# Kapitel 3

# Integration auf Mannigfaltigkeiten

Ziel: Integrale über Kurven und Flächen. Anwendung: Längen- und Flächenberechnung, partielle Integration.

## 3.1 Untermannigfaltigkeiten

Dieses Kapitel folgt im Wesentlichen [For17, §14].

**Definition 3.1.** *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$, $0 \leq k \leq n-1$, $\alpha \geq 1$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine $\alpha$-mal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt mit*

*(1)* $M \cap U = \{x \in U : \ f(x) = 0\}$,

*(2)* $\mathrm{Rang}(f'(a)) = n - k$.

**Beispiel 3.2.** *(1) Jeder $k$-dimensionale lineare Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

*(2) Sei $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 = 1\}$. Dann ist $S_{n-1}$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$ für alle $\alpha$. Für $n = 2$ kann diese Menge lokal als Graph geschrieben werden: der obere (untere) Halbkreis kann als $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ dargestellt werden. In der Umgebung von $(\pm 1, 0)$ funktioniert diese Darstellung nicht, hier kann aber $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ gewählt werden.*

*(3) Ist $C \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Kurve, die sich selbst schneidet, dann ist $C$ keine Untermannigfaltigkeit.*

So eine Darstellung als Graph einer Funktion gilt tatsächlich für allgemeine Untermannigfaltigkeiten.

**Satz 3.3** (Untermannigfaltigkeit lokal Graph einer Funktion)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$. Sei $a \in M$. Dann gibt es — nach einer eventuellen Umnummerierung der Koordinaten — Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \ldots, a_k)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \ldots, a_n)$ und eine $\alpha$-mal stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$, so dass*

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \ x'' = g(x')\}.$$

*Beweis.* Sei $a \in M$. Nach Voraussetzung existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine $\alpha$-mal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $a \in U$, $M \cap U = \{x \in U : \ f(x) = 0\}$ und $\mathrm{Rang}(f'(a)) = n - k$.

Seien $i_1 \ldots i_{n-k}$ linear unabhängige Spalten von $f'(a)$. Wir nummerieren die Koordinaten nun um, so dass $(i_1, \ldots, i_{n-k}) = (k+1, \ldots, n)$. Nun wenden wir den Satz über die implizite Funktion auf die Gleichung $f(x', x'') = 0$ an. Da $\frac{\partial}{\partial x''} f$ im Punkt $a = (a', a'')$ vollen Rang hat, folgt die Behauptung: es gibt Umgebungen $U'$ und $U''$ von $a'$ und $a''$ mit $U' \times U'' \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$, so dass $f(x', g(x')) = 0$. Weiter ist

$$g'(x') = -\left(\frac{\partial}{\partial x''} f(x', g(x'))\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x'} f(x', g(x')).$$

Da $\frac{\partial}{\partial x''} f$ und $\frac{\partial}{\partial x'} f$ $(\alpha - 1)$-mal stetig differenzierbar sind, ist $g$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar. $\square$

**Definition 3.4.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere, offene Mengen. Es sei $\Phi : U \to V$ bijektiv. Sind $\Phi$ und $\Phi^{-1}$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar, dann heißt $\Phi$ $C^\alpha$-Diffeomorphismus.*

Das nächste Ziel ist es, eine Koordinatentransformation zu finden, die eine Untermannigfaltigkeit (lokal) auf einen Unterraum transformiert.

Dazu definieren wir zur Abkürzung für $k \leq n$ den Unterraum

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}.$$

**Satz 3.5** (Koordinatentransformation auf einen Unterraum)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$ genau dann, wenn zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein $C^\alpha$-Diffeomorphismus $F : U \to V$ existiert, so dass*

$$F(M \cap U) = E_k \cap V.$$

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Sei $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$. Sei $a \in M$. Seien $U'$, $U''$, $g$ wie in Satz 3.3, also dass gilt

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \; x'' = g(x')\}.$$

Definiere $U := U' \times U''$,

$$F(x', x'') := (x', x'' - g(x')),$$

und $V := F(U)$. Dann ist $F$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar. Sei $x = (x', x'') \in M \cap U$. Dann ist $x'' = g(x')$ und $F(x', x'') = (x', 0) \in E_k$.

Seien $x, y \in U$ mit $F(x) = F(y)$. Dann folgt $x' = y'$ und $x'' = y''$, also ist $F$ injektiv. Sei $z = (z', z'') \in V$. Dann ist $F(x', x'') = z$ für $x' = z'$ und $x'' = z'' + g(x') = z'' + g(z')$. Damit ist auch $F^{-1}$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar.

($\Leftarrow$) Sei nun $a \in M$, $U$ eine offene Umgebung von $a$, $V$ offen, $F : U \to V$ ein $C^\alpha$-Diffeomorphismus so, dass $F(M \cap U) = E_k \cap V$. Definiere $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$f(x) := (F_{k+1}(x), \ldots, F_n(x))^T.$$

Dann ist $f'(a)$ eine Matrix, die die letzten $n-k$ Zeilen der invertierbaren Matrix $F'(a)$ enthält. Also sind diese Zeilen linear unabhängig, $f'(a)$ hat vollen Rang Rang $f'(a) = n - k$. $\square$

Als letzte Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten wollen wir diese über eine Parameterdarstellung beschreiben. Um die Stetigkeit dieser Parameterdarstellung untersuchen zu können, müssen wir die Untermannigfaltigkeit $M$ mit einer Topologie versehen.

**Relativtopologie** Es sei $d_2(x, y) := \|x - y\|_2$ die von der Euklidischen Norm induzierte Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $(M, d_2)$ ein metrischer Raum. Die offenen Mengen in $(M, d_2)$ kann man folgendermaßen charakterisieren:

**Lemma 3.6.** *$U$ ist offen in $(M, d_2)$ genau dann, wenn eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen in $(\mathbb{R}^n, d_2)$) existiert mit $U = V \cap M$.*

*Beweis.* Definiere $B_\rho(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \; d_2(x, y) < \rho\}$. Sei $U$ offen in $(M, d_2)$. Sei $x \in U$. Dann existiert ein $r_x > 0$, so dass $B_{r_x}(x) \subseteq U$. [Zum Beispiel kann $r_x := \frac{1}{2} \sup\{r : \; B_r(x) \subseteq U\}$ gewählt werden.] Dann ist $M \cap B_{r_x}(x) \subseteq U$. Es folgt

$$U = \bigcup_{x \in U} (M \cap B_{r_x}(x)) = M \cap \left( \bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) \right),$$

was die Behauptung ist.

