12. Übung zur Einführung in die Algebra

Diese Übung wird nicht korrigiert. Es findet keine Abgabe statt. Der Stoff des Übungszettels ist klausurrelevant.

Aufgabe 12.1

Sei $R := K^{n\times n}$ der Ring der $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie, dass $\{0\}$ und R die einzigen Ideale von R sind, vgl. Bemerkung 3.13.

Aufgabe 12.2

Seien R ein kommutativer Ring und $g \in R[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}^\star$. Sei $I := gR \trianglelefteq R[X]$ das von g erzeugte Ideal von $R[X]$. Zeigen Sie:

(a) Jedes Element des Faktorrings $R[X]/I$ lässt sich in der Form

$$r_0 + r_1 X + \cdots + r^{n-1} X^{n-1} \ + I \qquad \text{mit gewissen } r_i \in R$$

darstellen. Es gilt also $R[X]/I = \{r_0 + r_1 X + \cdots + r^{n-1} X^{n-1} \ + I \mid r_0, \dots, r_{n-1} \in R\}$.

(b) Die Elemente $\sum_{i=0}^{n-1} r_i X^i \ + I$ aus der Menge in Teil (a) sind paarweise verschieden, d. h. für beliebige $r_0, \dots, r_{n-1}, s_0, \dots, s_{n-1}$ gilt

$$(r_0, \dots, r_{n-1}) \neq (s_0, \dots, s_{n-1}) \implies \sum_{i=0}^{n-1} r_i X^i \ + I \neq \sum_{i=0}^{n-1} s_i X^i \ + I.$$

Aufgabe 12.3 (Staatsexamen Herbst 2020)

Zur Abkürzung schreiben wir $\mathbb{Z}_n$ für den Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die vier Ringe

$$R_1 := \mathbb{Z}_4, \quad R_2 := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad R_3 := \mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X], \qquad R_4 := \mathbb{Z}_2[X]/(X^2 + X + 1)\mathbb{Z}_2[X]$$

paarweise nicht isomorph sind.

(Hinweis: Für zwei Ringe R, S bezeichnet $R \times S$ das direkte Produkt von R und S. Erklärt man Addition und Multiplikation komponentenweise, so wird $R \times S$ zu einem Ring mit additiv Neutralem $(0_R, 0_S)$ und multiplikativ Neutralem $(1_R, 1_S)$.)

Aufgabe 12.4 (Staatsexamen Frühjahr 2021)

Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, falls $a^n = 0$ für ein $n \geq 1$ gilt.

(a) Begründen Sie, warum Null in einem Körper das einzige nilpotente Element ist.

(b) Zeigen Sie, dass das *Nilradikal* $N := \{a \in R \mid a \text{ ist nilpotent}\}$ ein Ideal ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Nilradikal in jedem Primideal P von R enthalten ist.

Hinweis: Es wird insgesamt 12 Übungszettel geben, wobei der 12. Übungszettel zwar in den Präsenzübungen behandelt, jedoch nicht mehr korrigiert wird. Der 12. Übungszettel liefert daher keine Übungspunkte mehr.

Die Präsenzübungen in der letzten Vorlesungswoche finden statt. Sie können diese Übungen als allgemeine Fragestunden zum Stoff nutzen.

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.