

Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lukas Then

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 2, 2023)

Problem 1. (a) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x) \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius $R = +\infty$ dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht durch ihre Taylorreihe um $x = 0$ dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9?

Problem 2. Es sei $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Geben Sie das Taylorpolynom P_2 von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an und schätzen Sie den maximalen Fehler von $|f(x) - P_2(x)|$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ab.

Problem 3. Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in x_0 .

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ im Punkt $x_0 = 2$.

(b) $g(x) = \sin^2(\pi x)$ in $x_0 = 3$.

(c) $h(x) = \sin^{-1}(x)$ in $x_0 = 0$.

Proof. (a)

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 3(2) + 2 = 4$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f'(2) = 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(2) = 6$$

$$f'''(x) = 6 = f(2)$$

$$f''''(x) = 0$$

Das Taylorpolynom ist dann

$$4 + 3(x - 2) + 3(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

(b)

$$g(x) = \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi x))$$

$$g(3) = 0$$

$$g'(x) = \pi \sin(2\pi x)$$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} \sin(2\pi x) & n \text{ ungerade} \\ \cos(2\pi x) & n \text{ gerade} \end{cases} \quad n \geq 1$$

$$g^{(n)}(3) = (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} \quad n \geq 1$$

Das Taylorpolynom vom Grad 30 ist

$$\sum_{n=1}^{15} \left[(-1)^{\lfloor (2n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} (x - 3)^{2n} \right].$$

(c)

$$h(x) = \sin^{-1} x$$

$$h(0) = 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$h'(0) = 1$$

$$h''(x) = -\frac{1}{2} (1-x^2)^{-3/2} (-2x)$$

$$=x(1-x^2)^{-3/2}$$

$$h''(0)=0$$

$$h'''(x)=(1-x^2)^{-3/2}-\frac{3x}{2}(1-x^2)^{-5/2}(-2x)$$

$$=(1-x^2)^{-3/2}-3x^2(1-x^2)^{-5/2}$$

$$h'''(0)=1$$

□

Problem 4. Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von $\exp : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ für die markierten Zerlegungen (J_n, Ξ_n) mit der Auswahl $\Xi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

Proof. (a)

Lemma 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-1/n}) = 1.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-1/n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-1/n}}{1/n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-x}}{x} && x = 1/n \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{1} && \text{L'Hopital} \\ &= 1 && \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \exp \left(\frac{k+1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left(\frac{k+1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{(e-1)e^{1/n}}{e^{1/n} - 1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{e-1}{1 - e^{-1/n}} \end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e - 1}{n(1 - e^{-1/n})} = e - 1.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \exp \left(\frac{k}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left(\frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{e - 1}{e^{1/n} - 1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{e - 1}{e^{1/n} (1 - e^{-1/n})} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e - 1}{n(e^{1/n} (1 - e^{-1/n}))} = e - 1.$$

□