Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Funktionalanalysis

Daniela Kraus

Oliver Roth

Wintersemester 2023/2024 Universität Würzburg

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhäuser, Basel 1986.

[2] St. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw, Monografje. Matematyczne, 1932.

[3] J. Elstrodt, *Maß– und Integrationstheorie*, Springer, 1996.

[4] Y. Le Floch, *A Brief Introduction to Berezin–Toeplitz Operators on Compact Kähler Manifolds*, Springer 2018.

[5] F. Hirzebruch, W. Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Spektrum, 1991.

[6] W. Kaballo, *Grundkurs Funtionalanalysis*, Spektrum, 2011.

[7] D. Kraus und O. Roth, *Einführung in die Funktionentheorie*, Vorlesungsskript, Universität Würzburg 2023.

[8] D. Kraus und O. Roth, *Analysis*, Vorlesungsskript, Universität Würzburg 2021.

[9] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[10] P. D. Lax, *Functional Analysis*, Wiley, 2002.

[11] B. MacCluer, *Elementary Functional Analysis*, Springer, 2009.

[12] F. Riesz, B. Sz.–Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Verlag Harri Deutsch, 2000.

[13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[14] O. Roth, *Lineare Algebra*, Vorlesungsskript, Universität Würzburg 2012.

[15] B. Simon, M. Reed, *Methods of Modern Physics: Functional Analysis I*, Academic Press, 1972.

[16] H. Triebel, *Höhere Analysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

[17] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teubner, 1994.

[18] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, 2011.

[19] K. Yoshida, *Functional Analysis*, Springer, 1996.

[20] L. Young, *Mathematicians and their Times*, North–Holland 1981.

[21] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis – Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1995.

[22] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis – Main Principles and their Applications*, Springer, 1995.

Kapitel 1

Banachräume

In diesem Kapitel erinnern wir an einige wichtige Eigenschaften normierter und metrischer Räume sowie stetiger linearer Abbildungen zwischen normierten Räumen, die bereits in den Grundvorlesungen zur Analysis ausführlich behandelt werden. Wir illustrieren diese Konzepte durch zahlreiche Beispiele, die in der Funktionalanalysis eine omnipräsente Rolle spielen.

1.1 Metrische Räume, normierte Räume und das Lemma von Riesz

Das Hauptthema jeder einführenden Vorlesung zur Funktionalanalysis ist die Feinstruktur normierter Räume und der stetigen linearen Abbildungen zwischen solchen Räumen. Im Gegensatz zur Linearen Algebra liegt der Fokus auf **unendlich** dimensionalen Vektorräumen. In den allermeisten Beispielen sind die Elemente dieser Räume selbst Funktionen. D.h. man arbeitet nicht wie in der "klassischen" Analysis mit individuellen Funktionen, sondern fasst diese als "Punkte" in einem geeigneten normierten Raum auf.

Wir erinnern zunächst an die grundlegenden Konzepte *Metrischer Raum* und *Normierter Raum* mit denen die Leserinnen und Leser bereits im Rahmen ihrer Grundvorlesungen zur Analysis, siehe z.B. [8], Freundschaft geschlossen haben (sollten).

Definition (Metrischer Raum, [8, S. 135]).
Ein **metrischer Raum** (X, d) ist gegeben durch eine nicht–leere Menge X zusammen mit einer **Metrik** genannten Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, für die

$$(i)\ d(x,y) = 0 \iff x = y; \qquad (ii)\ d(x,y) = d(y,x) \geq 0; \qquad (iii)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

für alle $x, y, z \in X$ gilt.

Ist die gewählte Metrik d aus dem Zusammenhang klar, so schreiben wir oft X anstelle von (X, d). Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $|z|$ bezeichne den Betrag von $z \in \mathbb{K}$.

Definition (Norm; normierter Raum, [8, S. 137]).
Es sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine Abbildung $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** auf E, falls für alle $x, y \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden Eigenschaften gelten.

(a) $||x|| \geq 0$; (Nichtnegativität)

(b) $||x|| = 0 \iff x = 0$; (Definitheit)

(c) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$; (Homogenität)

(d) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(E, ||\cdot||)$ heißt dann **normierter Raum**. Ist die zugrundeliegende Norm aus dem Zusammenhang (oder anderweitig) klar, so schreibt man oft E anstelle von $(E, ||\cdot||)$.

Aus (d) folgt $||x+y|| \geq |||x|| - ||y|||$, die „umgekehrte Dreieicksungleichung". Gilt in (b) lediglich „$\Longleftarrow$", so heißt $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ **Halbnorm**.

Bemerkung (Jeder normierte Raum „ist" ein metrischer Raum)**.**
Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann ist durch $d_E(x,y) := ||x-y||$ für $x, y \in E$ eine Metrik d_E auf E definiert, die **von** $||\cdot||$ **induzierte Metrik**. Diese ist **translations–invariant** im Sinne, dass $d_E(x+z, y+z) = d_E(x,y)$ für alle $x, y, z \in E$ gilt. Wenn wir im Folgenden über Eigenschaften von $(E, ||\cdot||)$ als metrischen Raum sprechen, so beziehen wir uns stets auf die von $||\cdot||$–induzierte Metrik d_E.

Der $\mathbb{K}$–Vektorraum $\mathbb{K}^N$ ausgestattet mit der *euklidischen Norm*

$$||x||_2 := \left(|x_1|^2 + \ldots + |x_N|^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{K}^N,$$

ist ein normierter Raum.

Beispiel 1.1 (Beschränkte Funktionen (Fréchet 1906), [8, Beispiele 23.4 (a) und (c)])**.**
Es sei M eine nicht–leere Menge. Dann bildet der Vektorraum der beschränkten Funktionen $f : M \to \mathbb{C}$, den wir mit $\mathcal{B}(M)$ bezeichnen, zusammen mit der Supremumsnorm,

$$||f||_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)|,$$

einen normierten Raum.

Beispiel 1.2 (Stetige Funktionen, [8, Beispiel 23.4 (c)])**.**
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet der Vektorraum

$$C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ stetig und beschränkt}\}$$

ausgestattet mit der $||\cdot||_\infty$–Norm einen normierten Raum $C_b(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Ist der metrische Raum (X, d) kompakt, so ist bekanntlich jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ beschränkt mit

$$||f||_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|,$$

d.h. es gilt

$$C_b(X) = C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}.$$

Beispiel 1.3 (Beschränkte holomorphe Funktionen)**.**
Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ der $\mathbb{C}$–Vektorraum aller in $\mathbb{D}$ konvergenten Potenzreihen (=in $\mathbb{D}$ holomorphen Funkionen) der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Die Menge

$$H^\infty := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{D})$$

der auf $\mathbb{D}$ beschränkten holomorphen Funktionen bildet mit der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$ einen normierten Raum.

Beispiel 1.4 (l^p–Räume).
Es sei $1 \leq p \leq \infty$. *Wir setzen*

$$\begin{aligned} l^p &:= \left\{ (a_n) \subseteq \mathbb{C} \, : \, ||(a_n)||_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \qquad 1 \leq p < \infty, \\ l^\infty &:= \left\{ (a_n) \subseteq \mathbb{C} \, : \, ||(a_n)||_\infty = \sup\{|a_n| \, : \, n \in \mathbb{N}_0\} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Dann ist $(l^p, ||\cdot||_p)$ *ein normierter Raum. Die Dreiecksungleichung für* $1 \leq p < \infty$ *ist die sog. Minkowski Ungleichung, die aus der Hölder Ungleichung folgt (siehe [8, Korollar 18.5]).*

Für $1 \leq p < q \leq \infty$ *gilt* $l^p \subsetneq l^q$.

Beispiel 1.5 (L^p–Räume, siehe [8, Definition und Satz 44.7]).
Es sei $M \subseteq \mathbb{K}^N$ *eine nicht–leere Lebesgue–messbare Menge,* $1 \leq p < \infty$ *und*

$$\mathcal{L}^p(M) := \left\{ f : M \to \mathbb{C} \text{ messbar mit } ||f||_p := \left(\int_M |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Dann ist $||\cdot||_p$ *lediglich eine Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p(E)$. *Auf dem Faktorraum*

$$L^p(M) := \mathcal{L}^p(M) / \{f : M \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \, f = 0 \text{ fast überall}\}$$

wird jedoch durch $||[f]||_p := ||f||_p$ *eine Norm definiert, d.h.* $(L^p(M), ||\cdot||_p)$ *ist ein normierter Raum.*

Vereinbarung: *Wir schreiben* $f \in L^p(M)$ *statt* $[f] \in L^p(M)$.

Dies bedeutet, dass wir zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^p(M)$ *mit* $f = g$ *fast überall identifizieren, d.h.* f *und* g *stellen ein und dasselbe Element in* $L^p(M)$ *dar.*

Bemerkung.
Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$, so ist auf dem Vektorraum

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \ \mu\text{–messbar mit } ||f||_{\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)} := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

durch $||\cdot||_{\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)}$ eine Halbnorm gegeben. Der Raum $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ stimmt für das Lebesgue–Maß (auf $X = \mathbb{K}^N$) mit $\mathcal{L}^p(\mathbb{K}^N)$ und für das Zählmaß mit l^p überein.

Beispiel 1.6 (Hardy–Raum).
Für jede Folge $(a_n) \in l^2$ *ist*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für $z \in \mathbb{D}$ *wohldefiniert, denn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \right)^{1/2} < \infty$$

für jedes $z \in \mathbb{D}$. Insbesondere gilt somit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Der Vektorraum

$$H^2 := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \,\middle|\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ (a_n) \in l^2 \right\}$$

ausgestattet mit der Norm $||f||_2 := ||(a_n)||_2$ heißt **Hardy–Raum**.

Für $f \in H^2$ gilt

$$||f||_2 = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \,.$$

Definition (Konvergenz, [8, S. 139]; Abgeschlossenheit, [8, S. 179]; Kompaktheit, [8, S. 190]).
Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X, d) heißt **konvergent** gegen $x \in X$, falls $d(x_n, x) \to 0$. Man schreibt $x_n \to x$ und nennt x den **Limes** der Folge (x_n).

Eine Teilmenge M eines metrischen Raums (X, d) heißt **abgeschlossen**, falls für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \to x \in X$ gilt, dass $x \in M$.

Eine Teilmenge K eines metrischen Raums (X, d) heißt **kompakt**, falls jede Folge (x_n) in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Limes wieder in K liegt.

Bemerkung.
Jeder *endlich–dimensionale* Unterraum eines normierten Raums $(E, ||\cdot||)$ ist abgeschlossen (siehe Aufgabe 1.1 1). In *unendlichen* Dimensionen ist die Sachlage wesentlich interessanter.

Beispiel 1.7 (Standardbeispiel eines nicht–abgeschlossenen Unterraums, [8, Beispiel 24.8]).
Es sei $X := [-1, 1]$. Die Folge $(f_n) \subset C(X)$ mit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ konvergiert in $(C(X), ||\cdot||_\infty)$ gegen $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, denn

$$||f_n - f||_\infty = \max_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in X} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \max_{x \in X} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \,.$$

Der Unterraum

$$C^1(X) := \{ f \in C(X) \,:\, f \text{ stetig differenzierbar} \}$$

von $C(X)$ ist somit nicht abgeschlossen in $(C(X), ||\cdot||_\infty)$.

Beispiel 1.8.
Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist $C(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $(\mathcal{B}(X), ||\cdot||_\infty)$.

Beispiel 1.9.
Der Raum H^∞ ist ein abgeschlossener Unterraum des Vektorraums $\mathcal{B}(\mathbb{D})$. Um dies einzusehen sei $(f_n) \subset H^\infty$ und $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ derart, dass $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$. Die Folge (f_n) konvergiert somit gleichmäßig auf $\mathbb{D}$ gegen f. Der Konvergenzsatz von Weierstraß aus der Funktionentheorie ([7, Satz 8.5]) impliziert $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Da $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $||f - f_N||_\infty < 1$. Daher gilt $||f||_\infty \leq 1 + ||f_N||_\infty < \infty$, also $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$. Zusammen folgt $f \in H^\infty$.

Lemma 1.10 (Rieszsches Lemma 1918, fast–orthogonales Element).
Es sei $(E, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum und* $Y \subsetneq E$ *ein abgeschlossener Unterraum. Zu jedem* $\delta \in (0,1)$ *gibt es dann ein* $x_\delta \in E$ *mit* $||x_\delta|| = 1$ *und* $||x_\delta - y|| \geq 1 - \delta$ *für alle* $y \in Y$.

Beweis. Es sei $x \in E \setminus Y$ und $d := \inf\{||x-y|| \,:\, y \in Y\}$. Da Y abgeschlossen ist, gilt $d > 0$. Insbesondere gibt es ein $y_\delta \in Y$ mit $||x - y_\delta|| \leq d/(1-\delta)$. Für $x_\delta := (x - y_\delta)/||x - y_\delta||$ gilt dann $||x_\delta|| = 1$ und

$$||x_\delta - y|| \quad = \quad \frac{||x - (y_\delta + ||x - y_\delta||\, y)||}{||x - y_\delta||} \geq \frac{d}{||x - y_\delta||} \geq 1 - \delta$$

für alle $y \in Y$. □

Bemerkung.
I. Allg. kann im Rieszschen Lemma *nicht* $\delta = 0$ gewählt werden:
Es sei $(E, ||\cdot||) = (\{x \in C[(0,1])\,:\, x(1) = 0\}, ||\cdot||_\infty)$ und

$$Y = \left\{ y \in E \,:\, \int_0^1 y(t)\,dt = 0 \right\}.$$

Dann ist Y ein abgeschlossener Unterraum in E und $Y \neq E$. Wir nehmen an es gibt ein $x \in E$ mit $||x||_\infty = 1$ und $||x - y||_\infty \geq 1$ für alle $y \in Y$. Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $x_n \in E$ mit $x_n(t) = 1 - t^n$. Dann gilt $||x_n||_\infty = 1$ und $\int_0^1 x_n(t)\,dt = 1 - \frac{1}{n+1}$. Für die Funktionen

$$y_n(t) = x(t) - \lambda_n\, x_n(t) \quad \text{mit} \quad \lambda_n := \frac{\int_0^1 x(t)\,dt}{1 - \frac{1}{n+1}}$$

gilt $y_n \in Y$. Da $||x - y_n||_\infty \geq 1$ folgt $|\lambda_n| \geq 1$ und somit

$$\left| \int_0^1 x(t)\,dt \right| \geq 1\,.$$

Da jedoch x stetig ist mit $x(1) = 0$ und $||x||_\infty = 1$ folgt $|\int_0^1 x(t)\,dt| < 1$. Widerspruch!

Korollar 1.11.
Es sei $(E, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum mit* $\dim E = \infty$. *Dann ist die abgeschlossene und beschränkte Einheitskugel* $\mathbb{B}_E := \{x \in E \,:\, ||x|| \leq 1\}$ *nicht kompakt.*

Für einen $\mathbb{K}$–Vektorraum V und eine nicht–leere Teilmenge $M \subseteq V$ schreiben wir $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} M$ für die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen von Elementen aus M (mit Skalaren aus $\mathbb{K}$). Ist $\mathbb{K}$ aus dem Zusammenhang klar oder irrelevant, so schreiben wir oft $\operatorname{span} M$ anstelle von $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} M$.

Beweis. Es sei $x_1 \in E$ mit $||x_1|| = 1$ beliebig. Dann ist $U_1 := \operatorname{span}\{x_1\}$ abgeschlossen und $U_1 \neq E$. Gemäß Lemma 1.10 mit $\delta = 1/2$ existiert ein $x_2 \in E$ mit $||x_2|| = 1$ und $||x_2 - x_1|| \geq 1/2$. Nun betrachten wir den abgeschlossenen Unterraum $U_2 := \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$. Dann ist $U_2 \neq E$ und nach Lemma 1.10 mit $\delta = 1/2$ existiert ein $x_3 \in E$ mit $||x_3|| = 1$ und

$||x_3 - x_1|| \geq 1/2$ und $||x_3 - x_2|| \geq 1/2$. Nun setzen wie $U_3 = \operatorname{span}\{x_1, x_2, x_3\}$. So fortfahrend, erhalten wir induktiv eine Folge $(x_n) \subset E$ mit $||x_n|| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $||x_m - x_n|| \geq 1/2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Insbesondere enthält (x_n) keine konvergente Teilfolge. $\square$

Bemerkung.
Zusammen mit Aufgabe 1.1.1 (c) ergibt sich daher: $\dim E < \infty \iff \mathbb{B}_E$ ist kompakt.

Bemerkung.
Insbesondere gilt der Satz von Bolzano—Weierstraß in normierten Räumen **nur** im Falle endlicher Dimension. Zunächst ist es überraschend, dass sich eine reine topologische Aussage ("$\mathbb{B}$ ist kompakt") als äquivalent zu einer rein algebraischen Aussage ("$\dim E < \infty$) erweist. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Definition einer Norm stark die algebraischen Strukturen des zugrundeliegenden Vektorraums reflektiert. In lediglich metrischen Vektorräumen ist dies nicht der Fall und tatsächlich gibt es unendlich dimensionale metrische Vektorräume, in denen der Satz von Bolzano–Weierstraß gültig bleibt. Ein wichtiges nichttriviales Beispiel ist der Vektorraum der holomorphen Funktionen ausgestattet mit der "Metrik der kompakten Konvergenz": der Satz von Bolzano–Weierstraß in diesem Setting ist der Satz von Montel aus der Funktionentheorie!

Aufgaben

1. Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und U ein endlich–dimensionaler Unterraum von E mit Basis $\{b_1, \ldots, b_N\}$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

   (a) Es sei $||x||_2 := (|x_1|^2 + \ldots + |x_N|^2)^{1/2}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^N$. Dann ist die Funktion $f : \mathbb{K}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch
   $$f(x) := \left|\left|\sum_{j=1}^N x_j b_j\right|\right|, \qquad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{K}^N,$$
   auf der Menge $S := \{x \in \mathbb{K}^N \,:\, ||x||_2 = 1\}$ durch eine Konstante $\gamma > 0$ nach unten beschränkt. Somit gilt mit $\beta := ||b_1|| + \ldots + ||b_N||$
   $$\gamma\,||x||_2 \leq \left|\left|\sum_{j=1}^N x_j b_j\right|\right| \leq \beta\,||x||_2 \text{ für alle } x \in \mathbb{K}^N.$$

   (b) U ist eine abgeschlossene Teilmenge von $(E, ||\cdot||)$.

   (c) Jede beschränkte Folge in U besitzt eine konvergente Teilfolge in U.

2. Es sei U ein Unterraum eines normierten Raumes $(E, ||\cdot||)$. Zeigen Sie, dass dann auch der Abschluss $\overline{U} := \{x \in E \,:\, \exists (u_n) \subset U \text{ mit } u_n \to x\}$ von U ein Unterraum von E ist.

3. Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls E ein endlich dimensionaler normierter Raum ist, so kann man im Lemma von Riesz auch $\delta = 0$ wählen.

4. Zeigen Sie $H^\infty \subsetneq H^2$. Ist H^∞ abgeschlossen in $(H^2, ||\cdot||_2)$?

1.2 Vollständigkeit und Separabilität

Definition (Cauchyfolge, [8, S. 139]).
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt **Cauchyfolge** in (X, d), falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist bekanntlich eine Cauchy–Folge.

Definition (Vollständigkeit, Banachraum [8, S. 141]).
Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge $(x_n) \subset X$ gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

Der euklidische Raum $(\mathbb{K}^N, ||\cdot||_2)$ oder jeder andere endlich–dimensionale $\mathbb{K}$–Vektorraum ausgestattet mit (irgendeiner) Norm ist vollständig, also ein Banachraum.

Beispiel 1.12 ([8, Beispiele 23.8 (c) und Korollar 24.7]).
Es sei X eine nicht–leere Menge. Dann ist $(\mathcal{B}(X), ||\cdot||_\infty)$ ein Banachraum. Ist X ein metrischer Raum, so ist $(C_b(X), ||\cdot||_\infty)$ ein Banachraum.

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchyfolge in $(\mathcal{B}(X), ||\cdot||_\infty)$. Für jedes $x \in X$ gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty$, d.h. die Folge $(f_n(x))$ ist eine Cauchyfolge im *vollständigen* Körper $\mathbb{C}$, also konvergent mit Limes $=: f(x) \in \mathbb{C}$. Damit ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ definiert. Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Für jedes $x \in E$ gilt dann $|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit ist $f : X \to \mathbb{C}$ beschränkt (durch $||f_N||_\infty + \varepsilon$) und es gilt $||f - f_n||_\infty \to 0$ für $n \to \infty$, also $f_n \to f$ in $(\mathcal{B}(X), ||\cdot||_\infty)$.
Falls $(f_n) \subseteq C_b(X)$, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f. Dies impliziert $f \in C_b(X)$. □

Bemerkung 1.13.
Ersetzt man in Beispiel 1.12 den Zielraum $\mathbb{C}$ durch einen Banachraum $(F, ||\cdot||_F)$, so erhält man folgende analoge Aussage.

Der Vektorraum
$$\mathcal{B}(X, F) := \{f : X \to F \text{ beschränkt}\}$$
ausgestattet mit der Supremumsnorm
$$||f||_\infty := \sup_{x\in X} ||f(x)||_F$$
ist ein Banachraum. Falls X ein metrischer Raum ist, so ist auch $C_b(X, F) = \{f : X \to F \text{ stetig und beschränkt}\}$ zusammen mit $||\cdot||_\infty$ ein Banachraum.

Beispiele 1.14.
Es sei $p \in [1, \infty]$.

(a) Ist $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{K}^N$ eine Lebesgue–messbare Menge und $p \in [1, \infty)$, so ist $(L^p(X), ||\cdot||_p)$ ein Banachraum. Dies ist der sog. Satz von Riesz–Fischer ([8, Satz 45.12]).

(b) $(l^p, ||\cdot||_p)$ ist ein Banachraum (auch für $p = \infty$).

Beweis. (a) Wir geben eine *Beweisskizze.* Vgl. [13, Thm. 3.11]: Es sei (f_n) eine Cauchyfolge in $L^p(X)$. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir o.E. annehmen, dass $||f_n - f_{n+1}||_p \leq 2^{-n}$. Die $(m-1)$–te Partialsumme

$$f_1(x) + \sum_{n=1}^{m-1} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) = f_m(x)$$

der Teleskopreihe

$$f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$$

wird majorisiert durch

$$G_m(x) := |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{m-1} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \,.$$

Insbesondere gilt $0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_m \nearrow G$. Da $|f_1| \in L^p(X)$ und $|f_{n+1} - f_n| \in L^p(X)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$||G_m||_p \leq ||f_1||_p + \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \leq 1 + ||f_1||_p \,.$$

Der Satz über die monotone Konvergenz impliziert

$$\int_X (G(x))^p \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_X (G_m(x))^p \, dx < \infty \,,$$

also $G \in L^p(X)$. Somit gilt $G(x) < \infty$ fast überall und die Teleskopreihe konvergiert absolut fast überall. Setze $f(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$ für die Punkte x für die die Teleskopreihe konvergiert und $f(x) = 0$ sonst.
Da $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ fast überall und $|f_m(x)| \leq G(x)$ fast überall für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, folgt mit dem Satz über die dominierte Konvergenz

$$\int_X |f(x)|^p \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_X |f_m(x)|^p \, dx \,,$$

und

$$\int_X |f(x) - f_n(x)|^p \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_X |f_m(x) - f_n(x)|^p \, dx \,.$$

Somit folgt $f \in L^p(X)$ und $||f - f_m||_p \to 0$.

(b) Beispiel 1.12 zeigt, dass $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$ ein Banachraum ist. Daher sei nun $p \in [1, \infty)$. Es sei $(x_k)_k$ eine Cauchyfolge in l^p und $x_k = (\xi_0^k, \xi_1^k, \xi_2^k, \ldots)$. Wähle $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l > N$ gilt $||x_k - x_l||_p < \varepsilon$. Insbesondere gilt $|\xi_j^k - \xi_j^l| \leq ||x_k - x_l||_p < \varepsilon$ für jedes $j \in \mathbb{N}_0$. Also ist für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ die Folge $(\xi_j^k)_k$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, also konvergent. Es sei

$$\xi_j = \lim_{k\to\infty} \xi_j^k$$

für $j \in \mathbb{N}$. Wir setzen $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ und behaupten (x_k) konvergiert gegen x und $x \in l^p$. Da $||x_k - x_l||_p < \varepsilon$ für $k, l > N$ gilt, folgt für alle $M \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{j=0}^{M} |\xi_j^k - \xi_j^l|^p \right)^{1/p} \leq ||x_k - x_l||_p < \varepsilon$$

für $k, l > N$. Für $l \to \infty$ erhalten wir für alle $M \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{j=0}^{M} |\xi_j^k - \xi_j|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \, .$$

Dies impliziert, da M beliebig war,

$$||x_k - x||_p = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\xi_j^k - \xi_j|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \, .$$

Hieraus folgt $x - x_k \in l^p$ und daher ist $x = (x - x_k) + x_k \in l^p$. □

Lemma 1.15 ([8, Satz 23.10]).
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt: M ist abgeschlossen genau dann, wenn (M, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Beweis. Es sei (x_n) eine Cauchyfolge in (M, d). Dann ist (x_n) auch eine Cauchyfolge in (X, d). Da (X, d) vollständig ist, gibt es ein $x \in X$ mit $d(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. Die Abgeschlossenheit von M zeigt, dass $x \in M$.

Es sei nun (x_n) eine Folge in M und $x \in X$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Dann ist (x_n) eine Cauchyfolge *vollständigen* Raum (M, d). Somit folgt $x \in M$ und M ist abgeschlossen. □

Beispiele 1.16.
Es sei $X := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

(a) $(C(X), ||\cdot||_1)$ *ist kein Banachraum.*

Beweis. O.E. sei $X = [0, 2]$. Wir betrachten $f_n \in C(X)$ definiert durch

$$f_n(t) := \begin{cases} t^n & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \, , \\ 1 & \text{für } 1 < t \leq 2 \, . \end{cases}$$

Dann konvergiert (f_n) bzgl. $||\cdot||_1$ gegen $f : [0, 2] \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(t) = 0$ für alle $0 \leq t < 1$ und $f(t) = 1$ für alle $1 \leq t \leq 2$. Da $f \notin C(X)$, ist $C(X)$ nicht abgeschlossen in $(L^1(X), ||\cdot||_1)$, also nicht vollständig. □

(b) Nach Beispiel 1.7 ist $C^1(X)$ kein abgeschlossener Unterraum des Banachraums $(C(X), ||\cdot||_\infty)$. Nach Lemma 1.15 ist daher der normierte Raum $(C^1(X), ||\cdot||_\infty)$ kein Banachraum.

Beispiel 1.17 (Beschränkte holomorphe Funktionen).
Der normierte Raum $(H^\infty, ||\cdot||_\infty)$ ist ein Banachraum. Dies folgt aus Beispiel 1.9, Beispiel 1.12 und Lemma 1.15.

Bemerkung (Vollständigkeit).
Der Begriff der Vollständigkeit spielt eine zentrale Rolle in der Funktionalanalysis. Viele wichtige Eigenschaften von Banachräumen sind in nicht vollständigen normierten Räumen nicht mehr gültig. Die Vollständigkeit ist insbesondere für die Lösbarkeit von Gleichungen von

exorbitanter Bedeutung. Beispielsweise ist die (über $\mathbb{Q}$ formulierbare) Gleichung $x^2 - 2 = 0$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar, im vollständigen Körper $\mathbb{R}$ aber sehr wohl. Viele in Anwendungen wichtige Gleichungen (z.B. die partiellen Differentialgleichungen der Mathematischen Physik) lassen sich nur in geeigneten Banachräumen lösen.

Ein weiterer zentraler Begriff in der Funktionalanalysis ist derjenige der Separabilität.

Definition (Abschluss, dicht, separabel)**.**
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für eine Menge $A \subseteq X$ heißt die Menge

$$\overline{A} := \left\{ x \in X \,:\, x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ für eine Folge } (x_n) \text{ in } A \right\}$$

Abschluss von A (in (X, d)).
Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **dicht in** X, falls $\overline{A} = X$. Der metrische Raum (X, d) heißt **separabel**, wenn es eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge A von X gibt.

$(\mathbb{K}^N, ||\cdot||_2)$ und allgemeiner jeder endlich dimensionale normierte Raum ist separabel.

Beispiel 1.18 (Standardbeispiel eines nicht separablen Raumes)**.**
$(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$ ist nicht separabel. Hierzu betrachte man für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}_0$ das Element $x_M \in l^\infty$ definiert durch $x_M(j) = 1$ falls $j \in M$ und $x_M(j) = 0$ falls $j \notin M$. Dann gilt $||x_M - x_{M'}||_\infty \geq 1$ für alle $M \neq M'$ und $\{x_M \,:\, M \subseteq \mathbb{N}_0\}$ ist überabzählbar. Ist dann A eine dichte Teilmenge von l^∞, so gibt es zu jedem x_M ein $a_M \in A$ mit $||x_M - a_M||_\infty < 1/4$, d.h. $||a_M - a_{M'}||_\infty \geq ||x_M - x_{M'}||_\infty - ||x_M - a_M||_\infty - ||x_{M'} - a_{M'}||_\infty > 1 - 1/4 - 1/4 = 1/2$, also $a_M \neq a_{M'}$ für alle $M \neq M'$, d.h. A ist nicht abzählbar.

Separabilität vererbt sich auf Teilmengen:

Lemma 1.19.
Es sei (X, d) ein separabler metrischer Raum und $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Dann ist auch (Y, d) separabel.

Wir benutzen im metrischen Raum (X, d) für $x_0 \in X$ und $r > 0$ die Schreibweise

$$B(x_0, r) = \{x \in X \,:\, d(x, x_0) < r\}$$

für die offene d–Kugel mit Mittelpunkt x_0 und Radius r.

Beweis. Es sei A höchstens abzählbar und dicht in X. Betrachte die abzählbare Menge

$$\Lambda := \{B(a, r) \,:\, r \in \mathbb{Q}^+,\, a \in A,\, B(a, r) \cap Y \neq \emptyset\}\,.$$

Wähle zu jedem $B(a, r) \in \Lambda$ ein $y_{a,r} \in B(a, r) \cap Y$. Dies generiert eine höchstens abzählbare Menge $E \subseteq Y$. Seien $y \in Y$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $d(y, a) < \varepsilon/3$ und ein $r \in \mathbb{Q}^+$ mit $\varepsilon/3 < r < \varepsilon/2$, d.h. y liegt in der Kugel um a mit Radius r, die nach Konstruktion einen Punkt $y_{a,r} \in E$ enthält. Es gilt $d(y_{a,r}, y) \leq d(y_{a,r}, a) + d(a, y) < r + r < \varepsilon$. Somit ist E dicht in Y. □

Für normierte Räume lässt sich Separabilität oft bequemer mit folgendem Kriterium überprüfen.

Satz 1.20.
Ein normierter Raum E ist genau dann separabel wenn es eine höchstens abzählbare Menge $M \subseteq E$ gibt derart, dass $\operatorname{span}(M)$ dicht in E liegt.

Beweis. Falls E separabel ist, so existiert eine höchstens abzählbare Menge M mit $\overline{M} = E$. Somit gilt $E = \overline{M} \subseteq \overline{\operatorname{span}(M)} \subseteq E$.

Es sei nun $E = \overline{\operatorname{span}(M)}$ für eine höchstens abzählbare Menge M. Betrachte die Menge

$$B := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \,:\, n \in \mathbb{N}, x_j \in M, \lambda_j \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q} \right\}.$$

Dann ist B abzählbar. Wir zeigen $\overline{B} = E$. Hierzu wähle $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein

$$x_* = \sum_{j=1}^{N} \xi_j x_j \in \operatorname{span}(M) \qquad (\xi_j \in \mathbb{R}/\mathbb{C})$$

mit $||x - x_*|| < \varepsilon/2$. Wähle nun $\lambda_j \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ mit $|\xi_j - \lambda_j| < (2\sum_{j=1}^{N} ||x_j||)^{-1}\,\varepsilon$. Somit folgt

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j \right\| \le ||x - x_*|| + \left\| \sum_{j=1}^{N} (\xi_j - \lambda_j) x_j \right\| < \varepsilon\,.$$

□

Beispiel 1.21.
Für $p \in [1,\infty)$ ist $(l^p, ||\cdot||_p)$ separabel.

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\tilde{e}_j = (0,\dots,0,1,0,\dots) \quad (1 \text{ an der } j\text{-ten Stelle})$$

und $M = \{\tilde{e}_j \,:\, j \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist $l^p = \overline{\operatorname{span}(M)}$, denn für $x = (\xi_k) \in l^p$ gilt

$$\left\| x - \sum_{j=0}^{n} \xi_j \tilde{e}_j \right\|_p = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

□

Satz 1.22.
Es sei $K \neq \emptyset$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Dann ist $(C(K), ||\cdot||_\infty)$ separabel.

Für den Beweis erinnern wir an den Satz von Stone–Weierstraß, siehe [8, Satz 39.11].

Satz von Stone–Weierstraß
Es sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und A ein Unterraum von $C(X)$ mit $f\cdot g \in A$ für alle $f,g \in A$ und folgenden Eigenschaften:

(i) A trennt die Punkte von $C(X)$.
D.h. zu je zwei Punkten $x \neq y$ aus X gibt es ein $h \in A$ mit $h(x) \neq h(y)$.

(ii) Ist $f \in A$, so ist $\overline{f} \in A$.

(iii) A enthält alle konstanten Funktionen.

Dann ist A dicht in $(C(X), ||\cdot||_\infty)$.

Beweis von Satz 1.22. Betrachte die abzählbare Menge

$$M = \{z^j \overline{z}^k \,:\, j,k \in \mathbb{N}_0\}\,.$$

Für den Unterraum $A := \operatorname{span}(M)$ von $C(K)$ gilt $f \cdot g \in A$ und $\overline{f}$ für alle $f, g \in A$. Sind $z_1 \neq z_2$ zwei komplexe Zahlen, so gilt $p(z_1) \neq p(z_2)$ für das durch $p(z) := z$ definierte Polynom $p \in A$. Offensichtlich enthält A alle konstanten Funktionen. Somit liegt A dicht in $(C(K), ||\cdot||_\infty)$ nach dem Satz von Stone–Weierstraß. Mit Satz 1.20 folgt die Separabilität von $(C(K), ||\cdot||_\infty)$. □

Aufgaben

1. Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie für eine Folge (x_n) in E:

   (a) Konvergiert (x_n) in E, so ist (x_n) eine beschränkte Cauchyfolge.

   (b) Ist (x_n) eine Cauchyfolge mit einer konvergenten Teilfolge mit Grenzwert $x \in E$, so konvergiert (x_n) gegen x.

   (c) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in E, so gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

   (d) Beweisen Sie die folgende Aussage:
   (Vollständigkeit vs. Konvergenz absolut konvergenter Reihen)
   Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

   (i) $(E, ||\cdot||)$ ist ein Banachraum.

   (ii) Für jede Folge $(x_n) \subset E$ folgt aus $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ in $(E, ||\cdot||)$.

2. (Der Folgenraum $\mathbb{C}_0^\infty$)
   Zeigen Sie, dass der Raum

   $$\mathbb{C}_0^\infty = \{\,(x_n) \subset \mathbb{C} \,:\, x_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n\,\}$$

   der „abbrechenden Folgen" ausgestattet mit der Supremumsnorm

   $$||(x_n)||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |x_n|\,.$$

   kein Banachraum ist.

3. Zeigen Sie, dass die beiden Unterräume
$$U := \{(\xi_n) \in l^2 \, : \xi_{2n} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$
und
$$V := \{(\xi_n) \in l^2 \, : \xi_{2n-1} = n\xi_{2n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$
abgeschlossen in $(l^2, ||\cdot||_2)$ sind, dass aber die direkte Summe $U \oplus V$ nicht abgeschlossen ist. (Hinweis: $\mathbb{C}_0^\infty \subset U \oplus V$).

4. Es sei E ein normierter Raum. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
   (a) E ist separabel.
   (b) Es gibt endlich–dimensionale Unterräume $U_n \subset U_{n+1}$ mit
   $$E = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n}\,.$$

1.3 Stetige lineare Abbildungen

Definition (Operator (s. [8, S. 167]).
Eine stetige lineare Abbildung $T : E \to F$ zwischen normierten Räumen E und F (über demselben Skalarenkörper $\mathbb{K}$) heißt **stetiger Operator**. Die Menge aller stetigen linearen Operatoren $T : E \to F$ wird mit $\mathcal{L}(E, F)$ bezeichnet. Wir setzen ferner $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$. Für eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißen die Mengen

$$N(T) := \{x \in E \, : \, Tx = 0\} \quad \text{bzw.} \quad R(T) := \{y \in F \, : \, \exists_{x\in E} \quad y = Tx\}$$

Nullraum bzw. **Bildraum (Range)** von T.

Für $x \in E$ und $y \in F$ verwenden wir für die Norm i.a. das gleiche Symbol: $||x||$ bzw. $||y||$. Wenn Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch $||x||_E$ und $||y||_F$.

Satz 1.23 ([8, Satz 25.14]).
Für eine lineare Abbildung T zwischen normierten Räumen E und F sind äquivalent:

(a) T ist stetig.

(b) T ist stetig in $x = 0$.

(c) Es gibt ein $M > 0$ mit $||Tx|| \leq M\,||x||$ für alle $x \in E$.

Bemerkung.
Es seien E, F normierte Räume. Für $T : E \to F$ linear gilt

$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{x\in E,\, ||x||=1} ||Tx|| = \sup_{x\in E,\, ||x||\leq 1} ||Tx||$$

Insbesondere gilt:
$$T \in \mathcal{L}(E, F) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{x\in E,\, ||x||\leq 1} ||Tx|| < \infty\,.$$

Jedes $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bildet somit jede beschränkte Menge auf eine beschränkte Menge ab. Daher nennt man stetige lineare Operatoren $T : E \to F$ auch *beschränkte* lineare Operatoren. Diese Terminologie ist etwas unglücklich, wird aber dennoch standardmäßig verwendet: für beschränkte lineare Operatoren $T : E \to F$ ist die Bildmenge $T(E)$ i.d.R. **nicht** beschränkt.

Definition (Beschränkte lineare Operatoren)**.**
Ein stetiger linearer Operator $T : E \to F$ zwischen normierten Räumen E und F heißt **beschränkter linearer Operator** und $||T|| := \sup_{x\in E,\, ||x||\leq 1} ||Tx||$ heißt **Operatornorm** oder kurz **Norm** von T.

Satz 1.24 ([8, Korollar 25.16])**.**
Es seien E und F normierte Räume. Dann ist $(\mathcal{L}(E,F), ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Ist F ein Banachraum, so ist auch $(\mathcal{L}(E,F), ||\cdot||)$ ein Banachraum.

Beweis. (a) $\mathcal{L}(E,F) \neq \emptyset$, da die Abbildung $E \ni x \mapsto 0 \in F$ zu $\mathcal{L}(E,F)$ gehört. Die Summe zweier stetiger Operatoren von E nach F und das skalare Vielfache eines stetigen Operators von E nach F sind wieder linear (Lineare Algebra) und stetig (Analysis). Folglich ist $\mathcal{L}(E,F)$ ein Vektorraum.

(b) Wir zeigen, dass $||\cdot|| : \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathcal{L}(E,F)$ bildet. Es sei dazu $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Es gilt $T = 0$ (d.h. $T : E \to F$ ist die Nullabbildung) genau dann, wenn $Tx = 0$ für alle $x \in E\backslash\{0\}$, also genau dann, wenn $||Tx|| = 0$ für alle $x \in E\backslash\{0\}$, also genau dann, wenn $||T|| = 0$. Ferner gilt für $\lambda \in \mathbb{K}$

$$||\lambda T|| = \sup_{||x||\leq 1} ||\lambda Tx|| = \sup_{||x||\leq 1} |\lambda| \cdot ||Tx|| = |\lambda| \sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| = |\lambda| \cdot ||T||\,.$$

Sind $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, so gilt für alle $x \in E$ mit $||x|| \leq 1$ die Ungleichung

$$||(T_1 + T_2)x|| = ||T_1 x + T_2 x|| \leq ||T_1 x|| + ||T_2 x|| \leq ||T_1|| + ||T_2||\,.$$

Daraus folgt $||T_1 + T_2|| \leq ||T_1|| + ||T_2||$. Damit sind alle Eigenschaften einer Norm nachgeprüft.

