

# Kapitel 2

## Integrationstheorie

### 2.1 Messbare Funktionen

**Definition 2.1.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  messbare Räume,  $f : X \rightarrow Y$ . Dann heißt  $f$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar (oder kurz messbar), falls  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  für alle  $B \in \mathcal{B}$ .

Es reicht die Eigenschaft  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  nur für Mengen  $B$  zu zeigen, die die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  erzeugen.

**Lemma 2.2.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  messbare Räume,  $f : X \rightarrow Y$ , und sei  $S \subseteq \mathcal{B}$  mit  $\mathcal{A}_\sigma(S) = \mathcal{B}$ . Dann ist  $f$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar genau dann, wenn  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  für alle  $B \in S$ .

*Beweis.* “ $\Leftarrow$ ” Wir verwenden  $f_*(\mathcal{A})$ , siehe [Beispiel 1.4](#). Nach Voraussetzung gilt  $S \subseteq f_*(\mathcal{A})$ . Damit ist auch  $\mathcal{B} \subseteq f_*(\mathcal{A})$ , und  $f$  ist  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar.  $\square$

Verknüpfungen stetiger und messbarer Funktionen sind messbar.

**Lemma 2.3.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $Y$  und  $Z$  metrische Räume. Weiter seien  $g : X \rightarrow Y$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(Y)$ -messbar und  $f : Y \rightarrow Z$  stetig. Dann ist  $f \circ g$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(Z)$ -messbar.

*Beweis.* Sei  $O \subseteq Z$  offen. Dann ist  $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(Y)$  und  $(f \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathcal{A}$ .  $\square$

Im Folgenden sei  $(X, \mathcal{A})$  immer ein messbarer Raum.

[Definition 2.1](#) werden wir für die Spezialfälle  $Y = \mathbb{R}$  und  $Y = \bar{\mathbb{R}}$  verwenden, wobei die Bildräume mit der Borel- $\sigma$ -Algebra versehen werden. Sei  $\mathcal{T}$  die Menge der offenen Mengen auf  $\mathbb{R}^1$ . Dann ist die Borel- $\sigma$ -Algebra von  $\bar{\mathbb{R}}$  definiert durch

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T} \cup \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}),$$

also  $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die die offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  und die einelementigen Mengen  $\{+\infty\}$ ,  $\{-\infty\}$  enthält. Offensichtlich ist  $\mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ . Mithilfe von [Lemma 2.2](#) können wir die Anforderungen an eine messbare Funktion schon reduzieren.

**Definition 2.4.** Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn  $f$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}^1$ -messbar ist, also wenn  $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$  für alle offenen Mengen  $O \subseteq \mathbb{R}$ .

Analog heißt  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn  $f$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar ist, also wenn  $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$  für alle offenen Mengen  $O \subseteq \mathbb{C}$ .

Eine Funktion  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn  $f$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ -messbar ist, also wenn  $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$  für alle offenen Mengen  $O \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$  und  $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$ .

**Folgerung 2.5.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$   $\mathcal{L}(n)$ - $\mathcal{B}^1$ -messbar und  $\mathcal{B}^n$ - $\mathcal{B}^1$ -messbar.

**Bemerkung 2.6.** Eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  muss allerdings nicht  $\mathcal{L}(1)$ - $\mathcal{L}(1)$ -messbar sein. Das ist der Grund, warum auf dem Bildbereich  $\mathbb{R}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra verwendet wird. Eine stetige aber nicht  $\mathcal{L}(1)$ - $\mathcal{L}(1)$ -messbare Funktion kann mit der Cantor-Menge konstruiert werden, wir verweisen auf [\[Tao11, Remark 1.3.10\]](#).

Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue messbar, dann ist  $f$  auch messbar, wenn  $f$  als Funktion nach  $\bar{\mathbb{R}}$  angesehen wird.

**Definition 2.7.** Sei  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  definiere

$$\{f < \alpha\} := \{x \in X : f(x) < \alpha\},$$

analog  $\{f \leq \alpha\}$ ,  $\{f > \alpha\}$ ,  $\{f \geq \alpha\}$ .

**Satz 2.8.** Sei  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(2.9)  $f$  ist messbar,

(2.10)  $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  oder für alle  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,

(2.11)  $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  oder für alle  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,

(2.12)  $\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  oder für alle  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,

(2.13)  $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  oder für alle  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Wir beweisen nur die Äquivalenz von (2.9) und (2.10). Ist  $f$  messbar, dann ist  $\{f < \alpha\} = f^{-1}(\{-\infty\} \cup (-\infty, \alpha)) \in \mathcal{A}$ . Sei nun  $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$  für alle

## 2.1. Messbare Funktionen

$\alpha \in \mathbb{Q}$ . Wir nutzen aus, dass  $f_*(\mathcal{A})$ , also die Menge aller Teilmengen  $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$  für die  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  ist, eine  $\sigma$ -Algebra ist, siehe [Beispiel 1.4](#). Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es eine monoton wachsende Folge rationaler Zahlen  $(\alpha_k)$  mit  $\alpha_k \rightarrow \alpha$ . Es folgt

$$\{f < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f < \alpha_k\} \in \mathcal{A}.$$

Damit ist auch  $\{f \geq \alpha\} = \{f < \alpha\}^c \in \mathcal{A}$ . Dann gilt für alle  $\alpha < \beta$ , dass  $f^{-1}([\alpha, \beta)) \in \mathcal{A}$ . Damit sind die Urbilder aller halboffenen Intervalle in  $\mathcal{A}$ . Damit ist auch  $\mathcal{B}^1 \subseteq f_*(\mathcal{A})$ . Weiter gilt

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f < -n\} \in \mathcal{A}.$$

Wegen  $\{+\infty\} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^c$  ist auch  $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$ . Damit sind die Urbilder aller Erzeuger von  $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  in  $\mathcal{A}$ , und  $f$  ist messbar.  $\square$

**Beispiel 2.14.** Sei  $A \subseteq X$ . Definiere die charakteristische Funktion von  $A$  durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist  $\chi_A$  messbar genau dann, wenn  $A \in \mathcal{A}$ . Ist  $B \subseteq X$ , dann ist

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B).$$

**Beispiel 2.15.** Ist  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  messbar und  $A \in \mathcal{A}$ , dann ist auch die durch

$$(\chi_A \cdot f)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion  $\chi_A \cdot f$  messbar. Hier haben wir wieder die Konvention  $0 \cdot \pm\infty := 0$  benutzt. Für  $\alpha < 0$  ist

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A \cap \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

während für  $\alpha \geq 0$  gilt

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A^c \cup \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

und  $\chi_A \cdot f$  ist messbar.

Nun wollen wir beweisen, dass Summen, Produkte, etc, von messbaren Funktionen messbar sind. Wir starten mit zwei Hilfsresultaten.

**Lemma 2.16.** Sei  $g : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  monoton wachsend, das heißt für alle  $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$  mit  $x \leq y$  ist  $g(x) \leq g(y)$ . Sei  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  messbar. Dann ist auch  $g \circ f$  messbar.

*Beweis.* Wir benutzen [Satz 2.8](#). Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\{g < \alpha\}$  ein Intervall: Definiere  $\beta := \sup\{x \in \bar{\mathbb{R}} : g(x) < \alpha\} \in \bar{\mathbb{R}}$ . Ist  $g(\beta) = \alpha$  dann ist  $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta)$ , ansonsten ist  $g(\beta) < \alpha$  und  $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta]$ . In beiden Fällen ist  $f^{-1}(\{g < \alpha\}) = \{g \circ f < \alpha\}$  messbar.  $\square$

Damit bekommen wir folgendes Resultat.

**Satz 2.17.** Sei  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  messbar. Dann sind die folgenden Funktionen messbar:

$$(2.18) \quad c \cdot f \text{ für alle } c \in \bar{\mathbb{R}},$$

$$(2.19) \quad f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \min(f, 0),$$

$$(2.20) \quad \text{sign}(f), \text{ wobei}$$

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \text{falls } y > 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \\ -1 & \text{falls } y < 0, \end{cases}$$

$$(2.21) \quad |f|^p \text{ für alle } p > 0,$$

$$(2.22) \quad 1/f \text{ falls } f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in X.$$

*Beweis.* [\(2.18\)](#): Wir zeigen erst, dass  $-f$  messbar ist. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\{-f < \alpha\} = \{f > -\alpha\}$ , also ist  $-f$  messbar. Sei nun  $c \in \bar{\mathbb{R}}$ . Dann ist  $g(y) := |c| \cdot y$  monoton wachsend, und mit [Lemma 2.16](#) ist  $|c| \cdot f$  messbar, also auch  $-|c| \cdot f$ .

[\(2.19\), \(2.20\)](#): Die Funktionen  $y \mapsto \max(y, 0)$ ,  $y \mapsto \min(y, 0)$  und  $y \mapsto \text{sign}(y)$  sind monoton wachsend. Wegen [Lemma 2.16](#) sind die Funktionen  $\max(f, 0)$ ,  $\min(f, 0)$  und  $\text{sign}(f)$  messbar.

[\(2.21\)](#): Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\{|f| < \alpha\} = \{f < \alpha\} \cap \{-f < \alpha\}$ . Dies ist wegen [\(2.18\)](#) und [Satz 2.8](#) in  $\mathcal{A}$ , also ist auch  $|f|$  messbar. Die Abbildung  $y \mapsto (\max(0, y))^p$  ist monoton wachsend, damit ist auch  $|f|^p$  messbar.

[\(2.22\)](#): Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\{1/f < \alpha\} = (\{f < 0\} \cap \{\alpha f < 1\}) \cup (\{f > 0\} \cap \{\alpha f > 1\}) \in \mathcal{A},$$

also  $1/f$  messbar.  $\square$

Desweiteren sind Summen, Produkte, Quotienten messbarer Funktionen wieder messbar.

## 2.1. Messbare Funktionen

**Satz 2.23.** *Es seien  $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  messbar. Dann sind  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $f/g$  messbar, falls diese Funktionen auf ganz  $X$  definiert sind. Die Ausdrücke  $\infty - \infty$ ,  $\pm\infty / \pm\infty$ ,  $c/0$  für  $c \in \bar{\mathbb{R}}$  sind nicht definiert.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $f + g$  messbar ist. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Sei  $f(x) + g(x) < \alpha$ , woraus  $f(x) < +\infty$  und  $g(x) < +\infty$  folgt. Dann existiert  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q \in (g(x), \alpha - f(x))$ . Dann ist

$$\{f + g < \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < \alpha - q\} \cap \{g < q\}) \in \mathcal{A},$$

und  $f + g$  ist messbar.

Seien zuerst  $f$  und  $g$  Abbildungen nach  $\mathbb{R}$ . Dann folgt die Messbarkeit von  $f \cdot g$  aus  $f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$ . Seien nun  $f$  und  $g$  Abbildungen nach  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Wir definieren die messbare Menge

$$A := \{|f| < \infty\} \cap \{|g| < \infty\}$$

sowie die messbaren Funktionen (mit Wertebereich  $\mathbb{R}$ )

$$\tilde{f} := \chi_A f, \quad \tilde{g} := \chi_A g.$$

Dann ist  $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$  messbar. Außerdem gilt (beachte  $0 \cdot \infty = 0$ )

$$f \cdot g = \chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g} + \chi_{A^c} \cdot \text{sign}(f) \cdot \text{sign}(g) \cdot \infty.$$

Beide Summanden sind messbar:  $\chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g}$  und  $\chi_{A^c} \cdot \text{sign}(f) \cdot \text{sign}(g)$  sind Produkte  $\mathbb{R}$ -wertiger messbarer Funktionen (Beispiel 2.15), Multiplikation mit der Konstante  $+\infty$  erhält Messbarkeit.

Sei  $g$  messbar, so dass  $g(x) \neq 0$  für alle  $x$ . Dann ist  $1/g$  messbar (2.22).

Damit ist auch  $f/g = f \cdot 1/g$  messbar.  $\square$

Aufgrund der Eigenschaften von  $\sigma$ -Algebren können wir recht einfach beweisen, dass punktweise Infima, Suprema und Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen wieder messbar sind.

**Satz 2.24.** *Seien  $(f_n)$  messbare Funktionen von  $X$  nach  $\bar{\mathbb{R}}$ . Dann sind auch  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbare Funktionen. Dabei ist  $(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  punktweise definiert. Analog wird für die drei anderen Konstrukte verfahren.*

*Beweis.* Die Messbarkeit von Infimum und Supremum folgt aus Satz 2.8 und

$$\{\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \geq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Per Definition ist

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

Wegen des gerade Gezeigten ist  $x \mapsto \inf_{k \geq n} f_k(x)$  messbar für alle  $n$ , und damit auch  $x \mapsto \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Analog folgt der Beweis für  $\limsup$ .  $\square$

**Folgerung 2.25.** Seien  $(f_n)$  messbare Funktionen von  $X$  nach  $\bar{\mathbb{R}}$ . Weiter sei  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gegeben mit  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  für alle  $x$ . Dann ist auch  $f$  messbar.

Wir zeigen nun, dass sich Lebesgue-messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren lassen.

**Definition 2.26.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Dann heißt  $f$  einfache Funktion, wenn  $f(X)$  eine endliche Menge ist.

**Lemma 2.27.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  einfach, dann existieren  $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$  und paarweise disjunkte, messbare Mengen  $A_1 \dots A_n$ , so dass  $\bigcup_{j=1}^n A_j = X$  und

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}.$$

*Beweis.* Da  $f$  einfach ist, ist  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  eine endliche Menge. Dann existieren  $n \in \mathbb{N}$  und  $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$  so, dass  $f(X) = \{c_1 \dots c_n\}$ . Mit  $A_j := f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{A}$  folgt die Behauptung.  $\square$

Das heißt, eine Funktion ist einfach, wenn sie eine Linearkombination charakteristischer Funktionen ist.

**Folgerung 2.28.** Sind  $f, g$  einfache Funktionen, dann sind auch  $f + g$  und  $f \cdot g$  einfache Funktionen.

*Beweis.* Wegen [Lemma 2.27](#) gibt es reelle Zahlen  $c_i$  und  $d_j$  sowie messbare Mengen  $A_i$  und  $B_j$ , so dass

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$$

und  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$ , wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Dann ist  $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ ,  $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \chi_{A_i \cap B_j}$ , sowie analog  $\chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i \cap B_j}$  und

$$f + g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

1 Für das Produkt erhalten wir

$$2 \quad f \cdot g = \left( \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} \right) \left( \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

3 □

4 **Satz 2.29.** *Sei  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  messbar. Dann existiert eine Folge  $(f_n)$  nicht-*  
 5 *negativer, einfacher Funktionen mit  $f_n(x) \nearrow f(x)$  für alle  $x$ . Ist  $f$  beschränkt,*  
 6 *dann ist die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig beschränkt, und die Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  ist*  
 7 *gleichmäßig.*

8 *Beweis.* Wir konstruieren die  $f_n$  durch eine Unterteilung des Bildbereichs. Sei  
 9  $n \in \mathbb{N}$ . Wir unterteilen das Intervall  $[0, n)$  in  $n2^n$ -viele Intervalle der Länge  $2^{-n}$ .  
 10 Setze für  $j = 1 \dots n2^n$

$$11 \quad A_{n,j} := f^{-1} \left( \left[ \frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right) \right).$$

12 Damit definieren wir die einfache Funktion

$$13 \quad f_n(x) := n \chi_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=1}^{n2^n} \chi_{A_{n,j}} \cdot \frac{j-1}{2^n}.$$

14 Damit gilt  $f_n(x) \leq f(x)$ . Wegen

$$15 \quad A_{n,j} = A_{n+1,2j-1} \cup A_{n+1,2j}$$

16 folgt  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ . Es bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Ist  $f(x) < n$   
 17 dann ist  $x \in A_{n,j}$  für ein passendes  $j$ , und es gilt  $f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$ . Damit  
 18 bekommen wir  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  falls  $f(x) < +\infty$ . Ist  $f(x) = +\infty$ , dann ist  $f_n(x) =$   
 19  $n$  für alle  $n$ , und die Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x) = +\infty$  folgt.

