Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 16, 2024)

Problem 1. Betrachten Sie die folgenden 3×3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ -1+i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die adjungierten Abbildungen A^* und B^*.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B.

(c) Überprüfen Sie, dass sich aus den Eigenvektoren der Matrix A eine Orthonomalbasis des $\mathbb{C}^3$ mit Standardskalarprodukt bauen lässt. Führen Sie das selbe auch mit Matrix B durch.

(d) Bestimmen Sie unitäre Matrizen $U, V \in M_3(\mathbb{C}^3)$, sodass UAU^* und VBV^* diagonal sind. Können Sie zudem erreichen, dass U und V orthogonal sind?

Proof. (a)

$$A^* = A, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 1-i & -1-i & 0 \\ 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

(b) A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}
&=(2-\lambda)((2-\lambda)^2-1)-(1-\lambda)+(\lambda-1)\\
&=(2-\lambda)^3-(2-\lambda)-2+2\lambda\\
&=-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\lambda = 1$ ein Nullstelle des Polynoms. Es gilt

$$\begin{aligned}
-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4 =&(\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-4)\\
=&-(\lambda-1)^2(\lambda-4)
\end{aligned}$$

also die Eigenwerte von A sind 1 und 4.

Ähnlich für B:

$$\begin{aligned}
\det(B-\lambda I) =& \begin{vmatrix} 1-i-\lambda & -1-i & 0 \\ 1+i & 1-i-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-i-\lambda \end{vmatrix}\\
=&-\lambda^3+3(1-i)\lambda^2+4i\lambda\\
=&-\lambda(\lambda-(1-i))(\lambda-(2-2i))
\end{aligned}$$

also die Eigenwerte sind 0, $1-i$ und $2-2i$.

(c) Wir berechnen die Eigenvektoren:

Für A:

$$\begin{aligned}
\text{EW} = 4 :&(1,1,1)^T\\
\text{EW} = 1 :&(-1,0,1)^T\\
\text{EW} = 1 :&(-1,1,0)^T
\end{aligned}$$

Die Eigenräume für die Eigenwerte 4 und 1 sind schon orthogonal. Im Eigenraum EW=1 können wir den Gram-Schmidt-Algorithismus durchführen, da lineare Kombinationen von Eigenvektoren mit gleichen Eigenwerte noch Eigenvektoren sind. Eine Orthonormalbasis ist dann

$$\begin{aligned}
\text{EW} = 4 :&\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T\\
\text{EW} = 1 :&\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T \text{ und}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T$$

Die Eigenvektoren von B sind

$$\begin{aligned} \mathrm{EW} = 0 :& (i,1,0)^T \\ \mathrm{EW} = 1-i :& (0,0,1)^T \\ \mathrm{EW} = 2-2i :& (-i,1,0)^T \end{aligned}$$

Die Vektoren sind schon orthogonal, also wir normalisieren die Vektoren, um eine Orthonormalbasis zu bekommen.

$$\begin{aligned} \mathrm{EW} = 0 :& \frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0)^T \\ \mathrm{EW} = 1-i :& (0,0,1)^T \\ \mathrm{EW} = 2-2i :& \frac{1}{\sqrt{2}}(-i,1,0) \end{aligned}$$

(d) Wir schreiben die Orthonomalbasis von Eigenvektoren von A als die Zeilen der Matrix U.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ähnlich für V:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

U ist schon orthogonal. V ist unitär und kann nicht orthogonal werden. □

Problem 2. Betrachten Sie die reelle Matrix

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass P ein Orthogonalprojektor bezüglich des Standardskalarprodukts ist.

(b) Bestimmen Sie den Rang von P.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonomalbasis des Bildes und des Kerns von P sowie den Basiswechsel O von der Standardbasis auf diese Basis.

(d) Verifizieren Sie, dass O orthogonal ist, Können Sie einen solchen orthonomalen Basiswechsel finden, dass $\det O = 1$ gilt?

Proof. (a) Schritt 1: P ist ein Projektor. Durch direktes Rechnung:

$$P^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = P.$$

Da $P^* = P$, ist P ein Orthogonalprojektor nach Proposition 7.79.

(b)

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\times 5} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\times 5} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist 2.

(c) Eine Basis des Bildes ist die erste 2 Spalten, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir ergänzen es bis eine Basis für den ganzen Vektorraum:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus ergibt sich eine Orthonomalbasis durch den Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die ersten 2 Vektoren sind eine Orthonomalbasis des Bildes, der dritte eine Orthonomalbasis des Kerns. Der Basiswechselmatrix ist

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(d)

$$OO^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & \sqrt{\frac{2}{15}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,1,1).$$

Er hat schon Determinante 1. Sonst könnten wir die erste zwei Spalten vertauschen.

□

Problem 3. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Jede Matrix $P \in M_n(\mathbb{C})$ mit $P^2 = P$ ist ein Orthogonalprojektor bezüglich eines *geeigneten* Skalarprodukts auf V.

