Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 9

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 16, 2024)

Problem 1. (Hyperbelfunktion) Sei $d \in \{1,2,3\}, R > 0, 1 \leq p < \infty$ und $\alpha > 0$. Definiere

$$B_R(d;0) := \{x \in \mathbb{R}^d | \|x\| < R\}, \qquad f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \to \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{1}{\|x\|^\alpha} & x \neq 0. \end{cases}.$$

(a) Sei zunächst $d = 1$. Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{B_R(1;0)} f$ in $L^p(\lambda_1)$? Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{\mathbb{R} \setminus B_R(1;0)} f$ in $L^p(\lambda_1)$?

(b) Welche Bedingungen müssen in den Fällen $d = 2, 3$ für α, p gelten, damit $\chi_{B_R(d;0)} f \in L^p(\lambda_d)$ ist?

(c) Sei $1 < p < r < q < \infty$. Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit $g \in L^r(\lambda_1)$, $g \notin L^p(\lambda_1)$, $g \notin L^q(\lambda_1)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ an, sodass $g \in L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in [1, \infty)$ gilt, aber $g \notin L^\infty(\lambda_1)$.

Proof. (a) Die Funktion $\chi_{B_R(1;0)} f$ ist in $L^p(\lambda_1)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \int \chi_{B_R(1;0)} |f|^p \, d\lambda_1 &= \int_{B_R(1;0)} |f|^p \, d\lambda_1 \\ &= \int_{B_R(1;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \, d\lambda_1 \\ &= \int_0^R \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \, d\lambda_1 + \int_{-R}^0 \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \, d\lambda_1 \end{aligned}$$

Weil die Funktionen positiv sind, sind sie Lebesgue-Integrierbar genau dann, wenn sie (uneigentlich) Riemann-Integrierbar sind. Wir wissen aber auch, dass

$$\int_0^R \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \, d\lambda_1 = \int_0^R \frac{1}{x^{\alpha p}} \, d\lambda_1 \qquad x > 0$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 0} \int_a^R \frac{1}{x^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to 0} \left[\frac{x^{-\alpha p+1}}{1-\alpha p}\right]
\end{aligned}
$$

was existiert genau dann, wenn $-\alpha p + 1 \geq 0$. Das Ergebnis stimmt nicht für $\alpha p = 1$. In diesem Fall ist

$$\int_a^R \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = [\ln x]_a^R$$

und der Grenzwert existiert nicht. Aus der Symmetrie von $x \to -x$ gilt genau die gleiche für $\int_{-R}^0 \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x$. Insgesamt ist die Funktion genau dann integrierbar, wenn $-\alpha p + 1 > 0$.

Ähnlich berechnen wir das Riemann-Integral für $\chi_{\mathbb{R}\setminus B_R(1;0)}$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_R^\infty \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} &= \int_R^\infty \frac{1}{x^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_R^a \frac{1}{x^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to\infty} \left[\frac{x^{-\alpha p+1}}{1-\alpha p}\right]
\end{aligned}
$$

was genau dann existiert, wwenn $-\alpha p + 1 \leq 0$. Ähnlich stimmt das Ergebnis nicht für $-\alpha p = 1$ nicht. In diesem Fall ist

$$\int_R^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \ln x|_R^a,$$

was nicht existiert. Also es ist genau dann integrierbar, wenn $-\alpha p + 1 < 0$.

(b) $d = 2$: Wir berechnen das Integral in Polarkoordinaten. Da die Funktion positiv ist, ist das Integral wohldefiniert. Sie ist genau dann integrierbar, wenn die transformierte Funktion integrierbar ist. Wir wissen, dass $\|x\| = r$. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R(2;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\lambda_2 = &\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\theta\, r \,\mathrm{d}r \\
=&2\pi \int_0^R \frac{1}{r^{\alpha p-1}} \,\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

