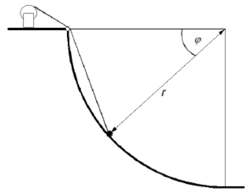
Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

Aufgabe 4.2: *Abseilen* .... (4 Punkte)

Eine Masse wird auf einer Viertelkreisbahn (Radius r) an einem Seil herabgelassen (siehe Skizze). Das Seil wird von einer Winde (Radius R) mit konstanter Drehzahl (n-Umdrehungen pro Zeit) abgewickelt.

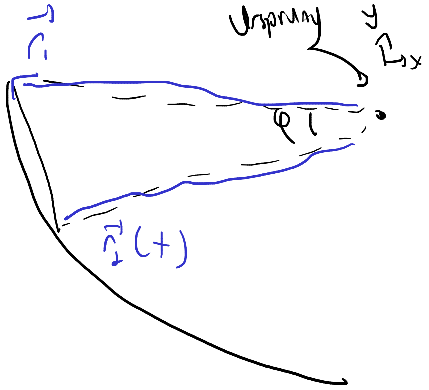


(1 P) a) Bestimmen Sie die Länge des Seils innerhalb der Viertelkreisbahn als Funktion des Winkels φ.

(1 P) b) Bestimmen Sie die zeitliche Änderung des Winkels $\dot{\varphi}(\varphi)$. Nutzen Sie dazu die zeitliche Änderung der Länge des Seils.

(2 P) c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(\varphi)$ der Masse und daraus die Beschleunigung $\vec{a}(\varphi)$. Identifizieren Sie die Normalkomponente a_n und die Tangentialkomponente a_t. Verwenden Sie ein geeignetes Koordinatensystem.

a)



$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2(t) = -r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} r\cos\varphi - r \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Länge des Seils: $l(\varphi) = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

$$= \left[(r\cos\varphi - r)^2 + r^2\sin^2\varphi\right]^{1/2}$$

$$= \left[r^2 - 2r^2\cos\varphi + r^2\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\, r \sqrt{1-\cos\varphi}$$

b)

$$\dot{l} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{2}\, r\sqrt{1-\cos\varphi}\right]$$

$$= \sqrt{2}\, r\,(1-\cos\varphi)^{-1/2}\left(\tfrac{1}{2}\right)(\sin\varphi)(\dot{\varphi})$$

$$= \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi}}\,\dot{\varphi}$$

Es gilt auch

$$\dot{l} = 2\pi R n$$

also

$$2\pi R n = \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi}}\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{r\sin\varphi}$$

c) Koordinatensystem in (a) gezeichnet.

$$\vec{r}(t) = -r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -r\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sin\varphi}\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{2\sqrt{2}\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sin\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi} + \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\left[\frac{2\sqrt{2}\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sin\varphi}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sin\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi} + 2\sqrt{2}\pi R n\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\end{pmatrix}\left\{\frac{\frac{\sin\varphi}{2\sqrt{1-\cos\varphi}}\sin\varphi - \sqrt{1-\cos\varphi}\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right\}\dot{\varphi}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sin\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi} + 2\sqrt{2}\pi R n\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{2\sqrt{1-\cos\varphi}} - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\sqrt{1-\cos\varphi}\right\}\dot{\varphi}$$

Weil $\hat{e}_r \parallel \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ und $\hat{e}_t \parallel \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\end{pmatrix}$, sind die Komponente klar!

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sin\varphi}\,\frac{2\sqrt{2}\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{r\sin\varphi}$$

$$= \frac{8\pi^2R^2n^2}{r\sin^2\varphi}(1-\cos\varphi)$$

$$a_t = 2\sqrt{2}\pi R n\left\{\frac{1}{2\sqrt{1-\cos\varphi}} - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\sqrt{1-\cos\varphi}\right\}\frac{2\sqrt{2}\pi R n\sqrt{1-\cos\varphi}}{r\sin\varphi}$$

$$= \frac{8\pi^2R^2n^2}{r\sin\varphi}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}(1+\cos\varphi)\right]$$

$$= \frac{4\pi^2R^2n^2}{r\sin\varphi}\left[1 - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \cot^2\varphi\right]$$