Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan* and Lukas Then

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 26, 2023)

Problem 1. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}\backslash 0$ und $D \subset \mathbb{K}$ offen. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ ebenfalls n-mal differenzierbar ist und weiterhin

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für jedes $x \in D$ gilt.

Proof. Wir zeigen es per Induktion, für $n = 1$ ist es das Produktregel. Nehme jetzt an, dass f, g $(n+1)-$ mal differenzierbar Funktionen sind und

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

gilt (weil alle $(n+1)$-mal differenzierbar Funktionen sind auch n-mal differenzierbar). Dann ist $(f \cdot g)^{(n)}(x)$ differenzierbar, weil die rechte Seite eine Linearkombination von Produkte aus (zumindest) einmal differenzierbar Funktionen. Es gilt auch,

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n)}(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) && n = 1 \text{ Fall} \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
=& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
=& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x)
\end{aligned}$$

□

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. i) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2x^2+1}.$$

Beweisen Sie, dass $(f_n), n \in \mathbb{N}$ gegen eine zu bestimmende Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, diese jedoch nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Warum ist das kein Widerspruch zu Proposition 5.5.2?

ii) Untersuchen Sie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, x \in \mathbb{R}.$$

auf Differenzierbarkeit.

Proof. i)

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Es ist klar, dass $f_n(x)$ konvergiert gegen $\sqrt{x^2} = |x|$. Sei dann $r(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|$. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} r(x) =& \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - x \\ r'(x) =& \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Deswegen ist $r(x)$ monoton fallend auf $(0, \infty)$. Ähnlich beweist man, dass $r(x)$ monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$ ist. Deswegen ist $x = 0$ ein globales Maximum, und $r(x) \leq r(0) = \frac{1}{n}$. Daher konvergiert (f_n) gleichmäßig.

Man berechnet:

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Die Folge der Ableitungen konvergiert gegen $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)$, falls $x \neq 0$, und 0, falls $x = 0$. Es konvergiert aber nicht lokal gleichmäßig in eine Umgebung U auf 0.

Sei $1 > \epsilon > 0$ gegeben, und nehme an, dass existiere $N \in \mathbb{N}$, für die gilt,

$$|f_n(x)' - g(x)| \leq \epsilon \qquad n > N, x \in U,$$

wobei

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

Nehme eine solche Abbildung $f_n'(x)$. Weil f_n' stetig ist, und $f_n'(0) = 0$, gibt es eine Umgebung $0 \in V$, in der gilt, dass $|f_n'(x) - f_n'(0)| = f_n'(x) \leq 1 - \epsilon, x \in V$. Sei dann $0 \neq x \in V$, und $|1 - f_n'(x)| > \epsilon$. Deswegen ist es kein Widerspruch.

ii) Es gilt $\left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$. Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig (Weierstraßsches Majorantenkriterium).

Jetzt ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos(nx)}{n^3} = -\frac{\cancel{n}\sin(nx)}{n^{\cancel{3}\,2}}$. Weil $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|$ gleichmäßig. Deswegen ist f differenzierbar, mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]. \qquad \square$$

Problem 3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \max\{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Proof. Wir wissen schon, dass es $q_n(x)$ existiert, $q_n(x)$ Polynome, und $q_n(x) \to |x|$ gleichmäßig. Es gilt auch

$$f(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{x}{2}.$$

Daher konvergiert gleichmäßig

$$\frac{q_n(x)}{2} + \frac{x}{2} \to f(x). \qquad \square$$

Problem 4. i) Es seien $f : (a, b) \to (c, d)$ und $g : (c, d) \to R$ n-mal differenzierbare Funktionen mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f$ n-mal differenzierbar ist.

ii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert ist. Bestimmen Sie zudem $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Proof. i)

Theorem 1. *Die Ableitung von ein Produkt* $f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$ *ist*

