Lehrstuhl für Mathematik VIII
Julius-Maximilians Universität Würzburg
Wintersemester 2024/2025

Probeklausur zur Vorlesung

Stochastik I

Dienstag, 28.01.2025

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Fachsemester: ....

Bitte beachten Sie:

- Tragen Sie oben deutlich lesbar Ihren Namen, Matrikelnummer, Studiengang und Fachsemester auf dem Deckblatt ein.
- Auf den Seiten 1-2 finden Sie alle Aufgaben in einer Übersicht. Ab Seite 4 können Sie direkt unterhalb der Aufgabenstellungen Ihre Bearbeitung der jeweiligen Aufgabe aufschreiben.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den dafür vorgesehenen Blättern. Tragen Sie auf jedem beschriebenen Blatt oben Ihren Namen ein. Zusätzliches Papier können Sie von der Aufsicht erhalten.
- Es sind als Hilfsmittel das Vorlesungsskript (in gedruckter Form), Übungsblätter mit Lösungen, ein nicht-programmierbarer Taschenrechner und Mitschriften zugelassen.
- Es sind keine Kommunikation, keine internetfähigen Geräte wie Mobiltelefone oder Tablets und keine programmierbaren Taschenrechner erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte	6	6	6	6	6	6	36
Erreicht							

Bewertung: ....

Viel Erfolg!

Übersicht der Aufgaben:

Aufgabe 1. *(1+2+1,5+1,5 Punkte)*

Es werden zwei (6-seitige) faire Würfel geworfen und die Augenzahlen notiert.

(a) Beschreiben Sie die Ereignisse

- A: Die Summe beider Augenzahlen ist 7;
- B: Die Augenzahl des ersten Würfels ist 3;
- C: Die Augenzahl des zweiten Würfels ist 4;

in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse A, B und C.

(c) Sind die Ereignisse A, B und C unabhängig?

(d) Sind die beiden Ereignisse A und C unabhängig?

Aufgabe 2. *(3+3 Punkte)*

Ein Alkoholtest der Verkehrspolizei ist mit Wahrscheinlichkeit 1% falsch positiv (d.h., bei 1% der Getesteten, die keinen Alkohol getrunken haben, zeigt der Test trotzdem Alkoholkonsum an). Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% ist der Test falsch negativ (d.h., bei 5% der Getesteten, die Alkohol getrunken haben, zeigt der Test trotzdem keinen Alkoholkonsum an). Aus Erfahrung sei bekannt, dass 2% aller Getesteten alkoholisiert sind.

(a) Es werden an einem Abend 1000 Tests durchgeführt. Wie groß ist die erwartete Anzahl positiver Tests?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person alkoholisiert, bei welcher ein positiver Test dies anzeigt?

Aufgabe 3. *(2+2+2 Punkte)*

Es sei X eine Zufallsvariable die absolutstetig verteilt ist mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = c \cdot x(1-x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, mit einer Konstanten c.

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X < 1/2)$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 4. *(2+2+2 Punkte)*

Seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Es seien λ_1 und λ_2 reelle Zahlen aus $[0, 1]$, mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2)(A) = \lambda_1\mathbb{P}_1(A) + \lambda_2\mathbb{P}_2(A), \;\; A \in \mathcal{B}\,,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definiert wird.

(b) Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}_1$ eine Dichte bezüglich einem σ-endlichen Maß λ hat, und $\mathbb{P}_2$ eine Dichte bezüglich einem σ-endlichen Maß μ. Ist $(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2)$ dann immer absolutstetig bezüglich λ? Ist $(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2)$ immer absolutstetig bezüglich μ?

(c) Leiten Sie in der Situation wie in **(b)** eine Dichte von $(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2)$ bezüglich einem geeigneten σ-endlichen Maß her.

Aufgabe 5. *(3+3 Punkte)*

Romeo und Julia haben ein Date zu einer verabredeten Zeit. Unabhängig voneinander kommen beide mit einer Verspätung zu dem Treffen. Die Verspätung von Romeo sei beschrieben durch eine Zufallsvariable X und die von Julia durch eine Zufallsvariable Y. X und Y seien unabhängig identisch exponentialverteilt mit Parametern λ, also jeweils mit Dichte $f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

(a) Leiten Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $Z = X - Y$ her, der Zeit zwischen den Ankunftszeiten der beiden.

(b) Zeigen Sie, dass Z eine Dichte hat und leiten Sie diese her.

