Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Funktionentheorie

Daniela Kraus
Oliver Roth

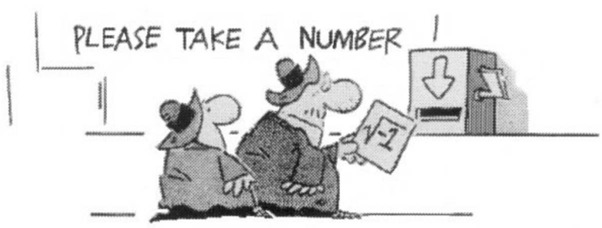
Sommersemester 2023 Universität Würzburg

Die Einführung der complexen Grössen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher durch Grössenoperationen ausgedrückter Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Grössen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, indem man den veränderlichen Grössen, auf welche sie sich beziehen, complexe Werthe giebt, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmässigkeit hervor.

B. Riemann, [34, §20]

Die ächte Kürze des Ausdrucks besteht darin, daß man überall nur sagt was sagenswerth ist, hingegen alle weitschweifigen Auseinandersetzungen Dessen was Jeder selbst hinzudenken kann, vermeidet, mit richtiger Unterscheidung des Nöthigen und Ueberflüssigen.

A. Schopenhauer, *Parerga und Paralipomena*



Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Holomorphe Funktionen

Es sei $\mathbb{C} := \{z = x + iy \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$ die Menge der komplexen Zahlen. Für eine komplexe Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnet

$$K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt offen, wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine Kreisscheibe $K_r(z_0)$ existiert derart, dass $K_r(z_0) \subseteq U$.

Beachtet man, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist, so lässt sich daher das Konzept der Differenzierbarkeit von reellwertigen Funktionen, die auf offenen Intervallen definiert sind, unmittelbar auf Funktionen der Form $f : U \to \mathbb{C}$ mit offener Definitionsmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ übertragen.

Definition 1.1 (komplex differenzierbar, holomorph)
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(in $\mathbb{C}$) existiert. Im Falle der Existenz wird dieser Grenzwert mit $f'(z_0)$ bezeichnet und man nennt die komplexe Zahl $f'(z_0)$ die Ableitung von f im Punkt z_0.
Wir nennen $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph in U, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist. Die Menge aller in U holomorphen Funktionen wird mit $H(U)$ bezeichnet.

Beispiele 1.2

(a) *(Konstante Funktionen sind holomorph auf ganz $\mathbb{C}$)*
Es sei $c \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = c$. Dann ist f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $f'(z_0) = 0$, denn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0\,.$$

Somit ist f auf $\mathbb{C}$ holomorph, also $f \in H(\mathbb{C})$.

(b) *(Monome sind holomorph auf ganz $\mathbb{C}$)*
Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^m$. Dann ist f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $f'(z_0) = m z_0^{m-1}$. Somit ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, d.h. $f \in H(\mathbb{C})$. Dies ergibt sich mit Hilfe der geometrischen Summenformel $(\star)$ wie folgt: Für $z \neq z_0$ gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^m - z_0^m}{z - z_0} = z^{m-1}\,\frac{1 - \left(\frac{z_0}{z}\right)^m}{1 - \frac{z_0}{z}} \overset{(\star)}{=} z^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{z_0}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{m-1} z_0^k\, z^{m-1-k}\,,$$

also

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = m z_0^{m-1}\,.$$

Beispiel 1.3 (Konjugationsabbildung)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$. Dann ist f in keinem Punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, komplex differenzierbar:
(i) Für $z = x_0 + iy$ ($\neq z_0$) gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{x_0 + iy} - \overline{(x_0 + iy_0)}}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} = \frac{\overline{iy} - \overline{iy_0}}{iy - iy_0} = \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = -1\,.$$

(ii) Für $z = x + iy_0$ ($\neq z_0$) gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{x + iy_0} - \overline{(x_0 + iy_0)}}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1\,.$$

Bemerkung
Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist ein einfaches Beispiel einer auf ganz $\mathbb{C}$ stetigen, aber **nirgends** komplex differenzierbaren Funktion. Im Reellen ist es wesentlich schwieriger solche Beispiele zu konstruieren. Die Forderung der komplexen Differenzierbarkeit ist also eine viel restriktivere als die der reellen Differenzierbarkeit!

Für komplex differenzierbare Funktionen gelten die üblichen Rechenregeln.

Satz 1.4
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C}$ seien in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Weiter sei $V \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $V \supseteq f(U)$ und $h : V \to \mathbb{C}$ in $w_0 = f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $f : U \to \mathbb{C}$ ist stetig in z_0.

(b) $f \pm g$ ist in z_0 komplex differenzierbar mit $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$.

(c) $f \cdot g$ ist in z_0 komplex differenzierbar mit $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\,g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)$.

(d) Falls $g(z_0) \neq 0$, so ist f/g in z_0 komplex differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\,g(z_0) - f(z_0)\,g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

(e) $h \circ f : U \to \mathbb{C}$ ist in z_0 komplex differenzierbar mit $(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))\,f'(z_0)$. (Kettenregel)

$H(U)$ ist also ein $\mathbb{C}$–Vektorraum und eine Algebra (über $\mathbb{C}$).

Beispiele 1.5

(a) (Polynome)
Es sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $p \in H(\mathbb{C})$ und es gilt $p'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

(b) (Rationale Funktionen)
Es seien $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome und $U := \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$. Dann ist U als Urbild der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Funktion $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ offen und die rationale Funktion $r : U \to \mathbb{C}$, $r(z) := p(z)/q(z)$, ist holomorph in U.

Die Holomorphie überträgt sich von Polynomen auf Potenzreihen, die man als „verallgemeinerte Polynome“ auffassen kann:

Satz 1.6
Es sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (a_k \in \mathbb{C})$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ *und Konvergenzkreisscheibe* $K_R(z_0)$. *Dann ist* f *holomorph in* $K_R(z_0)$ *und es gilt*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (z - z_0)^{k-1}, \quad z \in K_R(z_0).$$

Beweis. O.E. sei $z_0 = 0$. Fixiere $w \in K_R(0)$. Wir müssen

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \lim_{z \to w} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w} \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lim_{z \to w} \frac{z^k - w^k}{z - w} \stackrel{\text{Bsp.1.2 (b)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k w^{k-1}$$

zeigen. Hierfür wähle $0 < r < R$ derart, dass $|w| < r$. Für $z \in K_r(0)$ mit $z \neq w$ gilt

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{k-1} w^n z^{k-n-1}.$$

Wir beachten, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$z \mapsto a_k \sum_{n=0}^{k-1} w^n z^{k-n-1}$$

stetig auf $K_r(0)$ ist. Da

$$\left| a_k \sum_{n=0}^{k-1} w^n z^{k-n-1} \right| \le |a_k|\, k\, r^{k-1} \qquad \text{für alle } z \in K_r(0)$$

und

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|\, k\, r^{k-1}} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot r = \frac{r}{R} < 1$$

konvergiert die Funktionenreihe

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{k-1} w^n z^{k-n-1}$$

gleichmäßig auf $K_r(0)$ (vgl. Satz A.17). Somit folgt

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k w^{k-1} \quad (\in \mathbb{C})$$

(siehe Satz A.16). ■

Beispiel 1.7
Satz 1.6 zeigt, dass die Funktionen

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

holomorph in $\mathbb{C}$ *sind.*

Korollar 1.8
Eine Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, *ist in jedem Punkt ihrer Konvergenzkreisscheibe* $K_R(z_0)$ *beliebig oft komplex differenzierbar und für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, a_k(z-z_0)^{k-n}\,, \quad z \in K_R(z_0)\,.$$

Insbesondere sind die Koeffizienten

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

eindeutig durch f *bestimmt.*

Korollar 1.9
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{C}$. *Falls zu jedem* $z_0 \in U$ *eine Kreisscheibe* $K_{r_0}(z_0) \subseteq U$ *existiert derart, dass* f *in* $K_{r_0}(z_0)$ *durch eine Potenzreihe dargestellt wird, d.h.*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k\,, \quad z \in K_{r_0}(z_0)\,,$$

so ist f *holomorph in* U.