(c) Nun sei F ein Banachraum. Weiter sei $(T_n) \subset \mathcal{L}(E,F)$ eine Cauchy–Folge. Wähle $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$\varepsilon > ||T_n - T_m|| = \sup_{x\in\mathbb{B}_E} ||(T_n - T_m)x|| = \sup_{x\in\mathbb{B}_E} ||T_n x - T_m x|| \tag{1.1}$$

mit $\mathbb{B}_E = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$. Betrachte $f_n := T_{n|_{\mathbb{B}_E}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f_n \in C_b(\mathbb{B}_E, F)$ und wegen (1.1) eine Cauchy–Folge im Banachraum $(C_b(\mathbb{B}_E, F), ||\cdot||_\infty)$, siehe Bemerkung 1.13. Daher existiert ein $f \in C_b(\mathbb{B}_E, F)$ mit

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{B}_E} ||f_n(x) - f(x)|| \to 0 \quad (n \to \infty)\,. \tag{1.2}$$

Definiere nun $T : E \to F$

$$T(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \mathbb{B}_E, \\ f\left(\frac{x}{||x||}\right)||x|| & \text{für } x \in E\backslash\mathbb{B}_E\,. \end{cases}$$

Es folgt $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ für alle $x \in E$. Dies zeigt, dass $T : E \to F$ linear ist und (1.2) impliziert $T \in \mathcal{L}(E,F)$. $\square$

Bemerkung 1.25 (Submultiplikativität der Operatornorm).
Für einen normierten Raum E ist $\mathcal{L}(E)$ nicht nur ein Vektorraum, sondern zwei Abbildungen $T, S \in \mathcal{L}(E)$ lassen sich auch hintereinanderschalten ("multiplizieren") und es gilt $||TS|| \leq ||T|| \cdot ||S||$. Die Linearität von TS ist klar und die Stetigkeit von TS zusammen mit $||TS|| \leq ||T|| \cdot ||S||$ folgen sofort aus:

$$||T(Sx)|| \leq ||T||\,||Sx|| \leq ||T||\,||S||\,||x|| \quad \textit{für alle } x \in E\,.$$

Beispiel 1.26 (Isometrien).
Es seien $(E, ||\cdot||_E)$ und $(F, ||\cdot||_F)$ normierte Räume. Eine Abbildung $\Phi : E \to F$ heißt Isometrie, wenn

$$||\Phi(x_1) - \Phi(x_0)||_F = ||x_1 - x_0||_E \textit{ für alle } x_0, x_1 \in E\,.$$

Jede Isometrie ist (Lipschitz) stetig und injektiv. Ist $\Phi : E \to F$ eine surjektive Isometrie, so ist auch $\Phi^{-1} : F \to E$ eine Isometrie. Falls $E \neq \{0\}$, so hat jede lineare Isometrie $\Phi : E \to F$ Operatornorm 1.

Beispiel 1.27 (Rechts- und Linksshift).
Es sei der Rechtsshift $S : l^2 \to l^2$ bzw. der Linksshift $L : l^2 \to l^2$ definiert durch $S(x_j) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ bzw. $L(x_j) = (x_{j+1})$. Dann ist $S \in \mathcal{L}(l^2)$ eine nichtsurjektive Isometrie; $L \in \mathcal{L}(l^2)$ hat Norm 1 und ist nicht injektiv, d.h. keine Isometrie.

Beispiel 1.28 (Multiplikationsoperatoren).

(a) Es sei $(E, ||\cdot||) = (L^2(K), ||\cdot||_2)$ für eine nicht–leere kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{K}^N$ und $g \in C(K)$. Dann ist durch $(M_g f)(x) := f(x) \cdot g(x)$ ein $M_g \in \mathcal{L}(E)$ definiert mit $||M_g|| = ||g||_\infty$.

Beweis. Für $f \in L^2(K)$ gilt

$$||M_g f||_2^2 = ||fg||_2^2 = \int_K |f(x)|^2 |g(x)|^2\,dx \leq ||g||_\infty^2 \int_K |f(x)|^2\,dx = ||g||_\infty^2 ||f||_2^2\,,$$

d.h. $M_g f \in L^2(K)$ und $||M_g|| \leq ||g||_\infty$. Für $0 \leq \alpha < ||g||_\infty$ betrachten wir $X_\alpha := \{x \in K : |g(x)| \geq \alpha\}$ und $f_\alpha := \chi_{X_\alpha} \in L^2(K)$. Dann gilt

$$||f_\alpha g||_2^2 = \int_K |f_\alpha(x)|^2 |g(x)|^2\,dx = \int_{X_\alpha} |g(x)|^2\,dx \geq \alpha^2 ||f_\alpha||_2^2\,,$$

d.h. $||M_g|| \geq \alpha$ für alle $\alpha < ||g||_\infty$, also $||M_g|| \geq ||g||_\infty$. □

(b) Es sei $g \in H^\infty$. Für $f \in H^2$ sei $M_g f := fg$. Dann gilt $M_g \in \mathcal{L}(H^2)$ mit $||M_g|| \leq ||g||_\infty$.

Beweis. Wir beachten $fg \in H(\mathbb{D})$. Somit gilt für $f(z)g(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k z^k$, $z \in \mathbb{D}$,

$$\sum_{k=0}^\infty |b_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 |f(re^{it})|^2\,dt \leq ||g||_\infty^2 ||f||_2^2\,,$$

für jedes $r \in (0,1)$, vgl. Beispiel 1.6 Dies zeigt $fg \in H^2$ und

$$||fg||_2^2 = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,|g(re^{it})|^2\,dt \le ||g||_\infty^2 ||f||_2^2$$

d.h. $M_g \in \mathcal{L}(H^2)$ mit $||M_g|| \le |g||_\infty$. □

Bemerkung.
Auf dem Hardyraum H^2 „ist“ der Shiftoperator S gerade der Multiplikationsoperator M_z !

Beispiel 1.29 (Kompositionsoperator auf Räumen stetiger Funktionen.).
Es seien X und Y kompakte metrische Räume und $g : X \to Y$ stetig. Dann ist $C_g : C(Y) \to C(X)$ definiert durch $C_g f := f \circ g$ stetig und linear mit $||C_g|| = 1$.

Beispiel 1.30 (Integrationsoperator auf $C([0,1])$).
Es sei $(E, ||\cdot||) := (C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ und $J : E \to E$ sei definiert durch

$$(Jx)(t) := \int_0^t x(s)\,ds \quad \textit{für} \quad t \in [0,1]\,.$$

Dann ist $J \in \mathcal{L}(E)$ mit $||J|| = 1$. Es gilt

$$N(J) = \{0\} \quad \textit{und} \quad R(J) = \{x \in C^1([0,1]) \,:\, x(0) = 0\}\,,$$

daher ist J injektiv, aber nicht surjektiv.

Beispiel 1.31 (Differentiationsoperator auf $C^1([0,1])$).
Es sei $E = C^1([0,1])$ und $F = C([0,1])$. Die Abbildung $D : E \to F$ definiert durch $(Dx)(t) := x'(t)$ ist linear, surjektiv, aber nicht injektiv.

(i) Dann ist $D : (E, ||\cdot||_\infty) \to (F, ||\cdot||_\infty)$ unstetig, denn für $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $||Dx_n(t)||_\infty = ||nt^{n-1}||_\infty = n = n||x_n||_\infty$.

(ii) Setzen wir $||x||_1 := ||x||_\infty + ||x'||_\infty$ für $x \in E$, so ist $D : (E, ||\cdot||_1) \to (F, ||\cdot||_\infty)$ stetig, denn für alle $x \in E$ gilt $||Dx||_\infty = ||x'||_\infty \le ||x||_1$. Dies zeigt $||D|| \le 1$. Für $x_n(t) = t^n/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $||Dx_n||_\infty = n/(n+1) = n/(n+1)||x_n||_1$. Somit folgt $||D|| = 1$.

Bemerkung.
In der Quantenmechanik werden physikalische Größen wie Ort, Impuls, Energie usw. durch lineare Abbildungen auf geeigneten Hilberträumen beschrieben. Die Operatoren Q und P von Ort und Impuls eines eindimentionalen Teilchens müssen hierbei die Heisenbergsche Vertauschungsrelation

$$PQ - QP = \frac{\hbar}{i} I$$

erfüllen, wobei $2\pi\hbar$ die Plancksche Konstante ist. Das folgende Ergebnis zeigt, dass diese Bedingung nicht durch *stetige* Operatoren erfüllt werden kann.

Satz 1.32.
Es sei E ein normierter Raum. Dann gilt für alle $A, B \in \mathcal{L}(E)$ stets $AB - BA \neq I$.

Der folgende elegante Beweis wurde 1949 von dem Gruppentheoretiker H. Wielandt gegeben.

Beweis. Es gelte $AB - BA = I$. Aus dieser Annahme folgt durch Induktion $A^n B - BA^n = nA^{n-1} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$n||A^{n-1}|| = ||A^n B - BA^n|| \leq 2||A^n||\,||B|| \leq 2||A^{n-1}||\,||A||\,||B||,$$

und somit $n \leq 2||A||\,||B||$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch! □

Bemerkung.
Die Quantenmechanik liefert somit signifikante Beispiele von *nichtstetigen*, also *unbeschränkten* Operatoren. Jedoch lassen sich diese Abbildungen dennoch mittels stetiger Operatoren beschreiben. Dies geschieht beispielsweise mithilfe eines wunderbaren auf J. von Neumann zurück gehenden Kunstgriffs: „Mit einfachen“ Funktionen (im vorliegenden Fall sind dies Möbiustransformationen) lassen sich (viele) unbeschränkte Operatoren durch beschränkte Operatoren darstellen. Dies ist eine der vielen Anwendungen des sogenannten Funktionalkalküls auf Banachalgebren.

Die Norm eines stetigen Operators explizit zu bestimmen, kann bereits in einfachen Situationen ein schwieriges Unterfangen sein.

Ergänzung: Vervollständigung

Satz 1.33 (Vervollständigung)**.**
Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann gibt es einen Banachraum $(E_*, ||\cdot||_*)$ und eine lineare Isometrie $\Phi : E \to E_*$ derart, dass $\Phi(E)$ dicht in E_* liegt. $(E_*, ||\cdot||_*)$ heißt Vervollständigung von $(E, ||\cdot||)$.

Wir werden später (Korollar 4.21) einen kurzen und eleganten Beweis dieser Aussage kennenlernen. Für alle Ungeduldigen hier ein direkter Beweis:

Beweis. (i) Wir nennen zwei Cauchyfolgen (x_n) und (y_n) in E äquivalent, falls $x_n - y_n \to 0$. Auf der Menge aller Cauchyfolgen in E wird dadurch eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Wir bezeichnen die zur Cauchyfolge $(x_n) \subset E$ gehörige Äquivalenzklasse mit $[(x_n)]$ und die Menge aller Äquivalenzklassen mit E_*. Dann ist E_* ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit der Addition $[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)]$ und der skalaren Multiplikation $\alpha[(x_n)] := [(\alpha x_n)]$. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Definitionen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind.

(ii) Für $[(x_n)] \in E_*$ ist dann

$$||[(x_n)]||_* := \lim_{n\to\infty} ||x_n||$$

wohldefiniert, denn der Limes rechts existiert, da wegen

$$\Big|||x_n|| - ||x_m||\Big| \leq ||x_n - x_m||,$$

$(||x_n||)$ eine Cauchyfolge im vollständigen Körper $\mathbb{R}$, also konvergent ist. Ferner hängt der Limes nicht von der Wahl des Repräsentanten (x_n) aus $[(x_n)]$ ab. Die Normeigenschaften für $||\cdot||_*$ sind einfach nachzuweisen: (a) ist klar, ebenso (b) „$\Leftarrow$“, (c) und (d) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von $||\cdot||$. Ist $||[(x_n)]||=0$, so gilt $x_n\to 0$ in $(E,||\cdot||)$ und (x_n) ist äquivalent zur der aus lauter Nullen bestehenden Folge, d.h. $[(x_n)]$ ist der Nullvektor in E_*. Damit ist (b) „$\Rightarrow$" bewiesen. Folglich ist $(E_*,||\cdot||_*)$ ein normierter Raum.

(iii) Wir definieren nun $\Phi: E\to E_*$ durch $\Phi(x):=[(x)_n]$, d.h. $\Phi(x)$ ist die zur konstanten Folge $(x)_n$ gehörige Äquivalenzklasse, und beachten, dass Φ eine lineare Isometrie ist. Ferner liegt $\Phi(E)$ dicht in E_*, denn zu $[(x_n)]\in E_*$ und vorgegebenem $\varepsilon>0$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit $||x_n-x_N||<\varepsilon/2$ für alle $n\geq N$. Es folgt $||\Phi(x_N)-[(x_n)]||_*=\lim_{n\to\infty}||x_N-x_n||\leq\varepsilon/2<\varepsilon$.

(iv) Es bleibt zu zeigen, dass der normierte $(E_*,||\cdot||_*)$ vollständig ist.
Dazu sei $(y_k)_k$ eine Cauchyfolge in $(E_*,||\cdot||_*)$. Für jedes $k\in\mathbb{N}$ ist dann $y_k=[(x_n^{(k)})_n]$ für eine Cauchyfolge $(x_n^{(k)})_n$ in $(E,||\cdot||)$. Es gibt daher für jedes $k\in\mathbb{N}$ ein n_k derart, dass

$$||x_m^{(k)}-x_{n_k}^{(k)}||<1/k \text{ für alle } m>n_k\,.$$

Wir zeigen, dass $(y_k)_k$ gegen $x^*:=[(x_{n_j}^{(j)})_j]$ konvergiert. Dazu beachten wir zunächst, dass $(x_{n_j}^{(j)})_j$ tatsächlich eine Cauchyfolge in E ist, denn

$$||y_k-\Phi(x_{n_k}^{(k)})||_*=\lim_{m\to\infty}||x_m^{(k)}-x_{n_k}^{(k)}||\leq 1/k\,,$$

d.h.

$$\begin{aligned}
||x_{n_k}^{(k)}-x_{n_m}^{(m)}|| &= ||\Phi(x_{n_k}^{(k)})-\Phi(x_{n_m}^{(m)})||_*\\
&\leq ||\Phi(x_{n_k}^{(k)})-y_k||_*+||y_k-y_m||_*+||y_m-\Phi(x_{n_m}^{(m)})||_*\\
&\leq ||y_k-y_m||_*+1/k+1/m\to 0 \quad \text{für } k \text{ und } m\to\infty\,.
\end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned}
||x^*-y_k||_* &\leq ||x^*-\Phi(x_{n_k}^{(k)})||_*+||\Phi(x_{n_k}^{(k)})-y_k||_*\leq ||x^*-\Phi(x_{n_k}^{(k)})||_*+1/k\\
&= \lim_{p\to\infty}||x_{n_p}^{(p)}-x_{n_k}^{(k)}||+1/k\leq \lim_{p\to\infty}\Big(||y_p-y_k||_*+1/p+1/k\Big)+1/k\,,
\end{aligned}$$

d.h. $||y_k-x^*||_*\to 0$ für $k\to\infty$. □

Bemerkung.
Dieser Beweis verwendet bereits die Vollständigkeit von $(\mathbb{R},|\cdot|)$, d.h. er kann nicht ohne weiteres zur Vervollständigung von $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ benutzt werden.

Bemerkungen.
Die Abbildung $\Phi:(E,||\cdot||)\to(E^*,||\cdot||_*)$ ist als Isometrie insbesondere injektiv. Damit enthält E^* die „Kopie" $\Phi(E)$ von E.

(a) Identifiziert man jeden Punkt $x\in E$ mit seinem Bildpunkt $\Phi(x)\in E^*$, so ist in diesem Sinne $E\subset E^*$ und für den Abschluss $\overline{E}$ von E in $(E^*,||\cdot||_*)$ gilt $\overline{E}=E^*$, d.h. E „liegt dicht" in E.

(b) Ist $(E_+,||\cdot||_+)$ eine (weitere) Vervollständigung von $(E,||\cdot||)$, so gibt es eine bijektive lineare Isometrie $T:(E_*,||\cdot||_*)\to(E_+,||\cdot||_+)$.

Beweisskizze. Es seien $\Phi : E \to E_*$ und $\Psi : E \to E_+$ die linearen Isometrien aus Satz 1.33. Betrachte die lineare surjektive Isometrie $T := \Phi \circ \Psi^{-1} : \Psi(E) \to \Phi(E)$, die sich zu einer linearen surjektiven Isometrie von E_+ auf E_* fortsetzen lässt. Es sei $x \in E_+$. Dann existiert $(x_n) \subset \Psi(E)$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Definiere $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n$. Dann ist $T : E_+ \to E_*$ wohldefiniert, linear und eine Isometrie. Es bleibt zu zeigen, dass T surjektiv ist. Zu $y \in E_*$ existiert $(y_n) \subset \Phi(E)$ mit $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Zu y_n existiert ein $x_n \in \Psi(E)$ mit $Tx_n = y_n$. Da $||x_n - x_m||_+ = ||y_n - y_m||_*$ gilt, ist (x_n) eine Cauchyfolge in E_* also konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Nun folgt $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y$. $\square$

Eine Vervollständigung eines normierten Raumes ist folglich bis auf eine bijektive lineare Isometrie eindeutig bestimmt. Man spricht deshalb auch von **der** Vervollständigung eines normierten Raumes.

Beispiel 1.34 ($L^1(E)$ als Vervollständigung von $(C(E), ||\cdot||_1)$)**.**
Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^N$ eine nicht–leere Lebesgue–messbare Menge und $p \in [1, \infty)$. Ein wichtiges Ergebnis der Lebesgueschen Theorie besagt, dass die Menge $C(X)$ dicht im Raum $(L^p(X), ||\cdot||_p)$ liegt. Für einen Beweis siehe z.B. [13, 3.14]. Somit ist der Banachraum $L^1(X)$ gerade die Vervollständigung des normierten Raums $(C(X), ||\cdot||_1)$ (à la: $\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung des normierten Raums $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$).

Bemerkung (Riemann vs. Lebesgue)**.**
Identifiziert man zwei Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ fast überall, so ist der mit $||\cdot||_1$ ausgestattete normierte Raum

$$\mathcal{R}[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ Riemann–integrierbar}\}$$

nicht vollständig, d.h. $(\mathcal{R}[a, b], ||\cdot||_1)$ ist kein Banachraum.

Dazu beachte man, dass es Funktionen $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ gibt, die nicht fast überall mit einer Riemann–integrierbaren Funktion übereinstimmen (siehe [3, S.151]). Es gibt aber eine Folge (f_n) in $C([a, b]) \subset \mathcal{R}[a, b]$ mit $||f_n - f||_1 \to 0$, d.h. (f_n) ist eine Cauchyfolge in $(\mathcal{R}[a, b], ||\cdot||_1)$ ohne Limes in $\mathcal{R}[a, b]$.

Der Übergang vom Riemann–Integral zum Lebesgue–Integral entspricht dem Übergang von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen.

Aufgaben für §1.3

1. (Nichtabgeschlossenes Bild, unstetige Inverse)
   Wir betrachten $T : l^2 \to l^2$, $T((x_j)_j) := (x_j/\sqrt{j})$.

   (a) Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(l^2)$, $||T|| = 1$ und $R(T)$ nicht abgeschlossen ist.
   (Bemerkung: Es ist klar, dass für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ der Nullraum $N(T) \subseteq X$ stets abgeschlossen ist.

   (b) Für $Y := \{(x_j) \in l^2 : x_j = 0 \text{ für fast alle } j\}$ ist $T : Y \to Y$ linear, stetig und bijektiv, aber $T^{-1}((x_j)_j) = (\sqrt{j}x_j)_j$ ist unstetig. Beweisen Sie diese Aussagen.

2. * (Quotientenräume)
   Es sei E ein normierter Raum und Y ein Unterraum von E. Für $x \in E$ bezeichne $[x] := x + Y = \{x + y \,:\, y \in Y\}$ und $E/Y := \{[x] \,:\, x \in E\}$ den Quotentientenraum versehen mit der Addition $[x] + [y] := [x + y]$ und skalaren Multiplikation $\lambda[x] = [\lambda x]$. Für $x \in E$ sei $||[x]||_{E/Y} := \text{dist}(E, Y)$.

   (a) Zeigen Sie, dass durch $||\cdot||_{E/Y}$ eine Halbnorm auf E/Y definiert ist, die genau dann eine Norm ist, wenn Y abgeschlossen ist.

   (b) Es sei Y abgeschlossen und $\pi : E \to E/Y$ die durch $\pi(x) := [x]$ definierte Quotientenabbildung. Zeigen Sie, dass $\pi \in \mathcal{L}(E, E/Y)$ und berechnen Sie die Operatornorm $||\pi||$.

   (c) Es sei E vollständig und Y abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $(E/Y, ||\cdot||_{E/Y})$ ein Banachraum ist.

3. Es sei $E = \{x \in C([0,1]) \,:\, x(0) = 0\}$ versehen mit $||\cdot||_\infty$. Die stetige, lineare Abbildung $l : E \to \mathbb{C}$,
   $$l(x) = \int_0^1 x(t)\,dt\,, \qquad x \in C([0,1])\,,$$
   nimmt auf der Menge $\mathbb{B} := \{x \in E \,:\, ||x|| \leq 1\}$ kein Maximum an, d. h. l nimmt die Norm nicht an. (Dies zeigt auch, dass $\mathbb{B}$ nicht kompakt sein kann.)

4. (Fortsetzungsprinzip)
   Es sei U ein dichter Unterraum des normierten Raums E, F ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(U, F)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Es gibt genau eine stetige Fortsetzung $\hat{T} \in \mathcal{L}(E, F)$, d.h. $\hat{T}|_U = T$, und es gilt $||\hat{T}|| = ||T||$.

   (b) Ist $T : U \to F$ eine Isometrie, dann auch $\hat{T} : E \to F$.

5. (Integraloperatoren)
   Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{K}^N$ eine Lebesgue–messbare Menge, $X = L^2(\Omega)$ und $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Man zeige, dass durch
   $$(Tf)(x) := \int_\Omega K(x,y) f(y)\,dy$$
   eine Abbildung $T \in \mathcal{L}(X)$ gegeben ist mit $||T|| \leq ||K||_2$. I.Allg. gilt hierbei nicht die Gleichheit. Die Bestimmung von $||T||$ ist oft nicht trivial.

6. Es sei Y ein Unterraum eines Vektorraums X. Eine lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt Projektion auf Y, falls $P^2 = P$ und $R(P) = Y$ gilt. Es gilt dann $X = N(P) \oplus R(P)$ (wegen $x = (I - P)x + Px$) und $I - P$ ist eine Projektion auf $N(P)$. Nun sei $P : X \to X$ ein Projektor (d.h. eine stetige Projektion). Zeigen Sie: $N(P)$ und $R(P)$ sind abgeschlossene Unterräume und es gilt $||P|| \geq 1$ oder $P = 0$.

7. (Satz von Ulam–Mazur)
   Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein reeller normierter Raum und $\Phi : (E, ||\cdot||) \to (E, ||\cdot||)$ eine surjektive Isometrie mit $\Phi(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $\Phi : E \to E$ linear ist.

8. Man finde einen normierten Raum $(E, ||\cdot||)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und eine nicht surjektive Isometrie $\Phi : (E, ||\cdot||) \to (E, ||\cdot||)$.

1.4 Kompakte Operatoren

Definition (Finite–Rank Operatoren).
Es seien X und Y normierte Räume. Ein stetiger linearer Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt **Finite–Rank Operator**, falls sein Bildraum $R(T)$ endlich dimensional ist. Die Menge aller Finite–Rank Operatoren von X nach Y wird mit $\mathcal{F}(X, Y)$ bezeichnet. Wir setzen $\mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(X, X)$.

Bemerkung 1.35.
Es seien X und Y normierte Räume und $T \in \mathcal{F}(X, Y)$. Dann ist das Bild $T(\mathbb{B}_X)$ der abgeschlossenen Einheitskugel $\mathbb{B}_X := \{x \in X : ||x|| \le 1\}$ stets relativ kompakt, denn der Abschluss $\overline{T(\mathbb{B}_X)}$ ist eine beschränkte (da T linear und stetig) und abgeschlossene Menge im **endlichen dimensionalen** *Bildraum $R(T)$.*

Für die Kompaktheit von $\overline{T(\mathbb{B}_X)}$ ist $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ aber nicht notwendig. Für vollständige Zielräume Y genügt bereits die Approximierbarkeit von T durch Finite–Rank Operatoren im folgenden Sinne.

Satz 1.36 (Approximation durch Finite–Rank Operatoren).
Es seien X und Y normierte Räume, Y vollständig, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $(T_k) \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$. Falls $||T - T_k|| \to 0$ für $k \to \infty$, so ist $\overline{T(\mathbb{B}_X)}$ kompakt.

Beweis. Es sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{B}_X$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $(T_k(x_n))$ eine beschränkte Folge im endlich dimensionalen Unterraum $R(T_n)$ von Y und hat daher eine konvergente Teilfolge. Mit dem Diagonalverfahren findet man daher eine Teilfolge (y_j) von (x_n) derart, dass $(T_k(y_j))_j$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert. Wir zeigen, dass dann $(T(y_j))$ konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$ fixiert. Wir wählen ein $k \in \mathbb{N}$ mit $||T_k - T|| < \varepsilon/4$. Dann folgt

$$\begin{aligned} ||T(y_j) - T(y_l)|| &\le ||T(y_j) - T_k(y_j)|| + ||T_k(y_j) - T_k(y_l)|| + ||T_k(y_l) - T(y_l)|| \\ &< \varepsilon/2 + ||T_k(y_j) - T_k(y_l)||\,. \end{aligned}$$

Da $(T_k(y_j))_j$ als konvergente Folge eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||T_k(y_j) - T_k(y_l)|| < \varepsilon/2$ für alle $j, l \ge N$. Folglich ist $(T(y_j))_j$ eine Cauchyfolge im Banachraum Y, also konvergent. □

Definition (Kompakte Operatoren).
Es seien X und Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt **kompakt**, falls $\overline{T(\mathbb{B}_X)}$ kompakt in Y ist, d.h. für jede Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{B}_X$ besitzt die Bildfolge $(T(x_n))$ eine konvergente Teilfolge. Die Menge aller linearen kompakten Abbildungen von X nach Y wird mit $\mathcal{K}(X, Y)$ bezeichnet und wir setzen $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$.

Bemerkungen 1.37.
Es seien X und Y normierte Räume. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) $\mathcal{F}(X, Y)$ ist ein Unterraum von $\mathcal{K}(X, Y)$ und $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein Unterraum von $\mathcal{L}(X, Y)$.

(b) *Ist Y vollständig, so ist $\mathcal{K}(X,Y)$ ein* **abgeschlossener** *Unterraum von $\mathcal{L}(X,Y)$, siehe Aufgabe 1.4 1.*

(c) *Ist $\dim X < \infty$, so ist $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$.*

(d) *Es sei Z ein weiterer normierter Raum sowie $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Ist T oder S kompakt, so ist ST kompakt.*

(e) *Ist $\dim X = \infty$, so ist die identische Abbildung $I : (X, ||\cdot||) \to (X, ||\cdot||)$ nicht kompakt. Dies folgt aus Korollar 1.11.*

Gilt $X \subseteq Y$, so nennt man X kompakt eingebettet in Y, wenn die identische Abbildung $I : (X, ||\cdot||_X) \to (Y, ||\cdot||_Y)$ kompakt ist. Jede bzgl. $||\cdot||_X$ beschränkte Folge hat dann also eine bzgl. $||\cdot||_Y$ konvergente Teilfolge. Kompakte Einbettungen spielen eine wichtige Rolle u.a. bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen.

Bemerkung (Approximation kompakter Operatoren durch "finite-rank operators").
Banach hat 1936 die Frage aufgeworfen, ob auch die Umkehrung der Aussage von Satz 1.36 gilt, d.h. ob es zu jedem kompakten linearen Operator $T : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y eine Folge stetiger linearer Operatoren $T_k : X \to Y$ mit endlichdimensionalem Bild gibt, die in Operatornorm gegen T konvergieren. Eng damit zusammenhängend ist die Frage, ob jeder separable Banachraum eine Schauderbasis besitzt. Für eine Antwort wurde eine lebende Gans als Preis in Aussicht gestellt. Die Frage wurde erst 1973 (negativ) entschieden, siehe Abbildung 1.4. Für separable Hilberträume X, Y ist jeder Operator $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ durch Operatoren in $\mathcal{F}(X,Y)$ approximierbar, vgl. auch Aufgabe 5.4.6.

Per Enflo receiving a live goose from Stanislaw Mazur in 1972 for solving problem 153 in The Scottish Book.

Beispiel 1.38 (Standard–Shift).
Der Shiftoperator $S : l^2 \to l^2$ *ist nicht kompakt. Bezeichnet* $e_n := (\delta_{j,n})_j$, *so hat* $(S(e_n)) = (e_{n+1})$ *keine konvergente Teilfolge.*

Beispiel 1.39 (Diagonaloperatoren).
Es sei (α_j) *eine Nullfolge in* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Dann ist der Operator* $T : l^2 \to l^2$ *definiert durch* $T(x_j) := (\alpha_j x_j)$, $(x_j) \in l^2$, *kompakt. Dies folgt aus Satz 1.36 mithilfe der Finite–Rank Operatoren*

$$T_k(x_j) := (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_k x_k, 0, 0, \ldots)\,,$$

da

$$||T - T_k|| \leq \sup_{j>k} |\alpha_j| \to 0\,.$$

Man beachte, dass $\dim R(T) = \infty$, *d.h.* $T \in \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{F}(X)$.

Dieses einfache Beispiel ist signifikant: wir werden sehen, dass es keine “anderen” kompakten normalen Operatoren auf l^2 gibt, siehe Bemerkung 5.35 (c).

Aufgaben für §1.4

1. Es seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $(T_k) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$ mit $||T_k - T|| \to 0$. Dann gilt $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Beweisen Sie diese Aussage.

Kapitel 2

Hilberträume

Ein Hilbertraum ist ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt induziert ist. Verzichtet man auf die Vollständigkeit, so spricht man von einem Prähilbertraum. Die abstrakte Definition eines (separablen) Hilbertraums stammt von J. von Neumann (1929) und war motiviert durch zahlreiche Vorarbeiten von Hilbert, Schmidt, F. Riesz u.a. sowie durch die mathematische Axiomatisierung der Quantenmechanik. Auf dem Skalarprodukt basiert das wichtige Konzept der Orthogonalität und eine darauf ruhende weitgehende Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras.

2.1 Definition und Beispiele

Definition (Skalarprodukt, Innenproduktraum, Prähilbertraum)**.**
Es sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot\, , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt** auf V, falls für alle $x, x_0, x_1, y \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ die folgenden Bedingungen gelten:

(a) $\langle x_0 + x_1, y\rangle = \langle x_0, y\rangle + \langle x_1, y\rangle$ sowie $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$. (Linearität)

(b) $\overline{\langle y, x\rangle} = \langle x, y\rangle$. (Schiefsymmetrie)

(c) $\langle x, x\rangle > 0$ für alle $x \neq 0$. (Positivität)

Ein $\mathbb{K}$–Vektorraum V ausgestattet mit einem Skalarprodukt heißt **Innenproduktraum** oder **Prähilbertraum**.

Ein Skalarprodukt ist folglich eine *positiv definite* ($\leftarrow$Eigenschaft (c)) *Sesquilinearform* ($\leftarrow$Eigenschaften (a) und (b); sesqui=$1\frac{1}{2}$) auf V. Man beachte, dass die Linearität impliziert, dass aus $x = 0$ oder $y = 0$ stets $\langle x, y\rangle = 0$ folgt.

Bemerkung (Physik)**.**
Skalarprodukte für komplexe Vektorräume spielen u.a. in der Mathematischen Physik eine große Rolle. Dort benutzt man die Schreibweise $\langle x|y\rangle$, wobei man allerdings die Linearität nicht im ersten sondern im zweiten Argument, d.h. $\langle x|\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \alpha_1\langle x|y_2\rangle + \alpha_2\langle x|y_2\rangle$, fordert. Die „Physiker–Notation“ geht auf den Nobelpreisträger P. Dirac zurück, der mit ihrer Hilfe einen effizienten Kalkül („Dirac calculus“) entwickelt hat. Dieser Kalkül wird seitdem in der Physik standardmäßig benutzt. In Bemerkung 3.30 geben wir eine kurze Beschreibung sowie eine Rechtfertigung des Dirac calculus.

Satz 2.1.
Setzt man in einem Prähilbertraum V

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \qquad x \in V\,,$$

so gelten die folgenden Aussagen für alle $x, y \in V$:

(i) **Cauchy–Schwarzsche Ungleichung**

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||\,. \tag{2.1}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

(ii) **Dreiecksungleichung**

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||\,.$$

(iii) **Parallellogrammidentität**

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2\,. \tag{2.2}$$

(iv) **Satz des Pythagoras**

$$\langle x, y\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad ||x \pm y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Insbesondere ist jeder Innenproduktraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein normierter Raum $(V, ||\cdot||)$ mit der Norm $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$, $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

> **Vereinbarung:** Ist $(V, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ ein Innenproduktraum, so benutzen wir für V die vom Skalarprodukt induzierte Norm.

Der Satz des Pythagoras (Satz 2.1 (iv)) motiviert die folgende geometrische Begriffsfassung.

Definition (orthogonal).
Zwei Punkte x, y eines Innenproduktraums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$. Hierfür schreibt man auch $x \perp y$.

Beweis von Satz 2.1. (i) Es sei $t \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Aus der Linearität und der Schiefsymmetrie des Skalarprodukts folgt

$$0 \leq ||x+ty||^2 = ||x||^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + t^2||y|^2\,. \tag{$\star$}$$

Setzt man jetzt $t = -\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle / ||y||^2$ und multipliziert mit $||y||^2$, so erhält man

$$(\mathrm{Re}\langle x, y\rangle)^2 \leq ||x||^2\,||y||^2\,.$$

Schließlich ersetzen wir x durch ax, wobei $|a| = 1$ so gewählt sei, dass $a\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$. Dies führt auf (2.1).

(ii) Setzt man in $(\star)$ $t = 1$ und schätzt $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$ mithilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung ab, so erhält man die Dreiecksungleichung.

(iii) Setzt man in $(\star)$ $t = \pm 1$ und addiert, bekommt man (2.2).

(iv) Folgt aus $(\star)$ für $t = \pm 1$. □

Bemerkung.
Der obige Beweis der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung benutzt anstelle der positiven Definitheit (also $\langle x,x\rangle > 0$ für alle $x \neq 0$) nur die positive *Semi*definitheit (also die schwächere Bedingung $\langle x,x\rangle \geq 0$ für alle $x \in V$). Für jede positiv semidefinite Sesquilinearform $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ gilt also die „verallgemeinerte“ Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \qquad \text{für alle } x,y \in V\,,$$

und $||x|| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ induziert eine Halbnorm auf V.

Die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung ist außerordentlich wichtig. Aus ihr kann beispielsweise die Heisenbergsche Unschärferelation abgeleitet werden, siehe Aufgabe 2.1.7.

Bemerkung 2.2 (Stetigkeit des Skalarprodukts)**.**
Es sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum, $(x_n),(y_n) \subseteq V$ und $x,y \in V$. Falls $x_n \to x$ und $y_n \to y$ so gilt $\langle x_n,y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$, da

$$|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| = |\langle x_n - x,y_n\rangle - \langle x,y-y_n\rangle| \overset{(*)}{\leq} ||y_n||\,||x_n - x|| + ||x||\,||y-y_n||\,.$$

In $(*)$ wird die Dreiecks– sowie die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung benutzt.

Bemerkung 2.3.

(a) Ist $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum, so gilt die „Polarisierungseigenschaft“:

$$\langle x,y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) \qquad (\mathbb{K}=\mathbb{R})$$
$$\langle x,y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\right) \text{ [1]} \qquad (\mathbb{K}=\mathbb{C})$$

für alle $x,y \in V$.

(b) (Satz von Jordan–von Neumann)
Ein normierter Raum $(V,||\cdot||)$ ist genau dann ein Innenproduktraum, wenn seine Norm $||\cdot||$ die Parallelogrammidentität (2.2) für alle $x,y \in V$ erfüllt.

Wir verzichten hier auf den Beweis, der im wesentlichen rechnerisch ist. Zum Nachweis von (a) “multipliziert” man die Ausdrücke rechter Hand aus. Für (b) verwendet man (a) als Definition für $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und “rechnet” mithilfe von Bemerkung 2.2 nach, dass dies unter der Voraussetzung, dass $||\cdot||$ die Parallelogrammidentität erfüllt, tatsächlich ein Skalarprodukt auf V induziert.

Es gibt viele (=hunderte) weitere Charakterisierungen derjenigen Normen, die von Skalarprodukten induziert werden, siehe [1]. Der Polarisierungstrick spielt in vielen Beweisen eine wichtige und oft überraschende Rolle – in der Funktionalanalysis und darüberhinaus: Er ist das Pendant der „trivialen“ Identität

$$xy = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right)\,, \qquad x,y \in \mathbb{R}$$

für Prähilberträume.

[1] In der Form $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{3} i^k||x+i^ky||_2^2$ lässt sich die Polarisierungsidentität evtl. etwas besser merken.

Definition (Hilbertraum).
Ein vollständiger Innenproduktraum heißt **Hilbertraum**.

Bemerkung.
Jeder Prähilbertraum lässt sich gemäß Satz 1.33 vervollständigen. Der resultierende Banachraum erfüllt dann konstruktionsgemäß die Parallelogrammidentität (2.2) und ist somit ein Hilbertraum.

Beispiele 2.4.
Die folgenden Räume bilden jeweils einen Hilbertraum.

(a) *(Der Hilbertsche Folgenraum)*
Der Folgenraum l^2 mit dem Skalarprodukt $\langle (x_j),(y_j)\rangle := \sum_{j=0}^{\infty} x_j\overline{y_j}$.

(b) *(Der Hardy–Raum)*
H^2 mit dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\overline{b_j}$ für $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$.

(c) *(Der Raum L^2 der quadratintegrierbaren Funktionen)*
Für eine Lebesgue–messbare Menge $E \subset \mathbb{K}^N$ der Raum $L^2(E)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_2 := \int_E f(x)\overline{g(x)}\,dx\,, \qquad f,g \in L^2(E)\,.$$

Beispiel 2.5 (Bergman–Raum).
Es sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann ist

$$A^2(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \text{ holomorph} : \ f \in L^2(G)\}$$

ein Hilbertraum mit dem von $L^2(G)$ induzierten Skalarprodukt.

Beweis. Es ist nur die Vollständigkeit zu zeigen. Für alle $f \in A^2(G)$ und alle $z \in G$ gilt die sog. Bergmansche Ungleichung

$$|f(z)| \le \frac{||f||_2}{\sqrt{\pi}\delta_G(z)}\,, \qquad \delta_G(z) := \operatorname{dist}(z,\partial G)\,.$$

Diese ergibt sich aus der Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen, d.h. aus

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt\,, \qquad 0 \le r < \delta_G(z)\,,$$

und der Cauchy–Schwarzsche Ungleichung, denn

$$|f(z)| = \frac{2}{\delta_G(z)^2}\left|\int_0^{\delta_G(z)} f(z) r\,dr\right| = \frac{1}{\pi\delta_G(z)^2}\left|\int_0^{\delta_G(z)}\int_0^{2\pi} r\,f(z+re^{it})\,dt\,dr\right|$$

$$\le \frac{1}{\pi\delta_G(z)^2}\int_{B(z,\delta_G(z))} |f(x)|\,dx \le \frac{||f||_2}{\sqrt{\pi}\delta_G(z)},$$

wobei $B(z,\delta_G(z)) \subseteq \mathbb{C}$ die offene Kreisscheibe um z mit Radius $\delta_G(z)$ bezeichnet.

