

Universität Würzburg Übungsblätter  
Bachelor Mathematische Physik

Jun Wei Tan

November 23, 2023



---

## Contents

---



# CHAPTER ONE

---

## Lineare Algebra 1

---

### 1.1 Blatt 1 (30/50)

**Definition 1.1.** Sind  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$  mit  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ , so bezeichnet man die Menge  $g := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}$  als Gerade.

**Satz 1.2.** Zu jeder Geraden gibt es  $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ , sodass die Gerade in der Form

$$\{(c_1, c_2) + t(d_1, d_2) : t \in \mathbb{R}\}$$

geschrieben werden kann. Weiterhin ist obige Menge im Fall  $(d_1, d_2) \neq (0, 0)$  immer eine Gerade

**Bemerkung 1.3.** Der Parameterform für Geraden und Ebenen ist in der Vorlesung bewiesen.

**Aufgabe 1.** Beweisen Sie folgende Aussage: Gegeben seien zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{R}^2$  mit  $p \neq q$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $g \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $p \in g$  und  $q \in g$ . Diese ist gegeben durch  $g_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(q_2 - p_2) - x_2(q_1 - p_1) = p_1 q_2 - p_2 q_1\}$ .

*Beweis.* Wir nutzen Def. 1.1. Weil  $p$  und  $q$  in der Gerade sind, können wir zwei Gleichungen schreiben...

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = b$$

$$a_1 q_1 + a_2 q_2 = b$$

Dann gilt

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = a_1 q_1 + a_2 q_2$$

$$a_1(p_1 - q_1) = a_2(q_2 - p_2)$$

Daraus folgt die Lösungsmenge

$$a_1 = t$$

$$a_2 = t \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2}$$

$$b = p_1 t + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t$$

Es ist klar, dass die gegebene Gerade eine Lösung zu die Gleichung ist, mit  $t = q_2 - p_2$ . Was passiert mit andere  $t$ ? Sei  $t = q_2 - p_2$  und  $t' \in \mathbb{R}$ . Vergleich dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 t + x_2 t \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1 t + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t \\ x_1 t' + x_2 t' \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1 t' + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t' \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die zweite Gleichung nur die erste Gleichung durch  $t'/t$  multipliziert ist. Deshalb habe die zwei Gleichungen die gleiche Lösungsmengen, dann sind die Gerade, die durch die Gleichungen definiert werden, auch gleich.

Wenn  $q_1 = q_2$  dürfen wir die Lösungsmenge nicht so schreiben. Aber wir können den Beweis wiederholen, aber mit  $a_2$  als das freie Parameter. Es darf nicht, dass  $(q_1 - p_1, q_2 - p_2) = (0, 0)$ , weil  $\vec{q} \neq \vec{0}$   $\square$

**Aufgabe 2.** In Beispiel 1.2.8 wurde der Schnitt von zwei Ebenen bestimmt. Er hatte eine ganz bestimmte Form, die wir für den Kontext dieser Aufgabe als Gerade bezeichnen wollen, formal:

Ist  $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  und  $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$  beliebig, dann ist die Menge

$$\{(p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2, p_3 + t \cdot v_3) | t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade.

- Finden Sie zwei Ebenen, deren Schnitt die Gerade  $g = \{(1 + 3t, 2 + t, 3 + 2t) | t \in \mathbb{R}\}$  ist. Erläutern Sie, wie Sie die Ebenen bestimmt haben und beweisen Sie anschließend, dass Ihr Ergebnis korrekt ist.
- Ist der Schnitt von zwei Ebenen immer eine Gerade? Wenn ja, begründen Sie das, wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
- Zeigen Sie: Für den Schnitt einer Geraden  $g$  mit einer Ebene  $E$  gilt genau einer der folgenden drei Fälle:

- $g \cap E = \emptyset$
- $|g \cap E| = 1$
- $g \cap E = g$

Geben Sie für jeden der Fälle auch ein Geraden-Ebenen-Paar an, dessen Schnitt genau die angegebene Form hat.

*Beweis.* (a) Wir suchen zwei Ebenen, also 6 Vektoren  $\vec{p}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{p}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ , die zwei Ebenen durch

$$E_1 = \{\vec{p}_1 + t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$E_2 = \{\vec{p}_2 + t'_1 \vec{v}_1 + t'_2 \vec{v}_2 | t'_1, t'_2 \in \mathbb{R}\}$$

definieren. Einfachste wäre, wenn  $p_1 = p_2 \in g$ . Sei dann  $p_1 = p_2 = (1, 2, 3)^T$ . Wenn  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (3, 1, 2)^T$ , ist es auch klar, dass der Schnitt  $g$  einschließt ( $t_2 = t'_2 = 0$ ). Dann müssen wir  $\vec{u}_2, \vec{v}_2$  finden, für die gelten,

$$(t, t'_2) \neq (0, 0) \implies t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 \neq t'_1 \underbrace{\vec{u}_1}_{\vec{u}_1 = \vec{v}_1} + t'_2 \vec{v}_2 \forall t_1, t'_1 \in \mathbb{R},$$

also

$$\xi_1 \vec{u}_1 \neq t'_2 \vec{v}_2 - t_2 \vec{u}_2 \quad (t_2, t'_2) \neq (0, 0), \forall \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet

$$\xi_1 = 0 : \vec{v}_2 \neq k \vec{u}_2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\xi_1 \neq 0 : \vec{u}_1 \notin \text{span}(\vec{v}_2, \vec{u}_2)$$

**Bemerkung 1.4.** Wir können uns einfach für solchen  $\vec{v}_2, \vec{u}_2$  entscheiden. Wir brauchen nur

$$\langle \vec{u}_2, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0.$$

Aber weil das innere Produkt nicht in der Vorlesung nicht diskutiert worden ist, müssen wir es nicht systematisch finden.

**Bemerkung 1.5.** Eigentlich braucht man keine spezielle Gründe, um  $\vec{u}_2$  und  $\vec{v}_2$  zu finden. Wenn man irgendeine normalisierte Vektoren aus einer Gleichverteilung auf  $\mathbb{R}^3$  nimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die eine Lösung sind, 1.

Daher entscheide ich mich ganz zufällig für zwei Vektoren...

$$\vec{v}_2 = (1, 0, 0)^T$$

$$\vec{u}_2 = (0, 1, 0)^T$$

Der Schnitt von der Ebenen kann berechnet werden...

$$\vec{p} + t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 = \vec{p} + t'_1 \vec{v}_1 + t'_2 \vec{v}_2,$$

$$\xi_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 = t'_2 \vec{v}_2.$$

Also

$$\xi_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t'_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ t_2 \\ t'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 1.6.** Hier ist es noch einmal klar, dass die einzige Lösung  $\xi_1 = t_2 = t'_2 = 0$  ist, weil  $\det(\dots) \neq 0$ . Aber wir müssen noch eine längere Beweis schreiben...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

also die einzige Lösung ist  $\xi_1 = t_2 = t'_2 = 0 \implies t_2 = t'_2 = 0, t_1 = t_2 \implies E_1 \cap E_2 = g$

(b) Nein.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

(c)

**Satz 1.7.** Sei  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $g$ , wofür gilt  $\vec{a} \in g, \vec{b} \in g$ . Es kann als

$$\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

*Beweis.* Es ist klar, dass

$$\vec{a} \in g \quad (t = 0)$$

$$\vec{b} \in g \quad (t = 1)$$

Sei dann eine andere Gerade  $g'$ , wofür gilt  $\vec{a} \in g'$  und  $\vec{b} \in g'$ .  $g'$  kann als

$$\vec{u} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden, wobei  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Es existiert  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\vec{u} + t_1\vec{v} = \vec{a}$$

$$\vec{u} + t_2\vec{v} = \vec{b}$$



Es gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{a} - t_1 \vec{v} \\ \vec{a} - t_1 \vec{v} + t_2 \vec{v} &= \vec{b} \\ \vec{v} &= \frac{1}{t_2 - t_1} (\vec{b} - \vec{a}) \quad t_1 \neq t_2 \text{ weil } \vec{a} \neq \vec{b}\end{aligned}$$

Es gilt dann für  $g'$ :

$$\begin{aligned}g' &= \{\vec{u} + t\vec{v} | t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \vec{a} - \frac{t_1}{t_2 - t_1} (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{t}{t_2 - t_1} (\vec{b} - \vec{a}) | t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \vec{a} + \left( \frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1} \right) (\vec{b} - \vec{a}) | t \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Wenn man  $t' = \frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}$  definiert, ist es dann klar, dass  $g' = g$   $\square$

Es ist klar, dass maximal eines der Fälle gelten kann. Wir nehmen an, dass die erste zwei Fälle nicht gelten. Dann gilt

$$|g \cap E| \geq 2.$$

Es gibt dann mindestens zwei Punkte in  $g \cap E$ . Es ist auch klar, dass die Verbindungsgerade zwischen die beide Punkte  $g$  ist (Pr. 1)

**Satz 1.8.** Sei  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$ . Dann ist die Verbindungsgerade zwischen  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  auch in  $E$ .

*Beweis.* Sei

$$E = \{\vec{p}_1 + t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v} | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Es wird angenommen, dass  $a_1, a_2, b_1, b_2$  existiert, sodass

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{p} + a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} \\ \vec{v}_2 &= \vec{p} + b_1 \vec{u} + b_2 \vec{v}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (b_1 - a_1) \vec{u} + (b_2 - a_2) \vec{v},$$

also

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + t(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) &= \vec{p} + a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} + t[(b_1 - a_1) \vec{u} + (b_2 - a_2) \vec{v}] \\ &= \vec{p} + [a_1 + t(b_1 - a_1)] \vec{u} + [a_2 + t(b_2 - a_2)] \vec{v} \in E\end{aligned}$$

$\square$

Deshalb ist  $g \subseteq g \cap E$ . Weil  $g \cap E \subseteq g$ , ist  $g = g \cap E$

$\square$

## 1.2 Blatt 2

**Aufgabe 3.** Gegeben sei die Relation  $\sim \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  mit  $x \sim y$  genau dann, wenn es eine Gerade  $L \subseteq \mathbb{R}^2$  gibt, die  $0$ ,  $x$  und  $y$  enthält.

- Bestimmen Sie alle  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  mit  $(0,1) \sim y$  bzw.  $(1,0) \sim y$  und skizzieren Sie die beiden Mengen in einem geeigneten Koordinatensystem.
- Begründen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.
- Bleibt  $\sim$  auch dann eine Äquivalenzrelation, wenn man sie als Relation in  $\mathbb{R}^2$  betrachtet?

*Beweis.* (a) Eine Gerade hat den Form

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}.$$

Weil  $(0,0)$  in der Gerade ist, gilt  $b = 0$ . Für die zwei Fälle:

- $(0,1)$  ist in der Gerade. Es gilt dann  $a_2 = 0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Die Gleichung der Gerade ist dann  $x_1 = 0$ , oder alle Punkte des Forms  $(0, y), y \in \mathbb{R}$ .
- $(1,0)$  ist in der Gerade. Es gilt dann  $a_1 = 0, a_2 \in \mathbb{R}$ . Die Gerade enthält ähnlich alle Punkte des Forms  $(x, 0), x \in \mathbb{R}$ .



- $x \sim x$  (Reflexivität)

Es gibt immer eine Gerade zwischen  $0$  und  $x$ . Eine solche Gerade enthält  $x$  per Definition.

- $x \sim y \iff y \sim x$  (Symmetrie)

Es gibt eine Gerade, die  $0$ ,  $x$  und  $y$  enthält. Deswegen gilt die beide Richtung der Implikationen.

(iii)  $x \sim y$  und  $y \sim z \implies x \sim z$  (Transitivität)

Es gibt eine Gerade zwischen  $0, x$  und  $y$ , und eine Gerade zwischen  $0, y$  und  $z$ . Weil die beide Geraden zwischen  $y$  geht, sind die Geraden gleich, und enthält  $x$  und  $z$ , daher  $x \sim z$ .

(c) Nein.  $(1, 0) \sim (0, 0), (0, 1) \sim (0, 0)$ , aber  $(1, 0) \not\sim (0, 1)$  stimmt nicht.  $\square$

**Aufgabe 4.** Es sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$ ,  $s$  die Spiegelung in  $\mathbb{R}^2$ ,  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Translation um  $(1, 0)$  und  $em : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Einbettung.

(a) Bilden Sie die Verkettungen  $f \circ em, em \circ f, s \circ f, T \circ s, s \circ T$  und  $em \circ s$ . Geben Sie dabei jeweils Argumentmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift an.

(b) Untersuchen Sie die Funktionen aus der vorherigen Teilaufgabe auf Surjektivität, Injektivität bzw. Bijektivität.

(c) Sei  $F = em \circ T \circ s \circ f$ . Bestimmen und skizzieren Sie das Bild bzw. Urbild von  $[0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$  unter  $F$ .

*Beweis.* (a) (i)  $f \circ em$

Argumentmenge:  $\mathbb{R}^3$

Zielmenge:  $\mathbb{R}^2$

Zuordnungsvorschrift:  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2) = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$

(ii)  $em \cdot f$

Argumentmenge + Zielmenge:  $\mathbb{R}^3$

Zuordnungsvorschrift:  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, 0)$

(iii)  $s \cdot f$

Argumentmenge:  $\mathbb{R}^3$

Zielmenge:  $\mathbb{R}^2$

Zuordnungsvorschrift:  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1)$

(iv)  $em \circ s$

Argumentmenge:  $\mathbb{R}^2$

Zielmenge:  $\mathbb{R}^3$

Zuordnungsvorschrift:  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1, 0)$

(b) (i)  $f \circ em$

Surjektive, injektiv und auch bijektiv

(ii)  $em \circ f$

Injektiv, aber nicht surjektiv (und deswegen nicht Bijektiv)

(iii)  $s \circ f$

Surjektive, aber nicht injektiv

(iv)  $em \circ s$ 

Injektiv, aber nicht surjektiv

(c)

Bild:  $[0, 2] \times [0, 1] \times \{0\}$ Urbild:  $[0, 1] \times [-2, 0] \times \mathbb{R}$ 

□

**Aufgabe 5.** Es sei  $M$  eine beliebige, nichtleere Menge und  $f : M \rightarrow M$  eine Abbildung. Wir definieren induktiv  $f^0 := id$  und für  $k \in \mathbb{N}$   $f^k := f \circ f^{k-1}$ .

- (a) Zeigen Sie:  $f^{k+l} = f^k \circ f^l$  für alle  $k, l \in \mathbb{N}_0$
- (b) Zeigen Sie: Gibt es  $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $l \in \mathbb{N}$  mit  $f^{k_0+l} = f^{k_0}$ , dann gilt  $f^{k+l} = f^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \geq k_0$ .
- (c) Geben Sie eine Funktion  $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  an, für die  $f^1 \neq f^3$ , aber  $f^{k+2} = f^k$  für alle  $k \geq 2$  gilt. Begründen Sie, dass Ihre Funktion diese Eigenschaft hat.

*Beweis.* (a) Wir beweisen es per Induktion auf  $k$ . Für  $k = 1$  gilt es per Definition (es wird in der Frage gegeben). Jetzt nehme an, dass es für ein beliebige  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
 f^{(k+1)+l} &= f \circ f^{k+l} \\
 &= f \circ f^k \circ f^l \\
 &= (f \circ f^k) \circ f^l \\
 &= f^{k+1} \circ f^l
 \end{aligned}$$

Deswegen gilt es auch für  $k + 1$ , und daher für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

(b) Sei  $k = k_0 + k'$ . Es gilt

$$f^{k+l} = f^{k_0+k'+l} = f^{k_0} = f^{k_0+k'} = f^k.$$

(c) Sei  $f$  definiert durch

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 1 \\ f(3) &= 2 \\ f(4) &= 1 \\ f(5) &= 4 \end{aligned}$$

Es gilt dann

x	$f^1(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$f^5(x)$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	4	1	1	1	1

$f^1 \neq f^3$ , weil  $f^1(3) \neq f^3(3)$ . Aber  $f^k(x) = 1 \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, k \geq 2$ . Daher ist  $f^{k+2} = f^k, k \geq 2$ .  $\square$

**Aufgabe 6.** Es seien  $M, N$  Mengen,  $m, n$  natürliche Zahlen und die Abbildungen  $f : M \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}, g : N \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$  bijektiv. Finden Sie eine natürliche Zahl  $k$  und eine bijektive Abbildung  $F : M \times N \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ .

*Beweis.*  $k = nm$ , und

$$F(a, b) = a + (b - 1)m.$$

Das ist bijektiv. Sei  $x \in \{1, 2, \dots, nm\}$ . Es existiert eindeutige Zahlen  $p, q \in \mathbb{N}$ , so dass

$$x = pm + q, q < m.$$

Falls  $q = 0$ , sei  $b = p, a = m$ . Sonst definiert man  $b = p + 1, a = m$ . Per Definition ist  $a \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ . Außerdem ist  $1 \leq b \leq n$ , weil  $p \leq k/m = n$  ( $n$  teilt  $k = mn$ ).  $\square$

## 1.3 Blatt 3

**Aufgabe 7.** Entscheiden Sie zu jedem der folgenden Objekte, welche der Bezeichnungen aus Definition 2.3.3 darauf zutreffen

- (a)  $(\mathbb{R}, *, -2)$ , wobei  $*$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $a * b := a + b + 2$  definiert ist.
- (b)  $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$

(c)  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, -, 0)$ , wobei  $\bar{a} - \bar{b} := \bar{a} + (-\bar{b})$

(d)  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, *, 4)$  mit  $*$  :  $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \rightarrow ab^{-1}$

*Beweis.* (a) Eine abelsche Gruppe. Es ist assoziativ:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b + c + 2) + 2 \\ &= (a + b + 2) + c + 2 \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

Es gilt auch  $(-2) * x = (-2) + x + 2 = x$  und auch  $x * (-2) = x$  für alle  $x$ , also  $e = -2$  ist ein neutrales Element. Für jeder  $x$  gibt es auch  $y = -(x + 4) \in \mathbb{R}$ , damit

$$y * x = -(x + 4) + x + 2 = -2 = e.$$

(b) Kommutatives Monoid. Per Definition ist 1 das neutrale Element, und für jeder  $0 \neq x \in \mathbb{R}$  gibt es  $1/x \in \mathbb{R}$ , und  $x(1/x) = 1$ . Aber es existiert keine  $x \in \mathbb{R}$ , so dass  $x0 = 1$ .

(c) Magma. Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{a} - (\bar{b} - \bar{c}) &= \bar{a} + [-(\bar{b} - \bar{c})] \\ &= \bar{a} + (-\bar{b}) + \bar{c} \\ (\bar{a} - \bar{b}) - \bar{c} &= \bar{a} + (-\bar{b}) + (-\bar{c}) \\ &\neq \bar{a} - (\bar{b} - \bar{c}) \end{aligned}$$

Deswegen ist  $-$  nicht assoziativ.

(d) Nichts.  $*$  ist keine Verknüpfung.

□

**Aufgabe 8.** Es sei  $(M, \cdot)$  ein Magma,  $(H, \odot)$  eine Halbgruppe und  $\alpha : H \rightarrow M$  eine surjektive Abbildung, die die Bedingung  $\alpha(a \odot b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b)$  für alle  $a, b \in H$  erfüllt.

Zeigen Sie

(a) Dann ist auch  $M$  eine Halbgruppe.

(b) Ist  $H$  ein Monoid mit neutralem Element  $e$ , dann ist  $M$  ein Monoid mit neutralem Element  $\alpha(e)$ .

(c) Ist  $(H, \odot, e)$  sogar eine Gruppe, dann ist  $(M, \cdot, \alpha(e))$  eine Gruppe.

*Beweis.* (a) Sei  $\beta, \gamma, \delta \in M$ . Weil  $\alpha$  surjektiv ist, gilt  $\beta = \alpha(a), \gamma = \alpha(b), \delta = \alpha(c), a, b, c \in H$ . Es gilt

$$\beta \cdot (\gamma \cdot \delta) = \alpha(a) \cdot (\alpha(b) \cdot \alpha(c))$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha(a) \cdot (\alpha(b \odot c)) \\
&= \alpha(a \odot (b \odot c)) \\
&= \alpha((a \odot b) \odot c) \\
&= \alpha(a \odot b) \cdot \alpha(c) \\
&= (\alpha(a) \cdot \alpha(b)) \cdot \alpha(c) \\
&= (\beta \cdot \gamma) \cdot \delta
\end{aligned}$$

(b) Sei  $\beta \in M$ . Noch einmal haben wir  $\beta = \alpha(b), b \in H$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\beta \cdot \alpha(e) &= \alpha(b) \cdot \alpha(e) \\
&= \alpha(b \odot e) \\
&= \alpha(b) \\
&= \beta
\end{aligned}$$

und ähnlich auch für  $\alpha(e) \cdot \beta = \beta$ .

(c) Wir müssen nur zeigen, dass es ein Inverse gibt. Sei  $M \ni \beta = \alpha(a), a \in H$ . Weil  $H$  eine Gruppe ist, existiert  $a^{-1} \in H$ , so dass  $a \odot a^{-1} = e$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\beta \cdot \alpha(a^{-1}) &= \alpha(a) \cdot \alpha(a^{-1}) \\
&= \alpha(a \odot a^{-1}) \\
&= \alpha(e)
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 9.** Wir wollen die folgende Verknüpfungstabelle so vervollständigen, dass  $(\{\partial, \eta, L\}, \odot, \eta)$  zu einer Gruppe wird.

$\odot$	$\partial$	$\eta$	$L$
$\partial$			
$\eta$			
$L$			

- (a) Begründen Sie, dass es nur höchstens eine solche Verknüpfungstafel geben kann.
- (b) Füllen Sie die Tafel so, dass eine Gruppe entsteht und begründen Sie, dass Sie die Verknüpfungstafel einer Gruppe gefunden haben.

*Beweis.* Notation: Ich schreibe  $ab$  statt  $a \odot b$ , für  $a, b \in \{\partial, \eta, L\}$ . Weil  $\eta$  das neutrale Element ist, muss die Verknüpfungstabelle so aussehen:

$\bullet$	$\partial$	$\eta$	$L$
$\partial$		$\partial$	
$\eta$	$\partial$	$\eta$	$L$
$L$		$L$	

Wir brauchen Bedingungen, die mögliche Gruppe einzuschränken.

**Lemma 1.9.** *Sei  $G$  eine Gruppe,  $x, y, z \in G$ , und*

$$zx = zy.$$

*Es gilt dann  $x = y$*

*Beweis.*

$$x = z^{-1}zx = z^{-1}zy = y.$$

□

**Korollar 1.10.** *In jeder Zeile und Spalte kommt jedes Element nur einmal vor.*

Leider ist es noch nicht genug, die Verknüpfungstabelle einzuschränken. Wir fangen deswegen an, und nehme an, dass  $\partial^2 = L$  ist. Wir betrachten die erste Spalte und Zeile, und kommen zu die Schlussfolgerung, dass  $\partial L = L\partial = \eta$ .

$\bullet$	$\partial$	$\eta$	$L$
$\partial$	$\eta$	$\partial$	$L$
$\eta$	$\partial$	$\eta$	$L$
$L$	$L$	$L$	$L$

Hier gibt es ein Problem:  $L\partial = L$ , und auch  $L\eta = L$ . Daraus folgt  $\partial = \eta$ , ein Widerspruch. Wir nehmen jetzt an,  $\partial^2 = L$ . Man kann die Verknüpfungstabelle ausfüllen.

$\bullet$	$\partial$	$\eta$	$L$
$\partial$	$L$	$\partial$	$\eta$
$\eta$	$\partial$	$\eta$	$L$
$L$	$\eta$	$L$	$\partial$

Das ist die einzige Lösung (es gibt keine Möglichkeiten mehr). Die Gruppe ist  $\cong C_3$ . Man kann beachten, dass  $\partial^2 = L, L^2 = \partial$ . Per Definition ist es abgeschlossen. Es gilt auch

$$\partial^{-1} = \partial^2 = L$$



$$L^{-1} = L^2 = \partial$$

Jetzt beweisen wir Assoziativität. Wir betrachten

$$a(bc) \stackrel{?}{=} (ab)c, \quad a, b, c \in \{\partial, \eta, L\}.$$

Im Fall, worin  $a, b$  oder  $c$  das neutrale Element  $\eta$  ist, folgt die Gleichung. Im Fall, worin nichts  $\eta$  ist, können wir  $L = \partial^2$  einsetzen. Jetzt ist die Gleichung

$$\partial^x (\partial^y \partial^z) = (\partial^x \partial^y) \partial^z, \quad x, y, z \in \{1, 2\},$$

was immer gilt, weil die beide Seite gleich  $\partial^{x+y+z}$  sind. Deswegen ist  $\bullet$  assoziativ.  $\square$

**Aufgabe 10.** Wir definieren die drei Abbildungen  $c_1, c_2, c_3 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  durch die Abbildungsvorschriften

$$\begin{array}{cccc} c_1(1) = 2 & c_1(2) = 1 & c_1(3) = 4 & c_1(4) = 3 \\ c_2(1) = 3 & c_2(2) = 4 & c_2(3) = 1 & c_2(4) = 2 \\ c_3(1) = 4 & c_3(2) = 3 & c_3(3) = 2 & c_3(4) = 1 \end{array}$$

Zeigen Sie:  $U := \{\text{id}, c_1, c_2, c_3\}$  ist eine Untergruppe von  $S(\{1, 2, 3, 4\})$ .

*Beweis.* Die folgende Aussagen können durch direkte Verkettung bewiesen werden:

$$\begin{aligned} c_1 \circ c_2 &= c_3 \\ c_2 \circ c_3 &= c_1 \\ c_3 \circ c_1 &= c_2 \\ c_1 \circ c_1 &= \text{id} \\ c_2 \circ c_2 &= \text{id} \\ c_3 \circ c_3 &= \text{id} \end{aligned}$$

Deswegen ist jede Elemente invertierbar. Es folgt daraus auch, dass  $U$  abgeschlossen ist.  $\text{id}$  ist natürlich das neutrale Element.  $\square$

**Aufgabe 11.** Es sei

$$\mathcal{L} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \text{ sodass für alle } x \in \mathbb{R} f(x) = ax + b\}.$$

- (a) Zeigen Sie:  $(\mathcal{L}, \circ, \text{id})$  ist eine Gruppe, aber nicht abelsch.
- (b) Wir definieren die Relation  $\sim \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$  durch die Festlegung  $f \sim g$  genau dann, wenn  $f(x) - f(0) = g(x) - g(0)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die Menge aller Äquivalenzklassen von  $\sim$ .

*Beweis.* (a) Sei  $f, g \in \mathcal{L}$ ,  $f = ax + b, g = cx + d, a \neq 0 \neq c$ . Es gilt

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= a(cx + d) + b \\ &= acx + ad + b\end{aligned}$$

Weil  $a \neq 0 \neq c$ , gilt  $ac \neq 0$ . Deswegen gilt, für

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = acx + ad + b$$

$h \in \mathcal{L}$ .  $(\mathcal{L}, \circ, \text{id})$  ist dann unter  $\circ$  abgeschlossen. Die Verkettung von Abbildungen ist immer assoziativ. Sei jetzt  $e \in \mathcal{L}$ ,  $e(x) = 1x + 0 = x$ . Es gilt dann

$$e \circ f = f \circ e = f,$$

also  $e$  ist ein neutrales Element. Sei  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ . Weil  $a \neq 0$ , sind  $1/a$  und  $b/a$  wohldefiniert, und  $1/a \neq 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= a\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) + b \\ &= x - b + b \\ &= x \\ (f^{-1} \circ f) &= \frac{1}{a}(ax + b) - \frac{b}{a} \\ &= x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \\ &= x\end{aligned}$$

Deswegen gilt  $f \circ f^{-1} = e = f^{-1} \circ f$ , also  $f^{-1}$  ist die Inverse von  $f$ .  $\mathcal{L}$  ist dann eine Gruppe.

(b) (i) (Reflexivität) Es gilt

$$f(x) - f(0) = f(x) - f(0)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) (Symmetrie) Falls gilt

$$f(x) - f(0) = g(x) - g(0)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ , gilt auch

$$g(x) - g(0) = f(x) - f(0), x \in \mathbb{R}.$$

(iii) (Transitivität) Sei  $f, g, h \in \mathcal{L}$ , für die gilt

$$\begin{aligned}f \sim g &\iff f(x) - f(0) = g(x) - g(0), x \in \mathbb{R} \\ g \sim h &\iff g(x) - g(0) = h(x) - h(0), x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Es gilt, von die Transitivität der  $=_{\subseteq} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dass

$$f(x) - f(0) = h(x) - h(0), x \in \mathbb{R},$$

also  $f \sim h$

Ich vermute, dass die Äquivalenzklasse sind  $f, g \in \mathcal{L}, f(x) = ax + b, g(x) = cx + d, a \neq 0 \neq c$ , so dass

$$f \sim g \iff a = c.$$

Wir beweisen es:  $f(0) = b, g(0) = d$ , und daher  $f(x) - f(0) - ax, g(x) - g(0) = cx$ . Falls

$$ax = cx \forall x \in \mathbb{R},$$

muss  $a = c$ . Für  $a \neq c$  gilt es, dass es mindestens ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  gibt, worauf  $ax_0 \neq cx_0$ . Deswegen sind die Äquivalenzklassen, für  $f, g \in \mathcal{L}, f = ax + b, g = cx + d$

$$f \sim g \iff a = c.$$

□

## 1.4 Blatt 4

### Aufgabe 12. Direktes Produkt

- (a) Zeigen Sie: Sind  $(G, *, e_G)$  und  $(H, \star, e_H)$  Gruppen, dann ist auch  $G \times H$  mit der Verknüpfung

$$\odot (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H, \quad (g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 \star h_2)$$

und dem neutralen Element  $(e_G, e_H)$  eine Gruppe. Diese Gruppe nennt man auch das *direkte Produkt* von  $G$  und  $H$ .

- (b) Zeigen Sie: Sind  $(R, +, \cdot)$  und  $(S, \star, *)$  Ringe, dann ist auch  $R \times S$  mit den Verknüpfung  $\oplus$  und  $\odot$ , definiert durch  $(r_1, s_1) \oplus (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, s_1 \star s_2)$  bzw.  $(r_1, s_1) \odot (r_2, s_2) := (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2)$  ein Ring.
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist  $(K, +, \cdot)$  ein Körper, dann ist auch  $K \times K$  mit den Verknüpfungen wie in (b) ein Körper.

