Kapitel 2

Integrationstheorie

2.1 Messbare Funktionen

Definition 2.1. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$. Dann heißt f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar (oder kurz messbar), falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.*

Es reicht die Eigenschaft $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ nur für Mengen B zu zeigen, die die σ-Algebra $\mathcal{B}$ erzeugen.

Lemma 2.2. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$, und sei $S \subseteq \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A}_\sigma(S) = \mathcal{B}$. Dann ist f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar genau dann, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in S$.*

Beweis. "$\Leftarrow$" Wir verwenden $f_*(\mathcal{A})$, siehe Beispiel 1.4. Nach Voraussetzung gilt $S \subseteq f_*(\mathcal{A})$. Damit ist auch $\mathcal{B} \subseteq f_*(\mathcal{A})$, und f ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar. □

Verknüpfungen stetiger und messbarer Funktionen sind messbar.

Lemma 2.3. *Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, Y und Z metrische Räume. Weiter seien $g : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(Y)$-messbar und $f : Y \to Z$ stetig. Dann ist $f \circ g$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(Z)$-messbar.*

Beweis. Sei $O \subseteq Z$ offen. Dann ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(Y)$ und $(f \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathcal{A}$. □

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{A})$ immer ein messbarer Raum.

Definition 2.1 werden wir für die Spezialfälle $Y = \mathbb{R}$ und $Y = \bar{\mathbb{R}}$ verwenden, wobei die Bildräume mit der Borel-σ-Algebra versehen werden. Sei $\mathcal{T}$ die Menge der offenen Mengen auf $\mathbb{R}^1$. Dann ist die Borel-σ-Algebra von $\bar{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T} \cup \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}),$$

also $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und die einelementigen Mengen $\{+\infty\}$, $\{-\infty\}$ enthält. Offensichtlich ist $\mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Mithilfe von Lemma 2.2 können wir die Anforderungen an eine messbare Funktion schon reduzieren.

Definition 2.4. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^1$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$.*

Analog heißt $f : X \to \mathbb{C}$ Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{C}$.

Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$.

Folgerung 2.5. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f $\mathcal{L}(n)$-$\mathcal{B}^1$-messbar und $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}^1$-messbar.*

Bemerkung 2.6. *Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muss allerdings nicht $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{L}(1)$-messbar sein. Das ist der Grund, warum auf dem Bildbereich $\mathbb{R}$ die Borel-σ-Algebra verwendet wird. Eine stetige aber nicht $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{L}(1)$-messbare Funktion kann mit der Cantor-Menge konstruiert werden, wir verweisen auf [Tao11, Remark 1.3.10].*

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue messbar, dann ist f auch messbar, wenn f als Funktion nach $\bar{\mathbb{R}}$ angesehen wird.

Definition 2.7. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere*

$$\{f < \alpha\} := \{x \in X : f(x) < \alpha\},$$

analog $\{f \leq \alpha\}$, $\{f > \alpha\}$, $\{f \geq \alpha\}$.

Satz 2.8. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(2.9) *f ist messbar,*

(2.10) *$\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.11) *$\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.12) *$\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.13) *$\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Beweis. Wir beweisen nur die Äquivalenz von (2.9) und (2.10). Ist f messbar, dann ist $\{f < \alpha\} = f^{-1}(\{-\infty\} \cup (-\infty, \alpha)) \in \mathcal{A}$. Sei nun $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle

$\alpha \in \mathbb{Q}$. Wir nutzen aus, dass $f_*(\mathcal{A})$, also die Menge aller Teilmengen $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ für die $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist, eine σ-Algebra ist, siehe Beispiel 1.4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge rationaler Zahlen (α_k) mit $\alpha_k \to \alpha$. Es folgt

$$\{f < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f < \alpha_k\} \in \mathcal{A}.$$

Damit ist auch $\{f \geq \alpha\} = \{f < \alpha\}^c \in \mathcal{A}$. Dann gilt für alle $\alpha < \beta$, dass $f^{-1}([\alpha, \beta)) \in \mathcal{A}$. Damit sind die Urbilder aller halboffenen Intervalle in $\mathcal{A}$. Damit ist auch $\mathcal{B}^1 \subseteq f_*(\mathcal{A})$. Weiter gilt

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f < -n\} \in \mathcal{A}.$$

Wegen $\{+\infty\} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^c$ ist auch $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$. Damit sind die Urbilder aller Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ in $\mathcal{A}$, und f ist messbar. □

Beispiel 2.14. *Sei $A \subseteq X$. Definiere die charakteristische Funktion von A durch*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist χ_A messbar genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}$. Ist $B \subseteq X$, dann ist

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B).$$

Beispiel 2.15. *Ist $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch die durch*

$$(\chi_A \cdot f)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion $\chi_A \cdot f$ messbar. Hier haben wir wieder die Konvention $0 \cdot \pm\infty := 0$ benutzt. Für $\alpha < 0$ ist

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A \cap \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

während für $\alpha \geq 0$ gilt

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A^c \cup \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

und $\chi_A \cdot f$ ist messbar.

Nun wollen wir beweisen, dass Summen, Produkte, etc, von messbaren Funktionen messbar sind. Wir starten mit zwei Hilfsresultaten.