Ist (f_n) eine Cauchyfolge in $A^2(G)$, so ist (f_n) nach der Bergmanschen Ungleichung eine gleichmäßige Cauchyfolge auf jeder Kreisscheibe $\overline{B(z,\delta_G(z))} \subseteq G$ mit einer somit holomorphen Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int\limits_G |f(x)|^2\,dx \le \liminf_{j\to\infty} \int\limits_G |f_j(x)|^2\,dx \le \limsup_{j\to\infty} ||f_j||_2^2 < \infty\,,$$

da jede Cauchy–Folge beschränkt ist, d.h. $f \in A^2(G)$, und

$$\int\limits_G |f(x)-f_k(x)|^2\,dx \le \liminf_{j\to\infty} \int\limits_G |f_j(x)-f_k(x)|^2\,dx \le \limsup_{j\to\infty} ||f_j-f_k||_2^2\,,$$

d.h. $||f-f_k||_2 \to 0$.

□

Bemerkungen (Physik/Mathematik)**.**

(a) Die L^2–Räume $L^2(E)$ spielen eine wichtige Rolle bei der Behandlung der partiellen Differentialgleichungen der Mathematischen Physik sowie bei der Untersuchung von Fourierreihen und in der Quantenmechanik. Der $\mathbb{C}$–Hilbertraum l^2 findet in der Matrizenmechanik der Quantentheorie Verwendung. Die Bergman–Räume spielen eine zentrale Rolle in der Komplexen Analysis und finden u.a. in der konformen Feldtheorie und der Deformationsquantisierung Anwendung.

(b) D. Hilbert selbst hat in seinen Arbeiten eigentlich „nur“ den Hilbertraum l^2 betrachtet. Einer Anekdote zufolge hat Hilbert nach einem Vortrag H. Weyl zur Seite genommen mit der Frage „Weyl, eine Sache müssen Sie mir erklären: Was ist das, ein Hilbertscher Raum?“ (siehe [20, S. 312]). Man beachte hierzu jedoch Satz 2.18.

Wir deuten eine für die Behandlung partieller Differentialgleichungen wichtige Klasse von Hilberträumen an, beschränken uns jedoch auf den eindimensionalen Fall.

Beispiel 2.6 (Sobolev–Raum auf $[0,1]$)**.**
Es sei $H := W_0^{1,2}([0,1])$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = f(1) = 0$, die f.ü. differenzierbar sind mit Ableitung $f' \in L^2([0,1])$ und

$$f(x) = \int\limits_{[0,x]} f'(t)\,dt =: \int\limits_0^x f'(t)\,dt \qquad \text{für alle } x \in [0,1]\,.$$

Dann ist durch

$$\langle f,g\rangle := \int\limits_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}\,dt$$

ein Skalarprodukt auf H definiert. Die Sesquilinearität ist klar. Es sei $x \in [0,1]$ und $f \in H$. Dann gilt

$$f(x) = \int\limits_0^1 f'(t)\chi_{[0,x]}(t)\,dt\,,$$

d.h. $|f(x)| \le \sqrt{\langle f,f\rangle}\,\sqrt{x}$ aufgrund der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung (in $L^2([0,1])$). Dies zeigt die Positivität. Ist (f_n) eine Cauchy–Folge in H, so ist (f_n') eine Cauchy–Folge in $L^2([0,1])$ mit Limes $g \in L^2([0,1])$. Obige Ungleichung zeigt, dass (f_n) eine

Cauchy–Folge im Banachraum $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ *ist mit Limes* $f \in C([0,1])$. *Für jedes* $x \in [0,1]$ *gilt*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n'(t)\chi_{[0,x]}(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 g(t)\chi_{[0,x]}(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt\,,$$

d.h. f *ist f.ü. differenzierbar mit* $f' = g$, *siehe [3, S. 301]. Es folgt* $f \in H$ *und* $f_n \to f$ *in* H, *d.h.* H *ist ein Hilbertraum.*

Aufgaben für 2.1

1. (Umkehrung des Satzes des Pythagoras = 48. und letzter Satz in Euklid: *Die Elemente*, Band 1, ca. 300 v. Chr.)
   Es sei V ein reeller Innenproduktraum und $x, y \in V$ mit $||x \pm y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Zeigen Sie, dass $\langle x, y\rangle = 0$.

   Nun sei V ein komplexer Innenproduktraum ....

2. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $C_0^\infty(\Omega)$ der Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, die (jeweils) außerhalb einer kompakten Menge $T_f \subset \Omega$ identisch verschwinden. Zeigen Sie, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt. (Siehe [21, §2.2, Proposition 7].)

3. * (Fundamentallemma der Variationsrechnung, abstrakt)

   Es sei V ein Prähilbertraum über $\mathbb{K}$ und $M \subset V$ derart, dass die lineare Hülle, $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} M$, dicht in V liegt. Für einen Punkt $u \in V$ gelte $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $v \in M$. Zeigen Sie, dass $u = 0$.

4. (Fundamentallemma der Variationsrechnung, konkret)
   Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und für $u \in L^2(\Omega)$ gelte

   $$\int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,dx = 0 \text{ für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

   Zeigen Sie, dass $u(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie ferner $u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$, falls zusätzlich $u \in C(\Omega)$.

   (Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt.)

5. Zeigen Sie, dass $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ kein Hilbertraum ist.

6. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $f_\lambda(s) := e^{i\lambda s}$, $s \in \mathbb{R}$, und $V = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{f_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass durch

   $$\langle f, g\rangle := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s)\overline{g(s)}\,ds$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

(b) Zeigen Sie ferner $||f_\lambda - f_{\lambda'}|| = \sqrt{2}$ für $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ und folgern Sie hieraus, dass $(V, ||\cdot||)$ keine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

7. (Die abstrakte Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation)
Es seien V ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$, D_A bzw. D_B Unterräume von V sowie $A : D_A \to V$ bzw. $B : D_B \to V$ lineare Abbildungen. Ferner sei $u \in D_A \cap D_B$ mit $||u|| = 1$ derart, dass $\alpha := \langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle$, $\beta := \langle Bu, u\rangle = \langle u, Bu\rangle$ und die sog. schwache Kommutatorregel $\langle Au, Bu\rangle - \langle Bu, Au\rangle = i$ sei erfüllt. Dann gilt
$$||Au - \alpha u|| \cdot ||Bu - \beta u|| \geq \frac{1}{2}\,.$$

8. Zeigen Sie, dass
$$|f(x)| \leq ||f'||_2 \sqrt{x(1-x)}$$
für alle $x \in [0,1]$ und alle $f \in W_0^{1,2}([0,1])$. Ist diese Abschätzung bestmöglich?

2.2 Konvexe Mengen und orthogonale Projektionen

Definition (Konvexe Menge)**.**
Es sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine Menge $M \subseteq V$ heißt **konvex**, falls für alle $u, v \in M$ die Strecke $[u,v] := \{(1-t)u + tv \,:\, t \in [0,1]\}$ in M enthalten ist.

Satz 2.7 (Projektionssatz oder konvexe Optimierung in Hilberträumen)**.**
Es sei H ein Hilbertraum, $\emptyset \neq M \subseteq H$ abgeschlossen und konvex und $x \in H$ beliebig. Dann gibt es genau einen Punkt $P_M x \in M$ (die Orthogonalprojektion von x auf M) derart, dass
$$||x - P_M x|| = \inf\{||x-y|| \,:\, y \in M\}\,.$$

Für $z \in M$ gilt:
$$z = P_M x \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Re}\langle x - z, y - z\rangle \leq 0 \text{ für alle } y \in M \qquad (*)$$

d.h. $P_M x$ ist durch die „Winkelbedingung“ $(*)$ charakterisiert.

Der Punkt $P_M x \in M$ realisiert also den Abstand der Menge M von x.

Beweis. Es sei $x \in H$ fixiert und $d := \inf\{||x-y|| \,:\, y \in M\}$. Dann gibt es eine „infimierende“ Folge $(y_n) \in M$ mit $d_n := ||x - y_n|| \to d$. Wendet man die Parallelogrammidentität (2.2) auf $x = (x - y_n)/2$ und $y = (x - y_m)/2$ an, so folgt
$$\left|\left|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right|\right|^2 + \frac{1}{4}||y_n - y_m||^2 = \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right)\,. \qquad (\star)$$

Da M konvex ist, ist $(y_n + y_m)/2 \in M$, d.h. $||x - (y_n + y_m)/2|| \geq d$. Mit dieser Information schließt man aus $(\star)$, dass (y_n) eine Cauchyfolge im vollständigen Raum H ist und daher einen Grenzwert $y' \in H$ besitzt. Da M abgeschlossen ist, gilt $y' \in M$. Die Eindeutigkeit von

y' folgt ebenfalls aus $(\star)$. Ist $y'' \in M$ mit $||x - y''|| = d$, so benutzt man $(\star)$ mit $y_n = y'$ und $y_m = y''$ und erhält wegen $(y' + y'')/2 \in M$

$$d^2 + \frac{1}{4}||y' - y''||^2 \leq ||x - (y' + y'')/2||^2 + \frac{1}{4}||y' - y''||^2 = \frac{1}{2}(d^2 + d^2) = d^2 ,$$

d.h. $||y' - y''|| = 0$, also $y' = y''$. Zum Nachweis der Winkelbedingung, beachte man, dass für alle $t \in [0, 1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||x - P_M x||^2 &\leq ||x - ((1-t)P_M x + ty)||^2 = ||x - P_M x - t(y - P_M x)||^2 \\ &= ||x - P_M x||^2 - 2\,t\,\mathrm{Re}\langle x - P_M x, y - P_M x\rangle + t^2\,||y - P_M x||^2 \end{aligned}$$

gilt. Mit $t \searrow 0$ folgt hieraus die Winkelbedingung für y. Aus der Winkelbedingung erhält man umgekehrt für alle $y \in M$

$$\begin{aligned} ||x - y||^2 &= ||x - z - (y - z)||^2 \\ &= ||x - z||^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x - z, y - z\rangle + ||y - z||^2 \geq ||x - z||^2 , \end{aligned}$$

also $z = P_M x$. □

Definition (Orthogonales Komplement)**.**
Für eine Teilmenge $M \subseteq V$ eines Innenproduktraums V heißt

$$M^{\perp} := \{x \in V \,:\, \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in M\}$$

das **orthogonale Komplement** von M.

Bemerkungen 2.8.
Es sei V ein Innenproduktraum und $M \subseteq V$. Dann gilt:

(a) $M^{\perp}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von V.

(b) $M^{\perp} = \left(\overline{\mathrm{span}(M)}\right)^{\perp}$.

(c) $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$. [2]

Satz 2.9 (Orthogonalprojektion auf Unterräume)**.**
Es sei H ein Hilbertraum, $Y \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum und $P_Y : H \to H$ sei die Orthogonalprojektion auf Y. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $P_Y : H \to Y$ ist eine lineare Abbildung und für jeden Punkt $x \in H$ ist $P_Y x \in Y$ charakterisiert durch

$$\langle P_Y x, y\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } y \in Y .$$

(ii) Es gilt $H = Y \oplus Y^{\perp}$, d.h. zu jedem $x \in H$ gibt es genau ein $y \in Y$ und genau ein $y' \in Y^{\perp}$ mit $x = y + y'$. Man sagt „Y und $Y^{\perp}$ sind komplementäre Unterräume“.

(iii) $\left(Y^{\perp}\right)^{\perp} = Y$.

[2] Im Allg. gilt nicht $M = (M^{\perp})^{\perp}$, wie $H = l^2$ und $M = \mathbb{C}_0^{\infty}$ zeigt.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von (i). Es sei $x \in H$ fixiert. Nach Satz 2.7 ist $P_Y x \in Y$ charakterisiert durch die Winkelbedingung $\mathrm{Re}\langle x - P_Y x, y - P_Y x\rangle \leq 0$ für alle $y \in Y$. Da Y ein Unterraum ist, ist dies gleichbedeutend mit $\mathrm{Re}\langle x - P_Y x, y\rangle \leq 0$ für alle $y \in Y$. Ersetzt man y durch $-y$ und iy, so erhält man äquivalent $\langle x - P_Y x, y\rangle = 0$ für alle $y \in Y$. Dies bedeutet $x = P_Y x + x - P_Y x \in Y + Y^\perp$ für jedes $x \in H$. Die Vektorraumsumme $Y + Y^\perp$ ist direkt, denn $Y \cap Y^\perp = \{0\}$, da $v \in Y \cap Y^\perp \Rightarrow \langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Dies beweist Aussage (ii). Damit können wir nun auch den noch fehlenden Teil von Aussage (i) nachprüfen. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle P_Y(\alpha x_1 + x_2), y\rangle &= \langle \alpha x_1 + x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = \alpha\langle P_Y x_1, y\rangle + \langle P_Y x_2, y\rangle \\ &= \langle \alpha P_Y x_1 + P_Y x_2, y\rangle\end{aligned}$$

für alle $y \in Y$, alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $x_1, x_2 \in H$, also stets $P_Y(\alpha x_1 + x_2) - [\alpha P_Y x_1 + P_Y x_2] \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, d.h. $P_Y : H \to Y$ ist linear.
(iii) Nach (ii) und Bemerkungen 2.8 (a) und (c) gilt $H = Y \oplus Y^\perp \subseteq (Y^\perp)^\perp \oplus Y^\perp = H$. Dies impliziert $Y = (Y^\perp)^\perp$. □

Korollar 2.10.
Es sei Y ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums H und $P_Y : H \to Y$ die orthogonale Projektion auf Y, vgl. Satz 2.9. Dann gilt $P_Y \in \mathcal{L}(H)$ und

$$||P_Y|| = \begin{cases} 1 & \text{falls } Y \neq \{0\}, \\ 0 & \text{falls } Y = \{0\}. \end{cases}$$

Beweis. Es gilt $x = P_Y x + (x - P_Y x) \in Y \oplus Y^\perp$ für alle $x \in H$, d.h. der Satz des Pythagoras impliziert

$$||x||^2 = ||P_Y x + (x - P_Y x)||^2 = ||P_Y x||^2 + ||x - P_Y x||^2 \geq ||P_Y x||^2$$

mit Gleichheit für jedes $x \in Y$, falls $Y \neq \{0\}$. Somit ist $P_Y \in \mathcal{L}(H)$ und $||P_Y|| = 1$ falls $Y \neq \{0\}$. □

Beispiel 2.11 (Bergman Raum)**.**
Die orthogonale Projektion $P := P_{A^2(\mathbb{D})}$ von $L^2(\mathbb{D})$ auf $A^2(\mathbb{D})$ ist gegeben durch

$$Pf(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - \overline{w}z)^2}\, dw\,, \qquad f \in L^2(\mathbb{D})\,.$$

Setzt man

$$K_z(w) := \frac{1}{\pi(1 - \overline{z}w)^2} \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{D}\,,$$

so gilt daher für jedes $f \in L^2(\mathbb{D})$

$$Pf(z) = \langle Pf, K_z\rangle = \langle f, K_z\rangle \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}\,.$$

Insbesondere gilt für jedes $f \in A^2(\mathbb{D})$

$$f(z) = \langle f, K_z\rangle \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}\,.$$

Man nennt $K_z \in A^2(\mathbb{D})$ den **reproduzierenden Kern** *oder* **Bergman Kern** *für $z \in \mathbb{D}$.*

Beweis. Für ein $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ gilt die Flächenmittelwerteigenschaft

$$\varphi(0) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \varphi(w)\, dw. \tag{2.3}$$

Es sei $f \in A^2(\mathbb{D})$ und $z \in \mathbb{D}$ fixiert. Die Funktion $T_z : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $T_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}$, ist holomorph, bijektiv und selbstinvers. Daher ist auch $g(w) = f\left(\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right)$, $w \in \mathbb{D}$, holomorph in $\mathbb{D}$ und aus (2.3) und der Transformationsformel ergibt sich

$$f(z) = g(0) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} f\left(\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right) dw = \frac{(1-|z|^2)^2}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{|1-\overline{z}w|^4}\, dw\,. \tag{2.4}$$

Mit $f \in A^2(\mathbb{D})$ ist auch für fixiertes $z \in \mathbb{D}$ die Funktion $\phi(w) = (1-\overline{z}w)^2 f(w)$, $w \in \mathbb{D}$, in $A^2(\mathbb{D})$. Wendet man (2.4) auf ϕ an, so folgt

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\overline{w}z)^2}\, dw = \langle f, K_z \rangle\,. \tag{2.5}$$

Es sei nun $f \in L^2(\mathbb{D})$. Dann gilt unter Beachtung von $Pf \in A^2(\mathbb{D})$, (2.5) und Satz 2.9 (i)

$$Pf(z) = \langle Pf, K_z \rangle = \langle f, K_z \rangle = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\overline{w}z)^2}\, dw\,.$$

□

Bemerkung (Berezin Transformation)**.**
Die Abbildung

$$B : L^2(\mathbb{D}) \to A^2(\mathbb{D})\,, \qquad Bf(z) := \frac{(1-|z|^2)^2}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{|1-\overline{z}w|^4}\, dw$$

heißt Berezin Transformation. Sie spielt eine Rolle in der Mathematischen Physik, u.a. in der Deformationsquantisierung, der topologischen Quantenfeldtheorie und bei integrablen Systemen, siehe [4].

Bemerkung 2.12.
Für einen abgeschlossenen Unterraum Y eines Hilbertraums H und einen Punkt $x_0 \in V$ mit $||x_0|| = 1$ gilt

$$x_0 \in Y^\perp \qquad \Longleftrightarrow \qquad \inf\{||x_0 - y|| \,:\, y \in Y\} = 1\,.$$

Die zweite Aussage macht auch in Banachräumen Sinn, ist aber i.a. dort nicht mehr gültig. Als partiellen Ersatz hat man aber das Rieszsche Lemma 1.10.

Beweis. Für $x_0 \in H$ gilt: $x_0 \in Y^\perp \Longleftrightarrow P_Y x_0 = 0$ und $||x_0 - P_Y x_0|| = \inf\{||x_0 - y|| \,:\, y \in Y\}$, siehe Satz 2.7.

Ist nun $x_0 \in Y^\perp$ mit $||x_0|| = 1$, so folgt $1 = ||x_0|| = ||x_0 - P_Y x_0|| = \inf\{||x_0 - y|| \,:\, y \in Y\}$. Umgekehrt gilt $||x_0 - P_Y x_0||^2 = 1 = ||x_0||^2 = ||x_0 - P_Y x_0||^2 + ||P_Y x_0||^2$, also $P_Y x_0 = 0$. □

Aufgaben für §2.2

1. Zeigen Sie, dass Satz 2.9 für nicht abgeschlossene Unterräume Y eines Hilbertraums H i.Allg. nicht gilt.

2. Es sei Y ein Unterraum eines Hilbertraums H. Zeigen Sie, dass $\overline{Y} = (Y^{\perp})^{\perp}$.

3. * Zeigen Sie, dass für Innenprodukträume V_1 und V_2 und eine lineare Abbildung $T : V_1 \to V_2$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

   (i) T ist eine Isometrie.

   (ii) $\langle Tx, Ty\rangle_{V_2} = \langle x, y\rangle_{V_1}$ für alle $x, y \in V_1$.

   Was bedeutet dies geometrisch ?

4. Es sei H ein Hilbertraum und P_M die Projektion auf eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge $M \subset H$. Man zeige, dass $||P_M x - P_M y|| \leq ||x - y||$ für alle $x, y \in H$.

5. Es seien Y_1 und Y_2 abgeschlossene Unterräume eines Hilbertraums. Beweisen Sie
$$Y_1 \subset Y_2 \quad \Longleftrightarrow \quad P_{Y_1} = P_{Y_2} P_{Y_1} = P_{Y_1} P_{Y_2} \,.$$

6. (Projektionssatz für Prähilberträume)
   Es sei V ein Innenproduktraum, $Y \subseteq V$ ein vollständiger Unterraum und $x \in V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Es gibt genau einen Punkt $P_Y x \in Y$, derart, dass
$$||x - P_Y x|| = \inf\{||x - y|| \, : \, y \in Y\} \,.$$

   (b) Der Punkt $P_Y x$ ist charakterisiert durch die Orthogonalitätsrelation
$$\langle x - P_Y x, y\rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in Y \,.$$

7. (Eine geringfügige Verallgemeinerung des Projektionssatzes)
   Es sei $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ eine positiv semidefinite Bilinearform auf dem $\mathbb{K}$–Vektorraum V und Y ein Unterraum von V, derart, dass $(Y, \langle \cdot\,, \cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist. Zeigen Sie, dass der Projektionssatz für $M = Y$ weiterhin gilt und folgern Sie
$$V = Y \oplus Y^{\perp} \,,$$
   wobei $Y^{\perp} := \{x \in V \, : \, \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in Y\}$.

8. * (Reproduzierender Kern in H^2 oder die Cauchy–Integralformel in disguise)

   (a) Finden Sie zu jedem $z \in \mathbb{D}$ ein $C_z \in H^2$ mit
$$f(z) = \langle f, C_z\rangle \quad \text{für alle } f \in H^2 \,.$$
   (Hinweis: Geometrische Reihe)

   (b) Zeigen Sie, dass aus $f_n \to f$ in H^2 stets $f_n \to f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}$ folgt.

2.3 Fourierreihen

Definition (Orthonormalsystem, ONS, maximales ONS, ONB).
Eine Teilmenge $S \subseteq V$ eines Innenproduktraums V heißt **Orthonormalsystem (ONS)**, falls $||e|| = 1$ und $\langle e, f\rangle = 0$ für alle $e, f \in S$, $e \neq f$, gilt. Ein ONS S heißt **maximal**, wenn für jedes ONS $T \subseteq V$ von V mit $S \subseteq T$ stets $T = S$ gilt. Ein maximales ONS bezeichnet man auch als **Orthonormalbasis (ONB)** von V.[3]

Insbesondere ist jedes ONS linear unabhängig.

Definition (Fourierkoeffizienten).
Es sei S ein ONS eines Innenproduktraums V und $x \in V$. Dann heißen die Zahlen $\langle x, e\rangle$, $e \in S$, die **Fourierkoeffizienten von x (bzgl. S)**.

Beispiele 2.13.

(a) *In l^2 bilden die Vektoren $\tilde{e}_j = (\delta_{kj})_k$, $j \in \mathbb{N}_0$, ein (abzählbares) ONS. Für $x = (x_j) \in l^2$ sind die Zahlen x_j, $j \in \mathbb{N}_0$, gerade die Fourierkoeffizienten von x, denn $x_j = \langle x, \tilde{e}_j\rangle$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist $S := \{\tilde{e}_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Orthonormalbasis von l^2.*

(b) *In $L^2(\partial\mathbb{D})$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle = \int_{\partial\mathbb{D}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}\,dt$$

bildet

$$S := \{\varphi_j : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}\,,\ \varphi_j(z) = \frac{z^j}{\sqrt{2\pi}} \ : \ j \in \mathbb{Z}\}$$

ein ONS. Für $f \in L^2(\partial\mathbb{D})$ sind dann die Fourierkoeffizienten gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, e^{-ijt}\,dt\,, \qquad j \in \mathbb{Z}\,.$$

Ist S ein maximales ONS, also eine ONB ?

(c) *Im Hardyraum H^2 bildet $S := \{\varphi_j : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \varphi_j(z) = z^j \ : \ j \in \mathbb{N}_0\}$ ein ONS. Die Fourierkoeffizienten von $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in H^2$ sind gerade die Taylorkoeffizienten a_j. Insbesondere ist S eine ONB.*

(d) *Im Bergmanraum $A^2(\mathbb{D})$ bildet $S := \{\varphi_j : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}, \varphi_j(z) = \sqrt{\frac{j+1}{\pi}}z^j \ : \ j \in \mathbb{N}_0\}$ ein ONS. Die Fourierkoeffizienten von $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in A^2(\mathbb{D})$ sind gerade die Zahlen $a_j\sqrt{\frac{\pi}{j+1}}$. Insbesondere ist S eine ONB.*

Wir erinnern an das aus der Linearen Algebra bekannte Orthonormalisierungsverfahren.

[3] Vorsicht! ONB sind i.d.R. keine Basen im Sinne der Linearen Algebra.

Satz 2.14 (Gram–Schmidt).
Sei $T := \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines Innenproduktraums V. Dann existiert ein ONS $S = \{e_k : k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq V$ mit $\overline{\operatorname{span} S} = \overline{\operatorname{span} T}$.

Beweis. Sei $e_1 := x_1/||x_1||$. Setzt man $f_2 := x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ und $e_2 := f_2/||f_2||$, so gilt $\langle e_1, e_2\rangle = 0$. Durch

$$f_{k+1} := x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_j\rangle e_j\,, \qquad e_{k+1} := f_{k+1}/||f_{k+1}||\,,$$

wird ein Orthonormalsystem $S := \{e_k : k \in \mathbb{N}_0\} \subset V$ definiert mit $\operatorname{span}\{x_k : k = 1, \ldots, n\} = \operatorname{span}\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt $\overline{\operatorname{span} S} = \overline{\operatorname{span} T}$. □

Satz 2.15 (Besselsche Ungleichung).
Es sei $S = \{e_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ ein ONS eines Innenproduktraums V. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le ||x||^2 \tag{2.6}$$

für alle $x \in V$. Ist V vollständig, so konvergiert für jedes $x \in V$ die Reihe

$$Px := \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$$

in V und Px ist die Orthogonalprojektion von x auf $\overline{\operatorname{span} S}$.

Beweis. Es sei $x \in V$.
(a) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist der Vektor

$$x_N := x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j$$

orthogonal zu $e_0, e_1, \ldots, e_N$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$||x||^2 = ||x_N||^2 + \left|\left|\sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\right|\right|^2 = ||x_N||^2 + \sum_{j=0}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2 \ge \sum_{j=0}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2$$

und daher

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \le ||x||^2\,.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $y_n := \sum_{j=0}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$. Für $l, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m > l$ gilt

$$||y_m - y_l|| = \left|\left|\sum_{j=l+1}^{m} \langle x, e_j\rangle e_j\right|\right|^2 = \sum_{j=l+1}^{m} |\langle x, e_j\rangle|^2\,.$$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2$ konvergiert, ist (y_n) eine Cauchy–Folge in V. Falls V vollständig ist, so konvergiert (y_n) in V. Wir setzen

$$Px := \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k := \lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

(c) Für jedes $y := e_k \in S$ gilt

$$\langle x - Px, y\rangle = \langle x - \sum_{j=0}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle = 0\,.$$

Dies zeigt $x - Px \in S^\perp = (\overline{\operatorname{span} S})^\perp$ (vgl. Bemerkung 2.8). Hieraus folgt $\langle Px, y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $y \in \overline{\operatorname{span} S}$. Somit ist Px die Orthogonalprojektion von x auf $\overline{\operatorname{span} S}$ nach Satz 2.9 (i). □

Bemerkung.
Teil (a) des Beweises von Satz 2.15 zeigt: Für ein $x \in V$ gilt Gleichheit in (2.6) genau dann wenn $x = \sum_{j=0}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j$. Gilt Gleichheit in (2.6) für alle $x \in V$, so ist S eine Orthonormalbasis von V (siehe Beweisschritt (f) ⇒ (a) von Satz 2.17).

Bemerkung 2.16.
Teil (b) des Beweises von Satz 2.15 zeigt: Ist H ein Hilbertraum, $S = \{e_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ ein Orthonormalsystem in H und $y = (y_j) \in l^2$, so konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j$ in H. (Man ersetze $\langle x, e_j\rangle$ durch y_j).

Bemerkung (Unbedingt, aber nicht absolut konvergente Reihen)**.**
Aufgrund der Eindeutigkeit der Orthogonalprojektion von x auf $\overline{\operatorname{span} S}$ konvergiert die sog. Fourierreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$$

unbedingt, d. h. es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_{\pi(k)}\rangle e_{\pi(k)}$$

für jede Bijektion $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

Die Konvergenz ist aber i.Allg. nicht absolut, wie das Beispiel $X = l^2$, $S = \{e_j := \tilde{e_j} = (\delta_{kj})_k : j \in \mathbb{N}_0\}$ und $x = (1/(k+1))_k$ zeigt.

Satz 2.17.
Es sei H ein Hilbertraum und $S = \{e_k : k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq H$ ein ONS von H. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) S ist eine Orthonormalbasis von H.

(b) Für alle $x \in H$ mit $x \perp S$ gilt $x = 0$.

(c) $H = \overline{\operatorname{span} S}$.

(d) $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$ für alle $x \in H$.

(e) $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.

(f) (Parsevalsche Gleichung)

$$||x||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \qquad \text{für alle } x \in H\,.$$

Beweis. Wir setzen $Y := \overline{\operatorname{span} S}$, beachten $H = Y \oplus Y^\perp$ aufgrund des Satzes über die Orthogonalprojektion (Satz 2.9) und setzen $Px := \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ für $x \in X$ (Orthogonalprojektion von x auf Y).

(a) $\Rightarrow$ (b): Gäbe es einen Punkt $x \neq 0$ mit $x \perp S$, so wäre $S' := S \cup \{x/||x||\}$ ein ONS mit $S' \supsetneq S$ und S kein maximales ONS.

(b) $\Rightarrow$ (c): Bedingung (b) besagt $Y^\perp = S^\perp = \{0\}$. Daher folgt $H = Y \oplus Y^\perp = Y$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Aus $x = Px + (x - Px) \in Y \oplus Y^\perp = Y$, folgt $x - Px = 0$, also $x = Px$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Einsetzen!

(e) $\Rightarrow$ (f): Spezialfall von (e).

(f) $\Rightarrow$ (a): Wäre $S' := S \cup \{e\}$ ein ONS, so würde $1 = ||e||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle e, e_k \rangle|^2 = 0$ folgen. $\square$

Satz 2.18.
Es sei H ein separabler unendlich–dimensionaler $\mathbb{C}$–Hilbertraum. Dann gibt es eine abzählbare Orthonormalbasis und eine bijektive lineare Isometrie $\mathcal{F} : H \to l^2$, d.h. $||\mathcal{F}x|| = ||x||$ für alle $x \in H$.

Beweis. Es sei $M \subset H$ abzählbar mit $\overline{M} = H$. Insbesondere gilt $\overline{\operatorname{span} M} = H$. Da $\dim H = +\infty$ gilt, ist M abzählbar unendlich. Es existiert dann auch eine abzählbar unendliche linear unabhängige Teilmenge B von M mit $\overline{\operatorname{span} B} = \overline{\operatorname{span} M} = H$. Wendet man das Verfahren von Gram–Schmidt auf B an, so erhält man ein ONS $S = \{e_k \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}$ mit $\overline{\operatorname{span} S} = H$. Nach Satz 2.17 ist S dann ein maximales ONS.

Wir definieren $\mathcal{F} : H \to l^2$, $x \mapsto \mathcal{F}x = (\langle x, e_n \rangle)_n$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert aufgrund der Bessel'schen Ungleichung und offensichtlich linear.

(b) $\mathcal{F}$ ist aufgrund der Parseval'schen Gleichung eine Isometrie:

$$\langle \mathcal{F}x, \mathcal{F}x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \langle x, x \rangle\,.$$

(c) $\mathcal{F}$ ist surjektiv: Dazu sei $y = (y_k) \in l^2$ gewählt. Dann ist $x := \sum_{k=1}^{\infty} y_k\, e_k \in H$ wohldefiniert, denn $\sum_{k=1}^{\infty} y_k\, e_k$ konvergiert in H (siehe Bemerkung 2.16). Insbesondere gilt $\mathcal{F}x = (\langle \sum_{k=1}^{\infty} y_k\, e_k, e_n \rangle)_n = (y_n)$. $\square$

Definition (Fourier–Abbildung)**.**
Ist H ein $\mathbb{C}$–Hilbertraum mit einer ONB $S = \{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}_0\}$, so heißt die bijektive lineare Isometrie $\mathcal{F} : H \to l^2$ definiert durch $\mathcal{F}x := (\langle x, e_n \rangle)_n$ die **Fourier–Abbildung bzgl.** S.

Folglich sind alle *separablen* unendlich dimensionale Hilberträume (über $\mathbb{C}$) isometrisch isomorph. Bemüht man das Auswahlaxiom (oder das dazu äquivalente Lemma von Zorn), so kann man „zeigen“, dass jeder Hilbertraum ein maximales Orthonormalsystem besitzt.

Bemerkung (Mathematik/Physik).
Insbesondere sind die $\mathbb{C}$–Hilberträume $L^2([a,b])$ und l^2 isometrisch. Dies ist die mathematische Grundlage dafür, dass sich die Heisenbergsche Matrizenmechanik und die Schrödingersche Wellenmechanik in der Quantentheorie als äquivalent erweisen. Physiker sprechen oft auch von **dem** Hilbertraum und meinen damit den (bis auf isometrische Isomorphie) eindeutig bestimmten separablen unendlich–dimensionalen Hilbertraum (über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$).

Bemerkung 2.19.
Als Anwendung der abstrakten Fourrierreihen betrachten wir nun noch kurz die klassischen Fourierreihen. Es sei L^2 der Raum $L^2(\partial\mathbb{D})$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\overline{g(e^{it})}\,dt\,, \qquad f,g \in L^2\,,$$

und der induzierten Norm

$$||f||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt\right)^{1/2}\,, \qquad f \in L^2\,.$$

Dann ist $S := \{\phi_k : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C},\ \phi(z) = z^k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ ein (abzählbares) Orthonormalsystem in L^2, vgl. Beispiel 2.13. Wir wollen zeigen, dass S eine Orthonormalbasis in L^2 ist. Hierzu beachten wir zunächst, dass $\operatorname{span} S$ in $(C(\partial\mathbb{D}), ||\cdot||_\infty)$ dicht liegt. Dies folgt aus Satz 1.22 bzw. dessen Beweis unter Beachtung, dass $\overline{z} = 1/z$ für $z \in \partial\mathbb{D}$ gilt. In der Theorie des Lebesgue–Integrals wird gezeigt, dass $C(\partial\mathbb{D})$ dicht in $(L^2, ||\cdot||_2)$ liegt. Zusammen folgt daher, dass $\operatorname{span} S$ dicht in L^2 liegt. Um dies einzusehen sei $f \in L^2$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $g \in C(\partial\mathbb{D})$ mit $||f-g||_2 < \varepsilon$. Weiter finden wir ein $h \in \operatorname{span} S$ mit $||g-h||_\infty < \varepsilon$. Da $||g-h||_2 \le ||g-h||_\infty$ folgt $||f-h||_2 < 2\varepsilon$ und somit gilt $\overline{\operatorname{span} S} = L^2$. Satz 2.17 zeigt nun, dass S eine ONB von L^2 ist und somit ist L^2 auch separabel.

Wir können unsere Überlegungen in folgendem Satz zusammenfassen.

Satz 2.20.
L^2 ist ein separabler Hilbertraum und $S = \{\phi_k : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C},\ \phi_k(z) = z^k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ bildet eine Orthonormalbasis in L^2. Für $f \in L^2$ seien

$$c_k(f) := \langle f, \phi_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,dt\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

die Fourierkoeffizienten von f bzgl. S,

$$s_n(f,z) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) z^k \qquad (z \in \partial\mathbb{D})$$

das **Fourierpolynom von f vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$** *und*

$$S_f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) z^k := \lim_{n\to\infty} s_n(f,z) \qquad (z \in \partial\mathbb{D})$$

Fourierreihe von f[4]. *Dann gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty} ||f - s_n(f,\cdot)||_2 = 0$ *(L^2–Konvergenz der Fourierreihen)*

(b) $||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(f)|^2$ *(Parsevalsche Gleichung)*

(c) $c_j(f) = \langle f, e_j\rangle \to 0$ *für* $|j| \to \infty$ *(Riemann–Lebesgue Lemma)*

(d) Aus $c_j(f) = 0$ *für alle* $j \in \mathbb{Z}$ *folgt bereits* $f = 0$ *(in* L^2*).* *(Identitätsprinzip)*

Bemerkung.
Für ein $f \in L^1 := L^1(\partial\mathbb{D}) \supsetneq L^2$ können Fourierkoeffizienten, Fourierpolynom und Fourierreihe wie in Satz 2.20 definiert werden. Die Theorie der punktweisen Konvergenz von Fourierreihen ist wesentlich weniger elegant. So gibt es stetige Funktionen, deren Fourierreihe divergiert (Beweis folgt später). Ohne Beweis erwähnen wir den berühmten (und extrem schwierigen)

Satz (Carleson 1966)**.**
Für jedes $f \in L^2$ konvergiert die Fourierreihe fast überall gegen f.

Dies beweist insbesondere die Vermutung von Lusin (1913), dass die Fourierreihe jeder stetigen Funktion fast überall gegen diese konvergiert. Kolmogorov hatte bereits 1926 eine L^1–Funktion gefunden, deren Fourierreihe *überall* divergiert.

Korollar 2.21 (L. Euler 1735)**.**
$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(e^{it}) = t - \pi$, mit den Fourierkoeffizienten

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ijt}\,dt = \begin{cases} \frac{i}{j}\,, & j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \\ 0\,, & j = 0\,. \end{cases}$$

Die Parsevalsche Gleichung liefert dann

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (t-\pi)^2\,dt = \langle f, f\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(f)|^2 = 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\,.$$

□

Insbesondere ist der Funktionswert der Riemannschen Zeta–Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s = 2$ *irrational*. Dies ist für alle *geraden* $s \in \mathbb{N}$ ebenfalls so. Für *ungerade* $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ hat man bisher nur $\zeta(3) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ beweisen können. Man weiß aber, dass sich unter den Zahlen $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ und $\zeta(11)$ mindestens eine irrationale Zahl befindet.

[4]Beachte, die Konvergenz der Fourierreihe ist bzgl. $||\cdot||_2$.

Als weitere Anwendung zeigen wir, dass sich die Cauchy Integralformel aus der Funktionentheorie (in einem Spezialfall) als die "orthogonale Projektion von L^2 auf den Hardy Raum H^2" entpuppt:

Korollar 2.22 (Cauchy Integral als orthogonale Projektion).
Es sei $P := P_{L_2^+}$ die orthogonale Projektion von L^2 auf den abgeschlossenen Unterraum

$$L_+^2 := \{f \in L^2 \,:\, c_k(f) = \langle f, \phi_k \rangle = 0 \text{ für jedes } k < 0\}\,,$$

mit $\phi_k : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $\phi_k(z) = z^k$, für $k \in \mathbb{Z}$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 < \infty$ für $f \in L_+^2$, ist

$$E : L_+^2 \to H^2\,, \qquad Ef(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \qquad (z \in \mathbb{D})$$

wohldefiniert und eine lineare (surjektive) Isometrie. Somit ist

$$EP : L^2 \to H^2\,, \quad EPf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \qquad (z \in \mathbb{D})$$

ein linearer stetiger Operator. Betrachte nun den Cauchy–Operator

$$C : L^2 \to H^2\,, \quad Cf(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad (z \in \mathbb{D})$$

für $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Fixiere $z \in \mathbb{D}$ und definiere $S_z : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $S_z(w) = 1/(1-\overline{z}w)$. Da $S_z \in L^2$ gilt

$$Cf(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1-e^{-it}z}\, dt = \langle f, S_z \rangle \overset{(*)}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f)\overline{c_j(S_z)} \overset{(**)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f)\, z^j\,,$$

wobei wir in $(*)$ Satz 2.17 (e) benutzt haben. Für $(**)$ beachtet man, dass

$$\overline{c_j(S_z)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1-ze^{it}}\, e^{ijt}\, dt = \begin{cases} z^j & \text{für } j \geq 0 \\ 0 & \text{für } j < 0\,. \end{cases}$$

Zusammen folgt

$$C = EP\,.$$

Bemerkung.
Identifiziert man H^2 mit L_+^2, so "ist" der Cauchy Operator die orthogonale Projektion von L^2 auf H^2. Ferner "besteht" H^2 dann aus allen L^2–Funktionen deren "negative" Fourierkoeffizienten allesamt verschwinden. Man fasst $\tilde{g} := E^{-1}g \in L_+^2$ als die Randwerte der holomorphen Funktion $g \in H^2$ auf. Ein berühmter Satz von Fatou aus dem Jahr 1906 zeigt in der Tat: Für $g \in H^2$ gilt

$$\tilde{g}(e^{it}) = \lim_{r \to 1} g(re^{it}) \quad \text{für f.a. } t \in [0, 2\pi]\,.$$

In dieser Fatouschen Arbeit über Hardy–Räume holomorpher Funktionen wird übrigens erstmals das omnipräsente "Lemma von Fatou" formuliert und bewiesen, welches seither in der Maßtheorie eine tragende Rolle spielt.