*Beweis.* (a) (i) (Assoziativität)

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) \odot ((g_2, h_2) \odot (g_3, h_3)) &= (g_1, h_1) \odot (g_2 * g_3, h_2 \star h_3) \\ &= (g_1 * (g_2 * g_3), h_1 \star (h_2 \star h_3)) \\ &= ((g_1 * g_2) * g_3, (h_1 \star h_2) \star h_3) \\ &= (g_1 * g_2, h_1 \star h_2) \odot (g_3, h_3) \\ &= ((g_1, h_1) \odot (g_2, h_2)) \odot (g_3, h_3) \end{aligned}$$

(ii) (Neutrales Element)

$$(g_1, h_1) \odot (e_G, e_H) = (g_1, h_1) = (e_G, e_H) \odot (g_1, h_1).$$

(iii) (Existenz des Inverses) Sei  $(g_1, h_1) \in G \times H$ . Weil  $G$  und  $H$  Gruppe sind, gibt es Elemente  $g_1^{-1} \in G, h_1^{-1} \in H$ , sodass  $g_1 * g_1^{-1} = e_G = g_1^{-1} * g_1$  und  $h_1 \star h_1^{-1} = e_H = h_1^{-1} \star h_1$ . Es gilt

$$(g_1, h_1) \odot (g_1^{-1}, h_1^{-1}) = (g_1 * g_1^{-1}, h_1 \star h_1^{-1}) = (e_G, e_H),$$

$$\text{und \u00e4hnlich auch } (g_1^{-1}, h_1^{-1}) \odot (g_1, h_1) = (e_G, e_H)$$

Schluss:  $(G \times H, \odot, (e_G, e_H))$  ist eine Gruppe.

(b) (i)  $(R \times S, \oplus, (0_R, 0_S))$  ist eine abelsche Gruppe.

Folgt aus (a).

(ii)  $\oplus$  ist assoziativ:

Beweis l\u00e4uft \u00e4hnlich zu (a), die Behauptung folgt aus der Assoziativit\u00e4t von  $\cdot$  und  $*$ .

(iii) Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) \odot ((r_2, s_2) \oplus (r_3, s_3)) &= (r_1, s_1) \odot (r_2 + r_3, s_2 \star s_3) \\ &= (r_1 \cdot (r_2 + r_3), s_1 * (s_2 \star s_3)) \\ &= (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3, s_1 * s_2 \star s_1 * s_3) \\ &= (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2) \oplus (r_1 \cdot r_3, s_1 * s_3) \\ &= [(r_1, s_1) \odot (r_2, s_2)] \oplus [(r_1, s_1) \odot (r_3, s_3)] \end{aligned}$$

(c) Falsch. Sei  $x, y \in K$  beliebige Elemente von  $K$ . Es ist klar, dass  $(0, 0)$  das Nullelement ist, weil

$$(x, y) \oplus (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

Sei jetzt  $x \neq 0 \neq y$ . Es gilt

$$(x, 0) \odot (0, y) = (x \cdot 0, 0 \cdot y) = (0, 0),$$

also es gibt Nullteiler. □

**Aufgabe 13.** Zeigen Sie: In einem Ring  $(R, +, \cdot)$  gilt genau dann die K\u00fcrzungsregel

$$\text{Falls } a \in R \setminus \{0\} \text{ und } x, y \in R \text{ beliebig sind, dann gilt } a \cdot x = a \cdot y \implies x = y$$

wenn  $R$  nullteilerfrei ist.

*Beweis.* 1.  $R$  hat Nullteiler  $\implies$  die Kürzungsregel gilt nicht.

Per Ausnahme gibt es  $x \in R \setminus \{0\}$  mit Nullteiler  $a \in R \setminus \{0\}$ , also  $a \cdot x = 0$ . Es gilt auch, dass  $a \cdot 0 = 0$ , daher

$$a \cdot x = a \cdot 0 = 0.$$

Aber  $x \neq 0$ , und die Kürzungsregel gilt nicht.

2.  $R$  nullteilerfrei  $\implies$  Kürzungsregel gilt.

Seien  $a \in R \setminus \{0\}$  und  $x, y \in R$  beliebig und

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \cdot y \\ a \cdot x + [-(a \cdot y)] &= a \cdot y + [-(a \cdot y)] \\ 0 &= a \cdot x - a \cdot y \\ &= a \cdot (x - y) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass entweder  $a = 0$  oder  $x - y = 0$ . Weil wir schon ausgenommen haben, dass  $a \neq 0$ , gilt  $x - y = 0$ , oder  $x = y$ .  $\square$

**Aufgabe 14. (Verknüpfungsverträglich)** Es seien  $(G, \cdot, e_G), (H, *, e_H)$  Gruppen und  $\alpha : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie

- (a)  $U = \{u \in G \mid \alpha(u) = e_H\}$  ist eine Untergruppe von  $G$ .
- (b)  $\alpha(G)$  ist eine Untergruppe von  $H$ .
- (c) Durch  $a \sim b \iff ab^{-1} \in U$  wird eine verknüpfungsverträgliche Äquivalenzrelation auf  $G$  definiert.

*Beweis.* (a) (i) Neutrales Element.

$\alpha(e_G) = e_H$ , weil, für alle  $x \in G$  gilt

$$\alpha(x) = \alpha(x \cdot e_G) = \alpha(x) * \alpha(e_G).$$

(ii)  $U$  ist abgeschlossen.

Sei  $x, y \in U$ , also  $\alpha(x) = e_H = \alpha(y)$ . Es gilt

$$\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) * \alpha(y) = e_H * e_H = e_H$$

also  $x \cdot y \in U$ .

(iii) Existenz des Inverses

Sei  $x \in U$ , und  $x \cdot x^{-1} = e_G$ . Es gilt

$$e_H = \alpha(e_G) = \alpha(x \cdot x^{-1}) = \alpha(x) * \alpha(x^{-1}) = e_H * \alpha(x^{-1}) = \alpha(x^{-1}),$$

also  $x^{-1} \in U$ .

(b) (a) Neutrales Element

$\alpha(e_G) = e_H$ , der Beweis ist schon in (a) geschrieben.

(b)  $\alpha(G)$  ist abgeschlossen.

Sei  $\alpha(G) \ni y_1 = \alpha(x_1)$  bzw.  $\alpha(G) \ni y_2 = \alpha(x_2)$ , für  $x_1, x_2 \in G$ .  
Es gilt

$$y_1 * y_2 = \alpha(x_1) * \alpha(x_2) = \alpha(x_1 \cdot x_2) \in \alpha(G).$$

(c) Existenz des Inverses

Sei  $\alpha(G) \ni y = \alpha(x)$ . Sei auch  $x^{-1} \in G$ , sodass  $x \cdot x^{-1} = e_G = x^{-1} \cdot x$ . Es gilt

$$y * \alpha(x^{-1}) = \alpha(x) * \alpha(x^{-1}) = \alpha(x \cdot x^{-1}) = \alpha(e_G) = e_H,$$

also  $\exists \alpha(x^{-1}) \in \alpha(G)$ , für die gilt  $y * \alpha(x^{-1}) = e_H = \alpha(x^{-1}) * y$ .

(c) In (i) - (iii) beweisen wir, dass es eine Äquivalenzrelation ist. Dann beweisen wir, dass sie verknüpfungsverträglich ist. Sei im Beweis  $x, y, z, w \in G$  beliebige Elemente.

(i) (Reflexivität)  $x \sim x$ , weil  $x \cdot x^{-1} = e_G \in U$ .

(ii) (Symmetrie) Sei  $x \sim y$ , also  $xy^{-1} \in U$ . Es gilt dann,  $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}$ . Weil  $U$  eine Gruppe ist, gilt  $(xy^{-1})^{-1} \in U$ , also  $yx^{-1} \in U$ . Daraus folgt  $y \sim x$ .

(iii) (Transitivität) Sei  $x \sim y$  und  $y \sim z$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$  und  $y \cdot z^{-1} \in U$ . Es folgt

$$x \cdot z^{-1} = \underbrace{x \cdot y^{-1}}_{\in U} \cdot \underbrace{y \cdot z^{-1}}_{\in U} \in U,$$

also  $x \sim z$ .

(iv) Sei  $x \sim y$  und  $z \sim w$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$  und  $z \cdot w^{-1} \in U$ . Wir möchten zeigen, dass  $x \cdot z \sim y \cdot w$ , also

$$x \cdot z \cdot (y \cdot w)^{-1} = x \cdot z \cdot w^{-1} \cdot y^{-1} \in U.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(x \cdot z \cdot w^{-1} \cdot y^{-1}) &= \alpha(x) * \alpha(z \cdot w^{-1}) * \alpha(y^{-1}) \\ &= \alpha(x) * e_H * \alpha(y^{-1}) \\ &= \alpha(x \cdot y^{-1}) \\ &= e_H \end{aligned}$$

also  $x \cdot z \sim y \cdot w$ . □

### Aufgabe 15. (Rechnen in verschiedenen Ringen)

- (a) Bestimmen Sie das inverse Element von  $\bar{6}$  in  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$  oder weisen Sie nach, dass es nicht existiert.
- (b) Bestimmen Sie die Charakteristik von  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , wobei die beiden Teile des Produktes als Ringe interpretiert werden und die Verknüpfung wie in 12(b) definiert wird.
- (c) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$ , die die Gleichung  $z^2 + 2$  erfüllen.
- (d) Berechnen Sie  $(7+i)(6-i)^{-1}$  und geben Sie das Ergebnis als komplexe Zahl gemäß Definition 2.4.14 an.
- (e) Bestimmen Sie die Einerstelle von  $27^{101}$ .

*Beweis.* (a) (i)  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \bar{6} = \bar{2}$ , und es gibt kein inverse Element.

$$\begin{aligned}\bar{2} \cdot \bar{0} &= \bar{0} \\ \bar{2} \cdot \bar{1} &= \bar{2} \\ \bar{2} \cdot \bar{2} &= \bar{4} = \bar{0} \\ \bar{2} \cdot \bar{3} &= \bar{6} = \bar{2}\end{aligned}$$

(ii)  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \bar{6} = \bar{1}$ . Daher ist  $\bar{6} = \bar{6}^{-1}$ .

(iii)  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \bar{6} \cdot \bar{6} = \bar{36} = \bar{1}$ .

(iv)  $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}) \bar{6} \cdot \bar{6} = \bar{36} = \bar{1}$ .

- (b) Im Allgemeinen ist die Charakteristik von  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $a$  und  $b$ . Es gilt  $n \cdot 1_{\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}}$ , und auch  $n \cdot 1_{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}}$ . Für  $\mathbb{N} \ni n < \text{kgV}(a, b)$  kann die beides gleichzeitig per Definition nicht gelten. Die Antworten folgen:

(i)  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$  15

(ii)  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$  6

- (c)  $z^2 + 2 = 0$ ,  $z^2 = -2$ . Wir haben  $|z|^2 = |2|$ , und  $|z| = \sqrt{2}$ . Daraus folgt:

$$z = \pm\sqrt{2}i.$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{7+i}{6-i} &= \frac{(7+i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} \\ &= \frac{42 + 13i - 1}{36 + 1} \\ &= \frac{41 + 13i}{37} \\ &= \left(\frac{41}{37}, \frac{13}{37}\right)\end{aligned}$$

(e)  $27^{101} = (3^3)^{101} = 3^{303}$ . Sei  $a$  die Einerstelle von  $3^{303}$ . Es gilt

$$3^{303} \equiv a \pmod{10}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \equiv 3 \pmod{10} \\ 3^2 &= 9 \equiv 9 \pmod{10} \\ 3^3 &= 27 \equiv 7 \pmod{10} \\ 3^4 &\equiv 1 \pmod{10} \\ 3^5 &\equiv 3 \pmod{10} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 3^{303} &= 3^{4 \times 75 + 3} \\ &\equiv 3^3 \pmod{10} \\ &\equiv 7 \pmod{10} \end{aligned}$$

also die Einerstelle von  $27^{101}$  ist 7. □

**Aufgabe 16.** Wir können analog zur Konstruktion komplexer Zahlen vorgehen, um aus  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  größere Ringe zu konstruieren, d.h. für festes  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir auf  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  die Addition  $\oplus$  bzw. Multiplikation  $\odot$  durch

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

bzw.

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

für alle  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Entscheiden Sie, für welche  $n \in \{2, 3, 4\}$  mit dieser Konstruktion ein Körper entsteht.

*Beweis.* ( $n = 2$ ) Es ist kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist.

$$(\bar{1}, \bar{1}) \odot (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

( $n = 3$ ) Es ist ein Körper. Wir wissen, weil 3 eine Primzahl ist, dass  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ein Körper ist. Wir vermuten, dass das inverse Element

$$(a, b)^{-1} = \left( a(a^2 + b^2)^{-1}, -b(a^2 + b^2)^{-1} \right),$$

was wohldefiniert ist, weil  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ein Körper ist. Wir wissen (und werden benutzen), dass Multiplikation in der ganzen Zahlen kommutativ ist. Es folgt

$$(a, b) \odot (a, b)^{-1} = \left( a^2(a^2 + b^2)^{-1} - b^2(a^2 + b^2)^{-1}, 0 \right)$$



$$\begin{aligned}
&= \left( (a^2 + b^2) (a^2 + b^2)^{-1}, 1 \right) \\
&= (1, 0),
\end{aligned}$$

was das neutrale Element ist (beweis gleich wie der Beweis bzgl.  $\mathbb{C}$ ).

( $n = 4$ ) Es ist noch einmal kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist.

$$(\bar{2}, \bar{2}) \odot (\bar{2}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{0}). \quad \square$$

## 1.5 Blatt 5

**Aufgabe 17.** Es sei  $K$  ein Körper. Ferner seien  $a, b \in K[t] \setminus \{0\}$  Polynome.

Wir definieren  $r_0 := a, r_1 := b$  und definieren für  $k \in \mathbb{N}$   $q_k$  und  $r_{k+1}$  als Polynome, die

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad \deg(r_{k+1}) < \deg(r_k)$$

erfüllen, falls  $r_k \neq 0$  und ansonsten definieren wir  $r_{k+1} = r_k = 0$ .

- (a) Zeigen Sie: Es gibt ein minimales  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $r_k = 0$  für alle  $k > k_0$ .
- (b) Zegen Sie: Mit dieser Wahl ist  $r_{k_0} \neq 0$  und  $r_{k_0}$  ist ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .
- (c) Zeigen Sie: Ist  $s \in K[t]$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ , dann ist  $s$  auch ein Teiler von  $r_{k_0}$ .

*Beweis.* (a) Es gilt  $\deg(r_k) < \deg(r_k)$ , also die Folge  $\deg(r_k)$  ist streng monoton fallend. Weil es nur endliche Möglichkeiten  $k$  für die Grad eines Polynomes mit  $k < \deg(b)$  gibt, muss es ein Zahl  $k'_0$  geben, mit  $\deg(r_{k'_0}) = -\infty$ .

(Die Möglichkeiten sind  $\{-\infty, 0, 1, \dots, \deg(b)\}$ .)

$\deg(r_{k_0}) = -\infty$  genau dann, wenn  $r_{k_0} = 0$ . Es folgt per Definition,  $r_{k_0+1} = 0$  und  $r_k = 0 \forall k \geq k_0$  per Induktion.

Weil  $\{0, 1, \dots, k'_0\}$  endlich ist, gibt es ein minimales Zahl  $k_0$  mit die gewünschte Eigenschaft.

Mit dieser Wahl ist  $r_{k_0} \neq 0$ .

(b)

Sonst wäre es ein Widerspruch, weil  $k_0$  nicht die kleinste Zahl mit diese Eigenschaft wäre. Falls  $r_{k_0} = 0$ , wäre  $k_0 - 1$  eine kleine Zahl mit die gewünschte Eigenschaft.

- (i) Wir beweisen zuerst die folgende Behauptung:

Sei  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k+1}$ . Dann ist  $p$  auch ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$ .

Per Definition teilt  $p$   $r_k$ . Wir wissen auch, dass

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}.$$

Weil  $p$  teilt  $r_k$ , teilt  $p$   $q_k r_k$  auch. Da  $p$  teilt auch  $r_{k+1}$ , teilt  $p$   $q_k r_k + r_{k+1}$ , also  $p$  teilt  $r_{k-1}$ . Dann ist  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$ .

- (ii) Sei  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_{k-1}$  und  $r_k$ ,  $k \leq k_0$ . Dann ist  $p$  auch ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .

Wir beweisen es per Induktion. Für  $k = 1$  ist es klar, dass alle gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  auch gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  sind.

Jetzt nehmen wir an, dass es für eine beliebige  $\mathbb{N} \ni k < k_0$  gilt, dass alle gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$  auch gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  sind.

Jetzt betrachten wir  $r_k$  und  $r_{k+1}$ . Sei  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k+1}$ . Aus (i) folgt, dass  $p$  auch ein Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$  ist. Per Induktionsvoraussetzung ist  $p$  auch ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .

- (iii) Insbesondere gilt, dass alle gemeinsamer Teiler  $p$  von  $r_{k_0}$  und  $r_{k_0-1}$  auch gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  sind.
- (iv) In (a) haben wir schon bewiesen, dass  $r_{k_0}$  ein Teiler von  $r_{k_0-1}$  ist. Daraus folgt, dass  $r_{k_0}$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_{k_0}$  und  $r_{k_0-1}$  ist. Es folgt, dass  $r_{k_0}$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist.

- (c) Der Beweis läuft ähnlich:

- (i) Wir beweisen per Induktion:

Sei  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .  $p$  ist dann ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$  für alle  $k \in \{0, 1, \dots, k_0\}$ .

- (ii) Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass es für beliebige  $\mathbb{N} \ni k \leq k_0 - 1$ , dass alle gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  auch gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$  sind.
- (iii) Wir betrachten  $p$ , was ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist, also per Induktionsvoraussetzung ist  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$ .

Es gilt  $r_{k+1} = r_{k-1} - q_k r_k$ , also weil  $p \mid r_k$  teilt, teilt  $p \mid q_k r_k$ . Es folgt, dass  $p \mid r_{k-1} - q_k r_k$ , und  $p \mid r_{k+1}$ . Also  $p$  ist ein gemeinsamer Teiler von  $r_{k+1}$  und  $r_k$ .

Insbesondere gilt, dass wenn  $s \in K[t]$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist, ist  $s$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_{k_0}$  und  $r_{k_0-1}$ , also  $s$  ist ein Teiler von  $r_{k_0}$ .  $\square$

**Aufgabe 18.** (a) Zeigen Sie: Ist  $K$  ein endlicher Körper, so gibt es ein Polynom  $p \neq 0$ , das alle  $x \in K$  als Nullstelle hat. Folgern Sie daraus, dass die Abbildung  $K[t] \rightarrow \text{Abb}(K, K), f \rightarrow (x \rightarrow f(x))$  in diesem Fall nicht injektiv ist.

(b) Zeigen Sie: Ist  $p \in K[t]$  ein Polynom vom Grad 0, 1, 2 oder 3, das keine Nullstelle in  $K$  hat, dann hat von zwei Polynomen  $f, g$  mit  $f \cdot g = p$  mindestens eines Grad 0.

(c) Bestimmen Sie mit dem vietaschen Nullstellensatz alle rationalen Nullstellen von

$$q = 99 \cdot t^3 - 63 \cdot t^2 - 44 \cdot t + 28 \in \mathbb{Q}[t].$$

(d) Beweisen Sie, dass das Polynom  $t^8 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$  keine rationalen Nullstellen hat.

(e) Es seien  $f = (2 + 3i)X^7 - 5$  und  $g = X^2 - 2i$  in  $\mathbb{C}[X]$  gegeben. Bestimmen Sie wie im Existenzbeweis von Satz 2.4.26 die Polynome  $q, r \in \mathbb{C}[X]$  mit  $\deg(r) < \deg(g)$  und

$$f = q \cdot g + r.$$

*Beweis.* (a) Wir beweisen es konstruktiv. Sei  $p = \prod_{r \in K} (x - r)$ . Es gilt, für alle  $x \in K$ , dass  $x - x = 0$ , also  $p(x) = 0$ . Aber  $p \neq 0$ , z.B. ist das Koeffizient  $a_n = 1$ , wobei  $n = |K|$ .

Wir wissen, dass die Abbildung das konstruierte Polynom auf die Nullfunktion abbildet. Aber die Abbildung bildet auch das Nullpolynom auf die Nullfunktion ab. Also wir haben  $K[t] \ni 0 \neq p \in K[t]$ , aber die Abbildung bildet 0 und  $p$  auf die gleiche Funktion, also es ist nicht injektiv.

(b) Es gilt

$$\deg(p) = \deg(f) + \deg(g),$$

also es gibt nur zwei Möglichkeiten für  $\deg(f)$  und  $\deg(g)$ : Entweder haben wir  $0 + 3 = 3$  oder  $1 + 2 = 3$ .

Sei  $\deg(f) = 1$  und  $\deg(g) = 2$ , mit  $p = f \cdot g$ . Per Definition ist  $f(t) = a_0 + a_1 t, a_0, a_1 \in K$ . Sei  $t = -a_1^{-1} a_0 \in K$ . Es gilt  $\tilde{f}(t) = a_0 - a_1 a_1^{-1} a_0 = 0$ , also  $t$  ist eine Nullstelle von  $f$ .

Es folgt daraus, dass  $t$  ist eine Nullstelle von  $p$ , ein Widerspruch zu die Annahme, dass  $p$  keine Nullstellen hat.

Jetzt bleibt nur eine Möglichkeit, dass von  $f, g$  mindestens eines (eigentlich genau eine) Grad 0 hat.

- (c) Für alle rationale Nullstellen  $a/b, a \in \mathbb{N} \cup \{0\}, b \in \mathbb{Z}, a, b$  teilerfremd gilt

$$a|28 \quad b|99.$$

Weil  $28 = 2^2 \times 7$  und  $99 = 3^2 \times 11$ , sind die Möglichkeiten dafür:

$$\begin{aligned} a &\in \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \\ b &\in \{1, 3, 9, 11, 33, 99\} \end{aligned}$$

Man kann alle 36 Kombinationen probieren, die rationale Nullstellen sind:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{7}{11}, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}.$$

- (d) Wir verwenden Satz 2.4.37. Sei  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$  teilerfremd, eine Nullstelle von  $t^8 - 2$ . Dann gilt

$$p|-2 \quad q|1,$$

also  $q = 1$  und  $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , dann  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Aber für keine mögliche  $x$  gilt  $x^8 - 2 = 0$ , also  $t^8 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$  hat keine rationale Nullstellen.

- (e)

$$\begin{aligned} (2 + 3i)X^7 - 5 &= (X^2 - 2i)((2 + 3i)X^5 - (6 - 4i)X^3 \\ &\quad - (8 + 12i)X) + \underbrace{(24 - 16i)X - 5}_r. \quad \square \end{aligned}$$

**Aufgabe 19.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

- (a)  $\mathbb{R}$  wird mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.
- (b)  $\mathbb{Z}$  wird mit der gewöhnlichen Addition und der Multiplikation  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : \bar{0} \cdot z = 0, \bar{1} \cdot z = z$  zu einem  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Vektorraum.
- (c) Der Ring  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  wird mit der Multiplikation  $a \cdot (z, r) = (az, ar)$  zu einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (d) Der Ring  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  wird mit der Multiplikation  $a \cdot (z, r) = (az, ar)$  zu einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.
- (e) Jeder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist mit der entsprechend eingeschränkten Multiplikation auch ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

*Beweis.* (a) Wahr. Wir wissen, dass  $(\mathbb{R}, +, 0)$  eine abelsche Gruppe ist.

Die andere Gruppenaxiome folgen aus die analoge Axiome für Addition und Multiplikation in  $\mathbb{R}$ , wenn man  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$  als Unterring von  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$  betrachtet.

(b) Falsch. Das Distributivgesetz wird verletzt. Sei  $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$  und daher  $a + a \neq 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} a + a &= \bar{1} \cdot a + \bar{1} \cdot a \\ &\neq (\bar{1} + \bar{1})a \\ &= \bar{0} \cdot a \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) Wahr. Es folgt ähnlich zu (a):

Wir haben  $+, \cdot : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir wissen, dass  $(\mathbb{R}, +|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}, \cdot|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}, 0, 1)$  ein Unterring ist. Daraus folgt, dass  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  mit der Multiplikation  $a \cdot (z, r) = (az, ar)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

(d) Falsch. Es gilt, z.B.  $(1, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}$ , aber

$$i \cdot (1, 1) = (i, i) \notin \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

□

**Aufgabe 20.** Es sei  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Die Menge  $\text{End}(V)$  aller Homomorphismen von  $V \rightarrow V$  bildet mit den Verknüpfungen

$$\oplus : \text{End}(V) \times \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V), f \oplus g := (V \rightarrow V, x \rightarrow f(x) + g(x))$$

und  $\circ$  der gewöhnlichen Hintereinanderausführung von Abbildungen, einen Ring mit 1.

(b) Enthält  $\text{End}(V)$  einen Körper  $K$ , dann ist  $(V, +)$  mit der skalaren Multiplikation  $k \cdot v := k(v)$  ein  $K$ -Vektorraum.

*Beweis.* (a) (i) Wir wissen, weil  $(V, +)$  abelsch ist, dass  $(\text{End}(V), \oplus)$  auch eine abelsche Gruppe ist.

(ii) Wir wissen auch, dass Verkettung von Funktionen assoziativ ist.

(iii) Distributivgesetz: Sei  $f, g, h \in \text{End}(V)$ . Es gilt, für beliebige  $x \in V$ ,

$$\begin{aligned} [f \circ (g \oplus h)](x) &= f(g(x) + h(x)) \\ &= f(g(x)) + f(h(x)) && f \text{ ist ein Homomorphismus} \\ &= (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) \\ &= [(f \circ g) \oplus (f \circ h)](x) \end{aligned}$$

Weil  $x$  beliebig war, ist  $f \circ (g \oplus h) = (f \circ g) \oplus (f \circ h)$

- (iv) Sei  $1 \in \text{End}(V)$ ,  $x \rightarrow x$ . Sei außerdem  $f \in \text{End}(V)$ , und  $x \in V$  beliebig. Es gilt

$$f \circ 1 = 1 \circ f = f,$$

also  $\text{End}(V)$  ist ein Ring mit 1.

- (b)  $V$  ist eine abelsche Gruppe (das haben wir vorausgesetzt). Wir müssen nur die andere Axiome betrachten. In folgendes Sei  $\lambda, \mu \in K$  beliebiger Elemente von der Körper und  $v, w \in V$ . Weil  $K$  ein Körper ist, enthält  $K$  1.

- (i)  $(\lambda \oplus \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$  folgt per Definition von  $\oplus$ .  
(ii)  $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$  gilt, weil  $\lambda$  ein Homomorphismus ist.  
(iii)

$$\begin{aligned} (\lambda \circ \mu) \cdot v &= \lambda(\mu(v)) \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot v) \end{aligned}$$

- (iv) Es gilt  $1 \cdot v = 1(v) = v$  per Definition von 1. □

---

## Lineare Algebra 2

---

### 2.1 Blatt 1 (30/33)

**Aufgabe 21.** (a) Bestimmen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung

$$x^2 = u + iv,$$

in Abhängigkeit von  $u, v \in \mathbb{R}$

(b) Führen Sie das Nullstellenproblem

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

mit  $a \in \mathbb{C} \setminus 0, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$  auf den Fall in (a) zurück. Geben Sie weiterhin eine geschlossene Darstellung aller Lösungen für den Fall  $a = 1$  an.

Hat alles geklappt, sollte bei Ihnen speziell für den Fall  $a = 1$  und  $\operatorname{Im}(b) = \operatorname{Im}(c) = 0$  die entsprechende Mitternachtsformel dastehen.

*Beweis.* (a)  $|x^2| = |x|^2 = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}$

Daraus folgt:

$$|x| = (u^2 + v^2)^{1/4},$$

$$x = (u^2 + v^2)^{1/4} e^{i\theta}.$$

Setze es in  $x^2 = u + iv$  ein und löse die Gleichungen für  $\theta$ . Sei  $\varphi = \operatorname{atan}_2(u, v)$  Dann ist:

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \text{ oder } \theta = \frac{\varphi + 2\pi}{2}.$$

(b)

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

d.h.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm p$$

wobei  $p$  die Lösung zu  $p^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$  ist. Im Fall  $a = 1$  und  $\operatorname{Im}(b) = \operatorname{Im}(c) = 0$ , daraus folgt:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}.$$

□

**Aufgabe 22.** Finden Sie für die Polynome  $p, d \in \mathbb{C}[x]$  jeweils solche  $q, r \in \mathbb{C}[x]$  mit  $\deg(r) < \deg(d)$ , dass  $p = qd + r$  gilt.

(a)  $p = x^7 + x^5 + x^3 + 1, d = x^2 + x + 1$

(b)  $p = x^5 + (3 - i)x^3 - x^2 + (1 - 3i)x + 1 + i, d = x^2 + i$

(c) Wie sehen  $s, r$  aus, wenn man in (a) und (b) jeweils die Rollen von  $p$  und  $d$  vertauscht? D.h. bestimmen Sie  $s, r \in \mathbb{C}[x]$  mit  $\deg r < \deg p$ , sodass  $d = sp + r$  gilt.

*Beweis.* (a)

$$\begin{array}{r} x^5 - x^4 + x^3 \\ x^2 + x + 1 \overline{) \quad x^7 \quad \quad + x^5 \quad \quad + x^3 + 1} \\ \underline{-x^7 - x^6 - x^5} \phantom{+ 1} \\ -x^6 \phantom{+ x^5 + x^4} \\ \underline{x^6 + x^5 + x^4} \phantom{+ 1} \\ x^5 + x^4 + x^3 \\ \underline{-x^5 - x^4 - x^3} \\ 1 \end{array}$$

Daher

$$q = x^5 - x^4 + x^3, r = 1.$$

(b)  $q = x^3 + (3 - 2i)x - x, r = -(1 + 6i)x + (1 + 2i)$

(c)  $r = d, s = 0$

□

**Aufgabe 23.** Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -38 \\ -46 \\ -18 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie  $\operatorname{Im}(A)$  und  $\ker(A)$



(b) Bestimmen Sie  $\text{Lös}(A, b)$  und  $\text{Lös}(A, c)$ .

