Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 9

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 15, 2024)

Problem 1. (Stetigkeit, partielle und totale Differenzierbarkeit) Sind die Funktionen mit den Funktionswerten

(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/4}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

stetig, partiell oder total differenzierbar in $(0,0)$?

Proof. (a) Die Funktion ist stetig. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Sei $\delta = \epsilon^2$. Dann für alle $r \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|r - 0\| = \|r\| < \delta$ gilt $f(x,y) = (\|r\|^2)^{1/4} = \|r\|^{1/2} < \epsilon$.

Die Funktion ist nicht partiell differenzierbar. Für die Gerade $x = 0$ gilt $f(0,y) = (y^2)^{1/4} = \sqrt{|y|}$. Aber $g(y) = \sqrt{|y|}$ ist nicht bei 0 differenzierbar. Ähnlich ist sie auch nicht durch x partiell differenzierbar.

Weil die Funktion nicht partiell differenzierbar ist, ist sie auch nicht total differenzierbar.

(b) Die Funktion ist stetig. Es gilt

$$\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq (x^2+y^2).$$

Da $x^2+y^2 \to 0$ wenn $(x,y) \to (0,0)$, gilt es auch fü $f(x,y)$ und $f(x,y)$ ist in $(0,0)$ stetig.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Sie ist nicht partiell differenzierbar. z.B. Für die Gerade $y = 0$ ist $f(x, 0) = x^2 \sin(1/|x|)$, was nicht differenzierbar bei 0 ist. Ähnlich existiert auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht.

Weil f nicht partiell differenzierbar ist, ist f nicht total differenzierbar.

(c) ...

□

Problem 2. (Tangenten von Kurven) Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt $t \in [a, b]$ ein regulärer Punkt, falls $\gamma'(t) \neq 0$. Andernfalls nennen wir t ein singulären Punkt.

Bestimmen Sie die Menge der regulären/singulären Punkte folgender Kurven:

(a) $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (t^2, t^3)^T$,

(b) $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_2(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))^T$,

(c) $\gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_3(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$.

Proof. (a) $\gamma_1(t) = (2t, 3t^2)^T$.

Singulären Punkte: $\{0\}$.

Regularären Punkte: $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

(b) $\gamma_2'(t) = (3\cos^2(t)(-\sin t), 2\sin^2(t)\cos t)$, also

Singulären Punkte: $S = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$

Regulären Punkte: $[0, 2\pi] \backslash S$.

(c) $\gamma_3'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t - t \cos t, 1)^T$

Die Ableitung ist nie der Nullvektor, also

Singulären Punkte: $\varnothing$

Regulären Punkte: $[0, 2\pi]$. □

Problem 3. (Rechnen mit der Kettenregel) Der reelwertigen Funktionen $f(u_1, \ldots, u_n)$ und $u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m)$ seien auf den offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $G \subset \mathbb{R}^m$ erklärt, und die Funktion

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := f(u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m))$$

existiere auf G.

Im Folgenden ist jeweils die Ableitung $D\varphi$ der Funktion φ zu berechnen:

(a) $f(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2; \qquad u(t) = e^t \cos t,\ v(t) = e^t \sin t,\ w(t) = e^t,$

(b) $f(u,v) = \ln(u^2+v^2)$ für $(u,v) \neq (0,0)$; $u(x,y) = xy,\ v(x,y) = \sqrt{x}/y$ für $x, y > 0$,

(c) $f(u,v,w) = uv + vw - uw; \qquad u(x,y) = x + y, v(x,y) = x + y^2, w(x,y) = x^2 + y.$

Proof. (a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \to (u(t), v(t), w(t))^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(t) =& Df(g(t))Dg(t) \\ =&(2u, 2v, 2w)(u'(t), v'(t), w'(t))^T \\ =&2uu'(t) + 2vv'(t) + 2ww'(t) \\ =&2(e^t \cos t)(e^t \cos t - e^t \sin t) \\ &+ 2(e^t \sin t)(e^t \sin t + e^t \cos t) + 2e^{2t} \\ =&4e^{2t}. \end{aligned}$$