20 Sei  $f$  beschränkt. Dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $f(x) < N$  für alle  $x$ . Daraus  
 21 folgt  $f_n(x) < N$  für alle  $n$  und  $x$ . Für  $n > N$  ist dann  $f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$   
 22 für alle  $x$ , woraus die gleichmäßige Konvergenz folgt. □

23 Im Folgenden werden wir die abkürzende Schreibweise

$$24 \quad f_n \nearrow f \quad \Leftrightarrow \quad f_n(x) \nearrow f(x) \quad \forall x \in X$$

25 benutzen.

26 **Folgerung 2.30.** *Sei  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  messbar. Dann existiert eine Folge  $(\phi_n)$*   
 27 *einfacher Funktionen mit  $|\phi_n(x)| \leq |f(x)|$  und  $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x$ .*

1 *Beweis.* Wir approximieren  $|f|$  durch eine Folge nicht negativer, einfacher Funk-  
 2 tionen  $(\phi_n)$ , [Satz 2.29](#). Die Funktion  $\text{sign}(f)$  ist eine einfache Funktion. Die  
 3 Funktionen  $\text{sign}(f) \cdot \phi_n$  haben dann die gewünschten Eigenschaften, wobei wir  
 4 [Folgerung 2.28](#) benutzt haben.  $\square$

## 5 2.2 Das Lebesgue-Integral

6 Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum.

7 **Definition 2.31.** Sei  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$  eine einfache Funktion mit  $f =$   
 8  $\sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$  mit paarweise disjunkten Mengen  $(A_i)$ . Dann ist

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$$

10 das Lebesgue Integral von  $f$ .

11 Da  $\mu(A_i) = +\infty$  sein kann, ist  $\int f \, d\mu$  im Allgemeinen in  $\bar{\mathbb{R}}$ . Um unbestimmte  
 12 Ausdrücke zu vermeiden, haben wir das Integral nur für nicht negative Funk-  
 13 tionen definiert.

14 **Lemma 2.32.** Das Lebesgue-Integral für einfache Funktionen ist wohldefiniert:  
 15 Gilt  $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$  mit paarweise disjunkten Mengen  $(A_i)$  und  
 16 paarweise disjunkten Mengen  $(B_j)$ , dann gilt

$$\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).$$

18 *Beweis.* Wir können annehmen, dass  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$ . Falls nicht set-  
 19 zen wir  $A_{n+1} = (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$ ,  $c_{n+1} = 0$ .

20 Ist  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  dann folgt  $c_i = d_j$ : Sei  $x \in A_i \cap B_j$ , dann ist  $f(x) = c_i = d_j$ ,  
 21 da die Mengen  $(A_i)$  und die Mengen  $(B_j)$  paarweise disjunkt sind. Weiter ist  
 22  $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$  und  $B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$ . Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
 &= \sum_{i,j: A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
 &= \sum_{i,j: A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).
 \end{aligned}$$



1 □

2 Dieses Integral für einfache Funktionen hat folgende Eigenschaften.

3 **Satz 2.33.** Seien  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty)$  einfache Funktionen. Dann gelten folgende  
4 Aussagen:

5 (1)  $\int (cf) \, d\mu = c \int f \, d\mu$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  mit  $c \geq 0$ ,

6 (2)  $\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ ,

7 (3) ist  $f \leq g$ , dann ist  $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ ,

8 (4)  $\int \chi_A \, d\mu = \mu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ .

9 *Beweis.* (1) folgt sofort aus der Definition. (2) Wegen [Lemma 2.27](#) gibt es reelle  
10 Zahlen  $c_i$  und  $d_j$  sowie messbare Mengen  $A_i$  und  $B_j$ , so dass

$$11 \quad f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$$

12 und  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$ , wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Wie im  
13 Beweis von [Folgerung 2.28](#) bekommen wir

$$14 \quad f + g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

15 Damit ist

$$\begin{aligned} \int f + g \, d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ 16 \quad &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j) = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

17 (3) Sei  $x \in A_i \cap B_j$ . Dann gilt  $f(x) = c_i \leq g(x) = d_j$ . Mit Argumenten wie im  
18 Beweis von [Lemma 2.32](#) bekommen wir

$$\begin{aligned} 19 \quad \int f \, d\mu &= \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) = \sum_{i,j: A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\ 20 \quad &\leq \sum_{i,j: A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j) = \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

21 (4)  $\chi_A$  ist eine einfache Funktion mit  $\int \chi_A \, d\mu = \mu(A)$ . □

Wir können messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren. Dies werden wir benutzen, um das Lebesgue-Integral für messbare Funktionen zu definieren. Wir beginnen mit dem Integral nicht-negativer Funktionen, damit wir die Monotonie der Konvergenz aus [Satz 2.29](#) benutzen können. In den Beweis des nächsten Satzes geht entscheidend die Stetigkeit von Maßen auf monoton wachsenden Folgen messbarer Mengen [\(1.29\)](#) ein.

**Lemma 2.34.** *Sei  $(f_n)$  eine Folge nichtnegativer, einfacher Funktionen mit  $f_n \nearrow f$ ,  $f$  einfache Funktion. Dann gilt*

$$\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu.$$

*Beweis.* Wir betrachten die beiden Fälle  $\int f \, d\mu = +\infty$  und  $\int f \, d\mu < +\infty$ .  
 (1) Angenommen  $\int f \, d\mu = +\infty$ . Da  $f$  eine einfache Funktion ist, existiert ein  $c > 0$  und ein  $A \in \mathcal{A}$ , so dass  $\mu(A) = +\infty$  und  $f \geq c$  auf  $A$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  setze  $A_n := \{x : f_n(x) \geq c/2\}$ . Da  $(f_n(x))$  monoton wachsend ist, folgt  $A_n \subseteq A_{n+1}$ . Aus der punktweisen Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  folgt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A$ . Dann folgt  $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A) = +\infty$  aus [\(1.29\)](#). Aus der Ungleichung  $\chi_{A_n} \frac{c}{2} \leq f_n$  folgt  $\int f_n \, d\mu \geq \mu(A_n) \frac{c}{2} \rightarrow +\infty$  ([Satz 2.33](#)).

(2) Sei nun  $\int f \, d\mu < \infty$ . Dann ist  $(\int f_n \, d\mu)$  eine beschränkte, monoton wachsende Folge, also konvergent. Weiter ist  $B := \{f > 0\} \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(B) < \infty$ . Da  $f$  eine einfache Funktion ist, ist  $f$  beschränkt, und es existiert  $M > 0$  mit  $f(x) \leq M$  für alle  $x$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  setze  $B_n := B \cap \{f_n \geq f - \varepsilon\}$ . Dann folgt  $B_n \subseteq B_{n+1}$  und  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$ , und wir bekommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(B) < \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B \setminus B_n) = 0$  aus [\(1.29\)](#) und [\(1.30\)](#). Wir schätzen nun das Integral der einfachen und nicht-negativen Funktion  $f - f_n$  von oben ab. Auf  $B_n$  ist  $f - f_n \leq \varepsilon$ , auf  $B \setminus B_n$  ist  $f - f_n \leq f \leq M$ , während auf  $B^c$  gilt  $f = f_n = 0$ . Dann ist  $f - f_n \leq \chi_{B_n} \varepsilon + \chi_{B \setminus B_n} M$  und es folgt

$$0 \leq \int f - f_n \, d\mu \leq \int \chi_{B_n} \varepsilon + \chi_{B \setminus B_n} M \, d\mu = \mu(B_n) \varepsilon + \mu(B \setminus B_n) M \rightarrow \mu(B) \varepsilon.$$

Da  $\mu(B) < \infty$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int f \, d\mu - \int f - f_n \, d\mu \right) = \int f \, d\mu.$$

□

Nun zeigen wir, dass der Grenzwert von  $(\int f_n \, d\mu)$  für  $f_n \nearrow f$  nur vom Grenzwert  $f$  abhängt, und nicht von der konkreten Wahl der  $(f_n)$ . Dies ist ein wichtiger Schritt, um das Lebesgue-Integral definieren zu können.

**Lemma 2.35.** Seien  $(f_n), (g_n)$  Folgen nichtnegativer, einfacher Funktionen mit  $f_n \nearrow f, g_n \nearrow f, f$  messbar. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest. Für  $m \in \mathbb{N}$  definiere

$$h_m := \min(f_n, g_m).$$

Dies ist eine einfache Funktion. Aus der Voraussetzung folgt  $h_m \nearrow f_n$  für  $m \rightarrow \infty$ . Aus [Lemma 2.34](#) bekommen wir dann

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m \, d\mu = \int f_n \, d\mu.$$

Da  $h_m \leq g_m$  folgt mit der Monotonie des Integrals  $\int h_m \, d\mu \leq \int g_m \, d\mu$ . Grenzübergang auf beiden Seiten der Ungleichung ergibt

$$\int f_n \, d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m \, d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int g_m \, d\mu.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  bekommen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int g_m \, d\mu.$$

Vertauschen wir in dieser Argumentation die Rollen von  $f_n$  und  $g_m$  erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int f_m \, d\mu.$$

Daraus folgt, dass die Grenzwerte existieren und gleich sind.  $\square$

**Definition 2.36.** Sei  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  messbar. Sei  $(f_n)$  eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen mit  $f_n \nearrow f$ . Dann ist das Lebesgue-Integral von  $f$  definiert als

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Wegen [Lemma 2.35](#) ist das Lebesgue-Integral von  $f$  wohldefiniert: der Wert  $\int f \, d\mu$  hängt nicht von der konkreten Wahl der approximierenden, einfachen Funktionen  $(f_n)$  ab.

**Satz 2.37.** Seien  $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$  messbare Funktionen. Dann gilt

$$(1) \int (cf) \, d\mu = c \int f \, d\mu \text{ für alle } c \geq 0$$

$$(2) \int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu,$$

(3) ist  $f \leq g$ , dann ist  $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ ,

(4) sind  $(f_m)$  messbare Funktionen von  $X$  nach  $[0, +\infty]$  mit  $f_m \nearrow f$ , dann gilt  $\int f_m \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ .

*Beweis.* (1)–(3) Seien  $(f_n)$  und  $(g_n)$  Folgen einfacher, nichtnegativer Funktionen mit  $f_n \nearrow f$  und  $g_n \nearrow g$ . (1) und (2) folgen nun direkt aus Satz 2.33. Für (3) benutzen wir  $\min(f_n, g_n) \nearrow f$  und  $\int \min(f_n, g_n) \, d\mu \leq \int g_n \, d\mu$ .

(4) Für jedes  $m$  existiert eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen  $(f_{m,n})$  mit  $f_{m,n} \nearrow f_m$  für  $n \rightarrow \infty$ . Definiere die einfache Funktion  $h_m$  durch

$$h_m(x) := \max_{i,j \leq m} f_{i,j}(x).$$

Dann ist  $(h_m(x))$  monoton wachsend. Für  $i, j \leq m$  ist  $f_{i,j} \leq f_i \leq f_m$ . Dann ist  $h_m \leq f_m \leq f$ , und es folgt  $\int h_m \, d\mu \leq \int f_m \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ . Wir zeigen  $h_m \nearrow f$ .

Seien  $x \in X$  und  $r, s \in \mathbb{R}$  mit  $r < s < f(x)$ . Dann existiert  $m$ , so dass  $s \leq f_m(x)$ . Weiter existiert ein  $n$ , so dass  $r \leq f_{m,n}(x)$ . Daraus folgt  $r \leq h_{\max(m,n)}(x)$  und  $r \leq \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x)$ . Da  $r < f(x)$  beliebig war, folgt  $h_m(x) \rightarrow f(x)$ . Damit folgt  $h_m \nearrow f$  und  $\int h_m \, d\mu \rightarrow \int f \, d\mu$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

## 2.3 Integrierbarkeit

Wir wollen nun messbare Funktionen mit Werten in  $\bar{\mathbb{R}}$  integrieren. Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$$f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \min(f, 0).$$

Dann ist  $f = f^+ + f^-$ .

**Definition 2.38.** Sei  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  messbar. Es sei eines der Integrale  $\int f^+ \, d\mu$ ,  $\int (-f^-) \, d\mu$  endlich. Dann ist das Lebesgue-Integral von  $f$  definiert als

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int (-f^-) \, d\mu.$$

Sind beide Integrale  $\int f^+ \, d\mu$ ,  $\int (-f^-) \, d\mu$  endlich, dann heißt  $f$  integrierbar.

Alternative Schreibweisen für dieses Integral sind

$$\int f \, d\mu = \int_X f \, d\mu = \int f(x) \, d\mu(x) = \int f(x) \mu(dx).$$

**Satz 2.39.** Sei  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  messbar. Dann ist  $f$  integrierbar genau dann, wenn  $\int |f| \, d\mu < +\infty$ .

### 2.3. Integrierbarkeit

*Beweis.* Sei  $f$  integrierbar. Wegen  $|f| = f^+ + (-f^-)$  ist  $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int (-f^-) d\mu < +\infty$ , wobei wir [Satz 2.37](#) benutzt haben. Sei nun  $\int |f| d\mu < +\infty$ . Da  $f^+ \leq |f|$  und  $0 \leq -f^- \leq |f|$  folgt die Behauptung mit der Monotonie des Integrals aus [Satz 2.37](#).  $\square$

**Lemma 2.40.** Seien  $f_1, f_2 : X \rightarrow [0, +\infty]$  messbar, so dass  $f := f_1 - f_2$  definiert ist und  $\int f_i d\mu < \infty$  für  $i = 1, 2$ . Dann ist  $f$  integrierbar, und es gilt

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

*Beweis.* Es gilt  $|f| \leq f_1 + f_2$ , und mit [Satz 2.37](#) folgt  $\int |f| d\mu < +\infty$ . Wegen [Satz 2.39](#) ist  $f$  integrierbar. Aufgrund der Konstruktion ist  $f_1 \geq f^+$ . Definiere die nichtnegative Funktion  $g$  durch

$$g := f_1 - f^+ = f - f^+ + f_2 = f^- + f_2.$$

Da  $|g| \leq |f_1|$  ist  $g$  integrierbar. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu &= \int (g + f^+) d\mu - \int (g - f^-) d\mu \\ &= \int g d\mu + \int f^+ d\mu - \left( \int g d\mu + \int (-f^-) d\mu \right) \\ &= \int f^+ d\mu - \int (-f^-) d\mu = \int f d\mu. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir [Satz 2.37](#) benutzt.  $\square$

Die Schwierigkeit des Beweises war, dass wir die Additivität des Integrals bisher nur für nichtnegative Funktionen haben.

**Satz 2.41.** Es seien  $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  integrierbare Funktionen. Dann gilt:

(1)  $\int (cf) d\mu = c \int f d\mu$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

(2) Ist  $f + g$  definiert, dann ist  $f + g$  integrierbar, und es gilt  $\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ .

(3) Ist  $f \leq g$ , dann ist  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .

(4)  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$ .