Sei nun $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ mit $U = V \cap M$. Sei $x \in U$. Dann existiert $\rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subseteq V$. Dann ist $x \in B_\rho(x) \cap M$. Die Menge $B_\rho(x) \cap M$ ist die Kugel mit Radius $\rho$ um $x$ in $(M, d_2)$, und damit ist $U$ offen in $(M, d_2)$. □

Wir vereinbaren folgende Sprechweise: $U \subseteq M$ *ist offen in* $M$ genau dann, wenn $U$ offen in $(M, d_2)$ ist.

**Definition 3.7.** *Seien $X_1, X_2$ metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X_1 \to X_2$ heißt Homöomorphismus (oder topologischer Isomorphismus), wenn $\varphi$ bijektiv ist, und $\varphi, \varphi^{-1}$ stetig sind.*

Damit eine bijektive Abbildungen $\varphi$ homöomorph ist, müssen Urbilder und *Bilder* offener Mengen wieder offen sein.

**Satz 3.8** (Bild der Parameterabbildung ist Untermannigfaltigkeit)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar mit* $\operatorname{Rang}\big(\varphi'(t)\big) = k$ *für alle $t \in U$. Dann existiert zu jedem $u \in U$ eine offene Umgebung $T \subseteq U$, so dass $\varphi(T)$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$ ist, und $\varphi : T \to \varphi(T)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $(\varphi(T), d_2)$ der zugrundeliegende metrische Raum ist.*

*Beweis.* Sei $u \in U$. Dann ist $\operatorname{Rang} \varphi'(u) = k$. Nach einer Umnummerierung der Komponenten von $\varphi$ ist $\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_k)}{\partial t}(u)$ invertierbar. Setze $\tilde{\varphi} := (\varphi_1 \dots \varphi_k)$. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung gibt es eine Umgebung $T \subseteq U$ von $u$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^k$ so dass $\tilde{\varphi} : T \to V$ ein $C^\alpha$-Diffeomorphismus ist. (Wegen $(\tilde{\varphi}^{-1})' = (\tilde{\varphi}')^{-1}$ ist $\tilde{\varphi}^{-1}$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar.)

Definiere $\Phi : T \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$\Phi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k) \quad i = 1 \dots k,$$

$$\Phi_j(t) = \varphi_j(t_1, \dots, t_k) + t_j \quad j = k+1 \dots n.$$

Ist $v \times z \in V \times \mathbb{R}^{n-k}$, dann hat die Gleichung $\Phi(t, y) = (v, z)$ die eindeutige Lösung $t = \tilde{\varphi}^{-1}(v)$ und $y = z - (\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)(v)$. Damit ist $\Phi$ ein $C^\alpha$-Diffeomorphismus. Weiter ist $\Phi(T \times \{0\}) = \varphi(T)$, wobei 0 der Nullvektor im $\mathbb{R}^{n-k}$ ist. Dann ist auch $T \times \{0\} = \Phi^{-1}(\varphi(T) \cap (V \times \mathbb{R}^{n-k}))$. Damit ist nach dem vorherigen Satz (Satz 3.5) angewendet auf $F := \Phi^{-1}$ die Menge $\varphi(T)$ eine Untermannigfaltigkeit.

Es bleibt, die Homöomorphismus-Eigenschaft zu zeigen. Sei $O$ offen in $\varphi(T)$. Wegen Lemma 3.6 existiert eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $O = V \cap \varphi(T)$. Da $\varphi$ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^k$. Dann ist $\varphi^{-1}(O) = \varphi^{-1}(V \cap \varphi(T)) = \varphi^{-1}(V) \cap T$ offen in $\mathbb{R}^k$.

Sei nun $O \subseteq T$ offen. Dann ist

$$\varphi(O) = \Phi(O \times \{0\}) = \Phi(T \times \{0\}) \cap \Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k}) = \varphi(T) \cap \Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k}).$$

Da $\Phi^{-1}$ stetig ist, ist $\Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k})$ offen. Wegen Lemma 3.6 ist $\varphi(O)$ offen in $(\varphi(T), d_2)$. Und $\varphi$ ist ein Homöomorphismus. □

**Definition 3.9.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$. Sei $V$ offen in $M$, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : T \to V$ ein Homöomorphismus, $\varphi$ als Funktion von $T$ nach $\mathbb{R}^n$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar mit* $\operatorname{Rang}(\varphi'(t)) = k$ *für alle $t \in T$. Dann heißt $\varphi$ lokale Parameterdarstellung (oder auch Immersion) von $M$. Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}$ heißt Karte auf $M$.*

**Satz 3.10** (Parameterdarstellung von Untermannigfaltigkeiten)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$ genau dann, wenn für jedes $a \in M$ eine in $M$ offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert.*

*Beweis.* ($\Leftarrow$) Wir verwenden die Charakterisierung aus Satz 3.5. Sei $a \in A$. Dann gibt es eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ mit $a \in V$. Wegen Satz 3.8 gibt es eine offene Teilmenge $T' \subseteq T$ mit $\varphi^{-1}(a) \in T'$, so dass $\varphi(T')$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$ ist. Dann gibt es nach Satz 3.5 einen $C^\alpha$-Diffeomorphismus $F : U \to \tilde{U}$ mit $a \in U$, so dass $F(\varphi(T') \cap U) = E_k \cap \tilde{U}$. Nun ist $\varphi(T') \subseteq M$ offen, das heißt, es existiert eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(T') = M \cap U'$ (Lemma 3.6). Es folgt $F(M \cap U' \cap U) = E_k \cap \tilde{U}$. Die Menge $U' \cap U$ ist eine offene Umgebung von $a$, damit ist $M$ nach Satz 3.5 eine Untermannigfaltigkeit.

Wir beweisen nun ($\Rightarrow$). Sei $a \in M$. Wir wenden Satz 3.3 an. Sei $a \in M$. Dann gibt es nach einer eventuellen Umnummerierung der Koordinaten Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ und eine $\alpha$-mal stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$, so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \ x'' = g(x')\}.$$

Wir setzen $V := M \cap (U' \times U'')$, $T := U'$, und für $t \in T = U'$

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\varphi : T \to V$ bijektiv und $\alpha$-mal stetig differenzierbar mit $\operatorname{Rang} \varphi'(t) = k$ für alle $t \in T$. Ist $z \in \varphi(T)$ dann ist $\varphi^{-1}(z) = (z_1 \dots z_k)$.

Wir benutzen Lemma 3.6. Sei $O$ offen in $\varphi(T)$. Dann ist $O = \varphi(T) \cap \tilde{O}$ mit einer offenen Menge $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $\varphi^{-1}(O) = \varphi^{-1}(\tilde{O}) \cap T$. Sei nun $O \subseteq T$

offen in $\mathbb{R}^k$. Dann ist $\varphi(O) = \varphi(T) \cap (O \times \mathbb{R}^{n-k})$. $\square$

**Satz 3.11** (Koordinatentransformation oder Kartenwechsel). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$. Seien $\varphi_i : T_i \to V_i$, $i = 1, 2$ lokale Parameterdarstellungen von $M$ mit $V_1 \cap V_2 =: V \neq \emptyset$.*

*Dann sind $\varphi_i^{-1}(V) =: W_i$ offene Teilmengen von $T_i$, $i = 1, 2$, und $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$ ist ein $C^\alpha$-Diffeomorphismus.*

*Beweis.* Da $\tau$ die Verknüpfung stetiger, bijektiver Funktionen ist, ist $\tau$ stetig und bijektiv. Auch $\tau^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ ist stetig.

