Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 6, 2023)

Problem 1. Beweisen oder Widerlegen Sie:

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $p \in \mathbb{K}[x]$ ein beliebiges Polynom, dann gilt: Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

(b) Angenommen wir haben in (a) eine Konstellation in der λ ein Eigenwert von A und $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$ ist, dann stimmen jeweils auch die geometrischen Vielfachheiten überein.

(c) Eine $n \times n$ Matrix mit n paarweise verscheidenen Eigenwerten ist invertierbar.

(d) Im Falle der Intervierbarkeit ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau dann, wen λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

(e) Sind zwei Matrizen A und B ähnlich, dann haben sie dieselben Eigenwert.

(f) Sind zwei Matrizen A und B äquivalent, dann haben sie dieselben Eigenwert.

(g) Sind zwei Matrizen A und B ähnlich so folgt: Ist λ ein Eigenwert von A dann ist λ ein Eigenwert von $(A + B)/2$.

Proof. (a) Wahr. Sei $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt

$$\begin{aligned}
p(A)v &= \left(a_0 + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n\right) v \\
&= a_0v + a_1Av + a_2A^2v + \cdots + a_nA^nv \\
&= a_0v + a_1\lambda v + a_2\lambda^2v + \cdots + a_n\lambda^nv \\
&= (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n)v \\
&= p(\lambda)v
\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Wahr. Aus (a) wissen wir, dass die Eigenvektoren sich nicht verändern. Also bezüglich A entscheiden wir uns für eine Basis, deren Dimension die geometrische Vielfachheit ist, dann bleibt die auch eine Basis für das Eigenraum bezüglich das Eigenwert $p(\lambda)$.

(c) Wahr. Es gibt eine Basis von n Eigenvektoren (es ist eine Basis, weil die linear unabhängig sind (Korollar 6.59)).

Dann ist $\{\lambda_i v_i | i \in 1, 2, \dots, n\}$ auch eine Basis, weil Multiplikation durch ein Konstant kann die linear Unabhängigkeit nicht verletzten.

(d) Wahr. Sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt per Definition

$$Av = \lambda v.$$

Außerdem gilt

$$Av = A^{-1}AAv = A^{-1}A(\lambda v) = \lambda A^{-1}Av,$$

also

$$\frac{1}{\lambda}Av = A^{-1}(Av).$$

Das heißt, dass Av ein Eigenvektor von A^{-1} mit Eigenwert λ^{-1} ist.

Sei jetzt v ein Eigenvektor von A^{-1} mit Eigenwert λ. Ähnlich gilt

$$A^{-1}v = AA^{-1}A^{-1}v = AA^{-1}(\lambda v) = \lambda AA^{-1}v$$

und die andere Richtung folgt.

(e) Wahr. Sei $A = Q^{-1}BQ$. Sei außerdem v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt $QA = BQ$ und

$$\begin{aligned} QAv &= Q\lambda v = \lambda(Qv) \\ &= BQv = B(Qv) \end{aligned}$$

also Qv ist ein Eigenvektor von B mit Eigenwert λ. Wir können die Rollen von A und B vertauschen, um die andere Richtung zu zeigen.

(f) Falsch.

Definition

Seien $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$. Dann heißen A und B äquivalent, falls es $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ gibt, sodass

$$A = QBP.$$

Sei $A = \operatorname{diag}(4,4)$, $B = \operatorname{diag}(1,1)$, $Q = P = \operatorname{diag}(2,2)$. Dann hat A nur den Eigenwert 4 während B nur den Eigenwert 1 hat.

(g) Falsch. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann hat B die Eigenwerte 3 und -1, aber $(A+B)/2$ hat characteristisches Polynom $x^2 - 2x - 4$. Durch Einsetzen können wir zeigen, dass weder 3 noch -1 Nullstellen sind, aber die Diskriminante ist > 0, also wir haben zwei unterschiedliche Nullstellen.

Das zeigt, dass B bzw. A Eigenwerte hat, die keine Eigenwerte von $(A+B)/2$ sind und $(A+B)/2$ hat Eigenwerte, die keine Eigenwerte von A bzw. B sind. □

Problem 2. Es seien A, B in $\mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar und D_A, D_B zugehörige Diagonalmatrizen. Zeigen Sie:

(a) Existiert ein $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit

$$D_A = U^{-1}AU, \qquad D_B = U^{-1}BU$$

so gilt für den Kommutator $[A, B] = 0$.

(b) Ist $[A, B] = 0$, dann existiert eine geordnete Basis $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ bezüglich derer gilt

$${}_V[B]_V = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{pmatrix}$$

mit $B_1 \in \mathbb{K}^{d_i\times d_i}$ und d_i die geometrische Vielfachheit von λ_i für $i = 1, \ldots, r$.

(c) Jedes der B_i wie in (b) ist selbst wieder diagonalisierbar für $i = 1, \dots, r$.