*Beweis.* Wegen  $|cf| \leq |c| \cdot |f|$  und  $|f + g| \leq |f| + |g|$  folgt die Integrierbarkeit von  $cf$  und  $f + g$  aus [Satz 2.39](#) und [Satz 2.37](#). Sei  $c \geq 0$ . Dann ist  $(cf)^+ = cf^+$  und  $(cf)^- = cf^-$ , und es folgt (1). Analog wird der Fall  $c < 0$  bewiesen. Wegen

1 **Lemma 2.40** bekommen wir aus  $f + g = (f^+ + g^+) - (-f^- - g^-)$

$$\begin{aligned} \int f + g \, d\mu &= \int f^+ + g^+ \, d\mu - \int (-f^- - g^-) \, d\mu \\ &= \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int (-f^-) \, d\mu - \int (-g^-) \, d\mu \\ &= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu, \end{aligned}$$

3 wobei wir wieder die Additivität aus **Satz 2.37** benutzt haben. Damit ist (2)  
4 bewiesen. Zu (3): ist  $f \leq g$  dann ist  $f^+ \leq g^+$  und  $f^- \leq g^-$ , woraus mit der  
5 Monotonie aus **Satz 2.37**

$$6 \quad \int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int (-f^-) \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu - \int (-g^-) \leq \int g \, d\mu$$

7 folgt. (4) bekommen wir aus  $-|f| \leq f \leq |f|$  und (3), (1).  $\square$

8 **Definition 2.42.** Es sei  $\mathcal{L}^1(\mu)$  die Menge aller integrierbaren Funktionen von  
9  $X$  nach  $\mathbb{R}$ .

10 Die Menge  $\mathcal{L}^1(\mu)$  versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplika-  
11 tion ist ein Vektorraum wegen **Satz 2.41**.

12 **Lemma 2.43.** Die Abbildung

$$13 \quad f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} := \int |f| \, d\mu$$

14 ist eine Halbnorm auf  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , d.h., es gilt:

$$15 \quad (1) \quad \|f + g\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \text{ für alle } f, g \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

$$16 \quad (2) \quad \|cf\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq |c| \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \text{ für alle } f \in \mathcal{L}^1(\mu), c \in \mathbb{R}.$$

17 Im Allgemeinen folgt aus  $\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = 0$  nicht, dass  $f = 0$ .

18 **Beispiel 2.44.** Dazu betrachte den Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ . Setze  $f := \chi_{\mathbb{Q}}$ .  
19 Dann ist  $\int f \, d\mu = \lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$  aber  $f \neq 0$ .

20 **Satz 2.45.** Es seien  $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  messbare Funktionen. Dann gelten folgende  
21 Aussagen:

$$22 \quad (1) \quad \int |f| \, d\mu = 0 \Leftrightarrow \{f \neq 0\} \text{ ist eine } \mu\text{-Nullmenge.}$$

$$23 \quad (2) \quad \text{Ist } f \text{ integrierbar, dann ist } \{f = \pm\infty\} \text{ eine } \mu\text{-Nullmenge.}$$

$$24 \quad (3) \quad \text{Sei } \{f \neq g\} \text{ eine } \mu\text{-Nullmenge. Dann ist } f \text{ integrierbar genau dann, wenn} \\ 25 \quad g \text{ integrierbar ist. In diesem Falle gilt } \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

### 2.3. Integrierbarkeit

*Beweis.* (1) Setze  $A := \{f \neq 0\}$ . Sei  $\int |f| d\mu = 0$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  definiere  $A_k := \{\frac{1}{k} \leq |f|\}$ . Dann ist  $\frac{1}{k} \chi_{A_k} \leq \chi_{A_k} |f| \leq |f|$ , woraus mit Satz 2.37  $\frac{1}{k} \mu(A_k) \leq \int |f| d\mu = 0$  folgt. Damit ist  $\mu(A_k) = 0$  für alle  $k$  und  $\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$ . Sei  $\mu(A) = 0$ . Wegen  $|f| \leq \infty \cdot \chi_A$  folgt  $\int |f| d\mu \leq \infty \cdot \mu(A) = 0$ .

(2) Setze  $A := \{|f| = +\infty\}$ . Dann ist  $\infty \cdot \mu(A) \leq \int |f| d\mu < \infty$  (Satz 2.37), also  $\mu(A) = 0$ .

(3) Sei  $N := \{f \neq g\}$ . Wegen (1) haben wir

$$\int |f| d\mu = \int (\chi_N + \chi_{N^c}) |f| d\mu = \int \chi_{N^c} |f| d\mu = \int \chi_{N^c} |g| d\mu = \int |g| d\mu.$$

Damit ist  $f$  integrierbar genau dann, wenn  $g$  integrierbar ist. Sind  $f$  und  $g$  integrierbar, bekommen wir mit einer analogen Begründung, dass  $\int f^+ d\mu = \int g^+ d\mu$  und  $\int -f^- d\mu = \int -g^- d\mu$ .  $\square$

**Definition 2.46.** Sei  $P : X \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$  eine Abbildung (ein einstelliges Prädikat auf  $X$  im Sinne der Logik). Dann gilt  $P$   $\mu$ -fast überall (oder  $P(x)$  gilt für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ ) genau dann, wenn es eine Menge  $N \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(N) = 0$  gibt, so dass  $P(x)$  für alle  $x \in N^c$  gilt.

Damit lassen sich die Aussagen von Satz 2.45 wie folgt ausdrücken:

(1)  $\int |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$   $\mu$ -fast überall.

(2) Ist  $f$  integrierbar, dann ist  $f \notin \{\pm\infty\}$   $\mu$ -fast überall.

(3) Ist  $f = g$   $\mu$ -fast überall, dann ist  $\int f d\mu = \int g d\mu$ .

**Lemma 2.47.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum. Seien  $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gegeben, so dass  $f$  messbar und  $f = g$   $\mu$ -fast überall ist. Dann ist  $g$  messbar.

*Beweis.* Sei  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge, so dass  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in N^c$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$g^{-1}((-\infty, \alpha]) = (N^c \cap f^{-1}((-\infty, \alpha])) \cup (N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])).$$

Da  $N$  eine Nullmenge ist, und der Maßraum vollständig ist, ist  $N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])$  als Teilmenge einer Nullmenge messbar. Es folgt, dass  $g$  messbar ist.  $\square$

**Definition 2.48.** Es sei  $A \in \mathcal{A}$ ,  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , so dass  $\chi_A f$  messbar ist. Dann ist das Integral von  $f$  über  $A$  definiert als

$$\int_A f d\mu := \int \chi_A f d\mu.$$

**Aufgabe 2.49.** Es sei  $f \in X \rightarrow [0, +\infty]$  messbar. Dann ist die Abbildung  $\nu$  definiert durch

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu$$

ein Maß auf  $\mathcal{A}$ . Die Funktion  $f$  heißt Dichtefunktion von  $\nu$ .

**Definition 2.50.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  messbar. Dann heißt  $f$  integrierbar, falls  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  integrierbar sind, und wir definieren

$$\int f \, d\mu := \int \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

Bei der Integration komplexwertiger Funktionen entstehen keine neuen Effekte: Die Abbildung  $f \mapsto \int f \, d\mu$  ist  $\mathbb{C}$ -linear für komplexwertige Funktionen. Eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist integrierbar genau dann, wenn  $|f|$  integrierbar ist. Die Menge aller solcher integrierbarer Funktionen ist wieder ein Vektorraum.

## 2.4 Konvergenzsätze

Es sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise gegen  $f$  konvergiert. Wir wollen nun untersuchen, wann gilt

$$\int f_n \, d\mu \rightarrow \int f \, d\mu.$$

Dies ist eine nicht-triviale Frage, denn das Integral haben wir über einen Grenzwert definiert.

**Beispiel 2.51.** Im Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$  definieren wir die folgenden Funktionenfolgen

- $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x),$
- $g_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x),$
- $h_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x).$

Dann konvergieren  $(f_n)$ ,  $(g_n)$  und  $(h_n)$  punktweise gegen Null, aber die Integrale nicht:  $\int f_n \, d\lambda_1 = \int g_n \, d\lambda_1 = \int h_n \, d\lambda_1 = 1$ . Hier kann man Grenzwertbildung und Integral nicht vertauschen.

**Satz 2.52** (Monotone Konvergenz). Seien  $(f_n)$  integrierbare Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{R}$  mit  $f_n \nearrow f$  punktweise. Dann gilt  $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ . Existiert ein  $M > 0$ , so dass  $\int f_n \, d\mu < M$  für alle  $n$  gilt, dann ist  $f$  integrierbar.



## 2.4. Konvergenzsätze

**Beweis.** Definiere  $g_n := f_n - f_1 \geq 0$ ,  $g := f - f_1 \geq 0$ . Dann gilt  $g_n \nearrow g$ ,  
 $\int g_n d\mu \nearrow \int g d\mu$  (Satz 2.37). Da  $f_1$  integrierbar ist, folgt

$$\int f_n d\mu \nearrow \int f - f_1 d\mu + \int f_1 d\mu.$$

Ist  $\int f - f_1 d\mu < \infty$ , dann ist  $f - f_1$  integrierbar, und es folgt  $\int f_n d\mu \nearrow \int f d\mu$  aus der Linearität des Integrals (Satz 2.41). Wegen  $0 \geq f^- \geq f_1$  ist  $f^-$  integrierbar, und aus  $+\infty = \int f - f_1 d\mu = \int f^+ + f^- - f_1 d\mu$  folgt

$$+\infty = \int f^+ d\mu = \int f d\mu = \int f - f_1 d\mu + \int f_1 d\mu.$$

Weiter folgt

$$0 \leq \int g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq M - \int f_1 d\mu,$$

also ist  $g$  integrierbar und damit auch  $f$ .  $\square$

**Beispiel 2.53.** Die Funktionenfolgen  $f_n = -\chi_{[n, +\infty)}$  und  $g_n = \chi_{[0, n]}$  im Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$  zeigen, dass monotone Konvergenz alleine nicht reicht für die Aussagen des Satzes.

**Satz 2.54** (Lemma von Fatou). Es sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ . Dann gilt

$$\int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

**Beweis.** Definiere  $g_n(x) := \inf_{k \geq n} f_k(x)$ . Dann sind die Funktionen  $g_n$  nichtnegativ und messbar. Weiter gilt  $g_n \leq f_n$  und  $g_n \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Also bekommen wir aus Satz 2.37

$$\int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

$\square$

**Beispiel 2.55.** Gleichheit gilt in Satz 2.54 im Allgemeinen nicht, siehe  $f_n(x) = n\chi_{(0, 1/n)}$  aus Beispiel 2.51. Auf die Nichtnegativität kann nicht verzichtet werden: für  $f_n(x) = -n\chi_{(0, 1/n)}$  gilt die Behauptung nicht.

**Satz 2.56** (Dominierte Konvergenz). Es sei  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Gilt  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  und  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $n$  und  $\mu$ -fast alle  $x$ , dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$ .

**Beweis.** (1) Wir nehmen zuerst an, dass  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  und  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $n$  und alle  $x$  gilt. Daraus folgt  $|f(x)| \leq g(x)$  für alle  $x$ . Damit sind die

1 Funktionen  $f$  und  $f_n$  integrierbar. Wir setzen  $g_n := 2g - |f_n - f| \geq 0$ . Nach  
 2 [Satz 2.54](#) ist

$$\begin{aligned} 2 \int g \, d\mu &= \int (\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x)) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int 2g - |f_n - f| \, d\mu \\ &= 2 \int g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, d\mu \leq 2 \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

4 Damit ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ , woraus mit [Satz 2.41](#) die Behauptung  
 5 folgt.

6 (2) Sei nun  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  und  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $n$  und  $\mu$ -fast alle  $x$ .  
 7 Dann existiert eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$ , so dass  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  und  $|f_n(x)| \leq g(x)$   
 8 für alle  $n$  und alle  $x \in N^c$ . Die Funktionen  $\chi_{N^c} f_n$ ,  $\chi_{N^c} f$  erfüllen dann die  
 9 Voraussetzungen von Beweisteil (1). Es folgt also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_{N^c} |f_n - f| \, d\mu = 0$ .  
 10 Da  $\chi_{N^c} |f_n - f|$  und  $|f_n - f|$  sich nur auf der Nullmenge  $N$  unterscheiden, gilt  
 11  $\int |f_n - f| \, d\mu = \int \chi_{N^c} |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0$ .  $\square$

12 **Beispiel 2.57.** Auf die Existenz der integrierbaren gemeinsamen oberen Schran-  
 13 ke kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden, wie [Beispiel 2.51](#) zeigt.

14 **Satz 2.58** (Vollständigkeit von  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ). Es sei  $(f_n)$  eine Folge integrierbarer  
 15 Funktionen, die eine Cauchyfolge bezüglich  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$  ist, d.h. für alle  $\varepsilon > 0$   
 16 existiert ein  $N$ , so dass  $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$  für alle  $n, m > N$ .

17 Dann existiert ein  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  mit  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \rightarrow 0$ . Weiter existiert ein  
 18  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  und eine Teilfolge, so dass  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  und  $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$  für  
 19 alle  $k$  und  $\mu$ -fast alle  $x$ .

20 *Beweis.* (1) Wir nehmen zuerst an, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$ . Definiere  
 21 die messbaren Funktionen

$$g_m := |f_1| + \sum_{n=1}^m |f_{n+1} - f_n|, \quad g := |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|.$$

23 Dann gilt  $g_m \nearrow g$ . Weiter ist  $\int g_m \, d\mu = \|f_1\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \sum_{n=1}^m \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ ,  
 24 woraus mit der monotonen Konvergenz  $\int g \, d\mu < \infty$  folgt. Dann ist ([Satz 2.45](#))  
 25  $g < +\infty$  fast überall, und es folgt  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| < +\infty$  fast überall. Damit ist  
 26  $(f_n(x))$  für fast alle  $x$  eine Cauchyfolge, also konvergent. Wir definieren  $f(x) =$   
 27  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  falls der Grenzwert existiert, sonst setzen wir  $f(x) := 0$ . Da  
 28  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $x$ , folgt  $|f| \leq g$  fast überall. Mit dominierter Konvergenz  
 29 [Satz 2.56](#) bekommen wir  $\int |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0$ .

30 (2) Sei  $m_k$  die kleinste Zahl in  $\mathbb{N}$ , für die  $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < 2^{-k}$  für alle  
 31  $n, m \geq m_k$ . Dann ist  $(m_k)$  monoton wachsend, und  $(n_k)$  definiert durch  $n_k :=$

## 2.5. Vergleich mit Riemann-Integral

$m_k + k$  ist streng monoton wachsend. Definiere  $\tilde{f}_k := f_{n_k}$ . Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$ . Wegen Teil (1) existiert  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , so dass  $\|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \rightarrow 0$  gilt und die Teilfolge  $(f_{n_k}) = (\tilde{f}_k)$  alle weitere Behauptungen erfüllt.

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $k$  so, dass  $\|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon/2$  und  $2^{-k} < \varepsilon/2$ . Sei  $n \geq n_k$ . Dann ist  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f_n - \tilde{f}_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$ .  $\square$

**Beispiel 2.59.** Man bekommt im Allgemeinen die punktweise Konvergenz nur für eine Teilfolge. Wir betrachten den Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ . Definiere  $f_n := 2^{j/2} \chi_{[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]}$  für  $n = 2^j + k$ ,  $0 \leq k < 2^j$ . Dann ist  $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_1)} = 2^{-j/2} \rightarrow 0$ . Aber die Folge  $f_n$  ist nicht punktweise konvergent, und es existiert auch keine integrierbare gemeinsame obere Schranke.

## 2.5 Vergleich mit Riemann-Integral

Sei  $I = [a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

Eine Abbildung  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfunktion, falls  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  und  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$  existieren mit  $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b$  und  $\phi|_{(a_i, a_{i+1})} = \varphi_i$ .

Das Riemann-Integral von  $\phi$  ist definiert durch

$$R\text{-}\int_a^b \phi(x) dx := \sum_{i=1}^n \varphi_i (a_{i+1} - a_i).$$

Der Vektorraum aller solcher Treppenfunktionen sei  $\mathcal{T}(I)$ .

**Definition 2.60.** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Riemann integrierbar, wenn gilt

$$s := \sup \left\{ R\text{-}\int_a^b \phi(x) dx : \phi \in \mathcal{T}(I), \phi \leq f \right\} \\ = \inf \left\{ R\text{-}\int_a^b \phi(x) dx : \phi \in \mathcal{T}(I), f \leq \phi \right\}.$$

In diesem Fall setzen wir

$$R\text{-}\int_a^b f(x) dx := s.$$

Wir arbeiten hier im Maßraum  $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ .

