

# Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 12

Jun Wei Tan\* and Lucas Wollmann

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: January 31, 2024)

**Problem 1. (Parametrisierung)** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\alpha$  und  $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$ . Außerdem existieren offene Mengen  $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$  und lokale Parameterdarstellungen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $M$  mit  $\varphi(U) \cup \psi(V) = M$  und  $\varphi(U) = M \setminus A$ , wobei  $A = \psi(N)$  mit einer  $\lambda_k$ -Nullmenge  $N \subseteq V$  gilt. Zeigen Sie, dass  $A$  messbar ist und

$$\int_M f \, d\lambda_M = \int_{M \setminus A} f \, d\lambda_M = \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \, d\lambda_k.$$

**Problem 2. (Nullmengen)** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(a) Sei  $N \in \mathcal{L}_m$  mit  $\lambda_M(N) = 0$ . Dann gilt  $\lambda_{M,V}(N) = 0$  für alle in  $M$  offenen Mengen  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  für die eine lokale Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow V$ , mit  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen, existiert.

(b) Zeigen Sie, dass  $M$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge ist.

*Hinweis: Satz 3.5*

**Problem 3.** Seien  $0 < r < R$  und

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 = 0 \right\}$$

die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit aus Präzenzaufgabe 10.1. Definiere außerdem die Funktion

$$\varphi : U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot (R + r \cos \beta) \\ \sin \alpha \cdot (R + r \cos \beta) \\ r \sin \beta \end{pmatrix}.$$

---

\* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

- (a) Zeigen Sie, dass eine Menge  $A \subseteq T$ , eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^2$ , ein Homöomorphismus  $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subseteq T$  und eine  $\lambda_2$ -Nullmenge  $N \subseteq V$  existiert, sodass  $\varphi : U \rightarrow T \setminus A$  ein Homöomorphismus ist und  $\psi(N) = A$  gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass  $\lambda_T(T) = 4\pi^2 Rr$  gilt.