Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 12, 2023)

Problem 1. Wir definieren mit S_n die Menge der bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

Dann ist bekannterweise $(S, \circ)$ mit

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(i) = \sigma_2(\sigma_1(i))$$

eine Gruppe. Wir führen für gewöhnlich eine Abbildungstabelle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

mit $i_1, \ldots, i_n$ paarweise verschieden, um zu signalisieren $\sigma(k) = i_k$ für $k = 1, \ldots, n$.

(a) Eine übliche Darstellung bei Elementen aus S_n ist die Zyklenschreibweise. Ein Zyklus der Länge k mit $k \leq n$ hat die Form

$$\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

und signalisiert $i_1 \to i_2, i_2 \to i_3$, usw. $i_k \to i_1$ under σ. Ist die Zahl i_j nicht im Zyklus vertreten, so wird sie unter σ auf sich selbst abgebildet. Speziell für $k = 1$ erhalten wir die Identität und schreiben

$$\sigma = (1).$$

Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Abbildungen σ durch ein Zyklus der Länge k realisiert werden können! Kann jedes Element in S_3 (S_4) als ein Zyklus geschriebeb werden?

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Wir definieren die Menge der (Permutations-)Matrizen

$$P_n := \left\{P \in \mathbb{K}^{n\times n} : P = (e_{i_1}, \dots, e_{i_n}, \text{ mit } i \leq i_k \leq n \text{ und alle } i_k \text{ paarweise verschieden}\right\},$$

mit e_i der i-te Einheitsvektor. Verifizieren Sie: $(P_n, \cdot)$ ist mit der herkömmlichen Matrixmultiplikation eine Gruppe! Bestimmen Sie weiterhin einen bijektiven Gruppenmorphismus

$$\Phi : (S_n, \circ) \to (P_n, \cdot),$$

sodass gilt

$$\Phi(\sigma)e_i = s_j \iff \sigma(i) = j.$$

Beweisen Sie, dass sich jedes P aus P_n schreiben lässt als

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} V_{i_k j_k},$$

mit V_{ij} definiert wie in Lemma 5.56.

Proof. (a) Es gibt $n!$ Möglichkeiten für eine Folge $(i_1 i_2 \dots i_k)$, aber wir können die zyklisch permutieren und σ verändert sich nicht. Deswegen gibt es $n!/n = (n-1)!$ unterschiedliche Abbildungen, die durch ein Zyklus der Länge k realisiert werden können.

Ja, jedes Element in S_3 kann als ein Zyklus geschrieben werden. Das können wir explizit machen:

(1)	(12)	(23)
(13)	(132)	(123)

Weil wir 6 Elemente haben, und $|S_3| = 3! = 6$, haben wir alle Elemente.

Das stimmt aber nicht für S_4. Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Falls es als Zyklus geschreiben werden kann, muss das Zyklus den Länge 4 haben, weil $\sigma(i) \neq i$ für alle i. Wir fangen obdA mit 1 an. Dann ist das Zyklus $(12\dots)$. Aber weil $\sigma(2) = 1$, hört das Zyklus auf, und $\dots = \varnothing$. Dann ist das Zyklus nicht mit Länge 4.

(b) Sei $A, B \in P_n$ beliebige Elemente von P_n,

$$A = (e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$
$$B = (e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})$$

(i) G ist abgeschlossen: Wir betrachten ABe_k für k beliebig.

$$ABe_k = Ae_{j_k} = e_{i_{j_k}},$$

also

$$AB = (e_{i_{j_1}}, e_{i_{j_2}}, \ldots, e_{i_{j_n}}) \in P_n.$$

Das i_{j_k} paarweise verscheiden sind folgt daraus, dass j_k alle paarweise verscheiden sind.

(ii) Neutrales element: Wir wissen aus der linearen Algebra, dass

$$1_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in P_n$$

das neutrales Element ist.

(iii) Assoziativität: Wir wissen auch, dass Matrizmultiplikation assoziativ ist.

(iv) Existenz des Inverses: Sei jetzt p_k, sodass $i_{p_k} = k$.

Bemerkung

Man kann $i, p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ interpretieren. Dann ist i eine bijektive Abbildung, und das Existenz einer inversen Abbildung p folgt daraus. Deswegen ist unsere Entscheidung immer möglich.

Wir betrachten $A(e_{p_1}, e_{p_2}, \ldots, e_{p_n})$, und dafür die Wirkung der Abbildung auf einem beliebigen Basiselement e_k:

$$A(e_{p_1}, e_{p_2}, \ldots, e_{p_n})e_k = Ae_{p_k} = e_{i_{p_k}} = e_k.$$

(c) Sei i eine bijektive Abbildung $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Wir schreiben i_k oder $i(k)$ als das Bild von k. Wir vermuten, dass die gewünschte Homomorphismus

$$\Phi : i \to (e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots e_{i_n})$$

ist.