Lemma 2.16. *Sei $g : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ monoton wachsend, das heißt für alle $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $x \le y$ ist $g(x) \le g(y)$. Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist auch $g \circ f$ messbar.*

Beweis. Wir benutzen Satz 2.8. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{g < \alpha\}$ ein Intervall: Definiere $\beta := \sup\{x \in \bar{\mathbb{R}} : \ g(x) < \alpha\} \in \bar{\mathbb{R}}$. Ist $g(\beta) = \alpha$ dann ist $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta)$, ansonsten ist $g(\beta) < \alpha$ und $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta]$. In beiden Fällen ist $f^{-1}(\{g < \alpha\}) = \{g \circ f < \alpha\}$ messbar. □

Damit bekommen wir folgendes Resultat.

Satz 2.17. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind die folgenden Funktionen messbar:*

(2.18) $c \cdot f$ *für alle* $c \in \bar{\mathbb{R}}$,

(2.19) $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := \min(f, 0)$,

(2.20) $\operatorname{sign}(f)$, *wobei*

$$\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \textit{falls } y > 0 \\ 0 & \textit{falls } y = 0 \\ -1 & \textit{falls } y < 0, \end{cases}$$

(2.21) $|f|^p$ *für alle* $p > 0$,

(2.22) $1/f$ *falls* $f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$.

Beweis. (2.18): Wir zeigen erst, dass $-f$ messbar ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{-f < \alpha\} = \{f > -\alpha\}$, also ist $-f$ messbar. Sei nun $c \in \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist $g(y) := |c| \cdot y$ monoton wachsend, und mit Lemma 2.16 ist $|c| \cdot f$ messbar, also auch $-|c| \cdot f$.

(2.19),(2.20): Die Funktionen $y \mapsto \max(y, 0)$, $y \mapsto \min(y, 0)$ und $y \mapsto \operatorname{sign}(y)$ sind monoton wachsend. Wegen Lemma 2.16 sind die Funktionen $\max(f, 0)$, $\min(f, 0)$ und $\operatorname{sign}(f)$ messbar.

(2.21): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{|f| < \alpha\} = \{f < \alpha\} \cap \{-f < \alpha\}$. Dies ist wegen (2.18) und Satz 2.8 in $\mathcal{A}$, also ist auch $|f|$ messbar. Die Abbildung $y \mapsto (\max(0, y))^p$ ist monoton wachsend, damit ist auch $|f|^p$ messbar.

(2.22): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{1/f < \alpha\} = (\{f < 0\} \cap \{\alpha f < 1\}) \cup (\{f > 0\} \cap \{\alpha f > 1\}) \in \mathcal{A},$$

also $1/f$ messbar. □

Desweiteren sind Summen, Produkte, Quotienten messbarer Funktionen wieder messbar.

Satz 2.23. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und f/g messbar, falls diese Funktionen für alle x definiert sind. Die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\pm\infty / \pm\infty$, $c/0$ für $c \in \bar{\mathbb{R}}$ sind nicht definiert.*

Beweis. Wir zeigen, dass $f + g$ messbar ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $f(x) + g(x) < \alpha$, woraus $f(x) < +\infty$ und $g(x) < +\infty$ folgt. Dann existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in (g(x), \alpha - f(x))$. Dann ist

$$\{f + g < \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < \alpha - q\} \cap \{g < q\}) \in \mathcal{A},$$

und $f + g$ ist messbar.

Seien zuerst f und g Abbildungen nach $\mathbb{R}$. Dann folgt die Messbarkeit von $f \cdot g$ aus $f \cdot g = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$. Seien nun f und g Abbildungen nach $\bar{\mathbb{R}}$. Wir definieren die messbare Menge

$$A := \{|f| < \infty\} \cap \{|g| < \infty\}$$

sowie die messbaren Funktionen (mit Wertebereich $\mathbb{R}$)

$$\tilde{f} := \chi_A f, \quad \tilde{g} := \chi_A g.$$

Dann ist $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ messbar. Außerdem gilt (beachte $0 \cdot \infty = 0$)

$$f \cdot g = \chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g} + \chi_{A^c} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g) \cdot \infty.$$

Beide Summanden sind messbar: $\chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ und $\chi_{A^c} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g)$ sind Produkte $\mathbb{R}$-wertiger messbarer Funktionen (Beispiel 2.15), Multipikation mit der Konstante $+\infty$ erhält Messbarkeit.

Sei g messbar, so dass $g(x) \neq 0$ für alle x. Dann ist $1/g$ messbar (2.22). Damit ist auch $f/g = f \cdot 1/g$ messbar. □

Aufgrund der Eigenschaften von σ-Algebren können wir recht einfach beweisen, dass punktweise Infima, Suprema und Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen wieder messbar sind.

Satz 2.24. *Seien (f_n) messbare Funktionen von X nach $\bar{\mathbb{R}}$. Dann sind auch $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ messbare Funktionen. Dabei ist $(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ punktweise definiert. Analog wird für die drei anderen Konstrukte verfahren.*

Beweis. Die Messbarkeit von Infimum und Supremum folgt aus Satz 2.8 und

$$\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \le \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \le \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Per Definition ist

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} f_k(x).$$

Wegen des gerade Gezeigten ist $x \mapsto \inf_{k\ge n} f_k(x)$ messbar für alle n, und damit auch $x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Analog folgt der Beweis für $\limsup$. □

Folgerung 2.25. *Seien (f_n) messbare Funktionen von X nach $\bar{\mathbb{R}}$. Weiter sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle x. Dann ist auch f messbar.*

Wir zeigen nun, dass sich Lebesgue-messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren lassen.

