Wintersemester 2024/2025 — 09.01.2025
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

11. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 13.01. und 14.01. gelöst.

Aufgabe P11.1

Es seien $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 14 \\ 0 & -18 & 24 \\ 0 & -12 & 16 \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie die Ruhelage 0 für die Systeme $\dot{x} = Ax$ und $\dot{x} = Bx$ auf Stabilität und asymptotische Stabilität.

Aufgabe P11.2

Wir betrachten das skalare autonome System

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass (1) für jede Anfangsbedingung $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ eine lokal eindeutige maximale Lösung besitzt.

Sie dürfen nun ohne Beweis verwenden, dass (1) für jede Anfangsbedingung $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung mit Existenzintervall $\mathbb{R}$ besitzt.

b) Überprüfen Sie die Ruhelage $x = 0$ von (1) auf Stabilität und asymptotische Stabilität.

Aufgabe P11.3

Es sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Überprüfen Sie die Ruhelage 0 für das System $\dot{x} = Ax$ auf Stabilität, Attraktivität und asymptotische Stabilität.

b) Weiterhin sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ stetig. Zeigen Sie, dass jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax + g(t)$ asymptotisch stabil ist, indem Sie zeigen, dass für zwei Lösungen φ_1 und φ_2 immer gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| = 0.$$

Wintersemester 2024/2025 — 09.01.2025
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

11. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 16.01.2024 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 4 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H11.1 **($4 + 3 + 1 + 1 = 9$ Punkte)**

In einem Wassertank befinden sich 10 Liter Wasser, mit einem Zulauf- und Ablaufrohr. Durch das Zulaufrohr kommt Wasser mit 2 Liter pro Minute in den Wassertank. Beim Ablaufrohr fließt die gleiche Menge ab. Weiterhin zirkuliert das Wasser im Wassertank permanent.

Zur Zeit $t_0 = 0$ ist nur reines Wasser im Wassertank. Nun wird ab $t_0 = 0$ bei dem Zulaufrohr Salz mit 0,3 Kilogramm pro Liter hinzugefügt (das Salz ist bereits im Wasser gelöst). Im Wassertank vermischen sich durch die Zirkulation Wasser und Salz gleichmäßig, das heißt wir gehen immer davon aus, dass das Salz im Wassertank gleichmäßig verteilt ist. Im Folgenden sei $x(t)$ der Salzgehalt (in Kilogramm) im Wassertank zum Zeitpunkt t (in Minuten).

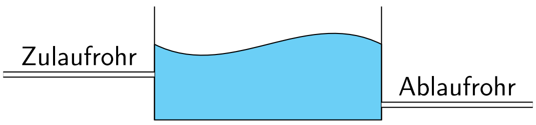

Abbildung 1: Wassertank mit Zulauf- und Ablaufrohr

a) Leiten Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ her, die die Änderung des Salzgehalts im Wassertank beschreibt.

b) Bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung des Salzgehalts $x(t)$ im Wassertank.

c) Geben Sie den Salzgehalt im Wassertank nach 5 Minuten an.

d) Bestimmen Sie den Salzgehalt im Wassertank, der sich auf lange Zeit einstellen würde.

Aufgabe H11.2 **($5 + 5 = 10$ Punkte)**

Es sei $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine von Null verschiedene Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_2^3. \end{aligned} \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|\varphi(t)\|$ nie 0 werden kann und streng monoton fallend ist.

b) Zeigen Sie, dass I nach rechts unbeschränkt ist und $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

Aufgabe H11.3 **($3 + 2 = 5$ Punkte)**

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein A-invarianter Unterraum (über $\mathbb{R}$) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (das heißt, es gilt $Ax \in U$ für alle $x \in U$).

a) Zeigen Sie, dass U invariant bezüglich des linearen Systems

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

ist. Das heißt jede Lösung von (3) mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0 \in U$ nimmt nur Werte aus U an.

Nun sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Sei $y \in \mathbb{R}^n$ eine Ruhelage von

$$\dot{x} = f(x), \tag{4}$$

wobei (4) nicht als lineares System vorausgesetzt ist.
Wir definieren den Attraktionsbereich $\mathcal{E}(y)$ durch die Menge aller Punkte x_0 mit der Eigenschaft, dass die Lösung $\varphi(\,\cdot\,;x_0)$ von (4) mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ auf $I \supset [0,\infty)$ existiert und $\lim_{t\to\infty} \varphi(t;x_0) = y$ gilt. Wir fordern, dass es eine solche Umgebung U um y gibt, dass $U \subset \mathcal{E}(y)$ gilt. Zeigen Sie:

b) Die Menge $\mathcal{E}(y)$ ist invariant bezüglich (4), d. h. für alle $x_0 \in \mathcal{E}(y)$ und $t \in I$ gilt $\varphi(t;x_0) \in \mathcal{E}(y)$.

Wintersemester 2024/2025 — 09.01.2025
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

11. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Freiwillige Aufgaben

Dies sind freiwillige Aufgaben. Falls Sie diese Aufgaben bearbeiten, dann geben Sie diese bitte nicht mit den regulären Hausaufgaben ab, da sie nicht korrigiert werden.

Aufgabe F11.1

Betrachten Sie noch einmal die Aufgabe H11.3.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{E}(y)$ offen ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{E}(y)$ wegzusammenhängend ist, d.h. für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in \mathcal{E}(y)$ existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathcal{E}(y)$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$.

Aufgabe F11.2

Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.
Überprüfen Sie die Ruhelage 0 für die Systeme $\dot{x} = Ax$, $\dot{x} = Bx$ und $\dot{x} = Cx$ auf asymptotische Stabilität.