Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 22, 2024)

Problem 1. Der Laplace-Operator Δ ist für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f.$$

Allgemeiner ist ein (homogener) Differentialoperator P zweiter Ordnung für $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$Pf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j f.$$

Zeigen Sie, dass die einzigen rotationsinvarianten Differentialoperatoren, d.h. solche, welche

$$P(f(Qx)) = (Pf)(Qx).$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfüllen, Vielfache des Laplace-Operators darstellen.

Proof. Sei Q orthogonal und beliebig mit Elemente $Q_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$. Sei auch $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Die Voraussetzung ist dann Es gilt (Kettensregel)

$$\partial_i f(Qx) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(Qx) Q_{ji}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j f(Qx) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \left(\sum_{k=1}^{n} (\partial_k f)(Q_{kj}) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} (\partial_l \partial_k f)(Qx) Q_{kj} Q_{li} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} (\partial_l \partial_k f) \sum_{i,j=1}^{n} Q_{li} a_{ij} Q_{kj}
\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k,l=1}^{n} (\partial_l \partial_k f) \sum_{i,j=1}^{n} Q_{li} a_{ij} (Q^T)_{jk} \\
&\stackrel{?}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\partial_i \partial_j f)(Qx)
\end{aligned}
$$

Sei $B := QAQ^T$. Offensichtlich muss dann, für alle orthogonale Matrizen Q, $QAQ^T = A$ gelten. $\square$

Problem 2. Beweisen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, so existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein Polynom $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f - p\|_\infty \leq \epsilon.$$

Die Menge der Polynome auf dem Intervall $[a,b]$ ist also dicht im Raum der stetigen Funktionen bzgl. der Supremumsnorm.

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) (Hutfunktionen) Es sei

$$h_{a,b}(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{|x-a|}{b}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

für $a \in \mathbb{R}, b > 0$. Begründen Sie, dass auf jedem kompakten Intervall I für jedes ϵ ein Polynom p existiert mit $\|h_{a,b} - p\|_{\infty,I} \leq \epsilon$.

(b) (Lineare Interpolante) Zu einer gegebenen Partition von $[a,b]$ mit Stützstellen $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ definieren wir die lineare Interpolante von f durch

$$H(x) = \sum_{i=0}^{N} h_{x_i,\Delta x_i}(x) f(x_i),$$

wobei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\Delta x_0 = x_1 - a$. Bestimmen Sie zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Partition von $[a,b]$, sodass $\|H - f\|_\infty \leq \epsilon$ gilt.

(c) Beweisen Sie den Approximationssatz von Weierstraß.

Proof. (a) Wir brauchen hier die Aufgaben

> Zeigen Sie, dass die Funktion
>
> $$f : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \max\{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

$\square$

Problem 3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

gilt. Ist f in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar?

Problem 4. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ nimmt $f_v(t) = f(tv),\ t \in \mathbb{R}$ ein striktes lokales Minimum in $t = 0$ an.

(b) Die Funktion f besitzt in $(0,0)$ kein lokales Minimum

Proof. (a) Sei $v = (a,b)^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_v(t) =& f(tv) \\ =& (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2t^2) \\ =& b^2t^2 + 2a^4t^4 - 2ba^2t^3 - ba^2t^3 \\ =& b^2t^2 + 2a^4t^4 - 3ba^2t^3 \\ =& t^2(2a^4t^2 - 3ba^2t + b^2) \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind...

(b) Offensichtlich ist $f(0,0) = 0$. Sei x fest. Wir wählen $x^2 < y < 2x^2$. Damit ist

$$f(x,y) = \underbrace{(y - x^2)}_{>0}\underbrace{(y - 2x^2)}_{<0} < 0,$$

also $f(x,y) < 0$. Da

$$\begin{aligned}\|(x,y)\| &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &\leq \sqrt{x^2+(2x^2)^2} \\ &= \sqrt{x^2+4x^4} \\ &= |x|\sqrt{1+4x^2}\end{aligned}$$

was wir beliebig klein wählen kann, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein Punkt $p \in B_\epsilon((0,0))$ so dass $f(p) < f((0,0))$, also f besitzt kein lokales Minimum in $(0,0)$.

$\square$