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \to (u(x,y), v(x,y))^T$. Es gilt

$$Df = \left(\frac{2u}{u^2+v^2}, \frac{2v}{u^2+v^2} \right)$$
$$Dg = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & \sqrt{x} \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(x,y) =& Df(g(x,y))Dg(x,y) \\ =& \left(\frac{2xy}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}, \frac{2\sqrt{x}/y}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \right) \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & \sqrt{x} \end{pmatrix} \\ =& \left(\frac{1 + 2xy^4}{x + x^2y^4}, \frac{2y(1+xy^2)}{1+xy^4} \right) \end{aligned}$$

(c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \to (u(x,y), v(x,y), w(x,y))^T$. Es gilt

$$Df(u,v,w) =(v - w, u + w, v - u)$$

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(x,y) =& Df(g(x,y))Dg(x,y) \\ =& (x + y^2 - x^2 - y, x^2 + x + 2y, y^2 - y) \\ & \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \\ =& (y(1+y) + 2x(1 - y + y^2), \\ & x + 2xy + x^2(2y-1) + 2y(3y-1)). \end{aligned}$$

□

Problem 4. Beweisen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und geben Sie die Ableitung an:

(a) $f(x) = x^T Ax$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

(b) $f(X,Y) = XY$ für $(X,Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times k}$.

Proof. (a) Wir berechnen $f'(x_0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + \delta x) =& (x_0 + \delta x)^T A(x_0 + \delta x) \\ =& x_0 A x_0 + (\delta x)^T A x_0 + (x_0)^T A(\delta x) \\ & + (\delta x)^T A(\delta x) \\ =& f(x_0) + ((x_0)^T A^T \delta x)^T + (x_0)^T A(\delta x) \\ & + (\delta x)^T A(\delta x) \\ =& f(x_0) + x_0^T A^T(\delta x) + (x_0)^T A(\delta x) \qquad (x_0)^T A^T \delta x \in \mathbb{R} \\ & + (\delta x)^T A(\delta x) \\ =& f(x_0) + x_0^T(A^T + A)(\delta x) + (\delta x)^T A(\delta x) \end{aligned}$$

Wir idenfizieren $Df(x_0) = x_0^T(A^T + A)$. Es bleibt zu zeigen, dass $(\delta x)^T A(\delta x)$ eigentlich die Restabbildung ist. Da

$$\lim_{\|\delta x\| \to 0} \left| \frac{(\delta x)^T}{\|\delta x\|} A \delta x \right| \leq \lim_{\|\delta x\| \to 0} \|A\| \|\delta x\| = 0,$$

gilt die Behauptung.

(b) Ähnlich berechnen wir $f'(X_0, Y_0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(X_0 + \delta X, Y_0 + \delta Y) =&(X_0 + \delta X)(Y_0 + \delta Y) \\ =&X_0 Y_0 + (\delta X) Y_0 + X_0(\delta Y) + (\delta X)(\delta Y) \end{aligned}$$

□

Problem 5. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = xy$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen kritischen Punkt in $(x, y) = (0, 0)$ besitzt, aber kein Extremum.

Proof.

$$f'(x, y) = (y, x)^T$$

und $f'(0, 0) = (0, 0)$. Die Funktion besitzt in $(0, 0)$ daher einen kritischen Punkt. Es ist aber kein Extremum. Es gilt $f(0, 0) = 0$. Es ist kein Maximum, weil auf der Gerade $x = y = t$ gilt $f(t, t) = t^2 > 0$ für $t \neq 0$, also in jede offene Menge bzw. offenem Kugel gibt es mindestens ein Punkt $(x, y) = (t, t)$, so dass $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$. Ähnlich gilt, auf der Gerade $(x, y) = (t, -t)$, $f(t, -t) = -t^2 < 0$, also $f(0, 0)$ ist kein Minimum. Dann besitzt f kein Extremum in $(0, 0)$. □