(i) $\Phi(\sigma)e_j = e_{\sigma_j}$, also $\Phi(\sigma)e_i = s_j \iff \sigma(i) = j$.

(ii) Injektiv: Sei $\sigma, \sigma' \in S_n$, $\sigma \neq \sigma'$, insbesondere gilt $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$. Es gilt dann

$$\Phi(\cdot) \begin{array}{l} \xrightarrow{\ \sigma\ } (e_{\sigma_1}, \dots, \boxed{e_{\sigma_i}}, \dots, e_{\sigma_n}) \\ \xrightarrow[\ \sigma'\ ]{} (e_{\sigma'_1}, \dots, \boxed{e_{\sigma'_i}}, \dots, e_{\sigma_n}) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \neq \end{array}$$

also $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\sigma')$.

(iii) Surjektiv: Sei $M = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$. Wie im letzten Teilaufgabe können wir eine Abbildung $i(k) = i_k$ definieren, und $\Phi(i) = M$.

(iv) Homomorphismusgesetz: Es ist zu zeigen, für $i, j \in S_n$ und

$$\begin{aligned} M_1 =& (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \Phi(i) \\ M_2 =& (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) = \Phi(j), \end{aligned}$$

dass

$$\Phi(i \circ j)(e_k) = M_1 M_2 e_k$$

für alle k gilt. Per Definition ist

$$\Phi(i \circ j)e_k = e_{i(j(k))} = e_{i_{j_k}}.$$

Es gilt auch

$$M_1 M_2 e_k = M_1 e_{j(k)} = e_{i(j(k))} = e_{i_{j_k}}.$$

(d) Es gilt

$$\Phi((ij)) = V_{ij}$$

per die vorherige Definition. Dann ist die Behauptung klar. Sei $P \in P_n$

(i) Weil Φ bijektiv ist, ist $P = \Phi(\sigma)$ für eine $\sigma \in S_n$.

(ii) σ kann als Produkt von $n-1$ Transpositionen dargestellt werden (wenn weniger als $n-1$, können wir id hinzufügen), z.B. $\sigma = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots (a_{n-1} b_{n-1})$.

(iii) Das Bild von ein Transposition ist ein Matriz V_{ij}.

(iv) Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma) =&\Phi((a_1b_1))\Phi((a_2b_2))\dots\Phi(a_{n-1}b_{n-1})\\ =&V_{a_1b_1}V_{a_2b_2}\dots V_{a_{n-1}b_{n-1}}\\ =&P.\end{aligned}$$

□

Problem 2. Gegeben sei die Permutation

$$S_9 \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 7 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen sie σ als Produkt von Transpositionen dar.

(b) Berechnen Sie das Signum von σ.

Proof. (a) Zuerst berechnen wir die disjunkter Zyklus

$$\begin{aligned}Z_1 =&(1249578)\\ Z_2 =&(6)\\ Z_3 =&(3)\end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\sigma = (18)(17)(15)(19)(14)(12).$$

Begründung

Es gilt, für ein Zyklus

$$(a_1a_2\dots a_n) = \underbrace{(a_1a_n)(a_1a_{n-1})\dots(a_1a_2)}_{\sigma'}.$$

Wir betrachten zuerst $\sigma'(a_1)$. Dann ist $(a_1a_2)a_1 = a_2$. a_2 kommt nie wieder vor, also $\sigma'(a_1) = a_2$. Dann betrachten wir a_k, $k \neq 1$. Wir haben $(a_1a_k)a_k = a_1$. a_1 kommt sofort wieder vor, und ist $(a_1a_{k+1})a_1 = a_{k+1}$. a_{k+1} kommt nicht wieder vor, also $\sigma'(a_k) = a_{k+1}$.

(b) Wir haben

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((18))\operatorname{sgn}((17))\dots\operatorname{sgn}((12)) = (-1)^6 = 1.$$

□

Problem 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch* bzw. *antisymmetrisch*, wenn $A^T = A$ bzw. $A^T = -A$ gilt. Seien $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ die Untermengen von $M_n(\mathbb{R})$, die aus allen symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen bestehen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R}), \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ Untervektorräume von $M_n(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$A^T + A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R}), \qquad A - A^T \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R}), \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Folgern Sie, dass $M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SM}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$.

