Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 10, 2024)

Problem 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

(a) $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 8e^t$.

(b) $\ddot{x}(t) + x(t) = 4t\sin(t) - 2\sin(t)$.

Proof. (a) Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

mit Lösungen

$$\lambda = -1, 5.$$

Zwei lineare unabhängige Lösungen der homogenen DGL sind e^{-t} und e^{5t}. Für eine partikulare Lösung verwenden wir als Ansatz $x = Ae^t$. Eingesetzt ist

$$Ae^t - 4Ae^t - 5Ae^t = -8Ae^t = 8e^t.$$

und damit $A = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$\varphi(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{5t} - 8e^t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die charaktische Gleichung der homogenen DGL ist $x^2 + 1 = 0$ und hat Lösungen $x = \pm 1$. Die Lösung der homogenen DGL ist damit

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung einer Lösung der inhomogenen DGL verwenden wir den Ansatz

$$x(t) = At^2 \cos t + Bt \cos t + Ct \sin t$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

mit

$$
\begin{aligned}
\dot{x} =& 2At\cos t - At^2\sin t + B\cos t - Bt\sin t \\
&+ C\sin t + Ct\cos t \\
\ddot{x} =& 2A\cos t - 2At\sin t - 2At\sin t - At^2\cos t \\
&- B\sin t - B\sin t - Bt\cos t + C\cos t \\
&+ C\cos t - Ct\sin t \\
=& 2A\cos t - 4At\sin t - At^2\cos t - 2B\sin t - Bt\cos t \\
&+ 2C\cos t - Ct\sin t
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + x &= 2A\cos t - 4At\sin t - 2B\sin t + 2C\cos t \\
&= -4At\sin t - 2B\sin t + (2A + 2C)\cos t \\
&= 4t\sin t - 2\sin t.
\end{aligned}
$$

Nach Koeffizientenvergleich ist $A = -1,\ B = 1, C = 1$ und die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t - t^2\cos t + t\cos t + t\sin t. \qquad \square$$

Problem 2. Bestimmen Sie mit Begründung eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die folgende Lösungen besitzt:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 2e^{3t} + \sin(3t), \\
\varphi_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 3e^{-2t} + \sin(3t), \\
\varphi_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{-2t} + 5e^{3t} + \sin(3t).
\end{aligned}
$$

Proof. Wenn die DGL homogen wäre, bräuchten wir die folgenden Nullstellen der charakteristischen Polynom: $-2, 5, \pm 3i$. Da 4 Lösungen zu viel sind, muss die DGL inhomogen sein.

Die drei Lösungen haben $\sin 3t$ gemeinsam. Dies muss daher der inhomogenen Teil sein. Wir suchen also eine DGL, deren homogenen Teil e^{-2t} und e^{3t} als linear unabhängige Lösungen hat und $\sin 3t$ als partikuläre Lösung hat. Ein charakteristisches Polynom ist

$$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$$

und damit ist ein möglicher homogener Teil

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0.$$

Zur Bestimmung der inhomogenen Teil setzen wir einfach $\sin 3t$ ein:

$$-3\sin 3t - 3\cos 3t - 6\sin 3t = -9\sin 3t - 3\cos 3t.$$

Die DGL ist damit

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = -9\sin 3t - 3\cos 3t. \qquad \square$$

Problem 3. Sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig auf D und lokal Lipschitz-stetig in x ist. Weiterhin sei $C \geq 0$, sodass

$$\langle f(t, x), x\rangle \leq C|x|_2^2$$

für alle $(t, x) \in D$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichne hier das Standardskalarprodukt und $|\cdot|_2$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie: Für das maximale Existenzintervall $I = (t^-, t^+)$ der Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ von (1), gilt $t^+ = +\infty$.

Bemerkung: Eine Möglichkeit diese Aufgabe zu lösen, verwendet folgende Hinweise:

1. Verwenden Sie als Ansatz $y(t) = |x(t)|_2^2$.

2. In dieser Aufgabe können Sie die Separation der Variablen ohne Beweis auch auf Differentialungleichungen der Form $y' \leq f(y)$ anwenden.

Proof. Wie im Hinweis verwenden wir $y(t) = |x(t)|_2^2$. y erfüllt die DGL

$$\dot{y} = 2\langle x, \dot{x}\rangle = 2\langle f(t, x), x\rangle \leq 2Cy(t).$$

Nach Gronwall können wir die Differentialungleichung als Differentialgleichung betrachten bzw. die Ungleichung durch TDV lösen:

$$\int_{|x_0|^2}^{y(t)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \leq 2C\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}r$$

oder

$$\begin{aligned} \ln y(t) - 2\ln|x_0| &\leq 2(t - t_0) \\ y(t) &\leq |x_0|^2 e^{2(t-t_0)} \end{aligned}$$

Da der Definitionsbereich von f die ganze $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, kann t^+ nur ungleich ∞, indem die Lösung unbeschränkt wird. Die Ungleichung zeigt aber, dass dies für endliche Zeit nicht passieren kann. $\square$

PRÄZENSBLATT

Problem 4. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2x = 2\cos(t).$$

Proof.

$$x = A\cos\left(\sqrt{2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{2}t\right) + 2\cos t.$$

□

Problem 5. Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_3(t) = t^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Es ist bekannt, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Lösungen einer linearen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind.

Geben Sie die Menge aller Lösungen dieser Differentialgleichung an. Die Differentialgleichung selbst ist dabei nicht zu bestimmen. *(Hinweis: Beachten Sie, dass die Lösungen einer linearen inhomogenen Differentialgleichung einen affinen Unterraum aufspannen, siehe Satz 7.3.)*

Proof.

$$A + Bt + t^2$$

□

Problem 6. Bei zeitunabhängigen linearen Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax$ können wir mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion $\exp(At)$ eine Fundamentalmatrix angeben. Man könnte daher versuchen zu beweisen, dass bei zeitabhängigen linearen Differentialgleichungen $\dot{x} = A(t)x$ die Matrix-Exponentialfunktion

$$\Phi(t) := \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)$$

eine Fundamentalmatrix ist.

Erklären Sie, an welcher Stelle der Beweis schief gehen würde und belegen Sie dies mit einem Gegenbeispiel.

Proof.

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s\right)^k$$

$$
\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s \right)^{k-1} A(t) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s \right)^{k-1} \right] A(t) \\
&= \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s \right) A(t)
\end{aligned}
$$

$\square$