**Satz 2.61.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrierbar. Dann ist  $f$   $\lambda_1$ -integrierbar und es gilt

$$R\text{-}\int_a^b f(x) dx = \int_I f d\lambda_1.$$

*Beweis.* Sei  $\phi$  eine Treppenfunktion. Dann ist  $\phi$   $\mathcal{B}^1 - \mathcal{B}^1$ -messbar, und damit auch  $\mathcal{L}(1) - \mathcal{B}^1$ -messbar. Außerdem ist  $R\text{-}\int_a^b \phi dx = \int_I \phi d\lambda_1$ .

Aus der Riemann-Integrierbarkeit von  $f$  bekommen wir für jedes  $n$  die Existenz von Treppenfunktionen  $\phi_n$  und  $\psi_n$  mit  $\phi_n \leq f \leq \psi_n$  und  $R\text{-}\int_a^b (\psi_n - \phi_n) dx \leq \frac{1}{n}$ . Daraus folgt  $\|\psi_n - \phi_n\|_{L^1(\lambda_1)} = R\text{-}\int_a^b (\psi_n - \phi_n) dx \rightarrow 0$ .

Wegen [Satz 2.58](#) gibt es eine Teilfolge, so dass  $\psi_{n_k} - \phi_{n_k} \rightarrow 0$  fast überall. Da  $\phi_n \leq f \leq \psi_n$  folgt daraus  $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{n_k}(x) = f(x)$  für fast alle  $x \in [a, b]$ . Da der Maßraum  $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$  vollständig ist, folgt daraus die Messbarkeit von  $f$ . Aus der Integrierbarkeit von  $\phi_n$  und  $\psi_n$  folgt die Integrierbarkeit von  $f$ . Grenzübergang in

$$R\text{-}\int_a^b \phi_n dx = \int_I \phi_n d\lambda_1 \leq \int_I f d\lambda_1 \leq \int_I \psi_n d\lambda_1 = R\text{-}\int_a^b \psi_n dx$$

liefert die Gleichheit von Riemann- und Lebesgue-Integral.  $\square$

**Bemerkung 2.62.** Ein ähnliches Resultat gilt auch für den Borel-Lebesgue-Maßraum  $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, \lambda_1)$ : Nach Änderung auf einer  $\lambda_1$ -Nullmenge ist die Riemann-integrierbare Funktion  $f$  dann auch messbar und integrierbar, und die Integrale stimmen überein.

**Beispiel 2.63.** Die Funktion  $\chi_{\mathbb{Q}}$  ist  $\lambda_1$ -integrierbar aber nicht Riemann integrierbar.

**Beispiel 2.64.** Sei  $s > 1$  und  $f(x) = x^{-s}$  für  $x > 1$ . Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s} (t^{1-s} - 1) = \frac{1}{s-1}.$$

Ähnlich argumentieren wir das Lebesgue-Integral

$$\int_{(1,\infty)} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(1,\infty)} \chi_{(1,n)} f(x) d\lambda^1 = \frac{1}{s-1}.$$

Hier haben wir die monotone Konvergenz benutzt.

**Beispiel 2.65.** Das uneigentliche Riemann-Integral  $R\text{-}\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  existiert und ist endlich, während die Funktion  $f$  definiert durch  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  nicht auf dem Intervall  $[1, +\infty)$   $\lambda_1$ -integrierbar ist, und das Integral  $\int_{[1,\infty)} f d\lambda_1$  nicht definiert.

Da Lebesgue- und Riemann-Integral gleich sind, kann man auch für das Lebesgue-Integral die Riemann-Integral-Schreibweise verwenden, also

$$\int_{(a,b)} f(x) d\lambda^1(x) = \int_a^b f(x) dx$$

für  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar schreiben.

## 2.6 Produktmaße und Satz von Fubini

Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  Maßräume. Auf  $X \times Y$  können wir ein äußere Maß definieren:

$$\lambda^*(M) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \nu(B_n) : A_n \in \mathcal{A}, B_n \in \mathcal{B}, \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \supseteq M \right\}. \quad (2.66)$$

Wegen [Satz 1.37](#) ist dies tatsächlich ein äußeres Maß.

**Definition 2.67.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$   $\sigma$ -endliche Maßräume. Wir definieren das durch  $\mu$  und  $\nu$  auf  $X \times Y$  erzeugte Produktmaß  $\mu \otimes \nu$  als das durch [Satz 1.60](#) aus dem obigen äußeren Maß (2.66) erzeugte Maß. Die Menge der  $\lambda^*$ -messbaren Mengen nennen wir  $\Lambda$ .

Dann ist  $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$  ein vollständiger Maßraum. Wir zeigen, dass  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ .

**Lemma 2.68.** Es gilt  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ . Weiter ist

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$$

für alle  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ .

*Beweis.* [[Fre03](#), Proposition 251E] Wir zeigen, dass  $A \times Y$  und  $X \times B$  in  $\Lambda$  sind. Wegen  $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$  und der Definition von  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  ist dies ausreichend, vergleiche [Lemma 1.18](#).

Sei  $A \in \mathcal{A}$  und  $D \subseteq X \times Y$  mit  $\lambda^*(D) < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existieren Folgen  $(A_j)$  und  $(B_j)$  in  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  mit  $\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \times B_j) \supseteq D$  und  $\lambda^*(D) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \nu(B_j)$ . Dann ist

$$D \cap (A \times Y) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} ((A_j \cap A) \times B_j), \quad D \cap (A \times Y)^c \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} ((A_j \cap A^c) \times B_j).$$

Aus der Definition von  $\lambda^*$  folgt

$$\begin{aligned} \lambda^*(D \cap (A \times Y)) + \lambda^*(D \cap (A \times Y)^c) &\leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A) \nu(B_j) \right) + \left( \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A^c) \nu(B_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \nu(B_j) \leq \lambda^*(D) + \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist  $A \times Y$  in  $\Lambda$ . Analog folgt  $X \times B \in \Lambda$  für  $B \in \mathcal{B}$ .

Seien nun  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$ . Dann gilt  $\lambda^*(A \times B) \leq \mu(A)\nu(B)$ . Es bleibt, die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Seien also Folgen  $(A_j)$  und  $(B_j)$  mit  $\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \times B_j) \supseteq A \times B$  gegeben. Definiere  $S := \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) \in [0, +\infty]$ . Wir zeigen  $\mu(A)\nu(B) \leq S$ .

Dazu reicht es, den Fall  $S < +\infty$  zu betrachten. Setze

$$I := \{j : \mu(A_j) = 0\}, \quad J := \{j : \nu(B_j) = 0\}, \quad K := \mathbb{N} \setminus (I \cup J).$$

Definiere

$$A' := A \setminus \left( \bigcup_{j \in I} A_j \right), \quad B' := B \setminus \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right).$$

Dann ist  $\mu(A) = \mu(A')$  und  $\nu(B) = \nu(B')$ . Weiter ist  $A' \subseteq \bigcup_{j \notin I} A_j$  und  $B' \subseteq \bigcup_{j \notin J} B_j$ . Außerdem gilt

$$A' \times B' \subseteq \bigcup_{j \in K} A_j \times B_j,$$

was man wie folgt sieht: Sei  $(a, b) \in A' \times B'$ ,  $I_a = \{j : a \in A_j\}$ ,  $J_b = \{j : b \in B_j\}$ . Dann ist  $I_a \subseteq I^c$ ,  $J_b \subseteq J^c$ , damit  $I_a \cap J_b \subseteq K$ , und wegen  $(a, b) \in A'$  ist  $I' \cap J' \neq \emptyset$ .

Weiter ist  $S = \sum_{j \in K} \mu(A_j)\nu(B_j)$  und  $\mu(A_j), \nu(B_j) \in \mathbb{R}$  für alle  $j \in K$ . Definiere  $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f_j := \chi_{A_j} \nu(B_j)$  falls  $j \in K$ , sonst  $f_j := 0$ . Dann ist  $f_j$  eine einfache Funktion. Die Folge  $\sum_{j=1}^n f_j$  ist monoton wachsend, und wir setzen  $g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ . Da  $\int_X \sum_{j=1}^n f_j d\mu \leq S$  für alle  $n$  folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz [Satz 2.37](#)

$$\int_X g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{j=1}^n f_j d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j)\nu(B_j) = S.$$

Sei  $x \in A'$  und setze  $K_x := \{j \in K : x \in A_j\}$ . Wegen  $\{x\} \times B' \subseteq \bigcup_{j \in K} A_j \times B_j$  folgt  $B' \subseteq \bigcup_{j \in K_x} B_j$  und

$$\nu(B) = \nu(B') \leq \sum_{j \in K_x} \nu(B_j) = \sum_{j \in K_x} \chi_{A_j}(x) \nu(B_j) \leq g(x).$$

Also ist  $\chi_{A'} \nu(B) \leq g$  und

$$\begin{aligned} \mu(A)\nu(B) &= \mu(A')\nu(B) = \int_X \chi_{A'} \nu(B) d\mu \\ &\leq \int_X g(x) d\mu = S = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\lambda^*(A \times B) \geq \mu(A)\nu(B)$ . □

Ein anderer Beweis findet sich zum Beispiel in [Tao11, Proposition 1.7.11].

**Folgerung 2.69.** Sind  $\mu$  und  $\nu$   $\sigma$ -endlich, dann sind die Maßräume  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  und  $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$   $\sigma$ -endlich.

**Folgerung 2.70.** Sei  $\mu \otimes \nu$   $\sigma$ -endlich. Für jede Menge  $C \in \Lambda$  gibt es  $D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  und eine  $\mu \otimes \nu$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $C \cup N = D$ .

*Beweis.* Sei  $(\mu \otimes \nu)(C) < \infty$ . Dann folgt aus der Konstruktion von  $\lambda^*$ , dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Menge  $D_k \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  existiert mit  $C \subseteq D_k$  und  $\lambda^*(D_k) \leq \lambda^*(C) + \frac{1}{k}$ . Dann ist  $\tilde{D} := \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $(\mu \otimes \nu)(C) = (\mu \otimes \nu)(\tilde{D})$ , und  $\tilde{N} := \tilde{D} \setminus C \in \Lambda$  ist eine  $\mu \otimes \nu$ -Nullmenge. Wenden wir diese Argumentation auf  $\tilde{N}$  an, dann bekommen wir die Existenz einer  $\mu \otimes \nu$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $\tilde{N} \subseteq N$ . Die Behauptung folgt mit  $D = \tilde{D} \cup N$ .

Sei nun  $C \in \Lambda$  beliebig. Da das Produktmaß  $\sigma$ -endlich ist, existiert eine Folge  $(C_j)$  in  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $(\mu \otimes \nu)(C_j) < \infty$  und  $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = X \times Y$ . Für jedes  $j$  existieren dann  $D_j, N_j \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $(\mu \otimes \nu)(N_j) = 0$  und  $(C \cap C_j) \cup N_j = D_j$ . Dann folgt die Behauptung mit  $D := \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$  und  $N := \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ .  $\square$

Damit ist dann  $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$  die Vervollständigung von  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, (\mu \otimes \nu)|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}})$ .

Im Folgenden werden wir mit der symmetrischen Differenz  $A \triangle B$  arbeiten, definiert durch

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

**Aufgabe 2.71.** [Bog07, Lemma 1.5.5] Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Sind  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) < \infty$  und  $\mu(B) < \infty$  dann gilt  $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$ .

Für die Eindeutigkeit des Produktmaßes ist die  $\sigma$ -Endlichkeit von  $\mu$  und  $\nu$  entscheidend.

**Satz 2.72.** Es seien  $\mu$  und  $\nu$   $\sigma$ -endlich. Sei  $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein Maß mit  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$  und  $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$  für alle  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ . Dann gilt  $\lambda = \mu \otimes \nu$  auf  $\mathcal{C} \cap \Lambda \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

*Beweis.* Sei  $\lambda^*$  das durch  $\mu$  und  $\nu$  auf  $X \times Y$  erzeugte äußere Maß aus (2.66). Dann gilt  $\lambda^*(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \lambda(A \times B)$  für alle  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$  nach Lemma 2.68. Wir zeigen, dass  $\lambda^*(C) = \lambda(C)$  für alle  $C \in \mathcal{C}$ .

(1) Wir zeigen zuerst  $\lambda(\bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j) = \lambda^*(\bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j)$  für  $A_j \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{B}$ . Wir benutzen die Additivität der beiden Maße auf  $\mathcal{C} \cap \Lambda \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Für  $I \subseteq \{1 \dots n\}$  definieren wir

$$A_I := \{x \mid \forall i = 1 \dots n : x \in A_i \Leftrightarrow i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \notin I} A_i^c.$$

1 Ist  $I' \subseteq \{1 \dots n\}$  mit  $I' \neq I$  dann ist  $A_I \cap A_{I'} = \emptyset$ . Analog definieren wir  $B_I$ .

2 Dann gilt

$$3 \quad \bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j = \bigcup_{\substack{I, J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J = \emptyset}} A_I \times B_J,$$

4 wobei die Vereinigung auf der rechten Seite eine disjunkte Vereinigung ist, und

$$5 \quad \lambda\left(\bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j\right) = \sum_{\substack{I, J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J = \emptyset}} \lambda(A_I \times B_J) \\ 6 \quad = \sum_{\substack{I, J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J = \emptyset}} \lambda^*(A_I \times B_J) = \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j\right).$$

7 (2) Sei nun  $C \in \mathcal{C} \cap \Lambda$  mit  $\lambda^*(C) < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert eine Folge  
8  $(C_j)$  mit  $C_j \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ ,  $C_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^\infty C_j \supseteq C$  und  $\sum_{j=1}^\infty \lambda^*(C_j) \leq \lambda^*(C) + \varepsilon/6$ .  
9 Dann folgt  $\lambda^*(C_\varepsilon \setminus C) \leq \varepsilon/6$ . Da die Folge  $n \mapsto C \setminus \bigcup_{j=1}^n C_j$  monoton fällt mit  
10  $(\mu \otimes \nu)(C \setminus \bigcup_{j=1}^\infty C_j) = 0$  gibt es ein  $N$ , so dass

$$11 \quad \lambda^*(C \setminus \bigcup_{j=1}^N C_j) = (\mu \otimes \nu)(C \setminus \bigcup_{j=1}^N C_j) \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

12 Setze  $C_N := \bigcup_{j=1}^N C_j$ . Dann ist

$$13 \quad \lambda^*(C_N \triangle C) = \lambda^*(C \triangle \bigcup_{j=1}^N C_j) = \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^N C_j \setminus C\right) + \lambda^*\left(C \setminus \bigcup_{j=1}^N C_j\right) \\ 14 \quad \leq \lambda^*(C_\varepsilon \setminus C) + \frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

15 Weiter gibt es eine Folge  $(D_j)$  mit  $D_j \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$  mit  $\bigcup_{j=1}^\infty D_j \supseteq C_N \triangle C$  und  
16  $\sum_{j=1}^\infty \lambda^*(D_j) \leq \frac{2}{3}\varepsilon$ . Dann ist

$$17 \quad \lambda(C_N \triangle C) \leq \sum_{j=1}^\infty \lambda(D_j) = \sum_{j=1}^\infty \lambda^*(D_j) \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

18 Aus dem oben in Teil (1) Gezeigten folgt  $\lambda^*(C_N) = \lambda(C_N)$ . Daraus folgt

$$19 \quad |\lambda^*(C) - \lambda(C)| \leq |\lambda^*(C) - \lambda^*(C_N)| + |\lambda(C_N) - \lambda(C)| \\ 20 \quad \leq \lambda^*(C \triangle C_N) + \lambda(C_N \triangle C) \leq \varepsilon.$$

21 Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, ist  $\lambda^*(C) = \lambda(C)$ .

