

Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

## Analysis 2

**Stefan Waldmann**

Wintersemester 2023/2024

### Hausaufgabenblatt Nr. 9

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)

Git revision of ana2-ws2324: (None) (None)

21. 12. 2023

(12 Punkte. Abzugeben am 10.01.2024)

#### **Hausaufgabe 9-1: Kofinite Topologie**

Sei  $M$  eine Menge mit  $\#M = +\infty$ . Eine Menge  $A \subset M$  sei als offen definiert, falls  $M = \emptyset$  oder  $M \setminus A$  endlich ist. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Topologie definiert. Ist diese Topologie metrisierbar?  
**(4 Punkte)**

#### **Hausaufgabe 9-2: Zusammenhang $\sin(\frac{1}{x})$**

Zeigen Sie, dass

$$M = \left\{ \left( x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)^\top \mid x \in (0, 1) \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend in  $\mathbb{R}^2$  ist.

**(5 Punkte)**

### Hausaufgabe 9-3: Eistüte

Es seien  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  sowie  $r > 0$ . Wir betrachten die Menge  $K := \{x_0\} \cup K_r(x_1)$  und die konvexe Hülle dieser Menge ist gegeben durch

$$\operatorname{conv} K := \{tx_0 + (1-t)x_1 \mid t \in [0, 1], x_1 \in K_r(x_1)\}.$$

Zeigen Sie, dass  $\operatorname{conv} K$  kompakt ist.

*Hinweis: Wählen Sie geschickt eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge.*

**(3 Punkte)**