Definition 2.26. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann heißt f einfache Funktion, wenn $f(X)$ eine endliche Menge ist.*

Lemma 2.27. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ einfach, dann existieren $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte, messbare Mengen $A_1 \dots A_n$, so dass $\bigcup_{j=1}^n A_j = X$ und*

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}.$$

Beweis. Da f einfach ist, ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Menge. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$ und $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ so, dass $f(X) = \{c_1 \dots c_n\}$. Mit $A_j := f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{A}$ folgt die Behauptung. □

Das heißt, eine Funktion ist einfach, wenn sie eine Linearkombination charakteristischer Funktionen ist.

Folgerung 2.28. *Sind f, g einfache Funktionen, dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ einfache Funktionen.*

Beweis. Wegen Lemma 2.27 gibt es reelle Zahlen c_i und d_j sowie messbare Mengen A_i und B_j, so dass

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$$

und $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$, wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Dann ist $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$, $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \chi_{A_i \cap B_j}$ und

$$f + g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Für das Produkt erhalten wir

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}\right) \left(\sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i d_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

□

Satz 2.29. *Sei $f : X \to [0, +\infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge (f_n) nicht-negativer, einfacher Funktionen mit $f_n(x) \nearrow f(x)$ für alle x. Ist f beschränkt, dann ist die Folge (f_n) gleichmäßig beschränkt, und die Konvergenz $f_n \to f$ ist gleichmäßig.*

Beweis. Wir konstruieren die f_n durch eine Unterteilung des Bildbereichs. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen das Intervall $[0, n)$ in $n2^n$-viele Intervalle der Länge 2^{-n}. Setze für $j = 1 \dots n2^n$

$$A_{n,j} := f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n} \frac{j}{2^n}\right)\right).$$

Damit definieren wir die einfache Funktion

$$f_n(x) := n\chi_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=1}^{n2^n} \chi_{A_{n,j}} \cdot \frac{j-1}{2^n}.$$

Damit gilt $f_n(x) \leq f(x)$. Wegen

$$A_{n,j} = A_{n+1,2j-1} \cup A_{n+1,2j}$$

folgt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Es bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Ist $f(x) < n$ dann ist $x \in A_{n,j}$ für ein passendes j, und es gilt $f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$. Damit bekommen wir $f_n(x) \to f(x)$ falls $f(x) < +\infty$. Ist $f(x) = +\infty$, dann ist $f_n(x) = n$ für alle n, und die Konvergenz $f_n(x) \to f(x) = +\infty$ folgt.

Sei f beschränkt. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < N$ für alle x. Daraus folgt $f_n(x) < N$ für alle n und x. Für $n > N$ ist dann $f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$ für alle x, woraus die gleichmäßige Konvergenz folgt. □

Im Folgenden werden wir die abkürzende Schreibweise

$$f_n \nearrow f \quad \Leftrightarrow \quad f_n(x) \nearrow f(x) \ \forall x \in X$$

benutzen.

Folgerung 2.30. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann existiert eine Folge (ϕ_n) einfacher Funktionen mit $|\phi_n(x)| \leq |f(x)|$ und $\phi_n(x) \to f(x)$ für alle x.*

Beweis. Wir approximieren $|f|$ durch eine Folge nicht negativer, einfacher Funktionen (ϕ_n), Satz 2.29. Die Funktion $\operatorname{sign}(f)$ ist eine einfache Funktion. Die Funktionen $\operatorname{sign}(f) \cdot \phi_n$ haben dann die gewünschten Eigenschaften, wobei wir Folgerung 2.28 benutzt haben. □

2.2 Das Lebesgue-Integral

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.31. *Sei $f : X \to [0, +\infty)$ eine einfache Funktion mit $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ mit paarweise disjunkten Mengen (A_i). Dann ist*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$$

das Lebesgue Integral von f.

Da $\mu(A_i) = +\infty$ sein kann, ist $\int f \,\mathrm{d}\mu$ im Allgemeinen in $\bar{\mathbb{R}}$. Um unbestimmte Ausdrücke zu vermeiden, haben wir das Integral nur für nicht negative Funktionen definiert.

Lemma 2.32. *Das Lebesgue-Integral für einfache Funktionen ist wohldefiniert: Gilt $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$ mit paarweise disjunkten Mengen (A_i) und paarweise disjunkten Mengen (B_j), dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$. Falls nicht setzen wir $A_{n+1} = (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$, $c_{n+1} = 0$.

Ist $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ dann folgt $c_i = d_j$: Sei $x \in A_i \cap B_j$, dann ist $f(x) = c_i = b_j$, da die Mengen (A_i) und die Mengen (B_j) paarweise disjunkt sind. Weiter ist $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ und $B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$ Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

□

Dieses Integral für einfache Funktionen hat folgende Eigenschaften.

