Verteilungsfunktionen :

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Binomialverteilung

Normalverteilung

Wahrscheinlichkeitsdefinition

Die Wahrscheinlichkeit eines Einzelereignisses ist der Quotient der günstigen Fälle zur Zahl der möglichen Fälle.

$$W(E) = \frac{Z(E)}{Z(\Omega)}$$

$$= \frac{Anzahl\,der\;für\,E\,günstigen\;\;Ereignisse}{Anzahl\,der\,möglichen,\;gleich-wahrscheinlichen\;\;Elementarereignisse}$$

Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1.

Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist 0.

$$0 \leq W \leq 1$$

Je näher W an 1 ist, desto wahrscheinlicher ist ein Ereignis.

Im täglichen Leben wird die Wahrscheinlichkeit oft in % angegeben.

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, eine "6" auf einem sechseitigen Würfel zu würfeln: 1/6

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A_1 = \{ 2, 4, 6 \}$?

Das Ereignis A_1 lässt sich zerlegen
in die Elementarereignisse E_2, E_4 und E_6

Es gilt für die Wahrscheinlichkeit von A_1

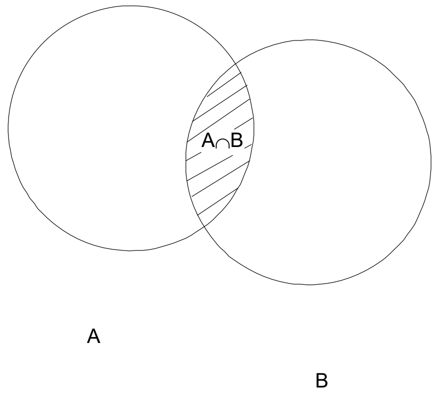
$$W(A_1) = W(E_2) + W(E_4) + W(E_6)$$
$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

Obige Addition von Wahrscheinlichkeiten ist nur dann korrekt, wenn die Ereignisse E_i einander ausschließen.

Einander ausschließen heißt, man kann entweder eine 2 eine 4 oder eine 6 würfeln.

Es gibt auch Ereignisse, die sich nicht ausschließen.

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

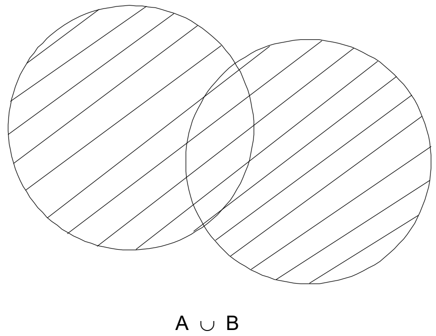


Es seien A und B Teilmengen von Ω

Der **Durchschnitt** (Schnitt) von A und B:

Die Menge der Elemente ω von Ω, die **gleichzeitig** zu A **und** zu B gehören, heißt Durchschnitt:

$A \cap B$ oder AB



Die **Vereinigung** von A und B:

Die Menge der Elemente ω von Ω, die zu A oder zu B gehören, heißt Vereinigung.

Ein Element kann auch zu beiden gehören

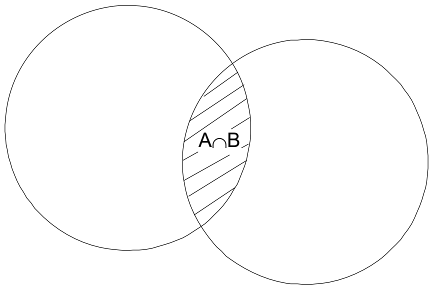
(Oder ist nicht zu verwechseln mit entweder oder)

$A \cup B$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Allgemein gilt:

Die Wahrscheinlichkeit für den Schnitt und die Vereinigung zweier Einzelereignisse ist:

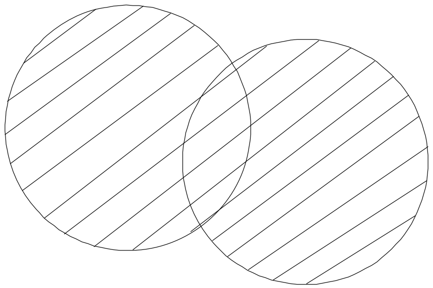


A

B

Wenn stochastisch unabhängig:

$$W\,(A \cap B) = W\,(A) * W\,(B)$$



A ∪ B

$$W\,(A \cup B) = W\,(A) + W\,(B) - W\,(A \cap B)$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Zusammengefasst für stochastische Unabhängigkeit:

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B) - W(A \cap B)$$

$$W(A \cap B) = W(A) * W(B)$$

Da man bei einem Würfel nicht gleichzeitig eine "2" und eine "3" würfeln kann, ist die Wahrscheinlichkeit, eine "2" oder eine "3" zu würfeln, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse, also ergibt sich:

Sind A und B sich gegenseitig ausschließende Ereignisse, ist also

$$\mathbf{W(AB) = W(A \cap B) = 0} \text{ ,}$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung von A und B:

$$\mathbf{W(A \cup B) = W(A) + W(B)}$$

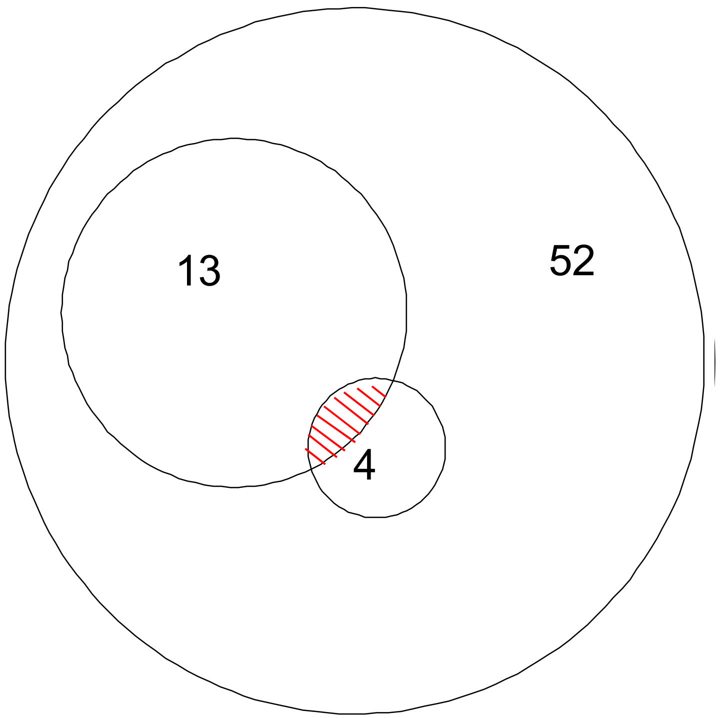
$$1/6 + 1/6 = 1/3$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Beispiel : Kartenspiel mit 52 Karten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Dame oder ein Herz zu ziehen ?