Wir zeigen die Differenzierbarkeit von $\tau$. Sei $w_1 \in W_1$, $a := \varphi_1(w_1) \in V$. Wir benutzen Satz 3.5. Es existiert also eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $a$, eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein $C^\alpha$-Diffeomorphismus $F : U \to \tilde{U}$, so dass

$$F(M \cap U) = E_k \cap \tilde{U}.$$

Da wir $U$ durch $U \cap V$ ersetzen können, können wir $U \subseteq V$ annehmen.

Wir betrachten nun $F \circ \varphi_1$. Sei $w \in \varphi_1^{-1}(M \cap U)$. Dann ist

$$(F \circ \varphi_1)(w) = (g_1(w), 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

mit $g_1(w) \in \mathbb{R}^k$. Es gilt

$$(F \circ \varphi_1)'(w) = F'(\varphi_1(w))\varphi_1(w).$$

Da $\varphi_1(w) \in U$ ist $F'(\varphi_1(w))$ invertierbar. Weiter ist $\operatorname{Rang} \varphi_1(w) = k$. Es folgt $\operatorname{Rang} g_1'(w) = k$. Also ist $g_1$ lokal invertierbar. Da $F \circ \varphi_1$ bijektiv ist, ist auch $g_1$ bijektiv und damit ein $C^\alpha$-Diffeomorphismus. Analog bekommen wir einen $C^\alpha$-Diffeomorphismus $g_2$ mit

$$(F \circ \varphi_2)(w) = (g_2(w), 0, \ldots, 0) \quad w \in \varphi_2^{-1}(M \cap U).$$

Es folgt

$$\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ F^{-1} \circ F \circ \varphi_1 = g_2^{-1} g_1^{-1},$$

und $\tau$ ist ein $C^\alpha$-Diffeomorphismus. Hier haben wir benutzt, dass $(F \circ \varphi_1)(w_1) = (F \circ \varphi_2)(w_2)$ genau dann, wenn $g_2(w_2) = g_1(w_1)$. $\square$

**Definition 3.12.** *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$. Es sei $(\varphi_j)$ gegeben mit*

*(1) $\varphi_j : T_j \to V_j$ ist lokale Parameterdarstellung von $M$ für alle $j \in \mathbb{N}$,*

*(2) $\bigcup_{j=1}^\infty V_j = M$.*

*Dann heißt $(\varphi_j)$ ein (abzählbarer) Atlas von $M$ der Klasse $C^\alpha$.*

**Bemerkung 3.13.** *Die Charakterisierung von Satz 3.10 ist die Grundlage für die Definition von Mannigfaltigkeiten. Diese kommt ohne den umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$ aus.*

*Ein metrischer Raum $(M, d)$ heißt $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn für jedes $a \in M$ eine in $M$ offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und ein Homöomorphismus $\varphi : T \to V$ existiert.*

*Differenzierbarkeit (eines Atlas) kommt durch die Aussage von Satz 3.11: man nimmt dann an, dass die Koordinatentransformationen $\tau$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar sind für alle Parameterdarstellungen durch Homöomorphismen $\varphi_1$, $\varphi_2$ eines Atlas.*

## 3.2 $k$-dimensionales Volumen im $\mathbb{R}^n$

### 3.2.1 Kurvenlänge im $\mathbb{R}^n$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann ist $\varphi(I)$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Wie kann man die Länge der Kurve definieren?

Eine Möglichkeit ist es, die Kurve durch einen Polygonzug zu approximieren: seien $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ Punkte aus $I$. Dann ist die "wahre" Länge der Kurve größer als die Länge

$$\sum_{j=1}^{m-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi_(t_j)\|_2$$

des Polygonzugs. Unter geeigneten Annahmen ist das Supremum über alle Längen aller Polygonzüge gleich dem Integral

$$\int_I \|\varphi'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t.$$

### 3.2.2 Oberfächeninhalt im $\mathbb{R}^3$

Für den Oberflächeninhalt einer Menge im $\mathbb{R}^3$ ist diese Prozedur nicht so einfach übertragbar. Wir wollen den Oberflächeninhalt des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 = 1, \; z \in [0, 1]\}$$

bestimmen. Die Idee ist, die Oberfläche durch Dreiecke zu approximieren. Wir unterteilen den Umfang in $n$ gleiche Teile, die Höhe des Zylinders in $m$ gleiche Teile.

Die Länge einer Sehne ist dann gegeben durch

$$2\sin(\pi/n).$$

Liegen die Punkte auf den verschiedenen Schichten direkt übereinander, dann ergibt sich als Summe der Flächen der Dreiecke

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sin(\pi/n)\cdot\frac{1}{m}\right)\cdot 2 = 2n\sin(\pi/n).$$

Nach Grenzübergang $n\to\infty$ erhalten wir den korrekten Wert $2\pi$.

Nun betrachten wir eine zweite Konfiguration, in der die Punkte in den einzelnen Schichten nicht direkt übereinander liegen, sondern wo die einzelnen Schichten gegeneinander um den Winkel $\pi/n$ versetzt sind. Es entsteht eine Lampion-Struktur, der sogenannte Schwarz-Zylinder.

Die Höhe dieser Dreiecke ist dann nicht mehr $\frac{1}{m}$ sondern gleich

$$\left(\frac{1}{m^2}+(1-\cos(\pi/n))^2\right)^{1/2},$$

so dass sich als Gesamtfläche ergibt

$$\begin{aligned} A_{m,n} &:= m\cdot 2n\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sin(\pi/n)\cdot\left(\frac{1}{m^2}+(1-\cos(\pi/n))^2\right)^{1/2} \\ &= 2n\sin(\pi/n)\cdot\left(1+m^2(1-\cos(\pi/n))^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos(\pi/n)) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Wir wählen nun $m(n)$ so, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n^2}=q$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} m(n)(1-\cos(\pi/n)) = \frac{q\pi^2}{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} A_{m(n),n} = 2\pi\cdot\left(1+\left(\frac{q\pi^2}{2}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Das richtige Ergebnis $2\pi$ erhalten wir nur für $q=0$. Der Grenzwert wird beliebig groß für $q\to\infty$. Damit ist das Supremum der Flächeninhalte aller Dreiecksnetze auf der Zylinderoberfläche unendlich, was diesen (naiven) Zugang untauglich macht für Flächenberechnungen.