Satz 2.33. *Seien $f, g : X \to [0, +\infty)$ einfache Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $\int (cf)\,\mathrm{d}\mu = c \int f\,\mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$,

(2) $\int f + g\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$,

(3) ist $f \leq g$, dann ist $\int f\,\mathrm{d}\mu \leq \int g\,\mathrm{d}\mu$,

(4) $\int \chi_A\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. (1) folgt sofort aus der Definition. (2) Wegen Lemma 2.27 gibt es reelle Zahlen c_i und d_j sowie messbare Mengen A_i und B_j, so dass

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j}$$

und $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Wie im Beweis von Folgerung 2.28 bekommen wir

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int f + g\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j) = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

(3) Sei $x \in A_i \cap B_j$. Dann gilt $f(x) = c_i \leq g(x) = d_j$. Mit Argumenten wie im Beweis von Lemma 2.32 bekommen wir

$$\begin{aligned} \int f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) &= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j) = \int g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

(4) $\chi_A = 1\cdot\chi_A + 0\cdot\chi_{A^c}$ ist eine einfache Funktion mit $\int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A) + 0\cdot\mu(A^c) = \mu(A)$. $\square$

Wir können messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren. Dies werden wir benutzen, um das Lebesgue-Integral für messbare Funktionen zu definieren. Wir beginnen mit dem Integral nicht-negativer Funktionen, damit wir die Monotonie der Konvergenz aus Satz 2.29 benutzen können. In den Beweis des nächsten Satzes geht entscheidend die Stetigkeit von Maßen auf monoton wachsenden Folgen messbarer Mengen (1.29) ein.

Lemma 2.34. *Sei (f_n) eine Folge nichtnegativer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$, f einfache Funktion. Dann gilt*

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir betrachten die beiden Fälle $\int f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ und $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. (1) Angenommen $\int f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Da f eine einfache Funktion ist, existiert ein $c > 0$ und ein $A \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(A) = +\infty$ und $f \geq c$ auf A. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $A_n := \{x : \ f_n(x) \geq c/2\}$. Da $(f_n(x))$ monoton wachsend ist, folgt $A_n \subseteq A_{n+1}$. Aus der punktweisen Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ folgt $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \supseteq A$. Dann folgt $\mu(A_n) \to \mu(A) = +\infty$ aus (1.29). Aus der Ungleichung $\chi_{A_n}\frac{c}{2} \leq f_n$ folgt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \mu(A_n)\frac{c}{2} \to +\infty$ (Satz 2.33).

(2) Sei nun $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge, also konvergent. Weiter ist $B := \{f > 0\} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$. Da f eine einfache Funktion ist, ist f beschränkt, und es existiert $M > 0$ mit $f(x) \leq M$ für alle x. Sei $\epsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $B_n := B \cap \{f_n \geq f - \epsilon\}$. Dann folgt $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = B$, und wir bekommen $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus B_n) = 0$ aus (1.29) und (1.30). Wir schätzen nun das Integral der einfachen und nicht-negativen Funktion $f - f_n$ von oben ab. Auf B_n ist $f - f_n \leq \epsilon$, auf $B \setminus B_n$ ist $f - f_n \leq f \leq M$, während auf B^c gilt $f = f_n = 0$. Dann ist $f - f_n \leq \chi_{B_n}\epsilon + \chi_{B\setminus B_n} M$ und es folgt

$$0 \leq \int f - f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int \chi_{B_n}\epsilon + \chi_{B\setminus B_n} M \,\mathrm{d}\mu = \mu(B_n)\epsilon + \mu(B \setminus B_n)M \to \mu(B)\epsilon.$$

Da $\mu(B) < \infty$ und $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f \,\mathrm{d}\mu - \int f - f_n \,\mathrm{d}\mu \right) = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Nun zeigen wir, dass der Grenzwert von $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ für $f_n \nearrow f$ nur vom

Grenzwert f abhängt, und nicht von der konkreten Wahl der (f_n). Dies ist ein wichtiger Schritt, um das Lebesgue-Integral definieren zu können.

Lemma 2.35. *Seien (f_n), (g_n) Folgen nichtnegativer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$, f messbar. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Definiere

$$h_m = \min(f_n, g_m).$$

Dies ist eine einfache Funktion. Aus der Voraussetzung folgt $h_m \nearrow f_n$ für $m \to \infty$. Aus Lemma 2.34 bekommen wir dann

$$\lim_{m\to\infty} \int h_m \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Da $h_m \le g_m$ folgt mit der Monotonie des Integrals $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \int g_m \,\mathrm{d}\mu$. Grenzübergang auf beiden Seiten der Ungleichung ergibt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{m\to\infty} \int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int g_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Für $n \to \infty$ bekommen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int g_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Vertauschen wir in dieser Argumentation die Rollen von f_n und g_m erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Daraus folgt, dass die Grenzwerte existieren und gleich sind. □

Definition 2.36. *Sei $f : X \to [0, +\infty]$ messbar. Sei (f_n) eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen mit $f_n \nearrow f$. Dann ist das Lebesgue-Integral von f definiert als*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen Lemma 2.35 ist das Lebesgue-Integral von f wohldefiniert: der Wert $\int f \,\mathrm{d}\mu$ hängt nicht von der konkreten Wahl der approximierenden, einfachen Funktionen (f_n) ab.