Wir betrachten nun eine für viele Anwendungen besonders wichtige Klasse kompakter Operatoren.

Definition (Hilbert–Schmidt Operatoren).
Es sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_k : k \in \mathbb{N}_0\}$. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ heißt **Hilbert–Schmidt Operator**, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||Te_k||^2 < \infty .$$

Man kann zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der ONB abhängt, siehe Bemerkung 3.21.

Satz 2.23 (Hilbert–Schmidt Operatoren).
Jeder Hilbert–Schmidt Operator ist kompakt.

Beweis. Es sei $\{e_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine ONB des Hilbertraums H und $T : H \to H$ ein Hilbert–Schmidt Operator. Die Operatoren

$$T_n : H \to H, \quad T_n x := \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle T e_k$$

sind Finite–Rank Operatoren. Wegen $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ für jedes $x \in H$ gilt

$$||T_n x - Tx||^2 = \left|\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, Te_k \right|\right|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} ||Te_k||^2 \leq ||x||^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} ||Te_k||^2$$

aufgrund der Cauchy–Schwarzschen und Besselschen Ungleichung. Es folgt

$$||T_n - T||^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||Te_k||^2 \to 0 \text{ für } n \to \infty ,$$

also $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(H)$. Folglich ist $T \in \mathcal{K}(H)$ nach Satz 1.36. □

Beispiel 2.24 (Intgraloperatoren).
Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall,* $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$ *und*

$$(T_K x)(t) := \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds , \qquad x \in L^2([a, b]) .$$

Dann ist $T_K : L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ *ein Hilbert–Schmidt Operator.*

Beweis. Zunächst beachten wir, dass $T_K : L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ linear (klar) und beschränkt ist. Hierfür beachte

$$||Tx||_2^2 = \int_a^b |T_K x(t)|^2 \, dt = \int_a^b \left| \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right|^2 dt = \int_a^b |\langle K(t, \cdot), \overline{x} \rangle \,|^2 dt$$

$$\leq \int_a^b ||K(t, \cdot)||_2^2 \, dt \, ||x||_2^2 = ||K||^2_{L^2([a,b]\times[a,b])} ||x||_2^2 .$$

Ferner ist $L^2([a,b]\times[a,b])$ separabel.[5] Es sei $\{e_k \,:\, k\in\mathbb{N}_0\}$ ein maximales ONS von $L^2([a,b])$. Dann ist auch $\{\overline{e_k} \,:\, k\in\mathbb{N}_0\}$ ein maximales ONS von $L^2([a,b])$. Daher gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}||T_K e_k||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b\left|\int_a^b K(t,s)\,e_k(s)\,ds\right|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b|\langle K(t,\cdot)\overline{e_k}\rangle|^2\,dt$$

$$\overset{(*)}{=}\int_a^b\sum_{k=1}^{\infty}|\langle K(t,\cdot),\overline{e_k}\rangle|^2\,dt \overset{(**)}{=}\int_a^b||K(t,\cdot)||^2\,dt = ||K||^2_{L^2([a,b]\times[a,b])} < +\infty\,,$$

wobei in $(*)$ der Satz der monotonen Konvergenz und $(**)$ die Parsevalsche Gleichung benutzt wurde. □

Ergänzungen

Satz 2.25 (Die Gründung Karthagos 814 v. Chr. oder die isoperimetrische Ungleichung).
Es sei J eine reguläre Jordankurve (d.h. es existiert eine stetige differenzierbare Parametrisierung γ von J mit $\gamma'\neq 0$) der Länge L und A bezeichne den Flächeninhalt der von J berandeten (beschränkten) Menge. Dann gilt $4\pi A\le L^2$. Gleichheit besteht genau dann, wenn J eine Kreislinie ist.

Hilfssatz (Wirtinger Ungleichung). *Es sei $y:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit*

$$\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0\,.$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} y'(t)^2\,dt \ge \int_0^{2\pi} y(t)^2\,dt\,.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $y(t)=A\cos t+B\sin t$ für $A,B\in\mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $y:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0\,. \tag{2.7}$$

Es sei $f(e^{it}):=y(t)$ und $g(e^{it})=y'(t)$. Dann gilt für alle $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$$ikc_k(f) = \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y'(t)e^{-ikt}\,dt = c_k(g)\,.$$

Es folgt aus der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)^2\,dt \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(f)|^2 \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}|k\,c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y'(t)^2\,dt\,.$$

[5] Dies folgt analog zur Beobachtung, dass L^2 separabel ist (siehe Bemerkung 2.19), wenn man $[a,b]\times[a,b]$ als kompakte Menge in $\mathbb{C}$ interpretiert.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $c_k(f) = 0$ für alle $|k| \geq 2$, d.h wenn $y(t) = A\cos t + B\sin t$ für $A, B \in \mathbb{R}$, da $c_0(f) = 0$, siehe (2.7). $\square$

Beweis von Satz 2.25. Es sei $s \mapsto (u(s), v(s))$ die injektive Parametrisierung der vorgelegten Jordankurve J mit der Bogenlänge als Parameter. Dann sind die Funktionen $u, v : [0, L] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1\,.$$

(Siehe z.B. H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2, 5. Auflage, 1990, S. 365.) Setzt man $t = 2\pi s/L$, so gilt für $x(t) := u(Lt/(2\pi))$ und $y(t) := v(Lt/(2\pi))$ daher

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left\{\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right\}\frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{L^2}{4\pi^2}\,.$$

Durch eine vertikale Verschiebung können wir desweiteren o.E.

$$\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0$$

annehmen. Ferner folgt aus dem Gaußschen Integralsatz der Ebene (Siehe z.B. H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2, 5. Auflage, 1990, S. 498)

$$A = \frac{1}{2}\int_J x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y'(t)x(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x'(t)y(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{L^2}{2\pi} - 2A &= \int_0^{2\pi}\left\{x'(t)^2 + y'(t)^2\right\}\,dt + 2\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{x'(t) + y(t)\right\}^2\,dt + \int_0^{2\pi}\left\{y'(t)^2 - y(t)^2\right\}\,dt \geq \int_0^{2\pi}\left\{y'(t)^2 - y(t)^2\right\}\,dt \geq 0
\end{aligned}$$

nach (a). Gleichheit gilt genau dann, wenn $y(t) = A\cos t + B\sin t$ und $x'(t) = -y(t)$, d.h. $x(t) = A\sin t - B\cos t + C$, d.h. $x(t) + iy(t) = C + (A - iB)e^{it}$. $\square$

Aufgaben für §2.3

1. ("Separation der Variablen")
   Es sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein maximales ONS in $L^2([a,b])$ und $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ sei ein maximales ONS in $L^2([c,d])$. Zeigen Sie, dass durch $g_{nm}(s,t) := e_n(s)f_m(t)$ ein maximales ONS $\{g_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ in $L^2([a,b] \times [c,d])$ gegeben ist.

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist das n–te Hermitepolynom H_n definiert durch

   $$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)\,.$$

   Wir setzen

   $$u_n(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{2^{n/2}\sqrt{n!}\,\pi^{1/4}}H_n(x)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass H_n ein Polynom vom Grade n ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\{u_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein ONS im Hilbertraum $(L^2(\mathbb{R}), ||\cdot||_2)$ bildet.

Bemerkung (Physik).
Die Hermitefunktionen u_n werden beispielsweise zur Untersuchung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators herangezogen.

3. Führt man das Orthonormalisierungsverfahren für den Hilbertraum $L^2((0,\infty))$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

und der linear unabhängigen Menge $\{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ durch, so erhält man ein ONS $\{L_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigen Sie, dass

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right), \qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Beweisen Sie ferner, dass $\{L_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein maximales ONS in $L^2((0,\infty))$ ist.

Bemerkung (Physik).
Die Laguerre–Polynome L_n spielen eine wichtige Rolle bei der Behandlung der Schrödinger–Gleichung für das Wasserstoffatom.

4. Es sei $f \in L^1(S^1)$ und $g(t) := f(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$s_n(f, e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t+s)D_n(s)\,ds \qquad \text{mit } D_n(s) := \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})s\right)}{\sin\frac{s}{2}}\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$t_n(f, e^{it}) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f, e^{it})$$

gilt

$$t_n(f, e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t+s)F_n(s)\,ds \qquad \text{mit } F_n(s) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}s}{\sin\frac{s}{2}}\right)^2\,.$$

(c) Beweisen Sie, dass für jedes $f \in C(S^1)$ gilt $||f - t_n(f;\cdot)||_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. (Dies ist der Konvergenzsatz von Féjer.)

5. Man zeige analog zu Korollar 2.21 die Identität $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

6. Es sei H ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(H)$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(T_n) \subset \mathcal{F}(H)$ mit $||T_n - T|| \to 0$ für $n \to \infty$ gibt.

2.4 Der Rieszsche Darstellungssatz und reproduzierende Kerne

In einem Innenproduktraum V ist für jeden festen Punkt $y \in V$ die Abbildung

$$x \mapsto l(x) := \langle x, y \rangle$$

ein *lineares Funktional*, d.h. $l : V \to \mathbb{K}$ ist linear und skalarwertig. Aufgrund der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung ist dieses Funktional stetig, denn für $x \in V$ gilt

$$|l(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq c \cdot ||x|| \quad \text{mit } c = ||y|| . \tag{2.8}$$

In *Hilberträumen* gilt hiervon auch die Umkehrung:

Satz 2.26 (Darstellungssatz von Riesz).
Es sei H ein Hilbertraum und $l : H \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $y \in H$ mit $l(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in H$. Hierbei gilt $||y|| = ||l||$.

Beweis. Es sei $N := N(l)$ der Nullraum (Kern) von l. Da l stetig ist, ist der Unterraum N abgeschlossen. Der Projektionssatz 2.9 zeigt $H = N \oplus N^\perp$. O.E. sei $l \not\equiv 0$. Somit können wir ein $w \in N^\perp \backslash \{0\}$ wählen. Insbesondere ist $l(w) \neq 0$ und es gilt für alle $x \in H$

$$l\left(x - \frac{l(x)}{l(w)} w\right) = 0 \quad \text{d.h.} \quad x - \frac{l(x)}{l(w)} w \in N \quad \text{und daher} \quad \langle x - \frac{l(x)}{l(w)} w, w \rangle = 0 .$$

Aufgelöst nach $l(x)$ ergibt sich $l(x) = \langle x, y \rangle$ für $y = \frac{\overline{l(w)}}{||w||^2} w$. Daraus folgt $||y|| \leq |l(w)|/||w||$ d.h. $||y|| \leq ||l||$. Mit (2.8) folgt $||l|| = ||y||$. Die Eindeutigkeit von y ist klar. □

Beispiel 2.27.
(i) Fixiere $z_0 \in \mathbb{D}$ und betrachte das Auswertungsfunktional $l : H^2 \to \mathbb{C}$, $l(f) = f(z_0)$. Für $f \in H^2$ mit $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, $z \in \mathbb{D}$, gilt

$$|l(f)| = |f(z_0)| = \left| \sum_{k=0}^\infty a_k z_0^k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^\infty |z_0|^{2k} \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=0}^\infty |z_0|^{2k} \right)^{1/2} \cdot ||f|| .$$

Somit ist l linear und stetig und nach Satz 2.26 existiert ein eindeutiges $k_{z_0} \in H^2$ mit

$$f(z_0) = l(f) = \langle f, k_{z_0} \rangle \quad \text{für alle } f \in H^2 .$$

Korollar 2.22 zeigt

$$k_{z_0}(w) = S_{z_0}(w) = \sum_{k=0}^\infty \overline{z_0}^k w^k \qquad (w \in \mathbb{D}) .$$

(ii) Für den Multiplikationsoperator $M_g : H^2 \to H^2$, $M_g f = g \cdot f$, mit $g \in H^\infty$ gilt $||M_g|| \leq ||g||_\infty$, siehe Beispiel 1.28. Um einzusehen, dass auch $||M_g|| \geq ||g||_\infty$ gilt, betrachten wir $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1$. Dann gilt $M_g^n f = g^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$. Fixiere nun $z_0 \in \mathbb{D}$. Dann gilt nach (i)

$$|g(z_0)|^n = |g^n(z_0)| = |\langle g^n, S_{z_0} \rangle| = |\langle M_g^n f, S_{z_0} \rangle| \leq ||M_g^n f||_2 \cdot ||S_{z_0}||_2 \leq ||M_g||^n \cdot ||S_{z_0}||_2 .$$

Dies impliziert $|g(z_0)| \leq ||M_g||$. Da $z_0 \in \mathbb{D}$ beliebig war, folgt $||g||_\infty \leq ||M_g||$.

Mithilfe des Rieszschen Darstellungssatzes können wir auch Beispiel 2.11 verallgemeinern.

Beispiel 2.28.
Es sei $\emptyset \neq G \subsetneq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $z_0 \in G$ fixiert. Die Bergmansche Ungleichung

$$|f(z_0)| \leq C||f||_2\,, \qquad f \in A^2(G)\,,$$

zeigt, dass das lineare Auswertungsfunktional $f \mapsto f(z_0)$ stetig ist. Nach Satz 2.26 gibt es daher ein $K_{z_0} \in A^2(G)$ mit

$$f(z_0) = \langle f, K_{z_0} \rangle = \int_G f(z)\,\overline{K_{z_0}(z)}\,dz\,, \qquad f \in A^2(G)\,.$$

Die Funktion $(z_0, z) \mapsto K_{z_0}(z)$ heißt Bergman Kern von G.

Bemerkung.
Die **explizite** Berechnung des Bergman Kerns einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{C}$ erweist sich als schwieriges Problem. Man kann mithilfe des Riemannschen Abbildungsssatzes zeigen, dass für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ und einen Punkt $z_0 \in G$ die (eindeutig bestimmte) konforme Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$ mit dem Bergman Kern K_{z_0} von G wie folgt zusammenhängt

$$\varphi'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K_{z_0}(z_0)}}K_{z_0}(z)\,.$$

Vgl. Aufgabe 3.3.4. Als Ausblick sei erwähnt, dass Bergman Räume auf vollständig analoge Weise auch für holomorphe Funktionen von mehreren komplexen Variablen definiert werden können. Auf diese Weise erhält man einen Zugang zu biholomorphen Abbildungen im $\mathbb{C}^n$ für $n > 1$. Bahnbrechende Ergebnisse in diesem Zusammenhang wurden u.a. von Ch. Fefferman (Fields Medaille 1978) erzielt.

Beispiel 2.29 (Schwache Lösungen von Randwertproblemen)**.**
Wir betrachten den Hilbertraum $H := W_0^{1,2}([0,1])$ aus Beispiel 2.6 ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \langle f', g' \rangle_2$ und davon induzierter Norm $||\cdot||$.

(i) In Beispiel 2.6 wurde gezeigt, dass $|f(x)| \leq ||f||$ für alle $f \in H$ und alle $x \in [0,1]$ gilt. Daher ist für $x_0 \in [0,1]$ das Auswertungsfunktional $l : H \to \mathbb{C}$, $l(f) = f(x_0)$, linear und stetig. Somit existiert ein eindeutig bestimmtes $k_{x_0} \in H$ mit

$$f(x_0) = \langle f, k_{x_0} \rangle = \int_0^1 f'(t) \cdot \overline{k'_{x_0}(t)}\,dt$$

für alle $f \in H$. Da für jedes $f \in H$

$$f(x_0) = \int_0^{x_0} (1 - x_0) f'(t)dt - \int_{x_0}^1 x_0 f'(t)dt = \int_0^1 f'(t) g_{x_0}(t)\,dt$$

mit $g_{x_0}(t) = (1 - x_0)$ für $t \in [0, x_0]$ und $g_{x_0}(t) = -x_0$ für $t \in (x_0, 1]$ gilt, folgt

$$k_{x_0}(t) = \begin{cases} (1 - x_0)t & \text{für } t \in [0, x_0] \\ (1 - t)x_0 & \text{für } t \in [x_0, 1]. \end{cases}$$

(ii) Da $|f(x)| \leq ||f||$ für jedes $x \in [0,1]$ gilt, folgt $||f||_2 \leq ||f||$. Daher ist für festes $g \in L^2([0,1])$ das Funktional $l_* : H \to \mathbb{C}$, $l_*(f) := \langle f, g\rangle_2$ wegen $|l_*(f)| \leq ||f||_2 ||g||_2 \leq ||g||_2 \cdot ||f||$ linear und stetig. Nach Satz 2.26 gibt es somit ein eindeutig bestimmtes $u \in H$ mit $\langle f, g\rangle_2 = l_*(f) = \langle f, u\rangle$ für alle $f \in H$. Dies bedeutet, dass

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_0^1 f'(t)\overline{u'(t)}\,dt = \langle f', u'\rangle_2 \qquad \text{für alle } f \in H\,. \tag{S}$$

Gilt nun zusätzlich $u \in C^2([0,1])$, so folgt mit partieller Integration $\langle f, g\rangle_2 = \langle f, -u''\rangle_2$ für alle $f \in H$. Da H dicht in $L^2([0,1])$ liegt, folgt $-u'' = g$. Der Darstellungssatz von Riesz sichert daher die Existenz und Eindeutigkeit einer „schwachen" Lösung des Randwertproblems $-u'' = g$ in $[0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$, d.h. eines $u \in H$ welches der Bedingung (S) genügt.

Bemerkung.
Beispiel 2.29 zeigt einen funktionalanalytischen Zugang zu Randwertproblemen auf, der sich auch als vorzüglich für die Behandlung partieller Differentialgleichungen erweist. Diese und andere funktionalanalytische Methoden sind folglich für das Studium partieller Differentialgleichung unentbehrlich.

Die Beispiele 2.11, 2.28 und 2.29 motivieren folgende Begriffe.

Definition (Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, RKHS, Auswertungsfunktional)**.**
Es sei X eine Menge und $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$–Vektorraum aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K}$. Eine Menge $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$ heißt **Hilbertraum mit reproduzierendem Kern** oder **RKHS** (=reproducing kernel Hilbert space) **auf** X, falls die folgenden Bedingungen gelten:

(a) $\mathcal{H}$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$.

(b) $\mathcal{H}$ ist mit einem Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ausgestattet bzgl. dessen $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist.

(c) Für jedes $x \in X$ ist das Auswertungsfunktional $E_x : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$, $E_x(f) := f(x)$, stetig.

Der Hardy–Raum H^2, der Bergman–Raum $A^2(G)$ und der Sobolev–Raum $W_0^{1,2}([0,1])$ sind Beispiele von RKHS.

Bemerkung 2.30.
Es sei $\mathcal{H}$ ein RKHS *auf X. Dann existiert nach dem Riezschen Darstellungssatz (Satz 2.26) für jeden Punkt $x \in X$ ein eindeutiger Punkt $k_x \in \mathcal{H}$ mit*

$$f(x) = E_x(f) = \langle f, k_x\rangle \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{H}\,.$$

Definition und Bemerkung 2.31 (Reproduzierender Kern). *Es sei $\mathcal{H}$ ein* RKHS *auf X. Für jeden Punkt $x \in X$ heißt $k_x \in \mathcal{H}$* **reproduzierender Kern für** x. *Die Abbildung*

$$K : X \times X \to \mathbb{K}\,, \qquad K(x,y) := k_y(x)$$

heißt **reproduzierender Kern für** $\mathcal{H}$.

Jedes $k_y \in \mathcal{H}$ ist selbst eine Funktion auf X, d.h.

$$K(x,y) = k_y(x) = \langle k_y, k_x \rangle .$$

Es folgt

$$K(x,y) = \langle k_y, k_x \rangle = \overline{\langle k_x, k_y \rangle} = \overline{K(y,x)}$$

im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $K(x,y) = K(y,x)$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$||E_x||^2 = ||k_x||^2 = \langle k_x, k_x \rangle = K(x,x) .$$

Diejenigen Funktionen, die als reproduzierender Kern eines RKHS in Erscheinung treten, lassen sich vollständig charakterisieren. Diesem durchaus erstaunlichen Ergebnis wenden wir uns nun zu. Wir beginnen hierfür mit einigen Beobachtungen.

Proposition 2.32.
Es sei $\mathcal{H}$ ein RKHS *auf X mit reproduzierendem Kern K. Dann ist $S := \operatorname{span}\{k_y = K(\cdot, y) : y \in X\}$ dicht in $\mathcal{H}$.*

Beweis. Es sei $f \in S^\perp$. Dann gilt $0 = \langle f, k_y \rangle = f(y)$ für alle $y \in X$. Somit ist $f \equiv 0$. Bemerkung 2.8 mit Satz 2.9 implizieren $\overline{S} = \mathcal{H}$. $\square$

Lemma 2.33.
Es sei $\mathcal{H}$ ein RKHS *auf X, $f \in \mathcal{H}$ und $(f_n) \subseteq \mathcal{H}$. Falls $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Für $x \in X$ gilt $|f_n(x) - f(x)| = |\langle f_n - f, k_x \rangle| \leq ||f_n - f|| \cdot ||k_x|| \to 0$ für $n \to \infty$. $\square$

Lemma 2.34.
Es sei $\mathcal{H}$ ein RKHS *auf X mit reproduzierendem Kern K. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ die Matrix $(K(x_j, x_k))_{j,k}$ positiv semidefinit.*

Beweis. Wir fixieren $x_1, \ldots, x_n \in X$. Dann gilt für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_j} K(x_j, x_k) = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k k_{x_k}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_{x_j} \rangle = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_{x_j} \right\|^2 \geq 0 .$$

Da auch $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ gilt, folgt dass $(K(x_j, x_k))_{j,k}$ positiv semidefinit ist. $\square$

Definition (Kernfunktion)**.**
Es sei X eine Menge. Eine Funktion $K : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt **Kernfunktion**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n$ die Matrix $(K(x_j, x_k))_{j,k}$ positiv semidefinit ist.

Satz 2.35.
Es sei X eine Menge und $K : X \times X \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Ist K eine Kernfunktion, so existiert ein RKHS *$\mathcal{H}$ auf X mit reproduzierendem Kern K.*

Beweis. Für jedes $y \in X$ sei $k_y : X \to \mathbb{K}$ definiert durch $k_y(x) = K(x,y)$ für alle $x \in X$. Im Hinblick auf Bemerkung 2.31 und Proposition 2.32 sei

$$W := \operatorname{span}\{k_y : y \in X\}$$

und

$$B : W \times W \to \mathbb{C}\,, \qquad B\left(\sum_j \alpha_j k_{y_j}, \sum_k \beta_k k_{y_k}\right) := \sum_{j,k} \alpha_j \overline{\beta_k} K(y_k, y_j)\,.$$

(i) *B ist wohldefiniert:* Es genügt zu zeigen, dass aus $f = \sum_j \alpha_j k_{y_j} = 0$ stets $B(f,g) = B(g,f) = 0$ für alle $g \in W$ folgt. Da W durch die Funktionen k_y aufgespannt wird, genügt es $B(f,k_y) = B(k_y,f) = 0$ für alle $y \in X$ zu zeigen. Dies ist aber klar, da $B(f,k_y) = \sum\limits_j \alpha_j K(y,y_j) = f(y) = 0$ und analog $B(k_y,f) = \overline{f(y)} = 0$.

(ii) *B ist eine positive Sesquilinearform auf W:* Die Sesquilinearität von B ist unmittelbar einsichtig. Es sei $f \in W$. Gilt $B(f,w) = 0$ für alle $w \in W$, so folgt mit der Wahl $w = k_y$, dass $f(y) = 0$. Dies bedeutet, dass $B(f,w) = 0$ für alle $w \in W$ genau dann, wenn $f \equiv 0$. Da die Matrix $(K(y_k,y_j))$ nach Voraussetzung an K stets positiv semidefinit ist, gilt für jedes $f = \sum_j \alpha_j k_{y_j}$ stets $B(f,f) \geq 0$. Somit definiert B eine positive semidefinite Sesquilinearform auf W. Es gilt dann die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung (siehe Bemerkung nach dem Beweis von Satz 2.1). Also folgt aus $B(f,f) = 0$ für $f \in W$, dass $|B(f,w)| = 0$ für alle $w \in W$, und hieraus $f \equiv 0$, wie oben festgestellt. Folglich ist B eine *positive* Sesquilinearform auf W.

(iii) Damit ist (W,B) ein Prähilbertraum, der sich zu einem Hilbertraum $(W_*, \langle\cdot,\cdot\rangle_*)$ vervollständigen lässt, siehe Seite 28. Beachte, jedes Element $f \in W$ identifizieren wir mit dem Element $\hat{f} \in W_*$ und für $f,h \in W$ gilt $B(f,h) = \langle \hat{f}, \hat{h}\rangle_*$. Jedes Element von W_* lässt sich nun wie folgt mit einer *Funktion* auf X identifizieren. Für $\hat{h} \in W_*$ sei

$$h(x) := \langle \hat{h}, \hat{k}_x\rangle_*\,, \qquad x \in X\,,$$

sowie

$$\mathcal{H} := \{h \,:\, \hat{h} \in W_*\}\,.$$

Dann ist $\mathcal{H}$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Abb}(X,\mathbb{K})$. Für jedes $f \in W$ gilt $f(x) = B(f,k_x) = \langle \hat{f}, \hat{k}_x\rangle_*$ für alle $x \in X$, d.h. $W \subseteq \mathcal{H}$. Wir zeigen nun, dass die lineare Abbildung, $W_* \to \mathcal{H}$, $\hat{h} \mapsto h$, bijektiv ist. Dies ist gleichbedeutend mit:

$$h(x) = 0 \text{ für alle } x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{h} = 0\,.$$

Es ist nur "$\Longrightarrow$" zu zeigen. Hierzu sei $h(x) = 0$ für alle $x \in X$. Dies bedeutet $\langle \hat{h}, \hat{k}_x\rangle_* = 0$ für alle $x \in X$. Da die Menge $\{\hat{k}_x \,:\, x \in X\}$ dicht in W_* liegt, folgt $\hat{h} = 0$.

(iv) Durch $\langle h,k\rangle := \langle \hat{h}, \hat{k}\rangle_*$ für $h,k \in \mathcal{H}$ ist daher ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ definiert. Insbesondere liegt W dicht in $\mathcal{H}$. Das Auswertungsfunktional $E_x : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ ist wegen $E_x(h) = h(x) = \langle \hat{h}, \hat{k}_x\rangle_* = \langle h, k_x\rangle$ für jedes $x \in X$ stetig. Somit ist $\mathcal{H}$ ein RKHS auf X mit reproduzierendem Kern k_x für $x \in X$. Da

$$k_y(x) = \langle \hat{k}_y, \hat{k}_x\rangle_* = \langle k_y, k_x\rangle = B(k_y,k_x) = K(x,y)$$

für alle $x,y \in X$ ist K der reproduzierende Kern für $\mathcal{H}$.

□

Der RKHS $\mathcal{H}$ in Satz 2.35 ist nach Aufgabe 2.4.3 (d) eindeutig durch die Kernfunktion $K : X \times X \to \mathbb{C}$ bestimmt. Wir bezeichnen ihn mit $H(K)$.

Hilberträume mit reproduzierendem Kern wurden bereits von Mercer (1909) im Zusammenhang mit Integraloperatoren und von Bergman (1922) zur Behandlung von Fragestellungen der Komplexen Analysis betrachtet. Die Entwicklung der zugrundeliegenden abstrakten Theorie der RKHS begann ca. 1950 und dauert bis heute an. Diese Theorie zeichnet sich durch eine Vielzahl von eleganten Querverbindungen zu vielen anderen Gebieten der Mathematik sowie großem Anwendungspotential aus. U.a. werden RKHS in neuester Zeit intensiv für Probleme im Bereich des maschinellen Lernens eingesetzt.

Bemerkung.

(a) Es sei $X = [0,1]$ und $K : X \times X \to \mathbb{C}$ mit $K(x,y) = 0$ für $x \neq y$ und $K(x,y) = 1$ für $x = y$. Dann ist $H(K)$ nicht separabel.

(b) Es sei (X,d) ein separabler metrischer Raum und $K : X \times X \to \mathbb{C}$ eine stetige Kernfunktion. Dann ist $H(K)$ separabel.

Aufgaben für §2.4

1. Es sei H ein Hilbertraum und $H' := \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$. Wird die Operatornorm $||\cdot||$ auf H' durch ein Skalarprodukt induziert?

2. (Das "Spanning criterion" für Hilberträume)

   Es sei H ein Hilbertraum, Y eine Teilmenge von H sowie $x \in X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

   (I) $x \in \overline{\text{span } Y}$

   (II) Für jedes stetige lineare Funktional $l : H \to \mathbb{K}$ mit $l(y) = 0$ für alle $y \in Y$ gilt $l(x) = 0$.

3. Es sei $\mathcal{H}$ ein RKHS auf X mit reproduzierendem Kern K. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Es sei Y ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass dann auch Y ein RKHS ist.

   (b) Es seien nun $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ jeweils RKHS auf einer Menge X mit reproduzierenden Kernen K_1 und K_2. Es gelte $K_1 = K_2$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

4. Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und (h_j) ein maximales Orthonormalsystem von $A^2(G)$. Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{j=0}^{\infty} \overline{h_j(z_0)} h_j(z)$$
   gegen den Bergman Kern $K_{z_0}(z)$ von G konvergiert.

   Ein tiefliegender Satz von Farrell (1935) und Walsh (1935) besagt, dass für Jordangebiete G das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt angwandt auf $\{z^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ im Hilbertraum $A^2(G)$ ein maximales ONS von $A^2(G)$ liefert. Dies ermöglicht einen funktionalanalytischen Zugang zur Berechnung konformer Abbildungen von G auf $\mathbb{D}$, siehe Beispiel 2.28.

5. Formulieren und beweisen Sie eine Variante von Aufgabe 2.4.4 für abstrakte RKHS.

2.5 * Der Satz von Lax–Milgram

Die folgende Verallgemeinerung des Darstellungssatzes von Riesz findet Anwendung bei der Untersuchung partieller Differentialgleichungen.

Satz 2.36 (Satz von Lax–Milgram).
Es sei V ein Hilbertraum und $B : V \times V \to \mathbb{K}$ sei eine stetige, koerzitive Sesquilinearform, d.h.

(i) $B(\cdot, y)$ ist linear für jedes $y \in V$ und $y \mapsto B(x, \overline{y})$ ist linear für jedes $x \in V$.

(ii) Es gibt Konstanten $a, b > 0$ mit $|B(x,y)| \leq a||x||\,||y||$ und $B(x,x) \geq b||x||^2$ für alle $x, y \in V$.

Dann gibt es für jedes stetige lineare Funktional $l : V \to \mathbb{K}$ einen eindeutig bestimmten Punkt $y \in V$ mit $l(x) = B(x,y)$ für alle $x \in V$. Ist B darüber hinaus hermitesch (d.h. $\overline{B(v,u)} = B(u,v)$ für alle $u, v \in V$), so ist y charakterisiert durch das „Dirichlet–Prinzip“: y minimiert das Energiefunktional

$$I : V \to \mathbb{R}, \qquad I(x) := \frac{1}{2}B(x,x) - \operatorname{Re} l(x), \quad x \in V.$$

Beweis. (a) Fixiere $y \in V$. Da $B(\cdot, y)$ ein stetiges lineares Funktional auf V ist, gibt es nach Satz 2.26 einen *eindeutig* bestimmten Punkt $z = z_y$ mit $B(x,y) = \langle x, z_y \rangle$ für alle $x \in V$. Die Menge $U := \{z_y : y \in V\}$ ist ein Unterraum von V. Wir zeigen, dass dieser Unterraum abgeschlossen ist. Dazu sei $z_{y_n} \to z \in V$ für eine Folge $(y_n) \subset V$. Dann gilt

$$b||y_n - y_m||^2 \leq |B(y_n - y_m, y_n - y_m)| = |\langle y_n - y_m, z_{y_n} - z_{y_m} \rangle| \leq ||y_n - y_m|| \cdot ||z_{y_n} - z_{y_m}||.$$

Somit ist (y_n) eine Cauchyfolge in V mit Limes $y \in V$. Also gilt

$$B(x,y) \leftarrow B(x, y_n) = \langle x, z_{y_n} \rangle \to \langle x, z \rangle, \qquad x \in V.$$

Es folgt $z \in U$ und U ist daher abgeschlossen. Wäre $U \neq V$, so gäbe es nach Satz 2.9 einen Punkt $x \in U^\perp \setminus \{0\}$, d.h. $B(x,y) = 0$ für alle $y \in V$. Setzt man jetzt aber $y = x$, so ergibt sich $0 = B(x,x) \geq b||x||^2 \neq 0$, Widerspruch. Demnach ist $U = V$. Damit gibt es zu jedem $z \in V$ einen Punkt $y \in V$ mit $B(x,y) = \langle x, z \rangle$ für alle $x \in V$. Dieser Punkt y ist eindeutig durch z bestimmt. Da es zu jedem stetigen linearen Funktional $l : V \to \mathbb{K}$ aufgrund von Satz 2.26 einen eindeutig bestimmten Punkt $z \in V$ mit $l = \langle \cdot, z \rangle$ gibt, folgt hieraus die erste Behauptung.

(b) Ist B hermitesch, so folgt für alle $x \in V$

$$\begin{aligned} 2I(x) &= B(x,x) - 2\operatorname{Re} l(x) = B(x,x) - B(x,y) - B(y,x) \\ &= B(x-y, x-y) - B(y,y) \geq -B(y,y) = 2I(y). \end{aligned}$$

Dies ist gerade das Dirichlet–Prinzip. Umgekehrt folgt aus diesem

$$0 \leq I(y + tx) - I(y) = \operatorname{Re}\left[t\, B(x,y)\right] + \frac{|t|^2}{4} B(x,x) - \operatorname{Re}\left[t\, l(x)\right], \quad t \in \mathbb{K},$$

d.h. $B(x,y) = l(x)$ für alle $x \in V$. □

Bemerkung.
Man nennt

$$B(x,y) = l(x) \text{ für alle } x \in V$$

die Variationsgleichung oder Euler Gleichung des Optimierungsproblems

$$\min_{x \in V} I(x)$$

für das Energiefunktional $I(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - \operatorname{Re} l(x)$.

Aufgaben

1. (A priori Abschätzung im Satz von Lax–Milgram)

   Es seien V ein Hilbertraum und $B : V \times V \to \mathbb{K}$ eine stetige, koerzitive Bilinearform. Nach dem Satz von Lax–Milgram gibt es für alle $z \in V$ genau einen Punkt $y(z) \in V$ mit $B(x, y(z)) = \langle x, z \rangle$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt mit $||y(z)|| \leq c||z||$ für alle $z \in V$. Ist die Abbildung $V \ni z \mapsto y(z) \in V$ linear?

2. (Das Verfahren von Ritz)

   Es sei V ein Hilbertraum und V_n, $n \in \mathbb{N}$, endlich–dimensionale Unterräume mit $V_n \subset V_{n+1}$ und

   $$V = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n}\,.$$

   Ferner sei $B : V \times V \to \mathbb{K}$ eine stetige, koerzitive Bilinearform, $l : V \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional und $I : V \to \mathbb{R}$, $I(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - \operatorname{Re} l(x)$ das zugehörige Energiefunktional. Nach dem Satz von Lax–Milgram gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $y \in V$ mit $l(x) = B(x,y)$ für alle $x \in V$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen eindeutig bestimmten Punkt $y_n \in V_n$ mit $l(x) = B(x, y_n)$ für alle $x \in V_n$.

   (a) Zeigen Sie, dass $y_n \to y$ in V mit der Konvergenzrate

   $$||y_n - y|| \leq \frac{a}{b} \inf\{||y - w|| \,:\, w \in V_n\}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

   (Bezeichnungen wie in Satz 2.36.)

   (b) Nun sei B symmetrisch. Falls $I(x) \geq \beta$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$ und alle $x \in V$, so zeige man die Fehlerabschätzung

   $$\frac{b}{2}||y - y_n||^2 \leq I(y_n) - \beta\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Kapitel 3

Operatortheorie

3.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit

Einige der Hauptsätze über stetige Operatoren in *Banachräumen* beruhen auf dem folgenden

Satz 3.1 (Satz von Baire 1899).
Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und A_n, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Mengen in X mit $X := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ offen. Dann enthält eine der Mengen A_n eine offene[1] Kugel.

Wir erinnern an die Schreibweise $B(x_0, r) = \{x \in X \,:\, d(x, x_0) < r\}$ für offene Kugeln.

Beweis. Wir nehmen an, keine der Mengen A_n enthalte eine offene Kugel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede offene (nichtleere) Menge $U \subseteq X$ ist $U \backslash A_n$ dann offen und nichtleer. Folglich gibt es eine abgeschlossene Kugel $\overline{B(x,r)} \subset U \backslash A_n$ mit $0 < r \leq 1/n$. Wähle $B(x_0, r_0) \subseteq X$ beliebig. Wir können dann induktiv offene Kugeln $B(x_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \backslash A_n\,, \qquad 0 < r_n \leq 1/n,$$

wählen. Die Folge (x_n) ist dann eine Cauchyfolge mit Limes $x \in G$, da $x_m \in \overline{B(x_n, r_n)}$ für alle $m \geq n$ und $r_n \leq 1/n$. Da $x \in \overline{B(x_n, r_n)}$ und $\overline{B(x_n, r_n)} \cap A_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = G$. Widerspruch! $\square$

Bemerkung (Wozu hat Baire den "Satz von Baire" bewiesen?).
Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \end{cases}$$

ist **genau** auf der Menge $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ unstetig (siehe z.B. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 8. Auflage, 1989, S. 213). Es war lange Zeit ein offenes Problem, eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zu finden, die **genau** auf der Menge $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ unstetig ist. Baire hat seinen Satz (für den Fall $X = \mathbb{R}^n$) bewiesen, um zu zeigen, dass es eine solche Funktion nicht gibt! Einen Vorläufer von Satz 3.1 (für den Fall $X = \mathbb{R}$) hatte bereits Osgood 1897 gefunden und damit eine Variante von Satz 3.2 abgeleitet. Den allgemeinen Fall eines vollständigen metrischen Raums haben 1930 unabhängig voneinander Kuratowski und Banach behandelt.

Die Folge $f_n(x) := n(1 - |nx - 1|)\chi_{[0,2/n]}(x)$ ist punktweise beschränkt auf $[0,1]$, aber wegen $||f_n||_\infty = n$ unbeschränkt in $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$. Daher ist der folgende Satz bemerkenswert:

[1] und nicht–leere

Satz 3.2 (Satz von Osgood 1897).
Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $(Y,||\cdot||)$ ein normierter Raum und $\mathcal{F}\subset\{f:X\to Y\,\text{stetig}\}$ sei punktweise beschränkt, d.h.

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}||f(x)||\le M_x<+\infty \text{ für jedes } x\in X\,.$$

Dann gibt es eine nichtleere offene Kugel U in X und eine Konstante $C>0$ mit $||f(x)||\le C$ für alle $x\in U$ und alle $f\in\mathcal{F}$.

Beweis. Die Mengen

$$A_n:=\bigcap_{f\in\mathcal{F}}\{x\in X\,:\,||f(x)||\le n\}$$

sind abgeschlossen und $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n=X$. Nach dem Satz von Baire enthält mindestens eine der Mengen A_n eine offene Kugel. □

Bemerkung (Punktweise vs. gleichmäßige Konvergenz).
Osgood hat seinen Satz verwendet, um folgende bemerkenswerte Konvergenzaussage für holomorphe Funktionen abzuleiten: Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und (f_n) eine auf U punktweise konvergente Folge holomorpher Funktionen auf U. Dann gibt es eine offene und dichte Teilmenge U' von U, so dass (f_n) auf U' kompakt konvergiert! Wendet man Satz 3.2 auf die Familie $\mathcal{F}:=\{f_n|_K\,:\,n\in\mathbb{N}\}$ für eine kompakte Kreisscheibe $K\subseteq U$ an, so folgt nämlich, dass jede solche Kreisscheibe eine offene Kreisschiebe enthält auf der die Familie $\mathcal{F}$ beschränkt ist. Die Vereinigung all dieser offenen Kreisscheiben ist eine offene und dichte Teilmenge U' von U und $\mathcal{F}$ ist auf U' konstruktionsgemäß lokal beschränkt. Der Satz von Vitali zeigt daher die Behauptung.

