

## Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan\*

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: December 1, 2023)

**Problem 1.** Im Folgenden ist  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Sind  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar, so auch  $f + g$ .
- (b) Sind  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar, so auch  $f \cdot g$ .
- (c) Sind  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so auch  $g \circ f$ .
- (d) Es sei  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, nicht-negativ und uneigentlich integrierbar. Dann konvergiert

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)} \, dx.$$

*Proof.* (a) Sei  $a < c < b$ . Wir wissen, dass  $f + g$  auf  $[a, c]$  integrierbar für alle solchen  $c$  ist und außerdem

$$\int_a^c (f + g)(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_a^c g(x) \, dx.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c (f + g)(x) \, dx &= \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c g(x) \, dx \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

also  $f + g$  ist integrierbar.

□

**Problem 2.** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Riemannintegrale auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

- (a)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx,$

---

\* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$

(c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx.$

*Proof.* (a) Wir betrachten zuerst  $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ . Weil  $e^{-x^2}$  monoton fallend ist, konvergiert das Integral genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$$

konvergiert. Es gilt  $e^{-k^2} \geq e^{-k}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$$

konvergiert, weil es eine geometrische Reihe ist.

Nachdem wir gezeigt haben, dass  $\int_{-\infty}^1 f(x) dx$  existiert, existiert auch das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ . Es gilt, für  $c \leq -1$ , dass

$$\int_c^1 f(x) dx = \int_c^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx$$

und

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^1 f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Weil  $\exp(-x^2)$  auf  $\mathbb{R}$  stetig ist, ist  $\exp(-x^2)$  auf  $[-1, 1]$  integrierbar, also das Grenzwert  $\int_{-\infty}^1 e^{-x^2} dx$  existiert genau dann, wenn  $\int_c^{-1} e^{-x^2} dx$ . Aber wir wissen, weil  $\exp(-(-x)^2) = \exp(-x^2)$ , dass

$$\int_c^{-1} e^{-x^2} dx = \int_1^c e^{-x^2} dx,$$

also

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^{-1} e^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c e^{-x^2} dx.$$

Weil das Grenzwert auf der rechten Seite existiert existiert das auf der linken Seite, also  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  existiert.

Weil  $e^{-x^2} > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , konvergiert das Integral genau dann, wenn es absolut konvergiert, also es konvergiert absolut.

(b) Es steht schon im Skript, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert. Aus

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

existiert auch  $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x}$ , daher auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Wir untersuchen es also für absolut Konvergenz. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi N} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi(j+1)} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\sin x| dx \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2}{\pi(j+1)} \end{aligned}$$

Dann nehmen wir die Limes  $N \rightarrow \infty$ . Weil die Summe divergent ist, ist das Integral auch divergent.

- (c) Wie vorher ist  $\sin((-x)^2) = \sin x$ , also wir müssen nur zeigen, dass  $\int_0^\infty \sin(x^2)$  konvergiert bzw. absolut konvergiert.

Sei  $u = x^2$ ,  $du = 2x dx = 2\sqrt{u} dx$  und  $\mathbb{R} \ni a, b, 0 < a < b$ . Es folgt:

$$\int_a^b \sin x^2 dx = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du.$$

Dann machen wir partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du &= \frac{-\cos u}{\sqrt{u}} \Big|_{a^2}^{b^2} - \int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos u}{2u^{\frac{3}{2}}} du \\ \left| \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \right| &\leq \left| \frac{-\cos u}{\sqrt{u}} \Big|_{a^2}^{b^2} \right| + \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2u^{3/2}} du \\ &\geq \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_{a^2}^{b^2} \\ &= \frac{2}{a}, \end{aligned}$$

was unabhängig von der oberen Grenze ist. Also  $\int_a^\infty x^2 \sin(x^2)$  konvergiert für alle  $a$ .

Da  $\sin(x^2)$  überall in  $\mathbb{R}$  definiert und stetig ist, ist auch

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

konvergent. Daraus folgt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) \, dx$$

konvergent ist. Wir untersuchen es dann für absolut Konvergenz. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi N} \left| \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \right| dx &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} dx \\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2\sqrt{2\pi j}} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\sin x| dx \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sqrt{j}} \end{aligned}$$

Weil die Summe divergent ist, divergiert auch das Integral. □

**Problem 3.** Beweisen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

*Proof.* Es gilt, für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \ln 2n - \ln n \\ &= \int_1^{2n} \frac{1}{x} dx - \int_1^n \frac{1}{x} dx \\ &= \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

also wir brauchen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j}.$$

Es gilt

$$\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j+1}$$

weil  $\frac{1}{x}$  auf  $(0, \infty)$  monoton fallend ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j+1} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

also wenn wir die Limes gegen  $\infty$  nehmen, konvergiert die beide Summen nach dem gleichen Wert, also das Integral.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx.$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

**Problem 4.** Wir zeigen die Irrationalität von  $\pi$  durch einen Widerspruch. Angenommen, es gälte  $\pi = \frac{a}{b}$  für  $a, b \in \mathbb{N}$ . Außerdem seien  $f, F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = x^n \frac{(a - bx)^n}{n!},$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

für  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $f^{(k)}(0), f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{N}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

(b) Zeigen Sie

$$f(x) \sin x = (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)'.$$

Folgern Sie anschließend, dass  $F(\pi) + F(0)$  ebenfalls eine natürliche Zahl ist, was allerdings nicht mit den Eigenschaften von  $x \rightarrow f(x) \sin x$  für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  vereinbar ist.

*Proof.* (a) Wir leiten es ab. Sei  $g(x) = x^n$ ,  $h(x) = (a - bx)^n$ . Es gilt

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} g^{(k)}(x) h^{(p-k)}(x).$$

Es gilt außerdem

$$g^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k},$$

also  $g^{(k)}(0) \neq 0$  genau dann, wenn  $k = n$  und in diesem Fall ist  $g^{(n)}(0) = n!$ . Ähnlich ist  $h^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)(-b)^k (a - bx)^{n-k}$ , also  $h^{(k)}(0) \in \mathbb{N}$ . Dann im Summe müssen wir nurdem Fall  $k = n$  betrachten, also

$$f^{(p)}(0) = \binom{p}{n} h^{(p-n)}(0) \in \mathbb{N}.$$

Ähnlich bei  $\pi$  gilt  $g^{(k)}(\pi) = n(n-1) \dots (n-k+1) \pi^{n-k}$  und

$$g^{(k)}(\pi) = n(n-1) \dots (n-k+1)(-b)^k (a - b\pi)^{n-k} = n(n-1) \dots (n-k+1)(-b)^k (a - b(a/b))^{n-k}$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq n \\ n!(-b)^n & k = n \end{cases}$$

also wir betrachten im Summe nur den Fall  $p - k = n$ , also

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{n!} \binom{p}{p-n} g^{(p-n)}(\pi) h^{(n)}(\pi) = \binom{p}{p-n} g^{(p-n)}(\pi) (n!) (-b)^n \in \mathbb{N}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)' &= F''(x) \sin x + F'(x) \cos x - F'(x) \cos x + F(x) \sin x \\ &= [F''(x) + F(x)] \sin x \\ &= \sin(x) [\cancel{f^{(2)}(x)} - \cancel{f^{(4)}(x)} + \cancel{f^{(6)}(x)} - \dots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) \\ &\quad + f(x) - \cancel{f^{(2)}(x)} + \cancel{f^{(4)}(x)} - \dots + \cancel{(-1)^n f^{(2n)}(x)}] \end{aligned}$$

□