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_n(x).$$

Proof. Wir beweisen es per Indukion. Für $n = 2$ ist es das Produktregel. Jetzt nehme an, dass es für eine $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_1(x)f_2(x)\dots f_{n+1}(x)\right) =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right)f_{n+1}(x)\\ &+\left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right)\frac{\mathrm{d}f_{n+1}}{\mathrm{d}x}\\ =&\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_n(x)\right)\\ &+\left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right)f_n'(x)\\ =&\sum_{i=1}^{n+1} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_{n+1}(x)\end{aligned}$$

□

Corollary 2. *Alle Monome von differenzierbare Funktionen sind differenzierbar, und die Ableitung ist noch eine lineare Kombination von Monome.*

Corollary 3. *Sei* f $k-$ *mal differenzierbar. Dann alle Monome von*

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$$

sind differenzierbar.

Theorem 4. $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f \circ g)$ *ist ein Monom von Ableitungen von* f *und* g *(höchstens die* k*-ste Ableitung), sofern* f *und* g, n*-mal differenzierbar sind.*

Proof. Für $k = 1$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Nehme an, dass es für ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ gilt. Dann per Korollar 2 gilt es auch für $k+1$. Per Induktion ist die Verkettung dann n-mal differenzierbar, □

ii)

Lemma 5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0, k > 0.$$

Proof. Wir beweisen es per Induktion auf p. Für $p = 1$ verwenden wir den Satz von L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^{k-1}(k)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^k} = 0. \qquad \square$$

Jetzt nehme an, dass es für p gilt. Wir zeigen, dass es für $p \to p+1$ auch gilt.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)(\ln x)^p}{kx^{k-1}(x)} = \frac{p+1}{k} \lim_{\xi\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0.$$

Lemma 6.

$$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-kx} = 0, k > 0.$$

Proof. Nimm $x = e^\xi$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-k}(\ln x)^p = \lim_{x\to\infty} e^{-k\xi}\xi^p = 0. \qquad \square$$

Die Ableitungen $f^{(n)}(x), x \neq 0$ haben den Form $p_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$, wobei $p_n(x)$ eine Polynome ist.

Theorem 1. $f^{(n)}(0) = 0$

Proof. Wir beweisen es per Induktion. $f^{(0)}(0) = 0$ per Definition.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f^{(n-1)}(x)\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} x p_n(x) e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Deswegen ist f überall (inkl. 0) differenzierbar, mit alle Ableitungen $f^{(n)}(0) = 0$ $\square$

$\square$

Problem 5. Es seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{K}$ nichtleere, kompakte Mengen und die Folgen stetiger Funktionen $f_n : K_1 \to K_2$ sowie $g_n : K_2 \to K$ seien gleichmäßig konvergent gegen $f : K_1 \to K_2$ bzw. $f : K_2 \to K$. Beweisen Sie, dass auch

$$g_n \circ f_n \to g \circ f$$

gleichmäßig auf K_1 gilt.

Proof. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann per Definition existiert $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}, x \in K_2, n \geq n_2 \tag{1}$$

Weil g stetig und auf eine kompakte Menge definiert ist, ist g gleichmäßig stetig, und es existiert $\delta > 0$, für die gilt

$$|g(a) - g(b)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |a - b| < \delta \tag{2}$$

Es gibt auch $n_1 \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| < \delta, x \in K_1, n \geq n_1$. Für $n > n_1$ gilt daher auch

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \frac{\epsilon}{2}, n > n_1, x \in K_1 \tag{3}$$

Sei $N = \max(n_1, n_2)$. Für $n \geq N$ gilt Eq. (1) und Eq. (3) auch, weil $N \geq n_1$ und $N \geq n_2$. Dann für $n \geq N$ gilt.

$$\begin{aligned} |g(f(x)) - g_n(f_n(x))| =& |g(f(x)) - g(f_n(x)) + g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))| \\ &\leq \underbrace{|g(f(x)) - g(f_n(x))|}_{<\epsilon/2\ (3)} + \underbrace{|g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))|}_{<\epsilon/2\ (1)} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Also $g_n \circ f_n \to g \circ f$ gleichmäßig. $\square$