52 Karten haben vier Damen und 13 Herz, davon ist eine Karte „Herz-Dame“.



$$\mathbf{W\,(A \cup B) = W\,(A) + W\,(B) - W\,(A \cap B)}$$

$$\mathbf{W\,(A \cap B) = W\,(A) * W\,(B)}$$

$$W\,(A \cup B) = 13/52 + 4/52 - (13/52*4/52)$$

$$W\,(A \cup B) = 13/52 + 4/52 -1/52 = 16/52$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Für viele grundsätzliche Überlegungen können Ereignisse mit zwei möglichen Ergebnissen (Treffer / kein Treffer) betrachtet werden

Beispiel: Kugeln aus Urne

Urnenmodell: Wichtig bei Qualitätssicherung und Eingangskontrolle.

Eine Urne enthält 5 Kugeln, drei davon sind weiß, zwei sind schwarz.

Es werden zwei Kugeln zufällig herausgegriffen.

- indem man beide Kugeln zugleich herausnimmt
  (Ziehen ohne Zurücklegen)

- indem man zunächst eine Kugel herausnimmt, zurücklegt und noch mal zieht
  (Ziehen mit Zurücklegen)

Die Kugeln seien nummeriert

Weiß = {1, 2, 3 } und Schwarz = {4, 5 }

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Ziehen mit Zurücklegen

Auf Reihenfolge achten !

Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt ?

Man hat 5 Möglichkeiten für die erste Kugel:
(1, ..), (2, ..), (3, ..), (4, ..), (5, ..)

Für jede dieser 5 Möglichkeiten gibt es 5 Möglichkeiten für die zweite Kugel, also

$$Z(\Omega) = \mathbf{5 * 5 = 25}$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei weiße Kugeln zu ziehen ?

Lösungswege:

Stumpfsinniges Hinschreiben

(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)

Dies sind neun Möglichkeiten
also:

W ("zweimal weiß") = 9/25 = 0.36

Kombinatorik

Man hat für die erste Kugel 3 günstige Möglichkeiten.

Für jede dieser drei Möglichkeiten gibt es beim zweiten Zug wiederum 3 günstige Möglichkeiten,

also **Z ("zweimal weiß")** = 3*3 = 9

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Ziehen ohne Zurücklegen

Hier ist die Reihenfolge ohne Bedeutung.

Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt ?

Man hat insgesamt zehn **mal 2** Möglichkeiten :
[1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [2,3], [2,4], [2,5], [3,4],
[3,5], [4,5],

Davon sind 3 **mal 2** Ereignisse „zwei weiße Kugeln“

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei weiße Kugeln zu ziehen ?

W ("zweimal weiß") = 6/20 = 0.30

Kombinatorik

In diesen Beispielen sind die Elementarereignisse noch abzählbar.

Suche nach mathematischen Hilfsmitteln zur allgemeinen Behandlung

Annahme:

Wir haben vier Bücher in einer Kiste.

Wir greifen zufällig ein Buch aus der Kiste und stellen es auf ein Regal.

Wir greifen das nächste Buch, stellen es daneben und so fort

Wie viele verschiedene Reihenfolgen (Permutationen) gibt es ?

Kombinatorik

Bezeichnung der Bücher mit A, B, C und D.

Ausprobieren ist langwierig und umständlich (A,C,B,D)...(D,A,C,B).

Beim ersten Griff in die Kiste haben wir **vier** Möglichkeiten.

Auf dem Regal steht das Buch A, B, C oder D.

Beim zweiten Griff in die Kiste haben wir **drei** Möglichkeiten.

Beim dritten **zwei** und beim vierten nur noch **eine**

Es gibt somit insgesamt 4*3*2*1 = 4! = 24 Reihenfolgen

Bezeichnung für n! : n - Fakultät

Kombinatorik

Es gilt : $n! = (n-1)!\, n$ und $0\,! = 1$

Weiteres Beispiel: 5 Bücher auf 3 Plätze

Für den ersten Platz haben wir fünf Möglichkeiten, für den zweiten Platz vier und für den letzten Platz drei.

Dies bedeutet, es gibt 5*4*3 = 60 mögliche **Permutationen**

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Kombinatorik

Allgemeine Schreibweise

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Auf den drei Plätzen gibt es mehrere Möglichkeiten, die drei Bücher (z.B. C, E und A) anzuordnen.

Wie wir wissen genau:

3! = 6,

(CEA, CAE, EAC, ECA, ACE, AEC)

Wenn uns die Reihenfolge egal ist, wir lediglich daran interessiert sind, wie viele unterschiedliche **Kombinationen** verschiedener Bücher es gibt,

müssen wir die Zahl der **Permutationen** durch r ! dividieren.

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$$

Binomischer Satz

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$$

Das Klammersymbol (gesprochen n über r) heißt auch Binomialkoeffizient.

Es sei der Ausdruck $(a + b)^n$ auszurechnen.

Es gibt n Faktoren (a + b)

$$\overbrace{[(a+b)\ (a+b)\ (a+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a+b)\ (a+b)]}^{n-mal}$$

Wir haben die Aufgabe, aus jedem dieser n Faktoren entweder a oder b auszuwählen und diese n Glieder miteinander zu multiplizieren und die Ergebnisse aufzuaddieren.

Wir können aus jedem Faktor das a herausziehen, was a^n ergibt.