22 (3) Für allgemeines  $C \in \mathcal{C} \cap \Lambda$  folgt  $\lambda^*(C) = \lambda(C)$  aus der  $\sigma$ -Endlichkeit von



1  $\mu$  und  $\nu$ . □

2 Der Beweis ist eine Kombination von Argumenten aus den Beweisen von  
 3 [Bog07, Theorem 1.11.8, Theorem 1.5.6(iii)]. Eine andere Beweisvariante ist  
 4 [Els05, Satz II.5.6].

5 **Satz 2.73.** *Es gilt  $\lambda_m \otimes \lambda_n = \lambda_{m+n}$  auf  $\mathcal{L}(m+n)$ .*

6 *Beweis.* [Fre03, Theorem 251N] Es sei  $\lambda^*$  das durch  $\lambda_m$  und  $\lambda_n$  erzeugte äußere  
 7 Maß auf  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Wir zeigen  $\lambda^* = \lambda_{m+n}^*$ . Da  $\mathbb{J}(m+n) = \mathbb{J}(m) \boxtimes \mathbb{J}(n) \subseteq \mathcal{L}(m) \boxtimes$   
 8  $\mathcal{L}(n)$  ist  $\lambda^* \leq \lambda_{m+n}^*$ .

9 (1) Wir zeigen, dass gilt  $\lambda_{m+n}^*(A \times B) \leq \lambda^*(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$  für  
 10 alle  $A \in \mathcal{L}(m)$  und  $B \in \mathcal{L}(n)$ . Wir betrachten zuerst den Fall  $\lambda_m(A) < \infty$ ,  
 11  $\lambda_n(B) < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es Überdeckungen  $(A_i)$  und  $(B_j)$  von  $A$   
 12 und  $B$  durch Quader des  $\mathbb{R}^m$  und  $\mathbb{R}^n$  mit  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m(A_i) \leq \lambda_m(A) + \varepsilon$  und  
 13  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(B_j) \leq \lambda_n(B) + \varepsilon$ . Dann ist  $(A_i \times B_j)_{i,j \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung von  $A \times B$   
 14 und es folgt mit dem Doppelreihensatz Satz 1.38

$$\begin{aligned} \lambda_{m+n}^*(A \times B) &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_m(A_i)\lambda_n(B_j) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m(A_i) \right) \left( \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(B_j) \right) \\ &\leq (\lambda_m(A) + \varepsilon)(\lambda_n(B) + \varepsilon). \end{aligned}$$

16 Sei nun  $\lambda_m(A) = 0$  und  $\lambda_n(B) = +\infty$ . Dann gibt es eine Überdeckung von  $B$   
 17 durch eine Folge  $(B_j)$  mit  $\lambda_n(B_j) < \infty$ . Wegen der  $\sigma$ -Subadditivität von  $\lambda_{m+n}^*$   
 18 und dem gerade Bewiesenen ist

$$\lambda_{m+n}^*(A \times B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{m+n}^*(A \times B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m(A)\lambda_n(B_j) = 0.$$

20 Damit ist die Ungleichung  $\lambda_{m+n}^*(A \times B) \leq \lambda^*(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$  für alle  
 21  $A \in \mathcal{L}(m)$ ,  $B \in \mathcal{L}(n)$  bewiesen.

22 (2) Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ . Weiter seien Folgen  $(A_i)$  und  $(B_i)$  in  $\mathcal{L}(m)$  und  $\mathcal{L}(n)$  mit  
 23  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \supseteq C$  gegeben. Es folgt mit der  $\sigma$ -Subadditivität von  $\lambda_{m+n}^*$

$$\lambda_{m+n}^*(C) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{m+n}^*(A_i \times B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m(A_i)\lambda_n(B_i).$$

25 Damit ist  $\lambda_{m+n}^* \leq \lambda^*$ , da  $\lambda^*$  als Infimum über solche Überdeckungen definiert  
 26 ist. □

27 Nun wollen wir das Lebesgue-Integral bezüglich des Produktmaßes betrach-  
 28 ten. Hier wollen wir beweisen, dass

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

Angewandt auf den Spezialfall  $\mu = \nu = \lambda_1$  bekommen wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x).$$

Wir beginnen mit einem Hilfsresultat aus der Mengenlehre.

**Definition 2.74.** Sei  $X \neq \emptyset$ . Eine Menge  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt *monotone Klasse*, wenn gilt:

- (1) Für  $(A_j)$  mit  $A_j \in \mathcal{M}$  und  $A_j \subseteq A_{j+1}$  folgt  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ .
- (2) Für  $(A_j)$  mit  $A_j \in \mathcal{M}$  und  $A_j \supseteq A_{j+1}$  folgt  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ .

**Beispiel 2.75.** Jede  $\sigma$ -Algebra ist eine monotone Klasse. Da Durchschnitte von monotonen Klassen wieder monotone Klassen sind, existiert für jedes  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$  die kleinste monotone Klasse, die  $S$  enthält.

**Satz 2.76.** Sei  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine (boolesche oder Mengen-) Algebra, d.h. es gilt

- (1)  $X \in \mathcal{A}$ ,
- (2)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ ,
- (3)  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ .

Dann ist  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$  gleich der kleinsten monotonen Klasse, die  $\mathcal{A}$  enthält.

*Beweis.* Es sei

$$\mathcal{M} := \bigcap \{ \mathcal{M}' : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}', \mathcal{M}' \text{ monotone Klasse} \}.$$

Da  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$  eine monotone Klasse ist, folgt  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$ . Außerdem ist  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$  und damit  $X \in \mathcal{M}$ . Wir zeigen  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$ .

Für  $A \subseteq X$  definieren wir

$$\mathcal{M}(A) := \{ B \subseteq X : A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{M} \}.$$

Die Definition ist symmetrisch in  $A$  und  $B$ , damit ist  $B \in \mathcal{M}(A)$  genau dann, wenn  $A \in \mathcal{M}(B)$ .

Sei nun  $A \in \mathcal{A}$ . Dann gilt  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(A)$ . Weiter ist  $\mathcal{M}(A)$  eine monotone Klasse: Sei  $(B_j)$  eine Folge in  $\mathcal{M}(A)$  mit  $B_j \subseteq B_{j+1}$ . Dann ist  $A \cup B_j \in \mathcal{M}$ ,

1  $A \cup B_j \subseteq A \cup B_{j+1}$  und  $A \cup (\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cup B_j) \in \mathcal{M}$ . Also ist  $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in$   
2  $\mathcal{M}$ . Die restlichen Eigenschaften folgen analog, und es gilt  $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{M}(A)$ .  
3 Daraus folgt  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ .

4 Aus der Symmetrie folgt  $A \subseteq \mathcal{M}(M)$  für alle  $M \in \mathcal{M}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Damit ist  
5  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(M)$  und  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(M)$  für alle  $M \in \mathcal{M}$ . Weil  $X \in \mathcal{M}$  ist, ist  $\mathcal{M}$  eine  
6 Algebra.

7 Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. Sei  $(A_j)$  eine Folge in  $\mathcal{M}$ .  
8 Definiere  $B_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$ . Da  $\mathcal{M}$  eine Algebra ist, folgt  $B_k \in \mathcal{M}$  für alle  $k$ . Weiter  
9 ist  $B_k \subseteq B_{k+1}$ . Da  $\mathcal{M}$  eine monotone Klasse ist, folgt  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ ,  
10 also ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{A}$  enthält, und damit  $\mathcal{A}_{\sigma}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$ .  $\square$

11 **Aufgabe 2.77.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  messbare Räume. Sei  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Dann  
12 ist  $C_x := \{y : (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$  für alle  $x \in X$  und  $C^y := \{x : (x, y) \in C\} \in \mathcal{A}$   
13 für alle  $y \in Y$ .

14 **Aufgabe 2.78.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  messbare Räume,  $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$   
15  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar. Dann ist für jedes  $x \in X$  die Funktion  $f_x(y) := f(x, y)$   $\mathcal{B}$ -  
16 messbar. Analog ist für jedes  $y \in Y$  die Funktion  $f_y(x) := f(x, y)$   $\mathcal{A}$ -messbar.

17 Wir betrachten zuerst Integrale nicht-negativer Funktionen. Wir beginnen  
18 mit Integralen charakteristischer Funktionen. Außerdem zeigt der folgende Satz  
19 eine Alternative, um ein Produktmaß zu definieren.

20 **Satz 2.79.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  Maßräume,  $\nu$  sei  $\sigma$ -endlich. Dann ist  
21 für jedes  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  die Abbildung  $x \mapsto \nu(C_x)$   $\mathcal{A}$ -messbar, und

$$22 \quad \rho(C) := \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$$

23 ist ein Maß auf  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit

$$24 \quad \rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}.$$

25 *Beweis.* (1) Wir betrachten erst den Fall, dass  $\nu$  endlich ist. Der Beweis folgt  
26 dem Prinzip der guten Mengen: Wir definieren

$$27 \quad \mathcal{M} := \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : x \mapsto \nu(C_x) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}.$$

28 Wir zeigen, dass  $\mathcal{M}$  eine monotone Klasse ist. Ist  $(C_j)$  eine monoton fallende  
29 Folge in  $\mathcal{M}$  mit  $C := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$ , dann gilt  $\nu(C_x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(C_{j,x})$  für alle  $x$   
30 wegen (1.30). Und damit ist  $C \in \mathcal{M}$ . Für eine monoton wachsende Folge  $(C_j)$   
31 in  $\mathcal{M}$  bekommen wir analog  $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \in \mathcal{M}$ .

Wir betrachten nun die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j : n \in \mathbb{N}, A_j \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{B} \right\}.$$

Dann ist  $\mathcal{C}$  eine Algebra: aus  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  folgt  $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$ . Wegen  $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$  ist

$$\left( \bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^n ((A_j^c \times Y) \cup (X \times B_j^c)) = \bigcup_{J \subseteq \{1 \dots n\}} \left( \bigcap_{j \in J} A_j^c \times \bigcap_{j \notin J} B_j^c \right),$$

und  $\mathcal{C}$  ist eine Algebra.

Wir zeigen  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ . Wie im Beweis von [Satz 2.72](#) argumentiert, kann jede Vereinigung von endlich vielen Mengen aus  $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$  als endliche, disjunkte Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$  geschrieben werden. Sei  $C := \bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j \in \mathcal{C}$  mit disjunkten Mengen  $A_j \times B_j$ . Dann ist

$$x \mapsto \nu(C_x) = \sum_{j=1}^n \nu((A_j \times B_j)_x) = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j}(x) \nu(B_j)$$

eine messbare Funktion, und  $C \in \mathcal{M}$ , also  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ . Nach [Satz 2.76](#) ist  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C})$  die kleinste monotone Klasse, die  $\mathcal{C}$  enthält, also folgt  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ .

(2) Sei nun  $\nu$   $\sigma$ -endlich. Dann gibt es eine aufsteigende Folge  $(Y_j)$  mit  $Y_j \in \mathcal{B}$ ,  $\bigcup_{j=1}^\infty Y_j = Y$  und  $\nu(Y_j) < \infty$ . Dann ist  $B \mapsto \nu(B \cap Y_j)$  ein endliches Maß auf  $Y$  für alle  $j$ . Sei  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Wegen (1) ist  $x \mapsto \nu(C_x \cap Y_j)$   $\mathcal{A}$ -messbar für alle  $j$ . Wegen der Konvergenz  $\nu(C_x \cap Y_j) \rightarrow \nu(C_x)$  für alle  $x$  ist auch  $x \mapsto \nu(C_x)$   $\mathcal{A}$ -messbar.

(3) Es bleibt zu zeigen, dass  $\rho$  die behaupteten Eigenschaften hat. Sind  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , dann ist

$$\rho(A \times B) = \int_X \chi_A \nu(B) \, d\mu(x) = \mu(A) \nu(B).$$

Sei  $(C_j)$  eine Folge disjunkter Mengen aus  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Setze  $C := \bigcup_{j=1}^\infty C_j$ . Dann ist  $\nu(C_x) = \nu(\bigcup_{j=1}^\infty C_{j,x}) = \sum_{j=1}^\infty \nu(C_{j,x})$  für alle  $x$ . Mithilfe der monotonen

1 Konvergenz (Satz 2.37) folgt

$$\begin{aligned}
 \int_X \nu(C_x) d\mu(x) &= \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu(C_{j,x}) d\mu(x) \\
 &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \nu(C_{j,x}) d\mu(x) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{j=1}^n \nu(C_{j,x}) d\mu(x) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \rho(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(C_j),
 \end{aligned}$$

3 und  $\rho$  ist ein Maß. □

4 **Bemerkung 2.80.** Der Umweg über die Menge  $\mathcal{C}$  war nötig, denn man kann  
 5 nicht zeigen, dass  $\mathcal{M}$  abgeschlossen gegenüber Durchschnittsbildung ist. In die-  
 6 sem Fall wäre  $\mathcal{M}$  eine Algebra: Wegen (1.27) würde aus  $C_1 \subseteq C_2$  mit  $C_1, C_2 \in$   
 7  $\mathcal{M}$  folgen, dass  $C_2 \setminus C_1 \in \mathcal{M}$  ist, damit wäre  $\mathcal{M}$  abgeschlossen gegenüber Kom-  
 8 plementbildung.

9 **Satz 2.81.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$   $\sigma$ -endliche Maßräume. Sei  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .  
 10 Dann sind die Abbildungen  $x \mapsto \nu(C_x)$  und  $y \mapsto \mu(C^y)$   $\mathcal{A}$ - und  $\mathcal{B}$ -messbar, und  
 11 es gilt

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y) d\nu(y).$$

13 *Beweis.* Folgt aus Satz 2.79 und Satz 2.72. □

14 Sei  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Dann ist für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$

$$\chi_C(x, y) = \chi_{C_x}(y).$$

16 Damit bekommen wir aus Satz 2.81

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_{X \times Y} \chi_C d(\mu \otimes \nu) = \int_X \nu(C_x) d\mu(x) = \int_X \int_Y \chi(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

18 **Folgerung 2.82** (Prinzip von Cavalieri). Seien  $A, B \in \mathcal{L}(m+n)$ . Gilt  $\lambda_m(A_y) =$   
 19  $\lambda_m(B_y)$  für  $\lambda_n$ -fast alle  $y \in \mathbb{R}^n$ , dann folgt  $\lambda^{m+n}(A) = \lambda^{m+n}(B)$ .

20 *Beweis.* Folgt aus Satz 2.81 und Satz 2.73. □

21 **Beispiel 2.83.** Ohne  $\sigma$ -Endlichkeit ist die Behauptung von Satz 2.81 falsch.  
 22 Sei  $X = Y = \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}^1$  und  $\mu = \lambda_1$  sowie  $\nu = \mathcal{H}^0$  (Zählmaß). Sei  
 23  $D := \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ . Dann ist  $D$  abgeschlossen und gehört zu  $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1$ .

1 Wir beweisen zuerst, dass  $\lambda^*(D) = +\infty$  mit dem äußeren Maß  $\lambda^*$  aus (2.66).  
 2 Seien  $(A_j)$  und  $(B_j)$  Folgen in  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  mit  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$ . Wir zeigen,  
 3 dass  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$  keine Überdeckung von  $D$  sein kann.  
 4 Damit  $\mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$  ist, muss  $B_j$  eine endliche Menge oder  $A_j$  eine  
 5  $\lambda_1$ -Nullmenge sein. Wir setzen

$$6 \quad A := \bigcup_{j: \lambda_1(A_j)=0} A_j, \quad B := \bigcup_{j: \mathcal{H}^0(B_j) < \infty} B_j.$$

7 Dann ist  $A$  eine  $\lambda_1$ -Nullmenge und  $B$  eine abzählbare Menge.

8 Weiter ist  $A_j \times B_j \subseteq (A \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times B)$  für alle  $j$ , und damit  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \subseteq$   
 9  $(A \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times B)$ . Sei  $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  die Projektion auf die erste Koordinate,  
 10 also  $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ . Dann ist  $\pi_1(D \cap (A \times \mathbb{R})) = A$  und  $\pi_1(D \cap (\mathbb{R} \times B)) = B$ .  
 11 Da  $\pi_1(D) = [0, 1]$  ist  $\lambda_1(\pi_1(D)) = 1$ . Weil aber  $\lambda_1(\pi(A \cup B)) = 0$  ist, kann  
 12  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$  keine Überdeckung von  $D$  sein. Damit folgt  $\lambda^*(D) = (\mu \otimes \nu)(D) =$   
 13  $+\infty$ .

