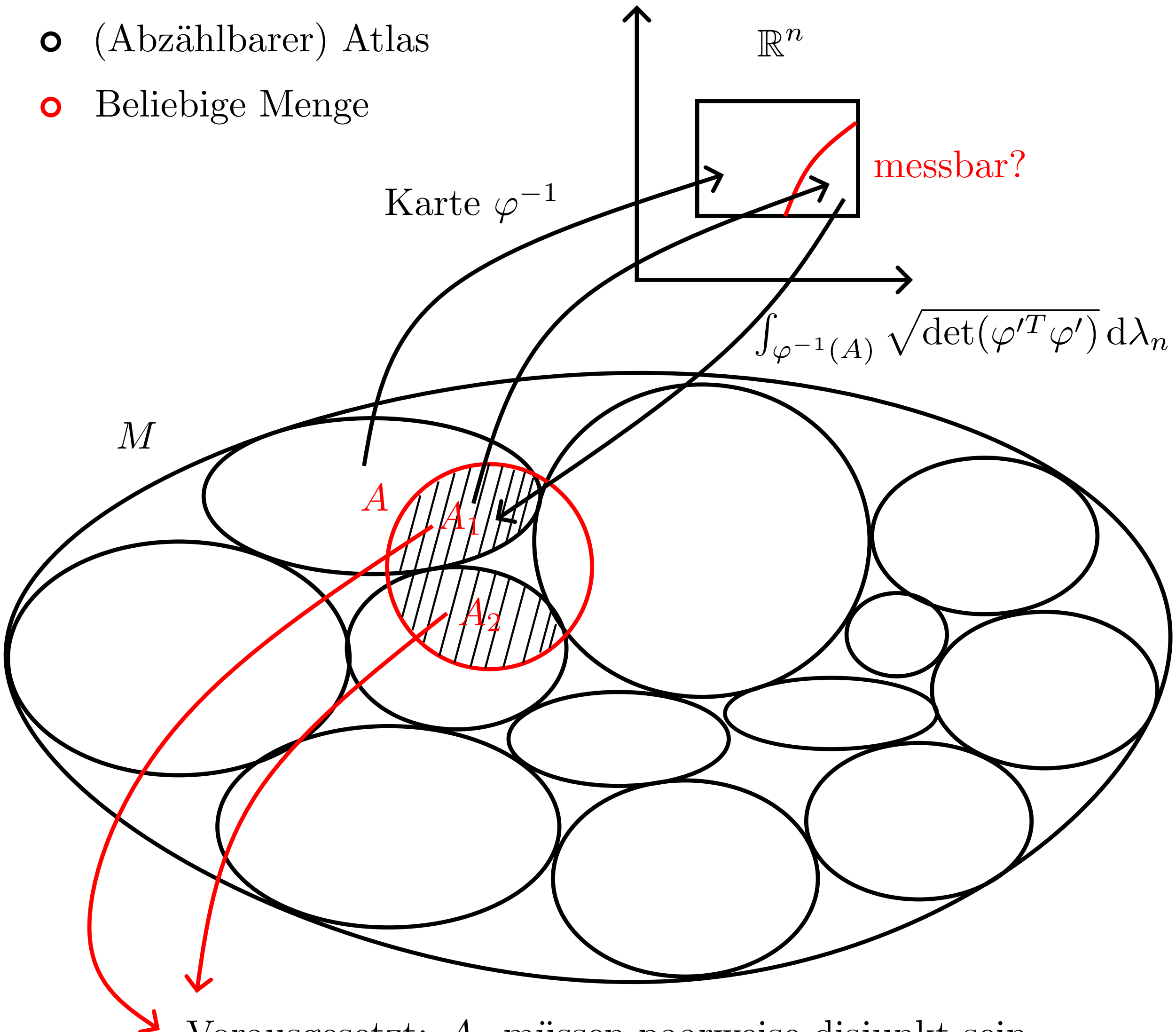

Vorausgesetzt: A_j müssen paarweise disjunkt sein...

$$\lambda_M(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j)$$

Aufgabe 1: (Parametrisierung) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α und $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$. Außerdem existieren offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ und lokale Parameterdarstellungen $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von M mit $\varphi(U) \cup \psi(V) = M$ und $\varphi(U) = M \backslash A$, wobei $A = \psi(N)$ mit einer λ_k-Nullmenge $N \subseteq V$ gilt. Zeigen Sie, dass A messbar ist und

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_{M\backslash A} f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}\,\mathrm{d}\lambda_k\,.$$

Proof. $\varphi(U)$ ist messbar, weil für jedes Punkt in $\varphi(U)$ eine offene Umgebung $\varphi(U)$ gibt, deren Urbild $\mathcal{L}(n)$ als offene Menge noch messbar ist. Weil $\mathcal{L}_M$ eine σ-Algebra ist, ist

$A = M \backslash \varphi(U)$ messbar.

Wir betrachten den endlichen Atlas $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ mit passender Zerlegung der Eins $\chi_{\varphi(U)}, \chi_A$. Diese ist eine Zerlegung der Eins, da die Mengen messbar sind.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M &= \int_U (f \cdot \chi_{\varphi(U)}) \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')}\,\mathrm{d}\lambda_k \\
&\quad + \int_V (f \cdot \chi_A) \circ \psi \sqrt{\det(\psi'^T \psi')}\,\mathrm{d}\lambda_k \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')}\,\mathrm{d}\lambda_k \\
&\quad + \int_N f \circ \psi \cdot \sqrt{\det(\psi'^T \psi')}\,\mathrm{d}\lambda_k \\
&\leq \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')}\,\mathrm{d}\lambda_k \\
&\quad + \int_N \infty \,\mathrm{d}\lambda_k \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')}\,\mathrm{d}\lambda_k + \infty \lambda_k(N) \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')}\,\mathrm{d}\lambda_k + \infty \cdot 0 \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')}\,\mathrm{d}\lambda_k \\
&= \int_{M \backslash A} f \,\mathrm{d}\lambda_M \,.
\end{aligned}$$

$\square$