Dann kann man aus (n-1) Faktoren das a herausziehen und aus dem verbleibenden das b auswählen. Dies ergibt $a^{n-1}\,b^1$.

Wir erhalten Glieder der Form $a^{n-r}\,b^r$.

Binomischer Satz

Bis auf $a^0\, b^n$ und $a^n\, b^0$ kommen alle Glieder mehrfach vor.

Das Glied $a^{n-r}\, b^r$ kommt so oft vor, wie es möglich ist,
aus den vorhandenen n Faktoren diejenigen r Faktoren auszuwählen,
aus denen man das b zur Multiplikation heranzieht.

Da die Reihenfolge egal ist, ist dies auf $\binom{n}{r}$ verschiedene Arten möglich

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}\, b^r$$

Anwendungen

Beispiel: Urne mit zehn Kugeln

vier sind weiß, sechs sind schwarz

weiß hat die Ziffern 1 bis 4

schwarz die Ziffern 5 bis 10

a) ohne Zurücklegen

b) mit Zurücklegen

Wir ziehen drei Kugeln.
Uns interessieren folgende Wahrscheinlichkeiten:

E_o : man erhält drei weiße Kugeln

E_1 : man erhält zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel

E_2 : man erhält eine weiße Kugel und zwei schwarze Kugeln

E_3 : man erhält drei schwarze Kugeln

Anwendungen

a) Ziehen ohne Zurücklegen

Reihenfolge ist egal (Kombinationen, nicht Permutationen)

Diskussion für $W(E_o)$ (Drei weiße Kugeln)

$$Z(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

$$Z(E_o) = \binom{4}{3} = 4$$

somit ist $W(E_o) = 4/120 = 0.033$

Anwendungen

a) Ziehen ohne Zurücklegen

Reihenfolge ist egal (Kombinationen nicht Permutationen)

Diskussion für $W(E_1)$ (zwei weiße, eine schwarze Kugel)

Es gibt $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, die ersten beiden Stellen zu besetzen.

Für jede dieser Möglichkeiten gibt es $\binom{6}{1}$ Möglichkeiten den dritten Platz zu besetzen

Die Anzahl der elementaren Ereignisse ist somit $Z(E1) = \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1} = 36$

somit ist $W(E_1) = 36/120 = 0.30$

Anwendungen

a) Ziehen ohne Zurücklegen

Zusammenfassung

$$W(E_o) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = 0.033$$

$$W(E_1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120} = 0.300$$

$$W(E_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120} = 0.500$$

$$W(E_3) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = 0.167$$

$W(E_0) + W(E_1) + W(E_2) + W(E_3) = 1$

Anwendungen

Beispiel: Urne mit zehn Kugeln

vier sind weiß, sechs sind schwarz

weiß hat die Ziffern 1 bis 4

schwarz die Ziffern 5 bis 10

a) ohne Zurücklegen

b) mit Zurücklegen

Wir ziehen drei Kugeln.
Uns interessieren folgende Wahrscheinlichkeiten:

E_o : man erhält drei weiße Kugeln

E_1 : man erhält zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel

E_2 : man erhält eine weiße Kugel und zwei schwarze Kugeln

E_3 : man erhält drei schwarze Kugeln

Anwendungen

b) Ziehen mit Zurücklegen

Reihenfolge ist wichtig [Hier werden geordnete Tripel gesucht (i_1,i_2,i_3)] !

Diskussion für $W(E_o)$ (Drei weiße Kugeln)

Die Gesamtzahl der Ereignisse ist : $Z(\Omega) = 10^3$

Wie viele Möglichkeiten für weiße Kugeln gibt es?

$Z(E_o) = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

somit ist $W(E_o) = 64/1000 = 0.064$

Anwendungen

b) Ziehen mit Zurücklegen

Reihenfolge ist wichtig [Hier werden geordnete Tripel gesucht (i_1,i_2,i_3)]

Diskussion für $W(E_1)$ (Zwei weiße Kugeln, eine schwarze)

Die Gesamtzahl der Ereignisse ist : $Z(\Omega) = 10^3$

Irgendwelche zwei der drei Plätze werden mit Zahlen zwischen1 und 4 besetzt (Weiß).

Der restliche dritte Platz wird mit einer Nummer zwischen 5 und 10 besetzt (Schwarz)

Dies ist auf $\binom{3}{2}$ Arten möglich :

w, w, s
w, s, w
s, w, w

b) Ziehen mit Zurücklegen

Diskussion für $W(E_1)$ (Zwei weiße Kugeln, eine schwarze)

Wir zählen zunächst alle Elementarereignisse,
bei denen **die ersten beiden Plätze mit weißen** Kugeln besetzt werden,
der **dritte mit einer schwarzen** Kugel (w, w, s)

Anzahl ist $4 \cdot 4 \cdot 6$, besser $4^2 \cdot 6^1$

Wir können die zwei Plätze für weiße Kugeln aus insgesamt drei möglichen Plätzen auf verschiedene Arten auswählen

Also haben wir für E_1 genau $\binom{3}{2} \cdot 4^2 \cdot 6^1$ Möglichkeiten (288)

$$W(E_1) = 288/1000 = 0.29$$

Anwendungen

b) Ziehen mit Zurücklegen

Zusammenfassung

$$W(E_o) = \frac{\binom{3}{3} \cdot 4^3 \cdot 6^0}{10^3} = \frac{64}{1000} = 0.06$$

$$W(E_1) = \frac{\binom{3}{2} \cdot 4^2 \cdot 6^1}{10^3} = \frac{288}{1000} = 0.29$$

$$W(E_2) = \frac{\binom{3}{1} \cdot 4^1 \cdot 6^2}{10^3} = \frac{432}{1000} = 0.43$$

$$W(E_3) = \frac{\binom{3}{0} \cdot 4^0 \cdot 6^3}{10^3} = \frac{216}{1000} = 0.22$$

$W(E_0) + W(E_1) + W(E_2) + W(E_3) = 1$

Zusammenfassung

Eine Urne enthalte N Kugeln, unter denen sich genau M schwarze Kugeln befinden ($0 \leq M \leq N$).

