Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

Analysis 2

Stefan Waldmann

Wintersemester 2023/2024

Hausaufgabenblatt Nr. 2

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)
Git revision of ana2-ws2324: `(None)` (None)

25. 10. 2023

(23 Punkte. Abzugeben am 02. 11. 2023)

Hausaufgabe 2-1: Leibnizregel

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}_0$ und $D \subset \mathbb{K}$ offen. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ ebenfalls n-mal differenzierbar ist und weiterhin

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für jedes $x \in D$ gilt. **(3 Punkte)**

Hausaufgabe 2-2: Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz

i.) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2x^2 + 1}.$$

Beweisen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine zu bestimmende Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, diese jedoch nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Warum ist das kein Widerspruch zu Proposition 5.5.2? **(3 Punkte)**

ii.) Untersuchen Sie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, \;\; x \in \mathbb{R}$$

auf Differenzierbarkeit. **(3 Punkte)**

Hausaufgabe 2-3: Gleichmäßige Approximation der Rampe

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \max\{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann. **(2 Punkte)**
Hinweis: Proposition 5.5.1

Hausaufgabe 2-4: Eine C^∞-Funktion

i.) Es seien $f : (a, b) \to (c, d)$ und $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f$ n-mal differenzierbar ist. **(2 Punkte)**

ii.) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert ist. Bestimmen Sie zudem $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. **(4 Punkte)**

Hausaufgabe 2-5: Gleichmäßige Konvergenz von Verkettungen

Es seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{K}$ nichtleere, kompakte Mengen und die Folgen stetiger Funktionen $f_n : K_1 \to K_2$ sowie $g_n : K_2 \to \mathbb{K}$ seien gleichmäßig konvergent gegen $f : K_1 \to K_2$ bzw. $g : K_2 \to \mathbb{K}$. Beweisen Sie, dass auch

$$g_n \circ f_n \quad \to \quad g \circ f$$

gleichmäßig auf K_1 gilt. **(6 Punkte)**