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei dann  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ . Wenn  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \ker(A)$ , gilt

$$\begin{aligned} t_3 &:= x_3 \\ t_4 &:= x_4 \\ x_1 &= x_3 - x_4 = t_3 - t_4 \\ x_2 &= -x_3 - 2x_4 = -t_3 - 2t_4 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\ker(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -46 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2-2R_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_1} \\ \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1-2R_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= -18 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= -10 \end{aligned}$$

Deswegen ist  $\text{Lös}(A, b)$

$$\begin{pmatrix} -18 + x_3 - x_4 \\ -10 - x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & | & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gibt keine Lösungen, weil  $0 \neq 1$ , also  $\text{Lös}(A, c) = \emptyset$

□

**Aufgabe 24.** Gegeben seien die  $\mathbb{R}$ -Vektorräume  $V$  mit Basis  $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$  und Basis  $B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$ . Wir definieren einen linearen Operator  $T : V \rightarrow W$  wie folgt:

$$T(v_1) = w_1 + w_3 \quad T(v_2) = w_1 + w_2, \quad T(v_3) = -w_1 - w_2 - w_3.$$

(a)  $w_1, w_2, w_3 \in \text{span}\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ , weil

$$\begin{aligned} w_1 &= T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) \\ w_2 &= (-1)(T(v_3) + T(v_1)) \\ w_3 &= (-1)(T(v_2) + T(v_3)) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$W = \text{span}(w_1, w_2, w_3) = \text{span}(T(v_1), T(v_2), T(v_3)).$$

Daraus folgt:

$$\text{im}(T) = \mathbb{R}^3, \quad \ker(T) = \{0\}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$B_W^* = \{w_1 + w_3, w_1 + w_2, -w_1 - w_2 - w_3\}.$$

(d)

$$B_V^* = \{v_1 + v_2 + v_3, -(v_1 + v_3), -(v_2 + v_3)\}.$$

## 2.2 Blatt 2

**Aufgabe 25.** Es seien die Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  mit  $x_i \in \mathbb{R}$  gegeben. Wir definieren den Operator

$$\Phi : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \rightarrow y, \text{ mit } p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

wobei wir mit  $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$  den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchsten  $n$  bezeichnen und  $p(x)$  die Auswertung des Polynoms  $p$  im Punkt  $x$  beschreibt.

- (a) Zeigen Sie: Sind die Punkte  $x_i$  paarweise verschieden, so ist die Abbildung  $\Phi$  wohldefiniert und isomorph. (Eine Konsequenz hieraus ist die eindeutige Lösbarkeit der Polynominterpolation.)
- (b) Was passiert, wenn Sie nicht fordern, dass die  $x_i$  paarweise verschieden sind? Kann  $\Phi$  im Allgemeinen noch injektiv (surjektiv) sein?

*Beweis.* (a) Injektiv: Nehme an, dass es zwei unterschiedliche Polynome  $p_1, p_2$  gibt, mit  $p_1(x_i) = p_2(x_i) \forall i = 0, \dots, n$ . Dann ist  $p(x) := p_1(x) - p_2(x)$  auch ein Polynom, mit  $p(x_i) := 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$ . Weil  $\deg(p) \leq n$  ist, folgt daraus, dass  $\forall x, p(x) = 0, p_1(x) = p_2(x)$ . Das ist ein Widerspruch.

Surjektive: Sei  $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist

$$p(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n)$$

auch ein Polynom mit  $\Phi(p) = (y_0, \dots, y_n)$ .

Linearität: Sei  $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x], a \in \mathbb{R}$ . Sei auch  $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ . Es gilt dann

$$p(x_i) = p_1(x_i) + p_2(x_i), i = 0, \dots, n$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(p_1 + p_2) = \Phi(p_1) + \Phi(p_2).$$

Es gilt auch, für  $p(x) := ap_1(x)$ , dass

$$p(x_i) = ap_1(x_i), i = 0, \dots, n,$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(ap_1) = a\Phi(p_1).$$

- (b) Nein. Sei, zum Beispiel,  $n = 1, x_0 = x_1 = 0$ . Dann gilt

$$\Phi(x) = (0, 0)^T$$

$$\Phi(x^2) = (0, 0)^T$$

Aber die zwei Polynome sind ungleich.

□

**Aufgabe 26.** (a) Es sei eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gegeben. Wir bilden die erweiterte Matrix

$$B = (A|1_n)$$

mit  $1_n$  die Einheitsmatrix in  $\mathbb{K}^n$ . Zeigen Sie:  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $A$  durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Verifizieren Sie weiterhin: Werden die dafür benötigten Zeilenumformungen auf ganz  $B$  angewendet, so ergibt sich im hinteren Teil, wo zu Beginn die Einheitsmatrix stand, genau  $A^{-1}$ .

(b) Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie  $A^{-1}$ .

*Beweis.* (a) Definiert  $(x, y), x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$  durch  $\mathbb{K}^{n+m} \ni (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ . Eine solche erweiterte Matrix bedeutet eine Gleichungssystem durch

$$B(x, -y) = Ax - 1_n y = 0,$$

wobei  $x, y \in \mathbb{K}^n$ . Für jeder  $x \in \mathbb{K}^n$  gibt es  $y \in \mathbb{K}^n$ , so dass  $B(x, -y) = 0$ . Nehme an, dass wir durch elementare Zeilenumformung

$$B = (A|1_n) \rightarrow (1_n, A') := B'$$

kann. Die Gleichungssystem ist dann  $x = A'y$ . Dadurch können wir für jeder  $y \in \mathbb{K}^n$  eine  $A'y = x \in \mathbb{K}^n$  rechnen, für die gilt, dass  $Ax = y$ . Das heißt, dass  $A' = A^{-1}$ .

(b)

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 - 3R_1} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \\ & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_4} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_4} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

□

**Aufgabe 27.** Es seien die Vektorräume  $V, W$  über  $\mathbb{K}$  gegeben mit  $\dim(V) = n$  und  $\dim(W) = m$ . Wir betrachten eine lineare Abbildung

$$T : V \rightarrow W, v \rightarrow T(v)$$

Seien  $B_V$  und  $B_W$  Basen von  $V$ , bzw.  $W$ . Wir nehmen an  $T$  ist nicht die konstante Nullabbildung. Beweisen Sie:

- (a) Der Kern von  ${}_{B_W}[T]_{B_V}$  ist entweder trivial (d.h. nur die 0) oder hängt nur von der Wahl von  $B_V$  ab, aber nicht von  $B_W$ .
- (b) Das Bild von  ${}_{B_W}[T]_{B_V}$  ist entweder der ganze  $\mathbb{K}^m$  oder hängt nur von der Wahl von  $B_W$  ab, aber nicht von  $B_V$ .
- (c) Der Rang von  ${}_{B_W}[T]_{B_V}$  ist unabhängig von  $B_W$  und  $B_V$ .

*Beweis.* Nach Korollar 5.43 gilt, für  $A, A' \subseteq V$  und  $B, B' \subseteq W$  Basen der Vektorräume  $V$  und  $W$  über  $\mathbb{K}$ , und  $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ .

$${}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'}.$$

**Lemma 2.1.** Jeder Basiswechsel für sowohl  $B_V$  als auch  $B_W$  kann als zwei Basiswechseln interpretiert werden, wobei eine Basiswechsel nur  $B_V$  verändert, und die andere nur  $B_W$ .

*Beweis.*

$${}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B ({}_B[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'}) {}_A[\text{id}_V]_A.$$

(In den Klammern gibt es zuerst ein Basiswechsel in  $V$ , dann ein Basiswechsel in  $W$ ). Ein ähnliche Argument zeigt, dass wir zuerst ein Basiswechseln in  $W$  betrachten kann. □

**Korollar 2.2.** In die Aufgabe muss man nur das Fall betrachten, in dem entweder  $B_V$  oder  $B_W$  sich verändert.

- (a) Nehme an,  $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V}) \neq 0$ . Die zwei Fälle

(i) Nur  $B_W$  sich verändert.

Sei  $v \in \mathbb{K}^n$ ,  ${}_B[\Phi]_A v = 0$ . Es gilt

$${}_{B'}[\Phi]_A = {}_{B'}[\text{id}_W]_B [{}_{B'}[\Phi]_{AA} [\text{id}_V]_A] v = {}_{B'}[\text{id}_W]_{BB} [{}_{B'}[\Phi]_{AA}] v = {}_{B'}[\text{id}_W]_B (0) = 0.$$

Sei jetzt  ${}_B[\Phi]_A v \neq 0$ . Solange wir zeigen, dass

$${}_{B'}[\text{id}_W]_B u \neq 0$$

für  $\mathbb{K}^m \ni u \neq 0$ , sind wir fertig. Aber  ${}_{B'}[\text{id}_W]_B u = 0$ , nur wenn  $u = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$ ,  $v_i \in B' = 0$  wegen der linear Unabhängigkeit.

(ii) Nur  $B_V$  sich verändert. Es stimmt leider nicht, dass  $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V})$  von  $B_V$  abhängig sein *muss*. Sei zum Beispiel  $B_K$  ein Basis für  $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V})$ , und  $B_V$  und  $B'_V$  Basen von  $V$ , für die gilt  $B_K \subset B_V, B_K \subset B'_V$ . Jetzt ist der Kern einen invarianten Unterraum von  $B$  unter  ${}_{B'_V}[T]_{B_V}$ , also der Kern verändert sich nicht, wenn der Basis sich verändert.

Wenn der Kern kein invarianter Unterraum ist, gilt es natürlich, dass der Kern sich durch das Basiswechsel verändert.

(b) Nehme an, dass  $\text{im}({}_{B_W}[T]_{B_V}) \neq \mathbb{K}^m$ . Wir betrachten noch einmal die zwei Fälle

(i) Nur  $B_V$  sich verändert. Weil  ${}_{B_V}[\text{id}]_{B'_V} : V \rightarrow V$  bijektiv ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{im}({}_{B_W}[T]_{B'_V}) &= \{ {}_{B_W}[T]_{B'_V} v \mid v \in \mathbb{K}^m \} = \{ {}_{B_W}[T]_{B_V B'_V} [{}_{B'_V}[\text{id}]_{B'_V}] v \mid v \in \mathbb{K}^m \} \\ &= \{ {}_{B_W}[T]_{B_V} v \mid v \in \mathbb{K}^m \} = \text{im}({}_{B_W}[T]_{B'_V}) \end{aligned}$$

(ii)  $B_W$  sich verändert. Jetzt gilt

$${}_{B'_W}[T]_{B_V} = {}_{B'_W}[\text{id}]_{B_W B_W} [{}_{B_W}[T]_{B_V}].$$

Leider ist es noch falsch, dass das Bild von  $B_W$  abhängig sein *muss* wegen eines ähnliches Arguments zu das Kern.

(c) Weil das Bild von  $B_V$  unabhängig ist, ist der Rang auch von  $B_V$  unabhängig.

Weil  ${}_{B'_W}[\text{id}]_{B_W}$  bijektiv als Abbildung  $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$  ist, ist es auch bijektiv für alle Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{K}^m$ . Das Bild vor und nach dem Basiswechsel sind dann isomorph. Deswegen ist der Rang von  $B_W$  unabhängig.

□

**Aufgabe 28.** Es wird gerechnet.

- (a) Wir definieren die lineare Abbildung  $T(x) = A \cdot x$  mit  $A$  gegeben wie in 2(b). Wir definieren die Basen

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie

$${}_{B_2}[T]_{B_1}.$$

- (b) Wir schauen nochmal auf Aufgabe 1. Es seien die paarweise verschiedene Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gegeben und die Abbildung  $\Phi$  wie zuvor. Gegeben sei die kanonische Basis

$$B := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

vom  $\mathbb{R}^n$  sowie die Basen

$$B_M := \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

und

$$B_l := \{l_0(x), l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x)\}, \quad \text{mit} \quad l_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Bestimmen Sie

$${}_B[\Phi]_{B_M}, \quad \text{und} \quad {}_B[\Phi]_{B_l}.$$

Ausgehend von den entstandenen Matrizen: Stellen Sie eine Vermutung, welche Basis für große  $n$  bevorzugt wird.

*Beweis.* Wir berechnen

$${}_{B_2}[\text{id}]_{B_1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$${}_{B_2}[\text{id}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen  $\{{}_{B_2}[\text{id}]_{B_1}\}^{-1}$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4+R_1} \\ & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \\ & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4+3R_2} \\ & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+3R_4} \\ & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+2R_4} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \times -1} \\ & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

also

$${}_{B_1}[\text{id}]_{B_2} = \{{}_{B_2}[\text{id}]_{B_1}\}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Es gilt dann

$$\begin{aligned} {}_{B_1}[\text{id}]_{B_2} A_{B_2} [\text{id}]_{B_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & -5 & -4 \\ 8 & 1 & 10 & 7 \\ -7 & 0 & -12 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei  $p_k(x) = x^k \in B_M$ . Es folgt, dass  $\Phi(p_k(x)) = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\}$ . Deswegen gilt

$${}_B[\Phi]_{B_M} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie dann  $l_k(x)$ . Weil  $(x - x_i)$  für  $i \neq k$  vorkommt, gilt  $l_k(x_i) = 0 \forall i \neq k$ . Für  $i = k$  gilt  $l_k(x_k) = \prod_{i \neq j=0}^n \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1$ . Es gilt daher

$${}_B[\Phi]_{B_l} = I_n = \text{diag}_n(1, 1, \dots, 1).$$

Ich vermute, dass  $B_l$  für große  $n$  bevorzugt wird...  $\square$

## 2.3 Blatt 3

**Aufgabe 29.** (a) Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte der folgenden Matrizen. Was muss jeweils für die Dimensionen erfüllt sein?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$D = (-1 \ 2 \ 0 \ 8), E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, F = (-1 \ 2 \ 0).$$

(b) Eine Blockmatrix ist eine Matrix von der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$$

mit Matrizen  $A_1 \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ,  $A_2 \in \mathbb{K}^{n' \times m}$ ,  $A_3 \in \mathbb{K}^{n \times m'}$ ,  $A_4 \in \mathbb{K}^{n' \times m'}$ . Sei weiterhin

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$$

mit ebenso Einträgen aus  $\mathbb{K}$ . Wer nun meint, die Multiplikation von  $A$  und  $B$  sei so simpel wie

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_3B_2 & A_1B_3 + A_3B_4 \\ A_2B_1 + A_4B_2 & A_2B_3 + A_4B_4 \end{pmatrix}$$

hat tatsächlich recht. Beweisen Sie diese Formel und geben Sie gleichzeitig die  $B_i$ 's für die benötigten Matrizenräume an, sodass die Rechnung wohldefiniert ist.

*Beweis.* (a) Für  $A$  eine  $n \times m$  Matrize, und  $B$  eine  $p \times q$  Matrize, ist  $AB$  wohldefiniert, nur wenn  $m = p$

Die Matrizenprodukte sind

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ 6 & 8 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AE = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ 43 & 100 \end{pmatrix}$$

$$FA = (-1 \ 7 \ 8)$$

$$BC = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ -7 & 14 & 0 & 56 \end{pmatrix}$$

$$DC = (55)$$

$$CF = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 \\ -7 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$FE = (-1 \ 6)$$

(b) Wir brauchen  $B_1 \in \mathbb{K}^{m \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{K}^{m' \times p}$ ,  $B_3 \in \mathbb{K}^{m \times q}$ ,  $B_4 \in \mathbb{K}^{m' \times q}$  für  $p, q \in \mathbb{N}$ . Wir bezeichnen, für  $v_1 \in \mathbb{K}^a$ ,  $v_2 \in \mathbb{K}^b$ , das Vektor  $(v_1, v_2) \in \mathbb{K}^{a+b}$ . Sei jetzt  $v_1 \in \mathbb{K}^p$ ,  $v_2 \in \mathbb{K}^q$ .

$$\begin{aligned} AB(v_1, v_2) &= A \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= A \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 v_1 + B_3 v_2 \\ B_2 v_1 + B_4 v_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 v_1 + B_3 v_2 \\ B_2 v_1 + B_4 v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1(B_1 v_1 + B_3 v_2) + A_3(B_2 v_1 + B_4 v_2) \\ A_2(B_1 v_1 + B_3 v_2) + A_4(B_2 v_1 + B_4 v_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_3 B_2 & A_1 B_3 + A_3 B_4 \\ A_2 B_1 + A_4 B_2 & A_2 B_3 + A_4 B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \square
\end{aligned}$$

**Aufgabe 30.** Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ , nicht notwendigerweise endlich-dimensional und

$$\Phi : V \rightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Beweisen Sie:

- (a) Die duale Abbildung  $\Phi^*$  ist injektiv genau dann, wenn  $\Phi$  surjektiv ist.  
Hinweis: Die Richtung  $\implies$  beweisen Sie am einfachsten als eine Kontraposition.
- (b) Die duale Abbildung  $\Phi^*$  ist surjektiv genau dann, wenn  $\Phi$  injektiv ist.  
Hinweis: Die Rückrichtung lässt sich am einfachsten direkt beweisen. Nutzen Sie in dem Fall die Injektivität von  $\Phi$  aus, um für ein beliebiges  $v^* \in V^*$  eine lineare Abbildung im Bild von  $\Phi^*$  zu konstruieren, die die gleichen Werte wie Abbildung  $v^*$  liefert.
- (c) Im Falle der Invertierbarkeit gilt

$$(\Phi^{-1})^* = (\Phi^*)^{-1}.$$

*Beweis.* (a) Sei  $\Phi$  surjektiv, und  $w_1^*, w_2^* \in W^*$ . Es gilt  $\Phi w_1^* = w_1^* \circ \Phi$ ,  $\Phi w_2^* = w_2^* \circ \Phi$ . Die zwei Abbildungen  $w_1^* \circ \Phi$  und  $w_2^* \circ \Phi$  sind unterschiedliche, solange es mindestens ein  $v \in V$  gibt, sodass  $(w_1^* \circ \Phi)(v) \neq (w_2^* \circ \Phi)(v)$ . Wir haben aber ausgenommen, dass  $w_1^* \neq w_2^*$ . Das bedeutet, dass es  $w \in W$  gibt, so dass  $w_1^*(w) \neq w_2^*(w)$ . Weil  $\Phi$  surjektiv ist, ist  $w = \Phi(v)$  für eine  $v$ . Dann ist  $(w_1^* \circ \Phi)(v) \neq (w_2^* \circ \Phi)(v)$ , also  $\Phi^*$  ist injektiv.

Jetzt nehmen wir an, dass  $\Phi$  nicht surjektiv ist, also es gibt ein Unterraum  $U \subseteq W$ , sodass  $U \setminus \{0\} \cap \text{im}(\Phi) = \emptyset$ . Dann können wir zwei lineare Abbildungen  $w_1^*$  und  $w_2^*$  definieren, die auf  $\text{im}(\Phi)$  gleich sind, aber auf  $U$  ungleich sind. Es gilt  $\Phi^*(w_1) = \Phi^*(w_2)$ , aber  $w_1 \neq w_2$ , also  $\Phi^*$  ist nicht injektiv.

- (b) Zuerst beweisen wir:  $\Phi$  nicht injektiv  $\implies \Phi^*$  nicht surjektiv. Sei  $v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2$  und  $\Phi(v_1) = \Phi(v_2) = w$ . Es gibt eine lineare Abbildung  $v^* \in V^*$ , so dass  $v^*(v_1) \neq v^*(v_2)$ . Sei aber  $w^* \in W^*$ . Es gilt  $(\Phi^* w^*)(v) = (w^* \circ \Phi)(v)$ . Dann ist

$$\Phi^* w^*(v_1) = \Phi^*(w) = \Phi^* w^*(v_2),$$

also  $\Phi^*(w^*) \neq v^*$  für alle  $w^* \in W^*$ . Es folgt:  $\Phi^*$  ist nicht surjektiv.

Jetzt beweisen wir  $\Phi$  injektiv  $\implies \Phi^*$  surjektiv. Sei  $v^* \in V^*$ . Wir definieren eine Abbildung (momentan nicht unbedingt linear) so: Für alle  $w \in \text{im}(\Phi)$ , also  $w = \Phi(v)$ , ist  $w^*(w) = v^*(v)$ . Für  $w \notin \text{im}(\Phi)$  ist  $w^*(w) = 0$ .

Es ist klar, dass  $w^* \circ \Phi = v^*$ . Wir müssen nur zeigen, dass  $w^*$  linear ist, also  $w^* \in W^*$ .

- (1) Sei  $w \in W$ ,  $a \in \mathbb{K}$ . Falls  $w \notin \text{im}(\Phi)$ , ist auch  $aw \notin \text{im}(\Phi)$ . Es gilt daher

$$w^*(aw) = aw^*(w) = 0.$$

Falls  $w \in \text{im}(\Phi)$ , also  $w = \Phi v$  für ein  $v \in V$ , gilt auch  $aw = \Phi(av)$ , und

$$w^*(aw) = v^*(av) = av^*(v) = aw^*(w).$$

Daraus folgt:  $w^* \in W^*$ , und  $\Phi^*(w^*) = v^*$ .

- (c) In den letzten Teilaufgaben haben wir bewiesen, dass wenn  $\Phi$  bijektiv ist, ist  $\Phi^*$  auch bijektiv. Die Rückrichtung stimmt auch. Wir müssen nur Gleichheit zeigen.

#### Vereinfachung

Wir müssen nur zeigen, per Definition eine Inverseabbildung, dass

$$\Phi^* \circ (\Phi^{-1})^* = \text{id}_{V^*}.$$

(Wir müssen nicht zeigen, dass  $(\Phi^{-1})^* \circ \Phi^* = \text{id}_W$ , weil die beide Abbildungen bijektiv sind.)

Es gilt, für  $v^* \in V^*$ ,  $(\Phi^{-1})^*(v^*) = v^* \circ \Phi^{-1}$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\Phi^* \circ (\Phi^{-1})^*)(v^*) &= \Phi^*(v^* \circ \Phi^{-1}) \\ &= v^* \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \\ &= v^* \end{aligned}$$

□

#### Aufgabe 31. (Darstellung eines Unterraums)

- (a) Es sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ . Beweisen Sie: Das Gleichungssystem  $Ax = b$  hat genau dann eine Lösung in  $x \in \mathbb{K}^m$ , wenn für alle  $y \in \mathbb{K}^n$  aus  $A^T y = 0$  folgt  $b^T y = 0$ .

- (b) Es sei

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(c) Verwenden Sie (a) um eine Matrix  $B$  zu konstruieren, sodass gilt

$$U = \ker(B).$$

*Beweis.* (a) (a) Sei  $x$  eine Lösung,  $Ax = b$ , und  $y \in \mathbb{K}^m$  beliebig, sodass  $A^T y = 0$ . Es gilt dann:

$$x^T A^T y = b^T y = 0.$$

(b) Wir machen eine Basisergänzung:

$$\mathbb{R}^4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir brauchen  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , sodass

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{1,1} & w_{2,1} \\ 0 & 0 & w_{1,2} & w_{2,2} \\ 0 & 0 & w_{1,3} & w_{2,3} \\ 0 & 0 & w_{1,4} & w_{2,4} \end{pmatrix} := C,$$

wobei  $(w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4})^T$  und  $(w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3}, w_{2,4})^T$  linear unabhängig sind, also  $B = CA^{-1}$ . Weil

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Wir nehmen außerdem

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

## 2.4 Blatt 4

**Aufgabe 32.** Wir definieren mit  $S_n$  die Menge der bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Dann ist bekannterweise  $(S, \circ)$  mit

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(i) = \sigma_2(\sigma_1(i))$$

eine Gruppe. Wir führen für gewöhnlich eine Abbildungstabelle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

mit  $i_1, \dots, i_n$  paarweise verschieden, um zu signalisieren  $\sigma(k) = i_k$  für  $k = 1, \dots, n$ .

- (a) Eine übliche Darstellung bei Elementen aus  $S_n$  ist die Zykelschreibweise. Ein Zyklus der Länge  $k$  mit  $k \leq n$  hat die Form

$$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$$

und signalisiert  $i_1 \rightarrow i_2, i_2 \rightarrow i_3$ , usw.  $i_k \rightarrow i_1$  unter  $\sigma$ . Ist die Zahl  $i_j$  nicht im Zyklus vertreten, so wird sie unter  $\sigma$  auf sich selbst abgebildet. Speziell für  $k = 1$  erhalten wir die Identität und schreiben

$$\sigma = (1).$$

Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Abbildungen  $\sigma$  durch ein Zyklus der Länge  $k$  realisiert werden können! Kann jedes Element in  $S_3$  ( $S_4$ ) als ein Zyklus geschrieben werden?

- (b) Wir definieren die Menge der (Permutations-)Matrizen

$$P_n := \{P \in \mathbb{K}^{n \times n} : P = (e_{i_1}, \dots, e_{i_n}, \text{ mit } i \leq i_k \leq n \text{ und alle } i_k \text{ paarweise verschieden})\}$$

mit  $e_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor. Verifizieren Sie:  $(P_n, \cdot)$  ist mit der herkömmlichen Matrixmultiplikation eine Gruppe! Bestimmen Sie weiterhin einen bijektiven Gruppenmorphimus

$$\Phi : (S_n, \circ) \rightarrow (P_n, \cdot),$$

sodass gilt

$$\Phi(\sigma)e_i = s_j \iff \sigma(i) = j.$$

Beweisen Sie, dass sich jedes  $P$  aus  $P_n$  schreiben lässt als

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} V_{i_k j_k},$$

mit  $V_{ij}$  definiert wie in Lemma 5.56.

*Beweis.* (a) Es gibt  $n!$  Möglichkeiten für eine Folge  $(i_1 i_2 \dots i_k)$ , aber wir können die zyklisch permutieren und  $\sigma$  verändert sich nicht. Deswegen gibt es  $n!/n = (n-1)!$  unterschiedliche Abbildungen, die durch ein Zyklus der Länge  $k$  realisiert werden können.

Ja, jedes Element in  $S_3$  kann als ein Zyklus geschrieben werden. Das können wir explizit machen:

$$\begin{array}{ccc} (1) & (12) & (23) \\ (13) & (132) & (123) \end{array}$$

Weil wir 6 Elemente haben, und  $|S_3| = 3! = 6$ , haben wir alle Elemente.

Das stimmt aber nicht für  $S_4$ . Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Falls es als Zyklus geschrieben werden kann, muss das Zyklus den Länge 4 haben, weil  $\sigma(i) \neq i$  für alle  $i$ . Wir fangen obdA mit 1 an. Dann ist das Zyklus  $(12\dots)$ . Aber weil  $\sigma(2) = 1$ , hört das Zyklus auf, und  $\dots = \emptyset$ . Dann ist das Zyklus nicht mit Länge 4.

(b) Sei  $A, B \in P_n$  beliebige Elemente von  $P_n$ ,

$$\begin{aligned} A &= (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \\ B &= (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \end{aligned}$$

(i)  $G$  ist abgeschlossen: Wir betrachten  $ABe_k$  für  $k$  beliebig.

$$ABe_k = Ae_{j_k} = e_{i_{j_k}},$$

also

$$AB = (e_{i_{j_1}}, e_{i_{j_2}}, \dots, e_{i_{j_n}}) \in P_n.$$

Das  $i_{j_k}$  paarweise verschieden sind folgt daraus, dass  $j_k$  alle paarweise verschieden sind.

(ii) Neutrales element: Wir wissen aus der linearen Algebra, dass

$$1_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in P_n$$

das neutrales Element ist.

(iii) Assoziativität: Wir wissen auch, dass Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

(iv) Existenz des Inverses: Sei jetzt  $p_k$ , sodass  $i_{p_k} = k$ .

## Bemerkung

Man kann  $i, p : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  interpretieren. Dann ist  $i$  eine bijektive Abbildung, und das Existenz einer inversen Abbildung  $p$  folgt daraus. Deswegen ist unsere Entscheidung immer möglich.

Wir betrachten  $A(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n})$ , und dafür die Wirkung der Abbildung auf einem beliebigen Basiselement  $e_k$ :

$$A(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n})e_k = Ae_{p_k} = e_{i_{p_k}} = e_k.$$

- (c) Sei  $i$  eine bijektive Abbildung  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Wir schreiben  $i_k$  oder  $i(k)$  als das Bild von  $k$ . Wir vermuten, dass die gewünschte Homomorphismus

$$\Phi : i \rightarrow (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

ist.

- (i)  $\Phi(\sigma)e_j = e_{\sigma_j}$ , also  $\Phi(\sigma)e_i = s_j \iff \sigma(i) = j$ .  
(ii) Injektiv: Sei  $\sigma, \sigma' \in S_n$ ,  $\sigma \neq \sigma'$ , insbesondere gilt  $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$ . Es gilt dann

$$\begin{array}{ccc} \Phi(\cdot) & \begin{array}{l} \xrightarrow{\sigma} \\ \xrightarrow{\sigma'} \end{array} & \begin{array}{l} (e_{\sigma_1}, \dots, \boxed{e_{\sigma_i}}, \dots, e_{\sigma_n}) \\ (e_{\sigma'_1}, \dots, \boxed{e_{\sigma'_i}}, \dots, e_{\sigma_n}) \end{array} \\ & & \neq \end{array}$$

also  $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\sigma')$ .

- (iii) Surjektiv: Sei  $M = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ . Wie im letzten Teilaufgabe können wir eine Abbildung  $i(k) = i_k$  definieren, und  $\Phi(i) = M$ .  
(iv) Homomorphismusgesetz: Es ist zu zeigen, für  $i, j \in S_n$  und

$$\begin{aligned} M_1 &= (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \Phi(i) \\ M_2 &= (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) = \Phi(j), \end{aligned}$$

dass

$$\Phi(i \circ j)(e_k) = M_1 M_2 e_k$$

für alle  $k$  gilt. Per Definition ist

$$\Phi(i \circ j)e_k = e_{i(j(k))} = e_{i_{j_k}}.$$

Es gilt auch

$$M_1 M_2 e_k = M_1 e_{j(k)} = e_{i(j(k))} = e_{i_{j_k}}.$$



(d) Es gilt

$$\Phi((ij)) = V_{ij}$$

per die vorherige Definition. Dann ist die Behauptung klar. Sei  $P \in P_n$

- (i) Weil  $\Phi$  bijektiv ist, ist  $P = \Phi(\sigma)$  für eine  $\sigma \in S_n$ .
- (ii)  $\sigma$  kann als Produkt von  $n - 1$  Transpositionen dargestellt werden (wenn weniger als  $n - 1$ , können wir  $\text{id}$  hinzufügen), z.B.  $\sigma = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots (a_{n-1} b_{n-1})$ .
- (iii) Das Bild von ein Transposition ist ein Matriz  $V_{ij}$ .
- (iv) Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= \Phi((a_1 b_1)) \Phi((a_2 b_2)) \dots \Phi(a_{n-1} b_{n-1}) \\ &= V_{a_1 b_1} V_{a_2 b_2} \dots V_{a_{n-1} b_{n-1}} \\ &= P. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 33.** Gegeben sei die Permutation

$$S_9 \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 7 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Stellen sie  $\sigma$  als Produkt von Transpositionen dar.
- (b) Berechnen Sie das Signum von  $\sigma$ .

