Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 12

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 15, 2024)

Problem 1. (a) Geben Sie die Definitionen von Gradient, Rotation und Divergenz an.

(b) Wir schreiben die Komponenten des dreidimensionalen Vektorprodukts als

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k,$$

wobei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor für $\mathbb{R}^3$ ist, mit $\epsilon_{ijk} = 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} =& \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{jl}\delta_{kl},\end{aligned}$$

mit δ dem Kronecker-δ.

(c) Zeigen Sie mit den Formeln aus (b) die folgenden Identitäten für beliebige Vektorfelder $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) =& (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = *(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})\end{aligned}$$

(d) Zeigen Sie damit, dass für beliebige skalare Funktionen $F(\vec{x})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{x})$ gilt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} F =& 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times A) =& 0\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times A =& \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot A) - \nabla^2 A \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (F\vec{A}) = (\boldsymbol{\nabla} F) \cdot \vec{A} + F\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{A},&\end{aligned}$$

mit Δ dem Laplace-Operator.

Proof. (a)

$$\begin{aligned}\text{grad } F &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i} \hat{x}_i \\ \text{div } \vec{F} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \\ \text{curl } \vec{F} &= \dots\end{aligned}$$

(b) Offensichtlich muss $j \neq k$ und $l \neq m$ sein, ansonsten wäre 1

□

Problem 2.