Lehrstuhl für Mathematik VIII
Julius-Maximilians Universität Würzburg
Vorlesung Stochastik 1
Wintersemester 2024/25
Markus Bibinger / Adrian Grüber

# Übungsblatt 4

**Klausurübung 4.1**

Beim $n$-fachen Wurf einer fairen Münze, $n \geq 3$, interessieren wir uns für die Wartezeit (die Anzahl an benötigten Würfen), bis zum ersten Mal Kopf oder dreimal Zahl gefallen ist.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment an.

(b) Beschreiben Sie diese Wartezeit durch eine Zufallsvariable $W$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum und geben Sie die Verteilung der Zufallsvariable $W$ an.

(c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(W = 3|W \geq 2)$.

**Übung 4.2**

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Für eine Menge $A \subseteq \Omega$ betrachten wir die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_A$ (Borel-)messbar ist genau dann wenn $A \in \mathcal{A}$.

(b) Zeigen Sie, dass abzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borel-Mengen sind, d.h. Elemente der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}$.

(c) Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Borel-Borel-)messbar ist, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f$ abzählbar ist.

(d) Beweisen oder widerlegen Sie: Wann immer $|f|$ für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar ist, so ist $f$ selbst messbar.

**Aufgabe 4.3 (keine Abgabe)**

Zeigen Sie, dass eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable $X$ genau dann geometrisch $\mathrm{Geom}(p)$ verteilt ist, mit Parameter $p \in (0, 1)$, wenn

$$\mathbb{P}(X \geqslant n + k \,|\, X > n) = \mathbb{P}(X \geqslant k)$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt.

**Aufgabe 4.4 (keine Abgabe)**

Banach war Raucher und trug stets in jeder seiner beiden Manteltaschen eine Schachtel mit Streichhölzern. Zum Anzünden seiner Pfeife griff er zufällig, mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/2$, in eine seiner beiden Manteltaschen, um ein Streichholz daraus hervorzuholen. Irgendwann greift er in die Tasche mit einer leeren Schachtel. Wie viele Streichhölzer sind dann noch in der Schachtel in der anderen Tasche?

(a) Nehmen Sie an, die vollen Schachteln enthalten jeweils $n \in \mathbb{N}$ Streichhölzer. Modellieren Sie die Anzahl an verbleibenden Streichhölzern in der Schachtel der anderen Tasche durch eine Zufallsvariable $X_n$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Sei nun zunächst $n = 2$. Leiten Sie die Verteilung von $X_2$ her.

(c) Beweisen Sie nun allgemein, dass die Wahrscheinlichkeit für $\{X_n = k\}$ gegeben ist durch

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{2n-k}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n-k}}\,.$$

(d) Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{l=0}^{n} \binom{n+l}{l} 2^{-l} = 2^n$$

und damit die Normiertheit der Verteilung von $X_n$.

**Bearbeitung bis Donnerstag, den 14.11.2024**.