Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 12

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 22, 2024)

Problem 1. Betrachten Sie die komplexen 3×3-Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -i \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der Matrzen sind positiv, welche sogar positiv definit?

Proof. Wir berechnen das Spektrum von A_1. Es gilt für das charakteristiches Polynom

$$P(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda.$$

Die Nullstellen bzw. Eigenwerte sind $\lambda = 0$ und $\lambda = 6$. Dann ist A_1 positiv. Weil $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, ist $\det(A_1) = 0$ und A_1 ist nicht invertierbar.

A_2 ist nicht positiv, weil $A_2 \neq A_2^*$.

Wir berechnen noch einmal das Spektrum von A_3. Es gilt für das charakteristische Polynom.

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -x^3 + 8x^2 - 13x + 2.$$

Die Nullstellen sind $x = 2$ und $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$, also A_3 ist positiv. Da 0 kein Nullstelle ist, ist $\det(A_3) \neq 0$ und A_3 ist invertierbar, also A ist positiv definit. □

Problem 2. Betrachten Sie den unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ selbstadjungiert und $A = U^{-1}DU$, wobei U eine invertierbare Matrix und D eine Diagonalmatrix sind. Sei $P_i = U^{-1}M_iU$ mit Diagonalmatrix M_i, sodass

$$(M_i)_{kk} = \begin{cases} 1 & D_{kk} = \lambda_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gilt. Zeigen Sie, dass P_i eine Orthogonalprojektion auf den Eigenraum von λ_i ist.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Bestimmen Sie den Positivteil $(A_i)_+$, den Negativteil $(A_i)_-$ und den Absolutbetrag $|A_i|$ für $i = 1, 2$ der folgenden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Problem 3. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Eine obere Dreiecksmatrix ist nie orthogonal.

(b) Sei V ein unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus A ist genau dann normal, wenn $\|Av\| = \|A^*v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

Proof. (a) Falsch. Die Identität $\operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1)$ ist eine obere Dreiecksmatrix und jedoch orthogonal.

□

Problem 4. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei weiter $\mathrm{End}_{sa}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ die Teilmenge der selbstadjungierten Endomorphismen auf V. Für $A, B \in \mathrm{End}_{sa}(V)$ definieren wir $A \leq B$, falls $B - A$ ein positiver Endomorphismus ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_{sa}(V)$ ein reeller Unterraum von $\mathrm{End}(V)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $\lambda, \mu \geq 0$ und $A, B, C, D \in \mathrm{End}_{sa}(V)$ mit $A \leq B$ und $C \leq D$ folgt, dass

$$\lambda A + \mu C \leq \lambda B + \mu D$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass füR alle $A \leq B$

$$CAC^* \leq CBC^*$$

für alle $C \in \mathrm{End}(V)$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass für $A \geq 0$ und $\lambda > 0$ der Endomorphismus $A + \lambda$ invertierbar ist.

(e) Betrachten Sie $V = \mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $0 \leq A \leq B$ gilt. Zeigen Sie, dass $A^2 \leq B^2$ *nicht* gilt.