(d) Ist $[A, B] = 0$, so existiert ein U mit

$$D_A = U^{-1}AU, \qquad D_B = U^{-1}BU.$$

Proof. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
[A, B] =& AB - BA \\
=& UD_AU^{-1}UD_BU^{-1} - UD_BU^{-1}UD_AU^{-1} \\
=& UD_AD_BU^{-1} - UD_BD_AU^{-1} \\
=& UD_AD_BU^{-1} - UD_AD_BU^{-1} && \text{Diagonalmatrizen kommutieren} \\
=& 0
\end{aligned}$$

(b) Sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt

$$\begin{aligned}
[A, B]v =& 0v = 0 \\
=& (AB - BA)v \\
=& ABv = B(\lambda v) \\
\lambda Bv =& A(Bv)
\end{aligned}$$

Dann ist Bv ein Eigenvektor von A mit gleichen Eigenwert. Wir wählen eine geordnete Basis aus Eigenvektoren, so dass alle Eigenvektoren mit gleichen Eigenwerte nebeneinander stehen.

Wir haben schon gezeigt, dass Bv ein Vektor mit dem gleichen Eigenwert ist, also er liegt noch im Eigenraum. Das heißt, das die nicht (block-)diagonal Terme null sein müssen und das Matrix ist block-diagonal (wobei die Spalten die Wirkung von B auf einem Vektor der Basis bzw. Eigenvektor von A darstellen). Als Darstellung der Wirkung eines Eigenräumes ist es auch klar, dass die Dimension die Dimension des Eigenräumes ist, was per Definition die geometrische Vielfachhheit ist.

(c) Wir betrachten das charakterische Polynom von B_i, und bezeichnen es mit $p_i(\lambda)$. Es gilt $p_1(\lambda)p_2(\lambda)\dots p_r(\lambda) = p(\lambda)$, wobei $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom für ${}_V[B]_V$ ist.

Dann ist jede Eigenwert von einem B_i auch ein Eigenwert von ${}_V[B]_V$, und zu jedem Eigenwert von B gehört einen Eigenvektor. Wir wissen, dass wir aus solche Eigenvektoren eine Basis bilden können (weil B diagonaliserbar ist), also wir können aus eine Teilmenge eine Basis für B_i bilden.

(d) Wir können das Bild und Zielbereich von B_i als einen Eigenraum von A betrachten. Aus (c) wissen wir, dass wir durch ein Basiswechsel B_i diagonalisieren können. Weil das Bild genau ein Eigenraum ist, enthält die Basis nur Eigenvektoren von A, also A bleibt diagonal, während B jetzt nach der Basiswechsel diagonal ist.

Wir haben dann A und B gleichzeitig diagonalisiert. Sei U das Matrix mit Vektoren von die Basis als Spalten. Dann gilt

$$D_A = U^{-1}AU \qquad D_B = U^{-1}BU.$$

□

Problem 3. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ein reelle Matrix.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und dazugehörige Eigenräume.

(c) Im Falle der Diagonalisierbarkeit, bestimmen Sie explizit die Projektoren $P_1, \ldots, P_r$ auf die r-vielen Eigenräume, sodass gilt

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i.$$

Proof. (a)

$$\begin{aligned} p(\lambda) =& \det(A - \lambda I) \\ =& \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
=&(1-\lambda)\,[(1-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1)+(\lambda-3+1)+(2+1-\lambda)] \\
=&(1-\lambda)\,\left[(1-\lambda)(3+\lambda^2-4\lambda+1)+\lambda-2+2-\lambda\right] \\
=&(1-\lambda)^2(3+\lambda^2-4\lambda+1) \\
=&(1-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda+4) \\
=&(1-\lambda)^2(\lambda-2)^2
\end{aligned}
$$

(b) Die Eigenwerte sind 1 und 2. Es gilt

$$
A-1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Eine Basis für den Eigenraum bzw. Kern von $A-1$ ergibt sich sofort:

$$
ER_1=\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right).
$$

Weil wir schon 2 Vektoren gefunden haben, und die algebraische Vielfachheit 2 ist, haben wir den ganzen Eigenraum gefunden. Es gilt auch

$$
A-2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Eine Basis ergibt sich sofort:

$$
ER_2=\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right).
$$

(c) Wir schreiben eine neue Basis von Eigenvektoren:

$$ER_1 = \operatorname{span}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}\right)$$

und

$$ER_2 = \operatorname{span}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Dann sind die Projektoren

$$\begin{aligned}
P_1' =& \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\\
=& \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\\
P_2' =& \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
=& \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dann ist P_1', P_2' eine Zerlegung der Eins. Die gewünschte Projektoren sind

$$P_1 = AP_1' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = AP_2' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 6 & -4 & 2 & 2 \\ 10 & -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

und es gilt $A = P_1 + P_2$. $\square$