Aufgabe 6. *(1,5+4,5 Punkte)*

Eine Universität hat ihre Hörsäle mit neuen Videoprojektoren eines Modells ausgestattet. Die Projektorlampe eines Videoprojektors hat eine erwartete Funktionszeit von 200 Stunden und dabei eine Standardabweichung von 150 Stunden. Die gesamte Nutzungsdauer der Projektoren im Semester sei 18000 Stunden.

(a) Wie groß ist die erwartete Anzahl an Projektorlampen, die für das Semester benötigt werden?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 100 Projektorlampen ausreichend für das Semester? Approximieren Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit dem zentralen Grenzwertsatz. Geben Sie diese mit den Werten aus folgender Tabelle als Zahl an.

Es sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, dann ist $\Phi(z)$ wie folgt:

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Name: ....

Beginn der Bearbeitung:

Aufgabe 1. *(1+2+1,5+1,5 Punkte)*

Es werden zwei (6-seitige) faire Würfel geworfen und die Augenzahlen notiert.

(a) Beschreiben Sie die Ereignisse

- A: Die Summe beider Augenzahlen ist 7;
- B: Die Augenzahl des ersten Würfels ist 3;
- C: Die Augenzahl des zweiten Würfels ist 4;

in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse A, B und C.

(c) Sind die Ereignisse A, B und C unabhängig?

(d) Sind die beiden Ereignisse A und C unabhängig?

Name: ....

Aufgabe 2. *(3+3 Punkte)*

Ein Alkoholtest der Verkehrspolizei ist mit Wahrscheinlichkeit 1% falsch positiv (d.h., bei 1% der Getesteten, die keinen Alkohol getrunken haben, zeigt der Test trotzdem Alkoholkonsum an). Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% ist der Test falsch negativ (d.h., bei 5% der Getesteten, die Alkohol getrunken haben, zeigt der Test trotzdem keinen Alkoholkonsum an). Aus Erfahrung sei bekannt, dass 2% aller Getesteten alkoholisiert sind.

(a) Es werden an einem Abend 1000 Tests durchgeführt. Wie groß ist die erwartete Anzahl positiver Tests?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person alkoholisiert, bei welcher ein positiver Test dies anzeigt?

Name: ....

Aufgabe 3. *(2+2+2 Punkte)*

Es sei X eine Zufallsvariable die absolutstetig verteilt ist mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = c \cdot x(1-x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, mit einer Konstanten c.

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X < 1/2)$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Name: ....

Aufgabe 4. *(2+2+2 Punkte)*

Seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Es seien λ_1 und λ_2 reelle Zahlen aus $[0, 1]$, mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2)(A) = \lambda_1\mathbb{P}_1(A) + \lambda_2\mathbb{P}_2(A), \;\; A \in \mathcal{B}\,,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definiert wird.

(b) Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}_1$ eine Dichte bezüglich einem σ-endlichen Maß λ hat, und $\mathbb{P}_2$ eine Dichte bezüglich einem σ-endlichen Maß μ. Ist $(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2)$ dann immer absolutstetig bezüglich λ? Ist $(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2)$ immer absolutstetig bezüglich μ?

(c) Leiten Sie in der Situation wie in **(b)** eine Dichte von $(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2)$ bezüglich einem geeigneten σ-endlichen Maß her.

Name: ....

Aufgabe 5. *(3+3 Punkte)*

Romeo und Julia haben ein Date zu einer verabredeten Zeit. Unabhängig voneinander kommen beide mit einer Verspätung zu dem Treffen. Die Verspätung von Romeo sei beschrieben durch eine Zufallsvariable X und die von Julia durch eine Zufallsvariable Y. X und Y seien unabhängig identisch exponentialverteilt mit Parametern λ, also jeweils mit Dichte $f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

(a) Leiten Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $Z = X - Y$ her, der Zeit zwischen den Ankunftszeiten der beiden.

(b) Zeigen Sie, dass Z eine Dichte hat und leiten Sie diese her.

Name: ....

Aufgabe 6. *(1,5+4,5 Punkte)*

Eine Universität hat ihre Hörsäle mit neuen Videoprojektoren eines Modells ausgestattet. Die Projektorlampe eines Videoprojektors hat eine erwartete Funktionszeit von 200 Stunden und dabei eine Standardabweichung von 150 Stunden. Die gesamte Nutzungsdauer der Projektoren im Semester sei 18000 Stunden.

(a) Wie groß ist die erwartete Anzahl an Projektorlampen, die für das Semester benötigt werden?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 100 Projektorlampen ausreichend für das Semester? Approximieren Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit dem zentralen Grenzwertsatz. Geben Sie diese mit den Werten aus der Tabelle auf Seite 3 als Zahl an.