*Beweis.* (a) Zuerst berechnen wir die disjunkter Zyklus

$$\begin{aligned} Z_1 &= (1249578) \\ Z_2 &= (6) \\ Z_3 &= (3) \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\sigma = (18)(17)(15)(19)(14)(12).$$

#### Begründung

Es gilt, für ein Zyklus

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = \underbrace{(a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \dots (a_1 a_2)}_{\sigma'}.$$

Wir betrachten zuerst  $\sigma'(a_1)$ . Dann ist  $(a_1 a_2)a_1 = a_2$ .  $a_2$  kommt nie wieder vor, also  $\sigma'(a_1) = a_2$ . Dann betrachten wir  $a_k$ ,  $k \neq 1$ . Wir haben  $(a_1 a_k)a_k = a_1$ .  $a_1$  kommt sofort wieder vor, und ist  $(a_1 a_{k+1})a_1 = a_{k+1}$ .  $a_{k+1}$  kommt nicht wieder vor, also  $\sigma'(a_k) = a_{k+1}$ .

(b) Wir haben

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((18))\operatorname{sgn}((17)) \dots \operatorname{sgn}((12)) = (-1)^6 = 1. \quad \square$$

**Aufgabe 34.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  heißt *symmetrisch* bzw. *antisymmetrisch*, wenn  $A^T = A$  bzw.  $A^T = -A$  gilt. Seien  $\operatorname{SM}_n(\mathbb{R})$  bzw.  $\operatorname{AS}_n(\mathbb{R})$  die Untermengen von  $M_n(\mathbb{R})$ , die aus allen symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen bestehen.

(a) Zeigen Sie, dass  $\operatorname{SM}_n(\mathbb{R}), \operatorname{AS}_n(\mathbb{R})$  Untervektorräume von  $M_n(\mathbb{R})$  sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$A^T + A \in \operatorname{SM}_n(\mathbb{R}), \quad A - A^T \in \operatorname{AS}_n(\mathbb{R}), \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Folgern Sie, dass  $M_n(\mathbb{R}) = \operatorname{SM}_n(\mathbb{R}) \oplus \operatorname{AS}_n(\mathbb{R})$ .

(c) Bestimmen Sie  $\dim(\operatorname{SM}_n(\mathbb{R}))$  und  $\dim(\operatorname{AS}_n(\mathbb{R}))$ .

(d) Seien  $A, B \in \operatorname{AS}_n(\mathbb{R})$  asymmetrische Matrizen. Zeigen Sie, dass der *Kommutator*  $[A, B] := AB - BA$  wieder antisymmetrisch ist.

*Beweis.* (a) Sei  $M, N \in \operatorname{SM}_n(\mathbb{R})$ , und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$(aM)^T = aM^T = aM,$$

also  $aM \in \operatorname{SM}_n(\mathbb{R})$ . Es gilt auch

$$(aM + bN)^T = aM^T + bN^T = aM + bN,$$

also  $aM + bN \in \operatorname{SM}_n(\mathbb{R})$ .

Sei jetzt  $M, N \in \operatorname{AS}_n(\mathbb{R})$ . Ähnlich folgt

$$(aM)^T = aM^T = a(-M) = -aM,$$

und

$$(aM + bN)^T = aM^T + bN^T = a(-M) + b(-N) = -(aM + bN)$$

also  $\operatorname{SM}_n(\mathbb{R})$  und  $\operatorname{AS}_n(\mathbb{R})$  sind Untervektorräume.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} (A + A^T)^T &= A^T + (A^T)^T \\ &= A^T + A = A + A^T \\ (A - A^T)^T &= A^T - (A^T)^T \\ &= A^T - A = -(A - A^T) \end{aligned}$$

Für alle  $A \in M_n(\mathbb{R})$  gilt

$$A = \frac{1}{2} \left( \underbrace{A + A^T}_{\in \operatorname{SM}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{A - A^T}_{\in \operatorname{AS}_n(\mathbb{R})} \right),$$

also  $M_n(\mathbb{R}) = \operatorname{SM}_n(\mathbb{R}) \oplus \operatorname{AS}_n(\mathbb{R})$ .

- (c) In ein Matriz gibt es genau  $n \times n$  freie Parameter. Aber für symmetrische Matrizen haben wir  $M_{xy} = M_{yx}$ , also wir haben nur

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

freie Parameter in  $\text{SM}_n(\mathbb{R})$ . Für die antisymmetrischen Matrizen gilt eine ähnliche Argument, aber die Elemente auf dem Diagonal müssen 0 sein. Wir haben daher nur

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

freie Parameter, also

$$\begin{aligned} \dim(\text{SM}_n(\mathbb{R})) &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \dim(\text{AS}_n(\mathbb{R})) &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

- (d) Es gilt

$$\begin{aligned} [A, B]^T &= (AB - BA)^T \\ &= (AB)^T - (BA)^T \\ &= B^T A^T - A^T B^T \\ &= (-B)(-A) - (-A)(-B) \\ &= BA - AB \\ &= -(AB - BA) \end{aligned}$$

also  $[A, B]$  ist antisymmetrisch. □

**Aufgabe 35.** Gegeben sind die Matrizen  $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B(t) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1-t \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}, A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestimmen Sie  $\text{rang}(A(t))$  und  $\text{rang}(B(t))$  in Abhängigkeit von  $t$ .  
 (b) Berechnen Sie die Inversen  $(A(0))^{-1}$  und  $(B(1))^{-1}$ .

*Beweis.* (a) Wir verwenden das Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t^2 - 1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times t}$$

$$\begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2 - 1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 - t & 1 - t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times t+1} \begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 - t^2 & 1 - t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - t^2 \end{pmatrix}$$

Für  $t \neq 0, t^2 - 1 \neq 0$ , also  $t \notin \{-1, 0, 1\}$ , ist es offenbar,  $\text{rang}(A(t)) = 3$  ist.

Für  $t = \pm 1$  ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , also  $Ae_1 = Ae_2 = Ae_3 \neq 0$ . Daraus folgt, dass  $\text{rang}(A(\pm 1)) = 1$ .

Obwohl es vom Gauß-Algorithmus so aussieht, dass  $\text{rang}(A(0)) \neq 3$ , ist eigentlich  $\text{rang}(A(0)) = 3$ . Wenn  $t = 0$  gilt

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte dann, dass

$$\begin{aligned} A(e_3 - e_1) &= (0, 0, 1)^T \\ A(e_3 - e_2) &= (0, 1, 0)^T \\ A(e_1 + e_2 - e_3) &= (1, 0, 0)^T \end{aligned}$$

Weil wir jede Basiselement erreichen können, können wir also jedes Element  $v \in \mathbb{R}^3$  erreichen. Deswegen gilt  $\text{rang}(A(0)) = 3$ . Zusammenfassung:

$$\text{rang}(A(t)) = \begin{cases} 1 & t = \pm 1, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir machen etwas ähnliches für  $B$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1 - t \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1 - t \\ 0 & -2t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -2t & -2(t-1)t \\ 0 & -2t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -2t & -2(t-1)t \\ 0 & 0 & t(2t-1) \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt, dass wenn  $t \neq 0$  und  $t \neq 1/2$ , ist  $\text{rang}(B(t)) = 3$ . Wenn  $t = 1/2$ , ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also  $\text{rang}(B(1/2)) = 2$ . Wenn  $t = 0$  dürfen wir das Ergebnis des Gauß-Algorithmuses nicht direkt nutzen, weil wir durch  $2t$  multiplizieren haben. Stattdessen schreiben wir

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist es klar, dass

$$\text{im}(B(0)) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

also  $\text{rang}(B(0)) = 2$ .

(b) Wir haben

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_2} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_3} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also  $(A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Es gilt auch

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

also

$$(B(1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

## CHAPTER THREE

---

### Analysis 2

---

Ich habe die Übungen für Analysis 2 mit Lukas Then gemacht.

### 3.1 Blatt 1 (17.5/21)

**Aufgabe 36.** Berechnen Sie Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)  $f(x) = \frac{\arctan \sin x^2}{e^{1-x}}$  für  $x \in \mathbb{R}$

(b)  $g(x) = x^{(x^x)}$  für  $x > 0$

(a)

$$f(x) = e^{x-1} \arctan \sin x^2.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} \frac{d}{dx} \arctan \sin x^2 + (\arctan \sin x^2) \frac{d}{dx} e^{x-1} \\ &= \frac{e^{x-1}}{1 + \sin^2 x^2} \frac{d}{dx} \sin x^2 + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \frac{d}{dx} (x - 1) \\ &= \frac{e^{x-1}}{1 + \sin^2 x^2} (\cos x^2)(2x) + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \\ &= \frac{2x \cos x^2 e^{x-1}}{1 + \sin^2 x^2} + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{(x^x)} \\ \ln g(x) &= x^x \ln x \end{aligned}$$

**Lemma 3.1.**

$$\begin{aligned} h(x) &:= x^x \\ h'(x) &= x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

*Beweis.*

$$\ln h(x) = x \ln x.$$

$$\frac{d}{dx} \ln h(x) = \frac{d}{dx} (x \ln x)$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \ln x + 1$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= h(x) (1 + \ln x) \\ &= x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

Man kann auch  
 $x^x = e^{x \ln x}$  verwenden  
 und Kettenregeln  
 benutzen.

□

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln g(x) &= \frac{d}{dx} (x^x \ln x) \\ \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{1}{x} x^x + (\ln x) \frac{d}{dx} (x^x) \\ &= \frac{x^x}{x} + (\ln x) x^x (1 + \ln x) \\ g'(x) &= g(x) x^x \left[ \frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right] \\ &= x^{x^x+x} \left[ \frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right] \\ &= x^{x^x+x-1} [1 + x \ln x + x \ln^2 x] \end{aligned}$$

**Aufgabe 37.** Untersuchen Sie, für welche Argumente des Definitionsbereiches die folgenden Funktionen differenzierbar sind:

(a)  $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

(b)  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(c)  $h(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$

- (a) Für  $x_0 \neq 0$  gibt es eine Umgebung auf  $x_0$ , worin  $|x| = x$  oder  $|x| = -x$ . Dann ist die Ableitung von  $|x|$  gleich mit die Ableitung von entweder  $x$  oder  $-x$ , also  $f'(x_0)$  existiert für  $x_0 \neq 0$ .

Für  $x_0 = 0$  gilt  $|0| = 0$ , und auch

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

Weil die beide ungleich sind, existiert die Grenzwert und daher auch die Ableitung nicht.



- (b) Sei  $x_0 \neq 0$  und  $y_0 = x_0^2$ . Dann für  $0 < \epsilon < y_0$  existiert keine  $\delta > 0$ , sodass  $|x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$ .

Beweis: Es gibt zwei Fälle:

- (i)  $x_0 \in \mathbb{Q}$ . Dann in jeder offenen Ball  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  gibt es ein Zahl  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , also  $|g(x) - g(x_0)| = g(x_0) = y_0 > \epsilon$
- (ii) Sei  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann in jeder offenen Ball  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  gibt es ein Zahl  $x \in \mathbb{Q}$ , also  $|g(x) - g(x_0)| = g(x) > y_0 > \epsilon$

Sei  $x_0 = 0$ . Dann gilt  $g(x_0) = 0$ , und auch:

- (i)  $x \in \mathbb{Q}$ , also

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \frac{x^2}{x} \\ &= x \end{aligned}$$

- (ii) oder  $x \notin \mathbb{Q}$ , also

$$g(x) - g(0) = 0 - 0 = 0 \implies \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

Deshalb ist

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

- (c) Zu berechnen:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Sei  $z = z_0 + x, x \in \mathbb{R}$ . Dann, falls die Grenzwert existiert, ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + x - z_0}}{z_0 + x - z_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\bar{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sei jetzt  $z = z_0 + ix, x \in \mathbb{R}$ . Falls die Grenzwert existiert ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + ix - z_0}}{z_0 + ix - z_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{ix}}{ix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ix}{ix} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Weil das Grenzwert, wenn durch zwei Richtungen berechnet wurde, ungleich ist, existiert das Grenzwert nicht (für alle  $z \in \mathbb{C}$ )

**Aufgabe 38.** Man zeige, dass die Gleichung

$$x = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

auf  $[0, 1]$  genau eine Lösung besitzt.

Sei  $f(x) = x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ . Dann ist die Gleichung gleich  $f(x) = 0$ .  $f(x)$  ist auf  $[0, 1]$  stetig, und auf  $(0, 1)$  differenzierbar.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 - 1 = -1 \\
f(1) &= 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es mindestens eine Lösung zu der Gleichung  $f(x) = 0$ . Dann

$$f'(x) = 1 + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0 \text{ für } x \in [0, 1].$$

$f$  ist dann monoton wachsend, und es gibt maximal eine Lösung zu  $f(x) = 0$ .

Deswegen besitzt die Gleichung genau eine Lösung.

**Aufgabe 39.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{k \rightarrow \infty} k \ln \frac{k-1}{k}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}$

(a)

$$k \ln \frac{k-1}{k} = \frac{\ln(k-1) - \ln k}{1/k}.$$

Weil  $\ln x$  und  $1/x$  auf  $x \in (0, \infty)$  differenzierbar sind, kann man den Satz von L'Hopital verwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk} [\ln(k-1) - \ln k] &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \\
\frac{d}{dk} \frac{1}{k} &= -\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k(k-1)}}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{k}{k-1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Weil das Grenzwert auf  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  existiert, ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \ln \left( \frac{k-1}{k} \right) = -1.$$

(b)

$$\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \frac{(e^{\ln x})^{\ln x}}{e^x} = \frac{e^{\ln^2 x}}{e^x} = e^{\ln^2 x - x} = e^{x \left( \frac{\ln^2 x}{x} - 1 \right)}.$$

**Lemma 3.2.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^p x}{x^q} = 0, \quad p, q > 0.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^p x}{x^q} &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{p/q}} \right)^q \\
&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(x^{p/q})} \right)^q && \text{L'Hopital} \\
&= 0^q = 0
\end{aligned}$$

□

**Korollar 3.3.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( \frac{\ln^2 x}{x} - 1 \right) \right] = -\infty.$$

Deswegen ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left( \frac{\ln^2 x}{x} - 1 \right)} = 0.$$

**Aufgabe 40.** Überprüfen Sie die Funktion  $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{8}{\pi} \arctan \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

auf lokale und globale Extrema.

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & -1 < x < 1 \\ \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left( -\frac{1}{x^2} \right) & x > 1 \end{cases}.$$

Es ist klar, dass  $x = 0$  eine Lösung zu  $f'(x) = 0$  ist. Weil  $f''(0) = 2 > 0$ , ist es ein lokales Minimum. Es gibt auch  $a, b \in \mathbb{R}, a < 1 < b$ , wofür gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 & x &\in (a, 1) \\ f'(x) &< 0 & x &\in (1, b) \end{aligned}$$

Falls  $f(1) \geq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , ist  $f(1)$  ein lokales Maximum (sogar wenn  $f$  nicht auf 1 stetig ist). Weil

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$$

und

$$f(1) = \frac{8}{\pi} \arctan 1 = \frac{8}{\pi} \frac{\pi}{4} = 2$$

ist  $f(1)$  ein lokales Maximum. Weil  $f(x) < 2$  für  $x > 1$  kann kein Punkt  $x > 1$  ein globales Maximum sein. Es gilt auch, dass

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Außer  $x \in \{-1, 0, 1\}$  gibt es keine Möglichkeiten für ein globales Maximum. Daher sind die globale Maxima auf  $x \in \{-1, 1\}$

Für  $x \in [1, 1)$  gilt  $f(x) \geq 1$ . Dennoch ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\pi} \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Deswegen gibt es *keine* globales Maximum auf  $\mathbb{R}$ . Wenn man  $f(\infty)$  definiert durch  $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , ist  $f(\infty)$  das globale Maximum.

Tipfehler - Maximum sollte Minimum sein.

## 3.2 Blatt 2

**Aufgabe 41.** Es seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbare Funktionen für  $n \in \mathbb{N} \setminus 0$  und  $D \subset \mathbb{R}$  offen. Zeigen Sie, dass  $f \cdot g$  ebenfalls  $n$ -mal differenzierbar ist und weiterhin

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für jedes  $x \in D$  gilt.

*Beweis.* Wir zeigen es per Induktion, für  $n = 1$  ist es das Produktregel. Nehme jetzt an, dass  $f, g$   $(n + 1)$ -mal differenzierbar Funktionen sind und

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

gilt (weil alle  $(n + 1)$ -mal differenzierbar Funktionen sind auch  $n$ -mal differenzierbar). Dann ist  $(f \cdot g)^{(n)}(x)$  differenzierbar, weil die rechte Seite

eine Linearkombination von Produkte aus (zumindest) einmal differenzierbar Funktionen. Es gilt auch,

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)) \quad n = 1 \text{ Fall} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x)
 \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 42.** i) Betrachten Sie die Funktionenfolge  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 x^2 + 1}.$$

Beweisen Sie, dass  $(f_n), n \in \mathbb{N}$  gegen eine zu bestimmende Grenzfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig konvergiert, diese jedoch nicht differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  ist. Warum ist das kein Widerspruch zu Proposition 5.5.2?

ii) Untersuchen Sie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, x \in \mathbb{R}.$$

auf Differenzierbarkeit.

*Beweis.* i)

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Es ist klar, dass  $f_n(x)$  konvergiert gegen  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Sei dann  $r(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|$ . Für  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned}
 r(x) &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - x \\
 r'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{x}{\sqrt{x^2}} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Deswegen ist  $r(x)$  monoton fallend auf  $(0, \infty)$ . Ähnlich beweist man, dass  $r(x)$  monoton wachsend auf  $(-\infty, 0)$  ist. Deswegen ist  $x = 0$  ein globales Maximum, und  $r(x) \leq r(0) = \frac{1}{n}$ . Daher konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig.

Man berechnet:

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Die Folge der Ableitungen konvergiert gegen  $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)$ , falls  $x \neq 0$ , und 0, falls  $x = 0$ . Es konvergiert aber nicht lokal gleichmäßig in eine Umgebung  $U$  auf 0.

Sei  $1 > \epsilon > 0$  gegeben, und nehme an, dass existiere  $N \in \mathbb{N}$ , für die gilt,

$$|f'_n(x) - g(x)| \leq \epsilon \quad n > N, x \in U,$$

wobei

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Nehme eine solche Abbildung  $f'_n(x)$ . Weil  $f'_n$  stetig ist, und  $f'_n(0) = 0$ , gibt es eine Umgebung  $0 \in V$ , in der gilt, dass  $|f'_n(x) - f'_n(0)| = f'_n(x) \leq 1 - \epsilon, x \in V$ . Sei dann  $0 \neq x \in V$ , und  $|1 - f'_n(x)| > \epsilon$ , also die Folge  $f'_n$  konvergiert nicht lokal gleichmäßig.

Man kann auch beachten, dass  $f'_n(x)$  stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R}$  ist. Wenn die Folge lokal gleichmäßig in eine Umgebung auf 0 konvergiert, wäre das Grenzwert auch stetig. Weil das Grenzwert nicht stetig ist, kann die Folge nicht lokal gleichmäßig konvergieren.

Deswegen ist es kein Widerspruch zu den Korollar, weil die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

- ii) Es gilt  $\left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ . Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig (Weierstraßsches Majorantenkriterium).

Jetzt ist  $\frac{d}{dx} \frac{\cos(nx)}{n^3} = -\frac{\sin(nx)}{n^2}$ . Weil  $\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , konvergiert

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right|$  gleichmäßig. Deswegen ist  $f$  differenzierbar, mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]. \quad \square$$

**Aufgabe 43.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \max \{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

*Beweis.* Wir wissen schon, dass es  $q_n(x)$  existiert,  $q_n(x)$  Polynome, und  $q_n(x) \rightarrow |x|$  gleichmäßig. Es gilt auch

$$f(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{x}{2}.$$

Daher konvergiert gleichmäßig

$$\frac{q_n(x)}{2} + \frac{x}{2} \rightarrow f(x). \quad \square$$

**Aufgabe 44.** i) Es seien  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  und  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbare Funktionen mit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie, dass auch  $g \circ f$   $n$ -mal differenzierbar ist.

ii) Zeigen Sie, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert ist. Bestimmen Sie zudem  $f^{(n)}(0)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

*Beweis.* i)

**Satz 3.4.** Die Ableitung von ein Produkt  $f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$  ist

$$\sum_{i=1}^n f_1(x)f_2(x)\dots \frac{df_i(x)}{dx} \dots f_n(x).$$

*Beweis.* Wir beweisen es per Induktion. Für  $n = 2$  ist es das Produktregel. Jetzt nehme an, dass es für eine  $n \in \mathbb{N}$  richtig ist, und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f_1(x)f_2(x)\dots f_{n+1}(x)) &= \frac{d}{dx} (f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)) f_{n+1}(x) \\ &\quad + (f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)) \frac{df_{n+1}}{dx} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n f_1(x)f_2(x)\dots \frac{df_i(x)}{dx} \dots f_n(x) \right) \\ &\quad + (f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)) f'_n(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} f_1(x)f_2(x)\dots \frac{df_i(x)}{dx} \dots f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 3.5.** *Alle Monome von differenzierbare Funktionen sind differenzierbar, und die Ableitung ist noch eine lineare Kombination von Monome.*

**Korollar 3.6.** *Sei  $f$   $k$ -mal differenzierbar. Dann alle Monome von*

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$$

*sind differenzierbar.*

**Satz 3.7.**  $\frac{d^k}{dx^k}(f \circ g)$  *ist ein Monom von Ableitungen von  $f$  und  $g$  (höchstens die  $k$ -ste Ableitung), sofern  $f$  und  $g$ ,  $n$ -mal differenzierbar sind.*

*Beweis.* Für  $k = 1$  gilt

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Nehme an, dass es für ein  $k \in \mathbb{N}, k < n$  gilt. Dann per Korollar 3.5 gilt es auch für  $k + 1$ . Per Induktion ist die Verkettung dann  $n$ -mal differenzierbar,  $\square$

ii)

**Lemma 3.8.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0, k > 0.$$

*Beweis.* Wir beweisen es per Induktion auf  $p$ . Für  $p = 1$  verwenden wir den Satz von L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{kx^{k-1}(k)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{kx^k} = 0. \quad \square$$

Jetzt nehme an, dass es für  $p$  gilt. Wir zeigen, dass es für  $p \rightarrow p + 1$  auch gilt.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(\ln x)^p}{kx^{k-1}(x)} = \frac{p+1}{k} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0.$$

**Lemma 3.9.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-kx} = 0, k > 0.$$

*Beweis.* Nimm  $x = e^\xi$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k} (\ln x)^p = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-k\xi} \xi^p = 0. \quad \square$$



Die Ableitungen  $f^{(n)}(x), x \neq 0$  haben den Form  $p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , wobei  $p_n(x)$  eine Polynome ist.

**Proposition 1.**  $f^{(n)}(0) = 0$

*Beweis.* Wir beweisen es per Induktion.  $f^{(0)}(0) = 0$  per Definition.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (f^{(n-1)}(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x p_n(x) e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Deswegen ist  $f$  überall (inkl. 0) differenzierbar, mit alle Ableitungen  $f^{(n)}(0) = 0$  □

□

**Aufgabe 45.** Es seien  $K_1, K_2 \subset \mathbb{K}$  nichtleere, kompakte Mengen und die Folgen stetiger Funktionen  $f_n : K_1 \rightarrow K_2$  sowie  $g_n : K_2 \rightarrow K$  seien gleichmäßig konvergent gegen  $f : K_1 \rightarrow K_2$  bzw.  $g : K_2 \rightarrow K$ . Beweisen Sie, dass auch

$$g_n \circ f_n \rightarrow g \circ f$$

gleichmäßig auf  $K_1$  gilt.

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann per Definition existiert  $n_2 \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}, x \in K_2, n \geq n_2 \quad (3.1)$$

Weil  $g$  stetig und auf eine kompakte Menge definiert ist, ist  $g$  gleichmäßig stetig, und es existiert  $\delta > 0$ , für die gilt

$$|g(a) - g(b)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |a - b| < \delta \quad (3.2)$$

Es gibt auch  $n_1 \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x) - f(x)| < \delta, x \in K_1, n \geq n_1$ . Für  $n > n_1$  gilt daher auch

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \frac{\epsilon}{2}, n > n_1, x \in K_1 \quad (3.3)$$

Sei  $N = \max(n_1, n_2)$ . Für  $n \geq N$  gilt Eq. (3.1) und Eq. (3.3) auch, weil  $N \geq n_1$  und  $N \geq n_2$ . Dann für  $n \geq N$  gilt.

$$\begin{aligned} |g(f(x)) - g_n(f_n(x))| &= |g(f(x)) - g(f_n(x)) + g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))| \\ &\leq \underbrace{|g(f(x)) - g(f_n(x))|}_{< \epsilon/2 \text{ (3.3)}} + \underbrace{|g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))|}_{< \epsilon/2 \text{ (3.1)}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Also  $g_n \circ f_n \rightarrow g \circ f$  gleichmäßig. □

### 3.3 Blatt 3

**Aufgabe 46.** (a) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x) \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt  $x_0 = 0$  mit Konvergenzradius  $R = +\infty$  dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*nicht* durch ihre Taylorreihe um  $x = 0$  dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9?

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x) \cosh(x) \\ &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4i} (e^{(i+1)x} + e^{(i-1)x} - e^{(1-i)x} - e^{-(i+1)x}) \\ &= \frac{i}{4} [e^{-(i+1)x} + e^{(1-i)x} - e^{(i+1)x} - e^{(i-1)x}] \\ g^{(n)}(x) &= \frac{i}{4} [(-(i+1))^n e^{-(i+1)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x} \\ &\quad - (1+i)^n e^{(i+1)x} - (i-1)^n e^{(i-1)x}] \\ |g^{(n)}(x)| &\leq \frac{1}{4} (\sqrt{2})^n [|e^{-(i+1)x}| + |e^{(1-i)x}| + |e^{(i+1)x}| + |e^{(i-1)x}|] \end{aligned}$$

Die Bedingungen sind jetzt erfüllt: Sei  $B_r(0)^{cl}$  ein abgeschlossenes Ball für beliebige  $r > 0$ . Sei außerdem

$$c = \sup_{x \in B_r(0)^{cl}} \frac{1}{4} [|e^{-(i+1)x}| + |e^{(1-i)x}| + |e^{(i+1)x}| + |e^{(i-1)x}|]$$

$$\alpha = \sqrt{2}$$

Es gilt  $c \neq \infty$ , weil die Abbildung in den Klammern stetig ist, und ist daher auf eine eingeschränkte Menge auch eingeschränkt. Es folgt:

$$\|g^{(n)}\|_{B_r(0)^{cl}} \leq c\alpha^n \quad (5.6.23)$$

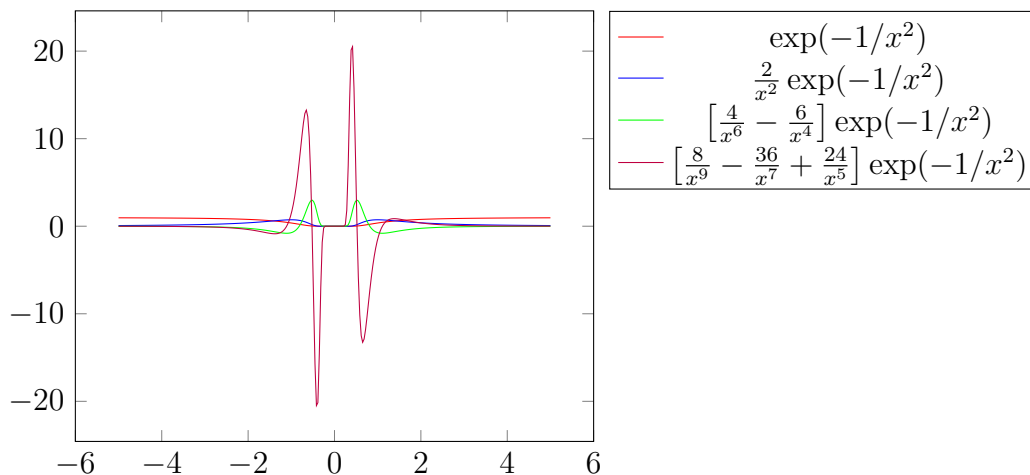
Also die formale Taylorreihe hat einen Konvergenzradius  $R > r$  und konvergiert gegen auf  $B_r(0)^{cl}$  gegen  $g$ . Weil das für alle  $r > 0$  gilt, konvergiert die Taylorreihe gegen  $f$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und die Konvergenzradius  $R = +\infty$ .

- (b) Es ist klar, dass es nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Die Taylorreihe ist  $0 + 0x + 0x^2 + \dots = 0$ , aber  $f(x) \neq 0$  für  $x \neq 0$ .

Wir berechnen jetzt  $f^{(n)}(a)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f(a) &= \exp(-1/a^2) \\ f'(x) &= \frac{2}{x^2} \exp(-1/x^2) \\ f''(x) &= \left[ \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right] \exp(-1/x^2) \\ f'''(x) &= \left[ \frac{8}{x^9} - \frac{36}{x^7} + \frac{24}{x^5} \right] \exp(-1/x^2) \quad \square \end{aligned}$$

Aber das Supremum ist nicht nur durch die Koeffizienten beeinflusst, sondern auch das Maximumpunkt...



Also



**Aufgabe 47.** Es sei  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Geben Sie das Taylorpolynom  $P_2$  von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$  an und schätzen Sie den maximalen Fehler von  $|f(x) - P_2(x)|$  auf dem Intervall  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  ab.

*Beweis.* Es gilt  $f(x) = x^{1/3}$ , und daher

$$f^{(n)}(x) = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] x^{\frac{1}{3}-n},$$

also

$$f^{(n)}(1) = \prod_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right).$$

Es gilt daher

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2.$$

Wir wissen schon

$$|R_{n,x_0}(f)(h)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \quad (5.6.20)$$

Hier ist  $n = 2$ , und  $|h| \leq \frac{1}{2}$ .

