Universität Würzburg
Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Giorgio Sangiovanni
Linus Aliani, Alexander Baum,
Max Fischer, Jonathan Karl, Niklas Witt

6. Übung Statistische Mechanik und Thermodynamik

Bitte laden Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 28.11.2024 um 16:00 Uhr auf WueCampus hoch.
Die Blätter dürfen Sie dabei in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 *Großkanonische Behandlung des idealen Gases* **6 P.**

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas in drei Dimensionen mit Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \tag{1}$$

Aus der Vorlesung ist die kanonische Zustandssumme bekannt als

$$Z_{\mathrm{K}}(N) = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2m\pi}{\beta h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die großkanonische Zustandssumme Z_{G} und das großkanonische Potential J. *2 P.*

b) Ermitteln Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$. *1 P.*

c) Berechnen Sie mit Hilfe der großkanonischen Zustandssumme den Druck p und leiten Sie daraus die Zustandsgleichung her. *1 P.*

d) Bestimmen Sie das chemische Potential μ. *1 P.*

e) Bestimmen Sie die Entropie S und vergleichen Sie den Ausdruck mit der *mikrokanonisch* abgeleiteten Sackur-Tetrode Gleichung (s. Vorlesung). *1 P.*

Aufgabe 2 *Teilchenschwankung im großkanonischen Ensemble* **4 P.**

a) Zeigen Sie, dass im großkanonischen Ensemble die Schwankung ΔN der Teilchen durch *2 P.*

$$(\Delta N)^2 \,=\, k_{\mathrm{B}}\, T \left(\frac{\partial N(T,\, V,\, \mu)}{\partial \mu} \right)_{T,V} \tag{3}$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie mit Gleichung (3), dass die isotherme Kompressibilität: *2 P.*

$$\kappa_T \,=\, -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{N,T} \tag{4}$$

positiv ist. Schreiben Sie dazu in $N\,\mathrm{d}\mu \,=\, V\,\mathrm{d}p \,-\, S\,\mathrm{d}T$ das Differential $\mathrm{d}p$ für $p(T,\, V,\, N)$ aus. Hieraus können Sie $(\partial N/\partial \mu)_{T,V}$ ablesen. Verwenden Sie nun $p \,=\, p(T,\, V/N) \,=\, p(T, \nu)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 *Kanonische und großkanonischer Verteilung* **5 P.**

In der Vorlesung wurde die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(E)$ der kanonischen und großkanonischen Gesamtheit aus der Gleichgewichtsbedingung eines kleinen Systems angekoppelt an ein Wärmebad (mit Energie- und Teilchenaustausch) hergeleitet. Alternativ kann die Verteilung aus der Forderung bestimmt werden, dass die Entropie $S = -k_\mathrm{B}\langle \log \rho \rangle = -k_\mathrm{B} \int \mathrm{d}\Gamma \rho(E) \log \rho(E)$ extremal sein soll.

a) Leiten Sie aus einem entsprechenden Variationsprinzip mit der Nebenbedingung der Wahrscheinlichkeitsnormierung ($1 = \int \mathrm{d}\Gamma \rho(E)$) und dem Mittelwert der Energie ($E = \int \mathrm{d}\Gamma \rho(E) E$) die Wahrscheinlichkeitsverteilung des kanonischen Ensembles her. *3 P.*

b) Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeitsverteilung des großkanonischen Ensembles, indem sie die mittlere Teilchenzahl ($N = \int \mathrm{d}\Gamma \rho(E) N(E)$) als zusätzliche Nebenbedingung berücksichtigen. *2 P.*

Hinweis: Addieren Sie die Nebenbedingungen mittels Lagrange-Parametern zur Entropie (als Funktional der Wahrscheinlichkeiten) und variieren Sie $\rho(E_\mathrm{S})$ mit der Energie E_S des (groß)kanonisch an das Wärmebad angekoppelten Systems. Mit welchen physikalischen Größen müssen Sie die Lagrange-Parameter identifizeren, um die aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke der Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erhalten?