Aus dieser Urne werden n Kugeln ($0 \leq n \leq N$) zufällig herausgezogen, und zwar

a) ohne Zurücklegen (α ist die Anzahl der herausgegriffenen schwarzen Kugeln)
b) mit Zurücklegen (β ist die Anzahl der herausgegriffenen schwarzen Kugeln)

Die Wahrscheinlichkeit:

a) ohne Zurücklegen

$$W(\alpha = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

Hypergeometrische Verteilung

b) mit Zurücklegen

$$W(\beta = m) = \frac{\binom{n}{m} \cdot M^m \cdot (N-M)^{n-m}}{N^n}$$

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung

Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen

$$W(\beta = m) = \frac{\binom{n}{m} \cdot M^m \cdot (N-M)^{n-m}}{N^n} = \binom{n}{m} \cdot \frac{M^m \cdot (N-M)^{n-m}}{N^m \cdot N^n \cdot N^{-m}}$$

$$= \binom{n}{m} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^m \cdot \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

$$= \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}, \qquad wobei \quad p = \frac{M}{N}$$

Man sieht, dass die Wahrscheinlichkeit, unter n gezogenen Kugeln genau m schwarze zu finden, nur vom Anteil der schwarzen Kugeln in der Urne abhängt und nicht von N oder M selbst abhängt.

Die Binomialverteilung

$$W(\beta = m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}, \qquad wobei \quad p = \frac{M}{N}$$

Man sieht, dass die Wahrscheinlichkeit, unter n gezogenen Kugeln genau m schwarze zu finden, nur vom Anteil der schwarzen Kugeln in der Urne abhängt und nicht von N oder M selbst abhängt.

Dieser Anteil p kann natürlich selbst wieder als die Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden, bei einmaligen Ziehen eine schwarze Kugel zu erhalten.

Die Binomialverteilung

$$W(\beta = m) \;=\; \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Beispiel: Münzwurf

Wir werfen zwanzig Mal (n = 20) eine Münze und fragen:
Wie oft erhalte ich das Ergebnis „Zahl“ ?

Die Wahrscheinlichkeit für das Einzelereignis „Zahl“ ist p = 1/2

Die Binomialverteilung gibt Auskunft über Fragen nach

der Wahrscheinlichkeit, bei zwanzig Würfen
vier Mal (m = 4) das Ergebnis „Zahl“ zu erhalten.

Die Binomialverteilung - Eigenschaften

$$W(m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Die Binomialverteilung hat zwei Parameter (n und p).

Sie ist für p=1/2 symmetrisch.

Für kleine und große p ist sie stark asymmetrisch.

Die Binomialverteilung ist normiert, d.h. die Summe der W(m) ist 1.

Wie groß ist der Mittelwert (Erwartungswert)?

Mittelwert der Binomialverteilung

$$M = \sum_{m=0}^{n} m \cdot W(m) = \sum_{m=0}^{n} m \cdot \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Der Summand mit m = 0 ist Null, daher kann man die Summationsgrenze m = 0 durch m = 1 ersetzen.

Es gilt :

$$\frac{m}{m!} = \frac{1}{(m-1)\,!}$$

Damit erhält man:

$$M = \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{(n-m)!(m-1)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Mittelwert der Binomialverteilung

$$M = \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{(n-m)!\,(m-1)!}\, p^m (1-p)^{n-m}$$

Ausklammern von n·p

$$M = n \cdot p \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}\, p^{m-1} (1-p)^{n-m}$$

Substitution von a = m-1 und b = n-1 ergibt:

$$M = n \cdot p \underbrace{\sum_{a=0}^{b} \frac{b!}{a!\,(b-a)!}\, p^a (1-p)^{b-a}}_{=1}$$

Damit ist der Mittelwert einer Binomialverteilung

$$\boxed{M = n \cdot p}$$

Varianz der Binomialverteilung

Die Varianz ist der Erwartungswert von $(m-M)^2$

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{n} (m - M)^2 \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1 - p)^{n-m}$$

Verschiebungssatz:

$$\sigma^2 = \sum_x (x - M)^2 \cdot p(x) = \sum_x x^2 \cdot p(x) - M^2$$

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1 - p)^{n-m} - M^2$$

m^2 lässt sich schreiben als (m (m - 1) + m)

Varianz der Binomialverteilung

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} - M^2$$

m² lässt sich schreiben als (m (m - 1) + m)

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{n} m \; (m-1) \; \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \; (1-p)^{n-m} + \left(\underbrace{\sum_{m=0}^{n} m \; \frac{n!}{m! \; (n-m)!} p^m \; (1 - p)^{n-m}}_{M} \right) - M^2$$

Für m=0 und m=1 sind die Summanden Null;

Die Summation beginnt also mit m=2

siehe nächste Folie

Varianz der Binomialverteilung

$$\sigma^2 = \sum_{m=2}^{n} m(m-1)\frac{n!}{m!\ (n-m)\ !} p^m \ (1-p)^{n-m} + M - M^2$$

$$= n\ (n-1)\, p^2 \sum_{m=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(m-2)!\ (n-2-m+2)\ !}\ p^{m-2}\ (1-p)^{n-2-m+2} + M - M^2$$

$$= n\ (n-1)\, p^2 \underbrace{\sum_{a=0}^{b} \frac{b!}{a!\ (b-a)!} p^a \ (1-p)^{b-a}}_{1} + M - M^2$$

