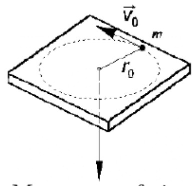
Aufgabe 5.4: *Man dreht sich im Kreis...* .... (5 Punkte)



Bei der gezeigten Anordnung bewegt sich ein Massepunkt mit der Masse m mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v_0 reibungsfrei auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_0 auf einer horizontalen Platte. Die Masse wird durch einen Faden, der durch ein kleines Loch in der Plattenmitte nach unten geführt ist, auf ihrer Bahn gehalten.

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

(1 P) a) Der Faden wird gleichförmig nach unten gezogen, bis sich den Masse m auf einer Kreisbahn mit dem Radius $\frac{r_0}{2}$ bewegt. Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsbetrag v, der sich dabei einstellt durch Anwendung eines geeigneten Erhaltungssatzes. (Erhaltungssatz angeben!)

Die Masse sei nun auf die Bewegung entlang eines Drahtes beschränkt, der radial nach außen zeigt und mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec\omega_0 = \omega_0 \vec e_z$ rotiert. Der Geschwindigkeitsbetrag, mit dem sich die Masse radial nach innen bewegt ist v_r.

(2 P) b) Führen Sie Ihre Betrachtung im **beschleunigten Bezugssystem** durch, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec\omega_0$ bezüglich des Inertialsystems dreht. Bestimmen Sie die Scheinkräfte auf die Kugel. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten und die allgemeinen in der Vorlesung gezeigten Definitionsgleichungen der Scheinkräfte. Erläutern Sie im Anschluss, wie Sie mit Hilfe der Scheinkräfte die Kräfte $\vec F_\mathrm{D}$ und $\vec F_\mathrm{F}$ bestimmen können, die der **D**raht und der **F**aden auf die Kugel ausüben. Bestimmen Sie $\vec F_\mathrm{D}$ und $\vec F_\mathrm{F}$.

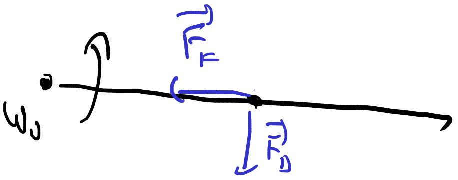
(2 P) c) Führen Sie Ihre Betrachtung im **Inertialsystem** durch. Bestimmen Sie mit $\vec L = \vec r \times \vec p$ den Drehimpuls der Kugel als Funktion des Radius r. Bestimmen Sie aus der zeitlichen Änderung des Drehimpulses das Drehmoment $\vec M$ und die Kraft $\vec F$, die das Drehmoment erzeugt. Um welche Kraft handelt es sich?

a) Erhaltung von Betrag des Drehimpulses

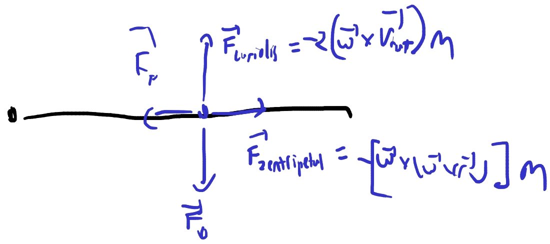
$$m r_0 v_0 = m \frac{r_0}{2} v \Rightarrow v = 2 v_0$$

b)

Inertial Bezugssystem



beschleunigtes Bezugssystem



Weil Geschwindigkeit konstant (v_r) ist, ist Beschleunigung 0, also $\vec F_F = -\vec F_{zentripetal}$, $\vec F_D = -\vec F_{Coriolis}$

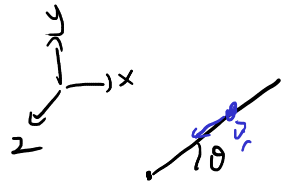
Also $\vec F = 0$

$$|\vec F_F| = |-\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r)|$$
$$= \omega_0^2 r \quad \text{(Vorlesung S. 1)}$$

$$\vec F_F = -\omega_0^2 \vec r = -\omega_0^2 r \hat e_r$$

$$|\vec{F}_D| = |-2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rot}|$$
$$= 2\,|\vec{\omega} \times \vec{v}_{rot}|$$
$$= 2\,\omega_0\, v_r$$
$$\vec{F}_D = 2\,\omega_0\, v_r\, \hat{e}_\theta$$

c)



$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = r\,\hat{e}_r$$

$$\vec{p} = -m v_r + m v_t\, \hat{e}_\theta$$

$$\vec{r} \times \vec{p} = -m v_r (r\,\hat{e}_r \times \hat{e}_r) + r m v_t (\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta)$$
$$= 0 + r m v_t\, \hat{e}_z = m r^2 \omega_0\, \hat{e}_z$$

$\vec{L}$ ist erhalten und $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \hat{e}_z \frac{d}{dt}\left(m r^2 \omega_0\right)$$
$$= \hat{e}_z \left(m \omega_0 \frac{d r^2}{dt}\right)$$
$$= \hat{e}_z \left(2 m \omega_0 r \frac{dr}{dt}\right)$$
$$= \vec{M}$$

$$\vec{M} = 2 m \omega_0 r \frac{dr}{dt}\, \hat{e}_z$$
$$= \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{F} = 2m\omega_0 \frac{dr}{dt} \hat{e}_\theta$$

$$= -2m\, \vec{\omega_0} \times \vec{v}$$

also sie ist die Corioliskraft