Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 9, 2023)

Problem 1. Wir ändern die Gruppendefinition aus Definition 2.3 ab, indem wir für eine Menge G mit einer zweistelligen Verknüpfung $\cdot$ und einem Element $e \in G$ fordern:

(a) Es gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in G$.

(b) Es gilt $a \cdot e = a$ für alle $a \in G$.

(c') Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element $b \in G$ mit $b \cdot a = e$

Ist dann G stets eine Gruppe?

Proof. Nein. Sei $x \cdot y = x$. Es ist assoziativ, weil $x \cdot (y \cdot z) = x = (x \cdot y) \cdot z$. Es gilt auch $x \cdot e = x \ \forall x$. Außerdem gilt $e \cdot x = e \ \forall x \in G$. Aber es gilt für alle $e \neq x \in G$, dass $x \cdot y = x \neq e \ \forall y \in G$. G ist dann keine Gruppe. □

Problem 2. Sei $n \in N$ mit $n \geq 3$ fixiert. Wir setzen $\alpha := \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$ und definieren die folgenden zwei Abbildungen:

$$s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \to \bar{z} \qquad \text{sowie} \qquad r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \to \alpha z.$$

Das neutrale Element der Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ bezeichnen wir mit e und mit $\cdot$ die Verkettung von Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $s^2 = e$ und $r \cdot s \cdot r = s$ gelten.

(b) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ genau dann $r^k = e$ gilt, wenn $n|k$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass r und s Elemente der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ sind.

(d) Zeigen Sie, dass $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

---

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(e) Zeigen Sie, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $t \in \mathbb{N}$ mit $r^{-k} = r^t$ existiert.

(f) Beschreiben Sie das Abbildungsverhalten von r und s geometrisch.

(g) Folgern Sie aus (a)–(e), dass $\{r^x \cdot s^y | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$ gilt.

(h) Zeigen Sie, dass $D_n := \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$ eine Gruppe ist.

(i) Beweisen Sie, dass $|D_n| = 2n$ gilt.

(j) Zeigen Sie, dass D_n nicht abelsch ist.

Proof. (a) $s^2 = e$ folgt aus $\overline{\overline{z}} = z$. Es gilt

$$\begin{aligned}(r \cdot s \cdot r)(z) =& (r \cdot s)\left(\exp(2\pi i/n) z\right) \\ =& r\left(\exp(-2\pi i/n)\overline{z}\right) \\ =& \exp(2\pi i/n)\exp(-2\pi i/n)\overline{z} \\ =& \overline{z}\end{aligned}$$

Also $r \cdot s \cdot r = s$.

(b) Wir wissen, $r^k(z) = \exp(2\pi i k/n) z$. $r^k = e$ genau dann, wen $\exp(2\pi i k/n) = 1$, also $n | k$.

(c) Sie sind bijektiv. Wir schreiben einfach die Umkehrfunktion.

$$s^{-1} = s \tag{a}$$

$$\begin{aligned}f(x) =& \exp(-2\pi i/n) x \\ r \circ f =& e = f \circ r\end{aligned}$$

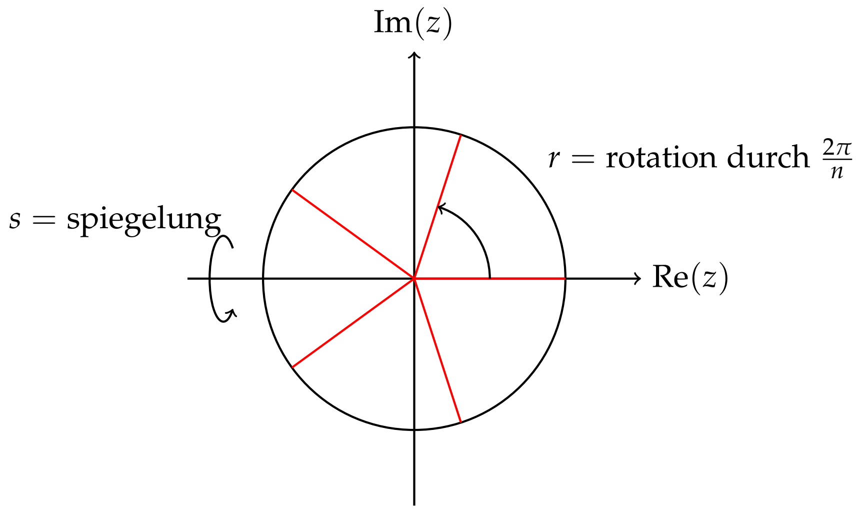
(d)

$$\begin{aligned}(s \cdot r^k)(z) =& s\left(\exp\left(2\pi i k/n\right) z\right) \\ =& \exp\left(-2\pi i k/n\right) \overline{z} \\ (r^{-k} \cdot s)(z) =& \left(r^{-k}\right)(\overline{z}) \\ =& \exp(-2\pi i k/n)\overline{z} \\ =& (s \cdot r^k)(z)\end{aligned}$$

(e) Sei $t = -k + pn, p \in \mathbb{N}$, für p hinreichend groß, damit $t > 0$ und daher $p \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$s^t = s^{-k+pn} = s^{-k}s^{pn} = s^{-k}(s^n)^p = s^{-k}.$$

(f)



(g) Sei $y = 2n + b, b \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$s^y = s^{2n+b} = s^{2n} \cdot s^b = e \cdot s^b = s^b.$$

(h) (i) D_n ist abgeschlossen

$$\begin{aligned} r^a \cdot s^b \cdot r^{a'} \cdot s^{b'} =& r^a \cdot r^{-a'} \cdot s^b \cdot s^{b'} && \text{(d)} \\ =& r^{a-a'} s^{b+b'} \\ \in& D_n && \text{(g)} \end{aligned}$$

(ii) D_n ist assoziativ wegen der Assoziatitivät von Funktionverkettung.

(iii) Neutrales Element

$a = 0, b = 0, r^0 \cdot s^0 = e \in D_n$.

(iv) Inverses Element

$$s^{-b} \cdot r^{-a} \cdot r^a \cdot s^b = s^{-b} \cdot (r^{-a} \cdot r^a) \cdot s^b = s^{-b} \cdot s^b = e.$$

Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
s^{-b} \cdot r^{-a} &= r^a \cdot s^{-b} && \text{(d)} \\
&= r^a \cdot s^c,\ 0 \le c < 2 && \text{(a)}
\end{aligned}
$$

(i) Es gibt genau n Möglichkeiten für a, und 2 Möglichkeiten für b. Daraus folgt $|D_n| = 2n$.

(j) Wir haben $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$ (d), und müssen nur k finden, sodass $r^k \neq r^{-k}$. $k = 1$ ist ein Gegenbeispiel. $\square$