Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 9

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 19, 2024)

Problem 1. Bestimmen Sie alle Isomorphietypen für Gruppen der Ordnung $45 = 3^2 \cdot 5$.

Proof. Wir betrachten die Zahl der 3- bzw. 5-Sylowgruppen n_3 bzw. n_5. Es gilt

$$\begin{aligned} n_3 &\equiv 1 \pmod 3 \\ n_3 &| 5 \\ n_5 &\equiv 1 \pmod 5 \\ n_5 &| 9 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist $n_3 = 1$ und $n_5 = 1$. Da die Zahlen 1 sind, sind die Untergruppen normal. Sei A die 3-Sylowgruppe und B die 5-Sylowgruppe. Die Gruppen müssen sich trivial schneiden, weil die Ordnung alle Elemente darin ein Teiler von der Gruppenordnung sein müssen.

Da $9 \times 5 = 45$, ist $|AB| = 45$, also AB ist einfach die ganze Gruppe. Da $n_3 = n_5 = 1$, sind die Untergruppen normal. Es folgt daraus, dass die ganze Gruppe (isomorph zu) $A \times B$ ist.

Also ist jetzt die Frage: Wie viele Gruppen der Ordnung 5 und 9 gibt es?

Es gibt nur eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Gruppe der Ordnung 5, weil 5 eine Primzahl ist, also es enthält ein Element der Ordnung 5, was ein Erzeuger ist. Daher ist die Gruppe C_5.

Wir wissen aus der vorherigen Übungsblatt, dass eine Gruppe der Ordnung 3^2 abelsch ist. Dann ist eine Gruppe der Ordnung 9 ein direktes Produkt von zyklische Gruppen von Primpotenzordnung. Die einzige Möglichkeit ist $C_3 \times C_3$. Natürlich ist C_9 auch eine Gruppe der Ordnung 9.

Insgesamt gibt es nur zwei Gruppen der Ordnung 45: $C_5 \times C_9$ und $C_5 \times C_3 \times C_3$. □

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. Seien N und U zwei Gruppen. Zeigen Sie: Genau dann gilt $N \rtimes_\phi U = N \times U$, wenn $\phi_u = \mathrm{id}_N$ für alle $u \in U$ gilt.

Proof. Die beide Gruppen sind auf der Menge $N \times U$ (kartesisches Produkt von Mengen) definiert. Jetzt die Rückrichtung: Falls $\phi_u = \mathrm{id}_N$ für alle N gilt, ist das Produkt

$$(n_1, u_1) \circ (n_2, n_2) = (n_1 \phi_{u_1}(n_2), u_1 u_2) = (n_1 n_2, u_1 u_2)$$

für alle $n_1, n_2 \in N, u_1, u_2 \in U$. Dann bekommen wir per Definition das direktes Produkt.

Sei jetzt $N \rtimes_\phi U = N \times U$. Dann stimmen alle Produkte überein. Sei $u_1, u_2 \in U$ und $n_1, n_2 \in N$. Es gilt

$$(n_1 \phi_{u_1}(n_2), u_1 u_2) = (n_1 n_2, u_1 u_2)$$

insbesondere

$$n_1 \phi_{u_1}(n_2) = n_1 n_2.$$

Aus der Kurzungsregel folgt

$$\phi_{u_1}(n_2) = n_2.$$

Da u_1, u_2, n_1, n_2 beliebig waren, muss dies für alle u_1, n_2 gelten, also $\phi_{u_1} = \mathrm{id}_N$ für alle $u_1 \in U$. $\square$

Problem 3. Von einer Gruppe G seien bekannt:

(1) Sie habe Ordnung $p^2 \cdot q^2$ mit zwei verschiedenen Primzahlen $p, q \in \mathbb{P}$.

(2) Die q-Sylowgruppe Q von G sei normal.

(3) p sei kein Teiler von $|\mathrm{Aut}(Q)|$.

Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(Hinweis: Denken Sie an semidirekte Produkte. Verwenden Sie an geeigneter Stelle Übung 2.)