Satz 2.37. *Seien $f, g : X \to [0, +\infty]$ messbare Funktionen. Dann gilt*

(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ *für alle* $c \ge 0$

(2) $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$*,*

(3) ist $f \le g$*, dann ist* $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$*,*

(4) sind (f_m) *messbare Funktionen von* X *nach* $[0, +\infty]$ *mit* $f_m \nearrow f$*, dann gilt* $\int f_m \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$*.*

Beweis. (1)–(3) Seien (f_n) und (g_n) Folgen einfacher, nichtnegativer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ und $g_n \nearrow g$. (1) und (2) folgen nun direkt aus Satz 2.33. Für (3) benutzen wir $\min(f_n, g_n) \nearrow f$ und $\int \min(f_n, g_n) \,\mathrm{d}\mu \le \int g_n \,\mathrm{d}\mu$.

(4) Für jedes m existiert ein Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen $(f_{m,n})$ mit $f_{m,n} \nearrow f_m$ für $n \to \infty$. Definiere die einfache Funktion h_m durch

$$h_m(x) := \max_{i,j \le m} f_{i,j}(x).$$

Dann ist $(h_m(x))$ monoton wachsend. Für $i, j \le m$ ist $f_{i,j} \le f_i \le f_m$. Dann ist $h_m \le f_{m,m} \le f_m \le f$, und es folgt $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \int f_m \,\mathrm{d}\mu \le \int f \,\mathrm{d}\mu$. Wir zeigen $h_m(x) \to f(x)$.

Seien $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s < f(x)$. Dann existiert m, so dass $s \le f_m(x)$. Weiter existiert ein n, so dass $r \le f_{m,n}(x)$. Daraus folgt $r \le h_{\max(m,n)}(x)$ und $r \le \lim_{m\to\infty} h_m(x)$. Da $r < f(x)$ beliebig war, folgt $h_m(x) \to f(x)$. Damit folgt $h_m \nearrow f$ und $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$, woraus die Behauptung folgt. □

2.3 Integrierbarkeit

Wir wollen nun messbare Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ integrieren. Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$$f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \min(f, 0).$$

Dann ist $f = f^+ + f^-$.

Definition 2.38. *Sei* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *messbar. Es sei eines der Integrale* $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$*,* $\int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$ *endlich. Dann ist das Lebesgue-Integral von* f *definiert als*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu.$$

Sind beide Integrale $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$*,* $\int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$ *endlich, dann heißt* f *integrierbar.*

Satz 2.39. *Sei* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *messbar. Dann ist* f *integrierbar genau dann, wenn* $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$*.*

Beweis. Sei f integrierbar. Wegen $|f| = f^+ + (-f^-)$ ist $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, wobei wir Satz 2.37 benutzt haben. Sei nun $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

Da $f^+ \le |f|$ und $0 \le -f^- \le |f|$ folgt die Behauptung mit der Monotonie des Integrals aus Satz 2.37. $\square$

Lemma 2.40. *Es sei $f := f_1 - f_2$ mit $f_i : X \to \bar{\mathbb{R}}^+$ messbar und $\int f_i \,\mathrm{d}\mu < \infty$ für $i = 1, 2$. Dann ist f integrierbar, und es gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Es gilt $|f| \le f_1 + f_2$, und mit Satz 2.37 folgt $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Wegen Satz 2.39 ist f integrierbar. Aufgrund der Konstruktion ist $f_1 \ge f^+$. Definiere die nichtnegative Funktion g durch

$$g := f_1 - f^+ = f - f^+ + f_2 = f^- + f_2.$$

Da $|g| \le |f_1|$ ist g integrierbar. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu &= \int (g + f^+) \,\mathrm{d}\mu - \int (g - f^-) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int g \,\mathrm{d}\mu + \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \left(\int g \,\mathrm{d}\mu + \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu \right) \\
&= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir Satz 2.37 benutzt. $\square$

Die Schwierigkeit des Beweises war, dass wir die Additivität des Integrals bisher nur für nichtnegative Funktionen haben.

Satz 2.41. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

(2) Ist $f + g$ definiert, dann ist $f + g$ integrierbar, und es gilt $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(3) Ist $f \le g$, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(4) $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. Wegen $|cf| \le |c| \cdot |f|$ und $|f + g| \le |f| + |g|$ folgt die Integrierbarkeit von cf und $f + g$ aus Satz 2.39 und Satz 2.37. Sei $c \ge 0$. Dann ist $(cf)^+ = cf^+$ und $(cf)^- = cf^-$, und es folgt (1). Wegen Lemma 2.40 bekommen wir aus $f + g = (f^+ + g^+) - (-f^- - g^-)$

$$\begin{aligned}
\int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \int f^+ + g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- + g^- \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu - \int g^- \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Additivität aus Satz 2.37 benutzt haben. Damit ist (2) bewiesen. Zu (3): ist $f \le g$ dann ist $f^+ \le g^+$ und $f^- \le g^-$, woraus mit der Monotone aus Satz 2.37

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \, \mathrm{d}\mu \le \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \le \int g \, \mathrm{d}\mu$$

folgt. (4) bekommen wir aus $-|f| \le f \le |f|$ und (3)(1). □

Definition 2.42. *Es sei $\mathcal{L}^1(\mu)$ die Menge aller integrierbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$.*

Die Menge $\mathcal{L}^1(\mu)$ versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum wegen Satz 2.41.

