

## Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan\*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 6, 2023)

**Problem 1.** (a) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x) \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt  $x_0 = 0$  mit Konvergenzradius  $R = +\infty$  dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht durch ihre Taylorreihe um  $x = 0$  dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9?

*Proof.* (a)

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x) \cosh(x) \\ &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4i} (e^{(i+1)x} + e^{(i-1)x} - e^{(1-i)x} - e^{-(i+1)x}) \\ &= \frac{i}{4} [e^{-(i+1)x} + e^{(1-i)x} - e^{(i+1)x} - e^{(i-1)x}] \\ g^{(n)}(x) &= \frac{i}{4} [(-(i+1))^n e^{-(i+1)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x} \\ &\quad - (1+i)^n e^{(i+1)x} - (i-1)^n e^{(i-1)x}] \\ |g^{(n)}(x)| &\leq \frac{1}{4} (\sqrt{2})^n [|e^{-(i+1)x}| + |e^{(1-i)x}| + |e^{(i+1)x}| + |e^{(i-1)x}|] \end{aligned}$$

---

\* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Die Bedingungen sind jetzt erfüllt: Sei  $B_r(0)^d$  ein abgeschlossenes Ball für beliebige  $r > 0$ . Sei außerdem

$$c = \sup_{x \in B_r(0)^d} \frac{1}{4} [|e^{-(i+1)x}| + |e^{(1-i)x}| + |e^{(i+1)x}| + |e^{(i-1)x}|]$$

$$\alpha = \sqrt{2}$$

Es gilt  $c \neq \infty$ , weil die Abbildung in den Klammern stetig ist, und ist daher auf eine eingeschränkte Menge auch eingeschränkt. Es folgt:

$$\|g^{(n)}\|_{B_r(0)^d} \leq c\alpha^n \quad (5.6.23)$$

Also die formale Taylorreihe hat einen Konvergenzradius  $R > r$  und konvergiert gegen auf  $B_r(0)^d$  gegen  $g$ . Weil das für alle  $r > 0$  gilt, konvergiert die Taylorreihe gegen  $f$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und die Konvergenzradius  $R = +\infty$ .

- (b) Es ist klar, dass es nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Die Taylorreihe ist  $0 + 0x + 0x^2 + \dots = 0$ , aber  $f(x) \neq 0$  für  $x \neq 0$ .

□

**Problem 2.** Es sei  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Geben Sie das Taylorpolynom  $P_2$  von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$  an und schätzen Sie den maximalen Fehler von  $|f(x) - P_2(x)|$  auf dem Intervall  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  ab.

*Proof.* Es gilt  $f(x) = x^{1/3}$ , und daher

$$f^{(n)}(x) = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] x^{\frac{1}{3}-n},$$

also

$$f^{(n)}(1) = \prod_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right).$$

Es gilt daher

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2.$$

Wir wissen schon

$$|R_{n,x_0}(f)(h)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \quad (5.6.20)$$

Hier ist  $n = 2$ , und  $|h| \leq \frac{1}{2}$ .

**Vereinfachung:** (Nur in diesem Problem, falsch im Allgemeinen) Der maximale Fehler ist gleich  $\sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}$ , wobei  $h = \frac{1}{2}$ ,  $n = 2$ , und  $x_0 = 1$ .

*Proof.* Wir betrachten zuerst  $R_{n,x_0}(f)(\xi)$  für  $0 \leq \xi \leq h$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in [0,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) &\leq \sup_{\xi \in [0,h]} \left[ \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + t\xi) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|\xi|^n}{(n-1)!} \right] \\ &= \sup_{\xi \in [0,h]} \left[ \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + t\xi) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \right] \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Ähnlich gilt auch

$$\sup_{\xi \in [-h,0]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t \in [-1,0]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}.$$

Weil wir den maximalen Fehler auf dem ganzen Intervall schätzen möchten, ist die gewünschte Antwort daher

$$\sup_{\xi \in [-h,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}. \quad \square$$

Wir betrachten deswegen

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \\ &= \sup_{t \in [-1,1]} \left| \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] (x_0 + th)^{\frac{1}{3}-n} - \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] \right| \\ &= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| \sup_{t \in [-1,1]} \left| \left( 1 + \frac{t}{2} \right)^{-5/3} - 1 \right| \\ &= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| \left| \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{-5/3} - 1 \right| \\ &= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| (2^{5/3} - 1) \end{aligned}$$

Also der maximale Fehler ist

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{|0.5|^2} \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| (2^{5/3} - 1) = \frac{1}{18} (2^{5/3} - 1). \quad \square$$

**Problem 3.** Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in  $x_0$ .

(a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  im Punkt  $x_0 = 2$ .

(b)  $g(x) = \sin^2(\pi x)$  in  $x_0 = 3$ .

(c)  $h(x) = \sin^{-1}(x)$  in  $x_0 = 0$ .

*Proof.* (a)

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 3(2) + 2 = 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f'(2) = 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(2) = 6$$

$$f'''(x) = 6 = f(2)$$

$$f''''(x) = 0$$

Das Taylorpolynom ist dann

$$4 + 3(x - 2) + 3(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

(b)

$$g(x) = \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi x))$$

$$g(3) = 0$$

$$g'(x) = \pi \sin(2\pi x)$$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} \sin(2\pi x) & n \text{ ungerade} \\ \cos(2\pi x) & n \text{ gerade} \end{cases} \quad n \geq 1$$

$$g^{(n)}(3) = (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} \quad n \geq 1$$

Das Taylorpolynom vom Grad 30 ist

$$\sum_{n=1}^{15} \left[ (-1)^{\lfloor (2n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} (x - 3)^{2n} \right].$$

(c)

$$h(x) = \sin^{-1} x$$

$$h(0) = 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$h'(0) = 1$$

Sei  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Wir wissen, dass die Taylorreihe von  $(1+x)^\alpha$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (5.6.41)$$

ist, wobei  $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} [\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)]$ . Die Taylorreihe von  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  folgt:

$$\begin{aligned} T_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n \quad b_n = 0, \text{ n ungerade} \end{aligned}$$

Es gilt daher, für die Koeffizienten der Taylorreihe von  $\sin^{-1}(x)$

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dass  $a_n = b_{n-1}/n$ , für  $n \geq 1$ . Es ist dann

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{14} \frac{1}{2n+1} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n+1}). \quad \square$$

**Problem 4.** Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von  $\exp : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für die markierten Zerlegungen  $(J_n, \Xi_n)$  mit der Auswahl  $\Xi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

*Proof.*

Wir werden später die folgende Lemma brauchen:

**Lemma 1.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (1 - e^{-1/n}) = 1.$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n (1 - e^{-1/n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-1/n}}{1/n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-x}}{x} && x = 1/n \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{1} && \text{L'Hopital} \\ &= 1 && \square \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{n} \exp \left( \frac{k+1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left( \frac{k+1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{(e-1)e^{1/n}}{e^{1/n} - 1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{e-1}{1 - e^{-1/n}} \end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n(1 - e^{-1/n})} = e-1.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{n} \exp \left( \frac{k}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left( \frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{1/n} - 1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{1/n} (1 - e^{-1/n})} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n(e^{1/n} (1 - e^{-1/n}))} = e-1. \quad \square$$