

6. Übung zur Einführung in die Algebra

Abgabe online in WueCampus bis zum 04.12.2023, 12 Uhr

Aufgabe 6.1 (2+2 Punkte)

Seien G, H Gruppen und $\Phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus.

- (a) Sei $g \in G$ ein Element mit Ordnung $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass $\text{ord}(\Phi(g)) \mid n$ gilt.
- (b) Sei $N \trianglelefteq G$. Ist dann stets auch $\Phi(N) \trianglelefteq H$?

Aufgabe 6.2 (3+1 Punkte)

Seien G eine Gruppe und $M := \{x^2 \mid x \in G\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $N := \langle M \rangle$ ein Normalteiler von G ist.
- (b) Beweisen Sie, dass für jedes Element gN der Faktorgruppe G/N gilt: $\text{ord}(gN) \leq 2$.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G mit Untergruppen $A, B \leq G$ an, so dass

$$A \trianglelefteq B \quad \text{und} \quad B \trianglelefteq G$$

gelten, nicht jedoch $A \trianglelefteq G$.

Hinweis: Dies zeigt, dass das Normalteiler-Sein im Allgemeinen nicht transitiv ist.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$S_n = \langle (12), (123 \dots n) \rangle$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.