Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Wachsmuth
Bastian Dittrich

Wintersemester 2023/24

5. Übung zur Vertiefung Analysis

15. November 2023

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 22. November 2023* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

Aufgabe 5.1 (positive Funktion, 3 Punkte) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und messbar. Es existiere eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ und eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) > 0$ existieren, sodass $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in B$ gilt.

Aufgabe 5.2 (fast überall konvergent, 4 Punkte) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei (f_n) punktweise μ-fast überall konvergent, d.h. es existiert eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ und eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, sodass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ gilt. Zeigen Sie, dass f messbar ist.

Aufgabe 5.3 (messbare Funktionen, 4 Punkte) Sei $A \subsetneq \mathbb{R}$ nichtleer. Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^c, \mathbb{R}\}$ messbar sind.

Aufgabe 5.4 (Borel-Maßraum, 6 Punkte) Der Beweis von Lemma 1.83 funktioniert anstelle von $[0, 1]$ auch analog für jede beliebige Lebesgue-messbare Menge in $\mathbb{R}$, die keine Nullmenge ist. Das heißt für jede solche Menge existiert eine Teilmenge, die nicht Lebesgue-messbar ist.

Sei nun f die Cantor-Funktion aus Präsenzübung 3 und definiere $g : [0, 1] \to [0, 2]$, $x \mapsto x + f(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass g bijektiv und die Umkehrfunktion g^{-1} messbar ist.

(b) Zeigen Sie nun, dass der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda_1|_{\mathcal{B}^1})$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Nutzen Sie eine geeignete nicht Lebesgue-messbare Menge.