Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 6

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 9, 2023)

Problem 1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x, y) \to x \cdot y$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x, y) \to x + y$

(c) $h : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]\ p(t) \to p(t^2)$

(d) $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $k(t) = t + 2$

(e) $l : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $l(z) = \overline{z}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(f) l, aber mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum

Proof. (a) Nein. $f((1, 1)) = 1 \cdot 1 = 1$, aber $f(2(1, 1)) = f((2, 2)) = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2(1)$.

(b) Ja. Sei $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) =& f((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) \\ =& (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ =& (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ =& f((x_1, x_2)) + f((y_1, y_2)) \end{aligned}$$

Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, x_2)) =& f((\lambda x_1, \lambda x_2)) \\ =& \lambda x_1 + \lambda x_2 \\ =& \lambda(x_1 + x_2) \\ =& \lambda f((x_1, x_2)) \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(c) Ja. Sei $p, q \in Q[t]$, $p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n$ und $q = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_n t^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} h(p(t)) =& p_0 + p_1 t^2 + p_2 t^4 + \cdots + p_n t^{2n} \\ h(q(t)) =& q_0 + q_1 t^2 + q_2 t^4 + \cdots + q_n t^{2n} \\ h(p(t)) + h(q(t)) =& (p_0 + q_0)) + (p_1 + q_1) t^2 + \cdots + (p_n + q_n) t^{2n} \\ =& h(p+q) \end{aligned}$$

Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{Q}$. Es gilt

$$\begin{aligned} h(\lambda p(t)) =& \lambda p_0 + \lambda p_1 t^2 + \lambda p_2 t^4 + \cdots + \lambda p_n t^{2n} \\ =& \lambda \left(p_0 + p_1 t^2 + \cdots + p_n t^{2n} \right) \\ =& \lambda h(p(t)) \end{aligned}$$

(d) Nein. Es gilt $k(2) = 4$, aber $k(2 \cdot 2) = k(4) = 6 \neq 2k(2) = 8$.

(e) Ja. Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, Es gilt $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt dann

$$\overline{\lambda z_1} = \bar{\lambda} \bar{z}_1 = \lambda \bar{z}_1.$$

(f) Nein. Die erste Eigenschaft bleibt wie in (e), aber die zweite nicht. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\overline{\lambda z_1} = \bar{\lambda} \bar{z}_1 \neq \lambda \overline{z_1}$$

solange $\lambda \notin \mathbb{R}$. Sei z.B. $\lambda = i,\ z_1 = i$. Dann gilt $\lambda z_1 = -1$ und $\overline{\lambda z_1} = -1$. Das ist aber ungleich $\lambda \bar{z}_1 = i(\bar{i}) = i(-i) = 1$. □

Problem 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden linearen Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, x \to Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \to Ax$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t], p(t) \to p'(t)$

(d) $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit $(z, w) \to (z + w, z - \overline{w})$, wobei wir $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen.

(e) $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to \operatorname{End}_{\mathbb{R}}$ mit $f \to \operatorname{Re}(f|_{\mathbb{R}}) + \operatorname{Im}(f|_{\mathbb{R}})$, wobei $f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f|_{\mathbb{R}}(x) := f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und Re bzw. Im den Real bzw. Imaginärteil bezeichnen.

Proof. (a) Nicht injektiv, weil die Spalten nicht linear unabhängig sind. Insbesondere gilt
$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Es ist surjektiv, weil die erste zwei Spalten eine Basis sind.

(b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times 18} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & -42 & -84 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & -84 \end{pmatrix}$$
also es ist injektiv und surjektiv, daher bijektiv.

(c) Nicht injektiv. Sei $p = x + 1$ und $q = x + 2$. Dann ist $p' = q' = 1$, aber $p \neq q$.

Es ist aber surjektiv. Sei $\mathbb{Q}[t] \ni p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$. Dann ist $q = a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ ein Polynom, dessen Bild p ist.

(d) Es ist nicht injektiv. Sei $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{C}^2$, $z_1 = 0, z_2 = i, w_1 = 2 + 3i, w_2 = 2 + 2i$. Es gilt dann
$$(z_1 + w_1, z_1 - \overline{w}_1) = (2 + 3i, -2 + 3i)$$

$$(z_2 + w_2, z_2 - \overline{w}_2) = (2 + 3i, -2 + 3i)$$

Es ist auch nicht surjektiv. Es gilt

$$\mathrm{Im}(z_1 + w_1) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(w_1)$$

und

$$\mathrm{Im}(z_1 - \overline{w}_1) = \mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(\overline{w}_1) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2).$$

Dann gilt für alle (z, w) im Bild, dass $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z)$. Da es gibt Punkte in $\mathbb{C}^2$, die das nicht erfüllen, ist die Abbildung nicht surjektiv.

(e) Es ist nicht injektiv. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x$. Dadurch definieren wir zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f(x) =& h(x) \\ g(x) =& ih(x) \end{aligned}$$

Dann gilt $f \neq g$. Aber

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(f) =& \mathrm{Im}(g) = h \\ \mathrm{Im}(f) =& \mathrm{Re}(g) = 0 \end{aligned}$$

also die zwei Funktionen werden auf die gleiche Funktion abgebildet.

Es ist aber surjektiv. Für jede $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $g = f$. Dann wird g auf f abgebildet. $\square$

Problem 3. Geben Sie je eine lineare Abbildung mit den folgenden Eigenschaften an. Sie müssen Ihre Aussagen ausnahmsweise nicht beweisen.

(a) $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $L(x) = x$ nur für $x = (0, 0)$.