Aus dem Argument in (a) ist das Integral endlich genau dann, wenn

$$-(\alpha p - 1) + 1 = -\alpha p + 2 > 0.$$

Ähnlich für $d = 3$ berechnen die das Integral in Kugelkoordinaten. Die Funktion ist integrierbar genau dann, wenn die transformierte Funktion integrierbar ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{B_R(3;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\lambda_3 =& \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r^{\alpha p}} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\ =& 2\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha p - 2}} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\ =& 4\pi \int_0^R \frac{1}{r^{\alpha p-2}} \,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Das Integral ist endlich genau dann, wenn

$$-(\alpha p - 2) + 1 = -\alpha p + 3 > 0.$$

(c) Sei $p = 1, r = 2, q = 3$. Sei außerdem

$$g(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & |x| < 1 \\ 1/x & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Wir zeigen alle drei Eigenschaften.

$$\begin{aligned}\int |g| \,\mathrm{d}\lambda_1 \geq& \int_{\mathbb{R}\setminus B_1(1;0)} |g| \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ =& \int_{\mathbb{R}\setminus B_1(1;0)} \frac{1}{|x|} \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ =& \infty \qquad \text{(a)}\end{aligned}$$

also $g \notin L^1(\lambda_1)$. Jetzt ist

$$\begin{aligned}\int |g|^3 \,\mathrm{d}\lambda \geq& \int_{B_1(1;0)} |g|^3 \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ =& \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|} \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ =& \infty \qquad \text{(a)}\end{aligned}$$

also $g \notin L^3(\lambda_1)$. Zuletzt ist

$$\begin{aligned}\int |g|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 =& \int_{B_1(1;0)} |g|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_{\mathbb{R}\setminus B_1(1;0)} |g|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ =& \underbrace{\int_{B_1(1;0)} x^{-2/3} \,\mathrm{d}\lambda_1}_{<\infty} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus B_1(1;0)} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\lambda_1}_{<\infty}\end{aligned}$$

$$<\infty$$

wobei die zwei Integrale weniger als unendlich aus (a) sind, also $g \in L^2(\lambda_1)$.

(d) Sei $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \ln x$. Es gilt $\lim_{x\to 0} |g(x)| = \infty$, also $g \notin L^\infty(\lambda_1)$. g ist jedoch ein Element von $L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in [1,\infty)$.

Wir zeigen es zunächst für all $p \in \mathbb{N}$ per Induktion. Außerdem berechnen wir das Integral über $(0,1]$, was das Ergebnis nicht verändert, weil $\{1\}$ eine Nullmenge ist. Da $\ln x$ entweder > 0 oder < 0 für alle $x \in (1,0]$ ist, schreiben wir $|\ln x| = k \ln x$, wobei $k \in \{-1,1\}$.

$p = 1$ Fall:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}\lambda_1 &= \lim_{a\to 0} \int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \lim_{a\to 0} \left[x \ln x|_a^1 - \int_a^1 \mathrm{d}\lambda_1 \right] \\ &= \lim_{a\to 0} \left[a \ln x - (1-a)\right] \\ &= -1\end{aligned}$$

also

$$\int_0^1 |\ln x| \,\mathrm{d}\lambda_1 = 1.$$

Wir nehmen jetzt an, dass es für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 &= k^{p+1} \int_0^1 (\ln x)^{p+1} \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= k^{p+1} \left[x(\ln x)^{p+1}|_0^1 - \int_0^1 x(p+1)(\ln x)^p \frac{1}{x} \right] \\ &= k^{p+1} \left[-(p+1) \int_0^1 (\ln x)^p \,\mathrm{d}\lambda_1 \right]\end{aligned}$$

Per Voraussetzung ist das Integral von $|\ln x|^p$ endlich, also das Integral von $|\ln x|^{p+1}$ ist auch endlich. Insgesamt ist $\ln x \in L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in \mathbb{N}$.

Sei jetzt p beliebig. Es gilt

$$\int_0^1 |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_0^{1/e} |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_{1/e}^1 |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 \,.$$

Da $|\ln x|^p$ auf $(1/e, 1)$ stetig für alle p ist, existiert das Integral von $1/e$ bis 1 stets. Also wir vergleichen $|\ln x|^p$ für $x \in (0, 1/e)$.

