

## 8. Übung zur Klassischen Mechanik

4. Dezember 2023

### Noether / Zentralkraft- / Zweizentrenproblem

#### 8.1 Noether-Theorem 1

Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse  $m$  im homogenen Schwerfeld mit der Lagrangefunktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3 \quad (1)$$

und wenden Sie das Noether-Theorem für die infinitesimalen Translationen in Richtung der Koordinatenachsen

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + s\delta_i \vec{x} \quad (2)$$

für  $i = 1, 2, 3$  mit

$$\delta_i \vec{x} = \vec{e}_i \quad (3)$$

und den Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  an.

1. Bestimmen Sie die entsprechenden infinitesimalen Transformationen  $\delta_i L$  der Lagrangefunktion für  $i = 1, 2, 3$ .
2. Können Sie die  $\delta_i L$ , die nicht verschwinden, als totale Zeitableitung schreiben

$$\delta_i L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) = \frac{d}{dt} \Lambda_i(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) ? \quad (4)$$

Wenn ja, geben Sie  $\Lambda_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  an.

3. Falls die Voraussetzungen des Noether-Theorems erfüllt sind, geben Sie die resultierenden Erhaltungsgrößen  $I_i$  an.
4. Interpretieren Sie die Erhaltungsgrößen physikalisch. Entsprechen die Ergebnisse Ihren Erwartungen?

#### 8.2 Noether-Theorem 2

Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse  $m$  im harmonischen Potential mit der Lagrangefunktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - m (\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) . \quad (5)$$

1. Warum können Sie das Noether-Theorem *nicht* für die infinitesimalen Translationen in Richtung der Koordinatenachsen

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + s\delta_i\vec{x} \quad (6)$$

für  $i = 1, 2$  mit

$$\delta_i\vec{x} = \vec{e}_i \quad (7)$$

anwenden?

2. Finden Sie alle Erhaltungsgrößen, die im Spezialfall  $\omega_1 = \omega_2$  aus dem Noether-Theorem folgen. *Hinweis: es sind insgesamt vier unabhängige.*
3. Welche dieser Erhaltungsgrößen sind auch im Fall  $\omega_1 \neq \omega_2$  erhalten? *Hinweis: es sind zwei unabhängige.*

### 8.3 Periheldrehung

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass in Zentralkraftproblemen mit sphärischem Potential  $V(\vec{x}) \equiv V(r)$  die Erhaltung des Drehimpulses  $\vec{L}$  ( $|\vec{L}| \equiv p_\phi$ ) und der Gesamtenergie  $E$  ausgenutzt werden kann, um die Trajektorie eines Massenpunktes analytisch aus dem Integral

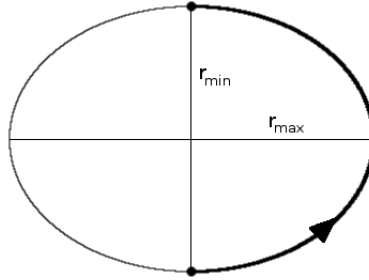
$$\int d\phi = \int dr \frac{p_\phi/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r) - p_\phi^2/2mr^2)}} \quad (8)$$

und anschließender Invertierung der Funktion  $\phi(r)$  zu erhalten.

1. Wie Sie bereits wissen beschreibt  $r(\phi)$  im Falle des ungestörten harmonischen Oszillators

$$V(r) = \frac{m\omega^2}{2}r^2 \quad (9)$$

Ellipsen mit dem Koordinatenursprung im Zentrum, d. h. die Periodizität des kleinsten Abstands  $r_{\min}$  vom Ursprung (*Perihel*) ist in diesem Fall einfach  $\pi$  und  $r_{\min}$  bzw.  $r_{\max}$  (*Aphel*) sind die Halbachsen der Ellipse. Zeigen Sie, dass sich damit aus (8) eine Bewegung des Massenpunkts vom Perihel zum nächsten Perihel



in der Form

$$\Delta\phi = -2\sqrt{2m} \frac{d}{dp_\phi} \left( \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{E - V(r) - p_\phi^2/(2mr^2)} \right) \quad (10)$$

schreiben lässt, wobei  $\Delta\phi = \pi$ . NB:  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$  hängen von der Anfangsbedingung für die Erhaltungsgröße  $p_\phi$  ab. Überzeugen Sie sich davon, daß diese Abhängigkeit keinen Beitrag zur Ableitung ergibt!

2. Betrachten Sie nun eine kleine Störung  $\delta V$ , d. h.

$$V(r) \rightarrow V(r) + \delta V(r) \quad (11)$$

und berechnen Sie die *Periheldrehung*  $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$ , indem Sie (10) in  $\delta V$  um  $\delta V = 0$  Taylorentwickeln und nur die erste Ordnung berücksichtigen.

*Hinweis: Als Ergebnis sollten Sie*

$$\delta\phi = 2m \frac{d}{dp_\phi} \left( \frac{1}{p_\phi} \int_0^{\pi/2} d\varphi r(\varphi)^2 \delta V(r(\varphi)) \right) \quad (12)$$

*erhalten, aber der Weg ist das Ziel ...*

3. Werten Sie (12) für das Störpotential  $\delta V = \lambda/r^2$  aus.

## 8.4 Restringiertes Dreikörperproblem und Lagrangepunkte

Betrachten Sie das *restringierte Dreikörperproblem*, d. h. die Bewegung einer leichten Testmasse  $m$  ohne gravitative Rückwirkung im Schwerfeld zweier schwerer umeinander rotierender Massenpunkte  $M_1$  und  $M_2$ .

1. Berechnen Sie die kinetische Energie eines Massenpunkts in einem mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die 3-Achse rotierenden Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu die Drehmatrix

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

um den Ortsvektor des Massenpunkts zu transformieren.

2. Nehmen Sie an, dass sich die beiden schweren Massen auf einer *kreisförmigen* Keplerbahn mit Abstand  $\rho$  und konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \sqrt{\kappa(M_1 + M_2)/\rho^3}$  bewegen. Verwenden Sie das Ergebnis aus der vorigen Teilaufgabe und zeigen Sie, dass in diesem Fall die Lagrange-funktion des leichten Massenpunkts durch

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2} \left( \dot{\vec{x}}^2 + \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + 2\omega (x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) \right) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{(x_1 - \rho_2)^2 + x_2^2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{(x_1 + \rho_1)^2 + x_2^2}} \quad (14)$$

mit  $\alpha_i = \kappa m M_i$  und  $\rho_i = \frac{M_i}{M_1 + M_2} \rho$  gegeben ist.

*Hinweis: Vereinfachen Sie das Problem auf zwei Dimensionen, indem Sie sich auf Bewegungen der leichten Masse in der Bahnebene der schweren Massen beschränken, und betrachten Sie ein rotierendes Bezugssystem, in dem die schweren Massen  $M_i$  ruhen.*

3. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Testmasse im rotierenden Koordinatensystem auf.
4. Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den leichten Massenpunkt im rotierenden System an.
5. Zeigen Sie, dass drei der Lösungen dieser Gleichgewichtsbedingungen auf der Geraden durch die beiden schweren Massenpunkte liegen. (Die entsprechende transzendente Gleichung ist algebraisch nicht lösbar. Benutzen Sie deshalb ein graphisches Argument.)
6. Zeigen Sie, dass die beiden weiteren Lösungen der Gleichgewichtsbedingungen mit den schweren Massenpunkten ein gleichseitiges Dreieck bilden.