Dies bedeutet, dass jede Funktion, die sich **lokal** in U (also in einer Umgebung eines jeden Punktes in U) als Potenzreihe darstellen lässt, holomorph auf U ist.

Kapitel 2

Die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung

Wir wechseln nun die Perspektive: $\mathbb{C}$ ist nicht nur ein Körper, sondern lässt sich auch mit dem **reellen** Vektorraum $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

Definition 2.1 (Partielle Differenzierbarkeit)
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt $z_0 \in U$ partiell differenzierbar, wenn die beiden Limites

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := f_x(z_0) := \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := f_y(z_0) := \lim_{h\to 0, h\in\mathbb{R}} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{h}$$

existieren.

Satz 2.2 (komplex differenzierbar $\Rightarrow$ partiell differenzierbar)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Dann ist f in z_0 partiell differenzierbar. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0).$$

Somit ist die sogenannte Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).} \tag{CR$_\mathbb{C}$}$$

erfüllt.

Schreibt man $f = u + iv$ mit $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := Im(f)$ so erhält man aus (CR$_\mathbb{C}$) die sog. Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).} \tag{CR$_\mathbb{R}$}$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{h} = \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{i(f(z_0+ih)-f(z_0))}{ih} = if'(z_0)$$

■

Beispiel 2.3 (($\mathrm{CR}_{\mathbb{C}}$) $\not\Rightarrow$ komplex differenzierbar)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$z = \underbrace{x}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{y}_{\in\mathbb{R}} \mapsto f(x+iy) = \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0, \\ 1 & \text{falls } xy \neq 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0)\,.$$

Somit erfüllt f in $z_0 = 0$ die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung ($\mathrm{CR}_{\mathbb{C}}$). *f ist jedoch in $z_0 = 0$ nicht stetig und daher in $z_0 = 0$ auch nicht komplex differenzierbar.*

Bemerkung 2.4 (Wirtinger Ableitungen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei in $z_0 \in U$ partiell differenzierbar. Satz 2.2 motiviert die Einführung der sog. Wirtinger Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := f_z(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := f_{\overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Damit lässt sich die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung ($\mathrm{CR}_{\mathbb{C}}$) in der kompakten Form

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.} \tag{$\mathrm{CR}_{\mathbb{C}}$}$$

schreiben.

Falls f in z_0 komplex differenzierbar ist, so gilt

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.}$$

Vorsicht! Die Wirtinger Ableitungen sind *keine* Differentialquotienten.

Beispiel 2.5
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$. Dann gilt $f(z) = x^2 + y^2$ für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, also

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) = \frac{1}{2}\,(2x + 2yi) = z\,.$$

Folglich ist f in keinem Punkt $z \neq 0$ komplex differenzierbar.

Differenziert man formal nach $\overline{z}$ und hält z fest, so erhält man dasselbe Ergebnis.

Merkregel
Man berechnet $\frac{\partial f}{\partial z}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ indem man f als Funktion der beiden unabhängigen Variablen z und $\overline{z}$ betrachtet und formal nach z bzw. $\overline{z}$ differenziert.

Bemerkung 2.6 (3–Strich–Regel)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei in $z_0 \in U$ partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0)}\,, \qquad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)}\,.$$

Beweis. Es gilt

$$\overline{(\overline{f})_z} = \overline{\frac{1}{2}\Big((\overline{f})_x - i(\overline{f})_y\Big)} = \frac{1}{2}\Big(\overline{(\overline{f})_x} + i \cdot \overline{(\overline{f})_y}\Big) = \frac{1}{2}\Big(f_x + i f_y\Big) = f_{\overline{z}}\,. \qquad (2.1)$$

Ersetzt man in (2.1) f durch $\overline{f}$, so folgt $\overline{(f_z)} = (\overline{f})_{\overline{z}}$. ■

Wir untersuchen nun, unter welchen Zusatzbedingungen aus der Gültigkeit der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen die komplexe Differenzierbarkeit gefolgert werden kann.

Definition 2.7 (Reelle Differenzierbarkeit)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Man nennt eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ in z_0 reell differenzierbar, wenn die Funktion

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix} \qquad (x + iy \in U)$$

im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist, d.h. f ist in z_0 partiell differenzierbar und für $z = x + iy \in U$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \cdot (y - y_0) + R(z)$$

für ein $R : U \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{R(z)}{|z - z_0|} = 0$.

Satz 2.8 (Komplexe Taylorformel und komplexe Differenzierbarkeit)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist in z_0 reell differenzierbar.

(b) f ist in z_0 partiell differenzierbar und

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)} + r(z) \cdot (z - z_0)$$

für ein $r : U \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \to z_0} r(z) = 0$.

Insbesondere sind äquivalent:

(a') f ist in z_0 reell differenzierbar und es gilt $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.

(b') f ist in z_0 komplex differenzierbar.

Beweis. (a) $\Longleftrightarrow$ (b): Für $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ mit $x, y, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \cdot (y - y_0)\,.$$

Setzt man

$$R(z) = r(z)(z - z_0) \quad \text{bzw.} \quad r(z) = \begin{cases} \frac{R(z)}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0, \end{cases}$$

so folgt die Behauptung. ■

Bemerkung
Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sind $u : U \to \mathbb{R}$ und $v : U \to \mathbb{R}$ reell differenzierbar und erfüllen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z),$$

für alle $z \in U$, so ist $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) := u(z) + iv(z)$ holomorph in U.

Als eine Anwendung der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichung zeigen wir nun, dass für *holomorphe* Funktionen f sich die Konstantheit der „Hälfte" von f auf die gesamte Funktion „lokal fortpflanzt".

Satz 2.9
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(U)$.

(a) Ist $|f|$ konstant auf U, so ist $f' \equiv 0$ in U.

(b) Ist $f' \equiv 0$ in U, so ist f konstant auf jeder offenen Kreisscheibe $K \subseteq U$.

Beweis. (a) Ist $|f|$ identisch 0 in U, so ist auch f und somit f' identisch 0 in U. Anderenfalls ist $|f|$ konstant $\neq 0$ und es folgt

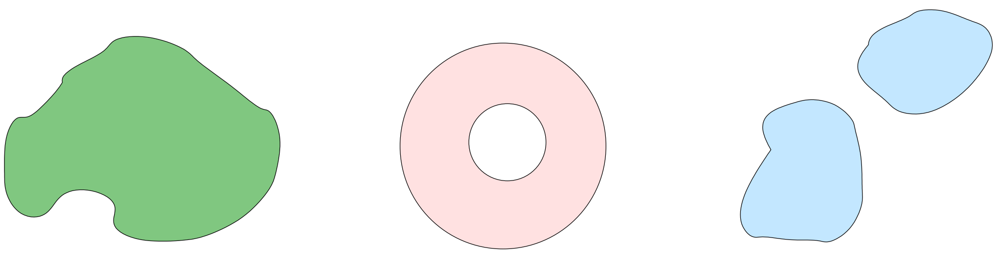
$$0 = (|f|^2)_z = (\overline{f} \cdot f)_z = \overline{f_{\overline{z}}} \cdot f + \overline{f} \cdot f_z = \overline{f} \cdot f'$$

wegen ($\mathrm{CR}_{\mathbb{C}}$). Da $\overline{f(z)} \neq 0$ für alle $z \in U$, ist $f' \equiv 0$ in U.
(b) Es sei $K = K_r(z_0) \subseteq U$ und $\theta \in \mathbb{R}$ beliebig. Definiere $g : [0, r) \to \mathbb{C}$, $g(t) := f(z_0 + te^{i\theta})$. Dann gilt $g'(t) = f'(z_0 + te^{i\theta})e^{i\theta} = 0$ für alle $t \in [0, r)$. Der Hauptsatz der Differential– & Integralrechung (Satz A.25) impliziert $g(t) = g(0) = f(z_0)$ für alle $t \in [0, r)$. Dies zeigt, dass $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in K$. ∎

Bemerkung
Für Satz 2.9 ist die Holomorphievoraussetzung wesentlich: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{i\,\mathrm{Re}(z)}$. Dann gilt $|f| \equiv 1$ auf $\mathbb{C}$, aber f ist auf keiner Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ konstant.