14 Wertet man die Integrale in Satz 2.81 aus bekommt man allerdings andere  
 15 Werte: es ist  $\nu(D_x) = \chi_{[0,1]}(x)$  und  $\mu(D^y) = 0$ , so dass

$$16 \quad \int_X \nu(D_x) d\mu(x) = 1, \quad \int_Y \mu(D^y) d\nu(y) = 0.$$

17 Außerdem zeigt dieses Beispiel, dass das Produktmaß nicht mehr eindeutig im  
 18 Sinne von Satz 2.72 sein kann. Denn wegen Satz 2.79 ist  $C \mapsto \int_Y \mu(C^y) d\nu(y)$   
 19 ein weiteres, von  $\mu \otimes \nu$  verschiedenes Maß auf  $X \times Y$ .

20 Den folgenden Satz (Satz von Fubini) beweisen wir in vier Varianten: jeweils  
 21 für nicht-negative Funktionen und integrierbare Funktionen, und  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbare  
 22 und  $\Lambda$ -messbare Funktionen.

23 **Satz 2.84.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$   $\sigma$ -endliche Maßräume. Sei  $f : X \times Y \rightarrow$   
 24  $[0, +\infty]$   $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar.

25 Dann sind die Funktionen  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  und  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$   
 26  $\mathcal{A}$ - und  $\mathcal{B}$ -messbar, und es gilt

$$27 \quad \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
 28 \quad \quad \quad = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

29 *Beweis.* Wegen Satz 2.81 gilt die Behauptung des Satzes für einfache Funktionen  
 30  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ .

31 Sei nun  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$   $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar. Dann gibt es wegen Satz 2.29  
 32 eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen  $(f_n)$  mit  $f_n \nearrow f$ . Dann ist

## 2.6. Produktmaße und Satz von Fubini

1 die Funktion  $x \mapsto \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$  als punktweiser Grenzwert der messbaren  
 2 Funktionen  $x \mapsto \int_Y f_n(x, y) \, d\nu(y)$   $\mathcal{A}$ -messbar. Analog ist  $y \mapsto \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$   
 3  $\mathcal{B}$ -messbar. Mit monotoner Konvergenz [Satz 2.37](#) bekommen wir

$$4 \quad \int_Y f_n(x, y) \, d\nu(y) \nearrow \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$$

5 für alle  $x$  und

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n \, d(\mu \otimes \nu) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left( \int_Y f_n(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) \\ 6 \quad &= \int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y f_n(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) \\ &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x). \end{aligned}$$

7 Analog bekommen wir die zweite Gleichung. □

8 **Satz 2.85.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$   $\sigma$ -endliche Maßräume. Sei  $f : X \times Y \rightarrow$   
 9  $\mathbb{R}$   $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar und integrierbar bezüglich  $\mu \otimes \nu$ .

10 Dann sind die Funktionen  $x \mapsto \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$  und  $y \mapsto \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$   
 11 für  $\mu$ -fast alle  $x$  und  $\nu$ -fast alle  $y$  definiert und integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} 12 \quad \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) \\ 13 \quad &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right) \, d\nu(y). \end{aligned}$$

14 Diese Schreibweise birgt eine kleine Unsauberkeit: die Funktion  $y \mapsto f(x, y)$   
 15 muss nicht für alle  $x$   $\nu$ -integrierbar sein. Die Doppelintegrale sind deshalb wie  
 16 folgt zu verstehen: Die Menge  $N := \{x : \int_Y |f(x, y)| \, d\nu(y) = +\infty\}$  ist eine  
 17  $\mu$ -Nullmenge nach der Behauptung von [Satz 2.85](#), und wir setzen

$$18 \quad \int_X \left( \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) := \int_{N^c} \left( \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x). \quad (2.86)$$

19 Analog verfahren wir mit dem zweiten Doppelintegral.

20 *Beweis von [Satz 2.85](#).* Wegen [Satz 2.39](#) ist  $|f|$  bezüglich  $\mu \otimes \nu$  integrierbar,  
 21 und [Satz 2.84](#) ergibt  $\int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y |f(x, y)| \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x)$ . Nach  
 22 [Satz 2.45](#) ist die Menge  $N := \{x : \int_Y |f(x, y)| \, d\nu(y) = +\infty\}$  eine  $\mu$ -Nullmenge.

1 Ist  $x \in N^c$  dann gilt

$$2 \quad \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) = \int_Y f^+(x, y) \, d\nu(y) + \int_Y -f^-(x, y) \, d\nu(y).$$

3 Die Funktionen auf der rechten Seite sind  $\mathcal{A}$ -messbar und  $\mu$ -integrierbar we-  
 4 gen [Satz 2.84](#). Weiter ist  $N \times Y$  eine  $\mu \otimes \nu$ -Nullmenge. Durch Integration und  
 5 Anwenden von [Satz 2.84](#) erhalten wir

$$\begin{aligned} 6 \quad & \int_{N^c} \left( \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) \\ &= \int_{N^c} \left( \int_Y f^+(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) - \int_{N^c} \left( \int_Y -f^-(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) \\ &= \int_{X \times Y} \chi_{N^c \times Y} f^+ \, d(\mu \otimes \nu) - \int_{X \times Y} \chi_{N^c \times Y} \cdot (-f^-) \, d(\mu \otimes \nu) \\ 7 \quad &= \int_{X \times Y} f^+ \, d(\mu \otimes \nu) - \int_{X \times Y} -f^- \, d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu). \end{aligned} \quad (2.87)$$

8 Da  $\mu(N) = 0$ , ist nach der Definition in [\(2.86\)](#)

$$9 \quad \int_X \left( \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) = \int_{N^c} \left( \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x).$$

10 Der zweite Teil der Behauptung folgt analog.  $\square$

11 Wir wollen nun noch Sätze analog zu [Satz 2.84](#) und [Satz 2.85](#) formulieren,  
 12 für Funktionen, die  $\Lambda$ -messbar sind. Wegen  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$  ist das eine schwächere  
 13 Voraussetzung als  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -Messbarkeit.

14 **Lemma 2.88.** *Sei  $\mu \otimes \nu$   $\sigma$ -endlich. Sei  $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$   $\Lambda$ -messbar. Dann*  
 15 *existiert eine Menge  $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$  und eine  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbare*  
 16 *Funktion  $\tilde{f}$ , so dass  $f = \tilde{f}$  auf  $N^c$ .*

17 *Beweis.* Sei zunächst  $f = \chi_C$  mit  $C \in \Lambda$ . Nach [Folgerung 2.70](#) existieren  $D, N \in$   
 18  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $C \cup N = D$  und  $(\mu \otimes \nu)(D) = (\mu \otimes \nu)(C)$ . Die Behauptung folgt  
 19 mit  $\tilde{f} = \chi_D$ . Dann gilt die Behauptung auch für einfache Funktionen. Sei nun  
 20  $f$   $\Lambda$ -messbar. Wir approximieren  $f$  durch eine Folge  $(f_n)$  einfacher Funktionen,  
 21 die  $\Lambda$ -messbar sind ([Folgerung 2.30](#)). Dann gibt es für jedes  $n$  eine Nullmenge  
 22  $N_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  und eine (einfache)  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ -messbare Funktion  $\tilde{f}_n$  mit  $\tilde{f}_n = f_n$  auf  
 23  $N_n^c$ . Setze  $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ . Dann ist  $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$ . Die Behauptung folgt mit  
 24  $\tilde{f} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n$ .  $\square$

25 **Satz 2.89.** *Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$   $\sigma$ -endliche und vollständige Maßräume*  
 26 *mit Produkt  $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$ . Sei  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$   $\Lambda$ -messbar.*



1 Dann gilt:

2 (1) Für  $\mu$ -fast alle  $x$  ist  $y \mapsto f(x, y)$   $\mathcal{B}$ -messbar. Weiter ist die (für fast alle  $x$   
3 definierte) Abbildung  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$   $\mathcal{A}$ -messbar.

4 (2) Für  $\nu$ -fast alle  $y$  ist  $x \mapsto f(x, y)$   $\mathcal{A}$ -messbar. Weiter ist die (für fast alle  $y$   
5 definierte) Abbildung  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$   $\mathcal{B}$ -messbar.

(3)

$$\begin{aligned} 6 \quad \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ 7 \quad &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

8 *Beweis.* Aus [Lemma 2.88](#) bekommen wir eine  $\mu \otimes \nu$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  und  
9 eine  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbare Funktion  $\tilde{f}$  mit  $f = \tilde{f}$  auf  $N^c$ . Dann ist  $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) =$   
10  $\int_{X \times Y} \tilde{f} d(\mu \otimes \nu)$ . [Satz 2.84](#) angewandt auf  $\chi_N$  ergibt

$$11 \quad 0 = (\mu \otimes \nu)(N) = \int_X \nu(N_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(N^y) d\nu(y).$$

12 Damit ist  $N_x$  ein  $\nu$ -Nullmenge für  $\mu$ -fast alle  $x$ , und  $N^y$  ist ein  $\mu$ -Nullmenge für  
13  $\nu$ -fast alle  $y$ .

14 Sei  $M := \{x : \nu(N_x) > 0\}$ . Sei  $x \in M^c$ , also  $\nu(N_x) = 0$ . Dann ist  $f(x, y) =$   
15  $\tilde{f}(x, y)$  für alle  $y \in (N_x)^c$ . Nun ist  $y \mapsto \tilde{f}(x, y)$   $\mathcal{B}$ -messbar,  $\nu(N_x) = 0$  und  
16  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  vollständig, also  $y \mapsto f(x, y)$  ist  $\mathcal{B}$ -messbar, und damit ist das Integral  
17  $\int_Y f(x, y) d\nu(y)$  definiert. Und es gilt  $\int_Y f(x, y) d\nu(y) = \int_Y \tilde{f}(x, y) d\nu(y)$ , weil  
18 sich  $f(x, \cdot)$  und  $\tilde{f}(x, \cdot)$  nur auf der Nullmenge  $N_x$  unterscheiden.

19 Da die Abbildung  $x \mapsto \int_Y \tilde{f}(x, y) d\nu(y)$   $\mathcal{A}$ -messbar ([Satz 2.84](#)),  $\mu(M) = 0$   
20 und  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  vollständig ist, ist auch  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$   $\mathcal{A}$ -messbar. Integrieren  
21 bezüglich  $x$  gibt

$$\begin{aligned} 22 \quad \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_{M^c} \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ 23 \quad &= \int_{M^c} \left( \int_Y \tilde{f}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X \left( \int_Y \tilde{f}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

24 Analog argumentieren wir für  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ . Die Behauptung folgt mit  
25 [Satz 2.84](#) angewandt auf  $\tilde{f}$ .  $\square$

26 **Satz 2.90.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$   $\sigma$ -endliche und vollständige Maßräume  
27 mit Produkt  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ . Sei  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar und integrierbar.

28 Dann gilt:

(1) Für  $\mu$ -fast alle  $x$  ist  $y \mapsto f(x, y)$   $\nu$ -integrierbar. Weiter ist die (für fast alle  $x$  definierte) Abbildung  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$   $\mu$ -integrierbar.

(2) Für  $\nu$ -fast alle  $y$  ist  $x \mapsto f(x, y)$   $\mu$ -integrierbar. Weiter ist die (für fast alle  $y$  definierte) Abbildung  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$   $\nu$ -integrierbar.

(3)

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis ist ähnlich zu [Satz 2.85](#). Da  $f$  integrierbar ist, sind auch  $f^+$  und  $-f^-$  integrierbar. Wir wenden [Satz 2.89](#) auf  $|f|$ ,  $f^+$  und  $-f^-$  an. Dann gibt es eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$ , so dass gilt:  $y \mapsto f(x, y)$  ist  $\mathcal{B}$ -messbar und integrierbar für alle  $x \in N^c$ , und die Abbildungen  $x \mapsto \chi_{N^c} \int_Y |f(x, y)| d\nu(y)$ ,  $x \mapsto \chi_{N^c} \int_Y f^+(x, y) d\nu(y)$ ,  $x \mapsto \chi_{N^c} \int_Y -f^-(x, y) d\nu(y)$  sind  $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. Wir können nun wie in [\(2.87\)](#) argumentieren.  $\square$

**Beispiel 2.91.** [[Els05](#), Beispiel V.2.3] Für die Funktion

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

sind die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = +\frac{\pi}{4},$$

also kann  $f$  nicht  $\lambda_1$ -integrierbar auf  $(0, 1)^2$  sein.

**Lemma 2.92.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$   $\sigma$ -endlich und  $f : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  messbar. Definiere

$$A_f := \{(x, t) : 0 \leq t < f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$(\mu \otimes \lambda_1)(A_f) = \int_X f d\mu.$$

*Beweis.* Wegen

$$A_f = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} (\{x : f(x) > t\} \times [0, t])$$

ist  $A_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ . Da  $\lambda_1((A_f)_x) = f(x)$ , folgt die Behauptung mit [Satz 2.81](#).  $\square$

1 **Lemma 2.93.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$   $\sigma$ -endlich und  $f : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  messbar.

2 Dann gilt

$$3 \quad \int_X f \, d\mu = \int_{(0, +\infty)} \mu(\{x : f(x) > t\}) \, d\lambda_1(t),$$

4 wobei  $t \mapsto \mu(\{x : f(x) > t\})$   $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ -messbar ist.

5 *Beweis.* Sei  $Y := [0, +\infty)$ . Es gilt  $f(x) = \int_Y \chi_{(0, f(x))}(t) \, d\lambda_1(t)$ . Für  $t \geq 0$  und  $x \in X$   
6 ist

$$7 \quad \chi_{(0, f(x))}(t) = \chi_{(t, +\infty)}(f(x)).$$

8 Anwenden von [Satz 2.84](#) gibt

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \int_X \left( \int_Y \chi_{(0, f(x))}(t) \, d\lambda_1(t) \right) \, d\mu(x) \\ &= \int_Y \left( \int_X \chi_{(0, f(x))}(t) \, d\mu(x) \right) \, d\lambda_1(t) \\ 9 \quad &= \int_Y \left( \int_X \chi_{(t, +\infty)}(f(x)) \, d\mu(x) \right) \, d\lambda_1(t) \\ &= \int_Y \mu(\{x : f(x) > t\}) \, d\lambda_1(t). \end{aligned}$$

10 □

11 **Folgerung 2.94.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$   $\mathcal{L}(n)$ -messbar. Dann gilt für alle  $s > 0$

$$12 \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda_1(x) = s \int_{\mathbb{R}} f(sx) \, d\lambda_1(x).$$

13 *Beweis.* Sei  $t \geq 0$ . Dann ist

$$14 \quad \{y : f(y) > t\} = s \cdot \{x : f(sx) > t\}.$$

15 Wegen [Satz 1.83](#) ist

$$16 \quad \lambda_1(\{y : f(y) > t\}) = \lambda_1(s\{x : f(sx) > t\}) = s\lambda_1(\{x : f(sx) > t\}).$$

17 Integrieren bezüglich  $t$  ergibt mit [Lemma 2.93](#) die Behauptung. □

18 **Folgerung 2.95.** Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$   $\mathcal{L}(n)$ -messbar. Dann gilt

$$19 \quad \left( \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda_1 \right)^2 = 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,1)} g(xy)g(y)y \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y).$$

1 *Beweis.* Mit [Satz 2.84](#) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,y)} g(x)g(y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{(x,\infty)} g(x)g(y) \, d\lambda_1(y) \, d\lambda_1(x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{(y,\infty)} g(x)g(y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y),
 \end{aligned}$$

3 wobei im letzten Schritt nur die Buchstaben  $x$  und  $y$  vertauscht wurden. Dann  
 4 bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda_1 \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x)g(y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y) \\
 &= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,y)} g(x)g(y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y) \\
 &= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,1)} yg(xy)g(y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y),
 \end{aligned}$$

6 wobei wir im letzten Schritt [Folgerung 2.94](#) angewendet haben.  $\square$

7 Damit können wir folgendes Integral berechnen:

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \, dx \right)^2 &= 2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x^2+1)y^2) y \, dy \, dx \\
 &= 2 \int_0^1 \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{x^2+1} \exp(-(x^2+1)y^2) \right]_{y=0}^{y=\infty} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \, dx = [\arctan(x)]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

## 9 2.7 Approximationssätze

10 Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum.