Satz 3.3 (Satz von Banach–Steinhaus 1927).
Es sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Es sei $\mathcal{T}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ mit

$$\sup_{T\in\mathcal{T}}||Tx||<+\infty\qquad\text{für alle } x\in X\,,$$

d.h. $\mathcal{T}$ ist punktweise beschränkt. Dann gilt

$$\sup_{T\in\mathcal{T}}||T||<+\infty\,,$$

d.h. $\mathcal{T}$ ist beschränkt in $\mathcal{L}(X,Y)$.

Kurz: *Eine punktweise beschränkte Familie stetig linearer Operatoren $T:X\to Y$ ist auch bzgl. der Operatornorm beschränkt, falls X vollständig ist.*

Beweis. Nach dem Satz von Osgood gibt es eine offene Kugel $B(x_0,r)\subset X$ und eine Konstante $C>0$ mit $||Ty||\le C$ für alle $T\in\mathcal{T}$ und alle $y\in B(x_0,r)$. Für alle $x\in X$ mit $||x||\le 1$ ist

$$y:=x_0+\frac{r}{2}x\in B(x_0,r),$$

d.h. $||Tx||=||Ty-Tx_0||/r\le 2C/r$. Es folgt $||T||\le 4C/r$ für alle $T\in\mathcal{T}$. □

Bemerkung.
Satz 3.3 ist im Allg. nicht richtig, wenn X nicht vollständig ist. Wähle z.B. $(X,||\cdot||)=(\mathbb{C}_0^\infty,||\cdot||_\infty)$, $(Y,||\cdot||)=(\mathbb{C},|\cdot|)$ und $T_n:\mathbb{C}_0^\infty\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$(x_j)\mapsto x_1+x_2+\cdots+x_n$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_0^\infty, \mathbb{C})$ mit $||T_n|| = n$, also $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| = +\infty$. Für jedes feste $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$ gilt jedoch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n x|| = |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq k\,||x||\,.$$

Korollar 3.4.
Es sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Ferner sei $(T_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine punktweise konvergente Folge stetiger Operatoren, d.h. $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ existiere für alle $x \in X$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Beweis. Zunächst ist $T : X \to Y$ sicher linear. Die Beschränktheit von T folgt aus dem Satz von Banach–Steinhaus, denn $\mathcal{T} := \{T_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ ist punktweise beschränkt, da $(T_n x)_n$ für jedes $x \in X$ konvergiert:

$$||Tx|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n x|| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| \cdot ||x||$$

□

Bemerkung.
In Korollar 3.4 gilt $||T|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||$, aber i.a. gilt nicht(!) $||T|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n||$.

Beispiel 3.5.
Für $f \in L^2(\partial\mathbb{D})$ und $g_f(t) := f(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$, zeigt die geometrische Summenformel, dass sich das Fourierpolynom $s_n(f,\cdot)$ von f vom Grad n in der Form

$$s_n(f, e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_f(t+s) D_n(s)\, ds \quad \text{mit} \quad D_n(s) := \sum_{k=-n}^{n} e^{-iks} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})s\right)}{\sin\frac{s}{2}}$$

darstellen lässt (D_n heißt n-ter Dirichlet–Kern). Für den Operator $T_n : C(\partial\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$, $T_n f := s_n(f,1)$, gilt folglich

$$||T_n|| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})s\right)}{\sin\frac{s}{2}}\right| ds\,,$$

wobei $||T_n|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, denn

$$\begin{aligned} ||T_n|| &\geq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin\left((n+1/2)s\right)|}{s}\, ds = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\, dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,. \end{aligned}$$

Satz 3.3 impliziert daher, dass es (mindestens) eine Funktion $f \in C(\partial\mathbb{D})$ gibt, deren Fourierreihe an der Stelle 1 divergiert.

Bemerkung.
Ist $f \in C(\partial\mathbb{D})$ von beschränkter Variation (dies ist beispielsweise für alle $f \in C^1(\partial\mathbb{D})$ erfüllt), so konvergiert die Fourierreihe sogar gleichmäßig gegen f (siehe z.B. Heuser, *Analysis II*, Satz 137.1). Mithilfe des Riemannschen Abbildungssatzes haben W. Jurkat und D. Waterman 1989 gezeigt, dass es zu jedem $f \in C(\partial\mathbb{D})$ einen Homöomorphimus $\phi : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ gibt, so dass $f \circ \phi$ von beschränkter Variation ist. Insbesondere lässt sich daher jede stetige Funktion $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ so „umparametrisieren“, dass ihre Fourierreihe gleichmäßig konvergiert (Satz von Pál (1914), H. Bohr (1935) und Kahane & Katznelson (1983)).

Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass eine Darstellung $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit abgeschlossenen Mengen $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nicht möglich ist.

2. Es sei X ein unendlich–dimensionaler Banachraum. Zeigen Sie, dass X keine abzählbare Basis (im Sinne der Linearen Algebra) besitzt. (Hinweis: Satz von Baire)

3. Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stetig und $\lim_{n\to\infty} f(nt) = 0$ für alle $t > 0$. Zeigen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

   (Hinweis: Für fixiertes $\varepsilon > 0$ betrachte man $A_n := \bigcap\limits_{k\geq n} \{t \in [0, \infty) : |f(kt)| \leq \varepsilon\}$.)

4. Zeigen Sie, dass die Menge

   $$E := \{f \in C([a, b]) \, : \, f \text{ ist an keiner Stelle differenzierbar}\}$$

   dicht in $(C([a, b]), ||\cdot||_\infty)$ liegt. (Hinweis: Satz von Baire)

5. Es seien X und Y Banachräume. Man zeige, dass eine Folge $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ genau dann punktweise gegen ein $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ konvergiert, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

   (a) $(||T_n||)$ ist beschränkt;

   (b) $(T_n x)$ konvergiert für alle x aus einer in X dichten Menge.

6. Es sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ sei punktweise konvergent gegen $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Zeigen Sie $||T|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||$ und belegen Sie anhand eines Beispiels, dass in dieser Ungleichung i.a. keine Gleichheit gilt.

7. Es seien X und Y reelle Banachräume und $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ sei bilinear. Ferner sei $B(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ stetig für jedes $y \in Y$ und $B(x, \cdot) : Y \to \mathbb{R}$ sei stetig für jedes $x \in X$. Zeigen Sie, dass $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetig ist. (Hinweis: Satz von Banach–Steinhaus)

8. (Projekt)

   Zeigen Sie, dass es differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die auf keinem Intervall monoton sind.

   (Siehe: C. Weil, On nowhere monotone functions, Proc. Amer. Math. Soc. **56**, 388–389, 1974)

3.2 Der Satz von der offenen Abbildung

Beispiel 3.6.
Auf $X := C([0,1])$ sind die beiden Normen $||\cdot||_\infty$ und $||\cdot||_1$ nicht äquivalent: Es gilt zwar $||f||_1 \leq C||f||_\infty$ für alle $f \in X$ für $C = 1$, jedoch zeigt die Folge $f_n(t) = t^n$, dass es keine Konstante $c > 0$ gibt mit $||f||_1 \geq c||f||_\infty$ für alle $f \in X$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die identische Abbildung von $(X, ||\cdot||_\infty)$ nach $(X, ||\cdot||_1)$ stetig ist, ihre Umkehrabbildung jedoch nicht! In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass dieses "pathologische" Beispiel nur deshalb möglich ist, weil $(C([0,1]), ||\cdot||_1)$ nicht *vollständig ist.*

Lemma 3.7 (Kontrollierte Fast–Surjektivität impliziert Surjektivität).
Es sei X ein Banachraum, F ein normierter Raum und $T \in \mathcal{L}(X,F)$. Ferner seien $0 \leq L < 1$ und $c > 0$ derart, dass zu jedem $y \in F$ mit $||y|| \leq 1$ ein $x \in X$ mit $||x|| \leq c$ existiert, so dass

$$||Tx - y|| \leq L\,.$$

Dann gibt es zu jedem $y \in F$ ein $x \in X$ mit $Tx = y$ und $||x|| \leq \frac{c}{1-L}||y||$.

Beweis. O.E. sei $0 < L < 1$. Es sei $y \in F$, wobei es genügt den Fall $||y|| = 1$ zu betrachten. Setze $y_1 := y$. Nach Voraussetzung gibt es ein $x_1 \in X$ mit $||x_1|| \leq c$ und $||y_1 - Tx_1|| \leq L$, d.h. $y_2 := (y_1 - Tx_1)/L \in F$ mit $||y_2|| \leq 1$. Wieder nach Voraussetzung gibt es ein $x_2 \in X$ mit $||x_2|| \leq c$ und $||y_2 - Tx_2|| \leq L$, d.h. $||y - Tx_1 - L\cdot Tx_2|| \leq L^2$. So fortfahrend, definieren wir $|||y_n|| \leq 1$ und $||x_n|| \leq c$ rekursiv durch

$$y_n := \frac{y_{n-1} - Tx_{n-1}}{L}\,, \qquad ||Tx_n - y_n|| \leq L\,.$$

Dann gilt konstruktionsgemäß

$$\left|\left| y - \sum_{j=1}^{n} L^{j-1} Tx_j \right|\right| \leq L^n\,.$$

Da X ein Banachraum ist und $||L^{j-1}x_j|| \leq L^{j-1}c$ gilt, konvergiert die Reihe

$$x := \sum_{j=1}^{\infty} L^{j-1}x_j \in X \qquad \text{mit} \qquad ||x|| \leq \sum_{j=1}^{\infty} cL^{j-1} = \frac{c}{1-L}\,,$$

und es gilt $Tx = y$. □

Korollar 3.8.
Es sei X ein Banachraum, F ein normierter Raum und $T \in \mathcal{L}(X,F)$. Falls ein $c > 0$ existiert derart, dass

$$\overline{B(0,1)} \subseteq \overline{T(B(0,c))}\,,$$

so gilt

$$B(0,1) \subseteq T\left(B\Big(0, \frac{c}{1-L}\Big)\right)$$

für jedes $L \in (0,1)$.

Beweis. Wähle $0 < L < 1$. Zu jedem $y \in F$ mit $||y|| \leq 1$ existiert nach Voraussetzung ein $x \in B(0, c)$ mit $||Tx - y|| < L$. Nach Lemma 3.7 existiert daher zu jedem $y \in F$ mit $||y|| < 1$ ein $x \in X$ mit $||x|| < c/(1 - L)$. □

Korollar 3.9.
Es sei X ein Banachraum, F ein normierter Raum und $T \in \mathcal{L}(X, F)$ mit

$$T\left(\overline{B(0,1)}\right) \supseteq \overline{B(0,r)} \tag{3.1}$$

für ein $r > 0$. Dann gilt für alle $S \in \mathcal{L}(X, F)$ mit $||S - T|| < r$, dass

$$S\left(\overline{B(0,1)}\right) \supseteq \overline{B(0, r - ||S - T||)}\,. \tag{3.2}$$

Beweis. Es sei $L := ||S - T||/r < 1$. Beachte, (3.1) ist gleichbedeutend zu

$$T\left(\overline{B(0,1/r)}\right) \supseteq \overline{B(0,1)}\,.$$

Daher existiert zu $y \in F$ mit $||y|| \leq 1$ ein $x \in X$ mit $||x|| \leq 1/r$ und $Tx = y$, d.h. $||Sx - y|| = ||(T - S)x|| \leq ||T - S||/r = L$. Lemma 3.7 (mit $c = 1/r$) impliziert daher

$$S\left(\overline{B(0,(r - ||S - T||)^{-1})}\right) \supseteq \overline{B(0,1)}\,.$$

Folglich gilt (3.2). □

Satz 3.10.
Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv. Dann gibt es ein $r > 0$ mit

$$T(B(0,1)) \supseteq B(0,r).$$

Beweis. (a) Da T surjektiv ist, ist Y die Vereinigung der abgeschlossenen Mengen $A_n := \overline{T(B(0,n))}$, $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Baire folgt, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass A_{n_0} eine offene Kugel $B(y_0, \varepsilon_0) \subseteq Y$, $\varepsilon_0 > 0$, enthält, d.h.

$$B(y_0, \varepsilon_0) \subseteq \overline{T(B(0,n_0))}\,.$$

Zu y_0 gibt es ein $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = y_0$.

(b) Wir behaupten $\overline{T(B(0,n_0))} \supseteq B(0,\delta)$ für $\delta := \varepsilon_0 n_0/(||x_0|| + n_0)$.
Dazu beachten wir, dass für $y \in B(0,\delta)$ gilt

$$\tilde{y} := y_0 + \frac{\varepsilon_0}{\delta} y \in B(y_0, \varepsilon_0)\,.$$

Nach (a) existiert eine Folge $(x_j) \subset B(0, n_0)$ derart, dass $Tx_j \to \tilde{y}$. Es folgt

$$\tilde{x}_j := \frac{\delta}{\varepsilon_0}(x_j - x_0) \in B(0, n_0)$$

und $T\tilde{x}_j \to y$, d.h. $y \in \overline{T(B(0,n_0))}$.

(c) Somit sind die Voraussetzungen von Korollar 3.8 erfüllt und für jedes $L \in (0,1)$ folgt $B(0, \delta(1 - L)/n_0)) \subseteq T(B(0,1))$. □

Satz 3.11 (Satz von der offenen Abbildung; Open Mapping Theorem (Schauder 1930)).
Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjektiv. Dann ist T offen, d.h. T bildet offene Mengen in X auf offene Mengen in Y ab.

Beweis. Es sei $U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$, offen und $y_0 \in T(U)$, d.h. $y_0 = Tx_0$ für ein $x_0 \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $R > 0$ mit $B(x_0,R) \subseteq U$. Die Abbildung $\tilde{T}(x) := T(x_0 + Rx) - y_0$ ist linear, stetig und surjektiv. Also gibt es nach Satz 3.10 ein $r > 0$ mit $\tilde{T}(B(0,1)) \supseteq B(0,r)$. Dies bedeutet $T(U) \supseteq T(B(x_0,R)) \supseteq B(y_0,r)$. Damit ist $T(U)$ offen. □

Korollar 3.12 (Satz von der stetigen Inversen; Bounded Inverse Theorem (Banach 1929)).
Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv. Dann ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Beweis. Es sei $U \subseteq X$ offen. Dann gilt $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$. Nach Satz 3.11 ist $T(U)$ offen. □

Beispiel 3.13 (Quotientenräume).
Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjektiv. Dann ist $N := N(T)$ abgeschlossen. Somit ist der Quotientenraum X/N mit $||x+N||_* := \inf\{||x-y|| \,:\, y \in N\}$ ein Banachraum. Es sei $\pi : X \to X/N$, $\pi(x) = x + N$ die kanonische Projektion. Definiert man $\tilde{T} : X/N \to Y$, $\tilde{T}(x+N) = T(x)$, so ist $\tilde{T}$ linear, bijektiv und stetig mit $||\tilde{T}|| \leq ||T||$. Nach Korollar 3.12 ist $\tilde{T}^{-1}$ stetig. Somit sind X/N und Y als Banachräume isomorph, d.h. es gibt es eine bijektive stetige Abbildung von X/N auf Y mit stetiger Umkehrabbildung. Ist insbesondere $l \in \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ nicht die Nullabbildung, so ist $X/N(l)$ als Banachraum isomorph zu $\mathbb{K}$.

Bemerkung.
Mithilfe von Beispiel 3.13 folgt, dass Korollar 3.12 Satz 3.11 impliziert. Um dies einzusehen beachte man, dass für eine offene Menge U in X die Menge $\pi(U)$ offen in X/N ist. Somit ist $\tilde{T}(\pi(U)) = T(U)$ offen, da $\tilde{T}^{-1}$ nach Korollar 3.12 stetig ist.

Korollar 3.14 (Satz vom abgeschlossenen Bild; Closed Range Theorem).
Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sei injektiv. Dann gilt:

$$R(T) \text{ ist abgeschlossen.} \iff \text{Es gibt ein } c > 0 \text{ mit } ||Tx|| \geq c||x|| \text{ für alle } x \in X\,.$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ Es sei $(Tx_n) \subseteq R(T)$ mit $Tx_n \to y \in Y$. Dann ist $(Tx_n) \subseteq Y$ eine Cauchy–Folge in Y und wegen $||x_n - x_m|| \leq c^{-1}||Tx_n - Tx_m||$ ist auch (x_n) eine Cauchy–Folge im vollständigen Raum X, also konvergent mit Limes $x \in X$. Da T stetig ist, folgt $Tx_n \to Tx$, also $y = Tx \in R(T)$. Folglich ist $R(T)$ abgeschlossen.

„$\Rightarrow$“ $R(T)$ ist als abgeschlossener Unterraum des Banachraums Y selbst ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X, R(T))$ bijektiv. Nach Korollar 3.12 ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(R(T),X)$, also gibt es ein $C > 0$ mit $||T^{-1}y|| \leq C||y||$ für alle $y \in R(T)$. Setzt man $c := C^{-1}$, so folgt $||Tx|| \geq c||x||$ für alle $x \in X$. □

Korollar 3.15 (Satz vom abgeschlossenen Graphen; Closed Graph Theorem (Banach 1932)).
Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ sei linear. Dann sind äquivalent.

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(b) Der Graph

$$\operatorname{graph}(T) := \{(x, Tx) \, : \, x \in X\}$$

von T ist abgeschlossen im Banachraum $X \times Y$ ausgestattet mit der sog. Graphennorm $||(x, y)|| = ||x||_X + ||y||_Y$.

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“ Sei $((x_n, Tx_n)) \subseteq \operatorname{graph}(T)$ mit $(x_n, Tx_n) \to (x, y) \in X \times Y$. Dann ist $Tx_n \to y \in Y$ und $x_n \to x \in X$. Da T stetig ist, gilt $Tx_n \to Tx$, also $y = Tx$, d.h. $(x, y) = (x, Tx) \in \operatorname{graph}(T)$.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“ Da T linear ist, ist $\operatorname{graph}(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$, also ein Banachraum. Wir betrachten die beiden stetigen linearen Abbildungen $P_X : X \times Y \to X$, $P_X(x, y) = x$ für alle $(x, y) \in X \times Y$ bzw. $P_Y : X \times Y \to Y$, $P_Y(x, y) = y$ für alle $(x, y) \in X \times Y$. Schränkt man P_X auf $\operatorname{graph}(T)$ ein, so ist $P_X : \operatorname{graph}(T) \to X$ stetig, surjektiv und auch injektiv, denn aus $P_X(x, y) = P_X(\tilde{x}, \tilde{y})$ für $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \operatorname{graph}(T)$ folgt $x = \tilde{x}$ und wegen $y = Tx$ bzw. $\tilde{y} = T\tilde{x}$ dann auch $y = Tx = T\tilde{x} = \tilde{y}$. Aus dem Satz von der beschränkten Inversen ergibt sich somit $P_X^{-1} \in \mathcal{L}(X, \operatorname{graph}(T))$. Daher ist auch $P_Y \circ P_X^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Wegen $(P_Y \circ P_X^{-1})(x) = P_Y(x, Tx) = Tx$ für alle $x \in X$ ist also $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. □

Bemerkung.
Korollar 3.15 impliziert Korollar 3.12. Nach Voraussetzung ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv wobei X und Y Banachräume sind. Somit ist nach Korollar 3.15 $\operatorname{graph}(T) = \{(x, Tx) \, : \, x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times Y$. Daher ist auch $\operatorname{graph}(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y) \, : y \in Y\} = \{(Tx, x) \, : x \in X\}$ abgeschlossen in $Y \times X$. Korollar 3.15 zeigt $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Beispiel 3.16 (Multiplikationsoperatoren auf H^2).
Es sei $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ und $M_g(f) = g \cdot f$ für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Dann gilt

$$M_g(H^2) \subseteq H^2 \quad \Longleftrightarrow \quad g \in H^\infty .$$

In disem Fall ist $M_g : H^2 \to H^2$ stetig und $||M_g|| = ||g||_\infty$.

Beweis. “$\Longleftarrow$”: Siehe Beispiel 1.28.

“$\Longrightarrow$”: Man beachte $g \in H^2$, da $1 \in H^2$. Wir betrachten den Graphen

$$\operatorname{graph}(M_g) = \{(f, h) \in H^2 \times H^2 \, : h = gf\}$$

und zeigen $\operatorname{graph}(M_g)$ ist abgeschlossen. Hierfür sei $((f_n, h_n)) \subseteq \operatorname{graph}(M_g)$ mit $(f_n, h_n) \to (f, h) \in H^2 \times H^2$. Somit konvergiert $f_n \to f$ und $h_n \to h$ in H^2. Da H^2 ein RKHS ist, folgt nach Lemma 2.33, dass (f_n) und (h_n) punktweise in $\mathbb{D}$ gegen f bzw. h konvergieren. Dies impliziert $h = g \cdot f$ und somit gilt $(f,h) \in \mathrm{graph}(M_g)$. Nach Korollar 3.15 folgt nun, dass $M_g : H^2 \to H^2$ stetig ist. O.E. sei $||M_g|| = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 \geq ||M_g^n 1||_2^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^{2n}\, dt$$

für jedes $r \in (0,1)$, siehe Beispiel 1.6. Folglich ist $||g||_\infty \leq 1$. Also gilt $g \in H^\infty$ und $||g||_\infty \leq ||M_g||$.
Beispiel 1.28 zeigt $||M_g|| \leq ||g||_\infty$. Zusammen folgt $||M_g|| = ||g||_\infty$. □

Aufgaben

1. (Zwei–Normen Satz)
Es seien $(X, ||\cdot||)$ und $(X, ||\cdot||_1)$ Banachräume und es gebe ein $c > 0$ mit $||x||_1 \leq c||x||$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass es dann ein $C > 0$ gibt mit $||x|| \leq C||x||_1$ für alle $x \in X$. (Hinweis: Open Mapping Theorem)

2. Man gebe ein explizites Beispiel eines normierten Raums X, eines Banachraums Y und eines $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\overline{T(B(0,1))} \supseteq B(0,\delta)$ für ein $\delta > 0$, aber $T(B(0,1)) \not\supset B(0,\delta')$ für alle $\delta' > 0$.

3. * (Satz von Hellinger–Toeplitz 1910)
Es sei X ein Hilbertraum und die lineare Abbildung $T : X \to X$ sei symmetrisch, d.h.
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \text{für alle } x, y \in X\,.$$
Zeigen Sie, dass T stetig ist. (Hinweis: Closed Graph Theorem)

4. Es sei X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass die Menge aller *surjektiven* $T \in \mathcal{L}(X)$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(X)$ bildet.

5. Für eine Folge $y := (y_n)$ in $\mathbb{C}$ sei $M_y(x_j) := (y_j x_j)$ für jede komplexe Folge (x_j). Zeigen Sie: $M_y(l^p) \subseteq l^p$ für $p \in [1,\infty) \iff y \in l^\infty$.

6. * (Satz vom abgeschlossenen Bild, Closed Range Theorem)
Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sei injektiv. Beweisen Sie:
$$R(T) \text{ ist abgeschlossen} \iff \text{Es gibt ein } c > 0 \text{ mit } ||Tx|| \geq c||x|| \text{ für alle } x \in X\,.$$

7. Es sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines Banachraums X und Z ein Unterraum von X mit $X = Y \oplus Z$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Es gibt ein $P \in \mathcal{L}(X)$ mit $P^2 = P$, $Y = R(P)$ und $Z = N(P)$.
   (P heißt dann stetige lineare Projektion auf Y).
   (b) Z ist abgeschlossen.

   In diesem Fall heißt Y komplementierter Unterraum von X.

8. * (Hilberträume: Quotientenräume = orthogonale Komplemente)
Es sei X ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Unterraum von X. Zeigen Sie, dass X/M und $M^\perp$ isometrisch isomorph sind.

3.3 Stetige Operatoren auf Hilberträumen

Satz 3.17 (Adjungierter Operator).
Es seien X und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann existiert genau ein Operator $T^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ derart, dass

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und alle } y \in Y\,,$$

der sog. adjungierte Operator zu T. Es gilt $||T^*|| = ||T||$ und $(T^*)^* = T$.

Beweis.
(a) Wähle $y \in Y$ beliebig. Dann ist $l_y : X \to \mathbb{K}$, $l_y(x) := \langle Tx, y\rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf X. Somit existiert nach dem Darstellungssatz 2.26 *genau ein* Punkt $w_y \in X$ mit $\langle Tx, y\rangle = l_y(x) = \langle x, w_y\rangle$ für alle $x \in X$. Wir *definieren* die Abbildung $T^* : Y \to X$ durch $T^*y = w_y$. Es gilt dann $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ für alle $x \in X$, $y \in Y$. Dies zeigt die Existenz.

(b) Es sei $T' : Y \to X$ mit $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T'y\rangle$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Dann gilt $\langle x, (T^* - T')y\rangle = \langle x, T^*y\rangle - \langle x, T'y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle Tx, y\rangle = 0$ für alle $x \in X$. Folglich ist $T^*y = T'y$ für alle $y \in X$, d.h. $T' = T^*$. Dies zeigt die Eindeutigkeit.

(c) Es seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $y_1, y_2 \in Y$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$\langle x, T^*(\alpha y_1 + y_2)\rangle = \langle Tx, \alpha y_1 + y_2\rangle = \overline{\alpha}\langle Tx, y_1\rangle + \langle Tx, y_2\rangle = \langle x, \alpha T^* y_1\rangle + \langle x, T^* y_2\rangle\,.$$

Es folgt $T^*(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T^* y_1 + T^* y_2$.

(d) $(T^*)^* = T$: Für alle $x \in X, y \in Y$ gilt $\langle y, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \langle T^*y, x\rangle = \langle y, (T^*)^*x\rangle$ und daher $T = (T^*)^*$.

(e) *$T^* : Y \to X$ ist stetig mit $||T^*|| \leq ||T||$:* Für alle $y \in Y$ mit $||y|| \leq 1$ gilt

$$||T^*y||^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle y, TT^*y\rangle \leq\ ||T||\,||T^*y||\,,$$

also $||T^*|| \leq ||T||$.

(f) $||T|| = ||(T^*)^*|| \leq ||T^*||$ mithilfe von (d) und (e). □

Bemerkung.
Es seien X und Y Hilberträume. Für $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ und $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$. Für $S, T \in \mathcal{L}(X)$ gilt $(ST)^* = T^* S^*$.

Für einen $\mathbb{C}$–Hilbertraum H ist daher die Abbildung $* : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ eine Involution, d.h. eine konjugiert lineare Abbildung $l : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ auf einer komplexen Algebra $\mathcal{A}$ mit $l(l(a)) = a$ und $l(ab) = l(b)l(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

Beispiel 3.18.
Es sei $S : l^2 \to l^2$, $S(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$ der Rechtsshift. Dann gilt $S^* = L$ mit $L : l^2 \to l^2$, $L(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$ dem Linksshift.

Beispiel 3.19 (Multiplikationsoperatoren).
Es sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{K}^N$ kompakt und $a \in C(K)$. Dann ist durch

$$(M_a f)(t) := a(t)\, f(t)\,, \qquad t \in K\,, \quad f \in L^2(K)\,,$$

der sog. Multiplikationsoperator $M_a \in \mathcal{L}(L^2(K))$, vgl. Beispiel 1.28. Es gilt $M_a^* = M_{\overline{a}}$.

Beispiel 3.20 (Integraloperatoren).
Es sei $K \in L^2([a,b] \times [a,b])$ *und*

$$(T_K x)(t) := \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds\,, \qquad x \in L^2([a,b])\,,$$

vgl. Beispiel 2.24. Dann ist die zum Integraloperator T_K *gehörige adjungierte Operator* T_K^* *durch*

$$(T_K^* x)(t) := \int_a^b \overline{K(s,t)}\, x(s)\, ds\,, \qquad x \in L^2([a,b])\,,$$

gegeben.

Bemerkung 3.21.
Es sei H *ein Hilbertraum mit den ONB* $\{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *und* $\{f_n \,:\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *und* $T \in \mathcal{L}(H)$. *Falls* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||Te_k||^2 < \infty$, *so gilt* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||Tf_k||^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} ||Te_k||^2 < \infty$.

Beweis. Mithilfe der Parsevalschen Gleichung und des Doppelreihensatzes erhält man

$$\infty > \sum_{k=0}^{\infty} ||Te_k||^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |\langle Te_k, f_j\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\langle e_k, T^* f_j\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} ||T^* f_j||^2$$

und

$$\infty > \sum_{j=0}^{\infty} ||T^* f_j||^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\langle T^* f_j, f_k\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |\langle f_j, Tf_k\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} ||Tf_k||^2\,.$$

□

Satz 3.22.
Es seien X *und* Y *Hilberträume und* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Dann gelten*

$$R(T)^\perp = N(T^*) \qquad \text{und} \qquad \overline{R(T)} = N(T^*)^\perp\,.$$

Beweis. Es gilt

$$y \in N(T^*) \iff \forall_{x\in X}\ \langle x, T^* y\rangle = 0 \iff \forall_{x\in X}\ \langle Tx, y\rangle = 0 \iff y \in R(T)^\perp\,.$$

Daraus folgt

$$\overline{R(T)} = (R(T)^\perp)^\perp = N(T^*)^\perp\,.$$

□

Bemerkungen.
Es seien X und Y Hilberträumne und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.
(a) Es gilt:

$$\exists_{c>0}\ \forall_{x\in N(T)^\perp}\ ||Tx|| \geq c||x|| \overset{(*)}{\iff} R(T) \text{ abgeschlossen} \iff R(T) = N(T^*)^\perp.$$

Für $(*)$ beachtet man, dass $N(T)^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von X ist, also ein Hilbertraum. Definiere $\hat{T} : N(T)^\perp \to Y$, $\hat{T}x = Tx$. Dann ist $\hat{T} \in \mathcal{L}(N(T)^\perp, Y)$ injektiv und $R(\hat{T}) = R(T)$. Mit Korollar 3.14 folgt die Behauptung.
(b) Hat $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *abgeschlossenes* Bild, so ist die Gleichung $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn $y \in Y$ zu allen Lösungen der Gleichung $T^*z = 0$ orthogonal ist.

Definition (Selbstadjungiert)**.**
Es sei X ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt selbstadjungiert, falls $T^* = T$, d.h. falls

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \text{für alle } x, y \in X\,.$$

Man beachte den Satz von Hellinger–Toeplitz (Aufgabe 3.2.3).

Beispiele 3.23.
Es sei X ein Hilbertraum.

(a) Jede Orthogonalprojektion $P \in \mathcal{L}(X)$ ist selbstadjungiert.

(b) Für $T \in \mathcal{L}(X)$ ist T^*T selbstadjunigert mit $||T^*T|| = ||T||^2$.

Beweis. (a) Für alle $x, y \in X$ gilt $Px, Py \in R(P)$ und $x - Px, y - Py \in R(P)^\perp$. Es folgt $\langle Px, y - Py\rangle = \langle x - Px, Py\rangle$ und hieraus $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$, d.h. $P^* = P$.
(b) $||T||^2 = \big(\sup\limits_{||x||\le 1} ||Tx||\big)^2 = \sup\limits_{||x||\le 1} \langle Tx, Tx\rangle = \sup\limits_{||x||\le 1} \langle T^*Tx, x\rangle \le ||T^*T|| \le ||T^*||\,||T|| = ||T||^2$. ☐

Bemerkung.
Beispiel 3.23 (b) zeigt, dass die Menge $\mathcal{L}(X)$ mit der Involution $*$ eine sog. C^*–Algebra $\mathcal{A}$ ist, d.h. die Involution $*$ erfüllt $||a^*a|| = ||a||^2$ für $a \in \mathcal{A}$. C^*–Algebren sind wichtige Werkzeuge in der Mathematischen Physik u.a. für die Darstellungstheorie lokal kompakter Gruppen. In der Quantenmechanik wird ein physikalisches System i.d.R. mithilfe einer unitalen C^*–Algebra $\mathcal{A}$ beschrieben. Die selbstadjungierten Elemente von $\mathcal{A}$ (d.h. alle $a \in \mathcal{A}$ mit $a^* = a$) nennt man die Observablen des Systems. Ein Zustand des Systems ist gegeben durch ein positives lineares Funktional $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ (d.h. $\phi(a^*a) \ge 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$) mit $\phi(1) = 1$. Die Zahl $\phi(a)$ ist dann der Erwartungswert der Observablen $a \in \mathcal{A}$ des Systems $\mathcal{A}$ im Zustand ϕ.

Definition (Numerischer Wertebereich)**.**
Es sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann heißt die Menge

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle \,:\, ||x|| = 1\} \subseteq \mathbb{K}$$

der **numerische Wertebereich von** T.

Bemerkung 3.24.
Es sei X ein komplexer Hilbertraum. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X)$ genau dann selbstadjungiert, wenn $W(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis. Setzt man $a = \langle Tx, y\rangle$ und $b = \langle Ty, x\rangle$, so folgt aus $\langle T(x+y), x+y\rangle \in \mathbb{R}$ durch „Ausmultiplizieren“ $a + b \in \mathbb{R}$. Durch Betrachtung von $\langle T(x+iy), x+iy\rangle$ erhält man analog $i(b-a) \in \mathbb{R}$. Dies impliziert $b = \overline{a}$ und es folgt $T^* = T$. ☐

Satz 3.25.
Es sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt

$$\sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in W(T)\} \leq ||T||\,. \tag{3.3}$$

Ist T selbstadjungiert, so gilt Gleichheit in (3.3) und aus $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in X$ folgt bereits $T = 0$.

Beweis. Es sei $M := \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Die Ungleichung $M \leq ||T||$ folgt aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung. Nun sei T selbstadjungiert. Zum Nachweis von $||T|| \leq M$ sei o.E. $||T|| > 0$. Man beachte, dass sich aus $T^* = T$ durch einfaches Ausrechnen

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\rangle = 4\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle\,, \qquad x, y \in X$$

ergibt. Aus der Parallelogrammidentität folgt dann

$$4\,\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \leq M\left(||x+y||^2 + ||x-y||^2\right) = 2M\left(||x||^2 + ||y||^2\right)\,, \qquad x, y \in X\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \leq M\,, \qquad ||x|| \leq 1,\, ||y|| \leq 1\,.$$

Für $x \in X$ mit $||x|| \leq 1$ setze $y := Tx/||T||$. Dann ist $||y|| \leq 1$ und man erhält $||T||^2 = \sup_{||x||=1} ||Tx||^2 \leq M||T||$, also $||T|| \leq M$. □

Definition (Normal)**.**
Es sei X ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt **normal**, falls $T^*T = TT^*$.

Satz 3.26.
Es sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt:

$$T \text{ normal} \quad \Longleftrightarrow \quad ||Tx|| = ||T^*x|| \text{ für alle } x \in X\,.$$

Beweis. Man beachte

$$||Tx||^2 - ||T^*x||^2 = \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle - \langle TT^*x, x\rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle\,.$$

Hieraus folgt „$\Longrightarrow$“ direkt. „$\Longleftarrow$“ folgt aus Satz 3.25, da $T^*T - TT^*$ selbstadjungiert ist. □

Definition (Unitär)**.**
Es seien X und Y Hilberträume. $U \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt **unitär**, falls $UU^* = I$ und $U^*U = I$.

Satz 3.27.
Es seien X und Y Hilberträume. $U \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist genau dann unitär, wenn U eine surjektive Isometrie ist. Insbesondere gilt $||U|| = 1$ für unitäre $U \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis. Es gilt

$$||Ux||^2 - ||x||^2 = \langle Ux, Ux\rangle - \langle x, x\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle - \langle x, x\rangle = \langle (U^*U - I)x, x\rangle\,.$$

Ist U unitär, so ist U daher eine surjektive Isometrie. Ist U eine Isometrie, so folgt $U^*U = I$ aus Satz 3.25. Ist U zusätzlich surjektiv, so ergibt sich $UU^* = I$, d.h. U ist unitär. □

Beispiel 3.28 (Fourier–Abbildung).
Es sei $\{e_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ eine Orthonormalbasis eines $\mathbb{C}$–Hilbertraum X. Dann ist die Fourier–Abbildung

$$\mathcal{F} : X \to l^2\,, \qquad \mathcal{F}(x) := (\langle x, e_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}_0}$$

unitär, siehe Satz 2.18.

Satz 3.29 (Ergodensatz; J. von Neumann 1932).
Es sei U ein unitärer Operator auf einem Hilbertraum X und P die orthogonale Projektion auf $N(I-U)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j x = Px\,.$$

Bemerkungen.

(a) Falls $\dim X = 1$, so ist U eine komplexe Zahl mit $|U| = 1$. Falls $U \neq 1$, so existiert $\lim_{n\to\infty} U^n$ nicht. Jedoch gilt für die arithmetischen (oder Cesàro) Mittel der U^n stets

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j = \begin{cases} \frac{1}{n}\frac{1-U^n}{1-U} \to 0 & , \quad U \neq 1 \\ 1 \to 1 & , \quad U = 1\,. \end{cases}$$

(b) Die Evolution eines physikalischen Systems kann oft in der Form $x(t) = U(t)x_0$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Hierbei bezeichnet $U(t)$ einen unitären Operator auf einem Hilbertraum X und $x(t) \in X$ den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t sowie $x_0 \in X$ seinen Anfangszustand. Das Kausalitätsgesetz erfordert die „Gruppeneigenschaft“

$$U(0) = I\,, \quad U(t+s) = U(t)U(s)\,, \qquad t, s \in \mathbb{R}\,.$$

Man erwartet, dass für $t \to \infty$ das System sich einem Gleichgewichtszustand annähert. Für diskrete Zeitschritte $t = n \in \mathbb{N}$ sollte daher der Limes $\lim_{n\to\infty} U(1)^n x$ in einem geeigneten Sinn existieren. Der Ergodensatz zeigt, dass dies für die Cesàro Mittel der Folge $(U(1)^n x)_n$ tatsächlich zutrifft.

Beweis. Falls $x \in N(I-U)$, so gilt $U^j x = x$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ sowie $Px = x$, also die Behauptung. Es sei nun $x \in N(I-U)^\perp = \overline{R(I-U^*)} = \overline{R(I-U^{-1})}$. Falls $x \in R(I-U^{-1})$, so gibt es ein $y \in X$ mit $x = y - U^{-1}y$ und es folgt

$$V_n x := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j x = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j y - \sum_{j=0}^{n-1} U^{j-1} y = \frac{1}{n}\left(U^{n-1}y - U^{-1}y\right) \to 0 = Px\,.$$

Falls $x \in \overline{R(I-U^{-1})}$, so gibt es $(x_k) \subset R(I-U^{-1})$ mit $x_k \to x$. Wegen $||V_n|| \leq 1$ gilt $||V_n x|| \leq ||x - x_k|| + ||V_n x_k||$. Hieraus folgt $V_n x \to 0 = Px$ für alle $x \in N(I-U)^\perp$. □

Bemerkung 3.30 (Physik; Dirac Calculus).
Es sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Im Dirac Calculus, schreibt man für $u \in X$

$$|u\rangle \quad \textit{anstelle von} \quad u$$

und nennt $|u\rangle$ **Ket***. Somit gilt $|\alpha u\rangle = \alpha|u\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $u \in X$. Jedem $v \in X$ entspricht ein stetig lineares Funktional et vice versa aufgrund des Darstellungssatzes von Riesz. Dieses wird mit $\langle v|$ bezeichnet und heißt ein* **Bra***. Es gilt dann*

$$\langle v| \cdot |u\rangle = \langle u, v\rangle\,.$$

Wendet man ein Bra $\langle v|$ auf ein Ket $|u\rangle$ an, so ensteht also ein BraKet (bracket) $\langle v|u\rangle$. Formal ist diese Verknüpfung $\langle v| \cdot |u\rangle$ eine „Multiplikation“ und motiviert die Physiker–Schreibweise $\langle v|u\rangle$ anstelle von $\langle u, v\rangle$. Ist $A : X \to X$ ein linearer Operator, so ergibt sich formal

$$\langle v| \cdot A|u\rangle = \langle v| \cdot |Au\rangle = \langle v|Au\rangle = \langle Au, v\rangle\,.$$

Ebenso gilt (wenn man Assoziativität der „Multiplikation“ postuliert):

$$(|u\rangle \cdot \langle v|) \cdot |w\rangle = |u\rangle \cdot (\langle v| \cdot |w\rangle) = |u\rangle\langle v|w\rangle = \langle v|w\rangle\,|u\rangle\,,$$

d.h. $|u\rangle\langle v|$ kann als der durch

$$Bw := \langle v|w\rangle u\,, \qquad u \in X\,,$$

definierte lineare Operator B interpretiert werden. Man beachte, dass dann $|u\rangle\langle u|$ gerade die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\operatorname{span}\{u\}$ darstellt. Die „Vollständigkeitsbedingung“ (Satz 2.17 (b)) für ein ONS $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ schreibt sich somit in der suggestiven Form

$$\sum_{j=1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j| = I\,.$$

Daraus ergibt sich die Fourierentwicklung (siehe Satz 2.17 (b))

$$|u\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|u\rangle$$

und die „verallgemeinerte“ Parsevalsche Gleichung (siehe Satz 2.17 (c))

$$\langle v|u\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v|u_j\rangle\langle u_j|u\rangle\,.$$

Aufgaben zu §3.3

1. Es sei X ein *komplexer* Innenproduktraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass $T = 0$.

2. Es sei X ein Hilbertraum und $P \in \mathcal{L}(X)$ mit $P = P^2 = P^*$. Zeigen Sie, dass P die Orthogonalprojektion auf $R(P)$ ist.