Wir werden daher nicht das Vorgehen für Kurven ($k=1$) auf den Fall $k>1$ verallgemeinern. Dies ist möglich aber sehr aufwendig. Stattdessen werden wir die Parameterdarstellung von Mannigfaltigkeiten verwenden, und die Integrale auf der Mannigfaltigkeit auf Integrale über die Parameterbereiche zurückführen. Im nächsten Abschnitt betrachten wir zunächst den einfachen Fall einer linearen Parameterdarstellung $\varphi$.

### 3.2.3 $k$-dimensionales Volumen eines Parallelotops im $\mathbb{R}^n$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $k < n$. Wir wollen das $k$-dimensionale Volumen von $\varphi([0,1]^k)$ bestimmen. Dies ist ein sogenanntes Parallelotop. Für $k = 1$ ist dies eine Strecke, für $k = 2$ ein Parallelogramm, für $k = 3$ ein Parallelepiped.

Sei $\varphi(x) = Vx$ mit einer Matrix $V \in \mathbb{R}^{n,k}$, deren Spalten wir mit $v_i$ bezeichnen. Dann ist

$$\varphi([0,1]^k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \ \lambda_i \in [0,1] \right\}$$

Wir setzen

$$P_j := \left\{ \sum_{i=1}^j \lambda_i v_i : \ \lambda_i \in [0,1] \right\}.$$

Wir wollen nun das $j$-dimensionale Volumen von $P_j$ berechnen unter folgender Annahme:

$$\operatorname{vol}_{j+1} P_{j+1} = \operatorname{vol}_j P_j \cdot h_{j+1} \tag{3.14}$$

wobei $h_{j+1}$ die Höhe von $v_{j+1}$ über $P_j$ ist. Dann gilt

$$h_{j+1} = \operatorname{dist}(v_{j+1},\ \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)).$$

Für $j = 1$ erhalten wir $\operatorname{vol}_1(P_1) = \|v_1\|_2$.

**Lemma 3.15.** *Unter den Voraussetzungen* (3.14) *und* $\operatorname{vol}_1(P_1) = \|v_1\|_2$ *gilt für alle* $j \le k$

$$\operatorname{vol}_j P_j = \sqrt{\det(V_j^T V_j)},$$

*wobei* $V_j = (v_1, \dots, v_j)$.

*Beweis.* Sei die Behauptung für $1 \le j < k$ bewiesen. Aus der orthogonalen Zerlegung $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j) \oplus (\operatorname{span}(v_1, \dots, v_j))^\perp$ bekommen wir

$$v_{j+1} = u + w$$

mit $w \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$ und $u = (\operatorname{span}(v_1, \dots, v_j))^\perp$. Sei $\tilde{w} \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$. Dann ist $\|v_{j+1} - \tilde{w}\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|w - \tilde{w}\|_2^2$, und damit gilt

$$h_{j+1} = \operatorname{dist}(v_{j+1},\ \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)) = \|u\|_2.$$

Da $w \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$ existiert $s \in \mathbb{R}^j$ mit $w = V_j s$. Weiter ist $V_j^T u = 0$. Dann ist

$$V_{j+1} = \begin{pmatrix} V_j & v_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j & V_j s + u \end{pmatrix}.$$

Um $s$ zu eliminieren, multiplizieren wir $V_{j+1}$ von rechts mit $R = \begin{pmatrix} I_j & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$V_{j+1} R = \begin{pmatrix} V_j & V_j s + u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_j & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j & u \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt wegen $V_j^T u = 0$

$$(V_{j+1} R)^T V_{j+1} R = \begin{pmatrix} V_j^T \\ u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_j & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j^T V_j & 0 \\ 0 & \|u\|_2^2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(R) = 1$ bekommen wir

$$\det(V_{j+1}^T V_{j+1}) = \det(R^T V_{j+1}^T V_{j+1} R) = \det(V_j^T V_j) \cdot \|u\|_2^2.$$

Wegen der Voraussetzungen ist $\det(V_j^T V_j) \cdot \|u\|_2^2 = (\operatorname{vol}_{j+1} P_{j+1})^2$, und der Induktionsbeweis ist vollständig. □

Für $k = n$ erhalten wir das Resultat von Satz 1.83. Achtung: Da $V_j \in \mathbb{R}^{n,j}$ ist, lässt sich die Formel $\det(V_j^T V_j)$ für $j < n$ *nicht* zu $\det(V_j)^2$ vereinfachen. Mithilfe der Cauchy-Binet-Formel kann $\det(V_j^T V_j)$ allerdings über Determinanten von quadratischen Untermatrizen berechnet werden.

**Lemma 3.16** (Cauchy-Binet-Formel)**.** *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $n > m$. Dann gilt*

$$\det(AB^T) = \sum_I \det(A_I) \det(B_I),$$

*wobei die Summe über alle $m$-elementigen Teilmengen $I$ von $\{1, \dots, n\}$ geht, und $A_I$ die Matrix bezeichnet, die die Spalten $i$ von $A$ mit $i \in I$ enthält.*

*Beweis.* Für einen Beweis siehe [For17, Satz 14.6], welcher auch für Matrizen über einem kommutativen Ring mit Eins funktioniert. □

Dieses Resultat hat mithilfe von Lemma 3.15 auch eine geometrische Interpretation: das Quadrat des $k$-dimensionalen Volumen eines Parallelotops ist gleich der Summe der Quadrate der $k$-dimensionalen Volumen der Projektionen des Parallelotops auf alle Kombinationen $k$-dimensionaler Koordinatenebenen, siehe auch [Kon13]. Für $k = 1$ ist dies nichts anderes als der Satz von Pythagoras.

## 3.3 Lebesgue-Messbarkeit als lokale Eigenschaft

Wir beweisen noch eine lokale Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen. Wir starten mit einem Hilfsresultat.

**Lemma 3.17** (Existenz von abzählbaren Teilüberdeckungen)**.** *Sei $\mathcal{O}$ eine Menge offener Mengen des $\mathbb{R}^n$. Sei $A \in \mathbb{R}^n$ eine Menge mit der Eigenschaft: für alle $x \in A$ existiert $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$. Dann existieren abzählbar viele $(O_j)$ mit $O_j \in$ und $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$.*

*Beweis.* Definiere die abzählbare Menge $Q := \{(x, \rho) \in \mathbb{Q}^{n+1} : \ \rho > 0\}$. Sei $q = (x, \rho) \in Q$. Falls es eine Menge $O \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $B_\rho(x) \subseteq O$ ist, dann wählen wir eine solche Menge $O$ und setzen $O_q := O$, sonst $O_q := \emptyset$. Mit dieser Strategie müssen wir nur abzählbar viele Auswahlen vornehmen.

