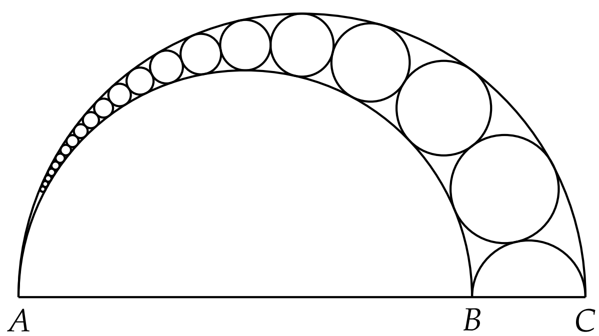
Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 9, 2024)

Aufgabe 1. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}_0$ Halbkreise mit Durchmessern AC, AB bzw. BC, sodass A, B und C auf einer Gerade liegen. Wir betrachten erner Kreise $\mathcal{C}_\backslash$ für $n \in \mathbb{N}$ tangential zu den Halbkreisen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$, sodass ferner $\mathcal{C}_n$ tangential zu $\mathcal{C}_{n-1}$ in einem Punkt P_n ist. Zeigen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, die alle Berührpunkte $P_0, P_1, \ldots$ enthält.



Beweis. Wir führen ein Möbiustransformation durch. OBdA nehmen wir an, dass A das Ursprung ist.

Danach betrachten wir die Inversion $z \mapsto 1/z$. Die reelle Achse wird offensichtlich auf die reelle Achse abgebildet. Insbesondere bleiben B und C auf der reellen Achse. A wird auf ∞ abgebildet.

Schritt 1: Die große Halbkreisen werden auf vertikale Geraden abgebildet.

Wir schreiben die Koordinaten von B bzw. C als x, $x \in \mathbb{R}$. Das höchste Punkt hat Koordinaten $x/2 + ix/2$. Das wird auf

$$\frac{1}{\frac{x}{2} + i\frac{x}{2}} = \frac{1-i}{x} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x}.$$

Das heißt, dass die Halbkreisen auf vertikalen Geraden bei x-Koordinaten $1/(2R_1)$ und $1/(2R_2)$ abgebildet werden.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Aufgabe 2. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$ und $K_R(z_0)$, $0 < R < \infty$, die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \; z \in K_R(z_0).$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $r \in [0, R)$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t$.

(b) Falls $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in K_R(z_0)$, so gilt $|a_k| \leq M \frac{1}{R^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(z_0 + re^{it}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{kit} \\
\overline{f}(z_0 + re^{it}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^k e^{-kit} \\
|f(z_0 + re^{it})|^2 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{kit} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^k e^{-kit} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \left(a_l r^l e^{lit} \overline{a}_{k-l} r^{k-l} e^{-(k-l)it} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[r^k \sum_{l=0}^{k} a_l \overline{a}_{k-l} e^{(2l-k)it} \right]
\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig, also wir dürfen die Summe und das Integral vertauschen

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[r^k \sum_{l=0}^{k} a_l \overline{a}_{k-l} e^{(2l-k)it} \right] \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{l=0}^{k} a_l \overline{a}_{k-l} \int_0^{2\pi} e^{(2l-k)it} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Wir wissen aber, dass das Integral nur ungleich Null ist genau dann, wenn $2l - k = 0$. Weil $2l$ gerade ist, muss k auch gerade sein. Daher substituieren wir $k := 2p, \; p \in \mathbb{N}_0$. Der Ausdruck ist

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} r^{2p} \sum_{l=0}^{2p} a_l \overline{a}_{2p-l} \int_0^{2\pi} e^{(2l-2p)it} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} r^{2p} |a_p|^2 (2\pi) \qquad \text{Nur } l = p \text{ Fall bleibt}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| \,\mathrm{d}t$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^2 \,\mathrm{d}t \\ &= M^2 \end{aligned}$$

andererseits gilt, weil alle Terme in der Summe positiv sind,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \geq |a_p|^2 r^{2p}$$

für alle $p \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

für alle $r \in [0, R)$. Dann muss $|a_k| \leq M/R^k$ sein.

Aufgabe 3. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in K_r(z_0)$ folgende Identität gilt:

$$\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z)^k} \,\mathrm{d}w = 0.$$

Warum schließen wir $k = 1$ aus?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $z = z_0$ und versuchen Sie anschließend den allgemeinen Fall auf diesen zurückzuführen.

Beweis. Spezialfall $z = z_0$: Wir parametrisieren den Weg durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $\gamma'(t) = ire^{it}$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0)^k} \,\mathrm{d}w &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z_0)^k} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(z_0 + re^{it} - z_0)^k} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} ir^{1-k} e^{(1-k)it} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= i r^{1-k}\left[\frac{1}{i(1-k)}e^{(1-k)it}\right]_0^{2\pi} && k \neq 0\\
&= \frac{r^{1-k}}{1-k}\left[e^{2\pi(1-k)i} - e^0\right]\\
&= \frac{r^{1-k}}{1-k}\left[1-1\right] = 0
\end{aligned}
$$

Jetzt im Allgemein:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z)^k}\,\mathrm{d}w &= \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0+z_0-z)^k}\,\mathrm{d}w\\
&= \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0)^k}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{z_0-z}{w-z_0}\right)\right)^k}\,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

Da $|w-z_0| = r$ und $|z_0 - z| < r$, ist

$$
\left|\frac{z_0-z}{w-z_0}\right| < 1.
$$

Daher dürfen wir den Ausdruck in einer Potenzreihe entwickeln.

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z)^k}\,\mathrm{d}w\\
=&\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0)^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k}{n}\left(\frac{z_0-z}{w-z_0}\right)^n\mathrm{d}w\\
=&\int_{\partial K_r(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k}{n}\frac{(z_0-z)^n}{(w-z_0)^{k+n}}\,\mathrm{d}w\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{(z_0-z)^n}{(w-z_0)^{k+n}}\,\mathrm{d}w\\
=&\sum_{n=0}^{\infty} 0\\
=&0
\end{aligned}
$$

wobei wir die Summe und das Integral tauschen dürfen, weil die Reihe gleichmäßig konvergiert. 🎉

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und $g(z) = zf(z)$.

(a) Sei $K \subset \mathbb{D}$ kompakt. Beweisen Sie, dass die Funktionreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g(z^n)$ gleichmäßig auf K konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g(z^n)$ nicht notwendigerweise gleichmäßig auf der ganzen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ konvergiert.