Varianz der Binomialverteilung

$$\sigma^2 = n(n-1)p^2 + M - M^2$$

Da M = n·p,

$$\sigma^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2$$

Die Varianz der Binomialverteilung ist somit

$$\boxed{\sigma^2 = n \cdot p \, (1 - p)}$$

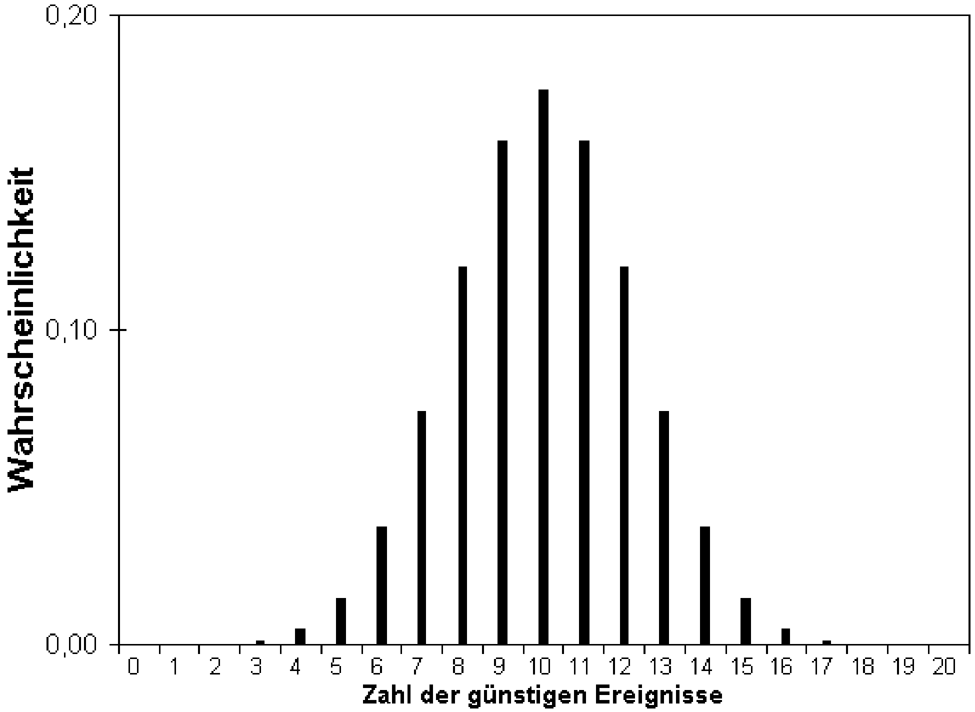
$$\sigma^2 = M \, (1 - p)$$

Die Binomialverteilung

$$W(\beta = m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

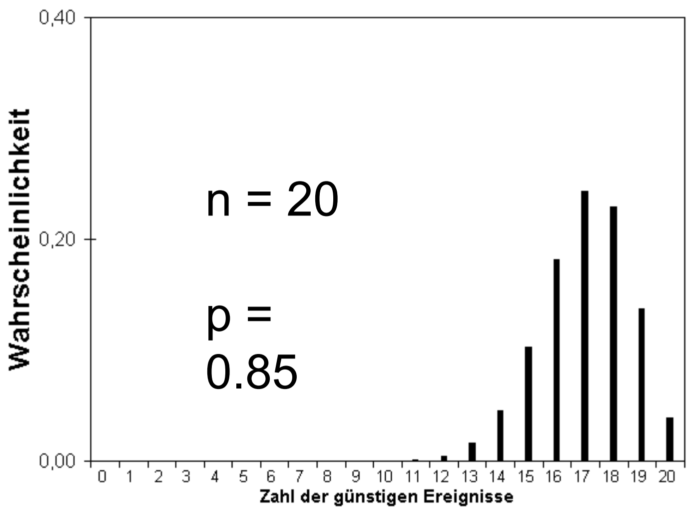
n = 20

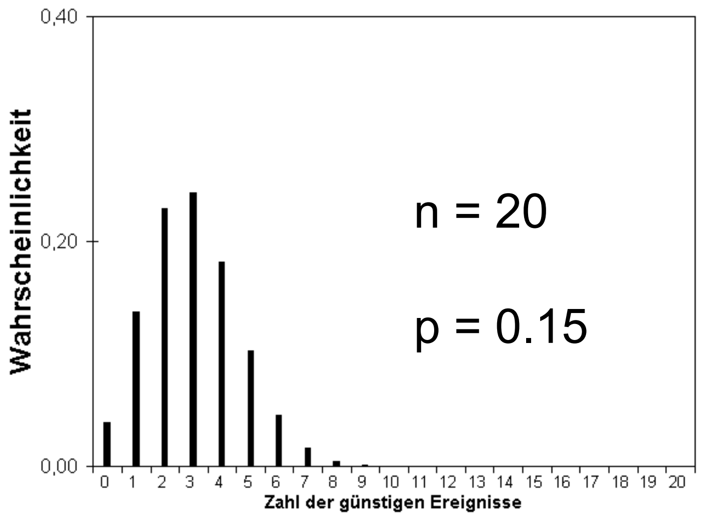
p = 1/2

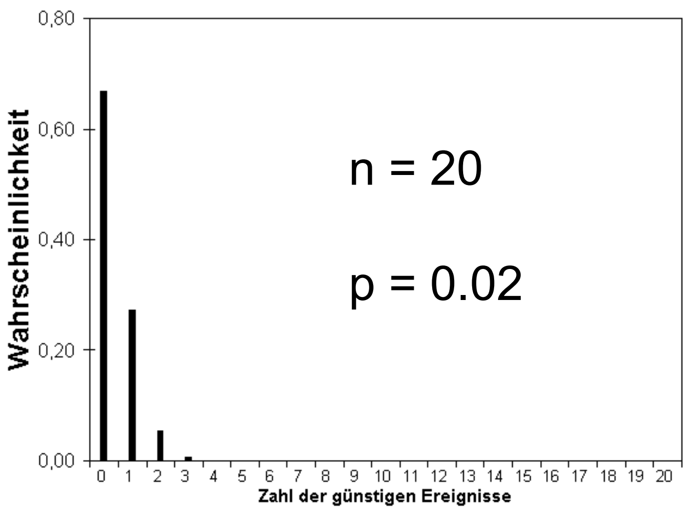


- Verteilung ist diskret
- Verteilung ist symmetrisch

Die Binomialverteilung

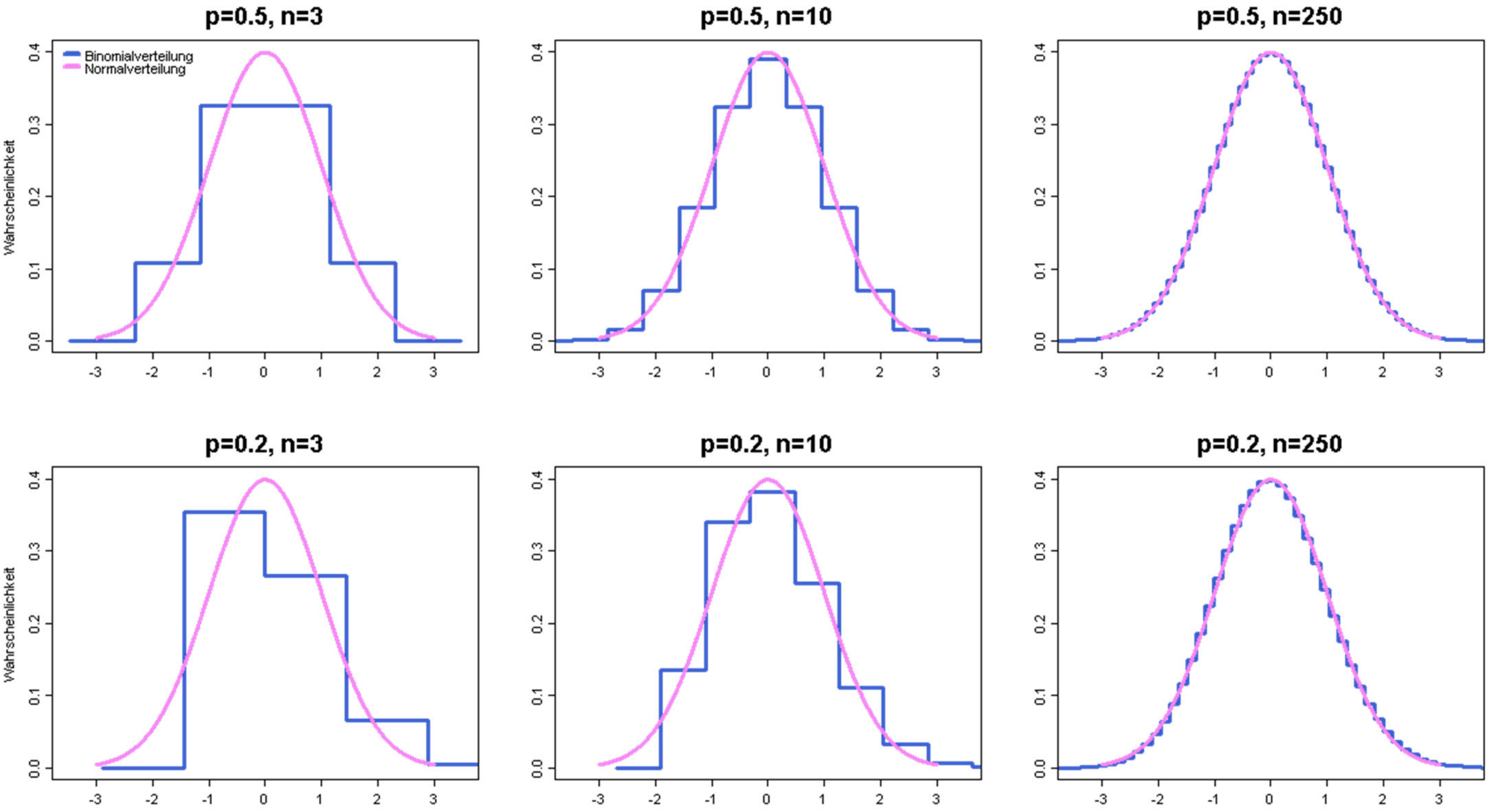






Je größer die Abweichung von $p = 0.5$, desto unsymmetrischer wird die Verteilung

Übergang zur Grenzverteilung