Lemma 2.43. *Die Abbildung*

$$f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} := \int |f| \, \mathrm{d}\mu$$

ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$, d.h., es gilt:

(1) $\|f+g\|_{L^1(\mu)} \le \|f\|_{L^1(\mu)} + \|g\|_{L^1(\mu)}$ für alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

(2) $\|cf\|_{L^1(\mu)} \le |c| \; \|f\|_{L^1(\mu)}$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $c \in \mathbb{R}$.

Im Allgemeinen folgt aus $\|f\|_{L^1(\mu)} = 0$ nicht, dass $f = 0$.

Beispiel 2.44. *Dazu betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda^1)$. Setze $f := \chi_{\mathbb{Q}}$. Dann ist $\int f \, \mathrm{d}\mu = \lambda^1(\mathbb{Q}) = 0$ aber $f \ne 0$.*

Satz 2.45. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $\int |f| \, \mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow \{x : \; f(x) \ne 0\}$ ist μ-Nullmenge.

(2) Ist f integrierbar, dann ist $\{x : \; f(x) = \pm\infty\}$ eine μ-Nullmenge.

(3) Sei $\{x : \; f(x) \ne g(x)\}$ eine μ-Nullmenge. Dann ist f integrierbar genau dann, wenn g integrierbar ist. In diesem Falle gilt $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$.

Beweis. (1) Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $A_k := \{\frac{1}{k} \le |f| \le k\}$. Dann ist $\chi_{A_k}|f| \le |f|$, und es gilt $\chi_{A_k}|f| \nearrow |f|$. Aus Satz 2.37 bekommen wir $\int \chi_{A_k}|f| \, \mathrm{d}\mu \nearrow \int |f| \, \mathrm{d}\mu$. Weiter ist $\frac{1}{k}\chi_{A_k} \le \chi_{A_k}|f| \le k\chi_{A_k}$ woraus wiederum mit Satz 2.37

$$\frac{1}{k}\mu(A_k) \le \int \chi_{A_k}|f| \, \mathrm{d}\mu \le k\mu(A_k)$$

folgt. Ist $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ dann ist $\int \chi_{A_k}|f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ für alle k, also auch $\mu(A_k) = 0$ für alle k. Dies impliziert $\mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$. Ist $\int |f| \,\mathrm{d}\mu > 0$, dann ist $\int \chi_{A_k}|f| \,\mathrm{d}\mu > 0$ für ein k, und damit auch $\mu(A_k) > 0$.

(2) Setze $A := \{|f| = +\infty\}$. Dann ist $\infty \cdot \mu(A) \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, also $\mu(A) = 0$.

(3) Sei $N := \{f \neq g\}$. Wegen (1) haben wir

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int (\chi_N + \chi_{N^c})|f| \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|f| \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|g| \,\mathrm{d}\mu = \int |g| \,\mathrm{d}\mu.$$

Damit ist f integrierbar genau dann, wenn g integrierbar ist. $\square$

Definition 2.46. *Sei $P : X \to \{wahr, falsch\}$ eine Abbildung (ein einstelliges Prädikat auf X im Sinne der Logik). Dann gilt P μ-fast überall (oder $P(x)$ gilt für μ-fast alle $x \in X$) genau dann, wenn es eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gibt, so dass $P(x)$ für alle $x \in N^c$ gilt.*

Damit lassen sich die Aussagen von Satz 2.45 wie folgt ausdrücken:

(1) $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-fast überall.

(2) Ist f integrierbar, dann ist $f \notin \{\pm\infty\}$ μ-fast überall.

(3) Ist $f = g$ fast überall, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Lemma 2.47. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Seien $f, g : X \to \bar{R}$ gegeben, so dass f messbar und $f = g$ fast überall ist. Dann ist g messbar.*

Beweis. Sei N eine μ-Nullmenge, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in N^c$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$g^{-1}((-\infty, \alpha]) = \left(N^c \cap f^{-1}((-\infty, \alpha])\right) \cup \left(N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])\right).$$

Da N eine Nullmenge ist, und der Maßraum vollständig ist, ist $N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])$ als Teilmenge einer Nullmenge messbar. Und g ist messbar. $\square$

Definition 2.48. *Es sei $A \in \mathcal{A}$, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist das Integral über A definiert als*

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int \chi_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Es reicht, wenn $\chi_A f$ messbar ist.

Aufgabe 2.49. *Es sei $f \in X \to \bar{\mathbb{R}}^+$ messbar. Dann ist die Abbildung ν definiert durch*

$$\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

ein positives Maß auf $\mathcal{A}$. Die Funktion f heißt Dichtefunktion von ν.

Definition 2.50. *Sei $f : X \to \mathbb{C}$ messbar. Dann heißt f integrierbar, falls* $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *integrierbar sind, und wir definieren*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu + i \int \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Bei der Integration komplexwertiger Funktionen entstehen keine neuen Effekte: Die Abbildung $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu$ ist $\mathbb{C}$-linear für komplexwertige Funktionen. Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist. Die Menge aller solcher integrierbarer Funktionen ist wieder ein Vektorraum.

2.4 Konvergenzsätze

Es sei (f_n) ein Folge messbarer Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Wir wollen nun untersuchen, wann gilt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Dies ist eine nicht-triviale Frage, denn das Integral haben wir über einen Grenzwert definiert.

Beispiel 2.51. *Im Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda^1)$ definieren wir die folgenden Funktionenfolgen*

- $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$,
- $g_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x)$,
- $h_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x)$.

