Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 9

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 25, 2024)

I. ZAHLENTHEORIE

Theorem 1. *(Division mit Rest)*

$$a = bq + r,\ 0 \leq r \leq |b| - 1.$$

Theorem 2. *Sei $\mathbb{Z}^2 \ni (a, b) \neq (0, 0)$. Dann gibt es $s, t \in \mathbb{Z}$ mit*

$$ggT(a, b) = sa + tb.$$

Theorem 3. *Sei $\mathbb{Z}^2 \ni (a, b) \neq (0, 0)$ und d ein Teiler von a und b. Es gilt*

$$d \cdot ggT\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{d}\right) = ggT(a, b).$$

Theorem 4. *Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Sind a, b teilerfremd, gilt*

(a) $a|bc \implies a|c$

(b) $a|c$ *und* $b|c \implies ab|c$.

(c) $ggT(a, bc) = ggT(a, c)$

Theorem 5. *Sei $a, b \in \mathbb{N}^*$.*

$$ab = ggT(a, b) \cdot kgV(a, b).$$

Theorem 6. *Sei $a \in \mathbb{Z}$, p eine Primzahl, $a \nmid p$. Dann ist*

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Theorem 7. *Sei $n \in \mathbb{N}^*$. $\varphi(n)$ ist die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq m < n$, die zu n teilerfremd sind.*

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

II. ALLGEMEINE GRUPPENTHEORIE

Theorem 8. *Es gilt* $x^{|G|} = 1 \; \forall x \in G$.

Theorem 9. *Sei a ein Element der Ordnung* $n \in \mathbb{N}^*$. *Für* $m \in \mathbb{Z}$ *sei* $d = ggT(n, m)$. *Dann hat* a^m *die Ordnung* $\frac{n}{d}$.

Theorem 10. *Eine Untergruppe N ist genau dann Normalteiler, wenn* $g^{-1}Ng \subseteq N$ *für alle* $g \in G$ *gilt.*

Theorem 11. *Die Primzahl p teile die Ordnung der endlichen Gruppe G. Dann enthält G ein Element der Ordnung p.*

Theorem 12. *Es gibt Untergruppen von Primpotenzordnung* p^r, *wenn* $p^r||G|$.

Theorem 13. *Jede p-Untergruppe von G liegt in einer p-Sylowgruppe von G.*

Theorem 14. *Die p-Sylowgruppen sind konjugiert.*

Definition 15. Sei $S \subseteq G$. Die Normalisator $N_G(S)$ ist die Elemente $g \in G$, so dass $gSg^{-1} = S$.

Theorem 16. *Sei* n_p *die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Es gilt*

1. $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.
2. $n_p = [G : N_G(P)]$
3. $n_p|[G : P]$

III. GRUPPENHOMOMORPHISMEN

Theorem 17. *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Es gilt* $ord(\phi(g))|ord(g)$.

Theorem 18. *Sei* $U \leq G, N \trianglelefteq G$.

$$U/U \cap N \cong UN/N.$$

Theorem 19. *Sei* $K \trianglelefteq G, K \subseteq H \leq G$. $H \trianglelefteq G$ *genau dann, wenn* $H/K \trianglelefteq G/K$. *In diesem Fall ist*

$$\frac{G}{H} \cong \frac{G/K}{H/K}.$$

Theorem 20. *Die Menge der Konjugationsautomorphismen bezeichnen wir mit* $Inn(G)$. *Es gilt* $G/Z(G) \cong Inn(G)$.

IV. GRUPPENOPERATIONEN

Definition 21. Eine Operation ist ein Homomorphismus $G \to \mathrm{Sym}(M)$.

Theorem 22. *Die Länge der Bahn durch $m \in M$ ist $[G : G_m]$.*

Theorem 23. *Sei $m, n \in M$ in der gleichen Bahn. Dann sind die Stabilisatoren konjugiert.*

Theorem 24. *Sei $m_1, \ldots, m_r$ Repräsentanten der Bahnen.*

$$|M| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_{m_i}].$$

Theorem 25. *Sei $m_1, \ldots, m_r$ Repräsentanten der Konjugationsklassen, die großer als 1 sind. Es gilt*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : G_{m_i}].$$

Theorem 26. *Für $g \in G$ sei $\chi(g)$ die Anzahl $m \in M$ mit $g.m = m$. Dann ist*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

die Anzahl der Bahnen auf M.

