Dr. Florian Möller, Dmitri Nedrenco
Institut für Mathematik der Universität Würzburg

Einführung in die Algebra, WS 2020/2021

Klausur

15. Februar 2021

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnungen $351 = 3^3 \cdot 13$ sowie $108 = 2^2 \cdot 3^3$ nicht einfach sind.

Aufgabe 2 (7 Punkte). Geben Sie drei nicht isomorphe Gruppen der Ordnung 42 an.
Hinweis: Begründen Sie die Nicht-Isomorphie explizit.

Aufgabe 3 (7 Punkte). Sei R ein Integritätsbereich, in dem $x^6 = x^2$ für alle $x \in R$ gilt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) R ist ein Körper.
Hinweis: Sie könnten beispielsweise nachweisen, dass jedes $x \in R \setminus \{0\}$ multiplikativ invertierbar ist.

b) R hat maximal sechs Elemente.

c) Geben Sie zwei nicht isomorphe Beispiele für R an und begründen Sie explizit die Nicht-Isomorphie.

d) Gibt es Beispiele für R mit vier Elementen?

Aufgabe 4 (6 Punkte).

a) Entscheiden Sie, ob das Polynom $2X^7 + 50X^3 + 20$ irreduzibel über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ ist.

b) Zerlegen Sie das Polynom $2X^3 - 6X + 4$ in irreduzible Faktoren über $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5 (8 Punkte). Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Die Gruppe S_8 enthält ein Element der Ordnung 15.

b) Die Gruppe S_5 enthält eine zyklische 2-Sylowgruppe.

c) Die Gruppe S_5 enthält mindestens zwei Untergruppen der Ordnung 8.

d) Die Untergruppen der Ordnung 8 in S_4 sind zu denen in S_5 isomorph.

Viel Erfolg!

Algebra WS 20/21
Lösungshinweise der Klausur am 15.2.21.

Aufgabe 1 Jede Gruppe G der Ordnung $|G| = 3^3 \cdot 13$ ist nicht einfach.

Wir betrachten zunächst $n_{13} \in \{1, 3, 9, 27\} \cap \{1, 14, 27, \ldots\} = \{1, 27\}$.
Ist $n_{13} = 1$, dann ist die 13-Sylowgruppe ein nichttrivialer Normalteiler in G ✓
Ansonsten ist $n_{13} = 27$ und G hat $27 \cdot (13-1) = |G| - 3^3$ viele Elemente der Ordnung 13. Dann ist in G nur „Platz" für eine einzige 3-Sylowgruppe, welche dann in G normal ist. In jedem Fall besitzt G einen nicht trivialen Normalteiler und ist somit nicht einfach.

Jede Gruppe G der Ordnung $|G| = 108 = 2^2 \cdot 3^3$ ist nicht einfach.

Die Sylowsätze liefern für die Anzahlen der 2- bzw. 3-Sylowgruppen:
$n_3 \in \{1,2,4\} \cap \{1, 4, \ldots\} = \{1,4\}$ sowie $n_2 \in \{1, 3, 9, 27\}$. Ist $n_3 = 1$, dann hat G einen nichttrivialen Normalteiler, die eindeutige 3-Sylowgruppe. ✓
Ansonsten betrachte die Operation von G auf den vier 3-Sylowgruppen:

$$\varphi : G \to \mathrm{Sym}(\mathrm{Syl}_3 G), \quad g \mapsto (P_3 \mapsto g P_3 g^{-1})$$

Diese Operation ist nach Skript transitiv, φ ist also nicht konstant.(*) Wir betrachten $\ker\varphi$.
Ist $\ker\varphi = \{1\}$, dann gilt mit dem Homomorphiesatz:

$$G \cong G/_{\{1\}} = G/_{\ker\varphi} \cong \varphi(G) \leq S_4 \cong \mathrm{Sym}\,\mathrm{Syl}_3 G$$

In diesem Fall hat G die Ordnung einer Untergruppe von S_4, was wegen Lagrange widersprüchlich ist, da $|G| = 108 \nmid 24 = |S_4|$. Also ist $\ker\varphi \neq \{1\}$.
Nun ist $\ker\varphi$ ein nichttrivialer (*) Normalteiler von G und G nicht einfach.

