Klausuren

fachschaft mathe/info

Einführung in die Algebra

PD Nils Rosehr

Einf. i. d. Algebra Prof. Roscher WS 11

1/3

K. 1

Kreuzen Sie bitte für jede der folgenden Behauptungen "wahr" oder "falsch" an. Begründungen werden ignoriert. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für falsche, ungültige oder nicht erfolgte Antworten gibt es Null Punkte.

	wahr	falsch
Eine endliche zyklische Gruppe hat zu jedem Teiler t ihrer Ordnung genau einen Normalteiler der Ordnung t.	☐	☐
Für jede nicht-zyklische endliche Gruppe G existiert ein $n < \|G\|$ mit $g^n = 1$ für alle $g \in G$.	☐	☐
Operiert die endliche Gruppe G auf der endlichen Menge M, so ist die Länge $\|G(m)\|$ der Bahn von m unter G ein Teiler von $\|G\|$.	☐	☐
Es gibt genau drei Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 8.	☐	☐
Das Polynom $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ ist irreduzibel.	☐	☐
Sei $f \in K[x]\setminus K$ ein beliebiges reduzibles Polynom über einem beliebigen Körper K. Dann hat der Faktorring $K[x]/\langle f \rangle$ Nullteiler.	☐	☐
Das Polynom $x^4 + 1$ ist über jedem Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_2$ irreduzibel.	☐	☐
Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ hat genau 2 Teilkörper.	☐	☐

K. 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über eine Gruppe G der Ordnung $3^2 \cdot 5 \cdot 17 = 765$:

(a) Jede Gruppe der Ordnung $5 \cdot 17$ ist zyklisch.

(b) G besitzt genau einen Normalteiler der Ordnung 17.

(c) G hat mindestens $|\operatorname{Syl}_5 G| \cdot 64$ Elemente der Ordnung $5 \cdot 17$.

(d) G besitzt einen Normalteiler der Ordnung $5 \cdot 17$.

(e) Es gibt genau einen Homomorphismus einer Gruppe mit 9 Elementen in die Automorphismengruppe einer Gruppe mit $5 \cdot 17$ Elementen.

(f) Leiten Sie aus (a) bis (e) die möglichen Isomorphietypen von G ab.

$|G| = 765 = 3^2 \cdot 5 \cdot 17$

$|Syl_3 G| = \{1, 85\}$

$|Syl_5 G| = \{1, 51\}$, da 51 P_5 Gr. zu viele sind

$\Rightarrow P_5 \trianglelefteq G$, da $|Syl_5 G| = \{1\}$

$|Syl_{17} G| = \{1\} \Rightarrow P_{17} \trianglelefteq G$

$P_5 \cap P_{17} = \{1\} \Rightarrow P_5 P_{17} \trianglelefteq G \Rightarrow P_5 P_{17} \cong C_{85} \cong C_5 \times C_{17}$

$\varphi(85) = \varphi(5)\varphi(17) = 4 \cdot 16 = 64$

$Aut(C_{85}) \cong Aut(\mathbb{Z}_{85}) \cong E(\mathbb{Z}_{85}) \cong E(\mathbb{Z}_5) \times E(\mathbb{Z}_{17})$

$\cong C_4 \times C_{16}$

$|Aut(C_{85})| = \varphi(85) = 64.$

Klausur ohne Hilfsmittel!

Einführung in die Algebra, Reschke WiSe 11/12

1)

Kreuzen Sie bitte für jede der folgenden Behauptungen „wahr" oder „falsch" an. Begründungen werden ignoriert. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Für falsche, ungültige oder nicht erfolgte Antworten gibt es Null Punkte.

1. Eine endliche zyklische Gruppe hat zu jedem Teiler t ihrer Ordnung genau einen Normalteiler der Ordnung t.

2. Für jede nicht-zyklische endliche Gruppe G existiert ein $n < |G|$ mit $g^n = 1$ für alle $g \in G$.

3. Operiert die endliche Gruppe G auf der endlichen Menge M, so ist die Länge $|G(m)|$ der Bahn von m unter G ein Teiler von $|G|$.

4. Es gibt genau 3 Isomorphietypen von Gruppen Ordnung 8.

5. Das Polynom $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$ ist irreduzibel.

6. Sei $f \in K[x] \setminus K$ ein beliebiges reduzibles Polynom über einem beliebigen Körper K. Dann hat der Faktorring $K[x]/\langle f \rangle$ Nullteiler.

7. Das Polynom x^4+1 ist über jedem Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_2$ irreduzibel.

8. Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ hat genau 2 Teilkörper.

2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über eine Gruppe G der Ordnung $3^2 \cdot 5 \cdot 17 = 765$

a) Jede Gruppe der Ordnung $5 \cdot 17$ ist zyklisch

b) G besitzt genau einen Normalteiler der Ordnung 17

c) G hat mindestens $|Syl_5 G| \cdot 64$ Elemente der Ordnung $5 \cdot 17$

d) G besitzt einen Normalteiler der Ordnung $5 \cdot 17$

e) Es gibt genau einen Homomorphismus einer Gruppe mit 9 Elementen in die Automorphismengruppe einer Gruppe mit $5 \cdot 17$ Elementen

f) Leiten Sie aus a) - e) die möglichen Isomorphietypen von G ab.