V. ABELSCHE GRUPPEN

Theorem 27. *Sei n die größte Elementordnung in einer abelschen Gruppe G. Dann gilt $g^n = e$ für alle $g \in G$.*

Theorem 28. *G ist genau dann abelsch, wenn die Zentrumsfaktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist.*

Theorem 29. *Sei p eine Primzahl. Alle Gruppen der Ordnung p^2 sind abelsch.*

VI. ZYKLISCHE GRUPPEN

Theorem 30. *Sei a ein Erzeuger der zyklischen Gruppe G mit $|G| = n$. a^m ist genau dann Erzeuger, wenn m und n teilerfremd sind.*

Theorem 31. *G ist zyklisch genau dann, wenn G zu jedem positiven Teiler t von $|G|$ genau eine Untergruppe der Ordnung t besitzt.*

VII. SYMMETRISCHE & ALTERNIERENDE GRUPPEN

Theorem 32. *Sei $\sigma, \tau \in S_n$ disjunkt. Es gilt $ord(\sigma\tau) = kgV(ord(\sigma), ord(\tau))$*

Theorem 33.

$$S_n = \langle (12), (123\dots n) \rangle.$$

Theorem 34. *Sei $\phi = (a_1 a_2 \dots)(b_1 b_2 \dots) \dots \in S_n$ in Zykelnotation und $\psi \in S_n$. Es gilt*

$$\psi\phi\psi^{-1} = (\psi(a_1)\psi(a_2)\dots)(\psi(b_1)\psi(b_2)\dots)\dots.$$

Theorem 35. *Seien $\alpha, \beta \in S_n$ Permutationen mit den gleichen Zykellängen. Dann sind α und β in S_n konjugiert.*

Theorem 36. *Jede gerade Permutation in S_n ist ein Produkt von 3-Zykeln. Insbesondere wird A_n von den 3-Zykeln aus S_n erzeugt.*

Theorem 37. *Sei $n \geq 5$. Dann sind alle 3-Zykel in A_n konjugiert.*

VIII. EINFACHE GRUPPEN

IX. PRODUKTGRUPPEN

Theorem 38. *Sei $A, B \leq G$. AB ist eine Gruppe genau dann, wenn $AB = BA$.*

Theorem 39.

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}.$$

Theorem 40. *Internes direktes Produkt: $A, B \trianglelefteq G,\ A \cap B = \{e\} \implies AB \cong A \times B$.*

Theorem 41. *Internes semidirektes Produkt: $A \trianglelefteq G, B \leq G, A \cap B = \{e\} \implies AB \cong A \rtimes B$*

Definition 42. $A \rtimes_\varphi B = (A \times B, \circ, (e, e))$, wobei $(u, v) \circ (\tilde{u}, \tilde{v}) = (u\varphi_v(\tilde{u}), v\tilde{v})$

X. AUFLÖSBARE GRUPPEN

Definition 43. Elemente der Form $aba^{-1}b^{-1}$ heißen Kommutatoren. Die durch die Kommutatoren erzeugte Gruppe heißt die Kommutatorgruppe G' von G. Wir bezeichnen die höhere Kommutatorgruppen mit $G^{(i)}$.

Theorem 44. *Die Gruppen $G^{(i)}$ sind alle normal in G.*

Theorem 45. *Untergruppen, Faktorgruppen und homomorph Bilder von auflösbaren Gruppen sind auflösbar.*

Theorem 46. *Semidirekte Produkten (und daher direkte Produkten) von auflösbaren sind auflösbar.*

Theorem 47.

Theorem 48. *(Nicht zu nutzen) Burnside: Gruppen der Ordnung $p^a q^b$ sind auflösbar.*

Feit Thompson: Endliche Gruppen von ungerade Ordnung sind auflösbar.

XI. BEISPIELVERZEICHNIS

Example 49. ***(Diedergruppe)*** *Die Diedergruppe D_n hat Ordnung $2n$.*

r hat Ordnung n, s hat Ordnung 2, alle Elemente der Form $r^k s$ haben Ordnung 2

Example 50. ***(Kleinsche Vierergruppe)*** $V_4 = \{\sigma \in A_4 | ord(\sigma) \leq 2\}$. 4 *Elemente und nicht zyklisch.*