Aufgabe 2 Man gebe drei nichtisomorphe Gruppen der Ordnung 42 an.

Folgende Gruppen haben die Ordnung 42: $C_{42} \cong C_7 \times C_6$, D_{21}, $C_7 \times S_3$. Die drei Gruppen sind nicht isomorph, da die erste zyklisch und also abelsch ist, die anderen beiden nicht abelsch (da Diedergruppen nicht abelsch sind)*. Die Gruppen D_{21} und $C_7 \times S_3$ sind nicht isomorph, da die erstere 21 Elemente der Ordnung 2 hat (alle Spiegelungen) und die letztere nur 3: Die Elemente der Ordnung 2 in $C_7 \times S_3$ haben die Form $(1, i)$ mit i Involution aus S_3, da $2 = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b))$ nur für $a = 1 \in C_7$ und b Involution in S_3 lösbar ist. Die drei Involutionen in S_3 sind $(12), (23), (13)$. Damit sind alle drei Gruppen nicht isomorph.

Man kann allgemein $C_7 \rtimes_\varphi C_6$ mit $\varphi: C_6 \to \mathrm{Aut}\, C_7 \underset{(?!)}{\cong} C_6$ anschauen und für verschiedene φ nicht isomorphe Isomorphietypen suchen (aber Vorsicht: Verschiedene φ führen nicht automatisch zu nicht-isomorphen Gruppen!) konstantes φ führt auf C_{42}, nichtkonstantes φ führt auf abelsche Gruppen. Weitere Argumentation ist nicht trivial.

Alternativ auch: $C_{21} \rtimes_\varphi C_2$ mit $\underline{\varphi: C_2 \to \mathrm{Aut}\, C_{21}} \cong \mathbb{Z}_{21}^\times \cong \mathbb{Z}_3^\times \times \mathbb{Z}_7^\times \cong \underline{C_2 \times C_6}$

konstantes φ liefert C_{42}, $\varphi(-1)(x) = x^{-1}$ $\forall x \in C_{21}$ liefert die Diedergruppe etc.

(*) S_3 ist isomorph zu einer Diedergruppe.

2

Aufgabe 3 In einem Intbereich R gelte $x^6 = x^2$ für alle $x \in R$. Dann ist R ein Körper.

Das stimmt, denn in Intbereichen ist Kürzen durch Nicht-Null erlaubt; ist $x \neq 0$ in R, dann gilt $x^4 = 1$ nach Kürzen, also ist x eine Einheit. $x \cdot x^3 = 1$, $x^3 \in R$

Da nun alle Elemente in R außer der Null Einheiten sind, ist R Körper.

R hat maximal sechs Elemente, denn das Polynom $X^6 - X^2 \in R[X]$ hat im Intbereich R höchstens $\operatorname{grad}(X^6 - X^2) = 6$ Nullstellen und nach der Definition von R muss jedes Element aus R eine solche Nullstelle sein.

Nicht isomorphe Beispiele für R sind $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$. Weitere Iso-Typen gibt es nicht. Es gilt für Elemente aus

$\mathbb{Z}_2$: $0^6 = 0 = 0^2$ und $1^6 = 1 = 1^2$

$\mathbb{Z}_3$: — " — und $2^6 \equiv 1 \equiv 2^2 \mod 3$

$\mathbb{Z}_5$: — " — und $2^6 \equiv -1 \equiv 2^2$, $3^4 \equiv 1$, $4^4 = 2^8 \equiv 1 \mod 5$.

Daher sind diese drei (wegen verschiedener Ordnung) nicht isomorphen Ringe passende Beispiele.

Es gibt keinen solchen Ring R mit vier Elementen. Ein Körper mit vier Elementen hat eine zyklische multiplikative Gruppe der Ordnung 3, also insbesondere gilt dort $x^3 = 1$ für alle $x \in R \setminus \{0\}$. Das ist inkompatibel mit $x^4 = 1$ für alle $x \in R \setminus \{0\}$. [$\mathbb{F}_4$ ist kein Körper!]

