨てきれしていないので、実験では、暗黒エネルギーの圧力とエネルギー密度の比として観測データを解析するのが慣例となっている。この比  $w$  が時間変化しない理由はない。それでも、 $w$  が定数であるが、必ずしも  $-1$  に等しくない宇宙モデルはよく調べられている。<sup>\*21</sup> 暗黒エネルギー密度と、 $\Omega_K$  が負でなければ、宇宙は継続して膨張し続ける。この場合の暗黒エネルギーの密度は  $a^{-3-3w}$  のように変化する。

もし、 $w < 0$  であれば、十分時間が経過すると、最終的に、放射と物質のエネルギー密度は暗黒エネルギー密度と比べて無視できるほど小さくならなければならない。もし、 $w, < 1/3$  であれば、フリードマン方程式における空間曲率の効果も最終的には無視できるようになる。 $-1 < w$  かつ  $\dot{a} > 0$  の場合、解は  $t \rightarrow Ca^{(3+3w)/2} + t_1$  となる。もし、 $w < -1$  かつ  $\dot{a} > 0$  の場合の解は、 $a$  が時刻  $t_1$  において無限大になるという特筆すべき性質を持つ。これはしばしばファントムエネルギー (phantom energy) と呼ばれる。この場合は、 $w, \geq -1$  の場合と異なり、全ての構造は最終的には暗黒エネルギーに付随する赤緑によって引き裂かれてしまう。<sup>\*22</sup>

2003 年、カナダ-フランス-ハワイ望遠鏡で開始された調査 (Supernova Legacy Survey) があって、それと、ESSENCE で得られたデータから、 $w = -1.07 \pm 0.09$  (stat,  $1\sigma$ )  $\pm 0.13$  (syst),  $\Omega_M = 0.267^{+0.028}_{-0.018}$  (stat,  $1\sigma$ ) という結果を得た。

実は、暗黒エネルギーが宇宙のエネルギー密度の大部分を占めているという結論は、宇宙マイクロ背景放射の観測で確認されている。これは 7.2 節でのお楽しみ。また、X 線の観測からも支持されている。これは銀河団の高温ガスから発せられる。

バースト時間の長い長期型のガンマ線バーストを 2 次の距離指標として用いることで、光度距離の測定をさらに高赤方偏移まで伸ばすことができるかもしれない。ガンマ線バーストは、一定の絶対光度を持っていないけれども、その絶対光度が、見かけの光度が最大となるエネルギーおよび特徴的な時間スケールと相関を持つという示唆があるからだ。

暗黒エネルギーの発見は、(もちろん他の観測の解釈の上で重要だけど) 基礎物理に対する挑戦という意味において非常に重要である。暗黒エネルギーの密度がなぜこんなにも小さい値をとるのか？というのが最も大きな問題である。<sup>\*23</sup>

---

\*21 りゆうは？

\*22 なんかつこいい。

\*23 これもなんかつこいい