Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Elektrodynamik, SoSe 2024

Übungsblatt III

Bitte laden Sie Ihre Lösungen auf WUE Campus hoch, und zwar vor 16.00 Uhr am Montag, dem 6. Mai.

Sie dürfen in Dreiergruppen abgeben.

1. Spiegelladungen

Eine Punktladung q befinde sich an einem beliebigen Punkt innerhalb einer geerdeten, leitenden Hohlkugel vom Radius a. Die Hohlkugel werde idealisiert als eine zweidimensionale Fläche angenommen. Berechnen Sie mit Hilfe des Konzepts der Spiegelladung

a) das Potential innerhalb der Kugel,

b) die induzierte Ladungsdichte auf der Hohlkugel,

c) den Betrag und die Richtung der auf q ausgeübten Kraft nach dem Coulomb'schen Gesetz.

2. Green'sche Funktion in einer Dimension

Man betrachte den Raum zwischen zwei unendlich großen, geerdeten Leiterplatten, die parallel zueinander an den Punkten $x = 0$ und $x = d$ aufgestellt sind. Eine weitere Platte mit Flächenladungsdichte σ befindet sich bei $x = a$ mit $0 < a < d$.

a) Zeigen Sie, dass die Herleitung des Potentials $\varphi(x)$ für $0 \leq x \leq d$ äquivalent ist zur Berechnung einer eindimensionalen Green'schen Funktion und somit zur Lösung der Gleichung

$$\Delta_x G(x,a) = -\delta(x-a)\,, \quad \Delta_x \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,, \tag{1}$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen $G(0,a) = G(d,a) = 0$.

Um die Lösung der folgenden Teilaufgaben zu vereinfachen, bietet es sich an, das Koordinatensystem so zu verschieben, dass die geladene Platte sich bei $x = 0$ und die geerdeten Leiterplatten sich bei $x = -a$ bzw. $x = d - a$ befinden.

b) Teilen Sie den Raum in zwei ladungsfreie Regionen $-a < x < 0$ und $0 < x < d - a$ auf, und lösen Sie dort die zwei separaten, homogenen Laplace-Gleichungen für das Potential. Integrieren Sie dann die Poisson-Gleichung von $x = -\epsilon$ bis $x = +\epsilon$, und betrachten Sie den Grenzwert $\epsilon \to 0$, um die Bedingungen zu finden, welche die zwei Lösungen für das Potential in $x = 0$ verbinden. Bestimme schließlich das Potential für den gesamten Bereich $-a < x < d - a$.

c) Bestätigen Sie das obige Resultat, indem Sie die Differenzialgleichung für das Potential unter Berücksichtigung der Randbedingungen bei $x = -a$ und $x = d - a$ direkt integrieren.

(bitte wenden)

d) Führen Sie eine Fouriertransformation der Differenzialgleichung für das Potential durch, lösen Sie die transformierte Gleichung im Fourier-Raum und transformieren Sie die Lösung zurück in den Ortsraum. Überzeugen Sie sich von der Existenz einer partikulären Lösung, welche mit den vorherigen übereinstimmt.