Wir zeigen, dass gilt $A \subseteq \bigcup_{q \in Q} O_q$. Sei $x \in A$. Dann gibt es eine Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$. Dann existiert $r > 0$, so dass $B_r(x) \subseteq O$. Sei $\rho \in (0, r/2) \cap \mathbb{Q}$. Dann existiert $x' \in B_\rho(x) \cap \mathbb{Q}^n$. Damit ist $x \in B_\rho(x') \subseteq B_r(x) \subseteq O$. Für $q := (x', \rho)$ ist dann $O_q \neq \emptyset$. Aus der Konstruktion von $O_q$ folgt $x \in B_\rho(x') \subseteq O_q$. □

**Folgerung 3.18.** *Sei $I$ eine Indexmenge, $O_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen für alle $i \in I$. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$ so, dass*

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{j \in J} O_j.$$

*Beweis.* Folgt aus Lemma 3.17 mit $\mathcal{O} = \{O_i : \ i \in I\}$. □

**Bemerkung 3.19.** *Die rationalen Kugeln $(B_\rho(x))_{(x,\rho) \in Q}$ im Beweis von Folgerung 3.18 sind eine abzählbare Basis der Topologie auf dem $\mathbb{R}^n$: jede offene Menge ist eine Vereinigung von Elementen der Basis. Die Behauptung von Folgerung 3.18 nennt man die Lindelöf-Eigenschaft (von $\mathbb{R}^n$).*

*Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum, dann ist die Existenz einer abzählbaren Basis und die Lindelöf-Eigenschaft äquivalent zur Separabilität von $(X, d)$, siehe [AE01, Satz IX.1.8]. Dabei ist $(X, d)$ separabel, wenn es eine abzählbare, dichte Menge $D \subseteq X$ gibt, d.h. der Abschluss von $D$ ist $M$. Ist $(X, d)$ separabel, dann ist auch jeder Teilraum separabel.*

*Der Beweis von Lemma 3.17 lässt sich auf separable metrische Räume $(X, d)$ übertragen: man ersetzt $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{Q}^n$ durch $X$ und die abzählbare, dichte Teilmenge.*

**Folgerung 3.20.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $A \in \mathcal{L}(n)$ genau dann, wenn für alle $x \in A$ eine offene Umgebung $O \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $A \cap O \in \mathcal{L}(n)$ ist.*

*Beweis.* [AE01, Bemerkung IX.5.14(c)] Es ist nur die Richtung ($\Leftarrow$) zu beweisen. Diese folgt aus Lemma 3.17 mit $\mathcal{O} = \{O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $A \cap O \in \mathcal{L}(n)\}$. □

**Folgerung 3.21.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^1$. Dann hat $M$ einen abzählbaren Atlas.*

*Beweis.* Wir setzen

$$\mathcal{O} = \{O \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \text{ lokale Parameterdarstellung } \varphi : T \to M \cap O\}.$$

Wegen Satz 3.10 existiert für jedes $a \in M$ ein $O \in \mathcal{O}$ mit $a \in O$. Mit Lemma 3.17 folgt $M \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ mit $O_j \in O$. Zu jedem $O_j$ gehört eine lokale Parameterdarstellung $\varphi_j : T_j \to M \cap O_j$. Die Funktionen $(\varphi_j)$ sind der gewünschte Atlas. □

**Bemerkung 3.22.** *Die Beweise in diesem Abschnitt benutzen nur das abzählbare Auswahlaxiom nicht das volle Auswahlaxiom. Der folgende Beweis von Folgerung 3.21 benutzt allerdings das volle Auswahlaxiom:*

*Wegen Satz 3.10 existiert für jedes $a \in M$ eine lokale Parameterdarstellung $\varphi_a : T \to V_a$. Dann existiert eine offene Menge $O_a \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V_a = M \cap O_a$. Dann ist $M \subseteq \bigcup_{a \in A} O_a$. Nach Folgerung 3.18 gibt es ein abzählbare Teilüberdeckung. Der Schluss ist dann wie im Beweis von Folgerung 3.21. Zum Aufstellen der Behauptung $M \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$ müssen wir für jedes $a$ eine Auswahl treffen, das sind im Allgemeinen überabzählbar viele.*

## 3.4 Maß und Integral auf Untermannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^1$. Wir definieren nun Messbarkeit von Teilmengen von $M$ analog zur lokalen Charakterisierung von messbaren Mengen in Folgerung 3.20. Wir folgen [AE01, Abschnitt XII.1], dort werden allerdings Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachtet.

**Definition 3.23.** *Es sei $A \subseteq M$. Dann heißt $A$ messbar genau dann, wenn für alle $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq M$ und eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert, so dass $\varphi^{-1}(A \cap V) \in \mathcal{L}(k)$ ist.*

Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir $\varphi$ als Abbildung nach $M$ betrachten, und mit $\varphi^{-1}(A)$ das Urbild von $A$ unter der Abbildung $\varphi : T \to M$ bezeichnen. An Stellen, wo wir die Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : V \to T$ brauchen, werden wir dann die Schreibweise $\varphi^{-1}(A \cap V)$ benutzen. Wir werden also im Folgenden

$$\varphi^{-1}(A \cap V) = \varphi^{-1}(A)$$

miteinander identifizieren.

Wir zeigen nun, dass die Definition der Messbarkeit unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung ist.

**Satz 3.24.** *Sei $A \subseteq M$. Dann ist $A$ messbar genau dann, wenn für alle lokalen Parameterdarstellungen $\varphi : T \to V$ gilt $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$.*

*Beweis.* Es ist nur die Richtung ($\Rightarrow$) zu beweisen. Sei also $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung.

Sei $a \in V$. Dann gibt es nach Definition $\varphi_a : T_a \to V_a$ mit $\varphi_a^{-1}(A \cap V_a) \in \mathcal{L}(k)$. Da $V$ offen ist, ist

$$\varphi_a^{-1}(A \cap V_a \cap V) = \varphi_a^{-1}(A \cap V_a) \cap \varphi_a^{-1}(V_a \cap V) \in \mathcal{L}(k).$$

Da $\varphi^{-1} \circ \varphi_a$ ein Diffeomorphismus ist (Satz 3.11), ist wegen Lemma 2.115

$$\varphi^{-1}(A \cap V \cap V_a) = (\varphi^{-1} \circ \varphi_a) \circ \varphi_a^{-1}(A \cap V \cap V_a) \in \mathcal{L}(k).$$

Nach Folgerung 3.18 gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq V$, so dass $V = \bigcup_{a \in J}(V \cap V_a)$. Damit folgt

$$\varphi^{-1}(A \cap V) = \bigcup_{a \in J} \varphi^{-1}(A \cap V \cap V_a) \in \mathcal{L}(k),$$

was die Behauptung ist. □

**Definition 3.25.** *Es sei $\mathcal{L}_M := \{A \subseteq M : \ A \text{ messbar}\}$ die Menge der messbaren Mengen auf $M$.*

**Lemma 3.26.** *$\mathcal{L}_M$ ist eine $\sigma$-Algebra, und es gilt $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{L}_M$.*

*Beweis.* Dies ist eine Konsequenz von Satz 3.24. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung.