#### Vereinfachung

(Nur in diesem Problem, falsch im Allgemeinen) Der maximale Fehler ist gleich  $\sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}$ , wobei  $h = \frac{1}{2}$ ,  $n = 2$ , und  $x_0 = 1$ .

*Beweis.* Wir betrachten zuerst  $R_{n,x_0}(f)(\xi)$  für  $0 \leq \xi \leq h$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in [0,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) &\leq \sup_{\xi \in [0,h]} \left[ \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + t\xi) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|\xi|^n}{(n-1)!} \right] \\ &= \sup_{\xi \in [0,h]} \left[ \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + t\xi) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \right] \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Ähnlich gilt auch

$$\sup_{\xi \in [-h,0]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t \in [-1,0]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}.$$

Weil wir den maximalen Fehler auf dem ganzen Intervall schätzen möchten, ist die gewünschte Antwort daher

$$\sup_{\xi \in [-h,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}. \quad \square$$

Wir betrachten deswegen

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \\ &= \sup_{t \in [-1,1]} \left| \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] (x_0 + th)^{\frac{1}{3}-n} - \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| \sup_{t \in [-1, 1]} \left| \left( 1 + \frac{t}{2} \right)^{-5/3} - 1 \right| \\
&= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| \left| \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{-5/3} - 1 \right| \\
&= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| (2^{5/3} - 1)
\end{aligned}$$

Also der maximale Fehler ist

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{|0.5|^2} \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| (2^{5/3} - 1) = \frac{1}{18} (2^{5/3} - 1). \quad \square$$

**Aufgabe 48.** Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in  $x_0$ .

- (a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  im Punkt  $x_0 = 2$ .
- (b)  $g(x) = \sin^2(\pi x)$  in  $x_0 = 3$ .
- (c)  $h(x) = \sin^{-1}(x)$  in  $x_0 = 0$ .

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned}
f(2) &= 2^3 - 3(2)^2 + 3(2) + 2 = 4 \\
f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\
f'(2) &= 3 \\
f''(x) &= 6x - 6 \\
f''(2) &= 6 \\
f'''(x) &= 6 = f(2) \\
f''''(x) &= 0
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom ist dann

$$4 + 3(x - 2) + 3(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

(b)

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi x)) \\
g(3) &= 0 \\
g'(x) &= \pi \sin(2\pi x) \\
g^{(n)}(x) &= (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} \sin(2\pi x) & n \text{ ungerade} \\ \cos(2\pi x) & n \text{ gerade} \end{cases} \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

$$g^{(n)}(3) = (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} \quad n \geq 1$$

Das Taylorpolynom vom Grad 30 ist

$$\sum_{n=1}^{15} \left[ (-1)^{\lfloor (2n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} (x-3)^{2n} \right].$$

(c)

$$h(x) = \sin^{-1} x$$

$$h(0) = 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$h'(0) = 1$$

Sei  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Wir wissen, dass die Taylorreihe von  $(1+x)^\alpha$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (5.6.41)$$

ist, wobei  $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} [\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)]$ . Die Taylorreihe von  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  folgt:

$$\begin{aligned} T_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n \quad b_n = 0, n \text{ ungerade} \end{aligned}$$

Es gilt daher, für die Koeffizienten der Taylorreihe von  $\sin^{-1}(x)$

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dass  $a_n = b_{n-1}/n$ , für  $n \geq 1$ . Es ist dann

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{14} \frac{1}{2n+1} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n+1}). \quad \square$$

**Aufgabe 49.** Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von  $\exp : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für die markierten Zerlegungen  $(J_n, \Xi_n)$  mit der Auswahl  $\Xi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

*Beweis.*

Wir werden später die folgende Lemma brauchen:

**Lemma 3.10.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (1 - e^{-1/n}) = 1.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n (1 - e^{-1/n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-1/n}}{1/n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-x}}{x} && x = 1/n \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{1} && \text{L'Hopital} \\ &= 1 && \square \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{n} \exp \left( \frac{k+1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left( \frac{k+1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{(e-1)e^{1/n}}{e^{1/n} - 1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{e-1}{1 - e^{-1/n}} \end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n(1 - e^{-1/n})} = e-1.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{n} \exp \left( \frac{k}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left( \frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{1/n} - 1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{1/n} (1 - e^{-1/n})} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n(e^{1/n} (1 - e^{-1/n}))} = e-1. \quad \square$$

### 3.4 Blatt 4

**Aufgabe 50.** In dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Verknüpfung zweier Riemann-integrierbarer Funktionen i.A. nicht Riemann-integrierbar ist. Dazu gehen wir wie folgt vor:

- (a) Es sei  $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , d.h. eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Weiterhin sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & x = q_n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist.

- (b) Weiterhin sei

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ 1 & x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $g$  Riemann-integrierbar ist, die Verknüpfung  $g \circ f$  mit der Funktion  $f$  jedoch nicht.

*Beweis.* (a) Wir betrachten eine uniforme Zerlegung

$$\mathcal{J}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\},$$

und die Intervalle

$$I_n(k) = \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right].$$

Es gilt  $\inf_{x \in I_n(k)} f(x) = 0$ . Wir müssen daher nur beweisen

**Ziel**

Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $\mathcal{J}_n$ , sodass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}(n)} < \epsilon.$$

Die wichtigste Bemerkung ist: jedes  $q_x$  kommt maximal zweimal vor (das passiert im Fall wenn  $q_x = k/n$  für eine  $k \in \{0, \dots, n\}$ ). Es folgt dann für  $n = 2p$  gerade,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathcal{J}(n)} &\leq \sum_{j=1}^p \frac{1}{2p} \frac{2}{j} \\ \int_0^1 f(x) \, dx &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \frac{1}{2p} \frac{2}{j} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &< \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} (1 + \ln p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also  $f$  ist integrierbar mit  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .

(b) Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Wir definieren für jedes  $n \in \mathbb{N}$  so eine Zerlegung:

Sei  $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}$ . Außer  $[x_0, x_1]$  gibt es dann nur endlich viele  $x = \frac{1}{n}$  (eigentlich gibt es genau  $n - 1$ ). Sei dann

$$\mathcal{J}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} - \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \frac{1}{n-1} + \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \frac{1}{n-2} - \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \right. \\ \left. \frac{1}{n-2} + \frac{\epsilon}{2^{n-2}}, \frac{1}{n-3} - \frac{\epsilon}{2^{n-3}}, \dots, 1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 \right\}$$

**Bemerkung:** In der Intervall  $\left[ \frac{1}{n-p} + \frac{\epsilon}{2^{n-p}}, \frac{1}{n-p-1} - \frac{\epsilon}{2^{n-p-1}} \right]$  gibt es keine Zahlen mit dem Form  $1/n, n \in \mathbb{Z}$ , also  $\sup f = 0$  auf solchen Intervalle. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathcal{J}_n} &= \frac{2}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^j} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_{\mathcal{J}_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^j} \right] \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Weil  $\epsilon$  beliebig war, ist dann

$$\int_0^1 g(x) dx = 0,$$

also  $g$  ist integrierbar mit

$$\int_0^1 g(x) dx = 0.$$

(c) Es gilt

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Sei  $h := g \circ f$ .  $h$  ist nicht auf  $[0, 1]$  integrierbar. Sei  $\mathcal{J} = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_N = 1\}$ . Es gibt, für alle Intervalle  $[a, b] \subseteq [0, 1]$ , zwei Punkte

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q} \ni x_0 \in [a, b] & \text{dichtheit von } \mathbb{Q} \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ni x_1 \in [a, b] & \mathbb{Q} \text{ ist nur abzählbar} \end{array}$$

Also gilt

$$\sup (h|_{[a,b]}) = 1 \quad (3.4)$$

$$\inf (h|_{[a,b]}) = 0 \quad (3.5)$$

Daraus folgt, für jede Zerlegung  $\mathcal{J}$  von  $[0, 1]$ , dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) = 1$$

$$\mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) = 0$$

also  $h$  ist nicht auf  $[0, 1]$  integrierbar.  $\square$

**Aufgabe 51.** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar auf dem echten Intervall  $[a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein echtes Intervall  $J \subset [a, b]$  gibt, auf dem  $f$  strikt positiv ist, d.h. mit  $f(x) > 0$  für alle  $x \in J$ .

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, die Charakterisierung der Darboux-Integrierbarkeit zu benutzen und Untersummen zu betrachten.

*Beweis.* Wir beweisen es per Widerspruch. Nehme an, dass in jedem Intervall es mindestens ein Punkt  $x_0$  gibt, für die  $f(x_0) \leq 0$ . Insbesondere gilt das für alle abgeschlossen Intervalle  $[c, d] \subseteq [a, b]$ .

Sei jetzt  $\mathcal{J}$  eine beliebige Zerlegung von  $[a, b]$ ,  $\mathcal{J} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ , mit die übliche Voraussetzung  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathcal{J}} &= \sum_{i=1}^N \inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]}) (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (0)(t_i - t_{i-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Weil  $\mathcal{J}$  beliebig war, gilt das für alle Zerlegungen, und

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0,$$

also

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0,$$

ein Widerspruch.  $\square$

**Aufgabe 52.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $|f|$  integrierbar auf  $[a, b]$ , so ist es auch  $f$ .
- (b) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $f(x) \geq \delta$  für alle  $x \in [a, b]$  und ein  $\delta > 0$ , so ist auch  $\frac{1}{f}$  über  $[a, b]$  integrierbar.
- (c) Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so gilt

$$\int_a^b (f \cdot g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(x) \, dx.$$

*Beweis.* (a) Falsch. Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Dann ist  $|f| = 1$  integrierbar (Proposition 6.1.6). Wir müssen jetzt nur beweisen, dass  $f$  nicht integrierbar ist. Der Beweis ist gleich zu der Beweis in der vorherigen Aufgabe. Wir müssen nur statt (3.5) schreiben

$$\inf (h|_{[a,b]}) = -1$$

- (b) Wahr.

#### Bemerkung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq \delta$  für ein  $\delta > 0$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\inf(f)} &= \sup \left( \frac{1}{f} \right) \\ \frac{1}{\sup(f)} &= \inf \left( \frac{1}{f} \right) \end{aligned}$$

wegen der Monotonie von  $x \rightarrow 1/x$ .

Wir haben auch

#### Korollar

**(Korollar aus Proposition 6.2.3(vi))**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathcal{J} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_N\}$  von  $I$  gibt, sodass

$$\sum_{i=1}^N [\sup (f|_{[a,b]}) - \inf (f|_{[a,b]})] (t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Wir arbeiten mit dem Korollar. Sei  $\mathcal{J} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_N\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[ \sup \left( \frac{1}{f} \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \right) - \inf \left( \frac{1}{f} \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \right) \right] (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{\inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})} - \frac{1}{\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]})} \right] (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]}) - \inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})}{\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]}) \inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})} \right] (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^N [\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]}) - \inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})] (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Per Hypothese gibt es eine Zerlegung  $\mathcal{J}$  von  $[a, b]$ , für die gilt

$$\sum_{i=1}^N [\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]}) - \inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})] < \epsilon \delta^2.$$

Dies ist genau die gewünschte Zerlegung, also nach dem Korollar ist  $f$  integrierbar.

(c) Falsch. Sei  $f$  und  $g$  Treppenfunktionen,  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 1 & 0.5 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt  $(f \cdot g)(x) = 0$ , und daher  $\int_0^1 (f \cdot g)(x) dx = 0$ . Jetzt sei  $\mathcal{J} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) &\geq \sup \left( f|_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &= 1(1/4) = 1/4 \\ \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(g) &\geq \sup \left( g|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} \right) \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 1(1/4) = 1/4 \end{aligned}$$

Also  $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{4} > 0$ , und gleich für  $\int_0^1 g(x) dx$ . Daher ist

$$\int_0^1 (f \cdot g)(x) dx = 0 \neq \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx. \quad \square$$

**Aufgabe 53. (Wanderdüne)** Man gebe eine Folge von nicht-negativen Funktionen  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  an, sodass

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$ ,
- $f_n \not\rightarrow 0$  für jedes  $x \in [0, 1]$ .

*Beweis.* Sei

$$g_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\int_0^1 g_{a,b}(x) dx = (b - a).$$

Sei jetzt  $n \in \mathbb{N}$ , und  $k(n)$  das Zahl, sodass

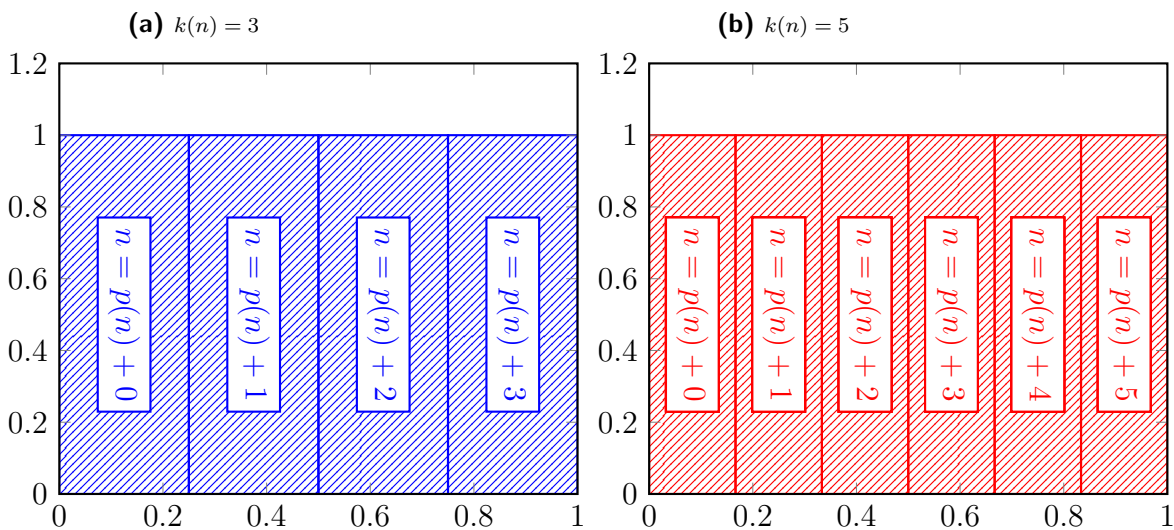
$$\frac{k(k+1)}{2} \leq n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

gilt. Das ist immer möglich, weil  $x \rightarrow x(x+1)/2$  monoton wachsend ist. Sei

$$p(k(n)) := \frac{k(n)(k(n)+1)}{2}$$

$$f_n(x) = g_{\frac{n-p(n)}{k(n)+1}, \frac{n-p(n)+1}{k(n)+1}}(x)$$

Wir beweisen die gewünschte Eigenschaften:



**Figure 3.1:** Im Allgemein ergibt sich für  $p(k) \leq n < p(k+1)$  eine Überdeckung von  $[0, 1]$  mit Treppen mit Länge  $1/(k(n)+1)$ .

- (i) Es gilt  $\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{k(n)+1}$ . Weil  $k(n)$  wachsend ist, und  $k(n) \rightarrow \infty$  gilt, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx .$$

- (ii) Sei  $x \in [0, 1]$  und  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Sei auch  $q = \lfloor x(k(n) + 2) \rfloor$ . Es gilt dann

$$f_{p(k(n)+1)+q}(x) \neq 0,$$

also  $f_n(x) \not\rightarrow 0$  für jedes  $x \in [0, 1]$ . □

## CHAPTER FOUR

---

### Vertiefung Analysis

---

Ich habe die Übungen für Vertiefung Analysis mit Lucas Wollman gemacht.

#### 4.1 Blatt 1 (18/21)

**Aufgabe 54.** Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $\mathcal{A}, \mathcal{S}$   $\sigma$ -Algebren über  $X$  sowie  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $Y$ . Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a)  $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .
- (b)  $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .
- (c)  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .
- (d)  $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B \in \mathcal{B}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .
- (e)  $f(\mathcal{A}) = \{f(A) \subseteq Y \mid A \in \mathcal{A}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $Y$ .

*Beweis.* (a) Falsch. Sei

$$\begin{aligned} X &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{A} &= \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\} \\ \mathcal{S} &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}.$$

keine  $\sigma$ -Algebra, weil

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{S}.$$

(b) Richtig.

$$(1) \quad X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$$

(2) Sei  $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ . Dann  $A \in \mathcal{A}$  und  $A \in \mathcal{S}$ .

Daraus folgt:  $A^c \in \mathcal{A}$  und  $A^c \in \mathcal{S}$ . Deswegen ist  $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ .

(3) Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ . Dann gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$$

Daraus folgt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}.$$

(c) Falsch.  $X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \notin \mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$

(d) Richtig.

(1)  $f^{-1}(Y) = X \in f^{-1}\mathcal{B}$

(2) Sei  $A = f^{-1}(B)$

$$X - A = f^{-1}(\underbrace{Y - B}_{\in \mathcal{B}}) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

(3) Es folgt aus

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right).$$

(e) Falsch. Sei  $a \in Y$  und  $f$  die konstante Abbildung  $f(x) = a \forall x \in X$ . Dann gilt

$$f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

was keine  $\sigma$ -Algebra ist, solange  $Y \neq \{a\}$ .

□

**Aufgabe 55.** (a) Sei  $X := \mathbb{Q}$  und  $\mathcal{A}_\sigma(M)$  die von  $M := \{(a, b] \cap \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}_\sigma(M) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  gilt.

(b) Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Zeigen Sie: Für  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$  gilt

$$f^{-1}(A_\sigma(\mathcal{M})) = A_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})).$$

Das Urbild von  $\mathcal{M}$  ist hierbei analog zum Urbild einer  $\sigma$ -Algebra definiert durch

$$f^{-1}(\mathcal{M}) := \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B \in \mathcal{M}\}.$$



*Beweis.* (a)  $\{q\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) \forall q \in \mathbb{Q}$ , weil

$$\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( q - \frac{1}{n}, q \right] \in \mathcal{A}_\sigma(M).$$

Es sollte den Schnitt mit  $\mathbb{Q}$  geben, also  $\left( q - \frac{1}{n}, q \right] \cap \mathbb{Q}$  statt  $\left( q - \frac{1}{n}, q \right]$

Weil  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, sind alle Teilmenge  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  abzählbar, daher

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\{\{q\} | q \in \mathbb{Q}\}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(M)$$

Es ist klar, dass

$$\mathcal{A}_\sigma(M) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}).$$

(b) Sei  $P = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra, } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}\}$ . Per Definition ist  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}$ . Dann ist es zu beweisen:

$$f^{-1} \left( \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A} \right) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})).$$

Jeder  $\sigma$ -Algebra  $f^{-1}(\mathcal{A})$  enthält  $f^{-1}(\mathcal{M})$ . Daraus folgt, dass

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) \subseteq \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

$$f^{-1} \left( \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A} \right) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A})$$

Jetzt betrachten wir

$$\mathcal{M}' := f_* (\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}))).$$

stimmt nicht. Es gilt zu sagen, weil  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})$ , gilt auch

Es ist schon in der Vorlesung bewiesen, dass  $\mathcal{M}'$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, die  $\mathcal{M}$  und daher auch  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})$  enthält. Weil  $f^{-1}(\mathcal{M}')$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist  $f^{-1}(\mathcal{M}') = \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}))$ . Daraus folgt:

$$f^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})) \\ \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})))$$

$$f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}') = \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})). \quad \square$$

**Aufgabe 56.** Wir betrachten  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardmetrik, also ausgestattet mit der Euklidischen Norm  $\|\cdot\|$ . Für  $r > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  sei  $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| < r\}$ . Definiere außerdem  $B_{\mathbb{Q}} := \{B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n | \mathbb{Q} \ni r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$  und  $B_{\mathbb{R}} := \{B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n | r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$

(a) Zeigen Sie: Für jeder offene Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt  $A = \bigcup_{B_r(q) \in B_{\mathbb{Q}}} B_r(q)$  mit

$$M := \{B_r(q) \in B_{\mathbb{Q}} | B_r(q) \subseteq A\}.$$

(b) Folgern Sie nun  $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$

*Beweis.* (a) Es genügt zu beweisen, dass jeder offene Ball eine Vereinigung von  $\mathbb{Q}$ -Bälle sind.

Sei  $B_p(x), p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$  eine offene Ball. Sei auch  $(a_i), a_i \in \mathbb{Q}^n$  eine Folge, für die gilt

$$\|x - a_i\| < r \forall i$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = x$$

Sei dann

$$M_i = B_{r-\|x-a_i\|}(a_i) \in B_{\mathbb{Q}}.$$

Leider ist der Beweis hier falsch, weil es sein kann, dass  $r - \|x - a_i\| \notin \mathbb{Q}$ .

Man muss eine durch  $r - \|x - a_i\|$  beschränkte Folge betrachten.

Es ist klar, dass jeder  $M_i \subseteq B_r(x)$  ist. Wir beweisen auch, dass  $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = B_r(x)$ .

Sei  $y \in B_r(x)$ . Es gilt  $\|y - x\| = r_0 < r$ . Sei  $\xi = r - r_0$ . Weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ , gibt es ein Zahl  $a_k$ , wofür gilt

$$\|a_k - x\| < \frac{\xi}{2}.$$

(Eigentlich existiert unendlich viel, aber die brauchen wir nicht). Es gilt dann

$$\|y - a_k\| \leq \|y - x\| + \|x - a_k\| \leq r_0 + \frac{\xi}{2} < r - \frac{\xi}{2} < r - \|x - a_i\|,$$

also  $y \in B_{r-\|x-a_k\|}(a_k)$ . Jetzt ist die Ergebnis klar: Weil jeder offene Menge eine Vereinigung von offene Bälle ist, gilt

$$A = \bigcup B_p(x) = \bigcup \bigcup B_r(q),$$

wobei  $p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$  und  $r \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}^n$

(b)  $\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$  per Definition.

Aus  $B_{\mathbb{Q}} \subseteq B_{\mathbb{R}}$  folgt  $\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{R}})$

Aus (a) folgt, dass

$$B_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}}).$$

Dann

$$\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}_{\sigma}(\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}})) = \mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}}).$$

Deswegen

$$\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n. \quad \square$$

**Aufgabe 57.** Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$  und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  eine Mengenfunktion.

(a) Sei  $\mu$   $\sigma$ -subadditiv,  $B \in \mathcal{A}$  und definiere  $\mu_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \mu_B(A) := \mu(A \cap B)$ . Zeigen Sie, dass  $\mu_B$  wohldefiniert und eine  $\sigma$ -subadditive Mengenfunktion ist.

(b)  $\mu$  erfülle die beiden Eigenschaften

- (1)  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \cap B = \emptyset$ .  
 (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$  für alle  $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$  mit  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$

Zeigen Sie, dass  $\mu$   $\sigma$ -additiv ist.

*Beweis.* (a) Weil  $B \in \mathcal{A}$ , ist  $B \cap A \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A}$ .  $\mu_B$  ist daher wohldefiniert.

Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{A}, \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ . Sei auch  $B_j = A_j \cap B \in \mathcal{A}$ . Dann gilt

$$\mu_B \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \mu \left( B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \mu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_B(A_j)$$

- (b) Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$  paarweise disjunkter Menge. Dann definiere  $B_j = \bigcup_{i=1}^j A_j$ . Für  $k$  endlich ist es klar,

$$\mu(B_k) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i).$$

Weil  $B_i \subseteq B_{i+1}$ , (2) gilt auch:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right). \quad \square$$

## 4.2 Blatt 2 (16.5/20)

**Aufgabe 58.** (Maß über  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  definiere

$$\mu_\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mu_\lambda(A) := \sum_{k \in A} \exp(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bestimmen Sie jeweils alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , für die

- (a)  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_\lambda)$  ein Maßraum ist.  
 (b)  $\mu_\lambda$  ein endliches Maß ist.  
 (c)  $\mu_\lambda$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

*Beweis.* (a)  $\mu_\lambda$  ist auf jedem Fall für endliche Teilmengen von  $\mathbb{N}$  wohldefiniert.

Weil  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$  konvergiert (absolut) für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , konvergiert absolut alle Teilfolge.

$\mu_\lambda$  ist auch trivialerweise additiv, weil es eine Summe ist.

(b) Das passt für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , weil

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)(\exp(\lambda) - 1) < \infty.$$

(c) Wir brauchen

$$\exp(\lambda)(\exp(\lambda) - 1) = 1.$$

oder

$$\exp(\lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Weil  $\exp(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  immer positiv ist, gibt es nur eine reelle Lösung:

$$\lambda = \ln \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \right].$$

□

**Aufgabe 59.** (vollständiger Maßraum) Sei  $X$  eine nichtleere Menge,  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $B \in \mathcal{A}$ . Definiere  $\mu_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\mu_B(A) := \mu(A \cap B)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mu_B$  ein Maß über  $\mathcal{A}$  ist.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist  $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$  ein vollständiger Maßraum, dann auch  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ .
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum, dann auch  $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ .

*Beweis.* (a) In der Übungsblatt 1. haben wir schon bewiesen, dass es wohldefiniert und eine Mengenfunktion ist.

Sei dann  $(A_j)$ ,  $A_j \in \mathcal{A}$  eine Folge disjunkte Menge. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu_B \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) &= \mu \left( B \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \\ &= \underbrace{\mu \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B \cap A_i) \right)}_{\sigma\text{-additivität von } \mu} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B \cap A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_B(A_i) \end{aligned}$$

$\mu_B$  ist dann  $\sigma$ -additiv, und daher Maß.

- (b) Ja. Sei  $\mu(A) = 0$ . Weil  $A \cap B \subseteq A$  ist, gilt auch  $\mu_B(A) = 0$ . Weil  $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$  vollständig ist, ist jede Teilmenge  $\mathcal{A} \ni A' \subseteq A$ .  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ist dann vollständig.

- (c) Nein. Sei  $X = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{a\}$ ,  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ . Das ist eine  $\sigma$ -Algebra, weil  $x \notin \mathcal{A}$ . Sei auch  $\mu(\{b, c\}) \neq 0$ ,  $\mu(X) \neq 0$ ,  $\mu(\{a\}) \neq 0$ . Sei außerdem  $\mu_B(A) = \mu(\{a\} \cap A)$ . Dann ist  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  vollständig (es gibt keine Nullmengen), aber  $\mu_B(\{b, c\}) = \mu(\{a\} \cap \{b, c\}) = \mu(\emptyset) = 0$ . Deswegen ist  $\{b, c\}$  eine Nullmenge in  $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ , aber  $\{b\} \subseteq \{b, c\} \notin \mathcal{A}$ .  $\square$

**Aufgabe 60.** (a) Seien  $K_1, K_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\emptyset \in K_i$  für  $i = 1, 2$  und  $\nu_i : K_i \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\nu_i(\emptyset) = 0$  für  $i = 1, 2$ . Bezeichne nun mit  $\mu_i^*$  die analog zu Satz 1.37 von  $\nu_i$  induzierten äußeren Maße. Es existiere ein  $\alpha > 0$ , so dass

$$\forall I_1 \in K_1 \exists I_2 \in K_2 : I_1 \subseteq I_2 \text{ und } \alpha \nu_2(I_2) \leq \nu_1(I_1).$$

Zeigen Sie: Für alle  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt  $\alpha \mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$ .

- (b) Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 1.55: Zeigen Sie, dass

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ und } \lambda_a^*(A) \leq \lambda_r^*(A) \leq \lambda_n^*(A)$$

für alle  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt.

*Beweis.* (a) Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es eine Überdeckung  $(A_{1,j}), A_{1,j} \in K_1$ , für die gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1,k} &\supseteq A \\ \sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{1,k}) &\leq \mu_1^*(A) + \epsilon \end{aligned}$$

Es gibt auch per Hypothese eine Folge  $(A_{2,k}), A_{2,k} \in K_2, A_{2,k} \supseteq A_{1,k}, \alpha \nu_2(A_{2,k}) \leq \nu_1(A_{1,k})$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2,k} &\supseteq A \\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \nu_2(A_{2,k}) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{2,k}) < \mu_1^*(A) + \epsilon \end{aligned}$$

Weil das für alle  $\epsilon$  gilt, ist  $\alpha \mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$

- (b) Es existiert, für jede Elemente  $(a, b) = J \in \mathbb{J}(n)$ , ein Element  $[a, b] \in \mathbb{J}_l(n) \supseteq (a, b)$ , und es gilt  $\text{vol}_n([a, b]) \leq \text{vol}_n((a, b))$ . Für jede Elemente  $[a, b] \in \mathbb{J}_l$  existiert auch  $\bar{\mathbb{J}}(n) \ni [a, b] \supseteq [a, b]$ , für die gilt  $\text{vol}_n([a, b]) \leq \text{vol}_n([a, b])$ . Daraus folgt die Behauptung:

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ für alle } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ähnlich folgt die andere Teil. Man muss nur  $(a, b]$  statt  $[a, b)$  einsetzen, und alle Aussagen bleiben richtig.  $\square$

**Aufgabe 61.** Zeigen Sie folgende Aussagen über das äußere Lebesgue-Maß:

- (a) Es gilt  $\lambda_n^*(A) = 0$  für alle abzählbaren Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- (b) Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\lambda_n^*(B) = 0$ . Dann gilt  $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A)$ .
- (c) Es ist  $\lambda_1^*([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$ .
- (d) Es ist  $\lambda_2^*(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$

*Beweis.* (a) Sei  $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Sei auch

$$M_\epsilon = \left\{ \left( x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) \mid i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Für jede  $\epsilon > 0$  ist  $M_\epsilon$  eine Überdeckung von  $A$ . Es gilt auch:

$$\begin{aligned} \sum_{B \in M_\epsilon} \text{vol}_n(B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_n \left( \left( x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Weil dann  $\lambda_n^*(A) \leq \epsilon \forall \epsilon > 0$ , ist  $\lambda_n^*(A) = 0$ .

(b) Weil äußere Maße  $\sigma$ -subadditiv sind, gilt

$$\lambda_n^*(A \cup B) \leq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) = \lambda_n^*(A).$$

Weil  $A \subseteq A \cup B$ , gilt  $\lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(A \cup B)$ . Daraus folgt:

$$\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A).$$

(c) Weil  $\{[0, 1]\}$  eine Überdeckung von  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  ist, ist  $\lambda_1^*([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \leq 1$ . Wegen subadditivität gilt  $\lambda_1^*([0, 1]) = 1 \leq \lambda_1^*([0, 1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \leq \lambda_1^*([0, 1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q})$ . Weil  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, gilt  $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$  und daraus folgt  $1 \leq \lambda_1^*([0, 1])$ . Daher gilt  $\lambda_1^*([0, 1]) = 1$ .