3. Sei L der Zerfällungskörper von $x^5 - x^3 - 6x^2 + 6$ über $\mathbb{Q}$.
Zeigen Sie, dass ~~L~~ $L \mid \mathbb{Q}$ galoisch ist, und bestimmen Sie die ~~Galoisch~~ Galoisgruppe sowie alle Zwischenkörper von $L \mid \mathbb{Q}$

Algebra Klausur WS10/11

PD Dr. Nils Rosehr, 9.2.2011.

Aufgabe 1

Richtig oder falsch? Keine Begründung. *Falsche Antwort: -1 Punkt, Richtige Antwort: 1 Punkt, keine Antwort: 0 Punkte. Bei negativer Punktezahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet.*

(a) Der Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{12})|\mathbb{Q}$ ist 4.

(b) Die Anzahl der Isomorphietypen abelscher Gruppen der Ordnung p^3 ist für alle $p \in \mathbb{P}$ gleich.

(c) Es gibt Gruppen der Ordnung 4 mit genau einem Element der Ordnung 4.

(d) Falls die Ordnung der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_n$ ungerade ist, ist sie 1.

(e) Ist ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ modulo 2 irreduzibel, so auch über $\mathbb{Z}$.

(f) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ ist irreduzibel.

(g) Der Körper $\mathbb{F}_{2048}$ hat mehr Teilkörper als $\mathbb{F}_{1024}$.

(h) Die Gruppe S_8 besitzt ein Element der Ordnung 20.

Aufgabe 2

4 Punkte

(a) Man definiert für eine Gruppe G die *Kommutatorgruppe* $G' := \langle\{ghg^{-1}h^{-1} | g, h \in G\}\rangle$. Zeigen Sie: $G' \trianglelefteq G$; G/G' ist abelsch.

(b) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von C_6 und A_6.

Aufgabe 3

4 Punkte

(a) Bestimmen Sie alle Isomorphietypen von Gruppen ungerader Ordnung kleiner 20.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 231. Zeigen Sie: $G \cong C_{77} \rtimes C_3$.

Aufgabe 4

Es sei $f = x^4 + 3x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. *8 Punkte.*

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f in $\mathbb{C}$.

(c) Sei a eine Nullstelle von f. Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(a)$ ist Zerfällungskörper von f.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(a)|\mathbb{Q})$ abelsch ist.

ALG Rosehr WS09/10
Klausur 1/3

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig?
Antworten Sie durch Ankreuzen, *ohne* Begründungen.

		richtig	falsch
(a)	Jede unendliche Gruppe hat unendlich viele Untergruppen.	☐	☐
(b)	Die alternierende Gruppe A_5 hat eine Untergruppe der Ordnung 20.	☐	☐
(c)	Es gibt einen Gruppen-Epimorphismus von $C_2 \times C_2 \times C_2$ auf C_4.	☐	☐
(d)	Das Polynom $x^{10} + x^4 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[x]$.	☐	☐
(e)	Das Polynom $x^3 - 3$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$.	☐	☐
(f)	Ist $z \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, so ist auch der Realteil $Re(z)$ algebraisch über $\mathbb{Q}$.	☐	☐
(g)	Die Gruppe $\mathrm{Aut}(x^4 + 4 \mid \mathbb{Q})$ ist trivial.	☐	☐
(h)	Jede Galois-Erweiterung $L\|K$ vom Grad 60 hat einen Zwischenkörper Z mit $[Z : K] = 15$.	☐	☐

Aufgabe 2 (8 Punkte)

2|3

Man zeige:

(a) Jede Gruppe der Ordnung 45 ist abelsch.

(b) Es gibt genau zwei Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 45.

(c) Die Einheitengruppe $E(\mathbb{Z}_{475})$ des Rings $\mathbb{Z}_{475}$ hat genau eine Untergruppe U der Ordnung 45.

(d) Diese Gruppe U ist zyklisch.

Alle Aussagen sind zu begründen. Geben Sie die Lösung zu dieser Aufgabe auf diesem Blatt an. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseite oder verlangen Sie ein zusätzliches Blatt, falls Sie mehr Platz zum Aufschreiben der Lösung benötigen.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

3/3

Sei $r = \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

(a) Man bestimme das Minimalpolynom f von r über $\mathbb{Q}$.
(Nur zur Kontrolle: $\mathrm{Grad}(f) = 4$)

(b) Man zeige, dass $\mathbb{Q}(r)|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

(c) Man bestimme den Isomorphietyp der Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(L|\mathbb{Q})$.

(d) Man bestimme alle Zwischenkörper Z von $L|\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} \neq Z \neq L$.