Sei $A \in \mathcal{L}_M$. Dann ist $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$, und es folgt $\varphi^{-1}(A^c) = T \setminus \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$. Sind $(A_j)$ abzählbar viele Mengen aus $\mathcal{L}_M$, dann ist $\varphi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \bigcup_{j=1}^\infty \varphi^{-1}(A_j) \in \mathcal{L}(k)$. Sei $O \subseteq M$ offen in $(M, d_2)$. Dann ist $\varphi^{-1}(O)$ offen, also in $\mathcal{L}(k)$. Daraus folgt $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{L}(M)$. □

Wir konstruieren nun ein Maß auf $M$. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Ist $W \subseteq T$ ein Würfel mit $t \in W$, dann ist $\varphi(W) \approx \varphi(t) + \varphi'(t)(W - t)$. Nach den Berechnungen in Abschnitt 3.2.3 hat dann $\varphi(W)$ das "Maß" $\sqrt{\det \varphi'^T(t)\varphi'(t)}\, \mathrm{vol}_k(W)$. Das Integral über den Bildbereich $T = \varphi(V)$ sollte analog zum Transformationssatz Satz 2.120 wie folgt aussehen

$$\int_{\varphi(V)} \chi_A \, \mathrm{d}\lambda_M \stackrel{?}{=} \int_V \chi_A \circ \varphi \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \, \mathrm{d}\lambda_k, \tag{3.27}$$

wobei wir $\sqrt{\det \varphi'^T(t)\varphi'(t)}$ anstelle des in dieser Situation nicht definierten Ausdrucks $|\det \varphi'|$ geschrieben haben. Diese Gleichung (3.27) dient nur zur Motivation der folgenden Entwicklungen. Wir wollen nun ein Maß $\lambda_M$ auf $M$ konstruieren, welches (3.27) erfüllt.

Wir beginnen mit der folgenden Definition. Für $A \in \mathcal{L}_M$ definieren wir

$$\lambda_{M,V}(A) := \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \ \mathrm{d}\lambda_k.$$

Hier ist $\chi_{\varphi^{-1}(A)} = \chi_A \circ \varphi$ die Transformation von $\chi_A$. Der Ausdruck $\varphi'^T \varphi'$ heißt auch Maßtensor, und $\det \varphi'^T \varphi'$ Gramsche Determinante. Zuerst berechnen wir, wie sich dieser unter Koordinatentransformationen verhält.

**Lemma 3.28.** *Sei $V \subseteq M$ offen, $\varphi : T \to V$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to V$ lokale Parameterdarstellungen. Sei $\tau = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : T \to \tilde{T}$. Dann ist*

$$(\sqrt{\det \tilde{\varphi}'^T \tilde{\varphi}'} \circ \tau) \cdot |\det \tau'| = \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}$$

*auf $T$.*

*Beweis.* Sei $t \in T$. Dann ist $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \tau$ und

$$\varphi'(t) = \tilde{\varphi}'(\tau(t)) \cdot \tau'(t).$$

Es folgt

$$\varphi'(t)^T \varphi(t) = \tau'(t)^T \cdot \tilde{\varphi}'(\tau(t))^T \tilde{\varphi}'(\tau(t)) \cdot \tau'(t),$$

woraus wir nach Anwenden der Determinante

$$\begin{aligned} \det(\varphi'(t)^T \varphi(t)) &= \det(\tau'(t))^2 \cdot \det\left(\tilde{\varphi}'(\tau(t))^T \tilde{\varphi}'(\tau(t))\right) \\ &= \det(\tau'(t))^2 \cdot (\det(\tilde{\varphi}'^T \tilde{\varphi}') \circ \tau)(t) \end{aligned}$$

bekommen, was die Behauptung ist. □

An diesem Resultat können wir schon sehen, dass die Wahl des Terms $\sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}$ vernünftig war: bei Koordinatentransformation auf eine andere Parameterdarstellung entsteht der zusätzliche Faktor $|\det \tau'|$, dieser wird dann durch die Anwendung des Transformationssatzes Satz 2.120 kompensiert.

**Lemma 3.29.** *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V}$ wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl von $\varphi$.*

*Beweis.* Sei $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to V$ eine weitere lokale Parameterdarstellung. Sei $\tau : T \to \tilde{T}$ die Koordinatentransformation $\tau = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ von Satz 3.11. Dann ist nach dem

Transformationssatz Satz 2.120

$$\int_{\tilde{T}} \chi_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde{\varphi}'^T \tilde{\varphi}'} \,\mathrm{d}\lambda_k = \int_T \left(\chi_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde{\varphi}'^T \tilde{\varphi}'}\right) \circ \tau \cdot \det |\tau'| \,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Wegen

$$\chi_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} \circ \tau = \chi_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi = \chi_A \circ \varphi = \chi_{\varphi^{-1}(A)}$$

und der Transformation für den Maßtensor Lemma 3.28 erhalten wir

$$\int_{\tilde{T}} \chi_{\tilde{\varphi}^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde{\varphi}'^T \tilde{\varphi}'} \,\mathrm{d}\lambda_k = \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A)}(t) \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Damit ist der Wert $\lambda_{M,V}(A)$ unabhängig von der Wahl von $\varphi$ (und $T$). □

**Folgerung 3.30.** *Es sei $A \in \mathcal{L}_M$ und $V', V \subseteq M$ offen mit $A \subseteq V' \subseteq V$ und einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V'}(A) = \lambda_{M,V}(A)$.*

*Beweis.* Die Einschränkung von $\varphi$ auf $\varphi^{-1}(V')$ ist eine lokale Parameterdarstellung mit Werten in $V'$. Die Behauptung folgt mit Lemma 3.29. □

**Folgerung 3.31.** *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Die Mengenfunktion $\lambda_{M,V}$ ist ein positives Maß auf $\mathcal{L}_M$.*

*Beweis.* Die $\sigma$-Additivität folgt aus der Bijektivität von $\varphi$ und monotoner Konvergenz, siehe auch Aufgabe 2.49. □

**Lemma 3.32.** *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V}$ $\sigma$-endlich.*

*Beweis.* Definiere $T_r := \{x \in T : \ |x| \leq r, \ d(x, \partial T) \geq r^{-1}\}$. Dann ist $T_r$ eine kompakte Teilmenge von $T$, siehe auch Lemma 2.98. Auf $T_r$ ist $\sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}$ beschränkt, damit ist

$$\lambda_{M,V}(\varphi(T_r)) = \int_{T_r} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_k < \infty.$$