11 In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass integrierbare Funktionen in  
 12 der  $\mathcal{L}^1(\mu)$ -Norm durch Funktionen mit “besseren” Eigenschaften approximiert  
 13 werden können.

14 **Satz 2.96.** Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ . Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  eine beschränkte  
 15 Funktion  $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , so dass  $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$ .

16 *Beweis.* Setze  $f_n := \max(-n, \min(f, n))$ . Dann ist  $f_n$  eine messbare und be-  
 17 schränkte Funktion. Mithilfe der dominierten Konvergenz [Satz 2.56](#) folgt  $\|f_n -$   
 18  $f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \rightarrow 0$ .  $\square$

19 **Satz 2.97.** Sei  $\mu$   $\sigma$ -endlich. Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ . Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$   
 20 eine einfache Funktion  $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu)$  mit  $\mu(\{x : f_\varepsilon(x) \neq 0\}) < +\infty$ , so dass  
 21  $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$ .

## 2.7. Approximationssätze

*Beweis.* Nach [Folgerung 2.30](#) existiert eine Folge einfacher Funktionen  $(\phi_n)$  mit  $\phi_n \rightarrow f$  und  $|\phi_n| \leq |f|$ . Wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit existiert eine aufsteigende Folge  $(X_j)$  mit  $\mu(X_j) < \infty$  und  $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X$ . Mit dominierter Konvergenz [Satz 2.56](#) bekommen wir  $\|\chi_{X_n} \phi_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \rightarrow 0$ .  $\square$

Sei nun  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

**Lemma 2.98.** *Sei  $A \subseteq X$ . Dann ist die Abbildung  $x \mapsto d(x, A)$  stetig, wobei*

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

*Beweis.* Sei  $y \in A$ ,  $x_1, x_2 \in X$ . Dann ist

$$d(x_1, A) \leq d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y).$$

Nach bilden den Infimums über  $y \in A$  auf der rechten Seite bekommen wir  $d(x_1, A) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, A)$ .  $\square$

Sei  $Y$  ein weiterer metrischer Raum. Wir definieren

$$C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : f \text{ stetig}\}.$$

**Lemma 2.99** (Urysohn-Funktion). *Seien  $A, B \subseteq X$  nicht leere, abgeschlossene, disjunkte Mengen. Dann existiert  $\phi \in C(X, [0, 1])$  mit  $\phi|_A = 0$ ,  $\phi|_B = 1$ ,  $\phi(x) \in (0, 1)$  für alle  $x \in (A \cup B)^c$ .*

*Beweis.*  $\phi := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$ .  $\square$

**Satz 2.100.** *Sei  $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ . Sei  $\mu$   $\sigma$ -endlich und regulär (vgl. [Satz 1.69](#)). Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ . Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  eine Funktion  $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap C(X, \mathbb{R})$ , so dass  $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$ .*

*Beweis.* Wir beweisen die Behauptung zuerst für charakteristische Funktionen. Sei  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen der Regularität existiert eine kompakte Menge  $K$  und eine offene Menge  $O$  mit  $K \subseteq A \subseteq O$  und  $\mu(O \setminus K) < \varepsilon$ . Wegen [Lemma 2.99](#) existiert  $\phi \in C(X, [0, 1])$  mit  $\phi|_K = 1$  und  $\phi|_{O^c} = 0$ . Es folgt

$$\|\chi_A - \phi\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = \int \chi_{O \setminus K} |\chi_A - \phi| d\mu \leq 1 \cdot \mu(O \setminus K) = \varepsilon.$$

Damit ist  $\phi$  integrierbar. Wegen [Satz 2.97](#) folgt die Behauptung für alle integrierbare Funktionen.  $\square$

Für eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\text{supp } f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

1 der Support (oder Träger). Wir definieren

$$2 \quad C_c(X, \mathbb{R}) := \{f \in C(X, \mathbb{R}) : \text{supp } f \text{ kompakt} \}$$

3 die Menge der stetigen Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{R}$  mit kompaktem Träger. Diese  
 4 Menge ist kein abgeschlossener Teilraum von  $C(X, \mathbb{R})$  bezüglich der Supremums-  
 5 norm. Ist  $O \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C_c(O, \mathbb{R})$ , dann ist die Funktion  $\hat{f}$  definiert  
 6 durch

$$7 \quad \hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in O, \\ 0 & \text{falls } x \notin O \end{cases}$$

8 stetig und gehört zu  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Funktionen aus  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  sind  $\lambda^1$ -integrierbar.

9 Der zugrundeliegende Maßraum des nächsten Resultats ist  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ .

10 **Satz 2.101.** *Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ . Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  eine Funktion*  
 11  *$f_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , so dass  $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon$ .*

12 *Beweis.* Wie im Beweis von Satz 2.100 reicht es, die Behauptung für charak-  
 13 teristische Funktionen zu beweisen. Sei also  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  
 14 Aufgrund der  $\sigma$ -Endlichkeit existiert eine beschränkte Teilmenge  $A_\varepsilon \subseteq A$  mit  
 15  $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon/2$ . Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes (Satz 1.69) exis-  
 16 tiert eine kompakte Menge  $K$  und eine offene Menge  $O$  mit  $K \subseteq A_\varepsilon \subseteq O$  und  
 17  $\mu(O \setminus K) < \varepsilon/2$ . Die offene Menge kann beschränkt gewählt werden. Die Funk-  
 18 tion  $\phi$  aus Lemma 2.99 erfüllt  $\phi \in C(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  mit  $\phi|_K = 1$ ,  $\phi|_{O^c} = 0$  und  
 19  $\|\chi_{A_\varepsilon} - \phi\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon/2$ . Damit ist  $\text{supp } \phi \subseteq \bar{O}$ , und  $\phi$  hat kompakten Träger.  $\square$

20 Dieser Satz wird den Beweis im nächsten Abschnitt vereinfachen: zuerst  
 21 wird die Behauptung für stetige Funktionen gezeigt, dann für integrierbare.  
 22 Allerdings müssen wir den Träger von  $f_\varepsilon$  noch etwas besser kontrollieren können.  
 23 Für die folgenden Resultate benutzen wir die Maximumnorm auf  $\mathbb{R}^n$ .

24 **Lemma 2.102.** *Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und nicht leer. Dann gibt es eine aufsteigende*  
 25 *Folge kompakter Mengen  $(K_j)$  mit  $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = O$ . Weiter gibt es eine aufstei-*  
 26 *gende Folge  $(\psi_j)$  nichtnegativer Funktionen  $\psi_j \in C_c(O, \mathbb{R})$  mit  $\psi_j(x) \nearrow 1$  für*  
 27 *alle  $x \in O$ .*

28 *Beweis.* Setze

$$29 \quad K_j := \left\{ x \in \bar{O} : \|x\|_\infty \leq j, d(x, \partial O) \geq \frac{1}{j} \right\},$$

30 was wegen Lemma 2.98 abgeschlossen ist. Dann gilt  $K_j \subseteq O$  und  $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = O$ .  
 31 Weiter sei  $A_j := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K_j) < \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\}$ . Dann ist  $A_j$  offen und  
 32  $A_j \subseteq K_{j+1}$ . Sei  $\psi_j \in C(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  aus Lemma 2.99 mit  $\psi_j = 0$  auf  $A_j^c$  und  $\psi_j = 1$   
 33 auf  $K_j$ . Dann ist  $\text{supp } \psi_j \subseteq \bar{A_j} \subseteq K_{j+1}$ . Daraus folgt dann  $\psi_j \leq \psi_{j+1}$ .  $\square$

**Satz 2.103.** Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$  mit  $\text{supp } f \subseteq O$ ,  $O \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  eine Funktion  $f_\varepsilon \in C_c(O, \mathbb{R})$ , so dass  $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon$ .

*Beweis.* Nach Satz 2.101 existiert  $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  mit  $\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon/2$ . Sei  $(\psi_j)$  die in Lemma 2.102 konstruierte Folge. Dann ist  $\psi_j \tilde{f} \in C_c(O, \mathbb{R})$  für alle  $j$ , und mit dominierter Konvergenz folgt  $\|\psi_j \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \rightarrow 0$ . Die Behauptung folgt mit  $f_\varepsilon := \psi_j \tilde{f}$  für ein  $j$ , so dass  $\|\psi_j \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \leq \varepsilon/2$ .  $\square$

**Aufgabe 2.104.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Seien  $K, U \subseteq X$  mit  $U$  offen,  $K$  kompakt und  $K \subseteq U$ . Dann ist

$$0 < d(K, \partial U) = d(K, U^c) := \inf\{d(x, z) : x \in K, z \in U^c\}.$$

## 2.8 Transformationssatz

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Koordinatentransformation für Integrale der Bauart

$$\int_V f \, d\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\lambda_n$$

zu beweisen, wobei  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist. Wir arbeiten hier wieder im Maßraum  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition 2.105.** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  nicht leere, offene Mengen. Es sei  $\Phi : U \rightarrow V$  bijektiv. Sind  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  stetig differenzierbar, dann heißt  $\Phi$   $C^1$ -Diffeomorphismus.

Die Ableitung von  $\Phi$  ist die Matrix

$$\Phi'(x) = \left( \frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots n}$$

Es folgt, dass  $\Phi'(x)$  und  $\Phi^{-1}(y)$  invertierbar sind: Differenzieren der Gleichung  $\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x$  ergibt  $(\Phi^{-1})'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) = I_n$ , woraus  $\Phi'(x)^{-1} = (\Phi^{-1})'(\Phi(x))$  folgt.

Die Ableitungen  $\Phi'$  und  $(\Phi^{-1})'$  sind Abbildungen nach  $\mathbb{R}^{n,n}$ , den wir wie folgt mit einer Norm versehen.

**Definition 2.106.** Für  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  definiere

$$\|A\|_\infty := \max_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Ax\|_\infty.$$

Für die induzierte Matrixnorm gilt:

- $A \mapsto \|A\|_\infty$  ist eine Norm auf  $\mathbb{R}^{n,n}$ ,

- 1 •  $\|A\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$  (Zeilensummennorm),
- 2 •  $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,
- 3 •  $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$  für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

4 **Satz 2.107** (Mittelwertsatz). *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  stetig diffe-*  
5 *renzierbar. Es seien  $x_1, x_2 \in U$ , so dass  $tx_1 + (1-t)x_2 \in U$  für alle  $t \in (0, 1)$*   
6 *ist. Dann gilt*

$$7 \quad \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_\infty \leq \sup_{t \in (0,1)} \|\Phi'(tx_1 + (1-t)x_2)\|_\infty \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

8 Anwenden des Mittelwertsatzes auf  $h \mapsto \Phi(x+h) - \Phi(x)h$  ergibt

$$9 \quad \|\Phi(x+h) - \Phi(x) - \Phi'(x)h\|_\infty \leq \sup_{t \in (0,1)} \|\Phi'(x+th) - \Phi'(x)\|_\infty \|h\|_\infty \quad (2.108)$$

10 wenn  $x+th \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

11 **Definition 2.109.** *Wir definieren den Würfel mit Seitenlänge  $2r$  und Mittel-*  
12 *punkt  $x_0$  als*

$$13 \quad W(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_\infty \leq r\}.$$

14 Damit folgt  $\|x_1 - x_2\|_\infty \leq 2r$  für alle  $x_1, x_2 \in W(x_0, r)$  und  $\lambda_n(W(x_0, r)) =$   
15  $(2r)^n$ .

16 Seien  $x, x_0 \in U$ . Ist  $\|x - x_0\|_\infty$  klein, dann folgt aus der Differenzierbarkeit

$$17 \quad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0).$$

18 Ist  $W \subseteq U$  ein kompakter Würfel mit  $x_0 \in W$ , dann erwarten wir

$$19 \quad \Phi(W) \approx \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(W - x_0)$$

20 und damit

$$21 \quad \lambda_n(\Phi(W)) \approx |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W).$$

22 Diese Idee wird im nächsten Lemma rigoros bewiesen.

23 **Lemma 2.110.** *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus.*  
24 *Sei  $x_0 \in U$  gegeben. Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_1 > 0$ , so dass für alle*  
25 *Würfel  $W$  mit Seitenlänge kleiner als  $\delta_1$  und  $x_0 \in W \subseteq U$  gilt*

$$26 \quad \left| \lambda_n(\Phi(W)) - |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W) \right| \leq \varepsilon \lambda_n(W).$$



## 2.8. Transformationssatz

---

1 *Beweis.* Definiere

$$2 \quad T := \Phi'(x_0), \quad L(x) := \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0).$$

3 Sei  $x_0 \in U$ . Dann existiert ein  $\rho > 0$ , so dass  $V_0 := W(\Phi(x_0), \rho) \subseteq V$ . Hier ist  
4 wichtig, dass  $V_0$  kompakt und konvex ist. Wähle  $\delta_0 > 0$  so, dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$   
5 mit  $\|x - x_0\|_\infty \leq \delta_0$  gilt

$$6 \quad x \in U, \quad \Phi(x), L(x) \in V_0. \quad (2.111)$$

7 Setze

$$8 \quad M := \max_{y \in V_0} \|(\Phi^{-1})'(y)\|_\infty. \quad (2.112)$$

9 Dann ist auch  $\|T^{-1}\|_\infty = \|\Phi'(x_0)^{-1}\|_\infty = \|(\Phi^{-1})'(\Phi(x_0))\|_\infty \leq M$ . Sei  $\varepsilon > 0$   
10 gegeben. Wähle  $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$  so, dass

$$11 \quad |(1 \pm 2\varepsilon_1)^n - 1| \leq \varepsilon. \quad (2.113)$$

12 Dann existiert ein  $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ , so dass

$$13 \quad \sup_{x \in W(x_0, \delta_1)} \|\Phi'(x) - \Phi'(x_0)\|_\infty \leq M^{-1}\varepsilon_1.$$

14 Daraus folgt für  $x \in W(x_0, \delta_1)$  mit dem Mittelwertsatz (2.108)

$$15 \quad \|\Phi(x) - L(x)\|_\infty = \|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\|_\infty \\
16 \quad \leq \sup_{\tilde{x} \in W(x_0, \delta_1)} \|\Phi'(\tilde{x}) - \Phi'(x_0)\|_\infty \|x - x_0\|_\infty = M^{-1}\varepsilon_1 \|x - x_0\|_\infty. \quad (2.114)$$

17 Sei  $W$  ein Würfel mit Seitenlänge  $\delta \in (0, \delta_1)$  und  $x_0 \in W \subseteq U$ . Es folgt  
18  $\|x - x_0\|_\infty \leq \delta \leq \delta_0$  für alle  $x \in W$ . Dann ist  $\Phi(W), L(W) \subseteq V_0$ .