3. Es sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $T = T^* \in \mathcal{L}(X)$. Man beweise die Polarisationsformeln:

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\right) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$$

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{4} \langle T(x+i^k y), x+i^k y\rangle \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{C})$$

4. (Volterra Operator)
   Es sei $X = L^2([\pi, \pi])$ und $V : X \to X$ definiert durch

$$V f(t) := \int_{-\pi}^{t} f(s)\, ds\,, \qquad f \in X\,.$$

   Ist V normal?

Kapitel 4

Stetige lineare Funktionale

4.1 Lineare Funktionale und der Satz von Hahn–Banach

Definition (Dualraum, lineare Funktionale).
Es sei X ein normierter Raum. Dann heißt

$$X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

Dualraum von X. Seine Elemente heißen **stetige lineare Funktionale auf** X.

Nach Satz 1.24 ist X' stets ein Banachraum (da $\mathbb{K}$ vollständig ist).

Beispiel 4.1 (Endliche Dimension: Koordinaten als stetige lineare Funktionale).
Es sei X ein normierter Raum mit $\dim X = n \in \mathbb{N}$. Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von X, so sind durch

$$b'_k(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n) := \alpha_k \in \mathbb{K}\,, \qquad k = 1, \ldots, n$$

stetige lineare Funktionale $b'_1, \ldots, b'_n$ wohldefiniert, die sog. Koordinatenabbildungen. Diese bilden eine Basis B' von X', die sog. zu B duale Basis von X'

Man ist daher geneigt, auch im allgemeinen Fall die Elemente von X' als "verallgemeinerte" Koordinaten aufzufassen. Um dies zu rechtfertigen, sollte jedenfalls gelten, dass es zu je zwei Punkten $x_1 \neq x_2$ aus X mindestens ein $L \in X'$ gibt mit $L(x_1) \neq L(x_2)$. Man sagt, dass X' punktetrennend ist. Es ist aber zunächst noch nicht einmal klar, ob es für $X \neq \{0\}$ überhaupt ein $L \in X' \setminus \{0\}$ gibt! Im Hinblick auf Beispiel 4.1 ist aber für $b \in X \setminus \{0\}$ durch $l(\alpha b) := \alpha \in \mathbb{K}$ zumindest auf dem Unterraum $Y := \operatorname{span}\{b\}$ ein $l \in Y'$ definiert. Es stellt sich daher die Frage, ob es ein $L \in X'$ gibt, welches $l \in Y'$ fortsetzt, d.h. $L|_Y = l$ gilt.

Beispiel 4.2 (Hilberträume).
Es sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums H und $l \in Y'$. Nach dem Projektionssatz 2.9 gilt $H = Y \oplus Y^\perp$. Jedes $x \in H$ lässt sich daher in der Form $x = y + y^\perp$ mit eindeutig bestimmten $y \in Y$ und $y^\perp \in Y^\perp$ schreiben. Durch $L(x) := l(y)$ ist dann ein $L \in H'$ gegeben mit $L|_Y = l$. Diese Fortsetzung ist sogar normerhaltend, d.h. $||L|| = ||l||$.

Satz 4.3 (Allgemeiner Fortsetzungssatz von Hahn–Banach).
Es seien X ein reeller Vektorraum, Y ein Unterraum von X, $l : Y \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung und $p : X \to \mathbb{R}$ eine sublineare Funktion (d.h. es gilt $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ und $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha \geq 0$) derart, dass $l(y) \leq p(y)$ für alle $y \in Y$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $L : X \to \mathbb{R}$ mit $L(y) = l(y)$ für alle $y \in Y$ und $L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Der Beweis von Satz 4.3 ist nicht nur nicht konstruktiv, er benutzt das *Lemma von Zorn* (siehe Ergänzungen zu diesem Abschnitt).

Beweis. (a) Es sei Z ein Unterraum von X mit $Y \subset Z$ und $g : Z \to \mathbb{R}$ linear mit $g = l$ auf Y und $g \leq p$ auf Z.
Es sei $x_0 \in X \backslash Z$. Für $z_0, z_1 \in Z$ gilt

$$g(z_0) + g(z_1) = g(z_0 + z_1) \leq p(z_0 + z_1) = p(z_0 - x_0 + z_1 + x_0) \leq p(z_0 - x_0) + p(z_1 + x_0)\,.$$

Folglich gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{z \in Z} (g(z) - p(z - x_0)) \leq c \leq \inf_{z \in Z} (p(z + x_0) - g(z))\ .$$

Man beachte, dass

$$c\alpha \leq \begin{cases} p(z + \alpha x_0) - g(z) & \text{für alle } z \in Z \text{ falls } \alpha > 0 \\ p(z + \alpha x_0) - g(z) & \text{für alle } z \in Z \text{ falls } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

Wir setzen jetzt

$$L(z + \alpha x_0) := g(z) + c\alpha\,, \qquad z \in Z\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Dann ist L linear auf $Z \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$ und $L = g$ auf Z. Ferner gilt $L(z + \alpha x_0) = g(z) + c\alpha \leq p(z + \alpha x_0)$ für alle $z \in Z$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Paare (Z, g) derart, dass gilt: (i) Z ist ein Unterraum von X mit $Y \subset Z$ und (ii) $g : Z \to \mathbb{R}$ ist linear mit $g \leq p$ auf Z und $g = l$ auf Y. Wir definieren auf $\mathcal{M}$ eine Halbordnung $\leq$ durch

$$(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad Z_1 \subset Z_2 \text{ und } g_1 = g_2 \text{ auf } Z_1\,.$$

Wir zeigen, dass jede total geordnete Teilmenge $E \subset \mathcal{M}$ die obere Schranke (Z_*, g_*) mit

$$Z_* = \bigcup_{(Z,g) \in E} Z\,, \qquad g_*(x) := g(x) \text{ falls } x \in Z \text{ für } (Z, g) \in E$$

besitzt. Dazu beachte man, dass die folgenden Aussagen gelten.

(i) g_* ist wohldefiniert, denn aus $x \in Z_1 \cap Z_2$ für $(Z_1, g_1), (Z_2, g_2) \in E$ folgt $Z_1 \subset Z_2$ oder $Z_2 \subset Z_1$, also $g_1(x) = g_2(x)$.

(ii) Z_* ist ein Unterraum von X mit $Y \subset Z_*$ und $g_* : Z_* \to \mathbb{R}$ ist linear, denn für $z_1, z_2 \in Z_*$ gilt $z_1 \in Z_1$ und $z_2 \in Z_2$ mit $(Z_1, g_1), (Z_2, g_2) \in E$. Es gilt $Z_1 \subset Z_2$ oder $Z_2 \subset Z_1$, d.h. $Z_j = Z_1 \cup Z_2$ für $j = 1$ oder $j = 2$, also $\alpha z_1 + z_2 \in Z_j \subset Z_*$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $g_*(\alpha z_1 + z_2) = g_j(\alpha z_1 + z_2) = \alpha g_j(z_1) + g_j(z_2) = \alpha g_*(z_1) + g_*(z_2)$.

(iii) $g_* = l$ auf Y und $g_* \leq p$ auf Z_*.

(iv) Es gilt $(Z, g) \leq (Z_*, g_*)$ für alle $(Z, g) \in E$.

Wir können somit das Lemma von Zorn anwenden und erhalten ein maximales Element $(\tilde{Z}, \tilde{g}) \in \mathcal{M}$. Wäre $\tilde{Z} \neq X$, so könnte man nach dem 1. Beweisschritt einen Unterraum $\hat{Z} \supsetneq \tilde{Z}$ von X und ein lineares Funktional $\hat{g} : \hat{Z} \to \mathbb{R}$ finden mit $(\hat{Z}, \hat{g}) \in \mathcal{M}$. Dies widerspräche allerdings der Maximalität von $(\tilde{Z}, \tilde{g})$. $\square$

Bemerkung.
Aus Teil (a) des Beweises folgt mit vollständiger Induktion, dass es Unterräume $Z_j \subseteq Z_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $Z_0 = Y$ und lineare Funktionale $g_j : Z_j \to \mathbb{R}$ gibt mit $g_{j+1} = g_j$ auf $Z_j \supset Y$ und $g_j \leq p$ auf Z_j für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Falls $X = Z_N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ oder $X = \cup_{j \in \mathbb{N}_0} Z_j$, so kann man $Lx := g_j x$ für $x \in Z_j$ setzen und erhält das gewünschte lineare Funktional. Damit lässt sich aber der Fall $X \neq \cup_{j \in \mathbb{N}_0} Z_j$ nicht behandeln.

Satz 4.4 (Fortsetzungssatz von Hahn–Banach für Halbnormen)**.**
Es sei X ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Halbnorm $p : X \to \mathbb{R}$, Y ein Unterraum von X und $l : Y \to \mathbb{K}$ linear mit $|l(y)| \leq p(y)$ für alle $y \in Y$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $L : X \to \mathbb{K}$ mit $L|_Y = l$ und $|L(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. 1. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Satz 4.3 impliziert, dass es eine $\mathbb{R}$–lineare Funktion $L : X \to \mathbb{R}$ gibt mit $L = l$ auf Y und $L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Es folgt $\pm L(x) = L(\pm x) \leq p(\pm x) = p(x)$ für alle $x \in X$.

2. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist $l_1 := \operatorname{Re} l$ ein $\mathbb{R}$–lineares Funktional auf dem reellen Vektorraum Y mit $|l_1(y)| = |\operatorname{Re} l(y)| \leq |l(y)| \leq p(y)$ für alle $y \in Y$. Da l $\mathbb{C}$–linear ist, gilt

$$l(y) = l_1(y) - i l_1(iy) \quad \text{für alle } y \in Y\,.$$

Nach dem 1. Fall gibt es ein $\mathbb{R}$–lineares Funktional $L_1 : X \to \mathbb{R}$ mit $|L_1(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$ und $L_1 = l_1$ auf Y. Wir definieren nun $L(x) := L_1(x) - iL_1(ix)$ für $x \in X$ und stellen zunächst fest, dass L $\mathbb{C}$–linear ist sowie $L(y) = l(y)$ für alle $y \in Y$. Schließlich gibt es zu $x \in X$ ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$, so dass $|L(x)| = \alpha L(x)$. Es folgt

$$|L(x)| = L(\alpha x) = L_1(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x)\,.$$

□

Satz 4.5 (Fortsetzungssatz von Hahn–Banach für stetige lineare Funktionale)**.**
Es sei X ein normierter Raum und Y ein Unterraum von X. Dann gibt es zu jedem $l \in Y'$ ein $L \in X'$ mit $L \equiv l$ auf Y und $||L|| = ||l||$.

Beweis. Man wende Satz 4.4 mit der Halbnorm $p(x) := ||l|| \cdot ||x||$ an. □

Satz 4.6 (Trennungssatz für abgeschlossene Unterräume)**.**
Es sei X ein normierter Raum, Y ein abgeschlossener Unterraum von X und $x_0 \in X \backslash Y$. Dann gibt es ein $L \in X'$ mit $L \equiv 0$ auf Y, $||L|| = 1$ und $L(x_0) = dist(x_0, Y)$.

Wir setzen hier $\operatorname{dist}(x_0, Y) := \inf\{||x_0 - y|| \,:\, y \in Y\}$.

Beweis. Betrachte den abgeschlossenen Unterraum $U := Y \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$. Das durch

$$l(y + \alpha x_0) := \alpha \operatorname{dist}(x_0, Y)\,, \qquad y \in Y,\, \alpha \in \mathbb{K}\,,$$

definierte lineare Funktional $l : U \to \mathbb{K}$ ist wegen

$$|l(y + \alpha x_0)| = |\alpha| \operatorname{dist}(x_0, Y) = \inf\{||\alpha x_0 + y|| \,:\, y \in Y\} = \operatorname{dist}(\alpha x_0, Y)$$

stetig mit $||l|| = 1$, $l(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$ und $l \equiv 0$ auf Y. Nach Satz 4.5 lässt sich l normerhaltend auf X fortsetzen. □

Korollar 4.7.
Es sei X ein normierter Raum und $x_0 \in X$.

(a) *Ist $x_0 \neq 0$, so gibt es ein $L \in X'$ mit $||L|| = 1$ und $L(x_0) = ||x_0||$.*

(b) *Ist $L(x_0) = 0$ für alle $L \in X'$, so ist $x_0 = 0$.*

Dies folgt aus Satz 4.6 für $Y = \{0\}$.

Korollar 4.8 (Stetige lineare Funktionale als „verallgemeinerte" Koordinaten)**.**
Es sei X ein normierter Raum.

(a) *„X' trennt X", d.h. zu $x_0 \neq x_1$ aus X gibt es $L \in X'$ mit $L(x_0) \neq L(x_1)$.*

(b) *Es gilt*

$$||x|| = \sup_{L \in X' \setminus \{0\}} \frac{|Lx|}{||L||}, \qquad x \in X.$$

Beweis. (a) Man wende Korollar 4.7 auf $x_0 - x_1$ an.

(b) Aus $|Lx| \leq ||L|| \cdot ||x||$ für alle $L \in X'$ folgt „$\geq$". Zu $x \neq 0$ gibt es andererseits ein $L \in X'$ mit $||L|| = 1$ und $L(x) = ||x||$, d.h. $||x|| = L(x) = |Lx|/||L||$. Dies zeigt „$\leq$". □

Korollar 4.9 ("Spanning Criterion")**.**
Es sei X ein normierter Raum und U ein Unterraum von X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) *U liegt dicht in X.*

(b) *Für alle $L \in X'$ mit $L|_U \equiv 0$ gilt $L \equiv 0$.*

Beweis. (b) $\Longrightarrow$ (a): Ist U nicht dicht in X, so existiert ein $x_0 \in X \setminus \overline{U}$. Nach Satz 4.6 gibt es ein $L \in X'$ mit $L \equiv 0$ auf $\overline{U}$ und $L(x_0) > 0$. □

Das "Spanning Criterion" hat eine spektakuläre Anwendung:

Beispiel 4.10 (Satz von Müntz)**.**
Es sei (λ_j) eine Folge positiver reeller Zahlen, die streng monoton wächst und für die $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty$ gilt. Weiter sei $\lambda_0 := 0$. Dann liegt

$$span\{t^{\lambda_j} \,:\, j \in \mathbb{N}_0\}$$

dicht in $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

Beweisskizze. Es sei $U := \operatorname{span}\{t^{\lambda_j} \,:\, j \in \mathbb{N}_0\}$ und $L \in C([0,1])'$ mit $L|_U \equiv 0$. Wir betrachten auf der rechten Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$ die Funktion

$$h : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \qquad h(z) := L(t^z).$$

Nach Voraussetzung gilt $h(\lambda_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es lässt sich nun zeigen, dass h holomorph in $\mathbb{H}$ und durch $||L||$ beschränkt ist. Eine auf dem Lemma von Schwarz–Pick beruhende Verallgemeinerung des Identitätsprinzips für *beschränkte* holomorphe Funktionen zeigt dann, dass $h \equiv 0$. Insbesondere ist $h(n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt $L(p) = 0$ für jedes Polynom p. Der Approximationssatz von Weierstraß impliziert daher $L \equiv 0$, woraus mit dem Spanning Criterion folgt, dass U dicht in $C([0,1])$ liegt. □

Der Trennungsssatz für abgeschlossene Unterräume (Satz 4.6) hat ein Analogon für disjunkte abgeschlossene **absolutkonvexe** Mengen:

Definition (Absolutkonvexe Menge)**.**
Es sei X ein normierter Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt **absolutkonvex**, falls für alle $x, y \in M$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ stets $\alpha x + \beta y \in M$ gilt.

In einem normierten Raum X ist $B(0,1)$ absolutkonvex. Ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ für normierte Räume X und Y, so ist $\overline{T(B(0,1))}$ absolutkonvex.

Jede absolutkonvexe offene Menge lässt sich als offene „Einheitskugel bzgl. einer geeigneten Halbnorm" auffassen:

Lemma 4.11.
Es sei X ein normierter Raum und $\Gamma \subseteq X$ eine konvexe offene Umgebung von 0. Dann ist durch

$$p(x) := \inf\{t > 0 \,:\, t^{-1}x \in \Gamma\}, \qquad x \in X,$$

eine sublineare Abbildung auf X definiert mit $x \in \Gamma$ genau dann wenn $p(x) < 1$. Ist Γ sogar absolutkonvex, so ist p eine Halbnorm auf X.

Beweis. Für alle $\alpha \geq 0$ und $x \in X$ gilt offensichtlich $p(\alpha x) = \alpha p(x)$. Es seien nun $x, y \in X$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda, \mu \in (0, \infty)$ derart, dass $p(x) < \lambda \leq p(x) + \varepsilon$ und $p(y) < \mu < p(y) + \varepsilon$. Dann gilt

$$\frac{x}{\lambda} \in \Gamma \quad \text{und} \quad \frac{y}{\mu} \in \Gamma$$

und da Γ konvex ist, folgt

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} \in \Gamma.$$

Somit folgt $p(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$.

Um einzusehen, dass p eine Halbnorm auf X ist, falls Γ absolutkonvex ist, beachte man, dass für $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| = 1$ gilt

$$x \in \Gamma \iff \alpha x \in \Gamma.$$

□

Korollar 4.12.
Es seien A, B disjunkte konvexe Teilmengen eines normierten Raums X. Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es ein $L \in X'$ und reelle Zahlen $\beta < \gamma$ mit

$$\operatorname{Re} L(x) \leq \beta < \gamma \leq \operatorname{Re} L(y)$$

für alle $x \in A$ und alle $y \in B$. Ist B zusätzlich absolutkonvex, so existiert im Fall $A = \{a\}$ sogar ein $l \in X'$ mit $|l(x)| \leq 1 < |l(a)|$ für alle $x \in B$.

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Daher existiert ein $r > 0$ derart, dass

$$A_r := A + B(0, r) := \{x + y \,:\, x \in A, y \in B(0, r)\} = \bigcup_{x \in A} B(x, r)$$

und B disjunkt sind. Ferner ist A_r offen und konvex. Wir fixieren $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ und setzen $x_0 = b_0 - a_0$. Die Menge

$$\Gamma := A_r - B + x_0 = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} B(x - y + x_0, r)$$

ist dann eine konvexe offene Umgebung von 0. Durch

$$p(x) := \inf\{t > 0 \,:\, t^{-1}x \in \Gamma\}\,, \qquad x \in X,$$

ist daher nach Lemma 4.11 eine sublineare Funktion auf X gegeben. Da $A_r \cap B = \emptyset$, ist $x_0 \notin \Gamma$, d.h. $p(x_0) \geq 1$. Es sei $Y := \operatorname{span}\{x_0\}$ und $l : Y \to \mathbb{R}$ definiert durch $l(\alpha x_0) := \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt dann $l(y) \leq p(y)$ für alle $y \in Y$. Nach Satz 4.3 gibt es ein lineares $L : X \to \mathbb{R}$ mit $L(x_0) = 1$ und $L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Da Γ offen ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $\overline{B(0, \delta)} \subset \Gamma$. Für alle $x \in \overline{B(0, \delta)}$ gilt daher

$$|L(x)| = \max\{L(x), -L(x)\} = \max\{L(x), L(-x)\} \leq \max\{p(x), p(-x)\} \leq 1,$$

da $x, -x \in \Gamma$. Somit ist $||L|| \leq 1/\delta$, also $L \in X'$. Für alle $a \in A_r$ und $b \in B$ gilt

$$L(a) - L(b) + 1 = L(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1\,,$$

d.h. $L(a) < L(b)$. Folglich sind $L(A_r)$ und $L(B)$ disjunkte konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}$, also disjunkte Intervalle. Da A_r offen und L eine offene Abbildung ist (vgl. Übungsaufgabe), folgt, dass auch $L(A_r)$ offen ist. Setzt man $\gamma := \sup L(A_r)$, so ergibt sich

$$L(x) < \gamma \leq L(y)\,, \qquad \text{für alle } x \in A_r, y \in B\,.$$

Da $L(A)$ eine kompakte Teilmenge von $L(A_r)$ ist, gilt $\max L(A) =: \beta < \gamma$ und

$$L(x) \leq \beta < \gamma \leq L(y) \quad \text{für alle } x \in A \text{ und alle } y \in B.$$

Der Fall $K = \mathbb{C}$ lässt sich wie im Beweis von Satz 4.4 auf den Fall $K = \mathbb{R}$ zurückführen.

Es sei nun $A = \{a\}$ und B abgeschlossen und absolutkonvex. Wegen der Absolutkonvexität von B existiert ein $\gamma \in (-\infty, 0]$ und ein $L \in X'$ mit $\operatorname{Re} L(a) < \gamma \leq \operatorname{Re} L(y)$ für alle $y \in B$. O.E. sei $\gamma < 0$. Es sei $l_* := -L$. Dann folgt $\operatorname{Re} l_*(y) \leq -\gamma < \operatorname{Re} l_*(a)$ für alle $y \in B$. Für $y \in B$ sei $|\alpha| = 1$ so gewählt, dass $|l_*(y)| = \alpha l_*(y) = l_*(\alpha y) = \operatorname{Re} l_*(\alpha y) \leq -\gamma < \operatorname{Re} l_*(a) \leq |l_*(a)|$, da $\alpha y \in B$ aufgrund der Absolutkonvexität von B. □

Satz 4.13 (Duale Abbildung).
Es seien X und Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Die (zu T) duale Abbildung $T' : Y' \to X'$ definiert durch

$$(T'y')(x) := y'(Tx)\,, \qquad x \in X\,, \quad y' \in Y'\,,$$

ist dann linear und stetig mit $||T'|| = ||T||$.

Beweis. T' ist sicher linear und

$$\sup_{||y'||\leq 1} ||T'y'|| = \sup_{||y'||\leq 1}\sup_{||x||\leq 1} |y'(Tx)| = \sup_{||x||\leq 1}\sup_{||y'||\leq 1} |y'(Tx)| = \sup_{||x||\leq 1} ||Tx||\,,$$

wobei zuletzt Korollar 4.8 benutzt wurde. Daher ist T' stetig mit $||T'|| = ||T||$. □

Der duale Operator $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ von $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ wird manchmal auch als transponierter Operator oder adjungierter Operator bezeichnet.

Bemerkung 4.14.
Es seien X, Y und Z normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Dann gilt $(ST)' = T'S'$. Falls $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ existiert, so gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1} \in \mathcal{L}(X', Y')$.

Beispiel 4.15.
Es sei $X = Y = l^2$, $L : X \to X$ der Linksssshift und $S : X \to X$ der Rechtsshift. Aufgrund von Satz 2.26 gibt es konjugiert–lineare bijektive Abbildungen

$$T_X : X \to X',\;\; T_X x := \langle \cdot, x\rangle \qquad \textit{und} \qquad T_Y : Y \to Y',\;\; T_Y y := \langle \cdot, y\rangle.$$

Für $y' \in Y'$ mit $y' = T_Y y$ und $x \in X$ folgt

$$L'T_Y y(x) = L'y'(x) = y'(Lx) = \langle Lx, y\rangle = \langle L(x_j), (y_j)\rangle = \langle (x_j), S(y_j)\rangle = T_X Sy(x)\,.$$

Somit folgt $L' = T_X S T_Y^{-1} = T_X L^* T_Y^{-1}$.

Beispiel 4.15 zeigt den folgenden Zusammenhang zwischen dualer und adjungierter Abbildung.

Bemerkung 4.16 (Duale vs. adjungierte Abbildung)**.**
Es seien X und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt

$$T' = T_X\, T^*\, T_Y^{-1}$$

mit $T_X : X \to X'$, $T_X x := \langle \cdot, x\rangle$ und $T_Y : Y \to Y'$, $T_Y y := \langle \cdot, y\rangle$, denn

$$(T'y')(x) = y'(Tx) = \langle Tx, T_Y^{-1}y'\rangle = \langle x, T^* T_Y^{-1} y'\rangle = (T_X T^* T_Y^{-1} y')(x)$$

für alle $x \in X$ und alle $y' \in Y'$.

Das folgende Korollar verallgemeinert daher Satz 3.22.

Korollar 4.17.
Es seien X und Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit abgeschlossenem Bild $R(T)$. Dann gilt für alle $y \in Y$:

$$y \in R(T) \quad\Longleftrightarrow\quad y'(y) = 0 \textit{ für alle } y' \in N(T')\,.$$

Insbesondere gilt: T surjektiv $\Longleftrightarrow$ T' injektiv.

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Sei $y \in R(T)$, d.h. $y = Tx$ für ein $x \in X$. Nun sei $y' \in N(T')$ beliebig, d.h. $T'y' = 0$. Es folgt $y'(y) = y'(Tx) = (T'y')(x) = 0$.

„$\Longleftarrow$“ Falls $y \notin R(T)$, so gibt es nach Satz 4.6 ein $y' \in Y'$ mit $y' \equiv 0$ auf $R(T)$, aber $y'(y) = \text{dist}(y, R(T)) > 0$. Dann gilt $(T'y')(x) = y'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$, also $y' \in N(T')$, aber $y'(y) \neq 0$. □

Satz 4.18.
Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Der Operator T ist genau dann surjektiv, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $||T'y'|| \geq \delta||y'||$ für alle $y' \in Y'$.

Beweis. Ist $T : X \to Y$ surjektiv, so existiert nach Satz 3.10 ein $\delta > 0$ mit $T(B(0,1)) \supseteq B(0,\delta)$, d.h.

$$||T'y'|| = \sup_{||x||<1} |(T'y')(x)| = \sup_{||x||<1} |y'(Tx)| \geq \sup_{||y||<\delta} |y'(y)| = \delta||y'||\,, \qquad y' \in Y'\,.$$

Gilt umgekehrt die Abschätzung $||T'y'|| \geq \delta||y'||$ für alle $y' \in Y'$, so folgt $\overline{T(B(0,1))} \supseteq B(0,\delta)$. Anderenfalls gibt es nämlich ein $y_0 \in B(0,\delta)$ mit $y_0 \notin \overline{T(B(0,1))}$. Nach Korollar 4.12 gibt es ein $L \in Y'$ mit $|L(y_0)| > 1$ und $|L(y)| \leq 1$ für alle $y \in \overline{T(B(0,1))}$. Somit gilt $|(T'L)(x)| = |L(Tx)| \leq 1$ für alle $x \in B(0,1)$, d.h. $||T'L|| \leq 1$. Daher folgt

$$\delta < \delta|L(y_0)| \leq \delta\,||y_0||\,||L|| \leq ||y_0||\,||T'L|| \leq ||y_0||\,.$$

Daher impliziert $||y_0|| < \delta$, dass $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$, also $\overline{T(B(0,1))} \supseteq B(0,\delta)$. Korollar 3.8 zeigt, dass $T(B(0,1)) \supset B(0,r)$ für ein $r > 0$, d.h. T ist surjektiv. □

Ergänzung: Das Auswahlaxiom, das Wohlordnungsprinzip und das Zornsche Lemma

Prolog: „The Axiom of Choice is obviously true, the Well-Ordering Theorem is obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?“

Möchte man die Grundlagen der Mathematik auf ein festes Fundament bauen, so kommt man nicht umhin auch die Mengenlehre *axiomatisch* zu betreiben.

Eine weit verbreitete axiomatische Mengenlehre ist die sog. Zermelo–Fraenkel–Mengenlehre (ZFC). Sie ist heute Grundlage fast aller Zweige der Mathematik. Es hat sich empirisch gezeigt, dass sich viele[1] bekannte mathematische Aussagen so formulieren lassen, dass sie sich mithilfe der Zermelo–Fraenkel–Mengenlehre (ZFC) entweder ableiten (also beweisen) oder widerlegen lassen. Ein wesentlicher Bestandteil der Zermelo–Fraenkel–Mengenlehre (ZFC) ist das sog. Auswahlaxiom:

Auswahlaxiom.
Es sei A eine Menge nichtleerer Mengen. Dann gibt es eine Funktion („Auswahlfunktion“) F mit Definitionsbereich A und $F(X) \in X$ für alle $X \in A$.

Das Auswahlaxiom (englisch „axiom of choice“) wird oft mit AC abgekürzt.

[1] Eine bekannte Ausnahme bildet die von Cantor 1878 aufgestellte Kontinuumshypothese, der zufolge jede überabzählbare Menge reeller Zahlen bijektiv auf die Menge aller reellen Zahlen abgebildet werden kann. Dieses Problem war lange Zeit ungelöst und bildete das erste der berühmten dreiundzwanzig Hilbertschen Probleme. Gödel hat dann 1938 gezeigt, dass sich die Kontinuumshypothese auf Grundlage von ZFC nicht widerlegen lässt. Cohen hat 1963 bewiesen, dass sich die Kontinuumshypothese auf Grundlage von ZFC auch nicht beweisen lässt. Folglich ist die Kontinuumshypothese unabhängig von ZFC.

Bemerkung.
Verzichtet man in ZFC auf das Auswahlaxiom, so erhält man eine reduzierte Zermelo–Fraenkel–Mengenlehre, die man mit ZF bezeichnet. (In ZFC steht das C für „Choice“.) Kurt Gödel zeigte 1938, dass das Auswahlaxiom im Rahmen der Zermelo-Fraenkel–Mengenlehre keinen Widerspruch ergibt, wenn man die Widerspruchsfreiheit aller übrigen Axiome, also von ZF, annimmt. 1963 zeigte Paul Cohen, dass auch die Negation (also das „Gegenteil“) des Auswahlaxioms nicht zu einem Widerspruch führt. Man kann also, wenn man die Widerspruchsfreiheit von ZF annimmt, entweder das Auswahlaxiom oder seine Negation als zusätzliches Axiom hinzunehmen, und erhält wiederum ein widerspruchsfreies Axiomensystem der Mengenlehre. Es gibt also (mindestens) zwei „Arten“ von Mathematik – eine mit und eine ohne Auswahlaxiom.

Das Auswahlaxiom wird von der überwiegenden Mehrheit der Mathematikerinnen und Mathematiker akzeptiert. Hierfür spricht, dass seine Aussage „natürlich“ erscheint und z.B. für jede *endliche* Menge problemlos eine Auswahlfunktion angegeben werden kann. Andererseits ist es selbst in konkreten Fällen oft völlig unklar, wie eine Auswahlfunktion *explizit* aussehen könnte. Man versuche etwa, eine Auswahlfunktion auf der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{R})\setminus\{\emptyset\}$ zu konstruieren. Wir wollen nun zeigen, dass das Auswahlaxiom auf Aussagen führt, die „paradox“ erscheinen. Dazu benötigen wir einige einfache Begriffe.

Definition (Halbordnung)**.**
Eine Halbordnung $\leq$ auf einer Menge M ist eine binäre Relation, die die folgenden Eigenschaften besitzt.

(a) $\forall_{x\in M}\, x \leq x$ (Reflexivität)

(b) $\forall_{x,y\in M}\, x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

(c) $\forall x, y, z \in M\, x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (Transitivität)

Das Paar $(M, \leq)$ heißt dann halbgeordnet.

Man beachte, dass für Elemente x, y einer halbgeordneten Menge $(M, \leq)$ weder $x \leq y$ noch $y \leq x$ gelten muss.

Beispiel.
Es sei X eine Menge und $M := \mathcal{P}(X) := \{N : N \subseteq M\}$ die Potenzmenge von X. Dann ist $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ eine halbgeordnete Menge.

Definition (Totale Ordnung)**.**
Eine totale Ordnung $\leq$ auf einer Menge M ist eine Halbordnung derart, dass für alle $x, y \in M$ stets gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. Das Paar $(M, \leq)$ heißt dann totalgeordnet.

Beispiel.
$(\mathbb{Z}, \leq)$ ist eine totalgeordnete Menge; dagegen ist $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ nicht totalgeordnet (falls $X \neq \emptyset$).

Definition (Wohlgeordnete Menge)**.**
Eine totale Ordnung $\leq$ auf einer Menge M heißt Wohlordnung, wenn jede nichtleere Teil-

menge S von M ein kleinstes Element besitzt (d.h. es gibt ein $s \in S$ mit $s \leq s'$ für alle $s' \in S$). Das Paar $(M, \leq)$ heißt dann wohlgeordnet.

Beispiel.
Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist mit der üblichen $\leq$–Beziehung wohlgeordnet. Dagegen ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der üblichen $\leq$–Beziehung nicht wohlgeordnet (z.B. enthält das offene Intervall $(0,1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ kein kleinstes Element).

Es erscheint wenig intuitiv, dass auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen eine Wohlordnung existiert. Genau dieses besagt aber das sogenannte

Wohlordnungsprinzip (WOP).
Jede Menge lässt sich wohlordnen.

Tatsächlich kann man zeigen, dass unter Ausnutzung des „intuitiv vernünftigen" Auswahlaxioms, das „intuitiv unvernünftige" Wohlordnungsprinzip bewiesen werden kann (und umgekehrt). Dies ist einer der Gründe, derentwegen das Auswahlaxiom innerhalb der Mathematik zunächst sehr umstritten war. Andererseits lässt sich das Auswahlaxiom dazu verwenden, eine Reihe von „intuitiv einsichtigen" Aussagen zu beweisen, auf die man ohne das Auswahlaxiom verzichten müßte. Dazu benötigen wir wieder einige einfache Begriffe.

Definition (Obere Schranke, maximales Element).
Es sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge und $E \subseteq M$. Eine Element $y \in M$ heißt obere Schranke von E, falls $e \leq y$ für alle $e \in E$. Ein Element $y \in E$ heißt maximales Element von E, falls gilt: $\forall_{e \in E}\, y \leq e \Longrightarrow y = e$ (d.h. es gibt innerhalb der Menge E kein „größeres" Element als y).

Beispiel.
(a) In der halbgeordneten Menge $(\mathbb{Z}, \leq)$ sei $E = \{2,3,5\} \subset \mathbb{Z}$. Dann ist $y = 1000$ eine obere Schranke von E. (Man beachte, dass Y nicht zu E gehören muss!) Das einzige maximale Element von E ist $y = 5$.

(b) Es sei $X \neq \emptyset$. In der halbgeordneten Menge $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ sei $E := \{\{x\} : x \in X\}$. Dann ist jedes Element von E maximales Element von E. (Man beachte, dass für ein maximales Element $y \in E$ einer Menge nicht $e \leq y$ für alle $e \in E$ gelten muss!)
Die Menge $X \in \mathcal{P}(X)$ ist die (einzige) obere Schranke von E.

Definition (Induktiv geordnete Menge).
Eine halbgeordnete Menge $(M, \leq)$ heißt induktiv geordnet, wenn jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke in M besitzt.

Die Frage nach der Existenz maximaler Elemente findet durch das sogenannte Zornsche Lemma eine Antwort.

Lemma von Zorn.
Es sei $(X, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge. Dann hat X ein maximales Element.

Ist das Lemma von Zorn nun „intuitiv einsichtig" oder nicht? Tatsächlich stellt sich heraus, dass innerhalb der ZF–Mengenlehre die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\text{AC} \iff \text{WOP} \iff \text{Lemma von Zorn.}$$

Innerhalb der ZFC–Mengenlehre sind also alle drei Aussagen wahr.

Zum Abschluss erwähnen wir eine vierte äquivalente Aussage, den Satz von Tarski: *Für jede unendliche Menge X gibt es eine bijektive Abbildung von X auf $X \times X$.*

Epilog: „Tarski tried to publish his theorem in the Comptes Rendus Acad. Sci. Paris but Fréchet and Lebesgue refused to present it. Fréchet wrote that an implication between two well–known propositions is not a new result. Lebesgue wrote that an implication between two false propositions is of no interest.“

Aufgaben

1. (Duale Extremalprobleme)

   Es sei X ein normierter Raum, $Y \subseteq X$ ein Unterraum und $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass

   $$\inf\{||x_0 - y|| \,:\, y \in Y\} = \max\{|l(x_0)| \,:\, l \in X', ||l|| \leq 1, l \equiv 0 \text{ auf } Y\}.$$

2. (a) Zeigen Sie, dass für jedes $y = (y_j) \in l^\infty$ durch

   $$l_y(x) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\,, \qquad x \in l^1\,,$$

   ein $l_y \in (l^1)'$ gegeben ist.

   (b) Zeigen Sie, dass zu jedem $l \in (l^1)'$ ein $y \in l^\infty$ existiert mit $l = l_y$.

   (c) Zeigen Sie, dass $y \mapsto l_y$ eine lineare bijektive Isometrie von l^∞ auf $(l^1)'$ definiert.

   (d) Es sei der Unterraum $c_0 := \{(y_j) \in l^\infty \,:\, y_j \to 0 \text{ für } j \to \infty\}$ von $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$ gegeben. Zeigen Sie: Es gibt eine lineare bijektive Isometrie von l^1 auf $(c_0)'$.

3. Es sei X ein normierter Raum mit $\dim X = \infty$. Zeigen Sie, dass es eine nichtstetige lineare Abbildung $l : X \to \mathbb{K}$ gibt.

4. Es sei X ein Hilbertraum mit einem Orthonormalsystem $T \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass es dann ein maximales Orthonormalsystem S gibt mit $T \subseteq S$.

4.2 Reflexivität

Satz 4.19.

Es sei X ein normierter Raum und $M \subseteq X$. Ist $\{x'(x) \,:\, x \in M\} \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt für jedes $x' \in X'$, so ist M beschränkt.

Beweis. Wir betrachten für festes $x \in X$ die Abbildung $L_x : X' \to \mathbb{K}$ definiert durch $L_x(x') = x'(x)$, $x' \in X'$. Man beachte, dass L_x linear ist und auch stetig, denn $|L_x(x')| = |x'(x)| \leq ||x|| \cdot ||x'||$ für alle $x' \in X'$. Es gilt ferner

$$\sup_{x \in M} |L_x(x')| = \sup_{x \in M} |x'(x)| < \infty$$

für alle $x' \in X'$. Folglich ist $\{L_x : x \in M\} \subseteq \mathcal{L}(X', \mathbb{K})$ punktweise beschränkt. Wendet man Satz 3.3 auf den *Banachraum* X' an, so folgt $||L_x|| \leq C$ für alle $x \in M$ und ein $C > 0$. Es folgt $|x'(x)| = |L_x(x')| \leq C||x'||$ für alle $x \in M$ und alle $x' \in X'$. Mit Korollar 4.8 ergibt sich

$$||x|| = \sup_{x' \in X' \setminus \{0\}} \frac{|x'(x)|}{||x'||} \leq C, \qquad x \in M.$$

□

Satz 4.20 (Kanonische Abbildung).
Es sei X ein normierter Raum. Dann ist die sog. kanonische Abbildung $J : X \to X''$ mit $X'' := (X')'$ definiert durch

$$(Jx)(x') := x'(x), \qquad x \in X, \quad x' \in X',$$

eine lineare Isometrie (d.h. $||Jx|| = ||x||$ für alle $x \in X$).