Dann konvergieren (f_n), (g_n) und (h_n) punktweise gegen Null, aber die Integrale nicht: $\int f_n \,\mathrm{d}\lambda^1 = \int g_n \,\mathrm{d}\lambda^1 = \int h_n \,\mathrm{d}\lambda^1 = 1$. Hier kann man Grenzwertbildung und Integral nicht vertauschen.

Satz 2.52 (Monotone Konvergenz)**.** *Seien (f_n) integrierbare Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ mit $f_n \nearrow f$ punktweise. Dann gilt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$. Existiert ein $M > 0$, so dass $\int f_n \,\mathrm{d}\mu < M$ für alle n gilt, dann ist f integrierbar.*

Beweis. Definiere $g_n := f_n - f_1 \geq 0$, $g = f - f_1 \geq 0$. Dann gilt $g_n \nearrow g$, $\int g_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int g \,\mathrm{d}\mu$ (Satz 2.37). Da f_1 integrierbar ist, folgt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$. Weiter folgt

$$0 \leq \int g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq M - \int f_1 \,\mathrm{d}\mu,$$

also ist g integrierbar und damit auch f. □

Beispiel 2.53. *Die Funktionenfolgen* $f_n = \chi_{[0,n]}$ *und* $g_n = -\chi_{[n,+\infty)}$ *im Maßraum* $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda^1)$ *zeigen, dass monotone Konvergenz alleine nicht reicht für die Aussagen des Satzes.*

Satz 2.54 (Lemma von Fatou)**.** *Es sei* (f_n) *eine Folge messbarer, nicht negativer Funktionen. Dann gilt*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Definiere $g_n(x) := \inf_{k\ge n} f_n(x)$. Dann die Funktionen g_n nichtnegative und messbar. Weiter gilt $g_n \le f_n$ und $g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$. Also bekommen wir aus Satz 2.37

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Beispiel 2.55. *Gleichheit gilt in Satz 2.54 im Allgemeinen nicht, siehe* $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}$ *aus Beispiel 2.51. Auf die Nichtnegativität kann nicht verzichtet werden: für* $f_n(x) = -n\chi_{(0,1/n)}$ *gilt die Behauptung nicht.*

Satz 2.56 (Dominierte Konvergenz)**.** *Es sei* (f_n) *eine Folge messbarer Funktionen,* f *messbar,* g *integrierbar. Gilt* $f_n(x) \to f(x)$ *und* $|f_n(x)| \le g(x)$ *für alle* n *und* μ*-fast alle* x*, dann folgt* $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$ *und* $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. (1) Wir nehmen zuerst an, dass $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \le g(x)$ für alle n und alle x gilt. Daraus folgt $|f(x)| \le g(x)$ für alle x. Damit sind die Funktionen f und f_n integrierbar. Wir setzen $g_n := 2g - |f_n - f| \ge 0$. Nach Satz 2.54 ist

$$\begin{aligned} 2\int g\,\mathrm{d}\mu &= \int (\liminf_{n\to\infty} g_n(x))\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int g_n\,\mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int 2g - |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \\ &= 2\int g\,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \\ &\le 2\int g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Damit ist $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$, woraus mit Satz 2.41 die Behauptung folgt.

(2) Sei nun $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \le g(x)$ für alle n und μ-fast alle x. Dann existiert eine μ-Nullmenge N, so dass $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \le g(x)$

für alle n und alle $x \in N^c$. Die Funktionen $\chi_{N^c} f_n$, $\chi_{N^c} f$ erfüllen dann die Voraussetzungen von Beweisteil (1). Es folgt also $\lim_{n\to\infty} \int \chi_{N^c}|f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Da $\chi_{N^c}|f_n - f|$ und $|f_n - f|$ sich nur auf der Nullmenge N unterscheiden, gilt $\int \chi_{N^c}|f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0$. □

Beispiel 2.57. *Auf die Existenz der integrierbaren gemeinsamen oberen Schranke kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden, wie Beispiel 2.51 zeigt.*

Satz 2.58 (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(\mu)$)**.** *Es sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen, die eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ ist, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein N, so dass $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon$ für alle $n, m > N$.*

Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. Weiter existiert ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und eine Teilfolge, so dass $f_{n_k}(x) \to f(x)$ und $|f_{n_k}(x)| \le g(x)$ für alle k und μ-fast alle x.

Beweis. (1) Wir nehmen zuerst an, dass $\sum_{n=1}^\infty \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$. Definiere die messbaren Funktionen

$$g_m := |f_1| + \sum_{n=1}^m |f_{n+1} - f_n|, \quad g := |f_1| + \sum_{n=1}^\infty |f_{n+1} - f_n|.$$

Dann gilt $g_m \nearrow g$. Weiter ist $\int g_m \,\mathrm{d}\mu = \|f_1\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \sum_{n=1}^m \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$, woraus mit der monotonen Konvergenz $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$ folgt. Dann ist (Satz 2.45) $g < +\infty$ fast überall, und es folgt $\sum_{n=1}^\infty |f_{n+1} - f_n| < +\infty$ fast überall. Damit ist $(f_n(x))$ für fast alle x eine Cauchyfolge, also konvergent. Wir definieren $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ falls der Grenzwert existiert, sonst setzen wir $f(x) := 0$. Da $|f_n(x)| \le g(x)$ für alle x, folgt $|f| \le g$ fast überall. Mit dominierter Konvergenz Satz 2.56 bekommen wir $\int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

(2) Sei nun (f_n) eine Cauchyfolge. Dann finden wir eine Teilfolge (f_{n_k}) mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < 2^{-k}$. Wegen Teil (1) existiert f mit $\|f_{n_k} - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. Dann hat die Cauchyfolge (f_n) eine konvergente Teilfolge, und ist also selbst konvergent. Außerdem ist (f_{n_k}) punktweise fast überall konvergent und besitzt eine gemeinsame, intergrierbare obere Schranke.