Um eine **globale** Variante von Satz 2.9 zu erhalten, führen wir die folgende Begriffsbildung ein.

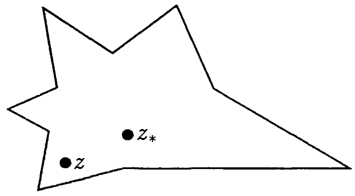
Definition 2.10 (Kurve, Wegzusammenhang, Gebiet)
Eine Kurve γ in $\mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Das Intervall $[a, b]$ heißt Parameterintervall von γ und der Wertebereich $tr(\gamma) := \gamma([a, b])$ heißt Träger von γ. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt wegzusammenhängend, falls zu je zwei Punkten $z, w \in X$ eine Kurve $\gamma : [a, b] \to X$ in X(!) mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$ existiert. Eine nicht–leere, offene und wegzusammenhängende Menge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt Gebiet.



Gebiet Gebiet nicht wegzshg

Bemerkung
In $\mathbb{R}$ sind die offenen und zugleich wegzusammenhängenden Menge genau die offenen Intervalle. Gebiete in $\mathbb{C}$ sind daher die „natürlichen" Verallgemeinerungen offener Intervalle.

Beispiel 2.11 (Sternförmige Mengen)
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt sternförmig bzgl. $z_* \in A$, falls für jeden Punkt $z \in A$ die Strecke $[z_*, z] := \{(1-t)z_* + tz \,:\, t \in [0,1]\}$ von z_* nach z in A liegt.



Jede sternförmige Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend.

Satz 2.12
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subseteq G$. Falls M offen und abgeschlossen in G ist, so ist entweder $M = \emptyset$ oder $M = G$.

Beweis. Annahme: $\emptyset \subsetneq M \subsetneq G$. Wähle $z \in M$ und $w \in G \backslash M$. Da G wegzusammenhängend ist, existiert eine Kurve $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$. Insbesondere existiert ein $t \in [a,b]$ mit $\gamma(t) \in \partial M$, z.B. $t := \inf\{s \in [a,b] \,:\, \gamma(s) \notin M\}$. Da M und $G \backslash M$ offen (in $\mathbb{C}$) sind, folgt $\gamma(t) \notin M$ und $\gamma(t) \notin G \backslash M$, also $\gamma(t) \notin M \cup G \backslash M = G$. Widerspruch! ■

Damit sind wir in der Lage die folgende globale Variante von Satz 2.9 zu beweisen.

Korollar 2.13
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Ist $f' \equiv 0$ auf G, so ist f konstant auf G. Insbesondere gilt: Ist $|f|$ konstant auf G, so ist f konstant auf G.

Beweis. Wähle $z_0 \in G$ beliebig. Wir betrachten die Menge $M := \{z \in G \,:\, f(z) = f(z_0)\}$.

M ist abgeschlossen in G: Da f stetig auf G ist (vgl. Satz 1.3), ist M als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{f(z_0)\}$ unter der stetigen Funktion f abgeschlossen in G (vgl. Satz A.35).

M ist offen in G: Es sei $z^* \in M$. Da G offen ist, existiert $K := K_r(z^*) \subseteq G$. Nach Satz 2.9 ist dann f konstant auf K, also $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in K$. Folglich ist $K \subseteq M$.

Da $M \neq \emptyset$ folgt $M = G$ aus Satz 2.12. Folglich ist f konstant auf G. ■

Bemerkung
In Korollar 2.13 ist es wesentlich, dass die Menge G ein Gebiet und insbesondere zusammenhängend ist. Beispielsweise ist die durch $f(z) := 1$ für $\operatorname{Im} z > 0$ und $f(z) := -1$ für $\operatorname{Im} z < 0$ definierte Funktion $f : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ holomorph und $|f|$ ist konstant auf $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, die Funktion f dagegen nicht.

Kapitel 3

Konforme Abbildungen

Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen besitzen eine elegante geometrische Interpretation. Hierzu wechseln wir wiederum die Perspektive und betrachten Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ nun als **Abbildungen** mit Definitions– und Wertebereich im **euklidischen** reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Wir verwenden hierbei das **kanonische** Skalarprodukt und die hiervon induzierte Winkelmessung.

Definition 3.1 (orientierter Winkel)
Es seien $z_1 = |z_1|\, e^{it_1}$, $z_2 = |z_2|\, e^{it_2} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$. Dann heißt die Zahl

$$\angle(z_1, z_2) := \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \begin{cases} t_2 - t_1, & \text{für } t_2 \geq t_1, \\ 2\pi + (t_2 - t_1) & \text{für } t_1 > t_2\,, \end{cases}$$

der orientierte Winkel zwischen z_1 und z_2.

Beachte, der orientierte Winkel $\angle(z_1, z_2)$ wird von z_1 aus in mathematisch positiver Drehrichtung gemessen und es gilt

$$\angle(z_1, z_2) = \angle\left(\frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z_2}{|z_2|}\right) \in [0, 2\pi).$$

Definition 3.2 (Winkel zwischen Kurven)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $\gamma_1 : [a, b] \to U$ und $\gamma_2 : [c, d] \to U$ differenzierbare Kurven, die sich für $t_1 \in (a, b)$, $t_2 \in (c, d)$ in $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ schneiden mit

$$\dot\gamma_1(t_1) := \lim_{t \to t_1} \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_1)}{t - t_1} \neq 0 \quad \text{und} \quad \dot\gamma_2(t_2) := \lim_{t \to t_2} \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_2)}{t - t_2} \neq 0.$$

Dann ist der orientierte Winkel zwischen γ_1 und γ_2 im Punkt z_0 gegeben durch $\angle(\dot\gamma_1(t_1), \dot\gamma_2(t_2))$.

Definition 3.3 (winkeltreu, lokal konform)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$. f heißt in z_0 lokal konform, falls

(a) f in z_0 reell differenzierbar ist und

(b) der orientierte Winkel zwischen je zwei sich in z_0 schneidenden differenzierbaren Kurven bei der Abbildung unter f invariant bleibt, d.h. für je zwei differenzierbare Kurven $\gamma_1 : [a, b] \to U$, $\gamma_2 : [c, d] \to U$ mit $\gamma_1(t_1) = z_0 = \gamma_2(t_2)$, $t_1 \in (a, b)$, $t_2 \in (c, d)$ und $\dot\gamma_1(t_1) \neq 0$, $\dot\gamma_2(t_2) \neq 0$ gilt

$$\angle\Big((f \circ \gamma_1)\dot{}(t_1), (f \circ \gamma_2)\dot{}(t_2)\Big) = \angle\left(\dot\gamma_1(t_1), \dot\gamma_2(t_2)\right) . \tag{3.1}$$ [1]

Satz 3.4 (komplex differenzierbar vs. lokal konform)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

[1] Beachte, Gleichung (3.1) impliziert $(f \circ \gamma_1)\dot{}(t_1) \neq 0$ und $(f \circ \gamma_2)\dot{}(t_2) \neq 0$.