Zentraler Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

Die Zufallsvariable S_n besitze eine Binomialverteilung mit Parametern *n* und *p*, wobei $0<p<1$ vorausgesetzt ist. Dann gilt für jede Wahl reeller Zahlen *a*,*b* mit $a<b$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \leq b \right) = \int_a^b G(x)dx$$

Dabei ist die Funktion *G(x)* definiert als:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

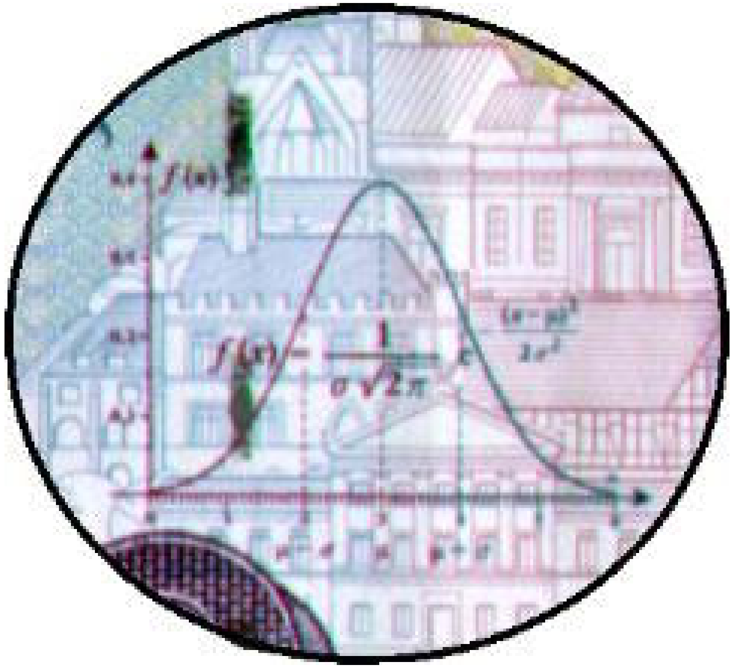
Beweis siehe z.B: N. Henze, „Stochastik für Einsteiger“, Vieweg Verlag.

Die Normalverteilung

Dabei ist die Funktion *G(x)* definiert als:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion beschreibt die Normal- oder **Gauß** - Verteilung und ist die am häufigsten vorkommende Verteilung.



