Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 5

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 21, 2024)

Aufgabe 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \mathrm{d}z = 4^n i \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Folgern Sie mithilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

Beweis. Wir betrachten den Weg $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Das Integral ist also

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} e^{-it}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^{2n} ie^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= i\int_0^{2\pi} e^{-it}2^{2n}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2n} e^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= 4^n i\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t \\
&= 4^n i\int_0^{2\pi}\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Jetzt berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \mathrm{d}z &= \int_{\partial D} \frac{1}{z}(z^{2n})\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{2n}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\partial D} z^{2n-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2n}{k}\frac{1}{z^{2k}}\right]\mathrm{d}z \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2n}{k}\int_{\partial D} z^{2n-2k-1}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

wobei wir die Summe und das Integral vertauschen dürfen, weil die Summe gleichäßig konvergiert. Außerdem wissen wir, dass das Integral verschwindet wenn $2n-2k-1 \neq -1$. Also nur $k=n$ bleibt und

$$4^n i\int_0^{2\pi}\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial D}\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\mathrm{d}z$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{aligned}
&= \binom{2n}{n} \int_{\partial D} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2} (2\pi i),
\end{aligned}
$$

also

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$ 🎉

Aufgabe 2. Es seien G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(G)$ mit $f', g' : G \to \mathbb{C}$ stetig sowie γ ein geschlossener Weg in G. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma f'(w)g(w)\,\mathrm{d}w = -\int_\gamma f(w)g'(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

Beweis. Wir bezeichnen den Definitionsbereich von γ mit $I := [a, b]$, also $\gamma : I \to G$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f'(w)g(w)\,\mathrm{d}w &= \int_I f'(\gamma(t))g(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [f(\gamma(t))g(\gamma(t))]_a^b - \int_I f(\gamma(t)) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(\gamma(t)))\right] \mathrm{d}t \\
&= -\int_I f(\gamma(t))g'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_\gamma g(w)g'(w)\,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

wobei $f(\gamma(t))g(\gamma(t))|_a^b = 0$, weil $\gamma(b) = \gamma(a)$. 🎉

Aufgabe 3. Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass U höchstens abzählbar viele Komponenten besitzt.

(b) Konstruieren Sie ein Beispiel einer unbeschränkten offenen Menge U mit unendlich vielen Komponenten.

(c) Konstruieren Sie ein Beispiel einer beschränkten offenen Menge U mit unendlich vielen Komponenten.

Beweis. (a) $\mathbb{C}$ erfüllt das zweite Abzählbaraxiom. Insbesondere wählen wir als abzählbare Basis die offene Kugeln mit rationalen Koordinaten und rationalem Radius. Die Basiselemente sind zusammenhängend.

Wir nehmen an, dass U überabzählbar viele Komponenten besitzt. Wir wählen für jede Komponente einen Vertreter x_i, $i \in I$. Für jedes x_i wählen wir ein Basiselement $x_i \in B_i \subseteq U$, was möglich ist, weil U offen ist.

Das Basiselement liegt in höchstens 1 Komponente, weil das Basiselement zusammenhängend ist. Wir brauchen dann überabzählbar viele Basiselemente, ein Widerspruch.

(b) Die Menge

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_1(2k)$$

ist offen (als Vereinigung offene Mengen), unbeschränkt (für jedes $k \in \mathbb{N}$ enthält M das Element $2k \in \mathbb{C}$) und hat unendlich viele Komponenten (die Kugeln in der Vereinigung sind die Komponenten). 🎉