(a) *f ist lokal konform in z_0.*

(b) *f ist in z_0 komplex differenzierbar mit $f'(z_0) \neq 0$.*

Beweis. Es sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(t_0) = z_0$ und $\dot\gamma(t_0) \neq 0$ und $f : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar in z_0 ist. Dann gilt

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,(\gamma(t) - \gamma(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)(\overline{\gamma(t) - \gamma(t_0)}) + r(\gamma(t))(\gamma(t) - \gamma(t_0))$$

mit $r : U \to \mathbb{C}$ und $\lim_{t\to t_0} r(\gamma(t)) = 0$, da $\lim_{t\to t_0} \gamma(t) = z_0$, siehe Satz 2.8. Daher folgt

$$(f \circ \gamma)\dot{}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,\dot\gamma(t_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\,\overline{\dot\gamma(t_0)}\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Es seien $\gamma_1 : [a,b] \to U$, $\gamma_2 : [c,d] \to U$ zwei differenzierbare Kurven in U für die $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, $t_1 \in (a,b)$, $t_2 \in (c,d)$ und $\dot\gamma_1(t_1) \neq 0$, $\dot\gamma_2(t_2) \neq 0$ gilt. Da $f_z(z_0) = f'(z_0) \neq 0$ und $f_{\bar z}(z_0) = 0$, folgt $(f \circ \gamma_j)\dot{}(t_j) = f'(z_0)\dot\gamma_j(t_j) \neq 0$ für $j = 1,2$ und

$$\angle\Big((f\circ\gamma_1)\dot{}(t_1), (f\circ\gamma_2)\dot{}(t_2)\Big) = \arg\left(\frac{f'(z_0)\,\dot\gamma_2(t_2)}{f'(z_0)\,\dot\gamma_1(t_1)}\right) = \angle(\dot\gamma_1(t_1), \dot\gamma_2(t_2))\,.$$

Dies zeigt, dass f in z_0 lokal konform ist.

(a) $\Rightarrow$ (b) Wähle eine Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$. Es sei $\eta \in \mathbb{C}$ mit $|\eta| = 1$ und definiere $\gamma_\eta : [-r,r] \to U$, $\gamma_\eta(t) = z_0 + t\eta$. Dann gilt

$$\arg\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,\eta + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\,\overline{\eta}}{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)}\right) = \angle\Big((f\circ\gamma_1)\dot{}(0), (f\circ\gamma_\eta)\dot{}(0)\Big) = \angle(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_\eta(0)) = \arg\left(\frac{\eta}{1}\right)$$

und daher

$$\arg\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\,\frac{\overline{\eta}}{\eta}\right) = \arg\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\right)\,.$$

Dies impliziert, da $\eta \in \partial K_1(0)$ beliebig war

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0\,.$$

Folglich ist f in z_0 komplex differenzierbar und $0 \neq (f \circ \gamma_1)\dot{}(0) = f'(z_0)$. ∎

Definition 3.5 (Konforme Abbildung)
Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine bijektive Abbildung $f : U \to V$ heißt konforme Abbildung (von U auf V), falls f in jedem Punkt $z_0 \in U$ lokal konform ist.

Beispiele 3.6

(a) *Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^2$ bildet die rechte Halbebene $RH := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ konform auf das Gebiet $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ab. Die Abbildung f ist aber in $z_0 = 0$ nicht mehr winkeltreu.*

(b) *Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist lokal konform mit $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, aber nicht konform, da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht injektiv ist. Dagegen bildet $\exp$ den horizontalen Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ konform auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ab.*

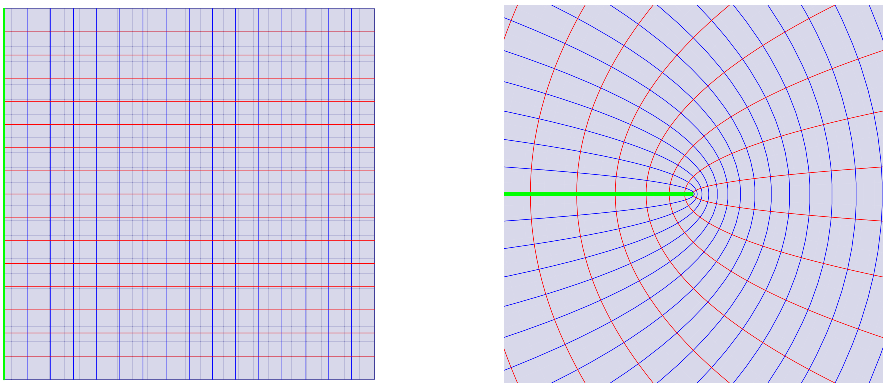


Abbildung 3.1: $f(z) = z^2$

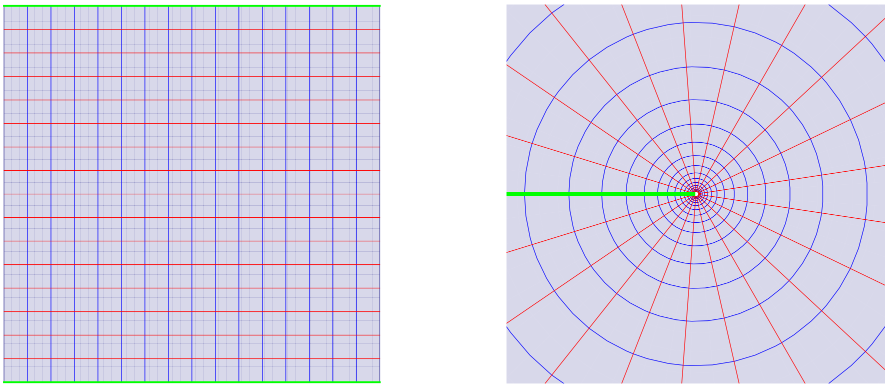


Abbildung 3.2: $f(z) = \exp(z)$

Bemerkung
Es seien $U, V, W \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to V$, $g : V \to W$ konforme Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f : U \to W$ konform.

Beispiel 3.7 (Möbiustransformationen)
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Eine Abbildung der Form

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

heißt Möbiustransformation.

(a) *Falls $c = 0$, so ist $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,*

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

konform, denn $T = T_2 \circ T_1$ mit $T_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$T_1(z) = \frac{a}{d}z$$

einer Drehstreckung (konform) und $T_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$T_2(z) = z + \frac{b}{d}$$

einer Translation (konform).

Wir setzen $T(\infty) = \infty$.

(b) *Falls $c \neq 0$, so ist $T : \mathbb{C}\backslash\{-d/c\} \to \mathbb{C}\backslash\{a/c\}$ eine konforme Abbildung, denn*

$$T(z) = \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{z + d/c} + \frac{a}{c} = T_3 \circ T_2 \circ T_1(z)$$

mit

$$T_1 : \mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad T_1(z) = z + \frac{d}{c} \quad \textit{(konform)}$$

$$T_2 : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad T_2(z) = \frac{1}{z} \quad \textit{einer Inversion (konform)}$$

$$T_3 : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\}, \quad T_3(z) = \frac{(bc - ad)}{c^2}z + \frac{a}{c} \quad \textit{(konform)}.$$

Wir setzen $T(\infty) := a/c$ und $T(-d/c) := \infty$.

Setzt man $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so ist $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ bijektiv.

Bemerkung (Gruppenstruktur)
Es sei

$$\text{Möb} = \left\{\tilde{T} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ \tilde{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0\right\}$$

und

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) := \{M \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \det M \neq 0\}.$$

Betrachte die Abbildung $T : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to$ Möb

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T_M(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Dann gilt $T_{M_2 \cdot M_1} = T_{M_2} \circ T_{M_1}$ für alle $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Insbesondere ist daher Möb eine Gruppe bzgl. der Komposition.

Beweis. Für $u, v \in \mathbb{C}$ mit $(u, v) \neq (0, 0)$ und

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

gilt

$$T_M\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{au + bv}{cu + cv} = \frac{u'}{v'} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Für $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und $u, v \in \mathbb{C}$ mit $(u, v) \neq (0, 0)$ gilt daher

$$T_{M_2} \circ T_{M_1}\left(\frac{u}{v}\right) = T_{M_2}\left(\frac{u'}{v'}\right) = \frac{u''}{v''} = T_{M_2 \cdot M_1}\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$\text{mit} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = M_1\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = M_2\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = M_2M_1\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

∎

Konvention
Im Folgenden wird eine Gerade L in $\mathbb{C}$ auch mit der Menge $L \cup \{\infty\} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ identifiziert.