19 (1) Wir zeigen, dass  $T^{-1}\Phi(W)$  in einem Würfel mit Seitenlänge  $(1 + 2\varepsilon_1)\delta$   
20 enthalten ist. Sei  $x \in W$ . Dann folgt aus (2.112) und (2.114)

$$21 \quad \|T^{-1}(\Phi(x) - L(x))\|_\infty \leq \|T^{-1}\|_\infty \|\Phi(x) - L(x)\|_\infty \leq \varepsilon_1 \delta.$$

22 Damit bekommen wir

$$23 \quad T^{-1}(\Phi(W) - \Phi(x_0)) \subseteq T^{-1}(L(W) - \Phi(x_0)) + W(0, \varepsilon_1 \delta) \\
= W - x_0 + W(0, \varepsilon_1 \delta).$$

24 Dabei ist  $W + W(0, \varepsilon_1 \delta)$  ein Würfel mit Seitenlänge  $(1 + 2\varepsilon_1)\delta$ . Es folgt mit

1 Satz 1.83 und (2.113)

$$\begin{aligned} \lambda_n(\Phi(W)) &\leq |\det T|((1 + 2\varepsilon_1)\delta)^n \\ &= |\det T|(1 + 2\varepsilon_1)^n \lambda_n(W) \leq (1 + \varepsilon) |\det T| \lambda_n(W). \end{aligned}$$

3 (2) Sei  $\tilde{W} = W(\tilde{x}, (1 - 2\varepsilon_1)\delta/2) \subseteq W$  der Würfel mit Seitenlänge  $(1 - 2\varepsilon_1)\delta$ ,  
 4 der den gleichen Mittelpunkt wie  $W$  hat. Wir zeigen nun, dass  $\Phi^{-1}(L(\tilde{W})) \subseteq W$   
 5 ist. Dazu sei  $x \in \tilde{W}$ . Dann gilt mit dem Mittelwertsatz, (2.111) und (2.114)

$$\begin{aligned} \|\Phi^{-1}(L(x)) - \Phi^{-1}(\Phi(x))\|_\infty &\leq \sup_{y \in V_0} \|(\Phi^{-1})'(y)\|_\infty \cdot \|L(x) - \Phi(x)\|_\infty \\ &\leq MM^{-1}\varepsilon_1 \|x - x_0\|_\infty = \varepsilon_1 \|x - x_0\|_\infty \leq \varepsilon_1 \delta. \end{aligned}$$

8 Daraus folgt

$$\|\Phi^{-1}(L(x)) - \tilde{x}\|_\infty \leq \varepsilon_1 \delta + \|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \varepsilon_1 \delta + (1 - 2\varepsilon_1)\delta/2 = \delta/2$$

10 und

$$\Phi^{-1}(L(\tilde{W})) \subseteq \tilde{x} + W(0, \delta/2) = W.$$

12 Es folgt  $L(\tilde{W}) \subseteq \Phi(W)$  nach Anwenden von  $\Phi$ , und mit Satz 1.83 bekommen  
 13 wir

$$\lambda_n(\Phi(W)) \geq |\det T| \lambda_n(\tilde{W}) = |\det T| \lambda_n(W)(1 - 2\varepsilon_1)^n \geq (1 - \varepsilon) |\det T| \lambda_n(W).$$

15 Damit erhalten wir

$$|\lambda_n(\Phi(W)) - |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W)| \leq \varepsilon |\det T| \lambda_n(W),$$

17 was die Behauptung ist. □

18 **Lemma 2.115.** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus.  
 19 Dann ist  $\Phi \mathcal{L}(n)|_U - \mathcal{L}(n)|_V$ -messbar. Ist  $N \subseteq V$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge, dann ist  
 20 auch  $\Phi^{-1}(N)$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge.

21 Hierbei ist  $\mathcal{L}(n)|_U$  die Einschränkung von  $\mathcal{L}(n)$  auf Teilmengen von  $U$  defi-  
 22 niert durch

$$\mathcal{L}(n)|_U = \{A \subseteq U : A \in \mathcal{L}(n)\} = \{A \cap U : A \in \mathcal{L}(n)\}.$$

24 *Beweis.* Ist  $O \subseteq V$  offen, dann ist  $\Phi^{-1}(O)$  offen. Damit folgt, dass  $\Phi \mathcal{B}(U) -$   
 25  $\mathcal{B}(V)$ -messbar ist. Sei nun  $A \in \mathcal{L}(n)|_V$ . Nach Satz 1.70 existiert  $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$   
 26 und  $N \in \mathcal{L}(n)$  mit  $\lambda_n(N) = 0$  und  $A = K \cup N$ . Indem wir  $K$  und  $N$  durch

## 2.8. Transformationssatz

$K \cap V$  und  $N \cap V$  ersetzen, können wir annehmen, dass  $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_V = \mathcal{B}(V)$  und  $N \in \mathcal{L}(n)|_V$  ist. Aus der Zerlegung bekommen wir auch, dass  $\Phi^{-1}(A) = \Phi^{-1}(K) \cup \Phi^{-1}(N)$  ist. Da  $\Phi^{-1}(K) \in \mathcal{B}(U)$  ist, muss noch  $\Phi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(n)|_U$  nachgewiesen werden.

Sei  $x \in V$ . Dann ist  $d(x, \partial V) > 0$  und  $W_x := W(x, d(x, \partial V)/2) \subseteq V$ . Es folgt  $V = \bigcup_{x \in V \cap \mathbb{Q}^n} W_x$ . Sei  $x \in V \cap \mathbb{Q}^n$ . Da  $W_x$  kompakt und  $\Phi^{-1}$  stetig differenzierbar ist, ist  $(\Phi^{-1})'$  auf  $W_x$  beschränkt. Da  $W_x$  konvex ist, ist  $\Phi^{-1}$  Lipschitz-stetig auf  $W_x$  wegen [Satz 2.107](#). Nach [Satz 1.75](#) ist dann  $\Phi^{-1}(W_x \cap N)$  eine Nullmenge. Da  $\Phi^{-1}(N) = \bigcup_{x \in V \cap \mathbb{Q}^n} \Phi^{-1}(W_x \cap N)$  ist  $\Phi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(n)|_U$  und  $\lambda_n(\Phi^{-1}(N)) = 0$ .  $\square$

**Folgerung 2.116.** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{L}(n)|_V - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. Dann ist  $f \circ \Phi$   $\mathcal{L}(n)|_U - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.

**Satz 2.117.** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Sei  $f \in C_c(V, \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\int_V f \, d\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\lambda_n.$$

*Beweis.* Da  $\text{supp } f$  kompakt ist, ist  $f$  beschränkt und integrierbar auf  $V$ . Weiter ist  $\Phi^{-1}(\text{supp } f)$  kompakt, damit ist  $|\det \Phi'|$  beschränkt auf  $\Phi^{-1}(\text{supp } f)$ , und  $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$  ist integrierbar auf  $V$ .

Wir beweisen folgende Aussage: es gilt

$$\int_{\Phi(W)} f \, d\lambda_n = \int_W (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\lambda_n \quad (2.118)$$

für alle kompakten Würfel  $W \subseteq U$ .

Daraus folgt die Behauptung: Wegen [Aufgabe 2.104](#) ist  $d(\text{supp}(f \circ \Phi), U^c) =: r > 0$ . Wie im Beweis von [Satz 1.14](#) überdecken wir den  $\mathbb{R}^n$  durch eine disjunkte Vereinigung halboffener Würfel  $(W_j)$  der Seitenlänge  $r/2$ , siehe [\(1.15\)](#). Ist  $W_j \cap \text{supp}(f \circ \Phi) \neq \emptyset$  dann ist  $\overline{W_j} \subseteq U$  wegen der Definition von  $r$ , und die Formel [\(2.118\)](#) gilt für  $\overline{W_j}$ . Aufsummieren über alle  $j$  mit  $W_j \cap \text{supp}(f \circ \Phi) \neq \emptyset$  ergibt dann die Behauptung.

Sei nun  $W \subseteq U$  ein kompakter Würfel. Wir definieren

$$\Delta(W) := \int_{\Phi(W)} f \, d\lambda_n - \int_W (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\lambda_n.$$

Wir zerlegen  $W$  in  $2^n$  Würfel  $(W_j)$  mit halber Seitenlänge. Diese Würfel haben nur Randpunkte gemeinsam, und so ist  $\lambda_n(W_j \cap W_{j'}) = 0$  für alle  $j \neq j'$ . Wegen [Lemma 2.115](#) angewendet auf  $\Phi^{-1}$  ist auch  $\lambda_n(\Phi(W_j) \cap \Phi(W_{j'})) = \lambda_n(\Phi(W_j \cap W_{j'})) = 0$ .

1  $W_{j'}) = 0$  für  $j \neq j'$ . Aus der Additivität der Integrale bekommen wir

$$2 \quad \Delta(W) = \sum_{j=1}^{2^n} \Delta(W_j).$$

3 und

$$4 \quad \frac{|\Delta(W)|}{\lambda_n(W)} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{|\Delta(W_j)|}{\lambda_n(W_j)}.$$

5 Damit gibt es ein  $W_j$  mit  $\frac{\Delta(W_j)}{\lambda_n(W_j)} \geq \frac{|\Delta(W)|}{\lambda_n(W)}$ .

6 Damit konstruieren wir uns eine absteigende Folge  $(W_k)$  kompakter Würfel  
 7 mit  $W_1 = W$ ,  $\lambda_n(W_k) \searrow 0$ , so dass  $\frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)}$  monoton wachsend ist. Wir zeigen  
 8  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)} = 0$ .

9 Da die  $W_k$  kompakt sind, existiert  $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} W_k$  ([Aufgabe 2.119](#)). Sei  $y_0 :=$   
 10  $\Phi(x_0)$ . Wir schreiben

$$\begin{aligned} 11 \quad \Delta(W_k) &= \int_{\Phi(W_k)} f - f(y_0) \, d\lambda_n - \\ 12 \quad &\int_{W_k} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| - (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \, d\lambda_n \\ 13 \quad &+ \int_{\Phi(W_k)} f(y_0) \, d\lambda_n - \int_{W_k} (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \, d\lambda_n. \end{aligned}$$

14 Wir zeigen, dass diese drei Summanden beliebig klein werden. Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $W$   
 15 und  $\Phi(W)$  kompakt sind, bekommen wir aus der gleichmäßigen Stetigkeit von  
 16  $f$ ,  $f \circ \Phi$  und  $|\det \Phi'(x_0)|$ , dass

$$17 \quad \int_{\Phi(W_k)} |f - f(y_0)| \, d\lambda_n \leq \frac{\varepsilon}{3} \lambda_n(W_k),$$

$$18 \quad \int_{W_k} \left| (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| - (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \right| \, d\lambda_n \leq \frac{\varepsilon}{3} \lambda_n(W_k)$$

20 für alle  $k$  groß genug. Aus [Lemma 2.110](#) bekommen wir

$$\begin{aligned} 21 \quad &\left| \int_{\Phi(W_k)} f(y_0) \, d\lambda_n - \int_{W_k} (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \, d\lambda_n \right| \\ 22 \quad &= |f(y_0)| \cdot |\lambda(\Phi(W_k)) - |\det \Phi'(x_0)| \lambda(W_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \lambda_n(W_k) \end{aligned}$$

23 für alle  $k$  groß genug. Es folgt

$$24 \quad |\Delta(W_k)| \leq \varepsilon \lambda_n(W_k)$$

## 2.8. Transformationssatz

für alle  $k$  groß genug. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)} = 0$  und damit  $|\Delta(W_k)| = 0$  für alle  $k$ , und insbesondere  $\Delta(W) = 0$ .  $\square$

**Aufgabe 2.119.** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Sei  $(K_j)$  eine Folge kompakter Mengen mit  $K_j \supseteq K_{j+1}$  für alle  $j$ . Dann ist  $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset$ .

**Satz 2.120** (Transformationssatz). Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt ist  $f$  integrierbar genau dann, wenn  $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$  auf  $U$  integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_V f \, d\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\lambda_n.$$

*Beweis.* (1) Sei  $f$  integrierbar. Wegen **Folgerung 2.116** ist  $g := (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$   $\mathcal{L}(n) - \mathcal{B}^1$ -messbar. Nach **Satz 2.103** können wir  $f$  durch eine Folge von  $C_c(V, \mathbb{R})$ -Funktionen approximieren, die nach **Satz 2.58** eine fast überall konvergente Teilfolge hat. Es gibt also eine Folge  $(f_k)$  mit  $f_k \in C_c(V)$ ,  $\|f - f_k\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \rightarrow 0$  und  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x \in V \setminus N$ , wobei  $N \subseteq V$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge ist.

Da  $\Phi^{-1}(N)$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge ist, folgt auch

$$g_k := (f_k \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \rightarrow (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| = g$$

$\lambda_n$ -fast überall auf  $U$ .

Wegen **Satz 2.117** gilt  $\int_V f_k \, d\lambda_n = \int_U g_k \, d\lambda_n$ . Da  $(f_k)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^1(\lambda_n)$  ist, ist auch  $(g_k)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^1(\lambda_n)$ . (Hier haben wir stillschweigend  $f_k$  und  $g_k$  mit Null auf ganz  $\mathbb{R}^n$  fortgesetzt.) Damit existiert  $G \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$  mit  $\|g_k - G\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \rightarrow 0$ . Da eine Teilfolge von  $(g_k)$   $\lambda_n$ -fast überall gegen  $G$  konvergiert, folgt  $g = G$   $\lambda_n$ -fast überall und  $g = (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$  ist integrierbar. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_V f \, d\lambda_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V f_k \, d\lambda_n \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U g_k \, d\lambda_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U G \, d\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\lambda_n. \end{aligned}$$

Sei nun  $g = (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$  integrierbar. Nach Teil (1) angewendet auf  $\Psi := \Phi^{-1}$  ist dann auch  $(g \circ \Psi) |\det \Psi'|$  integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_U g \, d\lambda_n &= \int_V (g \circ \Psi) |\det \Psi'| \, d\lambda_n \\ &= \int_V f(\Phi(\Psi(x))) \underbrace{|\det \Phi'(\Psi(x))| \cdot |\det \Psi'(x)|}_{=1} \, d\lambda_n(x) \\ &= \int_V f \, d\lambda_n, \end{aligned}$$

1 was die Behauptung ist. □

2 **Folgerung 2.121** (Polarkoordinaten 2d). *Definiere*

$$3 \quad \Phi(r, \phi) := \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}.$$

4 *Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Dann ist  $f$  integrierbar genau dann wenn  $f \circ \Phi$  auf*  
 5  *$[0, \infty) \times [0, 2\pi)$  integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$6 \quad \int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \phi, r \sin \phi) r \, dr \, d\phi.$$

7 *Beweis.* Das folgt aus dem Transformationssatz, [Satz 2.120](#), und dem Satz von  
 8 Fubini, [Satz 2.89](#). Wir setzen

$$9 \quad U := (0, \infty) \times (0, 2\pi), \quad V := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

10 Dann ist  $\Phi : U \rightarrow V$  bijektiv und differenzierbar. Weiter ist

$$11 \quad \det(\Phi'(r, \phi)) = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = r.$$

12 Also ist  $\Phi'$  auf  $U$  invertierbar, und  $\Phi$  ist ein Diffeomorphismus. Da die Ränder  
 13 von  $U$  und  $V$  Nullmengen sind, folgt die Behauptung. □

14 **Folgerung 2.122.** *Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$   $\sigma$ -endlich und  $f : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  mess-*  
 15 *bar. Dann gilt*

$$16 \quad \int_X f^p \, d\mu = p \int_{(0, +\infty)} t^{p-1} \mu(\{x : f(x) > t\}) \, d\lambda_1(t)$$

17 für alle  $p > 1$ .

18 *Beweis.* Aus [Lemma 2.93](#) bekommen wir

$$19 \quad \int_X f^p \, d\mu = \int_{(0, +\infty)} \mu(\{x : f(x)^p > t\}) \, d\lambda_1(t).$$

20 Mit  $t = \Phi(s) := s^p$  ist

$$21 \quad \int_{(0, +\infty)} \mu(\{x : f(x) > t^{1/p}\}) \, d\lambda_1(t) = \int_{(0, +\infty)} \mu(\{x : f(x) > s\}) \cdot ps^{p-1} \, d\lambda_1(s).$$

22 □