Universität Würzburg
Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Giorgio Sangiovanni
Linus Aliani, Alexander Baum,
Max Fischer, Jonathan Karl, Niklas Witt

5. Übung Statistische Mechanik und Thermodynamik

Bitte laden Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 21.11.2024 um 16:00 Uhr auf WueCampus hoch.
Die Blätter dürfen Sie dabei in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 *(Ultra-)relativistisches ideales Gas* **4 P.**

Betrachten Sie ein klassisches relativistisches ideales Gas mit einer kinetischen Energie

$$T(\vec{p_1}, ..., \vec{p_N}) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{m^2c^4 + (c\vec{p_i})^2}\,, \tag{1}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Jedes der N Teilchen habe die Masse m und die Teilchen befinden sich in einem Volumen V. Betrachten Sie der Einfachheit halber den ultrarelativistischen Grenzfall $m = 0$.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, V, N)$ in drei Dimensionen. *2 P.*

b) Berechnen Sie aus der kanonischen Zustandssumme die innere Energie $E = \langle \mathcal{H} \rangle$ und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der inneren Energie des nicht-relativischem idealen Gases. *1 P.*

c) Berechnen Sie mit Hilfe der kanonischen Zustandssumme den Druck p und leiten Sie daraus die Zustandsgleichung her. *1 P.*

Aufgabe 2 *Energieschwankung im kanonischen Ensemble* **3 P.**

a) Zeigen Sie, dass im kanonischen Ensemble die Schwankung ΔE der Energie durch *2 P.*

$$(\Delta E)^2 \,=\, k_\mathrm{B}\, T^2\, \frac{\partial E(T,\, \alpha)}{\partial T} \tag{2}$$

gegeben ist. Hierbei gilt $E(T,\, \alpha) \,=\, \big\langle \mathcal{H} \big\rangle$ und α seien zwei äußere Parameter (zum Beispiel V und N). Die Varianz hat die folgende Form:

$$(\Delta x)^2 \,=\, \big\langle x^2 \big\rangle \,-\, \big\langle x \big\rangle^2 \tag{3}$$

b) Zeigen Sie mit Gleichung (2), dass die Wärmekapazität $C_V \,=\, \frac{\partial E(T,V,N)}{\partial T}$ positiv ist. *1 P.*

Bitte wenden!

Aufgabe 3 *Das Tonks Gas: harte Kugeln in 1D* **8 P.**

Betrachten Sie ein Gas mit N harten Kugeln (Tonks Gas) in einer Dimension. Die harten Kugeln haben einen Durchmesser von l und wechselwirken ansonsten nicht miteinander. Die entsprechende Hamiltonfunktion lautet:

$$\mathcal{H}(x,\, p) \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{N} \frac{p_i^2}{2\,m} \;+\; \sum_{i\,=\,2}^{N} \mathcal{V}_{\text{hart}}(|x_i \;-\; x_{i\,-\,1}|)\,, \tag{4}$$

wobei $\mathcal{V}_{\text{hart}}(|x|) \;=\; \infty$ für $|x| \leq l$ und $\mathcal{V}_{\text{hart}}(|x|) \;=\; 0$ für $|x| > l$ das Potential der harten Kugeln beschreibt.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T,\, V,\, N)$ des Tonks Gases in einer Dimension (mit $V \;\equiv\; L$). *4 P.*
   Hinweis: Machen Sie sich zur Berechnung des Volumenintegrals eine Skizze einer konkreten Anordnung von Kugeln mit $x_{i\,+\,1} > x_i$. Welches Volumen steht für die erste Kugel für gegebene Positionen $x_2, \ldots,\, x_N$ der restlichen Kugeln zur Verfügung? Welche Integrationsgrenzen ergeben sich für x_2, usw.?
   Das Endergebnis für die Zustandssumme lautet:

$$Z(T,\, V,\, N) \;=\; \frac{[V \;-\; (N \;-\; 1)\; l]^N}{N!\, \lambda_T^N}\,, \tag{5}$$

   mit $\lambda_T \;=\; \sqrt{\frac{h^2}{2\,\pi\; m\, k_{\text{B}}\, T}}$.

b) Berechnen Sie die Helmholtz'sche freie Energie $F(T,\, V,\, N)$ und die Entropie $S(T,\, V,\, N)$ des Systems. Leiten Sie auch die innere Energie E und aus dem Druck p die Zustandsgleichung her. *4 P.*