3

Aufgabe 4 a) Das Polynom $2x^7+50x^3+20$ ist reduzibel über $\mathbb{Z}$ und irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

Zunächst gilt $2x^7+50x^3+20 = 2(x^7+25x^3+10)$ und $2 \notin \mathbb{Z}^\times$, daher ist unser Polynom über $\mathbb{Z}$ reduzibel. Da $2 \in \mathbb{Q}^\times$ gilt, reicht es für die Irreduzibilität über $\mathbb{Q}$ x^7+25x^3+10 anzuschauen. Mit Eisenstein für $p=5$ ist dieses Polynom unzerlegbar über $\mathbb{Z}$, daher auch über $\mathbb{Q}$ mit Gauß. Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, ist x^7+25x^3+10 und daher auch $2x^7+50x^3+20$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

b) Es gilt $2x^3-6x+4 = 2(x^3-3x+2) = 2(x+2)(x-1)^2$, eine Zerlegung in irreduzible Faktoren über $\mathbb{Z}$.

Da $2 \notin \mathbb{Z}^\times \cup \{0\}$, ist 2 ein irreduzibler Faktor. Ferner hat das ganzzahlige Polynom x^3-3x+2 die Nullstellen -2 und 1 (aus der Kandidatenliste $\pm1, \pm2$ als Teiler vom konstanten Koeffizienten).
Die Polynomdivision

$$\begin{array}{l} x^3-3x+2 = (x^2+x-2)(x-1) \\ -(x^3+x^2-2x) \\ \hline \quad -x^2-x+2 \\ \quad -(-x^2-x+2) \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

$(x+2)(x-1)$

liefert die Zerlegung $x^3-3x+2 = (x-1)(x-1)(x+2)$. Jeder der Faktoren ist ein normierter Linearfaktor über $\mathbb{Z}$, daher irreduzibel.

4

Aufgabe 5

- Die Gruppe S_8 enthält ein Element der Ordnung 15. Wahr

Die Permutation $(123)(45678)$ in Zykeldarstellung hat die Ordnung

$$\text{kgV}(\text{ord}(123), \text{ord}(45678)) = \text{kgV}(3,5) = 15$$

- Die Gruppe S_5 enthält eine zyklische 2-Sylowgruppe. Falsch

Eine 2-Sylowgruppe in S_5 hat die Ordnung 8, da $5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ ist.

F Es ist zu wenig zu sagen, dass S_5 kein Element der Ordnung 8 hat!

In S_5 gibt es keine Elemente der Ordnung 8: Die 1 sowie die k-Zykel für $k \in \{2,3,4,5\}$ haben nicht die Ordnung 8. Jede weitere Permutation in S_5 in Zykeldarstellung ist vom Zykeltyp 2-2 oder 2-3; beide haben nicht die Ordnung 8. Also hat S_5 keine zyklischen 2-Sylowgruppen (weil sie alle isomorph sind).

- S_5 enthält mindestens drei 2-Sylowgruppen. Wahr

Es gilt $n_2 \in \{\cancel{1}, 3, 5, 15\}$ in S_5. $n_2 \neq 1$, da sonst wäre die 2-Sylowgruppe normal in S_5, aber die NT von S_5 sind genau $1, A_5, S_5$. Daher muss n_2 mindestens drei sein.

- Die Untergruppen der Ordnung 8 in S_4 sind isomorph zu denen in S_5. Wahr

Wegen $|S_4| = 24 = 8 \cdot 3$ und

$|S_5| = 120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$

haben die 2-Sylowgruppen in diesen beiden Gruppen die Ordnung 8.

Da S_4 isomorph zu einer Untergruppe von S_5 ist, F $S_4 \cong (S_5)_5$ - Stabilisator der 5 in S_5 sind die 2-Sylowgruppen von S_4 isomorph zu Untergruppen von S_5 der Ordnung 8, also zu 2-Sylowgruppen in S_5.

5