Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 4, 2023)

Problem 1. Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Automorphismen von G zusammen mit der Verkettung von Funktionen als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Man nennt diese Gruppe die *Automorphismengruppe* von G und schreibt $\mathrm{Aut}(G)$ für sie.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ durch

$$k_g : G \to G \qquad x \to gxg^{-1}$$

ein Automorphismus von G gegeben ist.

Dies zeigt, dass die Konjugation mit einem beliebigen Gruppenelement g einen Automorphismus von G liefert.

Proof. (a) Wir beweisen die Eigenschaften

(i) Neutrales Element:

Sei $1 : G \to G,\ 1(x) = x\ \forall x \in G$. Es ist klar, dass 1 bijektiv ist. Außerdem ist

$$1(xy) = xy = 1(x)1(y),$$

also 1 ist ein Automorphismus. Außerdem gilt für alle $f \in \mathrm{Aut}(G)$:

$$f1(x) = f(x)\ \forall x \in G,$$

also 1 ist das neutrale Element.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(ii) Existenz des Inverses: Sei $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Weil f bijektiv ist, gibt es auch eine bijektive inverse Abbildung f^{-1}. Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} eine Homomorphismus ist. Sei $x, y \in G$ beliebig. Weil f bijektiv ist, gibt es Elemente $a, b \in G$, so dass $x = f(a)$ und $y = f(b)$ gilt. Per Definition eine inverse Abbildung ist $f^{-1}(x) = a,\ f^{-1}(y) = b$.

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(xy) &= f^{-1}(f(a)f(b)) \\
&= f^{-1}(f(ab)) && f \text{ ist ein Homomorphismus} \\
&= ab = f^{-1}(x)f^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

also $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$.

(iii) Assoziatiativität

Folgt sofort aus der Assoziativität von Funktionverknüpfungen.

(iv) Abgeschlossenheit

Die Verkettung bijektive Abbildungen ist noch einmal bijektiv. Die Verkettung ist auch ein Homomorphismus (Definition 2.58), also $\mathrm{Aut}(G)$ ist abgeschlossen.

(b) Noch einmal zeigen wir alle Eigenschaften. Sei $g \in G$ beliebig. Wir betrachten k_g.

(i) Sie ist ein Homomorphismus.

Sei $x, y \in G$. Es gilt $k_g(x) = gxg^{-1}$ und $k_g(y) = gyg^{-1}$. Daraus folgt:

$$k_g(x)k_g(y) = gxg^{-1}gyg^{-1} = gxyg^{-1} = k_g(xy).$$

(ii) Sie ist injektiv.

Wir zeigen, dass $\mathrm{Ker}(k_g) = \{1\}$. Wir nehmen an, dass es $1 \neq x \in G$ gibt, so dass $k_g(x) = 1$. Dann ist

$$gxg^{-1} = 1 \implies gx = g.$$

Aus der Kurzungsregel folgt $x = 1$, ein Widerspruch.

(iii) Sie ist surjektiv. Sei $y \in G$ und $x = g^{-1}yg$. Dann gilt

$$k_g(x) = gxg^{-1} = gg^{-1}ygg^{-1} = y,$$

also sie ist surjektiv.

□

Problem 2. Unter dem *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe G versteht man die Menge aller Elemente von G, die mit allen Elementen von G vertauschen, also die Menge $Z(G) = \{g \in G | \text{es gilt } gxg^{-1} = x \text{ für alle } x \in G\}$. Wir definieren die Menge der *inneren Automorphismen von G* durch

$$\mathrm{Inn}(G) := \{k_g | g \in G\} \qquad \text{mit } k_g \text{ wie in 1(b).}$$

Zeigen Sie, dass $Z(G) \trianglelefteq G, \mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ und $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$ gelten.

Proof. Wir schreiben zuerst einen alternativen Definition:

$$Z(G) = \{g \in G | \text{ es gilt } gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

(a) $Z(G) \trianglelefteq G$.

Folgt fast sofort per Definition: Wir betrachten die Nebenklassen. Sei $x \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} xZ(G) =& \{xg | g \in Z(G)\} \\ =& \{gx | g \in Z(G)\} \\ =& Z(G)x \end{aligned}$$

(b) $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$

Sei $f_1, f_2 \in \mathrm{Inn}(G)$, also es gibt $g_1, g_2 \in Z(G)$, so dass

$$\begin{aligned} f_1(x) =& g_1 x g_1^{-1} \\ f_2(x) =& g_2 x g^{-1} \end{aligned}$$

□

Problem 3. (a) Nach Beispiel 2.71 operiert S_N auf sich selbst per Konjugation. Beschreiben Sie die Bahnen dieser Operation.

(b) Wir nennen eine Transposition der S_3 *schön*, wen Sie von der Form $(1x)$ mit $x \in \{2, 3\}$ ist. Sei das Neutrale von S_3 als Produkt schöner Transpositionen dargestellt. Kommen in diesem Produkt die einzelnen schönen Transpositionen dann stets in gerader Anzahl vor?

Problem 4. Die Gruppe G operiere auf der Menge M. Weiter sei U eine Untergruppe von G, so dass die auf U eingeschränkte Operation transitiv auf M sei.

Zeigen Sie, dass dann $G = U \cdot G_m$ für alle $m \in M$ gilt.