(2') Beweis ohne das Axiom der abhängigen Auswahl. Sei N_k die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$, für die $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < 2^{-k}$ für alle $n, m \ge N_k$. Dann ist (N_k) monoton wachsend, aber unter Umständen nicht streng monoton wachsend. Definiere $\tilde f_k := f_{N_k}$. Wegen Teil (1) folgt $\|\tilde f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle k so, dass $\|\tilde f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon/2$ und $2^{-k} < \epsilon/2$. Dann ist $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le \|f_n - \tilde f_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|\tilde f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon$ für $n \ge N_k$. □

Beispiel 2.59. *Man bekommt im Allgemeinen die punktweise Konvergenz nur für eine Teilfolge. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda^1)$. Definiere $f_n = 2^{j/2}\chi_{[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]}$ für $n = 2^j + k$, $0 \le k < 2^j$. Dann ist $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1(\lambda^1)} = 2^{-j/2} \to 0$.*

Aber die Folge f_n ist nicht punktweise konvergent, und es existiert auch keine integrierbare gemeinsame obere Schranke.

2.5 Vergleich mit Riemann-Integral

Sei $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Eine Abbildung $\phi : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ existieren mit $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b$ und $\phi|_{(a_i, a_{i+1})} = \phi_i$. Das Riemann-Integral von ϕ ist definiert durch

$$R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^n \phi_i(a_{i+1} - a_i).$$

Der Vektorraum aller solcher Treppenfunktionen sei $\mathcal{T}(I)$.

Definition 2.60. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Riemann integrierbar, wenn gilt*

$$\begin{aligned} R := \sup &\left\{ R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x : \ \phi \in \mathcal{T}(I), \ \phi \le f \right\} \\ &= \inf \left\{ R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x : \ \phi \in \mathcal{T}(I), \ f \le \phi \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Fall setzen wir

$$R\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := R.$$

Wir arbeiten hier im Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda^1)$.

Satz 2.61. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Dann ist f λ^1-integrierbar und es gilt*

$$R\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}\lambda^1.$$

Beweis. Sei ϕ eine Treppenfunktion. Dann ist ϕ sowohl $\mathcal{B}^1 - \mathcal{B}^1$-messbar, und damit auch $\mathcal{L}(1) - \mathcal{B}^1$-messbar. Außerdem ist $R\text{–}\int_a^b \phi\,\mathrm{d}x = \int_I \phi\,\mathrm{d}\lambda^1$.

Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f bekommen wir für jedes n die Existenz von Treppenfunktionen ϕ_n und ψ_n mit $\phi_n \le f \le \psi_n$ und $R\text{–}\int_a^b (\psi_n - \phi_n)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}$. Daraus folgt $\|\psi_n - \phi_n\|_{L^1(\lambda^1)} = R\text{–}\int_a^b (\psi_n - \phi_n)\,\mathrm{d}x \to 0$.

Wegen Satz 2.58 gibt es eine Teilfolgen, so dass $\psi_{n_k} - \phi_{n_k} \to 0$ fast überall. Da $\phi_n \le f \le \psi_n$ folgt daraus $\lim_{k\to\infty} \psi_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \phi_{n_k} = f(x)$ für fast alle $x \in [a, b]$. Da der Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda^1)$ vollständig ist, folgt daraus die Messbarkeit von f. Aus der Integrierbarkeit von ϕ_n und ψ_n folgt die Integrierbarkeit von f. Grenzübergang in

$$R\text{–}\int_a^b \phi_n \, \mathrm{d}x = \int_I \phi_n \, \mathrm{d}\lambda^1 \le \int_I f \, \mathrm{d}\lambda^1 \le \int_I \psi_n \, \mathrm{d}\lambda^1 = R\text{–}\int_a^b \psi_n \, \mathrm{d}x$$

liefert die Gleichheit von Riemann- und Lebesgue-Integral. □

Bemerkung 2.62. *Ein ähnliches Resultat gilt auch für den Borel-Lebesgue-Maßraum* $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, \lambda^1)$*: Nach Änderung auf einer* λ^1*-Nullmenge ist die Riemann-integrierbare Funktion* f *dann auch messbar und integrierbar, und die Integrale stimmen überein.*

Beispiel 2.63. *Die Funktion* $\chi_{\mathbb{Q}}$ *ist* λ^1*-integrierbar aber nicht Riemann integrierbar.*

Das uneigentliche Riemann-Integral $R\text{–}\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ *existiert und ist endlich, während die Funktion* f *definiert durch* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *nicht auf dem Intervall* $[1, +\infty)$ λ^1*-integrierbar ist, und das Integral* $\int_{[1,\infty)} f \, \mathrm{d}\lambda^1$ *ist nicht definiert.*