

Vertiefung Analysis (Analysis 3)

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 18, 2023)

I. 17/10/23

Maß- und Integrationstheorie

A. Bücher

1. Escher Analysis III
2. Forstes Analysis 3
3. Elstratt Maß- und Integrationstheorie

Kann man $A \subseteq \mathbb{R}^3$ Volumen zuweisen?

a. Inhaltsproblem Man sollte eine Abbildung finden

$$m : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty].$$

Eigenschaften von m :

1.

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \quad \text{für} \quad A \cap B = \emptyset.$$

2.

$$m(A) = m(\beta(A)),$$

wobei $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Bewegung ist.

3.

$$m([0, 1]^n) = 1,$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

4. Es hat für $n \geq 3$ keine Lösung.
5. Nicht trivial wegen des Banach-Tarski-Paradox

Von (2) und (3) erreichen wir die Folge

Theorem 1.

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j),$$

für paarweise disjunkt, also

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Proof. Es gibt keine Lösung für alle n . □

Definition 2. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt σ -Algebra, falls es die folgende Eigenschaften hat:

1. $x \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3. $(A_j), A_j \in \mathcal{A} \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$

Theorem 3. Sei \mathcal{A} ein σ -Algebra über X . Dann

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ und $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$
3. $(A_j) A_j \in \mathcal{A} \implies \bigcap_j A_j \in \mathcal{A}$

Proof. Beachten:

$$A^c = \emptyset \in \mathcal{A}.$$

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c.$$

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2)^c.$$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \right)^c.$$

□

Example 4. Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Dann ist

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3\}\}$$

ein σ -Algebra.

Theorem 5. Sei \mathcal{A} und \mathcal{B} σ -Algebren über X und Y . Dann sind

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{B}) &= \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\} \\ f_*(\mathcal{A}) &= \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

auch σ -Algebren

Proof. Wir beweisen es nur für f_* .

1. $Y \in f_*(\mathcal{A})$, weil $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$
2. Sei $B \in f_*(\mathcal{A})$. Dann gilt

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}.$$

3. Sei $(B_j), B_j \in f_*(\mathcal{A}) \forall j$. Dann ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j) \in \mathcal{A}.$$

□

Lemma 6. Sei I nichtleer, und \mathcal{A}_i σ -Algebren für jeder $i \in I$. Dann ist

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

ein σ -Algebra

Definition 7. Sei $X \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann wird es definiert

$$\mathcal{A}_\sigma(S) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist ein } \sigma\text{-Algebra mit } S \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Corollary 8. Ist \mathcal{A} σ -Algebra mit $S \subseteq \mathcal{A}$, dann

$$\mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}.$$

Theorem 9. Die Abbildung $S \rightarrow A_\sigma(S)$ hat folgende Eigenschaften:

1. $S \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S)$
2. $S \subseteq T \subseteq \mathcal{P}(X) \implies \mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(T)$
3. $A_\sigma(A_\sigma(S)) = A_\sigma(S)$

Example 10. Sei $S = \{\{x\}, x \in X\}$. Dann ist

$$\mathcal{A}_\sigma(S) = \{A \subset X, A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar (countable)}\}.$$

Proof. 1. $x \in A$ weil $A^c = \emptyset$ ist abzählbar

2. Es ist klar, dass $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{C}$.

3. Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$. Dann, entweder

(a) alle A_j abzählbar sind und daher

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

abzählbar ist, oder mindestens eine A_j^c abzählbar ist, wobei

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c$$

abzählbar ist.

4. Zu zeigen:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S).$$

Sei $A \in \mathcal{A}$. Angenommen A ist abzählbar. Dann

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{a_j\} \in A_\sigma(S).$$

□

Definition 11. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann ist τ die Menge aller offenen Mengen. Wir definieren

$$\mathcal{B}(X) := A_\sigma(\tau)$$

und nennt das als die Borel- σ -Algebra.

b. *Frage* Warum muss das ein metrischer Raum sein?