Satz 3.8
Die Möbiustransformation $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $T(z) = 1/z$, bildet Geraden (in $\hat{\mathbb{C}}$) und Kreislinien auf Geraden (in $\hat{\mathbb{C}}$) und Kreislinien ab. Insbesondere gilt für eine Gerade L (in $\hat{\mathbb{C}}$) und eine Kreislinie C:

$T(C)$ *ist eine Kreislinie, falls* $0 \notin C$.

$T(C)$ *ist eine Gerade, falls* $0 \in C$.

$T(L)$ *ist eine Kreislinie, falls* $0 \notin L$.

$T(L)$ *ist eine Gerade, falls* $0 \in L$.

Beweis. Wir beachten:
Eine Menge $P \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann eine Gerade oder Kreislinie in $\mathbb{C}$, falls $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ mit $|\beta|^2 - \alpha\,\delta > 0$ existieren derart, dass

$$P = \{z \in \mathbb{C} : \alpha\, z\, \overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \delta = 0\}\,.$$

Beweis: Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $\alpha = 0$ ($\Rightarrow \beta \neq 0$)

$$\overline{\beta}\, z + \beta\, \overline{z} + \delta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,\mathrm{Re}(\beta)\, x + 2\,\mathrm{Im}(\beta)\, y + \delta = 0$$

und für $\alpha \neq 0$

$$\alpha\, z\overline{z} + \overline{\beta}\, z + \beta\, \overline{z} + \delta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z\overline{z} + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\, z + \frac{\beta}{\alpha}\, \overline{z} + \frac{\beta\overline{\beta}}{\alpha^2} - \left(\frac{\beta\overline{\beta}}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|z + \frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = \underbrace{\frac{\beta\overline{\beta}}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}}_{>0}\,.$$

$\square$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} z \in P\backslash\{0\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \delta = 0 \\ &\overset{w=1/z}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha + \overline{\beta}\overline{w} + \beta w + \delta w \overline{w} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad w \in P'\backslash\{0\} \quad \text{mit } P' = \{w \in \mathbb{C} : \alpha + \overline{\beta}\overline{w} + \beta w + \delta w\overline{w} = 0\}\,. \end{aligned}$$

Dies zeigt:

$$T_*(P\backslash\{0\}) = P'\backslash\{0\}\,.$$

Somit folgt:

Falls P eine Kreislinie ist, so gilt:
$T_*(P\backslash\{0\}) = T_*(P)$ ist eine Kreislinie, falls $0 \notin P$ und $T_*(P\backslash\{0\})$ ist eine Gerade (in $\mathbb{C}$), falls $0 \in P$.

Ist P eine Gerade, so gilt:
$T_*(P) \cup \{0\}$ ist eine Kreislinie, falls $0 \notin P$ und $T_*(P\backslash\{0\}) \cup \{0\}$ ist eine Gerade (in $\mathbb{C}$), falls $0 \in P$. $\blacksquare$

Kombiniert man Beispiel 3.7 und Satz 3.8 so erhält man

Satz 3.9
Möbiustransformationen $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, bilden Geraden (in $\hat{\mathbb{C}}$) und Kreislinien auf Geraden (in $\hat{\mathbb{C}}$) und Kreislinien ab.

Insbesondere gilt für eine Gerade L (in $\hat{\mathbb{C}}$) und eine Kreislinie C:

(a) $c = 0$: $T(L)$ *ist eine Gerade.*

$T(C)$ *ist eine Kreislinie.*

(b) $c \neq 0$: $T(C)$ *ist eine Kreislinie, falls* $-\frac{d}{c} \notin C$.

$T(C)$ *ist eine Gerade, falls* $-\frac{d}{c} \in C$.

$T(L)$ *ist eine Kreislinie, falls* $-\frac{d}{c} \notin L$.

$T(L)$ *ist eine Gerade, falls* $-\frac{d}{c} \in L$.

Konvention
Wir bezeichnen die offene Einheitskreisscheibe $K_1(0)$ auch mit $\mathbb{D}$.

Beispiele 3.10

(a) Die Möbiustransformation $T : \mathbb{D} \to RH$, $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ *ist konform.*

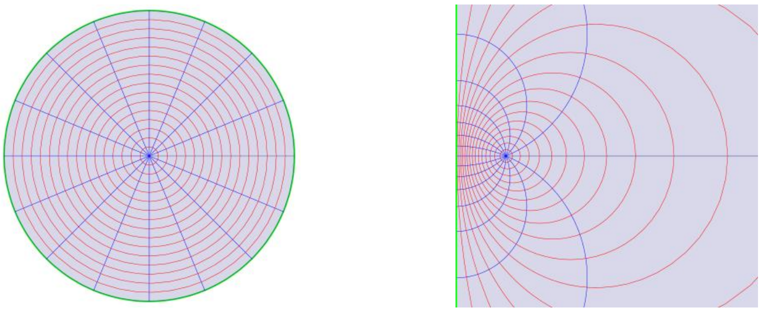


Abbildung 3.3: $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$

(b) Es sei $a \in \mathbb{D}$. *Dann ist die Möbiustransformation* $T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$,

$$T_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$$

konform.

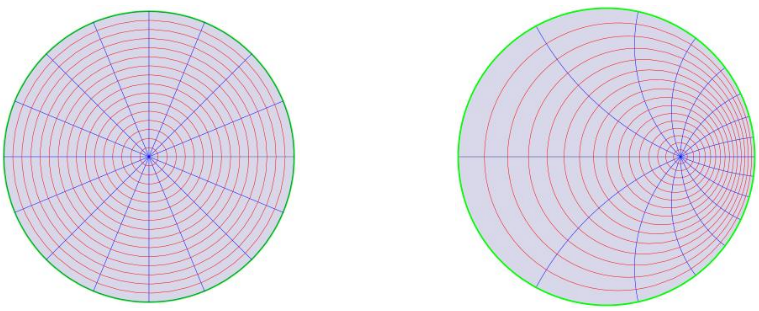


Abbildung 3.4: $T(z) = \frac{0.5-z}{1-0.5z}$

Beweis. (a) Dies sieht man ohne jegliche Rechnung wie folgt ein. Wir wissen $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ist bijektiv und $T : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ ist konform. Da offenbar $T(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ gilt, bildet T als Möbiustranformation (die Gerade) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf (die Gerade) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ab. Ferner bildet T die Kreislinie $\partial\mathbb{D}$ wegen $T(1) = \infty$ auf eine Gerade durch $T(-1) = 0$ ab. Da sich $\partial\mathbb{D}$ und $\mathbb{R}$ (in $z = -1$) orthogonal schneiden und T eine konforme Abbildung ist, schneiden sich auch die Bildmengen $T(\partial\mathbb{D})$ und $T(\mathbb{R})$ orthogonal (in $T(-1) = 0$), d.h. $T(\partial\mathbb{D}) = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da $\mathbb{D}$ und $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ wegzusammenhängend sind und T auf $\mathbb{D}$ bzw. $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ stetig ist, sind $T(\mathbb{D})$ und $T(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}})$ wegzusammenhängend. Die Bijektivität von T impliziert $T(\mathbb{D}) \cap T(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}) = \emptyset$. Da $T(0) = 1$ folgt $T(\mathbb{D}) = RH$.