Beweis.
$$||Jx|| \overset{\text{Def.}}{=} \sup_{x' \in X' \setminus \{0\}} \frac{|(Jx)(x')|}{||x'||} = \sup_{x' \in X' \setminus \{0\}} \frac{|x'(x)|}{||x'||} \overset{\text{Kor. 4.8}}{=} ||x||.$$

□

Der Dualraum X'' von X' wird als Bidualraum von X bezeichnet. Um die Abhängigkeit der kanonischen Abbildung $J : X \to X''$ vom normierten Raum X zu betonen, schreibt man bisweilen auch J_X anstelle von J. Man kann stets X mit seinem isometrischen Bild $J(X)$ in X'' identifizieren. Da X'' als Dualraum vollständig ist, ist der *abgeschlossene* Unterraum $\overline{J(X)}$ von X'' ebenfalls vollständig. Wir erhalten einen „soften" Beweis von:

Korollar 4.21 (Vervollständigung normierter Räume).
Zu jedem normierten Raum X gibt es einen Banachraum Y und eine lineare Isometrie $J : X \to Y$, derart dass $J(X)$ dicht in Y liegt.

Beweis. Man beachte, dass der abgeschlossene Unterraum $Y := \overline{J(X)}$ als Unterraum des Banachraums X'' vollständig ist. □

Definition (Reflexivität).
Ein normierter Raum X heißt reflexiv, wenn die kanonische Abbildung $J : X \to X''$ surjektiv ist.

Reflexive Räume sind insbesondere stets Banachräume.

Satz 4.22.
Es sei X ein Hilbertraum. Dann ist X reflexiv.

Beweis. Die Abbildung $T_X : X \to X'$, $T_X x := \langle \cdot, x \rangle$ ist konjugiert–linear und bijektiv. T_X ist zudem isometrisch, denn

$$||T_X x|| = \sup_{\substack{y \in X \\ ||y|| \leq 1}} |T_X x(y)| = \sup_{\substack{y \in X \\ ||y|| \leq 1}} |\langle y, x \rangle| = ||x||$$

wegen der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung. Somit ist X' ein Hilbertraum und

$$\langle x', y' \rangle_{X'} := \langle T_X^{-1} y', T_X^{-1} x' \rangle$$

ist das Skalarprodukt auf X' das die Norm auf X' induziert. Daher ist auch $T_{X'} : X' \to X''$, $T_{X'} x' := \langle \cdot, x' \rangle_{X'}$ konjugiert–linear, bijektiv und isometrisch. Somit ist $T_{X'} T_X : X \to X''$ bijektiv und linear und für alle $x \in X$ und $x' \in X'$ gilt

$$[T_{X'}(T_X x)](x') = \langle x', T_X x \rangle_{X'} = \langle x, T_X^{-1} x' \rangle = x'(x) = (J_X x)(x') .$$

Dies zeigt, dass J_X surjektiv ist. □

Inbesondere ist der Folgenraum l^2 reflexiv.

Lemma 4.23.
In einem normierten Raum X gelten die folgenden Aussagen.

(a) Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X ebenfalls reflexiv.

(b) Ist X reflexiv, Y ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann ist auch Y reflexiv.

(c) Ist X' separabel, so ist auch X separabel.

(d) Ist X reflexiv und separabel, so ist auch X' separabel.

Beweis. (a) Es sei $u'' \in U''$. Für $x' \in X'$ gilt insbesondere $x'|_U \in U'$. Die Abbildung $L : X' \to \mathbb{K}$, $L(x') = u''(x'|_U)$ ist linear und stetig, also $L \in X''$. Da X reflexiv ist, existiert ein $\tilde{x} \in X$ mit $J_X \tilde{x} = L$. Somit gilt $x'(\tilde{x}) = u''(x'|_U)$. Nun sei $u' \in U'$ beliebig. Dann gibt es ein u'–fortsetzendes $x' \in X'$ mit $x'|_U = u'$ und es folgt

$$u''(u') = u''(x'|_U) = x'(\tilde{x}) = u'(\tilde{x}) = (J_U \tilde{x})(u').$$

Dies impliziert $J_U x = u''$, also ist J_U surjektiv.
(b) Da $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ folgt mit Bemerkung 4.14, dass $T'' \in \mathcal{L}(X'', Y'')$ bijektiv ist mit $(T'')^{-1} \in \mathcal{L}(Y'', X'')$. Daher ist $T'' J_X T^{-1} : Y \to Y''$ bijektiv und für alle $y \in Y$ und $y' \in Y'$ gilt

$$[T'' J_X T^{-1} y](y') = [J_X T^{-1} y](T' y') = T' y'(T^{-1} y) = y'(y) .$$

(c) Es sei $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X'. Dann gibt es zu jedem x'_n ein $x_n \in X$ mit $||x_n|| = 1$ und $|x'_n(x_n)| \geq ||x'_n||/2$. Betrachte $Y := \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $x' \in X'$ mit $x' \equiv 0$ auf Y. Dann gilt

$$||x' - x'_n|| \geq |x'(x_n) - x'_n(x_n)| = |x'_n(x_n)| \geq ||x'_n||/2 \geq (||x'|| - ||x'_n - x'||)/2 ,$$

d.h. $||x'|| \leq 3||x' - x'_n||$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $x' \equiv 0$. Nach Korollar 4.9 ist daher Y dicht in X und somit ist X separabel (vgl. Satz 1.20).
(d) Es gilt $X'' = J_X X$. Somit ist X'' separabel und wegen (c) ist dann X' separabel. □

Lemma 4.23 (d) zeigt, dass l^1 nicht reflexiv sein kann, da sein Dualraum l^∞ nicht separabel ist (siehe Übung 10.1).

Definition.
Es sei X ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$, wenn $x'(x_n) \to x'(x)$ für alle $x' \in X'$ gilt. In diesem Fall schreibt man $x_n \rightharpoonup x$.

Der schwache Limes einer Folge $(x_n) \subseteq X$ ist eindeutig bestimmt (Hahn–Banach!).

Beispiel.
Es sei $(e_n) \subset l^2$ mit $e_n = (\delta_{jn})_j$. Dann gilt $e_n \rightharpoonup 0$, denn zu $x' \in X'$ existiert genau ein $y = (y_j) \in l^2$ derart, dass $x'(x) = \langle x, y\rangle$ für alle $x \in X$. Somit folgt $x'(e_n) = y_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dagegen ist (e_n) in l^2 nicht im eigentlichen Sinne konvergent.

Lemma 4.24.
Es sei X ein normierter Raum

(a) Aus $x_n \to x$ folgt $x_n \rightharpoonup x$.

(b) Aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt $||x_n|| \leq C$ für ein $C > 0$ und $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$.

Beweis. (a) Für $x' \in X'$ gilt: $|x'(x_n) - x'(x)| \leq ||x'|| \, ||x_n - x||$.
(b) Satz 4.19 zeigt, dass (x_n) beschränkt ist. Für jedes $x' \in X'\backslash\{0\}$ gilt

$$\frac{x'(x)}{||x'||} = \frac{\lim_{n\to\infty} |x'(x_n)|}{||x'||} \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n|| \,.$$

Somit gilt $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$. □

Aus (a) folgt: Es gibt nicht weniger schwach konvergente Folgen als konvergente Folgen. Falls $\dim X < \infty$, so ist jede schwach konvergente Folge auch konvergent.

Satz 4.25 (Satz von Kakutani)**.**
Es sei X ein reflexiver normierter Raum. Dann besitzt jede beschränkte Folge $(x_n) \subset X$ eine schwach konvergente Teilfolge.

„In reflexiven Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel schwach folgenkompakt."

Beweis. Es gelte $||x_n|| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für eine Konstante $C > 0$.

(a) Wir nehmen zunächst zusätzlich an, dass X separabel ist. Nach Lemma 4.23 (d) ist dann auch X' separabel. Sei $\{x'_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Menge in X'. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist dann $|x'_k(x_n)| \leq ||x'_k|| \cdot ||x_n|| \leq C||x'_k||$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $(x'_k(x_n))_n$ besitzt für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine konvergente Teilfolge. Mit dem Diagonalverfahren kann man daher eine Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) finden, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(x'_k(x_{n_j}))_j$ in $\mathbb{K}$ konvergiert.

Nun sei $x' \in X'$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $||x'_k - x'|| < \varepsilon$. Daher folgt

$$|x'(x_{n_j}) - x'(x_{n_l})| \leq 2C||x' - x'_k|| + |x'_k(x_{n_j}) - x'_k(x_{n_l})| \leq (2C+1)\varepsilon$$

für alle hinreichend großen j, l. Somit ist $(x'(x_{n_j}))_j$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$, also konvergent. Folglich ist $L : X' \to \mathbb{K}$ durch

$$L(x') := \lim_{j\to\infty} x'(x_{n_j}) \,, \qquad x' \in X' \,,$$

wohldefiniert und linear. Wegen

$$|L(x')| = \lim_{j\to\infty} |x'(x_{n_j})| \leq C\,||x'||$$

ist $L \in X''$. Da X reflexiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $J_X x = L$ und es ist

$$x'(x) = (J_X x)(x') = L(x') = \lim_{j\to\infty} x'(x_{n_j})\,, \qquad x' \in X'\,.$$

Folglich konvergiert $(x_{n_j})_j$ schwach gegen $x \in X$.

(b) Wir behandeln jetzt den allgemeinen Fall (d.h. X wird nicht als separabel vorausgesetzt). Es sei $(x_n) \subset X$ eine beschränkte Folge und Y der Abschluss von $\operatorname{span}\{x_n\,:\,n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist Y separabel und nach Lemma 4.23 (a) reflexiv. Daher gibt es eine in Y schwach konvergente Teilfolge (x_{n_j}) mit schwachem Limes $x \in Y$, d.h. $y'(x_{n_j}) \to y'(x)$ für alle $y' \in Y'$. Nun sei $x' \in X'$ beliebig. Dann ist $x'|_Y \in Y'$, also $x'(x_{n_j}) = x'|_Y(x_{n_j}) \to x'|_Y(x) = x'(x)$. Es folgt $x_{n_j} \rightharpoonup x$ in X. □

Korollar 4.26 (Projektionssatz in reflexiven Räumen).
Es sei X ein reflexiver normierter Raum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X\backslash Y$ ein $y_0 \in Y$ mit $||x_0 - y_0|| = dist(x_0, Y)$.

Beweis. Es sei $(y_n) \subseteq Y$ mit $||y_n - x_0|| \to \operatorname{dist}(x_0, Y)$. Dann ist $(y_n) \subseteq X$ beschränkt, besitzt also eine schwach konvergente Teilfolge (y_{n_j}) mit Limes $y_0 \in X$. Insbesondere gilt $y_0 \in Y$, denn sonst existiert ein $x' \in X'$ mit $x'(y_0) > 0$ und $x' \equiv 0$ auf Y. Es folgt $||x_0 - y_0|| \geq \operatorname{dist}(y_0, Y)$. Da $x_0 - y_{n_j} \rightharpoonup x_0 - y_0$ gilt nach Lemma 4.24 (b)

$$||x_0 - y_0|| \leq \liminf_{j\to\infty} ||x_0 - y_{n_j}|| = \operatorname{dist}(x_0, Y)\,.$$

□

Bemerkung.
In Korollar 4.26 ist i.Allg. keine Eindeutigkeitsaussage möglich. Ist $X = \mathbb{R}^2$ mit der Maximumnorm $||(x_1, x_2)||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ ausgestattet, $Y = \{(x, 0)\,:\,x \in \mathbb{R}\}$ und $x_0 = (1, 1)$, so gilt $\operatorname{dist}(x_0, Y) = 1 = ||x_0 - y||$ für alle $y = (y_1, y_2) \in Y$ mit $0 \leq y_1 \leq 2$.

Zusammenfassung

Der Satz von Bolzano–Weierstraß besagt:

> *Eine Teilmenge eines endlich–dimensionalen normierten Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Insbesondere besitzt in einem endlich–dimensionalen normierten Raum jede beschränkte Folge stets eine konvergente Teilfolge. In unendlich–dimensionalen normierten Räumen ist der Satz von Bolzano–Weierstraß nicht mehr gültig:

> *In unendlich–dimensionalen normierten Räumen X ist die abgeschlossene Einheitskugel $\{x \in X\,:\,||x|| \leq 1\}$ niemals folgenkompakt. (Korollar 1.11)*

Diesen Makel kann man (teilweise) umgehen, indem man das Konzept der „schwachen Konvergenz“ einführt.

> *In reflexiven Banachräumen besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.* (Satz 4.25)

Aus der Reflexivität eines normierten Raumes folgt daher stets die schwache Folgenkompaktheit der abgeschlossenen Einheitskugel $\{x \in X \,:\, ||x|| \leq 1\}$, siehe Lemma 4.24. Es sei hier ohne Beweis erwähnt, dass davon auch die Umkehrung gilt (der sog. Satz von Eberlein). Reflexivität eines Banachraums X bedeutet, dass man den Raum mit seinem Bidualraum X'' identifizieren kann (mittels der kanonischen Abbildung $J_X : X \to X''$):

> *In normierten Räumen X wirkt jeder Punkt x' aus dem Daulraum X' als stetig lineares Funktional auf X. Ist X reflexiv, so wird jedes stetig lineare Funktional auf X' durch einen Punkt $x \in X$ mittels $J_X x \in X''$ dargestellt.*

Insbesondere gilt:

> *Jeder Hilbertraum ist reflexiv.* (Satz 4.22)

Diese Aussage beruht auf dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 2.26), der es erlaubt jeden Hilbertraum X mit seinem Dualraum X' zu identifizieren.

Aufgaben

1. Beweisen Sie die zu Satz 4.19 „duale“ Aussage: *Es sei X ein Banachraum und $M' \subseteq X'$. Ist $\{L(x) \,:\, L \in M'\} \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt für jedes $x \in X$, so ist M' beschränkt.*

2. Es sei X ein Banachraum. Zeigen Sie: X reflexiv $\iff$ X' reflexiv.

3. Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Man zeige die folgenden Aussagen.

   (a) Ist $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, so folgt aus $x_n \rightharpoonup x$ stets $Tx_n \to Tx$.

   (b) Ist X reflexiv und folgt aus $x_n \rightharpoonup x$ stets $Tx_n \to Tx$, dann ist $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

4. Man zeige, dass in einem endlich–dimensionalen Raum normierten X jede schwach konvergente Folge $(x_n) \subset X$ mit schwachem Limes $x \in X$ auch „stark“ gegen x konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} ||x - x_n|| = 0$ gilt.

5. Es sei X reflexiv. Man zeige, dass für jedes $l \in X'$ gilt:

   $$||l|| = \max_{x \in X,\, ||x||=1} |l(x)| \,.$$

   Folgern Sie, dass $(C([-1, 1];), || \cdot ||_\infty)$ nicht reflexiv ist.

   (Hinweis: Man betrachte etwa $l \in C([-1, 1])'$ definiert durch

   $$l(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\, dt - \int_{0}^{1} x(t)\, dt \,, \qquad x \in C([-1, 1])\,.)$$

Kapitel 5

Spektraltheorie

5.1 Grundlagen der Spektraltheorie

In diesem Kapitel ist X stets ein komplexer Banachraum.

Vorbemerkung. *Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von T, d.h. diejenigen Skalare für die die Gleichung*

$$Tx = \lambda x$$

nichttriviale *Lösungen $x \in X \setminus \{0\}$ (Eigenvektoren) besitzt, spielen für den in der Linearen Algebra betrachteten Fall $\dim X < \infty$ eine zentrale Rolle für die Untersuchung von T. Entscheidend ist hierbei die Existenz komplexer Eigenwerte, die letztlich auf dem Fundamentalsatz der Algebra beruht. Als Konsequenz erhält man die zugehörigen Eigenräume $N(\lambda I - T)$ und verallgemeinerten Eigenräume, die X zerlegen und es ermöglichen, die Abbildung T eingeschränkt auf diese i.Allg. wesentlich "kleineren" invarianten Unterräume zu untersuchen ("Dimensionsreduktion"). Dies führt schlussendlich zu einer einfachen* **Darstellung** *von T in Diagonal– bzw. Jordannormalform.*

Ziel der **Spektraltheorie** ist es, die Eigenwerttheorie für Matrizen auf stetige lineare Operatoren auf Banachräumen zu übertragen. Man stößt hierbei auf eine Reihe schwieriger (=interessanter) Probleme. Das folgende Beispiel zeigt, dass es im Fall $\dim X = \infty$ auch auf komplexen Banachräumen stetige lineare Operatoren gibt, die keine Eigenwerte besitzen.

Beispiel 5.1 (Baby–Ortsoperator).
Es sei $X = L^2([0,1])$ und $T \in \mathcal{L}(X)$ definiert durch

$$(Tx)(t) := tx(t)\,, \qquad x \in L^2([0,1])\,.$$

Dann hat für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Gleichung $Tx = \lambda x$ in X nur die triviale Lösung $x = 0$ (d.h. $x(t) = 0$ für f.a. $t \in [0,1]$). Also hat T keine Eigenwerte und keine Eigenvektoren.

In diesem Beispiel ist daher der Operator $\lambda I - T$ für **jedes** $\lambda \in \mathbb{C}$ injektiv. Allerdings ist $\lambda I - T$ nicht für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ auch surjektiv, denn z.B. gilt für die konstante Funktion $y(t) \equiv 1 \in X$:

$$y \in R(\lambda I - T) \quad \iff \quad \exists_{x \in X}\, (\lambda I - T)x \equiv 1 \quad \iff \quad x(t) = x_\lambda(t) := \frac{1}{\lambda - t} \quad \text{für f.a. } t \in [0,1]\,.$$

Jedoch ist $x_\lambda \notin X = L^2([0,1])$ für $\lambda \in [0,1]$. Für Skalare $\lambda \in [0,1]$ ist also der Operator $\lambda I - T$ nicht bijektiv.

Definition (Spektrum).
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann heißt die Menge

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T : X \to X \text{ nicht bijektiv}\}$$

das **Spektrum von** T.

Beispiel 5.2.
Wir betrachten nochmals den Ortsoperator aus Beispiel 5.1. Es sei also $X = L^2([0,1])$ und $T \in \mathcal{L}(X)$ definiert durch

$$(Tx)(t) := tx(t)\,, \qquad x \in L^2([0,1])\,.$$

Dann gilt $\sigma(T) = [0,1]$. Beispiel 5.1 zeigt $[0,1] \subseteq \sigma(T)$. Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,1]$ ist $t \mapsto (\lambda - t)^{-1}$, $t \in [0,1]$, eine wohldefinierte Funktion in $L^2([0,1]$. Definiert man daher

$$S_\lambda : X \to X, \quad S_\lambda x(t) = \frac{1}{\lambda - t}x(t)$$

so gilt $S_\lambda(\lambda I - T) = I = (\lambda I - T)S_\lambda$. Somit folgt, dass $\lambda I - T : X \to X$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,1]$ bijektiv ist und daher gilt $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.

Ist $\dim X < \infty$ und $T \in \mathcal{L}(X)$, so besteht $\sigma(T)$ genau aus den Eigenwerten von T.

Bemerkung 5.3.
Für $T \in \mathcal{L}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lambda I - T \textit{ bijektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda I - T \textit{ hat Inverse in } \mathcal{L}(X)\,.$$

Die nichttriviale Implikation "$\Longrightarrow$" folgt aus dem BIT (Korollar 3.12) aufgrund unserer Generalannahme, dass der normierte Raum X als vollständig vorausgesetzt wird.

Für $\lambda \neq 0$ gilt daher

$$\lambda \notin \sigma(T) \quad \Longleftrightarrow \quad I - \frac{1}{\lambda}T \text{ hat Inverse in } \mathcal{L}(X)\,.$$

Dies führt auf die Frage, wann $I - S$ für ein $S \in \mathcal{L}(X)$ eine Inverse in $\mathcal{L}(X)$ besitzt, also invertierbar (in $\mathcal{L}(X)$) ist. Hier hilft ein operatortheoretisches Analogon der *geometrischen Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1\,.$$

Satz 5.4 (Geometrische Reihe oder Neumann Reihe).
Für jedes $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $||T|| < 1$ existiert $(I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ und ist gegeben durch

$$(I-T)^{-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} T^n =: \sum_{n=0}^{\infty} T^n\,.$$

Ferner gilt $||(I-T)^{-1}|| \leq (1 - ||T||)^{-1}$.

Slogan: *"Anything which is close to the identity has an inverse."*

Beweis. Die Folge $(S_N) \subseteq \mathcal{L}(X)$ der Partialsummen

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} T^n$$

erfüllt

$$||S_M - S_N|| = \left|\left| \sum_{n=N+1}^{M} T^n \right|\right| \leq \sum_{n=N+1}^{M} ||T||^n \leq ||T||^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} ||T||^n = \frac{||T||^{N+1}}{1 - ||T||} \to 0$$

für $M \geq N \to \infty$. D.h. (S_N) ist eine Cauchyfolge im *Banachraum* $(\mathcal{L}(X), ||\cdot||)$, und folglich konvergent. Für den Limes $S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X)$ gilt

$$(I - T)S = (I - T) \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} (I - T) \sum_{n=0}^{N} T^n = \lim_{N\to\infty} I - T^{N+1} = I$$

und analog $S(I - T) = I$. Schließlich hat man

$$||(I - T)^{-1}|| = ||S|| = \left|\left| \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right|\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||T||^n = \frac{1}{1 - ||T||}\,.$$

□

Bemerkung.
Der Beweis der Invertierbarkeit von $I - T$ falls $||T|| < 1$ lässt sich auch mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes wie folgt führen: Die Abbildung $F : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$, $F(S) := I + TS$, ist wegen $||F(S) - F(S')|| \leq ||T||\,||S - S'||$ für alle $S, S' \in \mathcal{L}(X)$ und $||T|| < 1$ eine Kontraktion, hat also aufgrund der Vollständigkeit von $\mathcal{L}(X)$ genau einen Fixpunkt S, d.h. $(I - T)S = I$. Es gilt $||S|| = ||F(S)|| = ||I + TS|| \leq 1 + ||S||\,||T||$, d.h. $||S|| \leq (1 - ||T||)^{-1}$.
Für das Folgende wird allerdings die explizite **Darstellung** von $(I - T)^{-1}$ als **Potenzreihe** entscheidend sein.

Beispiel 5.5.
Es sei $X = l^\infty$ und $L : X \to X$, $L(x_j) = (x_{j+1})$ der Linksshift. Dann gilt $\sigma(L) = \overline{\mathbb{D}}$. Da $||L|| = 1$ ist $||L/\lambda|| < 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$. Satz 5.4 angewendet auf L/λ zeigt, dass $(I - L/\lambda)$ bijektiv ist. Somit folgt $\sigma(L) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Für $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ wähle $x_\lambda = (\lambda^j) \in l^\infty$. Dann gilt $(\lambda I - L)x_\lambda = 0$, also $\lambda \in \sigma(L)$.

Die Neumann Reihe stellt ein hervoragendes Instrument zur Untersuchung des Spektrums $\sigma(T)$ eines Operators $T \in \mathcal{L}(X)$ dar, da sie Zugriff auf deren Komplementmenge $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, also der Menge derjenigen $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $\lambda I - T$ bijektiv ist, bietet. Dies motiviert folgende Definition.

Definition (Resolventenmenge, Resolvente)**.**
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann heißt

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \lambda I - T : X \to X \text{bijektiv}\} = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$$

Resolventenmenge von T. Die Abbildung

$$R_T : \varrho(T) \to \mathcal{L}(X)\,, \quad R_T(\lambda) := (\lambda I - T)^{-1}$$

heißt **Resolvente** von T.

Satz 5.6 (Elementare Eigenschaften der Resolvente und der Resolventenmenge).
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Die Resolventenmenge $\varrho(T)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und umfasst die Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > ||T||\}$.

(b) Die Resolvente $R_T : \varrho(T) \to \mathcal{L}(X)$ lässt sich um jedem Punkt $\lambda_0 \in \varrho(T)$ als Reihe

$$R_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_T(\lambda_0)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < 1/||R_T(\lambda_0)||$ entwickeln.

(c) $R_T(\lambda) \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$ und $||R_T(\lambda)|| \to \infty$ für $\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T)) \to 0$.

Die Reihe in (b) ist für jedes fixierte $\lambda_0 \in \varrho(T)$ eine **Potenzeihe in** λ mit Werten in $\mathcal{L}(X)$; sie konvergiert für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < 1/||R_T(\lambda_0)||$ bzgl. der Operatornorm in $\mathcal{L}(X)$.

Beweis. Wir fixieren $\lambda_0 \in \varrho(T)$, d.h. $\lambda_0 I - T$ ist invertierbar. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt dann die folgende einfache, aber entscheidende Identität:

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T) - (\lambda_0 - \lambda) I = \Big(I - (\lambda_0 - \lambda) R_T(\lambda_0)\Big) (\lambda_0 I - T) . \tag{R}$$

Wegen Satz 5.4 ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < 1/||R_T(\lambda_0)||$ der Operator

$$I - (\lambda_0 - \lambda) R_T(\lambda_0)$$

invertierbar ist. Somit ist nach (R) auch $\lambda I - T$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < 1/||R_T(\lambda_0)||$ invertierbar. Es gilt

$$R_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_T(\lambda_0)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < 1/||R_T(\lambda_0)||$.
Dies zeigt, dass die offene Kreisscheibe um λ_0 mit Radius $1/||R_T(\lambda_0)||$ in $\varrho(T)$ enthalten ist. Somit ist $\varrho(T)$ offen und $\mathrm{dist}(\lambda_0, \sigma(T)) \geq 1/||R_T(\lambda)||$.
Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > ||T||$, so zeigt Satz 5.4 angewendet auf T/λ, dass $\lambda I - T$ invertierbar ist, d.h. $\lambda \in \varrho(T)$. Es gilt

$$R_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \lambda^{-n-1} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } |\lambda| > ||T|| . \tag{L}$$

Insbesondere gilt

$$||R_T(\lambda)|| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \left|\left|\frac{T}{\lambda}\right|\right|} = \frac{1}{|\lambda| - ||T||} \to 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \to \infty$. □

Bemerkung 5.7 (Resolventenidentität).
Die "beweiserzeugende" Identität (R) kann durch Multiplikation von links mit $R_T(\lambda)$ und von rechts mit $R_T(\lambda_0)$ als

$$R_T(\lambda) - R_T(\lambda_0) = -R_T(\lambda) R_T(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)$$

geschrieben werden (Resolventenidentität). Diese impliziert, dass $R_T(\lambda_0)$ und $R_T(\lambda)$ vertauschbar sind, also $R_T(\lambda_0) R_T(\lambda) = R_T(\lambda) R_T(\lambda_0)$ gilt.

Korollar 5.8 (Elementare Eigenschaften des Spektrums).
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(T)$ eine kompakte Menge in $\mathbb{C}$ und in der Kreisscheibe $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq ||T||\}$ enthalten.

Beispiel 5.9.
Jede nicht–leere kompakte Menge in $\mathbb{C}$ ist Spektrum eines Operators.

Beweis. Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ nicht–leer und kompakt. Es sei $M := \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbar dichte Teilmenge von K. Wir betrachten

$$T : l^2 \to l^2 , \qquad T(x_n) := (\lambda_n x_n) .$$

Dann ist $T \in \mathcal{L}(l^2)$ mit $||T|| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$ und jedes λ_n ist ein Eigenwert von T, d.h. $M \subseteq \sigma(T)$. Korollar 5.8 impliziert, dass $K \subseteq \sigma(T)$. Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus K$, so gibt es ein $r > 0$ mit $|\lambda - \lambda_0| \geq r$ für alle $\lambda \in K$. Daher ist der Operator

$$S : l^2 \to l^2 , \qquad S(x_n) := \left(\frac{x_n}{\lambda_0 - \lambda_n} \right)$$

stetig mit $||S|| \leq 1/r$ und es gilt

$$(\lambda_0 I - T)S = S(\lambda_0 I - T) = I ,$$

d.h. $\lambda_0 \in \varrho(T)$. Dies zeigt $\mathbb{C} \setminus K \subseteq \varrho(T)$, also $\sigma(T) \subseteq K$. Zusammen ergibt sich $\sigma(T) = K$. □

Aufgaben

1. (Idempotente Elemente)
   Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $T^2 = T$. Zeigen Sie, dass $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$ und berechnen Sie $R_T(\lambda)$ für $\lambda \in \varrho(T)$.

2. Bestimmen Sie jeweils das Spektrum des Linksshift– und des Rechtshift–Operators auf l^2.

3. Es sei $g \in C([0, 1])$ und $M_g \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$ der von g induzierte Multiplikationsoperator, d.h. $M_\phi f = fg$. Zeigen Sie, dass $\sigma(M_g) = g([0, 1])$.

4. (Approximative Eigenwerte)
   Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Wir nennen $\lambda \in \mathbb{C}$ **approximativen Eigenwert von** T, falls es eine Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $||x_n|| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $(\lambda I - T)x_n \to 0$. Offensichtlich ist jeder approximative Eigenwert von T ein Element von $\sigma(T)$.

   Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

      (i) λ ist kein approximativer Eigenwert von T.

      (ii) Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $||\lambda x - Tx|| \geq \varepsilon ||x||$ für alle $x \in X$.

      (iii) $\lambda I - T$ ist injektiv und $R(\lambda I - T)$ ist abgeschlossen.

(b) Es sei $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Dann ist λ approximativer Eigenwert von T.

(Hinweis: Es seien $\lambda_n \in \varrho(T)$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Zeigen Sie, dass Punkte $y_n \in X$ existieren mit $||y_n|| \leq 1$ und $||R_T(\lambda_n)y_n|| \to \infty$, und betrachten Sie $x_n := R_T(\lambda_n)y_n/||R_T(\lambda_n)y_n||$.)

(c) (Randpunkte des Spektrums)
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$ und $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Zeigen Sie, dass $R(\lambda I - T) \neq X$.

(Hinweis: Wählen Sie λ_n wie in (b) und zeigen Sie, dass es Punkte $||y_n|| \leq 1$ gibt mit $||R_T(\lambda_n)y_n|| > \frac{1}{2|\lambda_n - \lambda|}$. Beachten Sie dann Korollar 3.9.)

5.2 Potenzreihenkalkül und die Formel von Beurling–Gelfand

Die nicht–elementaren Teile der Spektraltheorie beruhen auf der Tatsache, dass sich die Resolvente $\lambda \mapsto R_T(\lambda)$ gemäß Satz 5.6 (b) in jedem Punkt $\lambda_0 \in \varrho(T)$ als Potenzreihe bzgl. λ, also als "$\mathcal{L}(X)$–wertige komplex differenzierbare Funktion" schreiben lässt. Wir benötigen daher im folgenden einige wenige Grundtatsachen über komplex differenzierbare (=holomorphe) Funktionen.

Bemerkung 5.10.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt holomorph in U, falls eine der beiden äquivalenten Aussagen gilt:

(a) In jedem Punkt $z_0 \in U$ ist f komplex differenzierbar, d.h. der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

existiert.

(b) Für jeden Punkt $z_0 \in U$ existiert eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ und ein $r \in (0, dist(z_0, \partial U)]$ derart, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \qquad z \in B(z_0, r)\,.$$

In diesem Fall lässt sich in (b) $r = dist(z_0, \partial U)$ wählen.

Mit $\mathcal{H}(U)$ bezeichnen wir die Menge aller holomorphen Funktionen in U.

Definition (Banach–wertige holomorphe Funktionen)**.**
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt **holomorph**, falls $l \circ f \in \mathcal{H}(U)$ für jedes $l \in Y'$.

Korollar 5.11.
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist $R_T : \varrho(T) \to \mathcal{L}(X)$ eine holomorphe Abbildung.

Beweis. Es sei $l \in \mathcal{L}(X)'$. Fixiere $\lambda_0 \in \varrho(T)$. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < 1/||R_T(\lambda_0)||$ gemäß Satz 5.6 (b)

$$l\,(R_T(\lambda)) = l\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_T(\lambda_0)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n l\left(R_T(\lambda_0)^{n+1}\right)(\lambda - \lambda_0)^n$$

aufgrund der Konvergenz der Resolventenreihe in der Operatornorm. Dies bedeutet, dass die Funktion $l \circ R_T : \varrho(T) \to \mathbb{C}$ für jeden Punkt $\lambda_0 \in \varrho(T)$ in einer Kreisscheibe um λ_0 als Potenzreihe dargestellt werden kann, also nach Bemerkung 5.10 holomorph in $\varrho(T)$ ist. □

Die in Satz 5.6 bzw. Korollar 5.11 bewiesene Eigenschaft, dass $R_T : \varrho(T) \to \mathcal{L}(X)$ holomorph ist, hat etliche tiefliegende Konsequenzen. Wir beweisen zunächst den folgenden fundamentalen Satz.

Satz 5.12.
Für jedes $T \in \mathcal{L}(X)$ ist $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Man beachte, dass für den Fall $X = \mathbb{C}^N$ diese Aussage gleichbedeutend damit ist, dass jede Matrix $T \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mindestens einen Eigenwert in $\mathbb{C}$ besitzt. Folglich ist Satz 5.12 selbst für endliche dimensionale Banachräume **nicht trivial** und beruht letztlich auf dem **Fundamentalsatz der Algebra**. Den Beweis von Satz 5.12 führen wir mit mithilfe des **Satzes von Liouville** für auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen: *Jede beschränkte Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ist konstant.*

Bemerkung.
Der Satz von Liouville ermöglicht einen “$1\frac{3}{4}$–Zeilen” Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra: Ist p ein Polynom vom Grade $n \in \mathbb{N}$ ohne Nullstelle, so ist $1/p \in H(\mathbb{C})$ wegen $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$ beschränkt. Nach Liouville wäre $1/p$ also auch p konstant. Widerspruch!

Beweis von Satz 5.12. Es sei $\sigma(T) = \emptyset$. Wähle $l \in \mathcal{L}(X)'$ beliebig. Dann ist $l \circ R_T \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, wobei wegen Satz 5.6 (c) gilt, dass $|(l \circ R_T)(\lambda)| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$. D.h. $l \circ R_T$ ist beschränkt, also konstant nach dem Satz von Liouville. Folglich ist $(l \circ R_T)(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Da $l \in X'$ beliebig war, folgt mit Korollar 4.7 $R_T(\lambda) = 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. Widerspruch! □

Definition (Spektralradius)**.**
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann heißt die Zahl

$$r(T) := \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$$

Spektralradius von T.

Bemerkung 5.13.
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt $r(T) \leq ||T||$ aufgrund von Korollar 5.8. I.Allg. gilt jedoch strikte Ungleichung, wie etwa Beispiel 5.15 zeigt. In diesem Zusammenhang verweisen wir auch auf den frappierenden Satz von Hirschfeld–Żelazko (Aufgabe 5.2.2).

Die folgende berühmte Formel zeigt, dass sich der Spektralradius des rein algebraisch definierten Spektrums *analytisch* darstellen lässt.

Satz 5.14 (Formel von Beurling–Gelfand)**.**
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}.$$

Die Formel von Beurling–Gelfand ist eines der eindrucksvollsten und folgenreichsten Ergebnisse der Operatortheorie.

Für Fouriertransformationen von Maßen wurde diese Formel 1938 von Beurling gefunden. Der allgemeine Fall (den Beurling bereits andeutete) wurde dann 1941 von Gelfand behandelt. Sobald gezeigt ist, dass der Limes in Satz 5.14 existiert, ist die Formel von Beurling-Gelfand im Wesentlichen eine "Banach–wertige" Variante der Cauchy–Hadamardschen Formel für den Konvergenzradius der Potenzreihe von $z \mapsto (1-Tz)^{-1}$. Den Nachweis der Existenz des Limes kann man auch führen, indem man das folgende elementare (aber nicht triviale) "Lemma von Fekete" auf $\alpha_n = ||T^n||$ anwendet: Gilt $\alpha_{n+m} \le \alpha_n \alpha_m$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$ für eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen α_n, so konvergiert $(\sqrt[n]{\alpha_n})$ gegen $\inf \sqrt[n]{\alpha_n}$, siehe Polyá & Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 1. Abschnitt, Aufgabe 98.

Beispiel 5.15 (Volterra Operator).
Es sei $X = C([0,1])$ und $V \in \mathcal{L}(X)$ definiert durch

$$(Vx)(t) := \int_0^t x(s)\,ds\,.$$

Dann gilt $r(V) = 0$, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(V^n x)(t) = \int_0^t x(s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds$$

und daher $||V^n|| \le 1/n!$. Zusammen mit Satz 5.12 folgt $\sigma(V) = \{0\}$.

Beweis von Satz 5.14. (i) Es sei $\lambda \in \sigma(T)$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)W = W(\lambda I - T)$$

mit

$$W = \sum_{k=0}^{n-1} T^k \lambda^{n-1-k} \in \mathcal{L}(X)\,.$$

Daher folgt $\lambda^n \in \sigma(T^n)$, denn sonst wäre $\lambda I - T$ bijektiv. Somit gilt $|\lambda|^n \le ||T^n||$ nach Korollar 5.8 angewendet auf T^n. Es folgt $r(T) \le \liminf ||T^n||^{1/n}$.

(ii) Wir betrachten für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1/r(T)$ die Abbildung

$$g(z) := (I - zT)^{-1}\,.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und nach Satz 5.4 gilt

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1/||T||$. Man beachte, dass $R_T(\lambda) = g(1/\lambda)/\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > r(T)$. Es sei $l \in \mathcal{L}(X)'$. Dann ist $l \circ g$ holomorph in $B(0, 1/r(T))$ und es gilt

$$(l \circ g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} l(T^n) z^n\,,$$

für alle $z \in B(0, 1/||T||)$. Diese Potenzreihenentwicklung ist dann wegen des Identitätsprinzips für Potenzreihen für alle $z \in B(0, 1/r(T))$ gültig. Folglich ist die Summandenfolge $(l(T^n)z^n)_n$ für jedes $z \in B(0, 1/r(T))$ eine Nullfolge. Insbesondere gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > r(T)$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left| \frac{l(T^n)}{\lambda^{n+1}} \right| < \infty \text{ für alle } l \in \mathcal{L}(X)',$$

also mit Satz 4.19

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left| \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right|\right| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||} \leq |\lambda| \,.$$

Da diese Ungleichung für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > r(T)$ gilt, folgt $r(T) \geq \limsup ||T^n||^{1/n}$. □

Das folgende Korollar aus der Formel von Beurling–Gelfand spielt **die** zentrale Rolle für die Spektraltheorie normaler (und damit insbesondere auch für selbstadjungierte bzw. unitäre) Operatoren.

Korollar 5.16 (Normale Operatoren: Spektralradius=Operatornorm)**.**
Es sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ normal. Dann gilt $r(T) = ||T||$. Insbesondere gibt es ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = ||T||$.

Beweis. Da $||Tx||^4 = \langle Tx, Tx\rangle^2 = \langle T^*Tx, x\rangle^2 \leq ||T^*Tx||^2 = \langle T^*Tx, T^*Tx\rangle \stackrel{(*)}{=} \langle T^2x, T^2x\rangle = ||T^2x||^2 \leq ||T^2||^2 \leq ||T||^4$ für alle $x \in X$ mit $||x|| = 1$ gilt (die Voraussetzung, dass T is normal ist, wurde in $(*)$ verwendet), ergibt sich $||T^2|| = ||T||^2$. Da mit T auch T^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ normal ist, folgt $||T^{2^n}|| = ||T||^{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt $r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{||T^{2^n}||} = ||T||$. □

Satz 5.17 (Potenzreihenkalkül I)**.**
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$, $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$, und der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

sei strikt größer als $r(T)$. Dann konvergiert die Reihe

$$f(T) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

absolut in $\mathcal{L}(X)$. Es gilt:

(i) $f(T)$ ist genau dann invertierbar, wenn f auf $\sigma(T)$ nullstellenfrei ist.

(ii) $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$, der sog. Spektralabbildungssatz.

Bemerkungen 5.18.