Setze $M_r := (M \cap V^c) \cup \varphi(T_r)$. Daraus folgt $\lambda_{M,V}(M_r) = \lambda_{M,V}(\varphi(T_r))$ und $\bigcup_{r=1}^\infty M_r = M$. Also ist $\lambda_{M,V}$ $\sigma$-endlich. □

**Beispiel 3.33.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $t \in I$ eine offene Umgebung $T \subseteq I$, so dass $\varphi : T \to \varphi(T)$ eine lokale Parameterdarstellung ist. Weiter ist $\varphi'(t) \in \mathbb{R}^n$, so dass $\det(\varphi'(t)^T \varphi'(t)) = \|\varphi'(t)\|_2^2$ ist.*

**Beispiel 3.34.** *Sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit, die lokal durch den Graph von $g$ parametrisiert ist, also $(x', g(x')) \in M$ gilt für $x' \in U'$. Dann ist $\varphi(x') :=$*

*$(x', g(x')) : U' \to \varphi(U')$ eine lokale Parameterdarstellung von $M$, siehe den Beweis von Satz 3.10. Daraus folgt dann $\varphi'(x') = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ g'(x') \end{pmatrix}$ und $\varphi'(x')^T\varphi'(x') = I_{n-1} + g'(x')^T g'(x')$. Die Determinante kann man mit der folgenden Faktorisierung berechnen: Sei $u := g'(x')^T$, $I := I_{n-1}$. Dann ist*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & I + uu^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \|u\|_2^2 & 0 \\ u & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u^T \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

*Und es gilt* $\det(\varphi'(x')^T\varphi'(x')) = 1 + \|g'(x')\|_2^2$.

**Aufgabe 3.35.** *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zeigen Sie:* $\det(I_n + A^T B) = \det(I_m + BA^T)$.

Sei $A \in \mathcal{L}_M$. Sei $(\varphi_j)$ ein abzählbarer Atlas von $M$ mit $\varphi_j : T_j \to V_j$, welcher nach Folgerung 3.21 existiert. Wähle $A_j \subseteq V_j$ mit $A_j \in \mathcal{L}_M$ so, dass $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ eine disjunkte Vereinigung ist. Eine Möglichkeit ist $A_j = (A \cap V_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$. Dann definiere

$$\lambda_M(A) := \sum_{j=1}^\infty \lambda_{M,V_j}(A_j).$$

**Lemma 3.36.** *$\lambda_M$ ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Atlas $(\varphi_j)$ und der Mengen $(A_j)$.*

*Beweis.* Es sei $(\tilde\varphi_k)$ ein weiterer Atlas von $M$ mit $\tilde\varphi_k : \tilde T_k \to \tilde V_k$ mit messbaren und disjunkten Mengen $\tilde A_k \subseteq \tilde V_k$ und $A = \bigcup_{k=1}^\infty \tilde A_k$.

Angenommen $\tilde A_k \cap A_j \neq \emptyset$. Dann ist $\tilde A_k \cap A_j \subseteq \tilde V_k \cap V_j$, und wegen Folgerung 3.30 gilt

$$\lambda_{M,\tilde V_k}(\tilde A_k \cap A_j) = \lambda_{M,\tilde V_k \cap V_j}(\tilde A_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(\tilde A_k \cap A_j).$$

Aufsummieren über $k$ ergibt

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_{M,\tilde V_k}(\tilde A_k \cap A_j) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_{M,V_j}(\tilde A_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(\bigcup_{k=1}^\infty \tilde A_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(A_j).$$

Aufsummieren über $j$ ergibt aufgrund der $\sigma$-Additivität von $\lambda_{M,\tilde V_k}$

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_{M,V_j}(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \lambda_{M,\tilde V_k}(\tilde A_k \cap A_j).$$

Anwenden von Fubini (Satz 2.84 mit den Maßräumen $X = Y = \mathbb{N}$ mit $\mu = \nu =$

Zählmaß) ergibt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k \cap A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k),$$

wobei wir die $\sigma$-Additivität von $\lambda_{M,\tilde{V}_k}$ benutzt haben. □

**Satz 3.37.** *$\lambda_M$ ist ein positives Maß auf $(M, \mathcal{L}_M)$.*

*Beweis.* Offensichtlich ist $\lambda_M \geq 0$ und $\lambda_M(\emptyset) = 0$.

Sei $(\varphi_j)$ ein abzählbarer Atlas von $M$ mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Definiere die offenen Mengen $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$. Sei $(A_k)$ eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{L}_M$. Setze $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist

$$\lambda_M(A_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j)$$

und mit dem Satz von Fubini (Satz 2.84) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_M(A_k) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A \cap U_j) = \lambda_M(A), \end{aligned}$$

also ist $\lambda_M$ $\sigma$-additiv. □

**Aufgabe 3.38.** *Sei $A \in \mathcal{L}_M$ und $\varphi : T \to V$ mit $A \subseteq V$. Dann ist $\lambda_M(A) = \lambda_{M,V}(A)$.*

**Aufgabe 3.39.** *Sei $N \in \mathcal{L}_M$ mit $\lambda_M(N) = 0$. Dann gilt $\lambda_{M,V} = 0$ für alle $V$, für die eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert.*

**Satz 3.40.** *Das Maß $\lambda_M$ ist vollständig, $\sigma$-endlich und regulär.*

*Beweis.* Sei $N \in \mathcal{L}_M$ mit $\lambda_M(N) = 0$. Sei $A \subseteq N$. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Dann ist $\varphi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(k)$. Weiter ist $\lambda_{M,V}(N) = 0$ nach Aufgabe 3.39, also $\int_T \chi_{\varphi^{-1}(N)} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}\, \mathrm{d}\lambda_k = 0$. Da $\sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} > 0$ auf $T$ folgt $\chi_{\varphi^{-1}(N)} = 0$ $\lambda_k$-fast überall auf $T$ (Satz 2.45), und $\varphi^{-1}(N)$ ist eine $\lambda_k$-Nullmenge. Damit ist $\varphi^{-1}(A)$ Teilmenge einer Nullmenge, also $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$. Nach Satz 3.24 ist $A \in \mathcal{L}_M$. Und $\lambda_M$ ist vollständig.

Sei $(\varphi_j)$ ein abzählbarer Atlas von $M$ mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Definiere die offenen Mengen $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = M$ eine disjunkte Vereinigung.