(b) Wir wissen $T_a : \mathbb{C}\backslash\{1/\overline{a}\} \to \mathbb{C}\backslash\{1/\overline{a}\}$, $T_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$ ist konform und $T_a(\partial\mathbb{D})$ ist eine Kreislinie. Wegen

$$|T_a(z)|^2 = \left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right|^2 = 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} = 1$$

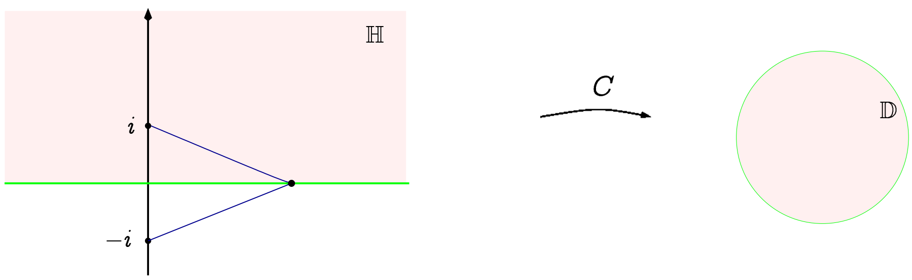
für $z \in \partial\mathbb{D}$, folgt $T_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Da $T_a(0) = a \in \mathbb{D}$ folgt $T_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. ■

Beispiel 3.11

(a) *Es sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene. Die Cayley–Abbildung*

$$C : \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \quad C(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

ist konform.



Man beachte, dass die Umkehrabbildung

$$C^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}, \quad C^{-1}(w) = i\frac{1+w}{1-w}$$

der Cayley–Abbildung die Komposition der Abbildungen T aus Beispiel 3.10 (a) und $z \mapsto iz$ ist.

(b) *Es seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \partial\mathbb{D}$ paarweise verschieden und positiv orientiert. Dann bildet*

$$T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad T(z) = \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_1}\,\frac{z - \xi_1}{z - \xi_3}$$

die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ konform auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ ab mit $T(\xi_1) = 0$, $T(\xi_2) = 1$ und $T(\xi_3) = \infty$.

Kapitel 4

Integration im Komplexen

Definition 4.1 (Wege, Wegintegral)
Ein Weg γ in $\mathbb{C}$ ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Für einen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f : tr(\gamma) \to \mathbb{C}$ heißt das Integral

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(\gamma(t))\,\gamma'(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f(\gamma(t))\,\gamma'(t))\,dt$$

das Wegintegral von f längs γ.

Bemerkungen 4.2

(a) Die abkürzende Schreibweise

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

lässt sich gut merken, wenn man formal die Substitutionsregel für $z = \gamma(t)$, d.h. $dz = \gamma'(t)\,dt$, verwendet. Man beachte, dass z hier lediglich die Rolle einer Integrationsvariablen spielt, die man daher beliebig umbenennen darf, z.B. gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(w)\,dw = \int_\gamma f(\text{I–love–complex–analysis})\,d(\text{I–love–complex–analysis})\,.$$

(b) Weglänge: Wege sind rektifizierbar. Die Länge des Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{Re}\,\gamma'(t))^2 + (\mathrm{Im}\,\gamma'(t))^2}\,dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\,.$$

(c) „Eine Umparametrisierung des Weges ändert den Wert eines Wegintegrals nicht.“

Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $\varphi : [c,d] \subseteq \mathbb{R} \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Dann ist $\gamma_* = \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\mathrm{tr}(\gamma) = \mathrm{tr}(\gamma_*)$. Für jede stetige Funktion $f : \mathrm{tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\gamma_*} f(z)\,dz = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\,\gamma'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \overset{\tau=\varphi(t)}{=} \int_a^b f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,d\tau = \int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

(d) Entgegengesetzt durchlaufener Weg: Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Dann ist

$$\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto \gamma(a+b-t)$$

der zu γ entgegengesetzt durchlaufene Weg, d. h. Anfangs– und Endpunkt des Weges γ werden vertauscht. Es gilt $\mathrm{tr}(\gamma) = \mathrm{tr}(\gamma_-)$. Für jede stetige Funktion $f : \mathrm{tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$ folgt

$$\int_{\gamma_-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Beispiele 4.3 (Kreislinien und Strecken)

(a) *Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Der geschlossene Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, durchläuft die Kreislinie $\partial K_r(z_0)$ einmal entgegen des Uhrzeigersinns. Wir setzen für jede stetige Funktion $f : \partial K_r(z_0) \to \mathbb{C}$*

$$\int\limits_{\partial K_r(z_0)} f(z)\,dz := \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{0}^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,i re^{it} dt\,.$$

(b) *Es seien $c, d \in \mathbb{C}$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = c + t(d-c)$, die (orientierte) Strecke, die die Punkte $c \in \mathbb{C}$ und $d \in \mathbb{C}$ verbindet und $[c,d] = tr(\gamma)$. Dann setzen wir für jede stetige Funktion $f : [c,d] \to \mathbb{C}$*

$$\int\limits_{[c,d]} f(z)\,dz := \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = (d-c)\int\limits_{0}^{1} f(c + (d-c)\,t)\,dt\,.$$

Falls $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$, so gilt mit der Substitution $x = c + (d-c)t$:

$$\int\limits_{[c,d]} f(z)\,dz = (d-c)\int\limits_{0}^{1} f(c + (d-c)t)\,dt = \int\limits_{c}^{d} f(x)\,dx\,.$$

Die üblichen Integrale über Intervalle sind also spezielle Wegintegrale.

Konvention

Für eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ und eine Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$||f||_K := \sup_{z \in K} |f(z)|\,.$$

Falls K kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig ist, so gilt $||f||_K = \max\limits_{z\in K} |f(z)|$.

Satz 4.4 (Standardabschätzung)

Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f : tr(\gamma) \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le L(\gamma) \cdot ||f||_{tr(\gamma)}\,.$$

Beweis.

Wir zeigen zunächst die Dreieicksungleichung für eine stückweise stetige Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\left|\int\limits_{a}^{b} g(t)\,dt\right| \le \int\limits_{a}^{b} |g(t)|\,dt\,.$$

Hierzu wähle $\eta \in \partial\mathbb{D}$ derart, dass

$$\eta\int\limits_{a}^{b} g(t)\,dt = \left|\int\limits_{a}^{b} g(t)\,dt\right|\,.$$

Dann gilt

$$\left|\int\limits_{a}^{b} g(t)\,dt\right| = \mathrm{Re}\left(\eta\int\limits_{a}^{b} g(t)\,dt\right) = \int\limits_{a}^{b} \mathrm{Re}\,(\eta g(t))\;dt \le \int\limits_{a}^{b} |g(t)|\,dt\,.$$

Aufgrund der Dreieicksungleichung für Integrale ergibt sich

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt$$

$$\le \max_{z\in\mathrm{tr}(\gamma)} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = ||f||_{\mathrm{tr}(\gamma)} \cdot L(\gamma)\,.$$

■

Bemerkung 4.5 (Zusammengesetzte Wege)
Es seien $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Es bezeichne

$$\gamma_2\gamma_1 : [a, d+b-c] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [a,b]\,, \\ \gamma_2(t + (-b+c)) & \text{für } t \in [b, d+b-c]\,, \end{cases}$$

den aus γ_1 und γ_2 zusammengesetzten Weg. Es gilt $\mathrm{tr}(\gamma_2\gamma_1) = \mathrm{tr}(\gamma_1) \cup \mathrm{tr}(\gamma_2)$. Für jedes stetige $f : \mathrm{tr}(\gamma_2\gamma_1) \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\gamma_2\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Beweis. Setze $\gamma = \gamma_2\gamma_1$. Dann gilt mit der Substitution $\tau = t + c - b$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^{d+b-c} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt + \int_b^{d+b-c} f(\gamma_2(t+c-b))\,\gamma_2'(t+c-b)\,dt$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_c^d f(\gamma_2(\tau))\,\gamma_2'(\tau)\,d\tau = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

■

Beispiel 4.6 (Dreiecke)
Es seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $\Delta = \Delta(a,b,c)$ das abgeschlossene und ausgefüllte Dreieck mit den im mathematisch positiven Sinne orientierten Eckpunkten a, b und c. Für eine stetige Funktion $f : \partial\Delta \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz := \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz\,.$$

Kapitel 5

Cauchy Integrale und Windungszahlen

Es seien $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ und $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}$ fixiert. Dann ist die Funktion

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j}{w_j - z}$$

holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{w_1, \dots, w_n\}$. Mithilfe komplexer Wegintegrale konstruieren wir nun eine "große" Klasse holomorpher Funktionen, indem wir die Summe durch ein Integral ersetzen:

Definition 5.1 (Cauchy Integral)
Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f : tr(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt

$$F : \mathbb{C} \setminus tr(\gamma) \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,,$$

das Cauchy Integral von f bzgl. γ.

