Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

# 11. Übungsblatt

**Hinweis:**
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Mittwoch (17.01.2024) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Zerlegung zweier unitärer Matrizen (2 + 4 + 6 + 4 Punkte)**
   Betrachten Sie die folgenden $3 \times 3$-Matrizen
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ -1+i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$
   (a) Berechnen Sie die adjungierten Abbildungen $A^*$ und $B^*$.
   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$ und $B$.
   (c) Überprüfen Sie, dass sich aus den Eigenvektoren der Matrix $A$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$ mit Standardskalarprodukt bauen lässt. Führen Sie das selbe auch mit Matrix $B$ durch.
   (d) Bestimmen Sie unitäre Matrizen $U, V \in M_3(\mathbb{C}^3)$, sodass $UAU^*$ und $VBV^*$ diagonal sind. Können Sie zudem erreichen, dass $U$ und $V$ orthogonal sind?

2. **Orthogonalprojektor I (2 + 2 + 4 + 2 Punkte)**
   Betrachten Sie die reelle Matrix
   $$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $P$ ein Orthogonalprojektor bezüglich des Standardskalarprodukts ist.
   (b) Bestimmen Sie den Rang von $P$.
   (c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Bildes und des Kerns von $P$ sowie den Basiswechsel $O$ von der Standardbasis auf diese Basis.
   (d) Verifizieren Sie, dass $O$ orthogonal ist. Können Sie einen solchen orthonormalen Basiswechsel finden, dass $\det O = 1$ gilt?

3. **Orthogonalprojektor II (2 + 2 Punkte)**
   Beweisen oder widerlegen Sie:
   (a) Jede Matrix $P \in M_n(\mathbb{C})$ mit $P^2 = P$ ist ein Orthogonalprojektor bezüglich eines *geeigneten* Skalarprodukts auf $V$.
   (b) Eine invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal für ein geeignet gewähltes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

4. **Isometrien (10 + 4 Bonuspunkte)**
   Seien $V, W$ euklidische Vektorräume und $A$ eine lineare Abbildung $V \to W$.
   (a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:
      i. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\langle v_1, v_2 \rangle_V = 0 \;\Rightarrow\; \langle Av_1, Av_2 \rangle_W = 0$.
      ii. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\|v_1\|_V = \|v_2\|_V \;\Rightarrow\; \|Av_1\|_W = \|Av_2\|_W$
      iii. Es existieren eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Isometrie $\Phi : V \to W$ mit $A = \alpha\Phi$.
   (b) Zeigen Sie, dass es genau dann Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, sodass
   $$C_1 \langle v_1, v_2 \rangle_V \leq \langle Av_1, Av_2 \rangle_W \leq C_2 \langle v_1, v_2 \rangle_V$$
   für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt, wenn $A = \alpha\Phi$ für eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Isometrie $\Phi : V \to W$ erfüllt ist. Bestimmen Sie die bestmöglichen Parameter $C_1$ und $C_2$.