Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Elektrodynamik, SoSe 2024

Übungsblatt II

Bitte laden Sie Ihre Lösungen auf WUE Campus hoch, und zwar vor 16.00 Uhr am Montag, dem 29. April.

Sie dürfen in Dreiergruppen abgeben.

1. Stokes'scher Satz im Differentialformen-Formalismus

Die allgemeine Form des Stokes'schen Satzes lautet

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{A} \mathrm{d}\omega \,, \tag{1}$$

wobei $\mathcal{M}$ eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und $A \in M$ ein d-dimensionales Gebiet darin mit Rand ∂A. Weiterhin ist ω eine $(d-1)$-Form und $\mathrm{d}\omega$ die äußere Ableitung von ω. Das Dachprodukt wird mit $\wedge$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass Sie aus (1) im Spezialfall $\mathcal{M} = V \in \mathbb{R}^3$ und

$$\omega = E_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + E_2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + E_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \tag{2}$$

den aus der Elektrodynamik bekannten Gauß' schen Integralsatz erhalten,

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E} = \int_{V} \mathrm{d}^3x \, \mathrm{div}\vec{E} \,. \tag{3}$$

b) Zeigen Sie, dass Sie im Spezialfall $\omega = B_\mu \mathrm{d}x^\mu$ und A eine zweidimensionale Fläche, die im $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist, aus (1) der aus der Magnetostatik bekannte Stokes'sche Satz folgt,

$$\oint_{\partial A} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{B} = \int_{A} \mathrm{d}\vec{A} \mathrm{rot}\vec{B} \,. \tag{4}$$

2. Delta-Distribution

a) Nennen Sie die Definition der Delta-Distribution und geben Sie ihre wesentlichen Eigenschaften an.

b) Drücken Sie mit Hilfe geeigneter Koordinaten die folgenden Ladungsverteilungen als Delta-Distribution aus:

1. Eine über eine Kugelschale vom Radius R gleichmä ssig verteilte Ladung Q ;

2. EIne über die Oberfläche eines Zylinders vom Radius R verteilte Ladung Q (pro Längeneinheit in z-Richtung).

3. Elektrostatik

Ein einfacher Kondensator besteht aus zwei zueinander parallelen Leitern, die durch einen Isolator voneinander getrennt sind. Bringt man auf die Leiter entgegengesetzt gleiche Ladungen, so stellt sich zwischen den Leitern eine bestimmte Potentialdifferenz ein. Der Quotient aus dem Betrag der Ladung eines der beiden Leiter und dem Betrag der Potentialdifferenz wird *Kapazität* genannt. Berechnen Sie mit dem Gauß'schen Gesetz die Kapazität

a) von zwei großen leitenden Flächen der Fläche A, die durch einen kleinen Abstand d voneinander getrennt sind;

b) von zwei konzentrischen leitenden Kugeln mit den Radien a und b ($\geq a$).