Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

9. Übungsblatt

Hinweis:
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Mittwoch (20.12.2023) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Nochmal JNF (6 Punkte)**
   Berechnen Sie die JNF und die jeweiligen Basisvektoren für die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} -4 & 22 & 7 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. **Projektion und Projektor (3 + 7 + 5 + 3)**
   Wir befinden uns im $\mathbb{R}^n$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und wähle eine Basis $\{b_1, ..., b_m\}$ von U. Wir definieren die Matrix
   $$A = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

   (a) Zeigen Sie: Die Matrix
   $$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$
   ist wohldefiniert und ein Projektor auf U.
   (Projektor auf U bedeutet, P ist idempotent und $\mathrm{im}(P) = U$).

   Es sei die 2-Norm gegeben durch $\|x\|_2 := \sqrt{x^T x}$. Wir definieren die (euklidische) Projektion P_U auf den Unterraum U als diejenige Abbildung, für die gilt $x^* = P_U(y)$ genau dann, wenn x^* das Problem
   $$\min_{x \in U} \|x - y\|_2^2 \tag{1}$$
   löst.

   (b) Zeigen Sie: x^* ist eine Lösung von (1) genau dann, wenn
   $$(x^* - y)^T x^* = 0$$
   und äquivalent
   $$\|x^* - y\|_2^2 = \|y\|_2^2 - \|x^*\|_2^2.$$

   (c) Die Lösung x^* von (1) ist eindeutig und gegeben durch
   $$x^* = A(A^T A)^{-1} A^T y.$$
   Sie können für die Eindeutigkeit natürlich auch (d) zu Rate ziehen.

   (d) Angenommen die Menge $\{b_1, ..., b_m\}$ bildet eine Orthonormalbasis von U. Zeigen Sie, dass in dem Fall für die Projektion gilt
   $$x^* = Py = \sum_{i=1}^{m} b_i b_i^T y.$$

3. **Positive Definitheit (6 + 8 + 3 + 3 Punkte)**
   Wir nennen eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, wenn gilt $A = A^T$ und $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitisch, wenn gilt $A^H = A$ mit $A^H := \overline{A}^T$ (d.h. die Einträge in A werden komplex konjugiert und die Matrix anschließend transponiert). Wir definieren zu A die Bilinearform, bzw. die Sesquilinearform
   $$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x^T A y, \qquad \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := x^H A y.$$

(a) Beweisen Sie: Es ist $\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} \geq 0$ ($\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} > 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann, wenn der symmetrische Anteil $(A + A^T)/2$ von A nur nichtnegative (strikt positive) Eigenwerte hat. Widerlegen Sie: A muss selbst nicht symmetrisch sein.

(b) Beweisen Sie: Es ist $\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}} \geq 0$ ($\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}} > 0$) für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ genau dann, wenn A nur nichtnegative (strikt positive) Eigenwerte hat. Insbesondere folgt bereits $A^H = A$.

Die Rückrichtung wird später mal ein Einzeiler werden. Aktuell können Sie wie folgt herangehen (exemplarisch für (a), analog für (b)):
Nehmen Sie in einem Widerspruch an, es gibt ein x sodass $\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} < 0$. Betrachten wir nur Vektoren $x/\|x\|_2$ der Länge 1 so muss nun ein x^* exisitieren, sodass

$$0 > \ (\textit{bzw. } 0\ \geq\ )\ r = \frac{(x^*)^T A x^*}{\|x^*\|_2 \|x^*\|_2} = \min_x \frac{x^T A x}{\|x\|_2 \|x\|_2}$$

also hat die (differenzierbare) Funktion

$$p_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{(x^* + tv)^T A (x^* + tv)}{\|x^* + tv\|_2 \|x^* + tv\|_2}$$

ein Minimum in $t = 0$ für jeden beliebigen Vektor v...

Es sei nun V ein Vektorraum von Dimension n und B eine beliebige Basis.

(c) Sei A symmetrisch. Zeigen Sie: Für $x, y \in V$ definiert $\langle x, y\rangle = ({}_B[x])^T A\ {}_B[y]$ eine symmetrische Bilinearform. Umgekehrt gibt es für jede symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine symmetrische Matrix A, sodass $\langle x, y\rangle = ({}_B[x])^T A\ {}_B[y]$ für alle $x, y \in V$.

(d) Sei A hermitesch. Zeigen Sie: Für $x, y \in V$ definiert $\langle x, y\rangle = \overline{({}_B[x])^T} A\ {}_B[y]$ eine hermitesche Sesquilinearform. Umgekehrt gibt es für jede hermitesche Sesquilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine hermitesche Matrix A, sodass $\langle x, y\rangle = \overline{({}_B[x])^T} A\ {}_B[y]$.