Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 9

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 22, 2023)

Problem 1. Sei $R > 0$ und $a < b$. Definiere $Z := B_R(0) \times (a, b) \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ die (offene) Kreisscheibe um 0 mit Radius R ist. Definiere außerdem die Abbildung

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit $U := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (a, b)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $\Phi(U) = Z \backslash N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \to Z\backslash N$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det(\Phi'(r, \varphi, z)) = r$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to r$ definiert durch $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}$. Bestimmen Sie $\int_Z f \, \mathrm{d}\lambda_3$.

Proof. (a) Hypothese: $N = [0, R) \times \{0\} \times (a, b)$.

Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Z.$$

Wir finden die (x, y, z), für die die Gleichungen keine Lösung haben. Es ist klar, dass die dritte Gleichung trivialerweise immer erfüllt werden kann.

Jetzt betrachten wir $(x, y, z) \in N$. Weil $y = 0$, ist $\sin\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ($\varphi = 0$ ist keine Lösung in U). Dann ist $x = r\cos\varphi = -r$. Weil $r > 0$, ist dann $x < 0$, also $\Phi(U) \subseteq Z\backslash N$.

Sei jetzt $(x, y, z)^T \notin N$. Die (eindeutige) Lösungen sind

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\tan\varphi = y/x$$

Man verfiziere sofort, dass r und φ Lösungen sind und außerdem in U liegen, insofern $(x,y,z)^T \notin N$. Daraus folgt:

$$\Phi(U) = Z\setminus N.$$

Jetzt zeigen wir: N ist eine Nullmenge. Da $N \subseteq [0,R)\times(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)$ für alle $\epsilon > 0$, ist N eine Nullmenge.

(b) Die Ableitung ist

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Komponente alle stetig sind, ist Φ' stetig, und Φ ist stetig differenzierbar. Die Determinante ist

$$\det\Phi' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_Z f\,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int_{Z\setminus N} f\,\mathrm{d}\lambda_3 && N \text{ Nullmenge} \\
&= \int_U |\det\Phi'|(f\circ\Phi)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_U r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_U rz\sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} \\
&= \int_U r^2 z\,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_{U_z}\int_a^b r^2 z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{U_z} r^2(b-a)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{(U_z)_\theta}\int_0^{2\pi} r^2(b-a)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{(U_z)_\theta} 2\pi r^2(b-a)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_0^R 2\pi r^2(b-a)\,\mathrm{d}\lambda_2
\end{aligned}$$

$$= 2\pi(b-a)\frac{r^3}{3}\Big|_0^R$$
$$= \frac{2}{3}\pi(b-a)R^3. \qquad \square$$

Problem 2. Sei $R > 0$ und $K := B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3$. Definiere die Abbildung

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $U := (0,R) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $\Phi(U) = K\backslash N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \to K\backslash N$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det(\Phi'(r,\theta,\varphi)) = r^2\sin\theta$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := z\sqrt{x^2+y^2}$ und

$$H := B_R(0) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}.$$

Bestimmen Sie $\int_H f \, \mathrm{d}\lambda_3$.

Proof. (a) Ähnlich ist die Nullmenge $\{(0,0,R),(0,0,-R)\}$. Wir lösen die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

für $(x,y,z)^T \in B_R(0)$. Ähnlich ist $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tan\theta = (\sqrt{x^2+y^2})/z$ und $\tan\varphi = y/x$ eine Lösung, solange $z \neq \pm R$ (sonst wäre $\theta = 0$ oder π, welche nicht in U sind. Als endliche Menge ist N eine Nullmenge.

(b) Es gilt

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Weil alle Komponente stetig sind, ist auch Φ' stetig, und Φ ist stetig differenzierbar. Für die Determinante führen wir eine Laplaceentwicklung mit der dritten Spalte durch:

$$\begin{aligned}
\det\Phi' =& \cos\theta(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi) \\
&+ r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi) \\
=& r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta \\
=& r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

(c) Sei $U = (0, R) \times (0, \pi/2) \times (0, 2\pi)$. Es gilt $\Phi(U) = H \backslash N$.

$$\begin{aligned}
\int_H f \,\mathrm{d}\lambda_3 =& \int_{H\backslash N} f \,\mathrm{d}\lambda_3 \\
=& \int_U |\det\Phi'|(f \circ \Phi) \,\mathrm{d}\lambda_3 \\
=& \int_U (r^2\sin\theta) r\cos\theta \sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2} \\
=& \int_U (r^2\sin\theta) r\cos\theta (r\sin\theta) \\
=& \int_U r^4\sin^2\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\lambda_3 \\
=& \int_{U_\varphi} \int_0^{2\pi} r^4\sin^2\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
=& \int_{U_\varphi} 2\pi r^4\sin^2\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
=& \int_{(U_\varphi)_\theta} \int_0^{\pi/2} 2\pi r^4\sin^2\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\lambda_1 \\
=& \int_0^R 2\pi r^4 (1/3) \,\mathrm{d}r \\
=& \frac{2}{15}\pi r^5 |_0^R \\
=& \frac{2\pi}{15} R^5.
\end{aligned}$$

□

Problem 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-x^T A x\right) \mathrm{d}\lambda_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$