(d) Sei für jeder  $\epsilon > 0$   $M_\epsilon$  die Überdeckung.

$$M_\epsilon = \left\{ \left( \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} \right) \times \left( -\frac{\epsilon}{2^n}, \frac{\epsilon}{2^n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1 \right) \times \left( -\frac{\epsilon}{2^n}, \frac{\epsilon}{2^n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es gilt  $\sum_{A \in M_\epsilon} \text{vol}_2(A) = 2\epsilon$ . Weil  $M_\epsilon$  für alle  $\epsilon > 0$  eine Überdeckung von  $\mathbb{R} \times \{0\}$  ist, gilt  $\lambda_2^*(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$ .  $\square$

### 4.3 Blatt 3

**Aufgabe 62.** Sei  $\lambda_n^*$  das äußere Lebesgue-Maß und  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a)  $A$  ist  $\lambda_n^*$  messbar.
- (b) Es gilt  $\lambda_n^*(A \cap Q) + \lambda_n^*(A^c \cap Q) = \lambda_n^*(Q)$  für alle  $Q \in \mathbb{J}(n)$ .

*Beweis.*

**Definition 4.1.** Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Eine Menge  $A \subseteq X$  heißt  $\mu^*$ -messbar, falls gilt

$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \quad \forall D \subseteq X.$$

Weil alle Teilmengen  $I \in \mathbb{J}(n)$  solche Teilmengen  $D \subseteq X$  sind, gilt natürlich (a)  $\implies$  (b). Jetzt bleibt (b)  $\implies$  (a) zu zeigen. Es gibt, für jede  $\epsilon > 0$ , eine abzählbare Überdeckung  $M = \{Q_i, i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{J}$  aus offene Intervalle von  $D$ , für die gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) = \lambda_n^*(D) + \epsilon$ . Für jede  $Q_i \in M$  gilt

$$\lambda_n^*(A \cap Q_i) + \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \lambda_n^*(Q_i).$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) = \lambda_n^*(D) + \epsilon.$$

Weil  $A \cap Q_i$  bzw.  $A^c \cap Q_i$  eine abzählbare Überdeckung von  $A$  bzw.  $A^c$  ist, gilt für  $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ :

$$\lambda_n^*(A \cap D) \leq \lambda_n^*(A \cap Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i),$$

und ähnlich

$$\lambda_n^*(A^c \cap D) \leq \lambda_n^*(A^c \cap Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(A \cap D) + \lambda_n^*(A^c \cap D) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) \leq \lambda_n^*(D) + \epsilon \end{aligned}$$

Weil  $\epsilon > 0$  beliebig war, ist

$$\lambda_n^*(A \cap D) + \lambda_n^*(A^c \cap D) \leq \lambda_n^*(D).$$

□

**Aufgabe 63.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  ein Maßraum und  $\mu^*$  das von  $(\mathcal{A}, \nu)$  induzierte äußere Maß auf  $X$ , d.h. in Satz 1.37 ist  $K = \mathcal{A}$  und  $\nu = \nu$ . Nach Satz 1.59 induziert  $\mu^*$  ein Maß  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}(\mu^*)$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $\mu$  eine sogenannte Erweiterung von  $\nu$  ist, also dass

$$(1) \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mu^*) \text{ und}$$

$$(2) \mu(A) = \nu(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A} \text{ gilt.}$$

(b) Gilt sogar  $\mu = \nu$ , also  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mu^*)$ ?

*Beweis.* (a) Wir beweisen zuerst  $\mu(A) = \nu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ . Es genügt zu beweisen, dass  $\nu(A) = \mu^*(A)$ . Es ist klar, dass  $\{A\}$  eine abzählbare Überdeckung von  $A$  ist, und daher  $\mu^*(A) \leq \nu(A)$ . Wir betrachten dann eine abzählbare Überdeckung  $(Q_i), Q_i \in \mathcal{A}, \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \supseteq A$ .  $\mu^*(A)$  ist die Infimum von solchen Folgen von Mengen. Es gilt wegen der Monotonie von  $\mu^*$  und der  $\sigma$ -Additivität von  $\nu$ :  $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(Q_i) \geq \nu(A)$ . Daraus folgt

$$\mu(A) = \nu(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Jetzt beweisen wir (1). Sei  $A \in \mathcal{A}$ . Wir müssen zeigen, dass für alle  $D \subseteq X$ , gilt

$$\mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) = \mu^*(D).$$

Sei  $(Q_i), Q_i \in \mathcal{A}$  eine abzählbare Überdeckung von  $D$ , für die gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(Q_i) \leq \mu^*(D) + \epsilon, \epsilon > 0$  beliebig. Betrachten Sie

$$\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i).$$

Weil sowohl  $A$  als auch  $Q_i$  in  $\mathcal{A}$  sind, gilt

$$\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i) = \mu^*(Q_i).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) &\leq \mu^*(A \cap Q) + \mu^*(A^c \cap Q) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q_i) \leq \mu^*(D) + \epsilon \end{aligned}$$

Weil  $\epsilon > 0$  beliebig war, gilt

$$\mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \leq \mu^*(D),$$

also  $A$  ist messbar.

(b) Nein. Sei zum Beispiel  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\sigma}(\mathbb{J}(n))$ , und  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  das eingeschränkte Lebesgue-Maß. Dann ist  $\mu^* = \lambda_n^*$ , und daher  $\mu$  das Lebesgue-Maß. Es gilt aber

$$\{q\} \notin \mathcal{A}_{\sigma}(\mathbb{J}(n)), \quad q \in \mathbb{R},$$

obwohl jede Punktmenge  $\lambda_n^*$  messbar ist. □



## 4.4 Blatt 4

**Aufgabe 64.** (a) Seien  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  messbare Räume,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  und  $a \in X$ . Zeigen Sie, dass

$$\{y \in Y \mid (a, y) \in C\} \in \mathcal{B}.$$

- (b) Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  kompakt und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann  $K \times N$  eine  $\lambda_{m+n}$ -Nullmenge ist.
- (c) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  eine  $\lambda_m$ -Nullmenge und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann  $M \times N$  eine  $\lambda_{m+n}$ -Nullmenge ist.
- (d) Zeigen Sie Bemerkung 1.71, also dass  $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n) \subsetneq \mathcal{L}(m+n)$ .

Hinweis: Sie dürfen hierfür annehmen, dass  $B \notin \mathcal{L}(n)$  tatsächlich existiert.

*Beweis.* (a) Zuerst betrachten wir den Fall, in dem  $C = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Es gilt dann

$$\{y \in Y \mid (a, y) \in C\} = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}.$$

Weil sowohl  $\emptyset$  als auch  $B$  Elemente von  $\mathcal{B}$  sind, gilt die Aussage für solche Mengen  $C \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

Jetzt beweisen wir die Aussage im Allgemeinen: Sei  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Dann gilt entweder:

- (i)  $C$  ist eine abzählbare Vereinigung von Mengen  $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$ , wobei  $A_i \times B_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .
- (ii)  $C$  ist eine abzählbare Schnitt von Mengen  $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$ , wobei  $A_i \times B_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

Sei dann  $M \subseteq \mathbb{N}$  die Zahlen, sodass  $a \in A_i \iff i \in M$ . Es gilt, in der beiden Fälle

$$\{y \in Y \mid (a, y) \in C\} = \begin{cases} \bigcup_{i \in M} B_i & ??, \\ \bigcap_{i \in M} B_i & ?? \end{cases}$$

was immer ein Element von  $\mathcal{B}$  ist.

- (b) Sei  $\epsilon > 0$  gegeben, und  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, A_i \in \mathbb{J}(m)$  eine endliche Überdeckung von  $K$ , wobei jedes  $\lambda_m(A_i) < \infty$ .

Das ist immer möglich, weil  $K$  kompakt ist. Wir können dann eine Überdeckung  $(A_i)$  von  $K$  wählen, und die Kompaktheit von  $K$  liefert eine endliche Teilüberdeckung.

Sei dann  $A = \max(\lambda_m(A_1), \lambda_m(A_2), \dots, \lambda_m(A_n))$ . Per Definition ( $N$  ist eine  $\lambda_n$ -Nullmenge) gibt es eine abzählbare Überdeckung  $(B_j), B_j \subseteq \mathbb{R}^n$ , sodass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) < \frac{\epsilon}{nA}.$$

Wir betrachten dann

$$M = \bigcup_{j=1}^n \{A_j \times B_i | i \in \mathbb{N}\},$$

was eine abzählbare Überdeckung von  $K \times N$  ist, aber  $\sum_{C \in M} \lambda_{n+m}(C) < \epsilon$ , also  $K \times N$  ist eine  $\lambda_{n+m}$ -Nullmenge.

(c) Wir haben, für alle Würfel  $I_m \in \mathbb{R}^m$  und  $I_n \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$\lambda_{n+m}^*(I_n \times I_m) = \lambda_n^*(I_n) \lambda_m^*(I_m).$$

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Per Definition gibt es eine Überdeckung  $(B_i), B_i \in \mathbb{R}^n$  von  $N$ , sodass

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supseteq N \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(B_i) \leq 1.$$

Wir haben daher

$$\lambda_n^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(B_i) \leq 1.$$

Sei  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ . Es ist also  $\lambda_n(B) \leq 1$ . Sei  $(A_i), A_i \in \mathbb{R}^m$  eine Überdeckung von  $M$ , für die gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m^*(A_i) < \epsilon.$$

Jetzt ist  $A_i \times B$  eine abzählbare Überdeckung von  $N \times M$ , und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n+m}^*(A_i \times B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_i) < \epsilon,$$

also  $M \times N$  ist eine  $\lambda_{n+m}$ -Nullmenge.

(d) Wie im Skript betrachten wir  $\{0\} \times B, B \notin \mathcal{L}(n)$ . Es gilt  $\{0\} \times B \in \mathcal{L}(m+n)$ , weil  $\{0\} \times B$  eine  $\lambda_{n+m}$ -Nullmenge ist.

Jetzt versuchen wir,  $\{0\} \times B$  als eine abzählbare Schnitt

$$\{0\} \times B \stackrel{?}{=} \bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{A_i \times B_i}_{\in \mathcal{L}(m) \times \mathcal{L}(n)}$$

darzustellen. Aber

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i = \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \times \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right),$$

und wir wissen schon, dass es keine Folgen von Mengen  $(B_i), B_i \in \mathcal{B}$  existiert, sodass  $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B$ , also  $\{0\} \times B \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ .  $\square$

**Aufgabe 65.** Sei  $A \in \mathcal{L}(n)$ . Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \inf \{ \lambda_n(K) \mid K \supseteq A, K \text{ kompakt} \}.$$

(b) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \sup \{ \lambda_n(O) \mid O \subseteq A, O \text{ offen} \}.$$

*Beweis.* (a) Falsch. Betrachten Sie  $A = \mathbb{Q}$ . Weil  $\mathbb{Q}$  nicht beschränkt ist, gibt es keine kompakte Mengen  $K$  mit  $K \supseteq A$ . Deswegen ist

$$0 = \lambda_n(\mathbb{Q}) \neq \inf \{ \lambda_n(K) \mid K \supseteq A, K \text{ kompakt} \} = \infty.$$

#### Bemerkung

Erinnern Sie sich daran, dass wir  $\inf(\emptyset) = \infty$  definieren. Sonst kann man  $\lambda_n(\mathbb{R})$  betrachten.

(b) Falsch. Die Intuition dafür ist, dass

$$\lambda_n(A) = \sup \{ \lambda_n(K) \mid K \subseteq A, K \text{ kompakt} \}$$

Wenn wir eingeschränkte Mengen betrachten, gilt dass, nur wenn  $K$  abgeschlossen ist. Die meistens abgeschlossenen Mengen  $K$  sind der Abschluss einer offenen Menge  $K = \overline{U} = U + \partial U$ . Wir müssen daher nur eine offene Menge finden, sodass  $\partial U$  Maß  $> 0$  hat.

Konkretes Gegenbeispiel: Smith-Volterra-Cantor-Menge.

Wir definieren  $S_0 = [0, 1]$  und weiter induktiv

$$S_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left( \left[ a_k, \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}} \right] \cup \left[ \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}, b_k \right] \right),$$

wobei  $0 < a_1 < b_1 < \dots, a_{2^{n-1}}, b_{2^{n-1}}$  durch

$$S_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [a_k, b_k]$$

definiert sind. Sei jetzt  $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_n$ . Wir beweisen jetzt die Eigenschaften der Menge:

- (i) Alle Intervalle, aus den  $S_n$  besteht, haben die gleiche Länge.

Wir beweisen es per Induktion. Für  $S_0$  ist es trivial, weil es nur ein Intervall gibt. Jetzt nehmen wir an, das es für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  gilt, also  $b_k - a_k = \Delta_n \forall k \in 2^{n-1}$ . Es gilt:

$$\frac{a_k + b_k}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}} = a_k + \frac{\Delta_{n-1}}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}},$$

und auch

$$\frac{a_k + b_k}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}} = a_k + \frac{\Delta_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Also alle Intervalle haben die Länge

$$\Delta_n = \frac{\Delta_{n-1}}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Die Lösung ist

$$\Delta_n = 2^{-(2n+1)}(1 + 2^n).$$

- (ii) Das Innere von  $S$  ist leer.

Wir nehmen an, dass eine offene Intervall  $(a, b) \subseteq S$  gibt. Das Intervall hat Länge  $b - a$ . Aber, weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$  gilt, muss es ein  $S_n$  geben, für das gilt, dass die Intervalle Länge  $< b - a$  haben, also  $(a, b) \not\subseteq S$ .

- (iii) Also  $\{U | U \subseteq S, U \text{ offen}\} = \{\emptyset\}$ .

- (iv)  $\sup \{\lambda_n(O) | O \subseteq S, O \text{ offen}\} = \sup \{0\} = 0$ .

- (v)  $\lambda_n(S) \neq 0$ . In jedem Schritt nehmen wir Intervalle mit Maß

$$\frac{2^n}{2^{2n+2}},$$

also insgesamt nehmen wir Maß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2}$$

raus. Daraus folgt  $\lambda_n(S) = \frac{1}{2} \neq 0$ . □

**Aufgabe 66.** (Maße von Matrixbildern)

- (a) Sei  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine invertierbare Matrix und  $\mu : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß. Zeigen Sie, dass  $\mu_S : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, \infty], \mu_S(A) := \mu(SA)$  wohldefiniert und ein Maß ist.
- (b) Sei  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nicht invertierbar. Zeigen Sie, dass  $\lambda_n(SA) = 0$  für alle  $A \in L(n)$  gilt.

*Beweis.* (a) (i) (Wohldefiniert) Wir müssen nur zeigen, dass  $SA$  offen ist. Wir definieren die übliche Norm auf Matrizen  $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$ . Weil  $S$  invertierbar ist, muss  $\|A\| > 0$  gelten. Sei  $x \in A$  und eine  $r$ , sodass  $B_r(x) \subseteq A$ . Sei  $y \in B_r(x)$ . Es gilt

$$|Ay - Ax| \leq \|A\| |y - x| \leq \|A\| r$$

also  $B_{\|A\|r}(Sx) \subseteq SA$ . Daraus folgt, dass  $SA$  offen ist, und  $\mu_S$  wohldefiniert ist.

(ii) Wir haben auch,  $\mu_S(\emptyset) = \mu(S\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ .

(iii) Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{L}(n)$  eine Folge von messbare Mengen. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \mu_S \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &= \mu \left( S \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(SA_i) \quad (\sigma\text{-Additivität von } \mu) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_S(A_i) \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass  $SA_i$  noch paarweise disjunkt ist, weil  $S$  bijektiv (insbesondere injektiv) ist.

(b)  $\mu_S(A) := \mu(SA)$  ist noch Maß (vorherige Beweis gilt noch): Weil  $S$  nicht invertierbar ist, gibt es einen nichttrivialen Kern. Wir entscheiden uns für ein Vektor  $v_1 \in \ker(S)$ . Dann machen wir eine Basisergänzung, um eine Basis zu konstruieren:

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Wir bezeichnen  $[0, 1]^n \in \mathcal{L}(n)$  als

$$[0, 1]^n = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

für eine Menge  $M$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} S[0, 1]^n &= \{a_1 S(v_1) + a_2 S(v_2) + \dots + a_n S(v_n) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\} \\ &= \{a_2 S(v_2) + \dots + a_n S(v_n) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\} \end{aligned}$$

$\{S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_n)\}$  ist keine Basis, weil der Nullvektor darin vorkommt (vielleicht mehr als einmal). Wir können jedoch eine Basisergänzung machen, die Nullvektoren einzusetzen. Sei die neue Basis

$$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Wir nehmen hier zum Beispiel an, dass  $u_i = S(v_i) \forall i \geq 2$ , also wir müssen nur  $S(v_1) = 0$  einsetzen. Das Argument ist gleich, wenn

das nicht stimmt. Sei  $M = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Dann ist  $\mu'(A) := \mu(M^{-1}SA)$  ein Maß, und

$$\mu'([0, 1]^n) = \mu(\{\{0\} \times (a_2, a_3, \dots, a_n) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\}) = 0.$$

Also  $\mu'$  ist ein Bewegungsinvariantes Maß mit  $\mu'([0, 1]^n) = 0$ . Daraus folgt, dass

$$\mu(SA) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{L}(n). \quad \square$$

## 4.5 Blatt 5

**Aufgabe 67.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  nicht-negativ und messbar. Es existiere eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) > 0$  und  $f(x) > 0$  für alle  $x \in A$ . Zeigen Sie, dass ein  $\epsilon > 0$  und eine Menge  $B \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(B) > 0$  existieren, sodass  $f(x) > \epsilon$  für alle  $x \in B$  gibt.

*Beweis.* Wir beweisen es per Widerspruch. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Dann für jedes  $\epsilon > 0$  ist  $\{f > \epsilon\}$  eine Nullmenge. (Wir wissen, dass die Menge messbar ist, weil  $f$  messbar ist.)

Insbesondere gilt es für alle  $\mathbb{Q} \ni \epsilon > 0$ . Wir bezeichnen  $\mathbb{Q}^+ := \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ . Es gilt

$$A \subseteq \{f > 0\} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^+} \{f > x\},$$

also

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu(\{f > 0\}) \\ &\leq \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} \mu(\{f > x\}) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

also  $A$  ist eine Nullmenge, ein Widerspruch zu die Annahme, dass  $\mu(A) > 0$ .  $\square$

**Aufgabe 68.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum und  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem sei  $(f_n)$  punktweise  $\mu$ -fast überall konvergent, d.h. es existiert ein  $\mu$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$  und eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$  gilt. Zeigen Sie, dass  $f$  messbar ist.

*Beweis.* Wir wissen, dass sowohl

$$f_s = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ als auch}$$

$$f_l = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

messbar sind. Es gilt auch  $f_s(x) = f_l(x)$ ,  $\forall x \in X \setminus N$ . Sei jetzt  $U \subseteq \mathbb{R}$  messbar. Es gilt  $f^{-1}(U) = [f^{-1}(U) \cap N^c] \cup [f^{-1}(U) \cap N]$ .

Es ist  $f^{-1}(U) \cap N \in \mathcal{A}$ , weil  $f^{-1}(U) \cap N \subset N$ ,  $N$  ist eine Nullmenge und  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ist vollständig. Es gilt auch

$$f^{-1}(U) \cap N^c = f_{l/s}^{-1}(U) \cap N^c,$$

wobei  $f_{l/s}$  bedeutet, dass entweder  $f_l$  oder  $f_s$  funktioniert (hier möchten wir betonen, dass die beide Funktionen auf  $X \setminus N$  gleich sind). Aber weil  $f_{l/s}$  messbar sind, ist

$$f^{-1}(U) \cap N^c = \underbrace{f_{l/s}^{-1}(U)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{N^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

Es ist dann

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \quad \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ messbar},$$

also  $f$  ist messbar. □

**Aufgabe 69.** Sei  $A \subsetneq \mathbb{R}$  nichtleer. Bestimmen Sie alle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche bezüglich der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^c, \mathbb{R}\}$  messbar sind.

*Beweis.* Es gilt immer  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ . Außerdem wissen wir aus der Mengentheorie, dass  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A^c) = \emptyset$ , und das Bild von einer nichtleeren Menge ist immer nichtleer. Die unterschiedliche Funktionen sind

$$\begin{array}{lll} f(A) = A & f(A^c) = A^c & f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \\ f(A) = A^c & f(A^c) = A & f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \end{array} \quad \square$$

**Aufgabe 70.** Der Beweis von Lemma 1.83 funktioniert anstelle von  $[0, 1]$  auch analog für jede beliebige Lebesgue-messbare Menge in  $\mathbb{R}$ , die keine Nullmenge ist. Das heißt für jede solche Menge existiert eine Teilmenge, die nicht Lebesgue-messbar ist. Sei nun  $f$  die Cantor-Funktion aus Präsenzübung 3 und definiere  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ ,  $x \rightarrow x + f(x)$ .

Wir definieren die Funktionenfolge  $(f_n)$  durch  $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow x$  und

$$f_{n+1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x - 2) & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}.$$

Dann konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $g$  bijektiv und die Umkehrfunktion  $g^{-1}$  messbar ist.
- (b) Zeigen Sie nun, dass der Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda_1|_{\mathcal{B}^1})$  nicht vollständig ist.

*Hinweis: Nutzen Sie eine geeignete nicht Lebesgue-messbare Menge.*

*Beweis.* (a) Wir wissen, dass  $f$  stetig und monoton wachsend ist. Daraus folgt, dass  $x + f(x)$  stetig und *streng* monoton wachsend ist. Es gilt auch  $g(0) = 0$  und  $g(1) = 2$ .

Das  $g$  surjektiv ist folgt aus dem Zwischenwertsatz.  $g$  ist auch injektiv. Sei  $x > y$ . Dann gilt  $g(x) > g(y)$ , insbesondere  $g(x) \neq g(y)$ .

Es gilt  $(g^{-1})^{-1} = g$ , also wir betrachten eine messbare Teilmenge von  $[0, 1]$ .

□



## CHAPTER FIVE

---

### Einführung in die Algebra

---

#### 5.1 Blatt 1

**Aufgabe 71.** Sei  $G := 2\mathbb{N}^* := \{2n | n \in \mathbb{N}^*\}$  die Menge der positiven geraden Zahlen. Wir nennen  $a \in G$  *zerlegbar*, falls sich  $a$  als Produkt zweier Elemente aus  $G$  schreiben lässt. Ansonsten nennen wir  $a$  *unzerlegbar*. Beispielsweise sind 4 zerlegbar und 6 unzerlegbar. Zeigen Sie:

- (a)  $G$  ist multiplikativ abgeschlossen.
- (b) Jedes  $a \in G$  lässt sich als Produkt unzerlegbarer Elemente aus  $G$  schreiben.
- (c) Selbst wenn man die Reihenfolge der Faktoren nicht berücksichtigt, so ist die Zerlegung nach (b) im Allgemeinen nicht eindeutig.

*Beweis.* (a)  $2n \times 2n' = 4nn' = 2(nn')$

- (b) Wir beweisen es per Induktion. Nehme an, dass jede Elemente  $2n, n < k$  entweder unzerlegbar ist, oder als Produkt unzerlegbare Elemente aus  $G$  geschrieben werden kann. Für  $2(1) = 2$  ist es klar - 2 ist unzerlegbar.

Sei  $M_k \subseteq G = \{m \in G | \exists n \in G, mn = 2k\}$

Entweder ist  $M = \emptyset$ , also  $k$  ist unzerlegbar, oder es existiert  $m, n \in G, mn = 2k$ . Weil  $m$  und  $n$  ein Produkt unzerlegbarer Elemente aus  $G$  sind, ist  $2k$  auch ein Produkt unzerlegbarer Elemente.

- (c) Gegenbeispiel:

$$G \ni 1020 = 30 \times 34 = 102 \times 10.$$

□

**Aufgabe 72.** In dieser Aufgabe stellen wir den Euklidischen Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers vor. Seien hierzu zwei

natürliche Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $b \neq 0$  vorgelegt. Wir setzen  $r_0 := a, r_1 := b$  und rekursiv für alle  $i \in \mathbb{N}^*$  mit  $r_i \neq 0$ .

$$r_{i+1} := \text{Rest von } r_{i-1} \text{ bei der Division durch } r_i$$

(a) Zeigen Sie, dass es ein  $n \geq 2$  mit  $r_n = 0$  gibt.

Da die Rekursionsformel für  $i = n$  nicht mehr anwendbar ist, bricht die Folge  $(r_i)$  der Reste beim Index  $n$  ab. Daher gibt es nur genau einen Index  $n \geq 2$  mit  $r_n = 0$ . Beweisen Sie nun:

(b) Für alle  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  gilt  $ggT(a, b) = ggT(r_{i-1}, r_i)$ .

(c) Es ist  $ggT(a, b) = r_{n-1}$ .

(d) Berechnen Sie  $ggT(210, 45)$  mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

*Beweis.* (a)

$$r_{i-1} = qr_i + r_{i+1} \quad 0 \leq r_{i+1} < r_i$$

per Definition. Weil  $r_{i-1} < r_i$ , ist die Folge monoton fallend. Da es endlich viele natürliche Zahlen  $k < b$  gibt, muss  $r_n = 0$ .

(b) Wir beweisen:

$$ggT(r_{i-1}, r_i) = ggT(r_i, r_{i+1}).$$

Die gewünschte Ergebnisse folgt daraus per Induktion.

Es gilt  $r_{i-1} - qr_i = r_{i+1}$ . Dann folgt:  $ggT(r_{i-1}, r_i)$  teilt  $r_{i-1}$  und  $r_i$  und daher auch  $r_{i-1} - qr_i$ . Deshalb ist  $ggT(r_{i-1}, r_i)$  auch einen Teiler von  $r_{i+1} \implies ggT(r_{i-1}, r_i) \leq ggT(r_i, r_{i+1})$ .

Weil  $r_{i-1} = qr_i + r_{i+1}$ , ist  $ggT(r_i, r_{i+1})$  einen Teiler von  $r_i$  und  $r_{i+1}$  und daher auch von  $qr_i + r_{i+1}$ . Deshalb ist es auch einen Teiler von  $r_{i-1}$ , und  $ggT(r_i, r_{i+1}) \leq ggT(r_{i-1}, r_i)$

(c) Es gilt

$$r_{n-2} = qr_{n-1} + r_n,$$

also  $r_{n-1}$  teilt  $r_{n-2}$ . Daraus folgt

$$ggT(r_{n-1}, r_{n-2}) = r_{n-1} = ggT(a, b).$$

(d)

$$210 = 4 \times 45 + 30$$

$$45 = 1 \times 30 + 15$$

$$30 = 2 \times 15 + 0$$

$$15$$

$$0$$

$$ggT(210, 45) = 15.$$

□

**Aufgabe 73.** (Bonus Problem) Wir wissen von dem Lemma von Bezout, dass für jeder  $x, y, \in \mathbb{N}$  es  $a, b \in \mathbb{Z}$  gibt, so dass

$$ax + by = \text{ggT}(x, y).$$

Zum Beispiel ist  $-210 + 5 \times 45 = 15$ . Kann man von das Euklidische Algorithmus die Zahlen  $a, b$  rechnen?

*Beweis.* Wir berechnen zuerst eine andere Beispiel

$$427 = 1 \times 264 + 163$$

$$264 = 1 \times 163 + 101$$

$$163 = 1 \times 101 + 62$$

$$101 = 1 \times 62 + 39$$

$$62 = 1 \times 39 + 23$$

$$39 = 1 \times 23 + 16$$

$$23 = 1 \times 16 + 7$$

$$16 = 2 \times 7 + 2$$

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

Wir kehren zurück:

$$7 - 1 = 3 \times 2$$

$$\begin{aligned} 3 \times 16 &= 6 \times 7 + 3 \times 2 \\ &= 6 \times 7 + (7 - 1) \\ &= 7 \times 7 - 1 \end{aligned}$$

$$6 \times 16 = 14 \times 7 - 1$$

$$6 \times 16 + 1 = 14 \times 7$$

$$\begin{aligned} 14 \times 23 &= 14 \times 16 + 14 \times 7 \\ &= 14 \times 16 + (6 \times 16 + 1) \\ &= 20 \times 16 + 1 \end{aligned}$$

In der letzte Gleichung bleibt  $\text{ggT}(427, 264) (1)$ . Wir setzen immer wieder ein, bis zu wir eine Gleichung des Forms  $427a + 264b = 1$  haben  $\square$

**Aufgabe 74.** Sei  $k \in \mathbb{N}$  gegeben. Für welche Zahlen  $\mathbb{N} \ni a, b < k$  braucht das Euklidische Algorithmus die meiste Schritte?

*Beweis.* Wir möchten, dass die Folge  $r_n \rightarrow 0$  nicht so schnell.

$$13 = 1 \times 8 + 5$$

$$8 = 1 \times 5 + 3$$

$$5 = 1 \times 3 + 2$$

$$\begin{aligned}
3 &= 1 \times 2 + 1 \\
2 &= 1 \times 2 + 0 \\
1 & \\
0 &
\end{aligned}$$

ist die Fibonacci Folge. □

**Aufgabe 75.** Seien  $p$  und  $q$  zwei ungerade und aufeinanderfolgende Primzahlen, so dass also zwischen  $p$  und  $q$  keine weiteren Primzahlen existieren. Zeigen Sie, dass  $p + q$  ein Produkt von mindestens drei (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen ist.

*Beweis.* Sei obdA  $p < q$ . Weil  $p$  und  $q$  ungerade sind, ist  $p + q$  gerade, also  $p + q = 2k, k \in \mathbb{N}$ . Nehme an, dass  $p + q$  ein Produkt von zwei Primzahlen ist, also  $k \in \mathbb{P}$ . Dann gilt

$$p < k < q, \quad k \in \mathbb{P},$$

ein Widerspruch. Deshalb ist  $k \notin \mathbb{P}$  und  $k$  ist ein Produkt von mindestens zwei Primzahlen, also  $p + q$  ist ein Produkt von mindestens drei Primzahlen. □

**Aufgabe 76.** Seien  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $a \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass es genau dann ein  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $ax \equiv 1 \pmod{n}$  gibt, wenn  $\text{ggT}(a, n) = 1$  gilt.

*Beweis.*  $ax \equiv 1 \pmod{n} \iff ax - 1 = kn, k \in \mathbb{Z}$ , also  $ax - kn = 1$ .