Satz 5.2
Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $f : tr(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig und $F : \mathbb{C} \setminus tr(\gamma) \to \mathbb{C}$ das Cauchy Integral von f bzgl. γ. Dann ist für jedes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma)$ die Funktion F in der Kreisscheibe $K_r(z_0)$, $r := \operatorname{dist}(z_0, tr(\gamma))$, durch die Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad \textit{mit} \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw\,,$$

darstellbar. Insbesondere ist F in $\mathbb{C} \setminus tr(\gamma)$ beliebig oft komplex differenzierbar.

Beweis. Wähle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$. Es sei $z \in K_r(z_0)$ beliebig aber fest. Dann gilt

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

für jedes $w \in \operatorname{tr}(\gamma)$. Es folgt daher

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k}_{(*)}$$

für alle $w \in \operatorname{tr}(\gamma)$. Da die Reihe $(*)$ gleichmäßig auf $\operatorname{tr}(\gamma)$ konvergiert, zeigt Satz A.27 (b)

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w - z_0} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw \right) (z - z_0)^k\,. \end{aligned}$$

Nach Korollar 1.9 ist F holomorph in $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ (und beliebig oft komplex differenzierbar). ■

Die folgende Bemerkung beschreibt für einen Weg γ die Struktur der offenen Menge $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$.

Bemerkung 5.3 (Komponenten offener Mengen)

(a) Es sei U eine nichtleere offene Menge in $\mathbb{C}$. Für $z \in U$ heißt die Menge

$$C_z := \cup\{X \subseteq U \,:\, z \in X \text{ und } X \text{ ist offen und wegzusammenhängend }\}$$

Komponente (von z). Es gilt:

(i) C_z ist offen und wegzusammenhängend, d.h. C_z ist das „größte" Gebiet in U, das z enthält.

(ii) Für je zwei Punkte $z_1, z_2 \in U$ gilt entweder $C_{z_1} = C_{z_2}$ oder $C_{z_1} \cap C_{z_2} = \emptyset$, d.h. U lässt sich als Vereinigung paarweise disjunkter Komponenten darstellen.

(iv) Die Menge aller paarweise disjunkter Komponenten von U ist abzählbar.

Beweis: Es sei $\mathcal{K}$ die Menge aller paarweise disjunkter Komponenten von U und $Q := \{z = x + iy \in U : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Dann ist Q abzählbar und dicht in U. Jede Komponente $C \in \mathcal{K}$ enthält also Elemente aus Q. Es sei $f(C)$ ein solches Element. Hierdurch wird eine injektive Abbildung f von $\mathcal{K}$ in die abzählbare Menge Q gegeben. Daher ist $\mathcal{K}$ abzählbar. ■

(b) Es sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$. Dann ist $U := \mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ eine offene Menge in $\mathbb{C}$ mit *genau* einer unbeschränkten Komponente.

Beweis: Es gibt ein $R > 0$ mit $\mathrm{tr}(\gamma) \subseteq \overline{K_R(0)}$, d.h. $\mathbb{C}\setminus\overline{K_R(0)}$ ist eine wegzusammenhängende Teilmenge von U, also in einer Komponente von U enthalten, die daher unbeschränkt sein muss. Für jede andere Komponente C von U gilt $C \subseteq K_R(0)$, also ist C beschränkt. ■

Wir können nun das Cauchy Integral für $f \equiv 1$ *geometrisch* interpretieren.

Satz 5.4

Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ und $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $\gamma(a) - z = |\gamma(a) - z|e^{i\varphi_0}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = \varphi_0$ und $\gamma(t) - z = |\gamma(t) - z|e^{i\varphi(t)}$ für jedes $t \in [a,b]$.

Ist γ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w - z} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}\,.$$

Beweis. The proof is by magic (and essentially due to Ahlfors).

Existenz: Betrachte die Funktion $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$\lambda(t) := \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds\right)\,.$$

Dann ist λ auf $[a,b]$ stückweise stetig differenzierbar mit

$$\lambda'(t) = \lambda(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,.$$

Definiere $h : [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$h(t) = \frac{\lambda(t)}{\gamma(t) - z}\,.$$

Dann ist h auf $[a, b]$ stückweise stetig differenzierbar mit

$$h'(t) = \frac{\lambda'(t)}{\gamma(t) - z} - \lambda(t)\frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0\,.$$

Da h auf $[a, b]$ stetig ist und $\lambda(a) = 1$ gilt

$$h(t) = \frac{\lambda(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{1}{\gamma(a) - z}, \qquad t \in [a, b]$$

und daher

$$\frac{\lambda(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{1}{\gamma(a) - z}, \qquad t \in [a, b]\,. \tag{$*$}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\gamma(t) - z}{|\gamma(t) - z|} = \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} e^{i\varphi_0} = \exp\left[i \operatorname{Im}\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \right) + i\varphi_0 \right]\,.$$

Also ist durch

$$\varphi(t) := \operatorname{Im}\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \right) + \varphi_0$$

eine stetige Funktion auf $[a, b]$ mit $\varphi(a) = \varphi_0$ und $\gamma(t) - z = |\gamma(t) - z| e^{i\varphi(t)}$ gegeben.

Eindeutigkeit: Es sei $\tilde{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\tilde{\varphi}(a) = \varphi_0$ und $\gamma(t) - z = |\gamma(t) - z| e^{i\tilde{\varphi}(t)}$. Dann folgt $e^{i\varphi(t)} = e^{i\tilde{\varphi}(t)}$ für $t \in [a, b]$, also $\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ für jedes $t \in [a, b]$. Da $\varphi - \tilde{\varphi}$ stetig ist und $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(0)$, folgt $\varphi \equiv \tilde{\varphi}$ auf $[a, b]$.

Ist γ geschlossen, so folgt aus $(*)$ für $t = b$, dass $1 = \lambda(b) = \exp\left(\int_\gamma \frac{dw}{w-z} \right)$, also

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}}_{\in\mathbb{Z}} = \operatorname{Im}\left(i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z} \right) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}\,.$$

■

Definition 5.5 (Windungszahl)
Es sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma)$. Dann heißt

$$n(z, \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}$$

die Windungszahl (oder Umlaufzahl oder Index) von γ bzgl. z.

Satz 5.6
Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Dann nimmt die Windungszahl $z \mapsto n(z, \gamma)$, $z \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma)$, nur ganzzahlige Werte an und ist in jeder Komponente von $\mathbb{C} \setminus tr(\gamma)$ konstant. Auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus tr(\gamma)$ gilt $n(z, \gamma) = 0$.

Beweis. Nach Satz 5.2 ist $z \mapsto n(z, \gamma)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$, also insbesondere stetig auf $\mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$. Satz 5.4 zeigt $n(z, \gamma)$ ist stets ganzzahlig und somit auf jeder Komponente von

$\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ konstant. Ferner gilt mithilfe der Standardabschätzung und der Dreiecksungleichung für $z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$

$$|n(z,\gamma)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{dw}{w-z}\right| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \max_{w\in\mathrm{tr}(\gamma)} \frac{1}{||z|-|w||}$$

und daher $|n(z,\gamma)| \to 0$ für $|z| \to \infty$. Folglich ist $n(z,\gamma) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$. ■

Beispiel 5.7

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma = z_0 + re^{it}$. Dann gilt

$$n(z,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 1 & \text{für alle } z \in K_r(z_0)\,, \\ 0 & \text{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus\overline{K_r(z_0)}\,, \end{cases}$$

denn nach Satz 5.6 genügt es $n(z_0,\gamma)$ zu berechnen. Es ergibt sich

$$n(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{dw}{w-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = 1\,.$$

Dieses Beispiel spielt im Folgenden eine wichtige Rolle.