Weil $|\ln x| > 1$ für alle $x \in (0, 1/e)$, ist

$$\int_0^{1/e} |\ln x|^p \, \mathrm{d}\lambda_1 \leq \int_0^{1/e} |\ln x|^{\lceil p \rceil} \, \mathrm{d}\lambda_1 \, .$$

Per Definition ist $\lceil p \rceil \in \mathbb{N}$ und $|\ln x|^{\lceil p \rceil}$ integrierbar. Dann ist $|\ln x|^p$ auch integrierbar und $\ln x \in L^p(\lambda_1)$ $\forall p \in [1, \infty)$. □

Problem 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$ gilt und außerdem

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\mu)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(\mu)}$$

für alle $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ und $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

(b) Sei der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nun endlich. Zeigen Sie, dass dann $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ und

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mu)}$$

für alle $f \in L^q(\mu)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie den Raum $L^r(\mu)$ für $r := \frac{q}{p}$.

Proof. (a) Sei $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$. Das Ziel ist: $f \in L^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$. Sei

$$A = \{x | x \in X, \ |f(x)| < 1\}$$
$$B = \{x | x \in X, \ |f(x)| \geq 1\} = X \backslash A$$

Weil $|f|^p$ bzw. $|f|^q$ auf der ganzen Menge X integrierbar sind, sind $|f|^p$ bzw. $|f|^q$ auf A und B integrierbar. Es gilt, für alle $x \in A$,

$$|f|^q \leq |f|^r \leq |f|^p$$

also $|f|^r$ ist auf A integrierbar. Ähnlich ist für alle $x \in B$

$$|f|^p \leq |f|^r \leq |f|^q$$

und das Integral von $|f|^r$ auf B existiert. Da

$$\int |f|^r \, \mathrm{d}\mu = \int_A |f|^r \, \mathrm{d}\mu + \int_B |f|^r \, \mathrm{d}\mu \, ,$$

ist $|f|^r$ integrierbar und $f \in L^r(\mu)$. Aus der Höldersche Ungleichung folgt, für $1/p + 1/q = 1, p, q \in [1, \infty]$

$$\|f^2\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|f\|_{\mathcal{L}^q(\mu)}.$$

□

Problem 3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := |xyz|$ und

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\int_A f \,\mathrm{d}\lambda_3$.

Proof. Weil f stetig auf einer kompakten Menge definiert ist, ist f auf A integrierbar. Für den Schnitt A_z gilt

$$A_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1 - z^2 \right\}.$$

Dann verwenden wir den Satz von Fubini, um das Integral als Doppelintegral zu schreiben. z muss in $(1/2, 1)$ sein, damit A_z nichtleerist. $z \geq 1/2$ per Definition und $z \leq 1$, weil sonst $x^2 + y^2 \leq 1 - z^2 \leq 0$. Da $x^2 + y^2$ positiv ist, wäre der Schnitt dann leer.

$$\int_A f \,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{1/2}^{1} \int_{A_z} |xy||z| \,\mathrm{d}\lambda_2 \,\mathrm{d}z\,.$$

Wir berechnen jetzt das Integral

$$\int_{A_z} |xy| \,\mathrm{d}\lambda_2$$

in Polarkoordinaten. Das Integral existiert zumindest für fast alle $z \in (1/2, 1)$, weil $|xyz|$ integrierbar in $\mathbb{R}^3$ ist, also wir verwenden den Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_{A_z} |xy| \,\mathrm{d}\lambda_2 =& \int_{(0,\sqrt{1-z^2})} \int_{(0,2\pi)} |r^2 \cos\varphi \sin\varphi| r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
=& \int_0^{\sqrt{1-z^2}} 2r^3 \,\mathrm{d}r \\
=& \frac{1}{2}(1 - z^2)^2
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\sin\varphi \cos\varphi| \,\mathrm{d}\varphi =& 4 \int_0^{\pi/2} |\sin\varphi \cos\varphi| \,\mathrm{d}\varphi \\
=& 4 \int_0^{\pi/2} \left| \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right| \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= (1-(-1)) = 2
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_A f \,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int_{1/2}^1 \frac{|z|}{2}(1-z^2)^2 \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 z(1-z^2)^2 \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 z(1-2z^2+z^4) \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{6}\right]_{1/2}^1 \\
&= \frac{9}{256}.
\end{aligned}
$$

$\square$