Weil  $\text{ggT}(a, n) = 1$ , gibt es so zwei Zahlen  $a, -k$ , so dass  $ax - kn = 1$  (Lemma von Bezout) □

## 5.2 Blatt 2

**Aufgabe 77.** Sei  $G$  eine Gruppe mit neutralem Element 1. Für jedes Element  $g \in G$  gelte  $g^2 = 1$ . Zeigen Sie, dass  $G$  dann abelsch ist.

*Beweis.*

**Lemma 5.1.** Sei  $a, b \in G$ . Dann gilt  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

*Beweis.*

$$abb^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1. \quad \square$$

Es gilt, für jede  $g \in G$ , dass  $g = g^{-1}$ , weil  $gg = 1$  (per Definition). Deswegen gilt

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba. \quad \square$$

**Aufgabe 78.** Sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $q \in \mathbb{N}^*$  Elementen.

- (a) Zeigen Sie, dass es genau  $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$  geordnete Basen des  $K$ -Vektorraums  $K^n$  gibt. Unter einer geordneten Basis des  $K$ -Vektorraums  $K^n$  verstehen wir hierbei ein  $n$ -Tupel  $(b_1, \dots, b_n)$  linear unabhängiger Vektoren  $b_1, \dots, b_n \in K^n$ .
- (b) Nutzen Sie Teilaufgabe (a), um nachzuweisen, dass die Gruppe  $GL_n(K)$  aus Beispiel 2.4 (d) die Ordnung  $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$  besitzt.

*Beweis.* (a) Wir versuchen, ein  $p$ -Tupel linear unabhängiger Vektoren zu finden. Ich zeige, dass es genau  $\prod_{k=0}^{p-1}(q^n - q^k)$  solche Vektoren gibt. Für  $p = n$  ist das natürlich die gewünschte Behauptung.

Für  $p = 1$  müssen wir  $n$  Elemente aus  $K$  finden. Es gibt  $q^n$  Möglichkeiten dafür. Jedoch ist  $(0, 0, \dots, 0)$  verboten. Deswegen gibt es genau  $q^n - 1$  Vektoren, die nicht  $(0, 0, \dots, 0)$  sind.

Jetzt nehmen wir an, dass es genau  $\prod_{k=0}^{p-1}(q^n - q^k)$  Tupel von  $p$  linear unabhängigen Vektoren gibt (wenn man die Reihenfolge berücksichtigt), für eine beliebige  $p < n$ . Sei  $v_1, v_2, \dots, v_p$  ein solches  $p$ -Tupel. Wir möchten einen weiteren Vektor  $v_{p+1}$  finden, der linear unabhängig von  $v_1, v_2, \dots, v_p$  ist. Das bedeutet:

$$v_{p+1} \neq a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p$$

für **alle**  $a_1, a_2, \dots, a_p \in K$ . Es gibt  $p^q$  Kombinationen für  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ . Weil  $v_1, v_2, \dots, v_p$  linear unabhängig sind, gilt für jede  $(a_1, a_2, \dots, a_p) \neq (a'_1, a'_2, \dots, a'_p)$  auch  $a_1 v_1 + \dots + a_p v_p \neq a'_1 v_1 + \dots + a'_p v_p$ . Deswegen gibt es für jede  $v_1, v_2, \dots, v_p$  genau  $q^n - q^p$  Möglichkeiten für  $v_{p+1}$ .

Es gibt daher

$$\prod_{k=0}^{p-1} (q^n - q^k)$$

$p$ -Tupel von linear unabhängigen Vektoren. Für  $p = n$  ist die Behauptung bewiesen.

- (b) Sei  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eine Basis von  $K^n$ , und  $T$  eine lineare Abbildung  $T : K^n \rightarrow K^n$ . Wenn man  $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$  weiß, ist  $T$  eindeutig.  $T$  ist invertierbar genau wenn  $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$  linear unabhängig sind. Es gibt dadurch eine bijektive Funktion

$$f : GL_n(K) \rightarrow \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in K^{n \times n} \mid v_1, \dots, v_n \text{ sind linear unabhängige}\}.$$

Aber wir wissen, dass es genau  $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$  solche  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in K^{n \times n}$  gibt. Daraus folgt:

$$|GL_n(K)| = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k). \quad \square$$

**Aufgabe 79.** Wir betrachten die komplexen  $(2 \times 2)$ -Matrizen

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge  $Q_8 := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$  zusammen mit der Matrixmultiplikation eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8 bildet. Man nennt  $Q_8$  auch die *Quaternionengruppe* der Ordnung 8.

**Hinweis:** Ein paar konkrete Matrixmultiplikationen werden Sie bei dieser Aufgabe ausrechnen müssen. Versuchen Sie, deren Anzahl gering zu halten und möglichst viel aus Ihren bereits durchgeführten Rechnungen zu schließen.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass  $Q_8$  unter  $\cdot$  abgeschlossen ist. Wir wissen von der Linearen Algebra, dass  $EM = M$  für alle Matrizen  $M$ . Das heißt, dass  $E$  ein neutrales Element ist. Wir wissen auch, dass  $(-E)M = -M$ . Ich betrachte einige wichtige Matrixmultiplikationen:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E.$$

Daraus folgt, dass  $x^{-1} = -x$ , für  $Q_8 \ni x \neq \pm E$ . Für  $x = -E$  ist  $x^{-1} = x$ . Jede  $x \in G$  ist daher invertierbar. Es gilt auch

$$\begin{aligned} IJ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = K \\ JK &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = I \\ KI &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \end{aligned}$$

Von daraus folgt, dass  $Q_8$  unter Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Deswegen ist  $Q_8$  eine Gruppe. Es ist nicht abelsch. Sei  $a, b \in \{\pm I, \pm J, \pm K\}$ ,  $a \neq \pm b$ , und daher  $ab \in \{\pm I, \pm J, \pm K\}$

$$ab = -(ab)^{-1} = -b^{-1}a^{-1} = -(-b)(-a) = -ba. \quad \square$$

**Aufgabe 80.** Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 4. Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.

*Beweis.* Sei  $G = \{1, a, b, c\}$ . Nehme an, dass  $G$  nicht abelsch ist. ObdA können wir annehmen, dass  $ab \neq ba$ . Wir betrachten dann drei Fälle:

1.  $ab = a$  oder  $ab = b$  (obdA nehme an,  $ab = a$ ).

Es gilt dann

$$(ba)b = b(ab) = ba.$$

Daraus folgt  $b = 1$ , ein Widerspruch.

2.  $ab = 1$ . Es folgt aus die Eindeutigkeit des Inverses, dass  $ba = 1$ , auch ein Widerspruch.
3.  $ab = c$ . Erinnern Sie sich daran, dass  $ba \neq 1$ , sonst gibt es ein Widerspruch wie im vorherigen Fall. Es gilt auch  $ba \neq c$ , weil  $ab \neq ba$ . Nehme obdA an, dass  $ba = a$ . Es gilt dann

$$bab = ab = bc.$$

Es gilt auch

$$bc = bab = b^2c.$$

Deswegen ist  $b = 1$ , noch ein Widerspruch.  $\square$

**Aufgabe 81.** Wie viele Gruppe der Ordnung 1/2/3/4 gibt es?

*Beweis.* Ordnung:

- (a) 1:  $G = \{1\}$
- (b) 2:  $G = \{1, a\}, a^2 = 1$
- (c) 3:  $G = \{1, a, b\}$

Jede element muss invertierbar sind, und 1 kann nicht die Inverse sein. Wir betrachten  $a^{-1}$ :

- (i)  $a^{-1} = a$ . Es gilt  $b^{-1} = b$ , sonst ist  $b^{-1} = a \implies a^{-1} = b$ . Es gilt dann entweder  $ab = a$  oder  $ab = b$ . Sei  $ab = a$ . Es gilt

$$b = (aa)b = aab = aa = 1,$$

ein Widerspruch. Das Fall ist leider unmöglich.

- (ii) Es gilt  $ab = 1$ , daher auch  $ba = 1$ . Dann muss es gelten,  $a^2 = b$ ,  $b^2 = a$ . Das Fall ist möglich.

Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 3.

- (d) 4: Wir haben schon bewiesen, dass es abelsch sein muss. Wir zeichnen die Tabelle

$$\begin{array}{cccc} & 1 & a & b & c \\ \begin{array}{c} 1 \\ a \\ b \\ c \end{array} & & \diagdown & & \end{array}$$

Es muss symmetrisch sein. Weil alle Elemente in alle Zeilen und Spalten vorkommen muss, gilt entweder

$\square$

### 5.3 Blatt 3

**Aufgabe 82.** Wir ändern die Gruppendefinition aus Definition 2.3 ab, indem wir für eine Menge  $G$  mit einer zweistelligen Verknüpfung  $\cdot$  und einem Element  $e \in G$  fordern:

- (a) Es gilt  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  für alle  $a, b, c \in G$ .
- (b) Es gilt  $a \cdot e = a$  für alle  $a \in G$ .
- (c') Zu jedem  $a \in G$  gibt es ein Element  $b \in G$  mit  $b \cdot a = e$

Ist dann  $G$  stets eine Gruppe?

*Beweis.* Nein. Sei  $x \cdot y = x$ . Es ist assoziativ, weil  $x \cdot (y \cdot z) = x = (x \cdot y) \cdot z$ . Es gilt auch  $x \cdot e = x \ \forall x$ . Außerdem gilt  $e \cdot x = e \ \forall x \in G$ . Aber es gilt für alle  $e \neq x \in G$ , dass  $x \cdot y = x \neq e \ \forall y \in G$ .  $G$  ist dann keine Gruppe.  $\square$

**Aufgabe 83.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  fixiert. Wir setzen  $\alpha := \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$  und definieren die folgenden zwei Abbildungen:

$$s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \rightarrow \bar{z} \quad \text{sowie} \quad r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \rightarrow \alpha z.$$

Das neutrale Element der Gruppe  $\text{Sym}(\mathbb{C})$  bezeichnen wir mit  $e$  und mit  $\cdot$  die Verkettung von Funktionen.

- (a) Zeigen Sie, dass  $s^2 = e$  und  $r \cdot s \cdot r = s$  gelten.
- (b) Zeigen Sie, dass für  $k \in \mathbb{N}$  genau dann  $r^k = e$  gilt, wenn  $n|k$  ist.
- (c) Zeigen Sie, dass  $r$  und  $s$  Elemente der symmetrischen Gruppe  $\text{Sym}(\mathbb{C})$  sind.
- (d) Zeigen Sie, dass  $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.
- (e) Zeigen Sie, dass zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $t \in \mathbb{N}$  mit  $r^{-k} = r^t$  existiert.
- (f) Beschreiben Sie das Abbildungsverhalten von  $r$  und  $s$  geometrisch.
- (g) Folgern Sie aus (a)–(e), dass  $\{r^x \cdot s^y | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$  gilt.
- (h) Zeigen Sie, dass  $D_n := \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$  eine Gruppe ist.
- (i) Beweisen Sie, dass  $|D_n| = 2n$  gilt.
- (j) Zeigen Sie, dass  $D_n$  nicht abelsch ist.



*Beweis.* (a)  $s^2 = e$  folgt aus  $\bar{\bar{z}} = z$ . Es gilt

$$\begin{aligned}(r \cdot s \cdot r)(z) &= (r \cdot s)(\exp(2\pi i/n)z) \\ &= r(\exp(-2\pi i/n)\bar{z}) \\ &= \exp(2\pi i/n) \exp(-2\pi i/n)\bar{z} \\ &= \bar{z}\end{aligned}$$

Also  $r \cdot s \cdot r = s$ .

(b) Wir wissen,  $r^k(z) = \exp(2\pi i k/n)z$ .  $r^k = e$  genau dann, wenn  $\exp(2\pi i k/n) = 1$ , also  $n|k$ .

(c) Sie sind bijektiv. Wir schreiben einfach die Umkehrfunktion.

$$s^{-1} = s \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \exp(-2\pi i/n)x \\ r \circ f &= e = f \circ r\end{aligned}$$

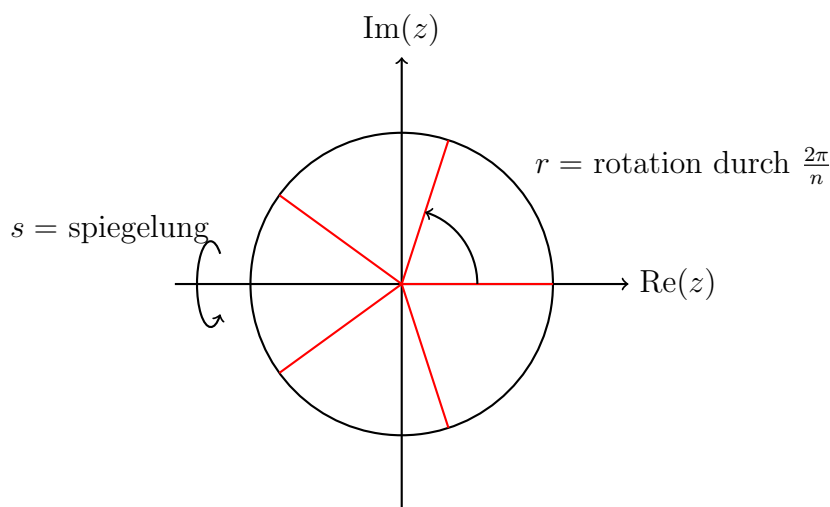
(d)

$$\begin{aligned}(s \cdot r^k)(z) &= s(\exp(2\pi i k/n)z) \\ &= \exp(-2\pi i k/n)\bar{z} \\ (r^{-k} \cdot s)(z) &= (r^{-k})(\bar{z}) \\ &= \exp(-2\pi i k/n)\bar{z} \\ &= (s \cdot r^k)(z)\end{aligned}$$

(e) Sei  $t = -k + pn$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , für  $p$  hinreichend groß, damit  $t > 0$  und daher  $p \in \mathbb{N}$ . Es gilt

$$s^t = s^{-k+pn} = s^{-k}s^{pn} = s^{-k}(s^n)^p = s^{-k}.$$

(f)



(g) Sei  $y = 2n + b, b \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$s^y = s^{2n+b} = s^{2n} \cdot s^b = e \cdot s^b = s^b.$$

(h) (i)  $D_n$  ist abgeschlossen

$$r^a \cdot s^b \cdot r^{a'} \cdot s^{b'} = r^a \cdot r^{-a'} \cdot s^b \cdot s^{b'} \quad (\text{d})$$

$$= r^{a-a'} s^{b+b'}$$

$$\in D_n \quad (\text{g})$$

(ii)  $D_n$  ist assoziativ wegen der Assoziativität von Funktionverknüpfung.

(iii) Neutrales Element

$$a = 0, b = 0, r^0 \cdot s^0 = e \in D_n.$$

(iv) Inverses Element

$$s^{-b} \cdot r^{-a} \cdot r^a \cdot s^b = s^{-b} \cdot (r^{-a} \cdot r^a) \cdot s^b = s^{-b} \cdot s^b = e.$$

Außerdem gilt

$$s^{-b} \cdot r^{-a} = r^a \cdot s^{-b} \quad (\text{d})$$

$$= r^a \cdot s^c, \quad 0 \leq c < 2 \quad (\text{a})$$

(i) Es gibt genau  $n$  Möglichkeiten für  $a$ , und 2 Möglichkeiten für  $b$ . Daraus folgt  $|D_n| = 2n$ .

(j) Wir haben  $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$  (d), und müssen nur  $k$  finden, sodass  $r^k \neq r^{-k}$ .  $k = 1$  ist ein Gegenbeispiel.  $\square$

## 5.4 Blatt 4

**Aufgabe 84.** Seien  $n \in \mathbb{N}^*, T$  die Menge der positiven Teiler von  $n$  und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $n$ . Für  $t \in T$  definieren wir die Mengen

$$M_t := \{g \in G \mid \text{ord}(g) = t\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes  $g \in G$  in genau einer der Mengen  $M_t$  mit  $t \in T$  liegt.

(b) Sei nun zudem  $G$  zyklisch. Zeigen Sie, dass dann  $|M_t| = \varphi(t)$  für alle  $t \in T$  gilt.

(c) Folgern Sie: Für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt  $n = \sum_{t \mid n, t > 0} \varphi(t)$ .

*Beweis.* (a) Sei  $g \in G$  beliebig und  $H = \langle g \rangle$ .  $H$  ist eine Untergruppe von  $G$ . Es gilt auch, dass  $|H| = \text{ord}(g)$ . Wir wissen, dass  $|H|$  teilt  $|G|$ . Daraus folgt, dass  $\text{ord}(g)$  teilt  $|G|$ , und  $g$  liegt in genau einer der Mengen  $M_t$  mit  $t \in T$ .

- (b) Weil  $G$  zyklisch ist, gibt es für jede Teiler  $t|n$  eine Untergruppe der Ordnung  $t$ .

Diese Untergruppe hat genau  $\varphi(t)$  Erzeuger. Für alle Erzeuger  $p$  gilt  $\text{ord}(t) = |\langle t \rangle| = t$ . Es gilt daher, für jedes  $t \in T$ ,  $|M_t| \geq \varphi(t)$ .

Außerdem ist die Untergruppe der Ordnung  $t$  eindeutig. Deswegen ist genau  $|M_t| = \varphi(t)$ . Wir nehmen an, dass es  $p \in G$  gibt, sodass  $\text{ord}(p) = t$ , also  $|\langle p \rangle| = t$ . Weil die zyklische Untergruppe der Ordnung  $t$  eindeutig ist, ist die erzeugte Gruppe genau die Gruppe, die wir vorher diskutiert haben, also  $p$  ist einer der vorherigen  $\varphi(t)$  Erzeuger.

Daraus folgt, dass  $|M_t| = \varphi(t)$  für alle  $t \in T$ .

- (c) Es gibt für jedes  $n$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ , z.B.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Alle Element sind in einer der Mengen  $M_t$ . Die Zahl der Elemente ist einfach  $\sum_{t \in T} |M_t| = \varphi(t) = n$

□

**Aufgabe 85.** Zeigen Sie, dass für eine Gruppe  $G$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}^*$  äquivalent sind:

- (a)  $G$  ist zyklisch.  
 (b)  $G$  besitzt zu jedem positiven Teiler  $t$  von  $n$  genau eine Untergruppe der Ordnung  $t$ .

*Beweis.* (a)  $\implies$  (b) ist schon in der Vorlesung bewiesen. (Satz 2.18). Es bleibt (b)  $\implies$  (a) zu zeigen. Wir betrachten dann ein Element  $a \in G$  und die erzeugte zyklische Gruppe  $\langle a \rangle$ . Falls  $\langle a \rangle = G$  sind wir fertig. Also nehmen wir an,  $\langle a \rangle \neq G$ . Sei  $\text{ord}(a) = k$ , und  $|\langle a \rangle| = k$ . Diese Gruppe besitzt genau  $\varphi(k)$  Erzeuger.

Dann wählen wir ein anderes  $b$  Element aus, das kein Erzeuger von  $\langle a \rangle$  ist. Wir betrachten  $\langle b \rangle$ . Es muss gelten, dass  $\text{ord}(b) = |\langle b \rangle| \neq k$ . Sonst wäre  $\langle b \rangle = \langle a \rangle$ , weil es nur *eine* Untergruppe der Ordnung  $k$  gibt. Wir nehmen noch an, dass  $\langle b \rangle \neq G$ .

Ähnlich fahren wir fort. Wir wählen ein Element aus, das kein Erzeuger von der vorherigen betrachteten zyklischen Gruppen sind. Weil es für jeder Teiler von  $n$  nur eine Untergruppe der Ordnung gibt, gilt  $|M_t| = \varphi(t)$ .

Sei  $T$  die Menge der positiven Teiler von  $n$ . Wir berechnen

$$\sum_{n \neq t \in T} \varphi(t) < n,$$

also wir haben Elemente, deren Ordnung kein positiver Teiler von  $n$ , das weniger als  $n$  ist. Weil die Ordnung ein Teiler von  $n$  sein muss, muss die Ordnung  $n$  sein, also solche Elemente sind Erzeuger der Gruppe  $G$ , und  $G$  ist zyklisch. □

**Aufgabe 86.** (a) Bestimmen Sie die Ordnungen der Elemente für jede der Diedergruppen  $D_n$  mit  $n \geq 3$ .

(b) Zeigen Sie, dass Satz 2.23 für nicht-abelsche Gruppen im Allgemeinen falsch ist.

(Satz 2.23) Sei  $n$  die größte Elementordnung in einer abelschen Gruppe  $G$ . Dann gilt  $g^n = e$  für alle  $g \in G$ .

*Beweis.* (a) Wir betrachten zuerst Elemente mit der Form  $r^k s^0 = r^k$ . Wir haben per die letzte Übungsblatt

Zeigen Sie, dass für  $k \in \mathbb{N}$  genau dann  $r^k = e$  gilt, wenn  $n|k$  ist.

also wir brauchen die kleinste Zahl  $\text{ord}(r^k)$ , sodass  $(r^k)^{\text{ord}(r^k)} = r^{k \cdot \text{ord}(r^k)} = r^{pn}, p \in \mathbb{N}$ . Per Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfaches ist

$$\text{ord}(r^k) = \frac{\text{kgV}(k, n)}{k} = \frac{n}{\text{ggT}(k, n)}.$$

Wir wissen auch, dass  $s^2 = e$ , also  $\text{ord}(s) = 2$ .

Jetzt betrachten wir alle Elemente mit der Form  $r^k s$ . Es gilt

$$r^k s r^k s = r^k r^{-k} s s = e e = e,$$

also alle Elemente mit der Form  $r^k s$  haben Ordnung 2.

(b) Wir betrachten  $D_3$ . Die größte Elementordnung ist 3, weil  $\text{ggT}(3, 2) = 1$ , und  $\frac{3}{\text{ggT}(3, 2)} = 3$ , also  $r^2$  hat Ordnung 3.

Keine größere Elementordnung ist möglich, weil  $\frac{n}{\text{ggT}(n, k)} \leq n = 3$ , und  $2 \leq 3$ .

Es gilt aber

$$s^3 = (s^2)s = es = s,$$

also  $s^3 \neq e$ , ein Widerspruch. □

**Aufgabe 87.** Sei  $n \geq 3$ .

(a) Zeigen Sie, dass die Menge  $R := \{r^0, r^1, \dots, r^{n-1}\}$  ein Normalteiler von  $D_n$  ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe  $\langle x \rangle$  für kein  $x \in D_n \setminus R$  ein Normalteiler von  $D_n$  ist.

*Beweis.* (a) Wir betrachten  $x^{-1}Rx$ :

(i)  $x = r^p$ :Es gilt  $x^{-1} = r^{-p}$ . und

$$r^{-p}r^k r^p = r^k,$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , also  $r^{-p}Rr^p = R$ , insbesondere  $r^{-p}Rr^p \subseteq R$ .(ii)  $x = s$ :Es gilt  $s^{-1} = s$ , und

$$sr^k s = r^{-k} s s = r^{-k} \in S,$$

(Die Behauptung, dass  $r^{-k} \in S$ , war im letzten Übungsblatt bewiesen).(iii)  $x = r^p s$ :Wir haben schon bewiesen, dass  $x^{-1} = r^p s$ . Es gilt

$$r^p s r^k r^p s = r^p s r^{k+p} s = r^p r^{-(k+p)} s s = r^{-k} \in R.$$

Insgesamt gilt  $x^{-1}Rx \subseteq R$  für alle  $x \in D_n$ , also  $R$  ist ein Normalteiler.

(b) Noch einmal betrachten wir die unterschiedlichen Fälle

(i)  $x = s$ , also  $\langle x \rangle = \{e, s\}$ :

Es gilt

$$r^{-1}sr = r^{-1}r^{-1}s = r^{-2}s \neq s.$$

(Es gilt  $r^{-2} \neq r^0 = e$  wenn  $n \geq 3$ ).(ii)  $x = r^p s$ , also  $\langle x \rangle = \{e, r^p s\}$ .

Es gilt

$$r^{-k}r^p s r^k = r^{-k}r^p r^{-k} s = r^{p-2k} s,$$

was nur ein Element von  $\langle x \rangle$  ist, wenn  $p - 2k \equiv p \pmod{n}$ . Sei zum Beispiel  $k = 1$ . Weil  $n \geq 3$ , gilt die Gleichung nie.**Lemma 5.2.** Für  $n \geq 3$  kann

$$p - 2 \equiv p \pmod{n}$$

nicht gelten, für alle  $p \in \mathbb{Z}$ *Beweis.* Die Gleichung  $p - 2 \equiv p \pmod{n}$  genau dann, wenn es  $k \in \mathbb{Z}$  existiert, sodass

$$p - p - 2 = kn,$$

aber das impliziert

$$2 = kn,$$

was unmöglich ist, weil  $n \geq 3 > 2$ . □Also  $r^{-1}\langle x \rangle r \not\subseteq \langle x \rangle$

Die Gruppe  $\langle x \rangle$  ist dann keine Gruppe für  $x \in D_n \setminus R$ .  $\square$

## 5.5 Blatt 5

**Aufgabe 88.** (a) Begründen Sie, dass die Permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 9 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_9$  in der alternierenden Gruppe  $A_9$  liegt.

(b) Finden Sie  $i$  und  $k$ , so dass die Permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix} \in S_9$  gerade ist.

*Beweis.* (a) Wir schreiben zuerst  $\sigma$  als Zyklus

$$\sigma = (176)(259)(384).$$

Dann stellen wir die Zyklus als Produkte von Transpositionen dar, wie im Beweis von 2.44

$$\sigma = (17)(76)(25)(59)(38)(84).$$

Es gibt 6 Transpositionen, also  $\sigma$  ist gerade, und  $\sigma \in A_9$ .

(b) Weil jede Zahl nur einmal vorkommen darf, gibt es nur zwei Möglichkeiten

$$\begin{array}{ll} i = 3 & j = 8, \\ i = 8 & j = 3. \end{array}$$

Wir betrachten die zwei Fälle:

(i)  $i = 3, j = 8$  :

Wir schreiben es als Zyklus, und dann von Transpositionen

$$(3765) = (37)(76)(65),$$

also es ist gerade.

(ii)  $i = 8, j = 3$  wir machen ähnlich

$$(37658) = (37)(76)(65)(58),$$

also es ist in diesem Fall nicht gerade.  $\square$

**Aufgabe 89.** Es sei  $n \in \mathbb{N}^*$ . Die Permutationen  $\sigma, \tau \in S_n$  seien disjunkt.

(a) Beweisen Sie Lemma 2.41: Es gilt  $\sigma\tau = \tau\sigma$ .

(b) Folgern Sie: Es ist  $\text{ord}(\sigma\tau) = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ .

*Beweis.* (a) Kurze Erinnerung an Definition von disjunkter Permutationen:

**Definition 5.3.** Zwei Permutationen  $\sigma, \tau \in S_n$  heißen *disjunkt*, falls gilt

$$\begin{aligned}\sigma(i) \neq i &\implies \tau(i) = i, \text{ und} \\ \tau(i) \neq i &\implies \sigma(i) = i\end{aligned}$$

Wir brauchen außerdem ein Ergebnis

**Lemma 5.4.** Sei  $\sigma(i) = j \neq i$ . Es gilt dann  $\sigma(j) \neq j$ .

*Beweis.* Sonst wäre es ein Widerspruch zu der Definition, dass  $S_n$  die Gruppe aller bijektiven Funktionen  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  ist. Die Permutation wäre dann nicht injektiv, weil  $\sigma(i) = \sigma(j)$ , aber per Annahme  $i \neq j$  gilt.  $\square$

**Korollar 5.5.** Sei  $\sigma, \tau \in S_n$  disjunkter Permutation. Falls  $\sigma(i) \neq i$  gilt  $\tau\sigma(i) = \sigma(i)$ .

**Bemerkung 5.6.** Alle Aussagen hier gelten natürlich noch, wenn man die Rollen von  $\sigma$  und  $\tau$  vertauscht.

Das Ergebnis folgt jetzt fast sofort. Wir betrachten drei Fälle:

(i)  $\sigma(i) \neq i$ , also  $\tau(i) = i$ .

Es gilt dann

$$\sigma\tau(i) \stackrel{??}{=} \sigma(i) \stackrel{??}{=} \tau\sigma(i).$$

(ii)  $\tau(i) \neq i$ , also  $\sigma(i) = i$ .

$$\tau\sigma(i) \stackrel{??}{=} \tau(i) \stackrel{??}{=} \sigma\tau(i).$$

(iii)  $\tau(i) = i$  und  $\sigma(i) = i$ .

$$\tau\sigma(i) = i = \sigma\tau(i).$$

Insgesamt gilt  $\tau\sigma = \sigma\tau$ .

(b) Es gilt

$$(\sigma\tau)^n = \sigma^n \tau^n$$

wegen (a), weil  $\sigma$  und  $\tau$  kommutiert, und wir können die Reihenfolge im Produkt

$$\underbrace{\sigma\tau\sigma\tau \dots \sigma\tau}_{n \text{ Mal}}$$

verändern, sodass die  $\sigma$  alle an einer Seite liegen, und die  $\tau$  an der anderen Seite. Sei  $N \ni p \leq \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ . Sei  $p = n_1 \text{ord}(\sigma) + a = n_2 \text{ord}(\tau) + b$ ,  $a, b, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq a < \text{ord}(\sigma)$  und  $0 \leq b < \text{ord}(\tau)$ .

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)^p &= \sigma^p \tau^p \\ &= \sigma^{n_1 \text{ord}(\sigma) + a} \tau^{n_2 \text{ord}(\tau) + b} \\ &= \sigma^{n_1 \text{ord}(\sigma) + a} \tau^{n_2 \text{ord}(\tau) + b} \\ &= \sigma^{n_1 \text{ord}(\sigma)} \sigma^a \tau^{n_2 \text{ord}(\tau)} \tau^b \\ &= \sigma^a \tau^b \end{aligned}$$

Per Definition, wenn  $p = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ , ist  $a = b = 0$  und

$$(\sigma\tau)^{\text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))} = \sigma^0 \tau^0 = 1.$$

Für  $p < \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$  kann die beide nicht gleichzeitig gelten. Wir betrachten dann  $\sigma^a \tau^b$ . Per Definition können  $a$  und  $b$  nicht gleichzeitig 0 sein. Sei zum Beispiel  $a \neq 0$ . Dann haben wir nie das neutrale Element (es ist egal, was  $b$  ist). Sei  $i_k$  von  $\sigma$  bewegt (hier nehmen wir an, dass  $\sigma \neq 1$ ). Dann ist  $i_k$  nicht von  $\tau$  bewegt, weil  $\sigma$  und  $\tau$  disjunkt sind.

$$\sigma^a \tau^b i_k = \sigma^a i_k.$$

Per Definition ist  $\sigma^a i_k \neq i_k$  für alle mögliche  $i_k$ , sonst wäre  $\text{ord}(\sigma) = i_k$ . Dann ist  $(\sigma\tau)^p \neq 1$  für alle  $p < \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ . Schluss:

$$\text{ord}(\sigma\tau) = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau)). \quad \square$$

**Aufgabe 90.** (a) Zeigen Sie: Für jeden  $m$ -Zykel  $\sigma$  gilt  $\text{ord}(\sigma) = m$ .

(b) Bestimmen Sie das kleinste  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $S_n$  ein Element der Ordnung 20 enthält.