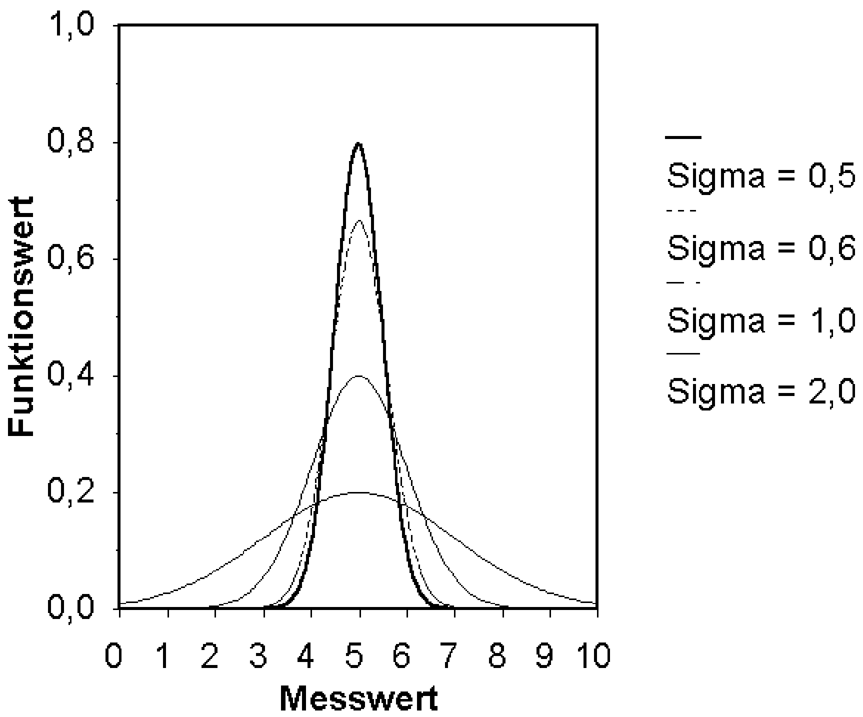
Sie wird durch zwei Parameter beschrieben:

σ und *M* (oder μ)

Eigenschaften der Normalverteilung

Eigenschaften der Funktion:

- symmetrisch um *M*
- Der größte Wert wird an der Stelle $x = M$ eingenommen
- Die Funktion geht schnell gegen Null, sobald $(x - M)^2$ groß wird



Eigenschaften, die eine Verteilung von Messwerten darstellt.

Der Vorfaktor dient der Normierung.

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

Normalverteilung – wesentliche Integrale

Der Einfachheit halber folgen alle weiteren Überlegungen für $M = 0$

Wichtige Integrale (ohne Beweis)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sqrt{2\pi}\,\sigma$$

$$\int_{0}^{\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sqrt{2\pi}\,\sigma^3$$

Maximum der Normalverteilung

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

1. Ableitung:

$$\frac{d\,G(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{(x-M)}{\sigma^2}\, e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= -\frac{(x-M)}{\sigma^2}\;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\boxed{\text{Maximum bei} \quad x = M}$$

Standardabweichung der Normalverteilung

Wie groß ist die Standardabweichung ?

Analoges Vorgehen wie bei der Binomialverteilung

Erwartungswert von (x-M)^2, wobei M =0

$$(\text{Standardabweichung})^2 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \; dx \quad =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; \frac{1}{\sigma} \; \sqrt{2\pi} \; \sigma^3 \; = \; \sigma^2$$

Standardabweichung = σ

Standardabweichung der Normalverteilung

$$\boxed{\text{Maximum bei} \quad x = M}$$

2. Ableitung ergibt:

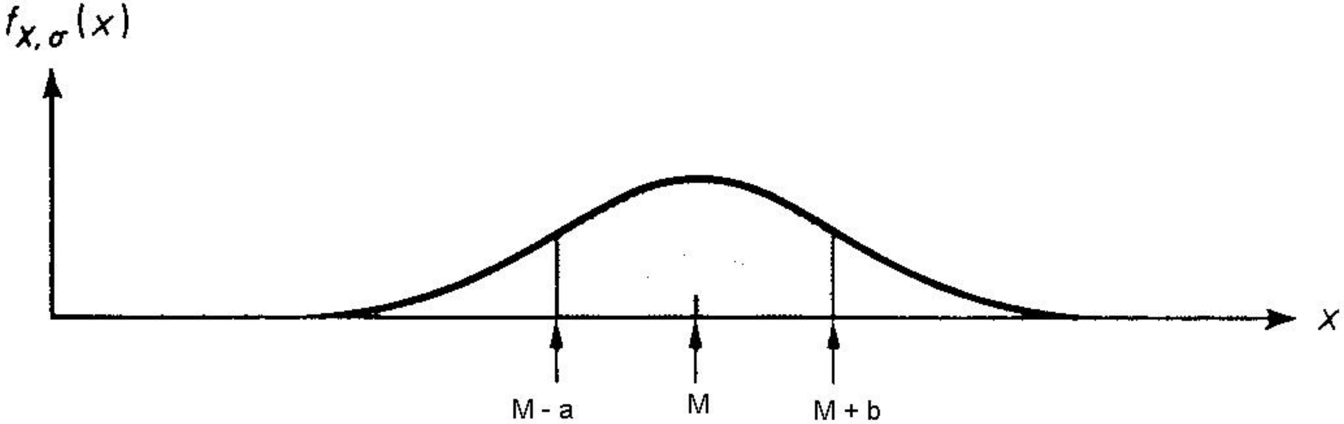
$$\boxed{\text{Wendepunkte bei} \quad x = M \pm \sigma}$$

Kleine Übungsaufgabe: Überprüfen Sie dieses Ergebnis!

