Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 6

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: June 21, 2024)

I. BEREINGUNG DER UNTERGRUND

Wir führen eine Messung durch und erhalten die folgenden Messwerte für die Zählereignisse eines befüllten Behälters und die Zählereignisse eines *leeren* Behälters.

Winkel (°)	**Zählereignisse befülltes Behälters (y_f)**	**Zählereignisse leeres Behälters (y_l)**
155	184	5
135	134	4
120	99	4
100	49	1
90	53	3
75	55	1
65	70	4
55	81	9
40	130	8
20	216	7

Zur Bereinigung der Untergrund müssen wir die Zählereignisse bei einem leeren Behälter vom Zählereignisse bei einem befüllten Behälter abziehen. Es ist allerdings dabei zu beachten, dass die Anzahl der Teilchen in dieser Messung eine Hälfte die Anzahl beim Versuch mit

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

einem befüllten Target, also wir müssen *zweimal* y_l vom y_f abziehen. Wir bezeichnen die Anzahl der Ereignisse ohne Untergrund als y.

$$y = y_f - 2y_l \tag{1}$$

Der Fehler kann nach Gauss fortgepflanzt werden:

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y_f)^2 + 4(\Delta y_l)^2}$$

Wir nehmen an, dass die Anzahl der Ereignisse poissonverteilt ist. Daher ist der Fehler in y_f $\Delta y_f = \sqrt{y_f}$ und analog für $\Delta y_l = \sqrt{y_l}$. Daraus ergibt sich

$$\Delta y = \sqrt{y_f + 4y_l} \tag{2}$$

Winkel (°)	$\cos\theta$	**Zahlereignisse ohne Untergrund (y)**
155	-0.906308	174 ± 14
135	-0.707107	126 ± 12
120	-0.5	91 ± 11
100	-0.173648	$47,0 \pm 7,3$
90	0.	$47,0 \pm 8,1$
75	0.258819	$53,0 \pm 7,7$
65	0.422618	$62,0 \pm 9,3$
55	0.573576	63 ± 11
40	0.766044	114 ± 13
20	0.939693	202 ± 16

II. REGRESSION

Wir suchen die Parameter $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Funktion

$$y(x) = a_1 P_0(x) + a_2 P_1(x) + a_3 P_2(x) \tag{3}$$

die beste Anpassung an die Daten ist. Dabei sind $P_i,\ i \in \{0, 1, 2\}$ die *Legendre-Polynomen*

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Die Regressionskoeffizienten ergeben sich durch

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

Wir berechnen den Fehler analog wie Blatt 5. Daraus ergeben sich die Bestwerte

$$a_1 = 93,4 \pm 3,4$$
$$a_2 = -11,9 \pm 6,6$$
$$a_3 = 104,3 \pm 8,0$$

III. GÜTE DER ANPASSUNG

Für eine qualitative Schätzung der Güte der Messung verwenden wir ein Residuenplot
Das Residuenplot zeigt, wie weit weg die Punkte von unserer Regressionskurve ist. Insgesamt ist die Streuung ordentlich und symmetrisch, also es gibt ungefähr die gleiche Anzahl von Punkte, die oberhalb und unterhalb der Nulllinie sind. Das heißt, dass die Streuung scheinbar zufällig verteilt ist. Die Werte mit Streuwinkel weniger als 60° haben größer Fehler als die andere Werte. Das könnte an einem winkelabhängigen systematischen Fehler liegen, z.B. die Justierung des Messapparats. Außerdem ist es nur zu erwarten, dass 68,3% der

Messwerte innerhalb eines σ-Bandes liegen sollen, also einige Punkte mit größere Streuung ist auch zu erwarten. Insgesamt können wir die Anpassung als sinnvoll erachten. Für eine quantitative Schätzung der Güte könnten wir das χ^2-Test verwenden.