*Beweis.* (a) Sei  $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_m)$ , mit die  $i_j$  paarweise unterschiedlich. Es gilt, für  $\mathbb{N} \ni x \leq m$

$$\sigma^x i_k = i_p,$$

wobei  $1 \leq p \leq m$  und  $p \equiv k + x \pmod{m}$ . Für  $x = m$  ist es dann klar,  $p = k$ , also  $\sigma^x = 1$ .

Für  $x < m$  kann das nicht sein. Das Kongruenz gilt genau dann, wenn

$$k + x - rx = k, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Aber per Definition, wenn  $r = 1$  ist  $k + x - \overset{1}{x} < k$ . Wenn  $r = 0$  ist  $k + x \neq k$ , weil  $x \geq 1 > 0$ . Also  $\sigma^x \neq 1$  für alle  $1 < x < m$ .



- (b) Mit Hilfe von ?? können wir einfach eine solche  $S_n$  konstruieren. Sei  $n = 9$ . Dann haben wir 2 disjunkter Zyklus

$$(12345) \quad \text{und} \quad (6789).$$

mit Ordnung 4 und 5 (a). Dann hat das Produkt  $(12345)(6789)$  der Ordnung 20, weil 4 und 5 Teilerfremd sind, und daher  $\text{kgV}(4, 5) = 4 \times 5 = 20$ .

□

**Aufgabe 91.** (a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$V_4 := \{\sigma \in A_4 \mid \text{ord}(\sigma) \leq 2\}$$

eine Untergruppe der Ordnung 4 von  $A_4$  (und daher auch  $S_4$ ) ist.

- (b) Zeigen Sie, dass  $V_4$  ein Normalteiler von  $S_4$  (und daher auch  $A_4$ ) ist.

*Hinweis:  $V_4$  heißt auch Kleinsche Vierergruppe.*



---

## Theoretische Mechanik

---

### 6.1 Blatt 1

**Aufgabe 92.** Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in einer Dimension, d. h. das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F(x(t)) = -kx(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, daß wenn eine komplexwertige Funktion  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  die Differentialgleichung (1a) löst, ihr Realteil  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$  zur Lösung des reellen Anfangswertproblems (1) benutzt werden kann.
2. Was ist die allgemeinste Form der rechten Seite der Differentialgleichung (1a), für die der Realteil einer komplexen Lösung selbst eine Lösung ist? Geben Sie Gegenbeispiele an.
3. Machen Sie den üblichen Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. . .

*Beweis.* 1. Sei  $x(t) = x_r(t) + ix_i(t)$ ,  $x_r, x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann gilt

$$m \left( \frac{d^2 x_r}{dt^2} + i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = -k(x_r + ix_i).$$

Weil das eine Gleichung von zwei komplexe Zahlen ist, gilt auch

$$m \frac{d^2 x_r}{dt^2} = -kx_r.$$

2. Das passt für alle reelle lineare Kombinationen der Ableitungen von  $x(t)$ .

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x}{dt^i} = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

### Gegenbeispiele

- (i) Irgendeine  $a_i \notin \mathbb{R}$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -ikx(t), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Hier ist es klar, dass *keine* Abbildung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung sein kann, weil die linke Seite reelle wird, aber die rechte Seite nicht reelle wird.

Daraus folgt: Das Realteil der Lösung ist kein Lösung.

- (ii) Nichtlineare Gleichung, z.B.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

3.

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 \alpha e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} m \alpha \lambda^2 e^{\lambda t} &= -k \alpha e^{\lambda t} \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\ \lambda &= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Daraus folgt, für  $z_1(t)$ :

$$\begin{aligned} z_1(0) &= \alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = x_0 \\ z_1'(0) &= -i\omega \alpha_{1,+} + i\omega \alpha_{1,-} = v_0 \\ &\quad -\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = -\frac{iv_0}{\omega} \\ 2\alpha_{1,-} &= x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \\ 2\alpha_{1,+} &= x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \\ z_1(t) &= \frac{1}{2} \left[ \left( x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} + \left( x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} \right] \end{aligned}$$

Daraus folgt die andere Formen der Lösungen:

(i)  $x_2(t)$ 

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[ \left( x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} + \left( x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[ \left( x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[ \left( x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[ x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + i(\dots) \right] \\
&= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t
\end{aligned}$$

(ii)  $x_3(t)$  (R-Formula)

$$\begin{aligned}
x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t &= \alpha_3 \sin(\omega t + \delta_3) \\
\alpha_3 &= \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega} \right)^2} \\
\delta_3 &= \arctan \frac{v_0}{x_0 \omega}
\end{aligned}$$

(iii)  $x_4(t)$ 

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_4 = \alpha_3 \quad \delta_4 = \delta_3 + \frac{\pi}{2}.$$

□

**Aufgabe 93.** Betrachten Sie den gedämpften und getriebenen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F(x(t), \dot{x}(t), t) = -kx(t) - 2m\gamma \frac{dx}{dt} + F_{ext}(t) \\
x(0) &= x_0 \in \mathbb{R} \\
\frac{dx}{dt} &= v_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem zunächst für verschwindende äußere Kraft  $F_{ext} \equiv 0$ . Machen Sie dazu wieder den üblichen Exponentialansatz

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}$$

und behandeln Sie auch den Fall  $\gamma^2 = k/m$ 

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem für eine harmonische äußere Kraft  $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$  indem Sie zur soeben gefundenen Lösung der

homogenen Differentialgleichung noch eine Partikularlösung mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite “ $x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$ ” addieren. Auch hier empfiehlt es sich, Kraft und Ansatz zu komplexifizieren:

$$\begin{aligned} F_{ext}(t) &= F_0 \sin(\omega_0 t) \rightarrow F_0 e^{-i\omega_0 t} \\ x(t) &= A \sin(\omega_0 t) \rightarrow A e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie anhand der Lösungen, daß die Energie

$$E(t) = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{k}{2} x^2(t)$$

für verschwindende Dämpfung  $\gamma = 0$  und äußere Kraft  $F_{ext} \equiv 0$  erhalten ist und diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit von  $E(t)$  als Funktion von  $\gamma$  im allgemeinen Fall. Berücksichtigen Sie insbesondere eine harmonische äußere Kraft  $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ .

*Beweis.* 1.

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) &= \alpha \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \alpha \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} m\lambda^2 \alpha e^{\lambda t} &= -k\alpha e^{\lambda t} - 2m\gamma\lambda\alpha e^{\lambda t} \\ 0 &= m\lambda^2 + 2m\gamma\lambda + k \\ \lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Falls  $\gamma^2 \neq \frac{k}{m}$  :

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ A e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right],$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[ A e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right] \\ &+ e^{-\gamma t} \left[ A \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} - B \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = x_0 \\ x'(0) &= \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} (A - B) = v_0 \end{aligned}$$

$$2A = x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}}$$

$$2B = x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}}$$

Es ist zu beachten, dass es möglich ist, dass  $\gamma^2 < \frac{k}{m}$ . In diesem Fall ist  $\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}$ , aber der Form der Lösung bleibt.

Für  $\gamma^2 = \frac{k}{m}$  ist die Lösung

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}.$$

Es gilt

$$x'(t) = -\gamma Ae^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} - Bt\gamma e^{-\gamma t}.$$

Dann

$$\begin{aligned} x(0) &= A = x_0 \\ x'(0) &= -\gamma A + B = v_0 \\ B &= v_0 + \gamma x_0 \\ x(t) &= x_0 e^{-\gamma t} + (v_0 + \gamma x_0)te^{-\gamma t} \end{aligned}$$

2. Wir suchen eine Partikularlösung für die Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 e^{-i\omega_0 t}$$

mit dem Form

$$x(t) = Ae^{-i\omega_0 t}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x'(t) &= -i\omega_0 Ae^{-i\omega_0 t} \\ x''(t) &= -\omega_0^2 Ae^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Dann ist

$$-\omega_0^2 A m e^{-i\omega_0 t} - 2m\gamma i\omega_0 A e^{-i\omega_0 t} + A k e^{-i\omega_0 t} = F_0 e^{-i\omega_0 t},$$

$$A = \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k}.$$

3. für verschwindende Dämpfung  $\gamma = 0$  und äußere Kraft  $F_{\text{ext}} \equiv 0$  ist die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Wir berechnen

$$\dot{x} = -x_0\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 &= \frac{m}{2} (-x_0\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t)^2 \\ &= \frac{m}{2} (x_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t - 2x_0v_0\omega \sin \omega t \cos \omega t + v_0^2 \cos^2 \omega t) \\ &= \frac{m}{2\omega^2} \overset{k/2}{\left( x_0^2 \sin^2 \omega t - \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t \right)} \\ &= \frac{k}{2} \left( x_0^2(1 - \cos^2 \omega t) - \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} (1 - \sin^2 \omega t) \right) \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{k}{2}x(t)^2 = \frac{k}{2} \left( x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right)$$

folgt

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{k}{2} \left( x_0^2(1 - \cos^2 \omega t) - \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} (1 - \sin^2 \omega t) \right) \\ &\quad + \frac{k}{2} \left( x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right) \\ &= \frac{k}{2}x_0^2 + \frac{kv_0^2}{2\omega^2}, \end{aligned}$$

was nicht abhängig von  $t$  ist.

Wir untersuchen jetzt die Energie für eine harmonische äußere Kraft.

Wenn die Dämpfung  $\neq 0$  ist, ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_h(t) + x_p(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t).$$

Daher muss man nur die Energie der Partikularlösung berechnen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t} \\ \dot{x}(t) &= - \frac{iF_0\omega_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Wenn  $\gamma = 0$ , kann  $x(t) \rightarrow \infty$ , wenn

$$-m\omega_0^2 + k = 0 \quad (\text{Resonanz}).$$

Das bedeutet  $E(t) \rightarrow \infty$  auch.

□



## 6.2 Blatt 2

**Aufgabe 94.** Betrachten Sie die folgenden Familien von Kraftfeldern auf geeigneten Definitionsbereichen  $D_\eta^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 F_\eta^{(1)} : D_\eta^{(1)} &\ni \vec{x} \rightarrow r^\eta \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\
 F_\eta^{(2)} : D_\eta^{(2)} &\ni \vec{x} \rightarrow r_{12}^\eta \cdot (x_1 \vec{e}_1 - x_2 \vec{e}_2) \in \mathbb{R}^3 \\
 F_\eta^{(3)} : D_\eta^{(3)} &\ni \vec{x} \rightarrow r_{12}^\eta \cdot (x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2) \in \mathbb{R}^3 \\
 F_\eta^{(4)} : D_\eta^{(4)} &\ni \vec{x} \rightarrow r_{12}^\eta \cdot (x_2 \vec{e}_1 + x_1 \vec{e}_2) \in \mathbb{R}^3
 \end{aligned}$$

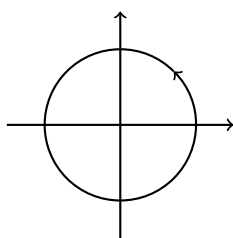
wobei  $r_{12} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Skizzieren Sie die Felder  $\vec{F}_\eta^{(n)}$  als Vektorpfeile in der von den Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  aufgespannten Ebene (hier genügt es, zwischen den Fällen  $\eta > -1$ ,  $\eta = -1$  und  $\eta < -1$  zu unterscheiden).

Bestimmen Sie, abhängig von der Potenz  $\eta \in \mathbb{R}$ ,

1. den maximalen Definitionsbereich  $D_\eta^{(n)}$ ,
2. die maximale Bereiche  $C_\eta^{(n)} \subseteq D_\eta^{(n)}$ , auf denen  $F_\eta^{(n)}$  konservativ ist,
3. eine Potentialfunktion  $V_\eta^{(n)} : C_\eta^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F_\eta^{(n)} = -\nabla V_\eta^{(n)}$ , sofern sie existiert,
4. das Kurvenintegral

$$I_\eta^{(n)}(R) = \int_{\gamma_R} d\vec{\xi} \cdot \vec{F}_\eta^{(n)}(\vec{\xi})$$

über den gegen den Uhrzeigersinn umlaufenden Kreis  $\gamma_R$  mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $\vec{0}$  in der von  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  aufgespannten Ebene

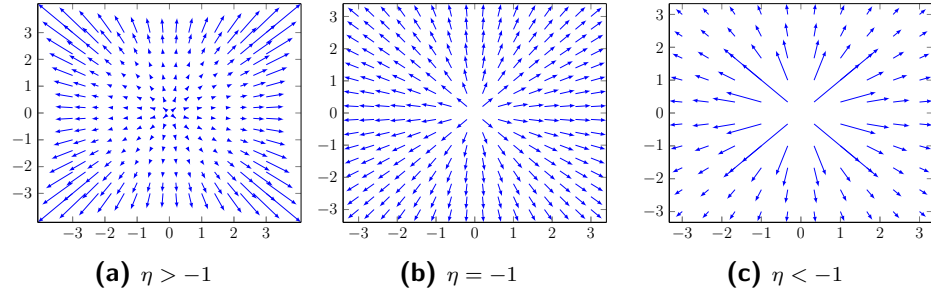
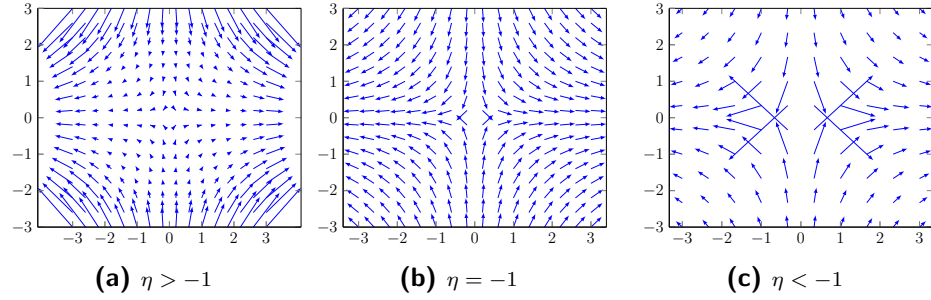
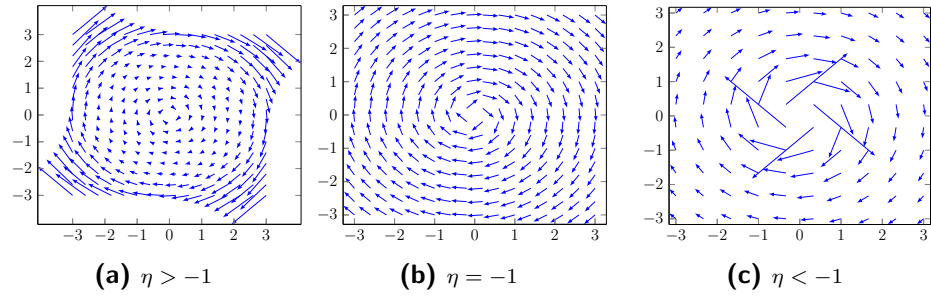
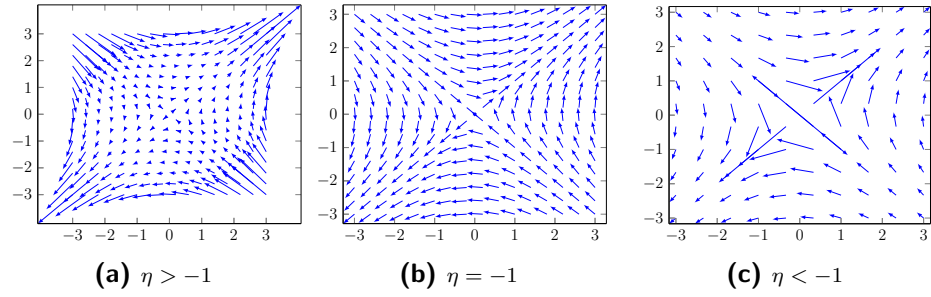


*Beweis.* 1. Maximalen Definitionsbereich (für alle  $\vec{F}_\eta^{(n)}$ ): Wenn  $\eta \leq -1$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ , sonst  $\mathbb{R}^3$ .

2. maximale Bereiche, auf denen  $\vec{F}_\eta^{(n)}$  konservativ ist.  $n = \dots$

(1) Falls  $\eta = 0$ ,  $D_\eta^{(1)}$ , sonst  $z = 0$

(2) Falls  $\eta = 0$ ,  $D_\eta^{(2)}$ , sonst  $\emptyset$

Figure 6.1: Vektorpfeile für  $\vec{F}_\eta^{(1)}$ Figure 6.2: Vektorpfeile für  $\vec{F}_\eta^{(2)}$ Figure 6.3: Vektorpfeile für  $\vec{F}_\eta^{(3)}$ Figure 6.4: Vektorpfeile für  $\vec{F}_\eta^{(4)}$ 

(3) Falls  $\eta = -2, D_\eta^{(3)}$ , sonst  $\emptyset$ .

(4) Falls  $\eta = 0, D_\eta^{(4)}$ , sonst  $\emptyset$ .

3. Potentialfunktion, für  $n = \dots$

(1) Auf  $z = 0$  Ebene:

$\eta = -2$ :  $V = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ , sonst  $V = \frac{1}{\eta+2} r^{\eta+2}$ . Die erwartete Antwort ist einfach  $V = \frac{1}{\eta+2} r^{\eta+2}$ .  
 Wenn  $n = 0$  kann eine Potentialfunktion für alle  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^4$  definiert werden:  $V(x, y, z) = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)$

(2) Nur für  $\eta = 0$ ,  $V = \frac{1}{2} (x^2 - y^2)$ .

(3) Für  $\eta = -2$ ,  $V = -\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ .

(4) Für  $\eta = 0$ ,  $V = -xy$ .

4. Kurvenintegral, für  $n = \dots$

(1) Weil  $\nabla \times F_\eta^{(1)} = 0$  auf die  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  Ebene, ist das Kurvenintegral stets 0.

(2) Gleich für  $\eta = 0$ . Sonst sei  $x_1 = \cos \theta$ ,  $x_2 = \sin \theta$ ,  $dx_1 = -\sin \theta d\theta$ ,  $dx_2 = \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_1 dx_1 - x_2 dx_2 &= R^\eta \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta d\theta - \cos \theta \sin \theta d\theta) \\ &= R^\eta \int_0^{2\pi} (-2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3) Sei  $x_1 = \cos \theta$ ,  $x_2 = \sin \theta$ ,  $dx_1 = -\sin \theta d\theta$ ,  $dx_2 = \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_2 dx_1 - x_1 dx_2 &= R^\eta \int_0^{2\pi} (-\sin^2 \theta d\theta - \cos^2 \theta d\theta) \\ &= -R^\eta \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -2\pi R^\eta \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass es für  $\eta = -2$  ungleich 0 ist, weil  $\nabla \times \vec{F}_\eta^{(3)}$  auf  $(0,0)$  nicht definiert ist.

(4) Für  $\eta = 0$  ist die Kurvenintegral stets 0. Sonst sei  $x_1 = \cos \theta$ ,  $x_2 = \sin \theta$ ,  $dx_1 = -\sin \theta d\theta$ ,  $dx_2 = \cos \theta d\theta$  und

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_2 dx_1 + x_1 dx_2 &= R^\eta \int_0^{2\pi} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= R^\eta \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 95.** Zwischen zwei Kreisringen mit Radius  $R$ , die bei  $x = -x_0$  und  $x = x_0$  zentriert in der  $yz$ -Ebene liegen, sei eine Seifenhaut gespannt (s. Skizze). Aufgrund der Oberflächenspannung wird sich die Seifenhaut so ausbilden, dass die entsprechende Oberfläche minimal ist.

1. Das gesamte Problem ist rotationssymmetrisch um die  $x$ -Achse. Zeigen Sie, dass die Fläche der Rotationsfigur um die  $x$ -Achse für die Funktion  $y : [-x_0, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$  zwischen den Kreisringen durch

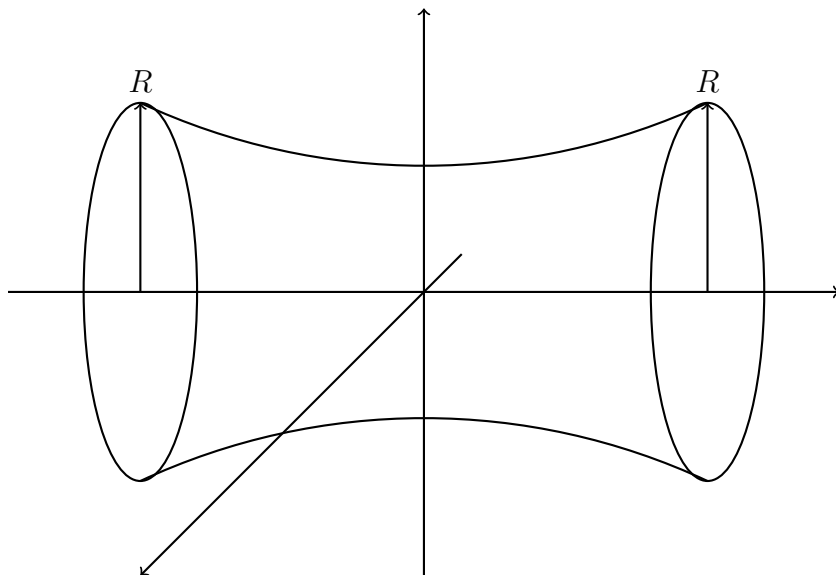
$$F(y) = \int_{-x_0}^{x_0} 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx$$

mit  $y' = \frac{dy}{dx}$  gegeben ist.

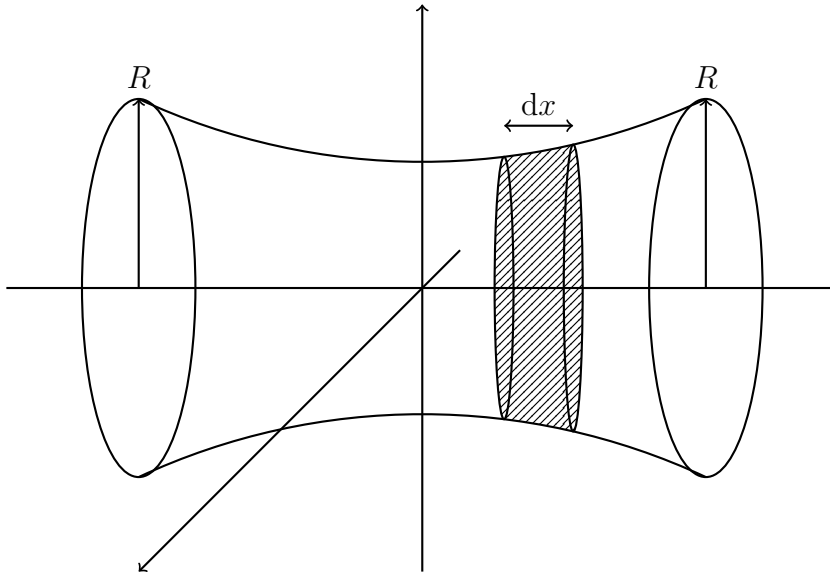
2. Benutzen Sie nun die in der Vorlesung kennengelernte Methode der Variationsrechnung, um die Minimalfläche zu finden, die von der Seifenhaut gebildet wird. Gesucht ist also die Funktion  $y$ , die  $F(y)$  minimiert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Problem als

$$\frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

geschrieben werden kann.)



*Beweis.* 1.



$$dV = 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

2.

**Satz 6.1.** Im Allgemein, für  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , gilt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) = 0.$$

*Beweis.* Erinnern Sie sich daran, dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (6.1)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} \\ &= \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Sei jetzt  $L(y(x), y'(x), x) = y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}$ . Es folgt  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L &= \left( \frac{y(x) y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) y' - y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} \\ &= \left( \frac{y y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - \frac{y(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Es gilt dann, dass

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha y &= \sqrt{1+y'^2} \\ \alpha^2 y^2 &= 1+y'^2 \\ y' &= \pm \sqrt{\alpha^2 y^2 - 1} && + \text{ wenn } x > 0 \\ \int dx &= \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 y^2 - 1}} \\ x &= \frac{1}{\alpha} \cosh^{-1}(\alpha y) - \beta \\ y &= \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha(x + \beta)) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen ergeben:

$$\alpha R = \cosh(\alpha(x_0 + \beta)) = \cosh(\alpha(-x_0 + \beta))$$

Daraus folgt  $\beta = 0$ . Leider ist die Gleichung für  $\alpha$  unlösbar. Die Lösung zu die Gleichung ist

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x) \\ \alpha R &= \cosh(\alpha x) \end{aligned}$$

□

### 6.3 Blatt 3

**Aufgabe 96.** Die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen lautet:

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \omega^2 \vec{x} = 0 \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Entwickeln Sie den Ortsvektor  $x(t)$  und seine zeitlichen Ableitungen in der Polarkoordinatenbasis  $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\phi\}$  und überzeugen Sie sich, dass die so aus (1) folgenden Differentialgleichungen den Bewegungsgleichungen entsprechen, die Sie wie in der Vorlesung mittels der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

direkt aus der Lagrangefunktion in Polarkoordinaten  $q_i = r, \phi$  erhalten.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}} &= \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + r \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{x}} &= \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} + r\dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Weil  $(\cos \phi, \sin \phi)^T$  und  $(\sin \phi, \cos \phi)^T$  linear unabhängig (sogar orthogonal) sind, kann die Gleichung  $\ddot{\vec{x}} + \omega^2 \vec{x}(t)$  als

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r &= 0 \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} &= 0\end{aligned}$$

Man schreibt auch direkt die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$\begin{aligned}r : m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + m\omega^2 r &= 0 \\ \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r &= 0 \\ \phi : \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) &= 0 \\ 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} &= 0 \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} &= 0.\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 97.** Eine Punktmasse  $m$  rotiere reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen gespannten Faden der Länge  $l$  ( $l = r + s$ ) sei sie durch ein Loch in der Platte mit einer anderen Masse  $M$  verbunden (s. Skizze). Wie bewegt sich  $M$  unter dem Einfluss der Schwerkraft?

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen.
2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten  $s$  und  $\varphi$  auf und ermitteln Sie daraus die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \text{const} \equiv C$  gilt.
3. Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2, um die  $\varphi$ -Abhängigkeit in der Differentialgleichung für  $s$  zu eliminieren. Betrachten Sie nun den Gleichgewichtsfall  $s(t) = \text{const}$  und finden Sie einen Ausdruck für die resultierende Rotationsgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}(t) = \text{const} \equiv \omega_0$  der Masse  $m$ . Ausgehend vom Gleichgewichtsfall, unter welchen Bedingungen rutscht die Masse  $M$  nach oben, wann nach unten?

4. Diskutieren Sie das Ergebnis für die Anfangsbedingung  $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ .

*Beweis.* 1.  $\frac{dl}{dt} = 0$ .

2.

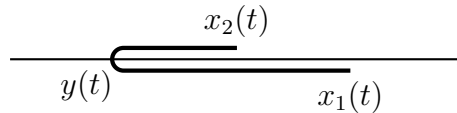
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + Mg(l - r).$$

Weil  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ , gilt aus der Euler-Lagrange-Gleichungen  $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$ , also  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \equiv C$ .

3. Weil  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \equiv C$ , gilt

□

**Aufgabe 98.** Eine einmal gefaltete Schnur mit Gesamtlänge  $l$  und konstanter Masse pro Länge  $\rho$  bewegt sich auf der  $x$ -Achse. Die Endpunkte der Schnur seien mit  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  bezeichnet. Die Stelle, an der die Schnur gefaltet ist, sei mit  $y(t)$  bezeichnet.



1. Geben Sie die Zwangsbedingungen des Systems an.
2. Geben Sie eine Langrangefunktion des Systems an.

Betrachten Sie für die kinetische Energie  $T$  die Endpunkte  $x_1$  und  $x_2$ , deren "Masse" durch die integrierte Masse des Schnurstücks zwischen  $x_1$  und  $y$  bzw.  $x_2$  und  $y$  gegeben ist.

3. Die Lagrangefunktion kann in den Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = x_1 - x_2 \text{ und } X = \frac{1}{2l} [(x_1 - y)(x_1 + y) + (x_2 - y)(x_2 + y)]$$

zu

$$L = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\xi}^2$$

umgeschrieben werden, wobei  $M$  und  $\mu$  Funktionen von  $X$  und  $\xi$  sind. Bestimmen Sie  $M$  und  $\mu$  durch den Vergleich der Lagrangefunktionen in Koordinaten  $(x_1, x_2)$  und  $(X, \xi)$ .

*Beweis.* 1.  $l = x_2(t) - y(t) + x_1(t) - y(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2y(t)$

2. Wir betrachten eine Koordinate  $0 \leq \xi \leq l$ , die ab  $x_1$  anfängt und steigt monoton, bis die andere Seite. Die Position eine kleine Masselemente ist:

$$x(\xi) = y + |\xi - (x_2 - y)|.$$



Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \dot{y} + \frac{d}{dt}|\xi - (x_2 - y)| \\ &= \dot{y} + \operatorname{sgn}(\xi - (x_2 - y)) \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)\end{aligned}$$

Wir integrieren die Geschwindigkeit, um die kinetische Energie zu bekommen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho \int_0^l \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 d\xi &= \frac{1}{2}\rho \left[ \int_0^{x_2-y} (\dot{y} - (\dot{y} - \dot{x}_2))^2 d\xi + \int_{x_2-y}^l (\dot{y} + (\dot{y} - \dot{x}_2))^2 d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2}\rho [(x_2 - y)\dot{x}_2^2 + (l - x_2 + y)(2\dot{y} - \dot{x}_2)^2]\end{aligned}$$

□