Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 5, 2024)

Problem 1. Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = c - 1/2$ und $\mathbb{P}(B \setminus A) = k - 1/2$ mit Konstanten c und k gelten.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

(c) Welche Bedingungen müssen c und k erfüllen?

(d) Für welche Werte von c und k sind die Ereignisse A und B (stochastisch) unabhängig?

Proof. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \setminus B) &= \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= c - 1/2
\end{aligned}$$

Daraus bekommt man $\mathbb{P}(A) = c$ und analog $\mathbb{P}(B) = k$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \\
&= \frac{3}{2} - c - k
\end{aligned}$$

(c) $1 \geq c, k \geq 1/2$.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(d) Es muss gelten

$$ck = \frac{1}{2}.$$

Alle Paare (c, k), die diese Gleichung und $1 \geq c, k \geq 1/2$ erfüllen, machen A und B auch stochastisch unabhängig. □

Problem 2. In der Situation von Beispiel 2.24 habe sich eine Person r-mal einem ELISA-Test unterzogen, $r \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die einzelnen Testergebnisse – unabhängig davon, ob eine Infektion vorliegt oder nicht – als unabhängige Ereignisse angesehen werden können.

Zeigen Sie: Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Person infiziert ist, wenn alle r Tests positiv ausfallen, ist in Verallgemeinerung von Beispiel 2.24, mit $q = \mathbb{P}(K)$ als Prävalenz, gegeben durch

$$\frac{qp_{\mathrm{se}}^r}{qp_{\mathrm{se}}^r + (1-q)(1-p_{\mathrm{sp}})^r}.$$

Berechnen Sie diese bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Werte aus Beispiel 2.24 und für $r = 2, 3, 5$.

Proof. Wir nehmen als Wahrscheinlichkeitsraum $\{0,1\}^{r+1} = \{(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r) | \omega_i \in \{0,1\}\}$, wobei

$$\omega_0 = \begin{cases} 0 & \text{falls Patient gesund} \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \omega_i = \begin{cases} 0 & \text{falls Test } i \text{ negativ,} \\ 1 & \text{falls Test } i \text{ positiv.} \end{cases}$$

Danach definieren wir 2 Ereignisse

$$K = \{1\} \times \{0,1\}^r, \qquad P = \{0,1\} \times \{1\}^r.$$

Das Ereignis P kann man umschreiben mithilfe von Ereignisse $P_i = \{0,1\} \times \{0,1\}^{i-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{r-i}$, also die Wahrscheinlichkeit, dass das Test i positiv ist. Es gilt

$$P = \bigcap_{i=1}^{n} P_i.$$

Weil die Tests als unabhängig angenommen werden, ist $\mathbb{P}(P|K) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(P_i|K) = p_{\mathrm{se}}^r$. Ähnlich ist $\mathbb{P}(P|K^c) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(P_i|K^c) = p_{\mathrm{sp}}^r$ und $\mathbb{P}(K) = q$.

Daraus folgt analog wie Skript

$$\mathbb{P}(P) = p_{\mathrm{se}}^r \cdot q + (1-p_{\mathrm{sp}})^r(1-q)$$

und nach Bayes

$$\mathbb{P}(K|P) = \frac{\mathbb{P}(P|K) \cdot \mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{q p_{\mathrm{se}}^r}{q p_{\mathrm{se}}^r + (1-q)(1-p_{\mathrm{se}})^r}.$$

Nun setzen wir $p_{\mathrm{se}} = p_{\mathrm{sp}} = 0.998$ und $q = 0.001$ ein und erhalten für die Wahrscheinlichkeiten

r	2	3	4	5
$\mathbb{P}(K\|P)$	0.996004	0.99999195992	0.999999983887	0.999999999968

$\square$