(c) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{SM}_n(\mathbb{R}))$ und $\dim(\mathrm{AS}_n(\mathbb{R}))$.

(d) Seien $A, B \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ asymmetrische Matrizen. Zeigen Sie, dass der *Kommutator* $[A, B] := AB - BA$ wieder antisymmetrisch ist.

Proof. (a) Sei $M, N \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, und $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$(aM)^T = aM^T = aM,$$

also $aM \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. Es gilt auch

$$(aM + bN)^T = aM^T + bN^T = aM + bN,$$

also $aM + bN \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$.

Sei jetzt $M, N \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$. Ähnlich folgt

$$(aM)^T = aM^T = a(-M) = -aM,$$

und

$$(aM + bN)^T = aM^T + bN^T = a(-M) + b(-N) = -(aM + bN)$$

also $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ sind Untervektorräume.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}(A + A^T)^T =& A^T + (A^T)^T \\ =& A^T + A = A + A^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A - A^T)^T =& A^T - (A^T)^T \\ =& A^T - A = -(A - A^T)\end{aligned}$$

Für alle $A \in M_n(\mathbb{R})$ gilt

$$A = \frac{1}{2}(\underbrace{A + A^T}_{\in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{A - A^T}_{\in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})}),$$

also $M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SM}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$.

(c) In ein Matriz gibt es genau $n \times n$ freie Parameter. Aber für symmetrische Matrizen haben wir $M_{xy} = M_{yx}$, also wir haben nur

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

freie Parameter in $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. Für die antisymmetrischen Matrizen gilt eine ähnliche Argument, aber die Elemente auf dem Diagonal müssen 0 sein. Wir haben daher nur

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

freie Parameter, also

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})) =& \frac{n(n+1)}{2} \\ \dim(\mathrm{AS}_n(\mathbb{R})) =& \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}[A, B]^T =& (AB - BA)^T \\ =& (AB)^T - (BA)^T \\ =& B^T A^T - A^T B^T \\ =& (-B)(-A) - (-A)(-B) \\ =& BA - AB \\ =& -(AB - BA)\end{aligned}$$

also $[A, B]$ ist antisymmetrisch. $\square$

Problem 4. Gegeben sind die Matrizen $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1-t \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}$, $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}, t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A(t))$ und $\operatorname{rang}(B(t))$ in Abhängigkeit von t.

(b) Berechnen Sie die Inversen $(A(0))^{-1}$ und $(B(1))^{-1}$.

Proof. (a) Wir verwenden das Gauß-Algorithisums

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\times t}$$

$$\begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\times t+1}$$

$$\begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & 1-t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Für $t \neq 0, t^2-1 \neq 0$, also $t \notin \{-1,0,1\}$, ist es offenbar, $\operatorname{rang}(A(t)) = 3$ ist.

Für $t = \pm 1$ ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, also $Ae_1 = Ae_2 = Ae_3 \neq 0$. Daraus folgt, dass $\operatorname{rang}(A(\pm 1)) = 1$.

Obwohl es vom Gauß-Algorithismus so aussieht, dass $\operatorname{rang}(A(0)) \neq 3$, ist eigentlich $\operatorname{rang}(A(0)) = 3$. Wenn $t = 0$ gilt

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte dann, dass

$$A(e_3 - e_1) = (0,0,1)^T$$

$$A(e_3 - e_2) = (0, 1, 0)^T$$
$$A(e_1 + e_2 - e_3) = (1, 0, 0)^T$$

Weil wir jede Basiselement erreichen können, können wir also jedes Element $v \in \mathbb{R}^3$ erreichen. Deswegen gilt $\operatorname{rang}(A(0)) = 3$. Zusammenfassung:

$$\operatorname{rang}(A(t)) = \begin{cases} 1 & t = \pm 1, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Wir machen etwas ähnliches für B :

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1-t \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1-t \\ 0 & -2t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 2t}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -2t & -2(t-1)t \\ 0 & -2t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -2t & -2(t-1)t \\ 0 & 0 & t(2t-1) \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt, dass wenn $t \neq 0$ und $t \neq 1/2$, ist $\operatorname{rang}(B(t)) = 3$. Wenn $t = 1/2$, ist die Matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{rang}(B(1/2)) = 2$. Wenn $t = 0$ dürfen wir das Ergebnis des Gauß-Algorithismuses nicht direkt nutzen, weil wir durch $2t$ multiplizieren haben. Stattdessen schreiben wir

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist es klar, dass

$$\operatorname{im}(B(0)) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

also $\operatorname{rang}(B(0)) = 2$.

(b) Wir haben

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also $(A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt auch

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times -1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

also

$$(B(1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□