Proof. Sei die p-Sylowgruppe bzw. q-Sylowgruppe von G P bzw. Q. Weil p und q teilerfremd sind, schneiden die Sylowgruppen trivial. Daher gilt $|P||Q| = |G|$, also $G = PQ$. Da Q normal ist, ist $G \cong Q \rtimes P$.

Als quadratische Primordnung sind sowohl Q als auch P abelsch. Falls wir zeigen könnten, dass $G \cong Q \times P$, wären wir dann fertig.

Aus 2 und Transitivität ist es zu zeigen

$$Q \rtimes P \cong Q \times P \iff k_u(v) = v \; \forall u \in P, v \in Q,$$

wobei wir hier mit $k_u(\cdot)$ die Konjugation $k_u(p) = upu^{-1}$ bezeichnen. Dies induziert den Homomorphismus $\varphi : P \to \mathrm{Aut}(Q)$. □

Problem 4. (a) Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 100 ein Element der Ordnung 10 enthält

(b) Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt (vgl. auch Bemerkung 2.29 im Skript).

Proof. (a) Als abelsche Gruppe ist die Gruppe isomorph zu ein Produkt zyklische Gruppen von Primpotenzordnung. Da $100 = 5^2 \cdot 2^2$, sind die möglichen Gruppen

$$C_{5^2} \times C_{2^2}$$
$$C_5 \times C_5 \times C_{2^2}$$
$$C_{5^2} \times C_2 \times C_2$$
$$C_5 \times C_5 \times C_2 \times C_2$$

Wir zeigen, dass alle diese Gruppen ein Element der Ordnung 10 enthalten.

(1) $C_{5^2} \times C_{2^2}$:

Da 25 und 4 teilerfremd sind, ist $C_{5^2} \times C_{2^2} \cong C_{100}$. Da 10 ein Teiler von 100 ist, und die zyklische Gruppe C_{100} für jede Teiler t von 100 eine zyklische Untergruppe der Ordnung t besitzt, gibt es ein Element der Ordnung 10.

(2) $C_5 \times C_5 \times C_{2^2}$:

Wir ziehen C_5 und C_4 zusammen, weil 5 und 4 teilerfremd sind. Also $C_5 \times C_4 \cong C_{20}$, was auch ein Element der Ordnung 10 besitzt, weil 10 ein Teiler von 20 ist. Sei das Element g. Dann ist

$$(e, g) \in C_5 \times C_{20}$$

ein Element der Ordnung 10.

(3) Es gilt

$$C_{5^2} \times C_2 \times C_2 \cong C_{50} \times C_2$$

da 25 und 2 teilerfremd sind. Ähnlich gibt es $g \in C_{50}$ der Ordnung 10. Dann ist

$$(g, e) \in C_{50} \times C_2$$

ein Element der Ordnung 10.

(4) Gleich ist

$$C_5 \times C_5 \times C_2 \times C_2 = C_5 \times C_{10} \times C_2.$$

Sei g ein Erzeuger von C_{10}. Dann ist

$$(e, g, e') \in C_5 \times C_{10} \times C_2$$

ein Element der Ordnung 10.

(b) $|A_4| = 4!/2 = 12 = 3 \times 2^2$.

Da $6 = 12/2$, wäre eine Untergruppe der Ordnung 6 ein Normalteiler. Wir bezeichnen diese mit H.

$$\begin{array}{l} e \\ \left.\begin{array}{l} (12)(34) \\ (13)(24) \\ (14)(23) \end{array}\right\} \text{Produkt von disjunkte Transpositionen} \\ \text{3-Zykeln (genau 8)} \end{array}$$

Das Ziel ist: Alle 3-Zykeln sind in H enthalten. Bemerkung (oder Errinerung): 3-Zykeln haben alle die Ordnung 3. Sei ein beliebiges 3-Zyklus x. Es gilt $(xH)^3 = x^3H = H$. Außerdem gilt in der Faktorgruppe G/H der Ordnung 2: $(xH)^2 = H$. Aus der Kurzungsregel folgt $xH = H$, also $x \in H$.

Dann hat H mehr als 8 Elemente, ein Widerspruch. $\square$