

Wintersemester 2023/24

11. Übung zur Vertiefung Analysis

10. Januar 2024

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 17. Januar 2024* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

Aufgabe 11.1 (Hyperbelfunktion, 9 Punkte) Sei $d \in \{1, 2, 3\}$, $R > 0$, $1 \leq p < \infty$ und $\alpha > 0$. Definiere

$$B_R(d; 0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < R\}, \quad f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{\|x\|^\alpha}, & x \neq 0. \end{cases}$$

- (a) Sei zunächst $d = 1$. Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{B_R(1;0)}f$ in $L^p(\lambda_1)$? Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{\mathbb{R} \setminus B_R(1;0)}f$ in $L^p(\lambda_1)$?
- (b) Welche Bedingungen müssen in den Fällen $d = 2, 3$ für α, p gelten, damit $\chi_{B_R(d;0)}f \in L^p(\lambda_d)$ ist?
- (c) Sei $1 < p < r < q < \infty$. Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an mit $g \in L^r(\lambda_1)$, $g \notin L^p(\lambda_1)$, $g \notin L^q(\lambda_1)$.
- (d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ an, sodass $g \in L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in [1, \infty)$ gilt, aber $g \notin L^\infty(\lambda_1)$.

Aufgabe 11.2 (L^p -Räume, 6 Punkte) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.

- (a) Zeigen Sie, dass $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$ gilt und außerdem

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}^\theta \|f\|_{L^q(\mu)}^{1-\theta}$$

für alle $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ und $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

- (b) Sei der Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) nun endlich. Zeigen Sie, dass dann $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ und

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mu)}$$

für alle $f \in L^q(\mu)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie den Raum $L^r(\mu)$ für $r := \frac{q}{p}$.

Aufgabe 11.3 (Kugelsegment, 5 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := |xyz|$ und

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\int_A f \, d\lambda_3$.