Jun Wei Tan
Mattis Lieberman

Aufgabe 2.1: *Schwereloses zweidimensionales Federpendel* ....(4 Punkte)

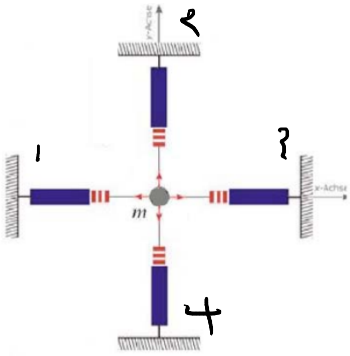
Bei dem abgebildeten Masse-Federn-System soll sich die Masse m nur in der xy-Ebene bewegen. Die Auslenkung der Masse aus dem Ruhezustand wird durch den (zweidimensionalen) Vektor $\vec{r}$ beschrieben. Alle Federn haben die gleiche Federkonstante k. Betrachten Sie nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage. Die Bewegung in x- und y-Richtung können separat betrachtet werden.

(1 P) a) Bestimmen Sie jeweils die Kraft $\vec{F}_i(x, y)$ (i=1,2,3,4), die von dem Federkraftmesser i auf die Masse m ausgeübt wird. Im Gleichgewichtszustand sei der Betrag der Kraft $\left|\vec{F}_i(0,0)\right| = F_0$.

(1 P) b) Geben Sie die Gesamtkraft auf die Masse m in kartesischen und in Polarkoordinaten an.

(1 P) c) Berechnen Sie die potentielle Energie mit $E_{\text{pot}} = -\int \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ in Polarkoordinaten und geben Sie sie auch in kartesischen Koordinaten an.

(1 P) d) Berechnen Sie zur Kontrolle durch Gradientenbildung (in kartesischen Koordinaten) die Kraft aus der potentiellen Energie: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}$.



a) Sei $\hat{u}_i = \begin{cases} -\hat{\imath}, & i=1 \\ \hat{\jmath}, & i=2 \\ \hat{\imath}, & i=3 \\ -\hat{\jmath}, & i=4 \end{cases}$

$$\vec{F}_i(x,y) = F_0 \hat{u}_i - k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) $\vec{F}_{net} = -4k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4kr\hat{r}$

c) $E_{pot} = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^r F_r \, dr$

$$= +2kr^2$$

$$= 2k(x^2+y^2)$$

d) $-\nabla E_{pot} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[2k(x^2+y^2)\right] \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[2k(x^2+y^2)\right] \end{pmatrix}$

$$= -\begin{pmatrix} 4kx \\ 4ky \end{pmatrix} = -4k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$