(b) $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass $L_2((1, 1, 1)) = L_2((1, 1, 0))$.

(c) $L_3 : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]$, sodass $\deg(L_3(p(t))) \geq 3\deg(p(t))$ für alle $p \in \mathbb{Q}[t]$.

(d) $L_3 : V \to V$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist, für einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum Ihrer Wahl.

(e) $L_5 : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, sodass es genau drei verschiedene Elemente $x, y, z \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ mit $L_5(x) = L_5(y) = L_5(z) = (1, 0)$ gibt.

Proof. (a) $L_1((x, y)) = (2x, 2y)$ ist linear, aber $L(x) = x$ nur für $x = (0, 0)$.

(b) Projektor: $L_2((x, y, z)) = (x, y)$.

(c) $p(t) \to p(t^3)$ (wie in 1)

(d) Für $V = \mathbb{Q}[t]$: $L_5 : p(t) \to p(t)t$. □

Problem 4. Die folgenden linearen Abbildungen können jeweils auch in der Form $x \to Ax$ mit einer Matrix A geschrieben werden. Bestimmen Sie für jede der Abbildungen eine geeignete Matrix.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix}.$$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(c) $f \circ g$.

(d) $g \circ f$.

Proof. (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir verifizieren es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Noch einmal können wir direkt verifizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(c) Die Matrixdarstellung ist nur das Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Noch einmal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Problem 5. Wir betrachten die Abbildung $S_n : \mathbb{Q}[t]_{\leq n} \to \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ mit $p(t) \to p'(t) + \tilde{p}(0)t^n$.

(a) Beweisen Sie: S_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ linear.

(b) Untersuchen Sie S_n auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(c) Beweisen Sie: $S_n^k(t^k) = k!$ und $S_n^{n-k}(t^n) = n!/k!t^k$ für $k = 0, \dots, n$.

(d) Folgern Sie: $S_n^{n+1}(p(t)) = n!p(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $p(t) \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$.

Proof. (a) Sei $q, p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$. Es gilt

$$\begin{aligned} S_n(q+p) &= (q+p)'(t) + \widetilde{q+p}(0)t^n \\ &= q'(t) + p'(t) + \tilde{q}(0)t^n + \tilde{p}(0)t^n \\ &= (q'(t) + \tilde{q}(0)t^n) + (p'(t) + \tilde{p}(0)t^n) \end{aligned}$$

$$=S_n(q) + S_n(p).$$

Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{Q}$. Es gilt

$$\begin{aligned} S_n(\lambda q) =&(\lambda q)'(t) + \widetilde{\lambda q}(0)t^n \\ =&\lambda q'(t) + \lambda \tilde{q}(0)t^n \\ =&\lambda \left(q'(t) + \tilde{q}(0)t^n\right) \\ =&\lambda S_n(q) \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben die Wirkung von S_n auf einem Polynom:

$$S_n : (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \to (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, a_0).$$

Daraus folgt die Injektivität und Surjektivität: Sei $p = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ und $q = (b_0, b_1, \dots, b_n)$. Wann ist $S_n(p) = q$? Es gilt genau dann, wenn

$$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, a_0) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Dann ist es klar: $a_1 = b_0$, $2a_2 = b_1$, $\dots$. Weil alle Koeffizienten noch rational sind, ist p in $\mathbb{Q}[t]_{\leq n}$. Es folgt auch daraus, das p eindeutig ist, also es ist injektiv.

(c) Wir zeigen es per Induktion: Sei $k = 0$. Dann ist $t^0 = 1 = 0!$. Wir nehmen jetzt an, dass für beliebiges $\mathbb{N} \ni k < n$ gilt

$$S_n^k(t^k) = k!.$$

Dann betrachten wir

$$\begin{aligned} S_n^{k+1}(t^{k+1}) =&S_n^k(S_n(t^{k+1})) \\ =&S_n^k((k+1)t^k) \\ =&(k+1)S_n^k(t^k) \\ =&(k+1)k! \\ =&(k+1)! \end{aligned}$$

Wie beweisen die andere Behauptung per Rückwartsinduktion. Es gilt, für $k = n$:

$$S_n^{n-n}(t^n) = S_n^0(t^n) = t^n = n!/k!t^k.$$

Dann nehmen wir an, dass es für $1 \leq k \leq n$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
S_n^{n-(k-1)}(t^n) =& S_n(S_n^{n-k}(t^n)) \\
=& S_n(n!/k!t^k) \\
=& \frac{n!}{k!} S_n(t^k) \\
=& \frac{n!}{k!} k t^{k-1} \\
=& \frac{n!}{(k-1)!} t^{k-1}
\end{aligned}$$

(d) Wir schreiben ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ als Linearkombination von Potenzen von t. Für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}
S_n^{n+1}(t^k) =& S_n^{n-k}(S_n(S_n^k(t^k))) \\
=& S_n^{n-k}(S_n(k!)) \\
=& S_n^{n-k}(k!t^n) \\
=& k!S_n^{n-k}(t^n) \\
=& \frac{k!n!}{k!} t^k \\
=& n!t^k
\end{aligned}$$

Daraus folgt, für ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$:

$$\begin{aligned}
S_n^{n+1} p =& S_n^{n+1}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) \\
=& S_n^{n+1}(a_0) + S_n^{n+1}(a_1 t) + \cdots + S_n^{n+1}(a_n t^n) \\
=& n!a_0 + n!a_1 t + \cdots + n!a_n t^n \\
=& n!(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) \\
=& n!p.
\end{aligned}$$

□