Da $\lambda_{M,V_j}$ $\sigma$-endlich ist, existieren Folgen von Mengen $(M_{j,r})$ in $\mathcal{L}_M$ mit $\bigcup_{r=1}^{\infty} M_{j,r} = M$ und $\lambda_{M,V_j}(M_{j,r}) < \infty$. Weiter ist

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{r=1}^{\infty} M_{j,r} \cap U_j = M.$$

Definiere

$$M_k := \bigcup_{j=1}^{k}\bigcup_{r=1}^{k}(M_{i,r} \cap U_i).$$

Dann ist

$$M_k \cap U_j = \begin{cases} \bigcup_{r=1}^{k}(M_{j,r} \cap U_j) & \text{falls } j \leq k \\ \emptyset & \text{falls } j > k. \end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\lambda_M(M_k) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(M_k \cap U_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_{M,V_j}(M_k \cap U_j) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{k} \lambda_{M,V_j}(M_{j,r} \cap U_j).\end{aligned}$$

Alle Summanden in dieser endlichen Summe sind endlich, also ist $\lambda_M(M_k) < \infty$, und wegen $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = M$ ist $\lambda_M$ $\sigma$-endlich.

Für den Beweis der Regularität verweisen wir auf [AE01, Satz XII.1.5]. □

Damit ist $(M, \mathcal{L}_M, \lambda_M)$ ein vernünftiger Maßraum, und wir können die komplette Integrationstheorie anwenden. Im Rest dieses Abschnittes werden wir noch untersuchen, wann Funktionen von $M$ nach $\bar{\mathbb{R}}$ messbar und integrierbar sind.

**Satz 3.41.** *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann ist $f$ $\mathcal{L}_M - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar genau dann, wenn für jede lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ die Funktion $f \circ \varphi$ $\lambda_k - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist.*

*Beweis.* (1) Sei $f$ $\mathcal{L}_M - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbar, $\varphi : T \to V$ lokale Parameterdarstellung. Sei $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Dann ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}_M$, woraus $\varphi^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{L}(k)$ folgt. Da $(f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$ folgt die Behauptung.

(2) Wir zeigen nun, dass aus $(f \circ \varphi)^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$ folgt $f^{-1}(A) \cap V \in \mathcal{L}_M$. Sei $B := (f \circ \varphi)^{-1}(A)$. Dann ist $f^{-1}(A) \cap V = \varphi(B)$.

Sei nun $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to \tilde{V}$ eine weitere lokale Parameterdarstellung. Ist $\tilde{V} \cap V = \emptyset$ dann ist $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B)) = \emptyset$. Anderenfalls ist

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B)) = \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B) \cap V \cap \tilde{V}) = (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(B \cap \varphi^{-1}(\tilde{V} \cap V)) \in \mathcal{L}(k),$$

da $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ ein Diffeomorphismus ist, $B \in \mathcal{L}(k)$, und $\varphi^{-1}(\tilde{V} \cap V)$ offen ist. Daraus folgt $\varphi(B) = f^{-1}(A) \cap V \in \mathcal{L}_M$ mit Satz 3.24.

(3) Sei $(\varphi_j)$ ein abzählbarer Atlas von $M$ mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Sei $f \circ \varphi_j$ $\lambda_k - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar für alle $j$. Sei $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Dann ist $\varphi_j^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{L}(k)$. Nach (2) folgt damit $f^{-1}(A) \cap V_j \in \mathcal{L}_M$. Damit ist auch $f^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (f^{-1}(A) \cap V_j) \in \mathcal{L}_M$. □

Das nächste Resultat ist eine lokale Charakterisierung von Integrierbarkeit.

**Lemma 3.42.** *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung.*

*Dann ist $\chi_V \cdot f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$ genau dann, wenn $f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \in \mathcal{L}^1(\lambda_k)$ ist.*

*Ist $f$ nicht-negativ oder $\chi_V \cdot f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$ dann gilt*

$$\int \chi_V f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_T f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \;\mathrm{d}\lambda_k.$$

*Beweis.* Wir wissen, dass $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$ genau dann, wenn $f^+, -f^- \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$. Damit reicht es, die Aussage für nicht negative Funktionen zu beweisen.

Sei zuerst $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$ eine einfache Funktion. Dann sind auch $\chi_V f$ und $(\chi_V f) \circ \varphi = f \circ \varphi$ einfache Funktionen, und nach der Definition des Lebesgue-Integrals für einfache Funktionen ist

$$\begin{aligned} \int_M \chi_V f \,\mathrm{d}\lambda_M &= \sum_{k=1}^n c_k \lambda_M(A_k \cap V) = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_{M,V}(A_k \cap V) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \;\mathrm{d}\lambda_k \\ &= \int_T f \circ \varphi^{-1} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \;\mathrm{d}\lambda_k. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nun sei $f \geq 0$ messbar. Dann approximieren wir $f$ durch eine Folge einfacher Funktionen $(f_j)$. Für jede Funktion $f_j$ gilt die Gleichung (3.43). Mit monotoner Konvergenz angewendet auf (3.43) folgt, dass $f$ (3.43) erfüllt. Insbesondere ist eine Seite der Gleichung ein endlicher Wert genau dann, wenn es die andere Seite ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Es fehlt noch eine Möglichkeit, das Integral $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M$ zu berechnen. Sei $(\varphi_j)$ ein abzählbarer Atlas von $M$ mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Es sei $(\alpha_j)$ eine Zerlegung der Eins bezüglich $(V_j)$, das heißt

(1) $\alpha_j : M \to [0, +\infty)$ messbar,

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in M$,

(3) $\alpha_j(x) = 0$ für alle $x \notin V_j$.

Zum Beispiel kann $\alpha_j := \chi_{U_j}$ gewählt werden mit $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$.

**Satz 3.44.** *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$ genau dann, wenn für jeden Atlas $(\varphi_j)$ von $M$ und passender Zerlegung der Eins $(\alpha_j)$ gilt: $f \cdot \alpha_j \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$ für alle $j$ und*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (|f| \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \, \mathrm{d}\lambda_k < \infty.$$

*In diesem Fall ist*

$$\int f \, \mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (f \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \, \mathrm{d}\lambda_k.$$

*Beweis.* Wegen monotoner Konvergenz ist

$$\int |f| \, \mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f| \cdot \alpha_j \, \mathrm{d}\lambda_M.$$

Aus Lemma 3.42 bekommen wir

$$\int |f| \, \mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (|f| \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \, \mathrm{d}\lambda_k,$$

woraus direkt die Charakterisierung der Integrierbarkeit folgt. Mit analogen Argumenten angewendet auf $f^+$ und $-f^-$ folgt die zweite Behauptung. □

**Bemerkung 3.45.** *Die Eigenschaft $M \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir entscheidend benutzt: sie steckt in der Definition des Maßtensors $\sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'}$, weil wir dort die Differenzierbarkeit von $\varphi$ brauchen. Für allgemeine Mannigfaltigkeiten muss man die Existenz dieses Maßtensors voraussetzen, und annehmen, dass sich diese wie in Lemma 3.28 transformieren. Dies führt dann auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten.*