Bedeutung der Standardabweichung

Wir fragen, welcher Anteil der Messungen liegt zwischen M - a und M + b ?

$$P\left(\text{innerhalb} \quad \mathrm{M}-\mathrm{a} \quad \text{und} \quad \mathrm{M}+\mathrm{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma}\int_{M-a}^{M+b} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$



Zunächst $a = b = \sigma$

Bedeutung der Standardabweichung

Wir fragen, welcher Anteil der Messungen liegt zwischen M - σ und M + σ?

$$P\left(\text{innerhalb}\,\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\int_{M-\sigma}^{M+\sigma} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Vereinfachung durch Substitution

$$(x - M)/\sigma = z$$

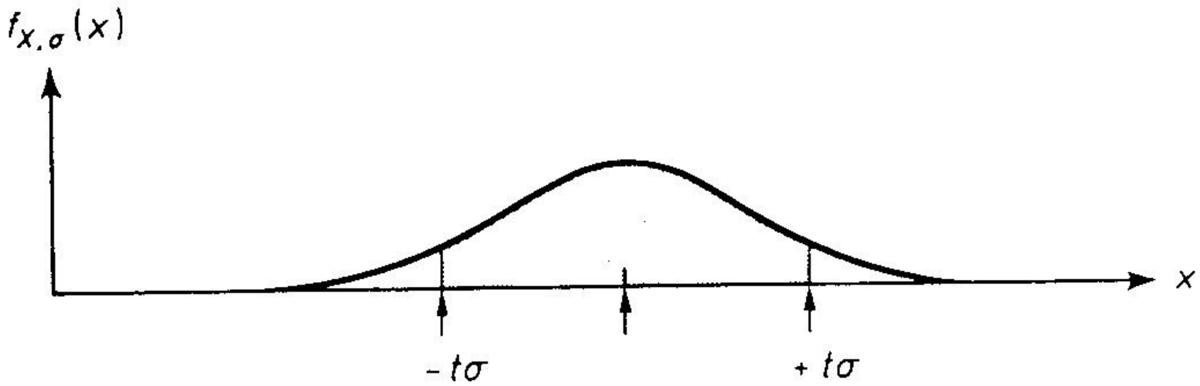
damit wird $dx = \sigma\, dz$ und die Integrationsgrenzen 1

$$P\left(\text{innerhalb}\ \sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{+1} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

Bedeutung der Standardabweichung

$$P\left(\text{innerhalb } 1\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz$$

Dieses Integral ist ein Standardintegral der mathematischen Physik und wird oft als **Fehlerfunktion** bezeichnet, Bezeichnung erf(t) [errorfunction].



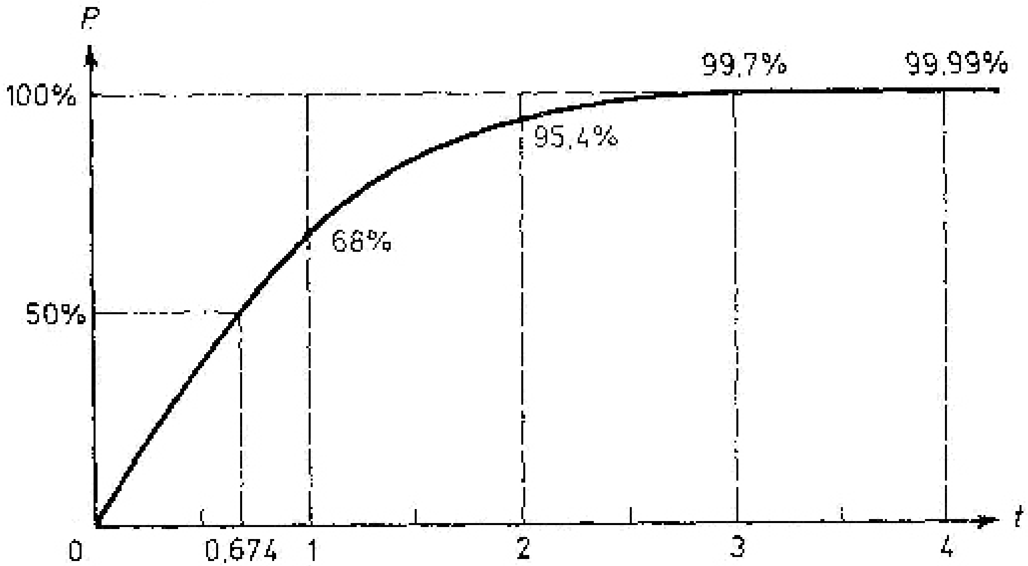
$$P\left(\text{innerhalb } t\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz$$

Die Fehlerfunktion

$$P\left(\text{innerhalb } t\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Dieses Integral kann nicht analytisch ausgewertet werden.

Es liegt in tabellarischer Funktion vor.



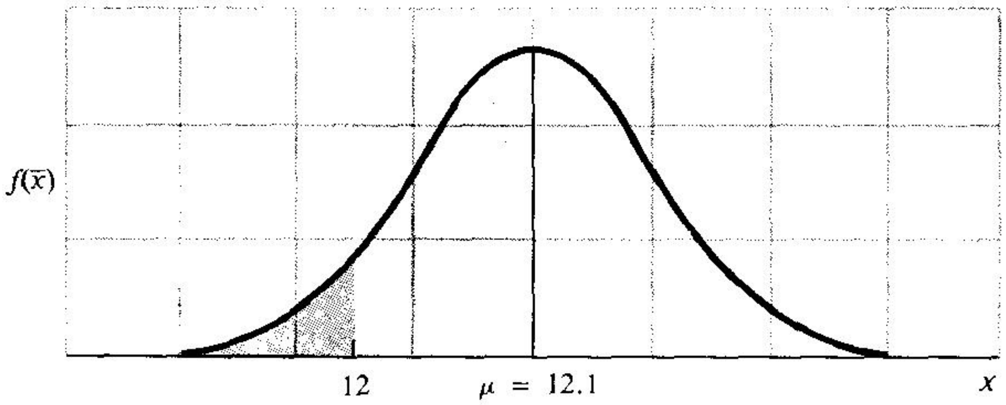
t	P (%)
0	0
0.25	20
0.5	38
0.75	55
1.0	68
1.25	79
1.50	87
1.75	92
2.0	95.4
2.5	98.8
3.0	99.7
3.5	99.95
4	99.99

Die Fehlerfunktion – allgemeine Form

Häufig auftretende Fragestellungen:

Wie viel % der Messwerte liegen oberhalb (unterhalb) eines bestimmten Messwertes?

Wie groß ist das Integral bis zu einem bestimmten Wert ?



$$\Phi(\text{zwischen } -\infty \text{ und } t \cdot \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$