Aufgabe 5.1: *Satellit* .... (4 Punkte)

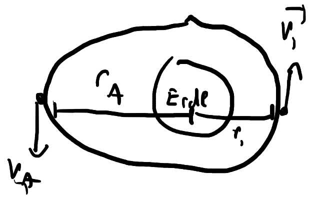
Ein Satellit bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Erde. In der Höhe h über der Erdoberfläche bilden Ortsvektor $\vec{r}_1$ (Ursprung im Erdmittelpunkt) und Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ einen rechten Winkel. Gegebene Größen seien h, $v_1 = |\vec{v}_1|$, $r_2 = |\vec{r}_2|$ und R_E. Für die potentielle Energie des Satelliten im Gravitationsfeld der Erde gilt $E_{pot}(r) = -\frac{GM_E m}{r}$.

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

2 P) a) Welches Tempo v_A hat der Satellit in maximaler Entfernung r_A vom Erdmittelpunkt? Bestimmen Sie v_A und r_A.

2 P) b) Welches Tempo v_2 hat er an einer anderen Stelle $\vec{r}_2$ der Bahn? Welchen Winkel α_2 bildet dort der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_2$ mit dem Ortsvektor $\vec{r}_2$? Bestimmen Sie v_2 und α_2. Nehmen Sie $r_2 = |\vec{r}_2|$ als gegeben an.

a)



$r_1 = |\vec{r}_1| = h$

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r}_1 \times (m\vec{v}_1)$

$L = |\vec{L}| = m|\vec{r}_1||\vec{v}_1| = m r_1 v_1$

Energie $E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1}$

Beim Ort $\vec{r}_A$ ist $\vec{v}_A \perp \vec{r}_A$, weil

$|\vec{r}(t)|$ maximum $\Rightarrow \vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$

Erhaltung von...

Drehimpuls: $\cancel{m} r_1 v_1 = \cancel{m} r_A v_A$ ------ (1)

Energie: $\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 - \frac{GM\cancel{m}}{r_1} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 - \frac{GM\cancel{m}}{r_A}$ --- (2)

(1): $\frac{1}{r_A} = \frac{v_A}{r_1 v_1}$

(2): $\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{GM}{r_1} = \frac{1}{2}v_A^2 - \frac{GMv_A}{r_1v_1}$

$\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{GM}{r_1v_1}v_A + \left(\frac{GM}{r_1} - \frac{1}{2}v_1^2\right)$

$$v_A = \frac{GM}{r_1v_1} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{r_1^2v_1^2} - 2\left(\frac{GM}{r_1} - \frac{1}{2}v_1^2\right)}$$

$$= \frac{GM}{r_1v_1} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{r_1^2v_1^2} - \cancel{2}\left[\frac{2GM - v_1^2r_1}{\cancel{2}r_1}\right]}$$

$$= \frac{GM}{r_1v_1} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{r_1^2v_1^2} - \frac{2GM}{r_1} + \frac{v_1^2r_1}{r_1}}$$

$$= \frac{GM}{r_1v_1} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2 - 2GMr_1v_1^2 + v_1^4r_1^2}{r_1^2v_1^2}}$$

$$= \frac{GM}{r_1v_1} \pm \sqrt{\frac{(GM - r_1v_1^2)^2}{r_1^2v_1^2}}$$

$$= \frac{GM}{r_1 v_1} \pm \frac{GM - r_1 v_1^2}{r_1 v_1}$$ (wir brauchen $|GM - r_1 v_1|$ nicht. Es ist egal wegen $\pm$)

$$= \frac{(GM \pm GM) \mp r_1 v_1^2}{r_1 v_1}$$

$$v_A = v_1 \quad \text{oder} \quad v_A = \frac{2GM}{r_1 v_1} - v_1$$

In diesem Fall ist

$$r_A = \frac{r_1 v_1}{v_A}$$

$$= \frac{r_1 v_1}{\frac{2GM}{r_1 v_1} - v_1}$$

Also 2 Fälle:

Falls $\frac{2GM}{r_1 v_1} - v_1 \leq v_1$

ist $v_A = \frac{2GM}{r_1 v_1} - v_1$

$$r_A = \frac{r_1 v_1}{\frac{2GM}{r_1 v_1} - v_1} = \frac{h v_1}{\frac{2GM}{h v_1} - v_1}$$

sonst ist $v_A = v_1$, $r_A = r_1 = h$

b) Erhaltung von...

Energie: $\frac{1}{2}\cancel{m} v_1^2 - \frac{GM\cancel{m}}{r_1} = \frac{1}{2}\cancel{m} v_2^2 - \frac{GM\cancel{m}}{r_2}$ ---- (3)

Drehimpuls: $\cancel{m} v_1 r_1 = \cancel{m} v_2 r_2 \sin\alpha_2$ ---- (4)

(3): $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2GM}{r_1} + \frac{2GM}{r_2}}$

(4): $\sin\alpha_2 = \frac{v_1 r_1}{v_2 r_2} = \frac{v_1 r_1}{r_2 \sqrt{v_1^2 - 2\frac{GM}{r_1} + \frac{2GM}{r_1}}}$