(b) Eine invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal für ein geeignet gewähltes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Proof. (a) Da P ein Projektor ist, ist $\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Die Frage ist: Können wir uns für ein Skalarprodukt entscheiden, so dass $\ker P = (\operatorname{im} P)^\perp$?

Wir entscheiden uns für eine Basis von $\ker P$ bzw. von $\operatorname{im} P$, was wir mit $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ bezeichnen. Sei die Matrix A^{-1} so definiert: Die Spalten sind die Basisvektoren von $\ker P$ bzw. $\operatorname{im} P$. Dann schickt A die Basisvektoren nach der Standardbasis. Wir definieren dann $B = A^T A$. Wir definieren dann ein Skalarprodukt $\langle v_1, v_2 \rangle = (v_1)^T B v_2$, was noch ein Skalarprodukt ist, da B positiv definit ist.

Es gilt dann, für $b_i \neq b_j$:

$$\begin{aligned} \langle b_i, b_j \rangle &= (b_i)^T B b_j \\ &= (b_i)^T A^T A b_j \\ &= (Ab_i)^T (Ab_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass die Standardbasis bzgl. des Standardskalarprodukts orthonomal ist. Daraus folgt, dass $\ker P = (\operatorname{im} P)^{\perp}$ bzgl. dieses Standardskalarprodukts, also nach Proposition 7.79 ist P ein Orthogonalprojektor.

(b) Falsch. Sei $n = 1$ und Endomorphismus $Ax = 2x$, dann ist

$$\langle 2x, 2x\rangle = 4\langle x, x\rangle \neq \langle x, x\rangle$$

unabhängig vom Wahl von x.

$\square$

Problem 4. Seien V, W euklidische Vektorräume und A eine lineare Abbildung $V \to W$.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

i. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\langle v_1, v_2\rangle_V = 0 \implies \langle Av_1, Av_2\rangle_W = 0$.

ii. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\|v_1\|_V = \|v_2\|_V \implies \|Av_1\|_W = \|Av_2\|_W$.

iii. Es existieren eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Isometrie $\Phi : V \to W$ mit $A = \alpha\Phi$.

(b) Zeigen Sie, dass es genau dann Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, sodass

$$C_1\langle v_1, v_2\rangle_V \leq \langle Av_1, Av_2\rangle_W \leq C_2\langle v_1, v_2\rangle_V$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt, wenn $A = \alpha\Phi$ für eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Isometrie $\Phi : V \to W$ erfüllt ist. Bestimmen Sie die bestmöglichen Parameter C_1 und C_2.

Proof. (a) (i) $\implies$ (ii) Sei $v_1, v_2 \in V$, so dass $\|v_1\| = \|v_2\|$. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle v_1 + v_2, v_1 - v_2\rangle &= \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ &= 0 && \text{Voraussetzung}\end{aligned}$$

Aus (i) folgt dann

$$\langle A(v_1 + v_2), A(v_1 - v_2)\rangle = 0$$

und

$$\|Av_1\| = \|Av_2\|.$$

(ii) $\implies$ (iii) Sei $v_1, v_2 \in V$ mit $|v_1| = |v_2|$. Es gilt $|Av_1| = |Av_2|$. Wir teilen die zweite Gleichung durch die erste Gleichung und erhalten

$$\frac{|Av_1|}{|v_1|} = \frac{|Av_2|}{|v_2|} := \alpha.$$

Da dies für alle Paare v_1, v_2 gilt, gilt es für alle Vektoren, also $|Av| = \alpha|v|$ für alle $v \in V$. Außerdem ist.

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle =& \frac{1}{2}\left(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\right) \\
\langle Au, Av\rangle =& \frac{1}{2}\left(|A(u+v)|^2 - |Au|^2 - |Av|^2\right) \\
=& \frac{1}{2}(\alpha^2|u+v|^2 - \alpha^2|u|^2 - \alpha^2|v|^2) \\
=& \frac{\alpha^2}{2}(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2) \\
=& \alpha^2 \langle u, v\rangle \\
\left\langle \frac{A}{\alpha}u, \frac{A}{\alpha}v \right\rangle =& \langle u, v\rangle
\end{aligned}$$

Dann ist A/α ein Isometrie.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

Sei $A = \alpha\Phi$. Seien $v_1, v_2 \in V$, so dass $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle Av_1, Av_2\rangle =& \langle \alpha\Phi v_1, \alpha\Phi v_2\rangle \\
=& \alpha^2 \langle \Phi v_1, \Phi v_2\rangle \\
=& \alpha^2(0) = 0
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle Av_1, Av_2\rangle =& \langle \alpha\Phi v_1, \alpha\Phi v_2\rangle \\
=& \alpha^2\langle \Phi v_1, \Phi v_2\rangle \\
=& \alpha^2\langle v_1, v_2\rangle && \Phi \text{ ist Isometrie}
\end{aligned}$$

also $C_1 = C_2 = \alpha^2$, und wir haben Gleichheit. $\square$