Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 1

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 15, 2024)

Aufgabe 1. Es seien $\mathbb{D} = K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{D}$.

(a) Zeigen Sie

$$|a - z| < |1 - \overline{a}z| \iff |z| < 1$$

und

$$|a - z| = |1 - \overline{a}z| \iff |z| = 1.$$

Hinweis: $|\cdot|^2$

(b) Es sei die folgende bijektive (holomorphe) Funktion definiert:

$$T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ T_a(z) := \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von T_a.

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
|a - z|^2 =& (a - z)\overline{(a - z)} \\
=& (a - z)(\overline{a} - \overline{z}) \\
=& |a|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |z|^2 \\
|1 - \overline{a}z|^2 =& (1 - \overline{a}z)(1 - \overline{a}z)^* \\
=& (1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{z}) \\
=& 1 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2|z|^2.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$|a - z| < |1 - \overline{a}z|$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}
&\iff |a-z|^2 < |1-\bar{a}z|^2 \\
&\iff |a|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |z|^2 \\
&\qquad < 1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2,
\end{aligned}$$

was genau dann erfüllt ist, wenn

$$\begin{aligned}
|a|^2 + |z|^2 <&1 + |a|^2|z|^2 \\
1 >&|a|^2 + |z|^2 - |a|^2|z|^2 \\
=&|a|^2 + |z|^2(1 - |a|^2)
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die rechte Seite der Gleichung eine monoton steigende Funktion von $|z|^2$. Da $a \in \mathbb{D}$, ist $0 \leq |a|^2 < 1$. Wenn wir a als fest betrachten, und nach der passenden $|z|$ suchen, brauchen wir also nur einen Wert von $|z|$. Denn

$$|a|^2 + (1)(1 - |a|^2) = 1,$$

ist 1 der "kritische Wert", also

$$\begin{aligned}
&1 > |a|^2 + |z|^2(1 - |a|^2) \\
\iff &1 > |z|^2 \\
\iff &1 > |z|
\end{aligned}$$

Der zweite Teil folgt aus den gleichen Ausdrucke.

(b)

$$\begin{aligned}
T_a(x) =&\frac{a-z}{1-\bar{a}z} \\
=&a\frac{1-z/a}{1-\bar{a}z} \\
=&a\frac{1-\frac{z}{a}+\bar{a}z-\bar{a}z}{1-\bar{a}z} \\
=&a\left[1+\frac{\bar{a}z-\frac{z}{a}}{1-\bar{a}z}\right] \\
=&a\left[1+\frac{\bar{a}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{z}-\bar{a}}\right]
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{\bar{a}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{z}-\bar{a}} =\frac{T_a(z)}{a} - 1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z} - \overline{a} &= \frac{\overline{a} - \frac{1}{a}}{\frac{T_a(z)}{a} - 1} \\
\frac{1}{z} &= \frac{1}{\frac{T_a(z)}{a} - 1}\left[\overline{a} - \frac{1}{a} + \frac{\overline{a}}{a} T_a(z) - \overline{a}\right] \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{T_a(z)}{a} - 1}\left[\overline{a} T_a(z) - 1\right]
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$T_a^{-1}(z) = \frac{z - a}{\overline{a} z - 1}.$$

Aufgabe 2. (a) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2}(e^{|y|} - e^{-|y|})$$

ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ *vgl. Beispiel 1.8*

(b) Gegeben sei die Funktionfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$f_n(z) := \frac{\sin(nz)}{n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Geben Sie die Menge M aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ an, für die $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n \to \infty} f_n(z), \qquad z \in M.$$

(c) Konvergiert die Funktionfolge $\{f_n\}$ gleichmäßig auf M?