(i) Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$, $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen, deren Konvergenzradius strikt größer ist als $r(T)$. Dann gilt

$$f(T)\, g(T) = (f \cdot g)(T) = (g \cdot f)(T) = g(T)\, f(T) \,.$$

(Aufgrund der absoluten Konvergenz der Potenzreihen $f(T)$ und $g(T)$ konvergiert auch das Cauchyprodukt $(f \cdot g)(T) = (g \cdot f)(T)$ absolut gegen $f(T)\, g(T)$ und gegen $g(T)\, f(T)$.)

(ii) *Es seien $S, T \in \mathcal{L}(X)$ mit $ST = TS$, $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_f > r(T)$ und $R_g > r(S)$. Dann gilt*

$$f(T)\, g(S) = g(S)\, f(T)\,.$$

(Hierfür beachte man, dass $(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n)(\sum_{n=0}^{N} b_n S^n) = (\sum_{n=0}^{N} b_n S^n)(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.)

Beweis von Satz 5.17. Da $\mathcal{L}(X)$ ein Banachraum ist, können wir das Wurzelkriterium anwenden. Bezeichnet R den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z)$, so zeigt die Formel von Beurling–Gelfand, dass

$$\limsup_{n\to\infty} ||a_n T^n||^{1/n} = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right) r(T) = \frac{r(T)}{R} < 1\,.$$

Daher konvergiert die Reihe $f(T)$ absolut.

O.E. sei nun $f \not\equiv 0$. Ist $r \in (r(T), R)$, so hat f in $|z| \leq r$ nur endlich viele Nullstellen $z_1, \dots, z_N$ (mit Vielfachheiten gezählt), d.h. es gilt

$$f(z) = (z_1 - z) \dots (z_N - z) h(z)$$

mit einer in $|z| < R$ holomorphen Funktion h, die in $|z| \leq r$ keine Nullstellen besitzt. Daher ist $g := 1/h$ holomorph auf $|z| < r$. Aus $h(z)g(z) = 1$ für alle $|z| < r$ folgt $g(T)h(T) = h(T)g(T) = I$, d.h. $h(T)$ ist invertierbar. Insbesondere gilt

$$f(T) = (z_1 I - T) \dots (z_N I - T) h(T) \qquad \text{mit } h(T) \text{ invertierbar.}$$

Hieraus liest man ab: $f(T)$ ist genau dann invertierbar, wenn $z_1, \dots, z_N \notin \sigma(T)$, d.h. genau dann, wenn $0 \notin f(\sigma(T))$. Insbesondere gilt: $\lambda \in f(\sigma(T)) \iff \lambda - f$ hat Nullstelle in $\sigma(T)$ $\iff \lambda I - f(T)$ ist nicht invertierbar $\iff \lambda \in \sigma(f(T))$. □

Satz 5.19 (Fundamentallemma für normale Operatoren).
Es sei X ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(X)$ normal, $R > r(T)$ und $f : B(0, R) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$||f(T)|| = ||f||_{\sigma(T)}$$

mit $||f||_{\sigma(T)} = \max\{|f(z)| \,:\, z \in \sigma(T)\}$

Beweis. Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $z \in B(0, R)$ und $\overline{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} z^k$ für $z \in B(0, R)$. Dann gilt wegen $||T|| = ||T^*||$, siehe 3.26, $\overline{f}(T^*) \in \mathcal{L}(T)$. Dies impliziert

$$f(T)^* = \overline{f}(T^*).$$

Da T normal ist, ist auch $f(T)$ normal, siehe Bemerkungen 5.18 (ii). Somit gilt

$$||f(T)|| = r(f(T)) = \max_{z\in\sigma(f(T))} |z| = \max_{z\in f(\sigma(T))} |z| = \max_{z\in\sigma(T)} |f(z)| = ||f||_{\sigma(T)}\,.$$

□

Korollar 5.20 (Exponentialfunktion).
Für jedes $T \in \mathcal{L}(X)$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(T) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n$$

in $\mathcal{L}(X)$.

(i) Für alle $T, S \in \mathcal{L}(X)$ mit $TS = ST$ gilt $\exp(T+S) = \exp(T)\exp(S)$.

(ii) $\exp(T)$ ist invertierbar mit $\exp(T)^{-1} = \exp(-T)$.

Beispiel 5.21.

(a) Es sei $x_0 \in X$ und $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann hat das Anfangswertproblem $x' = Ax$, $x(0) = x_0$ genau eine Lösung $x : \mathbb{R} \to X$. Diese ist gegeben durch $x(t) = \exp(At)x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) (Der Hauptsatz über asymptotische Stabilität bei linearen ODEs)
Es sei $A \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \gamma\}$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit

$$||\exp(At)|| \leq ce^{\gamma t} \qquad \text{für alle } t \geq 0\,.$$

Falls $\sigma(A)$ in der linken Halbebene liegt, so gilt daher $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ für jede Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $x' = Ax$.

Beweis. (a) Für alle $t, h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \frac{e^{Ah} - e^0}{h} e^{At} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} h^{n-1}\right) e^{At} \to Ae^{At}$$

für $h \to 0$, denn

$$\left|\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} h^{n-1} - A\right|\right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{||A||^n}{n!} \leq |h| e^{||A||} \text{ für alle } |h| \leq 1\,.$$

Somit ist $x : \mathbb{R} \to X$, $x(t) = e^{At}x_0$ differenzierbar und löst das AWP $x' = Ax$, $x(0) = x_0$. Ist $x_* : \mathbb{R} \to X$ eine weitere Lösung des AWPs, so ist $y(t) := e^{-At}x_*(t)$ differenzierbar mit $y'(t) = -Ae^{-At}x_*(t) + e^{-At}Ax_*(t) = 0$ und $y(0) = x_0$. Ist $L \in X'$, so ist die differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $h(t) = L(y(t))$ wegen $h'(t) = (L \circ y)'(t) = L(y'(t)) = 0$ konstant, also $L(y(t)) = L(x_0)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Mit Korollar 4.7 folgt $y(t) = x_0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, also $x_*(t) = e^{At}x_0$.

(b) Für jedes $w \in \sigma(e^A) = e^{\sigma(A)}$ gilt $w = e^z$ für ein $z \in \sigma(A)$, also $|w| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} < e^\gamma$. Nun sei zu $\varepsilon > 0$ mit $r(e^A) + \varepsilon \leq e^\gamma$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$||e^{An}|| = ||(e^A)^n|| \leq \left(r(e^A) + \varepsilon\right)^n \leq (e^\gamma)^n$$

für alle $n \geq N$. Dies ist aufgrund der Beurling–Gelfand Formel möglich. Setzt man $M := \max_{\tau\in[0,1]} ||e^{\tau A}||$, so gilt für alle $t \geq N$, $t = n + \tau$ für eine natürliche Zahl $n \geq N$ und einem $\tau \in [0,1)$

$$||e^{At}|| = ||e^{\tau A} e^{An}|| \leq ||e^{\tau A}||\,||e^{An}|| \leq M\,(e^{\gamma})^n = Me^{-\tau\gamma}\,e^{t\gamma} \leq Me^{|\gamma|}\,e^{t\gamma}\,.$$

Setzt man für c die größere der beiden Zahlen $Me^{|\gamma|}$ und $\max_{t\in[0,N]} e^{-\gamma t}||e^{At}||$, so folgt die Behauptung. □

Satz 5.22 (Potenzreihenkalkül II).
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$, $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ und die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

konvergiere im Punkt $z = ||T||$ absolut. Dann konvergiert die Reihe

$$f(T) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

absolut in $\mathcal{L}(X)$ gegen einen Punkt $f(T) \in \mathcal{L}(X)$.

Beweis. Die Folge der Partialsummen

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n T^n \in \mathcal{L}(X)$$

ist wegen der Dreiecksungleichung und der Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\,||T||^n$ eine Cauchyfolge

$$||S_N - S_K|| = \left|\left|\sum_{n=K+1}^{N} a_n T^n\right|\right| \leq \sum_{n=K+1}^{N} |a_n|\,||T||^n\,,$$

also konvergent im Banachraum $\mathcal{L}(X)$. □

Bemerkungen 5.23.

(i) Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$, $(a_n),(b_n) \subseteq \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen, die in $z = ||T||$ absolut konvergieren. Dann gilt

$$f(T)\,g(T) = (f\cdot g)(T) = (g \cdot f)(T) = g(T)\,f(T)\,.$$

(ii) Es seien $S,T \in \mathcal{L}(X)$ mit $ST = TS$, $(a_n),(b_n) \subseteq \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe, die in $z = ||T||$ absolut konvergiert und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ eine Potenzreihe, die in $z = ||S||$ absolut konvergiert. Dann gilt

$$f(T)\,g(S) = g(S)\,f(T)\,.$$

Satz 5.24 (Quadratwurzel).
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $||T|| \leq 1$. Dann konvergiert die Quadratwurzelreihe

$$I + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T^n \qquad \text{mit } c_n := \binom{1/2}{n}(-1)^n \leq 0$$

gegen ein $B \in \mathcal{L}(X)$ mit $B^2 = I - T$, d.h. $B := \sqrt{I-T}$. Es gilt $BC = CB$ für alle $C \in \mathcal{L}(X)$ mit $TC = CT$.

Beweis. Für die Binomialreihe (=Taylorreihe für die Funktion $\sqrt{1-x}$)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}(-1)^n z^n =: 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

gilt $f(x) = \sqrt{1-x}$ für alle $-1 < x < 1$ (vgl. Analysis I). Da $c_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert diese Potenzreihe absolut für jedes $|z| = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{1/2}{n}(-1)^n \right| |z|^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 - \lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 - \lim_{x \to 1-} (\sqrt{1-x} - 1) = 2\,.$$

Daher ist

$$B := f(T) := I + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T^n \in \mathcal{L}(X)$$

wohldefiniert. Da die Potenzreihe f^2 in $|z| = 1$ absolut konvergiert und für $x \in (-1,1)$ mit $1 - x$ übereinstimmt, folgt $f^2(z) = 1 - z$. Bemerkung 5.23 impliziert $B^2 = I - T$. $\square$

Man beachte, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -1$.

Korollar 5.25.
Es sei X ein Hilbertraum und $T = \mathcal{L}(X)$ positiv semidefinit, d.h. $T = T^*$ und $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, mit $||T|| \leq 1$. Dann ist $\sqrt{I-T}$ positiv semidefinit.

Bemerkung.
Da nach Voraussetzung X ein komplexer Hilbertraum ist, impliziert die Bedingung $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in X$, dass T selbstadjungiert ist, siehe Bemerkung 3.24.

Beweis von Korollar 5.25. Es gilt $\sqrt{I-T} = I + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T^n$ mit $c_n \leq 0$, siehe Satz 5.24. Für alle $x \in X$ gilt

$$\langle \sqrt{I-T}x, x\rangle = \langle x, x\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle T^n x, x\rangle \geq 0,$$

da $c_n \leq 0$, $\langle T^n x, x\rangle \leq ||x||^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -1$. Daher ist $\sqrt{I-T}$ positiv semidefinit ist. $\square$

Satz 5.24 ermöglicht in einfacher Weise, Wurzeln aus positiv definiten Operatoren zu ziehen und stiftet damit einen direkten Zugang zur Polardarstellung beschränkter Operatoren. Die folgenden Aussagen werden in der Literatur oft als Anwendung des Spektralsatzes für beschränkte selbstadjungierte Operatoren. Tatsächlich ist dieses tiefliegende Hilfsmittel nicht notwendig. Die Quadratwurzelreihe (Satz 5.24) genügt.

Satz 5.26 (Quadratwurzeln aus Operatoren).
Es sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ positiv semidefinit. Dann existiert genau ein positiv semidefinites $\sqrt{T} := S \in \mathcal{L}(X)$ mit $S^2 = T$. Es gilt $\sqrt{T}A_0 = A_0\sqrt{T}$ für alle $A_0 \in \mathcal{L}(X)$ mit $TA_0 = A_0T$.

Beweis. Existenz: Es sei o.E. $T \neq 0$ und $A := I - T/||T||$. Für $||x|| = 1$ gilt

$$\langle Ax, x\rangle = 1 - \langle Tx, x\rangle/||T|| \in [0, 1]\,.$$

Somit ist A positiv semidefinit und nach Satz 3.25 gilt $||A|| \leq 1$. Nach Korollar 5.25 existiert ein $B \in \mathcal{L}(X)$ positiv semidefinit mit $B^2 = I - A = T/||T||$, d.h. $S := \sqrt{||T||}B \in \mathcal{L}(X)$ erfüllt $S^2 = T$. Insbesondere ist S positiv semidefinit.
Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $S' \in \mathcal{L}(X)$ positiv semidefinit mit $S'^2 = T$. Da $S'T = S'S'^2 = S'^2S' = TS'$ folgt $S'S = SS'$, also $(S'+S)(S'-S) = S'^2 - S^2 = T - T = 0$. Da S' und S positiv semidefinit sind, folgt $\langle Sx, x\rangle = 0$ und $\langle S'x, x\rangle = 0$ für alle $x \in R(S'-S)$. Insbesondere gilt $\langle S'x, x\rangle = 0$ für alle $x \in \overline{R(S'-S)}$. Da $S'x \in \overline{R(S'-S)}$ für alle $x \in \overline{R(S'-S)}$ gilt, folgt mit Satz 3.25 $S(S'-S) = 0$ und analog $S'(S'-S) = 0$. Dies zeigt $(S'-S)^2 = 0$, d.h. $||(S'-S)x||^2 = \langle (S'-S)^2x, x\rangle = 0$ für alle $x \in X$, also $S' = S$. □

Bemerkung.
Es seien X, Y Hilberträume. Für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist $T^*T \in \mathcal{L}(X)$ stets positiv semidefinit, denn $\langle T^*Tx, x\rangle = ||Tx||^2 \geq 0$.

Definition.
Es seien X und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann heißt $|T| := \sqrt{T^*T} \in \mathcal{L}(X)$ der Absolutbetrag von T.

Satz 5.27 (Polarzerlegung).
Es seien X und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann existiert eine surjektive lineare Isometrie $U : R(|T|) \to R(T)$ derart, dass

$$T = U|T|\,.$$

Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ invertierbar, so ist $U \in \mathcal{L}(X, Y)$ unitär.

Dieser Satz ist das Analogon zur Polarkoordinatendarstellung

$$z = e^{i\varphi}|z|$$

komplexer Zahlen ($\varphi = \arg z$).

Beweis. Für alle $x \in X$ gilt

$$||\,|T|x||^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle |T|^2x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2\,.$$

Somit ist die Zuordnung $U : R(|T|) \to R(T)$, $U(|T|x) = Tx$, wohldefiniert und eine surjektive Isometrie.
Falls $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$ existiert, so gilt $R(T) = Y$. Da U stetig ist, ist $R(|T|)$ abgeschlossen in X. Somit folgt

$$X = R(|T|) \oplus R(|T|)^\perp = R(|T|) \oplus N(|T|^*) = R(|T|) \oplus N(|T|) = R(|T|) \oplus N(T) = R(|T|) \oplus \{0\}.$$

Somit ist U nach Satz 3.27 unitär. □

Aufgaben

1. (Submultiplikativität und Subadditivität des Spektralradius)
Es seien $T, S \in \mathcal{L}(X)$ mit $TS = ST$. Zeigen Sie, dass $r(TS) \leq r(T)r(S)$ (einfach) und $r(T+S) \leq r(T) + r(S)$ (schwieriger).

2. (Der Satz von Hirschfeld–Żelazko)
Es sei $C > 0$ derart, dass $||T|| \leq Cr(T)$ für alle $T \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie: $\mathcal{L}(X)$ ist kommutativ, d.h. $\dim X \leq 1$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $\lambda \mapsto e^{\lambda T} S e^{-\lambda T}$ konstant ist und berechnen Sie dann die Ableitung in $\lambda = 0$.

5.3 Das Spektrum stetiger Operatoren

Definition (Punktspektrum, approximativer Eigenwert, approximatives Spektrum)**.**
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Die Menge $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ aller Eigenwerte von T heißt **Punktspektrum** von T. Wir nennen $\lambda \in \mathbb{C}$ **approximativen Eigenwert von** T, falls es eine Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $||x_n|| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass

$$||Tx_n - \lambda x_n|| \to 0\,.$$

Die Menge $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ aller approximativen Eigenwerte von T heißt **approximatives Spektrum** von T.

Lemma 5.28.
Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)\,.$$

Beweis. Jeder Eigenwert ist offenbar auch approximativer Eigenwert. Jeder approximative Eigenwert λ von T liegt im Spektrum von T, denn anderenfalls würde $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ existieren, im Widerspruch zu

$$1 \leftarrow ||x_n|| = ||(\lambda I - T)^{-1}(Tx_n - \lambda x_n)|| \leq ||(\lambda I - T)^{-1}||\,||Tx_n - \lambda x_n|| \to 0\,.$$

□

Beispiel 5.29.
Es sei $X = L^2([0,1])$ und $T : X \to X$, $(Tx)(t) := tx(t)$. Dann gilt $\sigma_{ap}(T) = [0,1]$. Beispiele 5.1 und 5.2 zeigen $\sigma_p(T) = \emptyset$ und $\sigma(T) = [0,1]$. Wähle nun $\lambda \in [0,1]$ und betrachte $A_n := [0,1] \cap [\lambda - 1/n, \lambda + 1/n]$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $x_n := y_n/||y_n||$ mit $y_n := \chi_{A_n}$

$$||Tx_n - \lambda x_n||_2^2 = \int_0^1 |t-\lambda|^2 |x_n(t)|^2\,dt \leq \frac{1}{n^2} \int_0^1 |t-\lambda|^2 |x_n(t)|^2\,dt = \frac{1}{n^2} \to 0\,.$$

Satz 5.30.
Es sei $X \neq \{0\}$ und $T \in \mathcal{L}(X)$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$;

(b) $\lambda I - T$ *ist nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein* $\varepsilon > 0$ *mit* $||\lambda x - Tx|| \geq \varepsilon ||x||$ *für alle* $x \in X$.

(c) $\lambda I - T$ *ist injektiv und* $R(\lambda I - T)$ *ist abgeschlossen.*

Ferner ist $\sigma_{ap}(T)$ *abgeschlossen und* $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. *Insbesondere ist stets* $\sigma_{ap}(T) \neq \emptyset$.

Beweis. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) ergibt sich direkt aus der Definition und (b) $\Longleftrightarrow$ (c) aus dem Closed Range Theorem (Korollar 3.15).
Es sei (λ_n) eine Folge in $\sigma_{\text{ap}}(T)$ mit $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{C}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in X$ mit $||x_n|| = 1$, so dass $||(\lambda_n I - T)x_n|| \leq 1/n$. Dies impliziert $||(\lambda I - T)x_n|| \leq |\lambda - \lambda_n| + 1/n \to 0$.
Nun sei $\lambda \in \partial\sigma(T) = \partial\varrho(T)$. Da $\varrho(T)$ offen ist, gilt $\lambda \notin \varrho(T)$, jedoch gibt es eine Folge (λ_n) in $\varrho(T)$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Nach Satz 5.6 gilt $||R_T(\lambda_n)|| \to \infty$. Somit gibt es eine Folge (y_n) in X mit $||y_n|| = 1$ und $||R_T(\lambda_n)y_n|| \to \infty$. Wir setzen $x_n := R_T(\lambda_n)y_n/||R_T(\lambda_n)y_n|| \in X$. Dann gilt $||x_n|| = 1$ sowie

$$\begin{aligned}
||Tx_n - \lambda x_n|| &= \frac{1}{||R_T(\lambda_n)y_n||}||(\lambda I - T)R_T(\lambda_n)y_n|| \\
&= \frac{1}{||R_T(\lambda_n)y_n||}||\left[(\lambda I - \lambda_n I) + (\lambda_n I - T)\right] R_T(\lambda_n)y_n|| \\
&\leq |\lambda - \lambda_n| + \frac{1}{||R_T(\lambda_n)y_n||} \to 0\,.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(T)$. □

Satz 5.31 (Approximative Eigenwerte kompakter Operatoren).
Es sei X *ein normierter Raum,* $T \in \mathcal{L}(X)$ *kompakt und* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ein approximativer Eigenwert von* T. *Dann ist* λ *ein Eigenwert von* T.

Beweis. Es existieren Punkte $x_n \in X$ mit $||x_n|| = 1$ und $||(\lambda I - T)x_n|| < 1/n$. Da T kompakt ist, gilt für eine Teilfolge $Tx_{n_k} \to y \in X$, also $x_{n_k} = (\lambda x_{n_k} - Tx_{n_k})/\lambda + \lambda^{-1}Tx_{n_k} \to x = y/\lambda \in X$ mit $||x|| = 1$ und $Tx = \lambda x$. □

Bemerkung.
Falls $\dim X = \infty$ und $T \in \mathcal{K}(X)$, so gilt stets $0 \in \sigma(T)$.

Satz 5.32 (Spektrum normaler Operatoren).
Es sei $X \neq \{0\}$ *ein Hilbertraum,* $T \in \mathcal{L}(X)$ *normal und* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) $N(\lambda I - T) = N(\overline{\lambda} I - T^*)$.

(b) $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Ferner ist für jeden T*–invarianten Unterraum* U *von* X *das orthogonale Komplement* $U^\perp$ *ein* T^**–invarianter Unterraum.*

Beweis. (a) folgt aus $||(\lambda I - T)x|| = ||(\overline{\lambda} I - T^*)x||$ für alle $x \in X$, siehe Satz 3.26.

(b) Es sei $\lambda \notin \sigma_{\text{ap}}(T)$. Nach Satz 5.30 ist $\lambda I - T$ injektiv und $R(\lambda I - T)$ abgeschlossen. Es gilt

$$N(\lambda I - T)^\perp \overset{(a)}{=} N(\overline{\lambda} I - T^*)^\perp \overset{\text{Satz 3.22}}{=} R(\lambda I - T)\,.$$

Somit ist $\lambda I - T$ bijektiv. Dies zeigt, $\lambda \notin \sigma(T)$.

Ist U T–invariant, also $T(U) \subseteq U$, so folgt für jedes $v \in U^\perp$ und jedes $u \in U$, dass $\langle u, T^* v\rangle = \langle Tu, v\rangle = 0$, also $T^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$. □

Aufgaben

1. Es sei H ein Hilbertraum, $A \in \mathcal{L}(H)$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = ||A||$.
   Zeigen Sie: $\lambda \in W(A) \iff \lambda$ ist Eigenwert von A.

5.4 Der Spektralsatz für normale kompakte Operatoren

Prolog: Eine der nützlichsten Sätze der linearen Algebra ist der Spektralsatz für normale Matrizen: *Ist $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ eine normale Matrix, so gibt es ein ONS $\{e_1, \ldots, e_N\}$ des $\mathbb{C}^N$ bestehend aus Eigenvektoren von T.* Bezeichnet man mit $\lambda_j \in \mathbb{C}$ den zu e_j gehörigen Eigenwert, so ist dies gleichbedeutend mit jeweils den folgenden beiden Aussagen:

(a) (Unitäre Ähnlichkeit zu einem Multiplikationsoperator)
Mit $U := (e_1, \ldots, e_N) \in \mathbb{C}^{N\times N}$ gilt $U^*TU = \text{diag}(\lambda_1, \ldots .\lambda_N)$. Definiert man bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{C}^N$ den Multiplikationsoperator $M : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, $M(z_1, \ldots, z_N) := (\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_N z_N)$, so gilt also

$$U^{-1}TU = M$$

(b) (Spektralzerlegung)
Es gilt für alle $x \in \mathbb{C}^N$,

$$Tx = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j\,.$$

In diesem Kapitel beweisen wir eine Variante dieser Aussage für kompakte normale Operatoren auf unendlich dimensionalen Hilberträumen. Die Ergebnisse gehen auf Fredholm (1900) und Hilbert (1904) zurück.

Satz 5.33 (Spektrum normaler kompakter Operatoren)**.**
Es sei $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ normal und kompakt. Dann gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = ||T||$. Ferner besteht $\sigma(T) \setminus \{0\}$ genau aus allen Eigenwerten $\neq 0$ von T und die Eigenräume $N(\lambda I - T)$ zu allen Eigenwerten $\neq 0$ sind endlichdimensional.

Bemerkung.
Die tiefliegenste Aussage ist hier, dass es überhaupt einen Eigenwert gibt. Für den Nachweis hierzu verwenden wir Korollar 5.16, welches auf der Formel von Beurling–Gelfand beruht. Die restlichen Aussagen sind für beliebige kompakte Operatoren $T \in \mathcal{L}(X)$ (X Banachraum) gültig.

Beweis. Satz 5.31 und Satz 5.32 zeigen, dass $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\rm ap}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\rm p}(T) \setminus \{0\}$.
Nach Korollar 5.16 existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = ||T||$. Falls $\lambda = 0$, so ist $T = 0$, also hat T wegen $X \neq \{0\}$ den Eigenwert 0. Falls $\lambda \neq 0$, so ist λ Eigenwert von T. In diesem Fall ist $N(\lambda I - T) \cap \mathbb{B}_X \subset \lambda^{-1} T(\mathbb{B}_X)$, d.h. die Einheitskugel in $N(\lambda I - T)$ ist kompakt und somit $N(\lambda I - T)$ endlichdimensional. □

Satz 5.34 (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren).
Es sei $X \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(X)$ normal. Dann gibt es eine Menge $J \subseteq \mathbb{N}$ der Form $J = \{1, \dots, N\}$ oder $J = \mathbb{N}$ mit

$$Tx = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle x, e_j \rangle \, e_j \,, \qquad x \in X \,. \tag{S}$$

Hierbei ist $\{e_j \,:\, j \in J\}$ ein ONS von X und die Zahlen $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind die Eigenwerte $\neq 0$ von T. Falls $J = \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{j \to \infty} \lambda_j = 0$.

Beweis. O.E. sei $||T|| > 0$. Es sei $X_1 := X$. Nach Satz 5.33 gibt es ein $\lambda_1 \in \sigma_p(T)$ mit $|\lambda_1| = ||T||$ und ein $e_1 \in X$ mit $||e_1|| = 1$ und $Te_1 = \lambda_1 e_1$.
Setze $X_2 := \{e_1\}^\perp$. Dann ist X_2 ein T–invarianter Hilbertraum, denn

$$\langle Tx, e_1 \rangle = \langle x, T^* e_1 \rangle \overset{5.32(a)}{=} \langle x, \overline{\lambda_1} e_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, e_1 \rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in X_2 \,.$$

Nach Satz 5.32 ist X_2 auch T^*–invariant. Somit ist $T_2 := T|_{X_2} \in \mathcal{K}(X_2)$ normal. Falls $T_2 = 0$, so stoppen wir den Prozess. Anderenfalls wenden wir Satz 5.33 auf T_2 an und erhalten ein $\lambda_2 \in \sigma_p(T)$ mit $|\lambda_2| = ||T_2||$ und ein $e_2 \in X$ mit $||e_2|| = 1$ und $Te_2 = \lambda_2 e_2$. Insbesondere gilt $e_1 \perp e_2$ und $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$.
Setze $X_3 := \{e_1, e_2\}^\perp$. Dann ist X_3 ein T und T^*–invarianter Hilbertraum und $T_3 := T|_{X_3} \in \mathcal{K}(X_3)$ normal. Falls $T_3 = 0$, so stoppen wir den Prozess. So fortfahrend, erhält man eine Menge $J \subseteq \mathbb{N}$ der Form $J = \{1, \dots, N\}$ oder $J = \mathbb{N}$ und eine Folge $(\lambda_j)_{j \in J} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ein ONS $\{e_j\}_{j \in J}$ in X mit $Te_j = \lambda_j e_j$ und $|\lambda_j| = ||T_j||$ für $T_j := T|_{X_j}$ und $X_j := \{e_1, \dots, e_{j-1}\}^\perp$. Insbesondere gilt $|\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}|$ für alle $j \in J$.
Da $T \in \mathcal{K}(X)$ hat die Folge (Te_j) im Falle $J = \mathbb{N}$ eine konvergente Teilfolge (Te_{j_k}). Es gilt

$$|\lambda_{j_{k+1}}|^2 + |\lambda_{j_k}|^2 = ||Te_{j_{k+1}} - Te_{j_k}||^2 \to 0 \text{ für } k \to \infty \,,$$

d.h. die *monotone* Folge $(|\lambda_j|)$ ist eine Nullfolge.
Wir beweisen nun die Spektralzerlegung (S). Dazu sei $x \in X$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n := x - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x, e_j \rangle e_j \in \{e_1, \dots, e_{n-1}\}^\perp = X_n \,.$$

Dann ist x_n die orthogonale Projektion von x auf X_n. Ist $T_{N+1} = 0$, so ist $Tx_{N+1} = 0$ und es gilt (S) mit $J = \{1 \dots, N\}$. Falls $J = \mathbb{N}$, so folgt, da $||x_n|| \leq ||x||$ gilt, dass

$$\left|\left| Tx - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j \right|\right| = ||Tx_n|| = ||T_n x_n|| \leq ||T_n|| \, ||x_n|| \leq |\lambda_n| \, ||x|| \to 0 \tag{5.1}$$

für $n \to \infty$. Jede der Zahlen λ_j ist ein Eigenwert von T (mit Eigenvektor e_j). Nun sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $Tx = \lambda x$ und $\lambda \neq \lambda_j$ für alle $j \in J$. Dann gilt $\lambda \langle x, e_j \rangle = \langle Tx, e_j \rangle =$

$\langle x, T^*e_j\rangle = \langle x, \overline{\lambda_j} e_j\rangle = \lambda_j\langle x, e_j\rangle$, d.h. $\langle x, e_j\rangle = 0$. Aus (S) folgt daher $Tx = 0$. Dies zeigt, dass $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_j : j \in J\}$. □

Bemerkungen 5.35.
Es sei X ein Hilbertraum und $0 \neq T \in \mathcal{K}(X)$ normal mit Spektralzerlegung (S).

(a) (Spektralsatz und Rang 1 Operatoren)
Für $j \in J$ sind die Abbildungen

$$e_j \otimes e_j : H \to H\,, \quad x \mapsto \langle x, e_j\rangle e_j$$

Rang 1 Operatoren und

$$T = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j \otimes e_j\,,$$

wobei die Konvergenz im Falle $J = \mathbb{N}$ bzgl. der Operatornorm erfolgt, denn

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \otimes e_j \right\| \leq |\lambda_n| \to 0\,,$$

siehe (5.1).

(b) (Spektralsatz; Projektionsform)
Es seien (μ_j) die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\neq 0$ von T mit $|\mu_{j+1}| \leq |\mu_j|$. Weiter sei $E_j := N(\mu_j I - T)$ sowie $d_j = \dim E_j$. Satz 5.33 zeigt $d_j = \dim E_j < \infty$. Wähle zu jedem E_j eine ONB $(e^j_1, \ldots, e^j_{d_j})$. Dann ist

$$B = (e^1_1, \ldots, e^1_{d_1}, e^2_1, \ldots e^2_{d_2}, \ldots)$$

ein ONS in X. Der Beweis von Satz 5.34 zeigt, dass man

$$(\lambda_j) = (\underbrace{\mu_1, \ldots, \mu_1}_{d_1-mal}, \underbrace{\mu_2, \ldots, \mu_2}_{d_2-mal}, \ldots)$$

wählen kann und B ein zugehöriges ONS ist derart, dass

$$Tx = \sum_j \mu_j \sum_{k=1}^{d_j} \langle x, e^j_k, e^j_k\rangle e^j_k = \sum_j \mu_j P_{E_j} x\,, \quad x \in X\,,$$

wobei $P_{E_j} : X \to E_j$ die Orthogonalprojektion von X auf E_j ist. Die Konvergenz erfolgt in der Operatornorm, denn

$$T - \sum_{J\ni j\leq N} \mu_j P_{E_j} \in \mathcal{K}(X) \text{ normal}$$

und daher gilt

$$\left\| T - \sum_{J\ni j\leq N} \mu_j P_{E_j} \right\| = \left\| \sum_{J\ni j>N} \mu_j P_{E_j} \right\| = |\mu_{N+1}| \to 0,$$

wobei $|\mu_{N+1}|$ der betragsgrößte Eigenwert von $T - \sum_{J\ni j\leq N} \mu_j P_{E_j}$ ist.

(c) Es sei $U := \overline{span\{e_j : j \in J\}}$*. Dann gilt*

$$x \in U^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, e_j\rangle = 0 \text{ für alle } j \in J \quad \overset{(S)}{\Longleftrightarrow} \quad Tx = 0\,.$$

Das bedeutet $H = N(T) \oplus U = N(T) \oplus \overline{R(T)}$*.*

(d) (Spektralsatz; Diagonalisierung)
Ist X *ein separabler unendlichdimensionaler Hilbertraum, so kann man das ONS* $B = \{e_j : j \in J\}$ *durch ein maximales ONS von* $N(T)$ *zu einem maximalen ONS* $B' = \{\tilde{e}_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ *von* X *ergänzen, siehe (c).*

Die Fourier–Abbildung $\mathcal{F} : X \to l^2$ *bzgl.* B' *aus Beispiel 3.28 vermittelt dann eine unitäre Transformation von* T *auf den Diagonaloperator*

$$\mathcal{F}T\mathcal{F}^* : l^2 \to l^2\,, \quad (\alpha_j) \mapsto (\lambda_j\alpha_j)\,.$$

Hierbei ist $\lambda_j = 0$ *für* $\tilde{e}_j \in N(T)$*.*

5.5 Anwendungen des Spektralsatzes für kompakte normale Operatoren

Es sei stets $J = \{1, \ldots, N\}$ oder $J = \mathbb{N}$. Wir beweisen vorab folgende Aussage.

Satz 5.36.
Es seien X *und* Y *Hilberträume mit ONSen* $\{e_j : j \in J\} \subseteq X$ *und* $\{f_j : j \in J\} \subseteq Y$*. Ferner sei* $\{\lambda_j : j \in J\}$ *eine beschränkte Menge komplexer Zahlen. Dann ist durch*

$$Sx := \sum_{j\in J} \lambda_j \langle x, e_j\rangle f_j\,, \qquad x \in X\,,$$

ein $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ *gegeben mit*

$$S^*y = \sum_{j\in J} \overline{\lambda_j} \langle y, f_j\rangle e_j\,, \qquad y \in Y\,.$$

Falls $J \subsetneq \mathbb{N}$ *endlich oder* $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$*, so ist* $S \in \mathcal{K}(X, Y)$ *und die Reihen konvergieren in der Operatornorm.*

Beweis. Wir betrachten nur den interessanten Fall $J = \mathbb{N}$. Es sei $M_n := \sup\{|\lambda_j| : j > n\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Operatoren

$$S_n x := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, e_j\rangle f_j\,, \qquad x \in X\,,$$

Finite–Rank Operatoren und es gilt

$$||Sx - S_n x||^2 = \left|\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j \right|\right|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\langle x, e_j\rangle|^2 \le M_n^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2\,. \tag{5.2}$$

Wegen $M_n \le M_0 < \infty$ und der aus der Besselschen Ungleichung (Satz 2.15) folgenden Abschätzung

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \le ||x||^2$$

ergibt sich hieraus $S_n \to S$ punktweise, d.h. $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ nach Korollar 3.4. Es gilt weiter

$$\langle Sx, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j\rangle\langle f_j, y\rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda_j}\ \overline{\langle f_j, y\rangle} e_j\rangle$$

und dies zeigt die Formel für S^*. Aus (5.2) folgt schließlich auch

$$||Sx - S_n x||^2 \leq M_n^2 ||x||^2 , \qquad x \in X ,$$

d.h. $||S - S_n|| \leq M_n \to 0$, falls $\lambda_j \to 0$ und damit $M_n \to 0$. Daher impliziert Satz 1.36, dass $S \in \mathcal{K}(X,Y)$. □

Korollar 5.37.
Es seien X, Y Hilberträume und $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann ist $|T| \in \mathcal{K}(X)$.

Beweis. O.E. sei $X \neq \{0\}$. Da $T \in \mathcal{K}(X)$ folgt $T^*T \in \mathcal{K}(X)$. Da T^*T positiv semidefinit ist, ist somit T^*T kompakt und normal. Der Spektralsatz (Satz 5.34) garaniert ein ONS $\{e_j : j \in J\}$, $J = \{1, \dots, \mathbb{N}\}$ oder $J = \mathbb{N}$, und $(\lambda_j)_{j\in J} \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$ derart, dass

$$T^*Tx = \sum_{j\in J} \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j , \quad x \in X,$$

und $\lambda_j \to 0$, falls $J = \mathbb{N}$. Da T^*T positiv semidefinit ist, gilt $\lambda_j > 0$ für $j \in J$. Wir definieren $S : X \to X$

$$Sx = \sum_{j\in J} \sqrt{\lambda_j} \langle x, e_j\rangle e_j .$$

Dann ist $S \in \mathcal{K}(X)$ nach Satz 5.36. Ferner gilt, dass S positiv semidefinit ist und $S^2 = T^*T$. Somit folgt mit Satz 5.26 $S = \sqrt{T^*T} = |T|$. Also gilt $|T| \in \mathcal{K}(X)$. □

Definition (Singulärwerte).
Es seien X und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Die (stets nichtnegativen) Eigenwerte s_j von $|T| \in \mathcal{K}(X)$ heißen die **Singulärwerte von** T.

Satz 5.38 (Singulärwertzerlegung).
Es seien $X \neq \{0\}$ und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann existieren Orthonormalsysteme $\{e_j : j \in J\}$ von X und $\{f_j : j \in J\}$ von Y derart, dass

$$Tx = \sum_{j\in J} s_j \langle x, e_j\rangle f_j , \qquad x \in X ,$$

wobei die Zahlen $(s_j)_{j\in J}$ die Singulärwerte von T sind und $s_j \to 0$ im Falle $J = \mathbb{N}$.

Beweis. Es sei $T = U|T|$ wie in Satz 5.27 mit $U : R(|T|) \to R(T)$ eine lineare Isometrie. Weiter sei

$$|T|x = \sum_{j\in J} s_j \langle x, e_j\rangle e_j , \qquad x \in X ,$$

die Spektralzerlegung (S) von $|T| \in \mathcal{K}(X)$ mit $\{e_j : j \in J\}$ einem ONS in X, $J = \{1, \dots, N\}$ oder $J = \mathbb{N}$, und $(s_j)_{j\in J}$ den Eigenwerten von $|T|$, also den Singulärwerten von T. Setzt man $f_j := Ue_j$, so bildet $\{f_j : j \in J\}$ ein Orthonormalsystem von Y, denn

$$\langle f_j, f_k\rangle = \langle Ue_j, Ue_k\rangle \overset{(*)}{=} \langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk} .$$

Hierbei ergibt sich $(*)$ durch Polarisierung aus $||Ux|| = ||x||$. Es folgt

$$Tx = U|T|x = \sum_{j\in J} s_j \langle x, e_j\rangle Ue_j = \sum_{j\in J} s_j \langle x, e_j\rangle f_j \,, \qquad x \in X \,.$$

□

Korollar 5.39.
Es seien X und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann ist $T^* \in \mathcal{K}(Y,X)$.

Beweis. O.E. sei $X \neq \{0\}$. Es sei

$$Tx = \sum_{j\in J} s_j \langle x, e_j\rangle f_j \,, \qquad x \in X \,,$$

eine Singulärwertzerlegung von T. Insbesondere gilt $s_j \to 0$ falls $J = \mathbb{N}$. Somit ist T^* durch Satz 5.36 gegeben und kompakt. □

Korollar 5.40.
Es seien X und Y Hilberträume und $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann existiert $(T_n) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ mit $||T_n - T|| \to 0$.

Beweis. O.E. sei $X \neq \{0\}$ und

$$Tx = \sum_{j\in J} s_j \langle x, e_j\rangle f_j \,, \qquad x \in X$$

eine Singulärwertzerlegung von T. Falls $J = \mathbb{N}$, so gilt $s_j \to 0$ und die Finite–Rank Operatoren

$$T_n x = \sum_{J\ni j\leq n} s_j \langle x, e_j\rangle f_j \,, \qquad x \in X \,,$$

konvergieren nach Satz 5.36 in der Operatornorm gegen T. □