Theorem 12. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei \mathcal{C} die Menge der abgeschlossenen Mengen und \mathcal{K} die Menge der kompakten Mengen. Dann ist

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C})$$

Es existiert auch K_j kompakt, wofür gilt

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K})$$

wobei $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$

Proof. 1. \mathcal{A} offen $\iff A^c$ abgeschlossen

2. Kompakte Menge sind abgeschlossen $\implies A_\sigma(\mathcal{K}) \subseteq A_\sigma(\mathcal{C})$.

Sei \mathcal{C} abgeschlossen. Dann gilt

$$C = C \cap X = C \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\underbrace{C \cap K_j}_{\text{kompakt}} \right) \in A_\sigma(\mathcal{K}).$$

Definition 13. Sei $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir

$$a \leq b \text{ iff } a_i \leq b_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

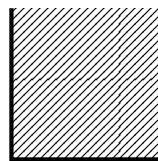
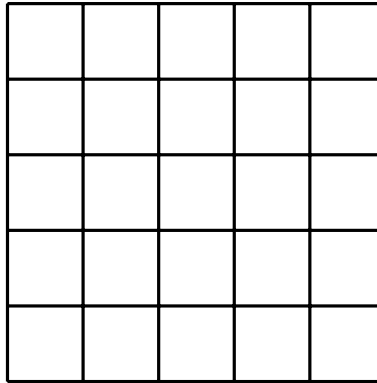
□

II. 18/10/23

Theorem 14. Jede offene Menge des \mathbb{R}^n ist eine disjunkte abzählbare Vereinigung von halboffenen Würfeln mit rationalen Eckpunkten.

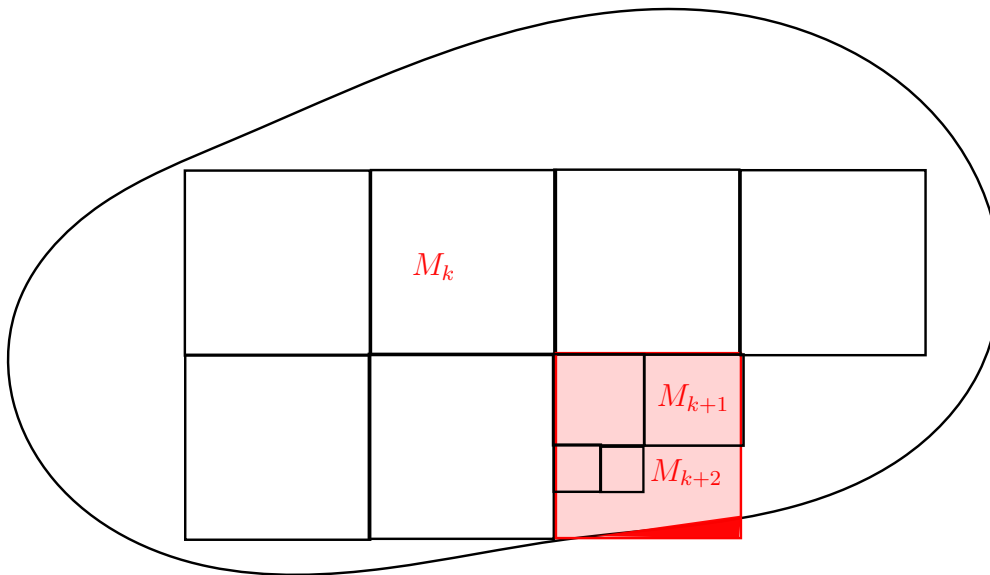
Proof. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$M_k := \left\{ \left(\prod_{i=1}^n \left[\frac{x_i}{2^k}, \frac{x_i + 1}{2^k} \right) \right), x \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$



schnitt = \emptyset

Dann



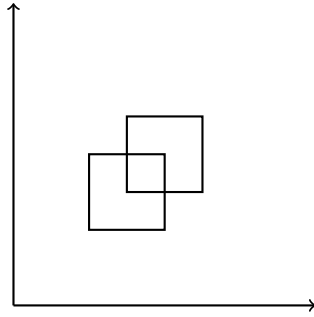
□

Remark 15. (Produkt σ -Algebra) Sei (X_1, \mathcal{A}_1) und (X_2, \mathcal{A}_2) σ -Algebren. Wir bildet man ein σ -Algebra auf $X_1 \times X_2$?

Leider ist

$$\{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

kein σ -Algebra.



Leider ist die Vereinigung kein Produkt-Menge