Alle Aussagen sind zu begründen. Geben Sie die Lösung zu dieser Aufgabe auf diesem Blatt an. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseite oder verlangen Sie ein zusätzliches Blatt, falls Sie mehr Platz zum Aufschreiben der Lösung benötigen.

ALG Roehr WS09/10

Nachklausur

1/3

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig?
Antworten Sie durch Ankreuzen, *ohne* Begründungen.

		richtig	falsch
(a)	Jede endliche Gruppe G mit mindestens 3 Elementen hat einen Automorphismus $\alpha \neq \mathrm{id}_G$.	☐	☐
(b)	Die alternierende Gruppe A_5 hat eine Untergruppe der Ordnung 15.	☐	☐
(c)	Es gibt einen Gruppen-Epimorphismus von C_8 auf C_4.	☐	☐
(d)	Das Polynom $x^{20} + x^8 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[x]$.	☐	☐
(e)	Das Polynom $x^3 - 3$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$.	☐	☐
(f)	Ist $r \in \mathbb{C}$ transzendent über $\mathbb{Q}$, so ist auch $1 + r^2$ transzendent über $\mathbb{Q}$.	☐	☐
(g)	Die Gruppe $\mathrm{Aut}(x^4 - 4 \mid \mathbb{Q})$ ist trivial.	☐	☐
(h)	Jede Galois-Erweiterung $L\vert K$ vom Grad 60 hat einen Zwischenkörper Z mit $[Z : K] = 4$.	☐	☐

Aufgabe 2 (8 Punkte)

2 | 3

Man zeige:

(a) Jede Gruppe der Ordnung 70 hat einen Normalteiler vom Index 2.

(b) Es gibt *höchstens* vier Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 70.

(c) Man bestimme das Zentrum der Diedergruppe D_{70}.

(d) Man finde ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass die Einheitengruppe $\mathrm{E}(\mathbb{Z}_n)$ isomorph zu C_{70} ist.

Alle Aussagen sind zu begründen. Geben Sie die Lösung zu dieser Aufgabe auf diesem Blatt an. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseite oder verlangen Sie ein zusätzliches Blatt, falls Sie mehr Platz zum Aufschreiben der Lösung benötigen.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

3|3

Sei $c = \frac{1+i}{\sqrt{6}} \in \mathbb{C}$ und $L = \mathbb{Q}(c)$.

(a) Man bestimme das Minimalpolynom f von c über $\mathbb{Q}$.
(Nur zur Kontrolle: $\mathrm{Grad}(f) = 4$)

(b) Man zeige, dass $L|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

(c) Man bestimme den Isomorphietyp der Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(L|\mathbb{Q})$.

(d) Man bestimme alle Zwischenkörper Z von $L|\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} \neq Z \neq L$.

Alle Aussagen sind zu begründen. Geben Sie die Lösung zu dieser Aufgabe auf diesem Blatt an. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseite oder verlangen Sie ein zusätzliches Blatt, falls Sie mehr Platz zum Aufschreiben der Lösung benötigen.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig?
Antworten Sie durch Ankreuzen *ohne* Begründungen.

		richtig	falsch
(a)	Die kleinste Untergruppe $1 \neq U \leq G$ einer endlichen Gruppe G hat immer Primzahlordnung.	☐	☐
(b)	Ist U eine Untergruppe der Gruppe G, dann gibt es einen Epimorphismus $G \to U$.	☐	☐
(c)	Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat die symmetrische Gruppe S_n weniger Konjugationsklassen als die Gruppe S_{n+1}.	☐	☐
(d)	Das Polynom $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist reduzibel.	☐	☐
(e)	Jeder Teilring eines faktoriellen Rings ist faktoriell.	☐	☐
(f)	Der Körper $\mathbb{Q}$ besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Erweiterung vom Grad n.	☐	☐
(g)	Das Polynom $x^3 + x^2 - 1$ ist modulo jeder Primzahl irreduzibel.	☐	☐
(h)	Jede reelle Grad-3-Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist normal.	☐	☐

Jede richtige Antwort wird mit einem Punkt, jede falsche Antwort mit einem Minuspunkt bewertet. Eine negative Gesamtpunktzahl bei dieser Aufgabe wird als „0 Punkte“ gewertet.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe mit genau drei Konjugationsklassen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Es gilt $|G| \leq 6$.
(Hinweis: Klassengleichung...)

b) Ist G abelsch, dann ist $G \cong C_3$.

c) Ist G nicht-abelsch, dann ist $G \cong S_3$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 2013 zu einem semidirekten Produkt der Form $C_{61\cdot 11} \rtimes C_3$ isomorph ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $\zeta = \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad 4 ist.

c) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^3 - 2$ irreduzibel über $\mathbb{Q}(\zeta)$ ist.

d) Sei K der Zerfällungskörper von $x^3 - 2$ über $\mathbb{Q}(\zeta)$. Zeigen Sie, dass $|K : \mathbb{Q}(\zeta)| = 6$ ist.