Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Wachsmuth
Bastian Dittrich

Wintersemester 2023/24

8. Übung zur Vertiefung Analysis - Lösung

6. Dezember 2023

Aufgabe 8.1. (a) Sei $M \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{C}$. Dann gilt auch

$$M \in (\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}) \boxtimes \mathcal{C} \subseteq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \boxtimes \mathcal{C} \subseteq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}.$$

Dies zeigt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \subseteq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$.

Sei $\Pi : X \times Y \times Z \to X \times Y, \Pi(x, y, z) = (x, y)$. Dann ist

$$\Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) = \{D \subseteq X \times Y \mid \Pi^{-1}(D) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}\}$$

eine σ-Algebra. Sei nun $A \times B \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ beliebig. Dann ist

$$\Pi^{-1}(A \times B) = \{A \times B \times C \mid C \in Z\} = A \times B \times Z \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}.$$

Dies zeigt $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \subseteq \Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ und somit

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}).$$

Sei nun $D \times C \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \boxtimes \mathcal{C}$. Nach dem eben gezeigten folgt $D \in \Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$, also $D \times Z = \Pi^{-1}(D) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$. Somit folgt

$$D \times C = (D \times Z) \cap (X \times Y \times C) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}.$$

Dies zeigt $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ und somit die Gleichheit.

Die andere Gleichheit folgt analog.

(b) Sei nun $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$. Nach Folgerung 2.69 sind die Maßräume $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ und $(Y \times Z, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \nu \otimes \eta)$ jeweils σ-endlich. Nach Satz 2.81 folgt

$$((\mu \otimes \nu) \otimes \eta)(A) = \int_{X \times Y} \eta(A_{(x,y)}) \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y),$$

wobei die Funktion $(x, y) \to \eta(A_{(x,y)})$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar und nichtnegativ ist. Nach Satz 2.84 folgt

$$\int_{X \times Y} \eta(A_{(x,y)}) \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y \eta(A_{(x,y)}) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Offenbar ist

$$A_{(x,y)} = \{z \in Z \mid (x, y, z) \in A\} = \{z \in Z \mid (y, z) \in A_x\} = (A_x)_y.$$

Mit nochmaliger Anewendung von Satz 2.81 folgt

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y \eta(A_{(x,y)}) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \left(\int_Y \eta((A_x)_y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X (\nu \otimes \eta)(A_x) \,\mathrm{d}\mu(x) = (\mu \otimes (\nu \otimes \eta))(A).\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

Aufgabe 8.2. (a) Es ist

$$B_R(x_0) = x_0 + B_R(0) = x_0 + \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Für $y \in \mathbb{R}$ ist

$$B_R(0)^y = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < R^2 - y^2\} = \begin{cases} \emptyset, & |y| \geq R \\ \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \sqrt{R^2 - y^2}\}, & |y| < R. \end{cases}$$

Im zweiten Fall ist $B_R(0)^y$ ein offenes Intervall mit $\lambda_1(B_R(0)^y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$.
Da $B_R(x_0)$ eine offene Menge ist, gilt $B_R(x_0) \in \mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{L}(1) \otimes \mathcal{L}(1)$. Es folgt mit der Translationsinveranz des Lebesgue-Maßes und Satz 2.81

$$\begin{aligned}\lambda_2(B_R(x_0)) = \lambda_2(B_R(0)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(B_R(0)^y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 2R^2 \int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}\frac{1}{R}\,\mathrm{d}y = 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2.\end{aligned}$$

(b) Für gegebenes $z \in \mathbb{R}$ ist

$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r(z)^2, z \in [a,b]\} = \begin{cases} \emptyset, & z \notin [a,b] \\ B_{r(z)}(0), & z \in [a,b]. \end{cases}$$

Mit (a) folgt somit

$$\lambda_3(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(A_z)\,\mathrm{d}\lambda_1(z) = \int_a^b \pi r(z)^2\,\mathrm{d}z = \pi \int_a^b r(z)^2\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 8.3. Es gilt wie in Aufgabe 8.2 $E \in \mathcal{L}(2) \otimes \mathcal{L}(1)$, da E eine Borelmenge ist. Nach Satz 2.81 folgt

$$\lambda_3(E) = (\lambda_2 \otimes \lambda_1)(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1(E_{(x,y)})\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Wegen der Wahl von a, b und c gilt $ax + bx + c \geq -|a| - |b| + c \geq 0$ für alle $(x,y) \in B_1(0)$. Dabei ist

$$E_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) \in E\} = \begin{cases} \emptyset, & x^2 + y^2 \geq 1, \\ [0, ax + by + c], & x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Somit folgt

$$\lambda_3(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1(E_{(x,y)})\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_{B_1(0)} ax + by + c\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Offenbar ist die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) := \chi_{B_1(0)}(x,y)(ax + by + c)$ $\mathcal{L}(1) \otimes \mathcal{L}(1)$-messbar und nach oben nichtnegativ. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist dabei

$$(x,y) \in B_1(0) \quad \Leftrightarrow \quad y \in (-1,1) \wedge x \in (-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}),$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_{(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2})} ax + by + c\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$$

für alle $y \in (-1,1)$ und 0 sonst. Es folgt nach Satz 2.84

$$\begin{aligned}\lambda_3(E) &= \int_{B_1(0)} ax + by + c\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\right)\mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= \int_{(-1,1)} \left(\int_{(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2})} ax + by + c\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\right)\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ax + by + c\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}ax^2 + byx + cx\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} 2(by + c)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 2b\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y + 2c\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = 2c\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = 2c\frac{\pi}{2} = c\pi.\end{aligned}$$

Aufgabe 8.4. Es ist

$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$
$$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 < 1\}$$

und somit

$$B_1 \cap B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 1], x^2 + y^2 < r(z)\}$$

mit

$$r : [0, 1] \to [0, \infty), \quad z \mapsto \min(1 - z^2, 1 - (z-1)^2) = \begin{cases} 1 - (z-1)^2 = 2z - z^2, & z \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - z^2, & z \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Aus Aufgabe 8.2 folgt

$$\begin{aligned} \lambda_3(B_1 \cap B_2) &= \pi \int_0^1 r(z)\,\mathrm{d}z = \pi \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 2z - z^2\,\mathrm{d}z + \int_{\frac{1}{2}}^1 1 - z^2\,\mathrm{d}z \right) \\ &= \pi \left(\left[z^2 - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\ &= \pi \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{8} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{8} \right) \right) \\ &= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{7}{8} \right) \\ &= \pi \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) = \pi \frac{5}{12}. \end{aligned}$$