Wintersemester 2024/2025 — 31.10.2024
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

3. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 04.11. und 05.11. gelöst.

Aufgabe P3.1

Welche der folgenden Funktionen $f(t,x)$ ist/sind auf dem Rechteck R stetig und Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen? Beweisen Sie Ihre Aussage und geben Sie gegebenenfalls eine Lipschitz-Konstante an.

a) $f(t,x) = e^{t^2 x} \cos(tx)$, $R = [0,1] \times [-\pi, \pi]$,

b) $f(t,x) = \frac{x}{t}$, $R = (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Aufgabe P3.2

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) f ist stetig differenzierbar $\implies$ f ist lokal lipschitz-stetig.

b) f ist stetig $\implies$ f ist lokal lipschitz-stetig.

c) f ist lokal lipschitz-stetig $\implies$ f ist differenzierbar.

d) f ist differenzierbar $\implies$ f ist lokal lipschitz-stetig.

Wintersemester 2024/2025 — 31.10.2024
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

3. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 07.11.2024 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H3.1 **(2 + 5 = 7 Punkte)**

a) Eine Riccati-Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2, \tag{1}$$

wobei $a, b, c : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ offen, stetige Funktionen sind. Zeigen Sie:

Kennt man eine Lösung $\varphi(t)$ von (1), so kann man (1) mit der Transformation $y = x - \varphi(t)$ in eine Bernoullische Differentialgleichung umwandeln.

b) Kreuzen Sie bei der folgenden Tabelle an, welche Differentialgleichungen linear, nicht linear, homogen, inhomogen, bernoullisch oder riccatisch sind.

DGL	linear	nichtlinear	homogen	inhomogen	bernoullisch	riccatisch
$\sin(4t)x + 3\dot{x} + \sqrt{t} = 0$						
$t\dot{x} - 2x + 2tx^2 = 0$						
$\dot{x} - 2e^{2t}x + 3x^2 = 1 + e^{2t}$						
$\dot{x} + 3x = 0$						
$\dot{x} + 2x - tx^4 = 0$						

Aufgabe H3.2 **(2 + 3 + 2 + 4 = 11 Punkte)**

In der Literatur findet man den *Potenzreihenansatz* zur Lösung von Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen. Um die Vorgehensweise dieses Ansatzes zu verstehen, betrachten wir die Differentialgleichung des Federpendels

$$m\ddot{x} + Dx = 0, \tag{2}$$

wobei $m > 0$ (Masse) und $D > 0$ (Federkonstante) gilt.

a) Ermitteln Sie mit dem Ansatz

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

durch gliedweises Differenzieren, Einsetzen in (2) und Koeffizientenvergleich eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten a_n.

b) Leiten Sie mit Hilfe der Rekursionsgleichung aus Teil a)

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{D}{m}\right)^k t^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{D}{m}\right)^k t^{2k+1}$$

her.

c) Zeigen Sie, dass

$$\varphi(t) = a_0 \cos(\omega t) + \frac{a_1}{\omega} \sin(\omega t), \quad \omega := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

gilt.

d) Lösen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes das Anfangswertproblem

$$\dot{x} + x = t, \qquad x(0) = x_0. \tag{3}$$

(*Hinweis: Falls Sie Probleme haben die entstehende Potenzreihe zu erkennen, dann lösen Sie für sich die Differentialgleichung mit dem Ansatz der Variation der Konstanten und vergleichen Sie Ihre Lösung mit der Potenzreihe.*)

Aufgabe H3.3 **(6 Punkte)**

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = |x|^a, \qquad x(0) = 0$$

genau im Fall $a \geq 1$ eine eindeutige Lösung für $t \geq 0$ besitzt.

Wintersemester 2024/2025 31.10.2024
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy Andreas Schroll

3. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Freiwillige Aufgaben

Bitte geben Sie diese Aufgaben nicht mit der Hausaufgabe ab.

Bei H2.3 haben wir gezeigt, dass wir einen integrierenden Faktor konstruktiv bestimmen können, wenn $\beta(t,x)$ nur von x abhängt. Ähnlich kann man auch einen integrierenden Faktor konstruktiv bestimmen, wenn $\tilde{\beta}(t,x)$ (bei F3.1 definiert) nur von t abhängt.

Aufgabe F3.1 **(Freiwillige Aufgabe, keine Abgabe)**

Gegeben sei eine Differentialgleichung für $(t,x) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Form

$$M(t,x) + N(t,x)\dot{x} = 0, \tag{4}$$

die der Exaktheitsbedingung $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ *nicht* genügt.

a) Seien N, M stetig differenzierbare Funktionen auf $\tilde{D} \to \mathbb{R}$, wobei $N(t,x) \neq 0$ für alle $(t,x) \in \tilde{D}$ für ein offenes Rechteck $\tilde{D} \subset U$. Zeigen Sie: Hängt $\widetilde{\beta}(t,x) := \frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)$ allein von t ab, so ist $\mu(t) := \exp\left(-\int_{t_0}^t \tilde{\beta}(s)\ \mathrm{d}s\right)$ für $(t_0, x_0) \in \tilde{D}$ ein integrierender Faktor von (4).

b) Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung

$$e^{-t}(t+x) - e^{-t}(x-t)\dot{x} = 0, \quad x(1) = 0$$

exakt ist oder ob ein integrierender Faktor existiert. Bestimmen Sie anschließend eine Stammfunktion $F_0(t,x)$.

Aufgabe F3.2 **(Freiwillige Aufgabe, keine Abgabe)**

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \frac{x^2 - t^2}{2tx}, \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$