Kapitel 6

Die Integralsätze von Goursat und Cauchy

Definition 6.1 (Stammfunktion)
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Eine Funktion $F \in H(G)$ heißt (holomorphe) Stammfunktion zu f, falls $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$ gilt.

Bemerkung 6.2 (HDI im Komplexen)
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig. Besitzt f eine (holomorphe) Stammfunktion $F \in H(G)$, so gilt für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to G$ wegen des HDI (Satz A.25)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\big(F\circ\gamma\big)(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,,$$

d.h. das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt, aber nicht vom sonstigen Verlauf von γ ab. Ist insbesondere $\gamma : [a,b] \to G$ ein geschlossener Weg in G (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$), so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Diese Aussage lässt sich umkehren:

Satz 6.3 (Stammfunktionen vs. Wegunabhängigkeit)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f besitzt eine (holomorphe) Stammfunktion $F \in H(G)$.

(b) Für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to G$ gilt $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Spezialfall von Satz 6.3:
Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, so sind äquivalent:

(a') f besitzt eine (holomorphe) Stammfunktion $F \in H(G)$.

(b') Für jedes abgeschlossene und ausgefüllte Dreieck Δ in G gilt $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Beweis. "(b) $\Longrightarrow$ (a)": Es sei $z_0 \in G$ fest gewählt. Da G wegzusammenhängend ist, existiert für jedes $z \in G$ ein Weg $\gamma_z : [0,1] \to G$ mit $\gamma_z(0) = z_0$ und $\gamma_z(1) = z$, siehe Fußnote[1].

[1] Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so existiert zu je zwei Punkten $z_0, z \in G$ ein Weg $\gamma : [0,1] \to G$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$. Beweis: Da G wegzusammenhängend ist, existiert eine Kurve $\tilde\gamma : [0,1] \to G$ mit $\tilde\gamma(0) = z_0$ und $\tilde\gamma(1) = z$. Da $\mathrm{tr}(\tilde\gamma)$ kompakt und G offen ist, existieren $K_{2r}(w_j) \subseteq G$, $j = 1,\ldots,n$, mit $w_1 = z_0$, $w_n = z$, $w_j \in \mathrm{tr}(\tilde\gamma)$ für $j = 2,\ldots,n-1$ und $\mathrm{tr}(\tilde\gamma) \subseteq \cup_{j=1}^n K_r(w_j)$ mit $K_r(w_j) \cap K_r(w_{j+1}) \neq \emptyset$ für $j = 1,\ldots,n-1$. Für $\gamma_j : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_j(t) = (1-t)w_j + tw_{j-1}$ gilt $\gamma_j([0,1]) \subseteq G$, $j = 1,\ldots,n-1$, und somit ist der zusammengesetzte Weg $\gamma := \gamma_{n-1}\ldots\gamma_1$ ein Weg in G, der z_0 mit z verbindet.

Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$,

$$F(z) := \int\limits_{\gamma_z} f(w)\,dw\,.$$

Beachte, dass F aufgrund der Voraussetzung (b) wohldefiniert ist, d.h. $F(z)$ hängt nicht von der Wahl des Weges γ_z ab.

Wir zeigen $F \in H(G)$ und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$. Hierfür wähle $a \in G$ und $K_r(a) \subseteq G$. Für jedes $z \in K_r(a)\backslash\{a\}$ wenden wir (b) auf den geschlossenen Weg $\gamma_{a_-}[z,a]\gamma_z$ an und erhalten

$$\int\limits_{\gamma_z} f(w)\,dw + \int\limits_{[z,a]} f(w)\,dw - \int\limits_{\gamma_a} f(w)\,dw = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad F(z) - F(a) = -\int\limits_{[z,a]} f(w)\,dw\,.$$

Unter Ausnutzung von

$$f(a) = -\frac{1}{z-a}\int\limits_{[z,a]} f(a)\,dw\,.$$

folgt mit der Standardabschätzung (Satz 4.4)

$$\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| = \left|\frac{\int\limits_{[z,a]}\big(f(w)-f(a)\big)\,dw}{z-a}\right| \le \max_{w\in[z,a]} |f(w)-f(a)| \to 0 \text{ für } z \to a\,,$$

da f stetig in $a \in G$ ist. Somit ist F holomorph in G und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.

Spezialfall: Ist G sternförmig bzgl. des Sternpunktes z_0, so wählen wir $\gamma_z = [z_0, z]$. ∎

Beispiel 6.4 (Polynome)
Es sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n z^n$ ein Polynom. Dann ist $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$P(z) = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\,,$$

eine holomorphe Stammfunktion zu p. Insbesondere gilt $\int_\gamma p(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}$.

Beispiel 6.5
Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$. Dann ist f holomorph, also stetig auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, besitzt dort jedoch keine holomorphe Stammfunktion, denn

$$\int\limits_{\partial K_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0\,.$$

Für jedes abgeschlossene und ausgefüllte Dreieck Δ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt jedoch $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

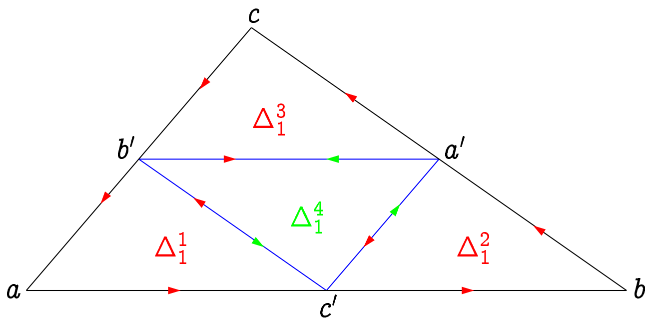
Satz 6.6 (Goursat)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und Δ ein beliebiges abgeschlossenes und ausgefülltes Dreieck in U. Ist $f \in H(U)$, so gilt

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0\,. \tag{6.1}$$

Zusatz: *(6.1) gilt auch, falls $f : U \to \mathbb{C}$ stetig ist und $f \in H(U\backslash\{p\})$ für einen Punkt $p \in U$.*

Beweis. Es sei $\Delta = \Delta(a,b,c) \subseteq U$ das Dreieck mit den Eckpunkten a, b, c, und $I := \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$.

(1) $p \notin \Delta$.



Es seien a', b' und c' die Mittelpunkte von $[b,c]$, $[c,a]$ und $[a,b]$. Betrachte die Teildreiecke

$$\Delta_1^1 = \Delta(a,c',b')\,, \quad \Delta_1^2 = \Delta(c',b,a') \quad \Delta_1^3 = \Delta(a',c,b') \quad \Delta_1^4 = \Delta(a',b',c')$$

und beachte, dass

$$I = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)\,dz\,.$$

Bezeichnet daher Δ_1 dasjenige Teildreieck, das den betragsmäßig größten Beitrag zur Summe beisteuert, so folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$|I| \le 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \right|\,.$$

Wiederholt man diese Prozedur mit Δ_1 anstelle von Δ, so erhält man ein Dreieck Δ_2 mit

$$|I| \le 4 \cdot 4 \left| \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz \right|\,.$$

Dieser Prozess generiert eine Folge von Dreiecken (Δ_n) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \ldots$,

(ii) $\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right| \le 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right|$,

(iii) $L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta_{n-1}) = \ldots = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta)$.

Aufgrund der Kompaktheit der Dreiecke Δ_n und $L(\partial\Delta_n) \to 0$ für $n \to \infty$ gibt es wegen Satz A.39 einen Punkt $z_0 \in U$ mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{z_0\}\,.$$

Wähle $\varepsilon > 0$. Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, existiert $K_\delta(z_0) \subseteq U \backslash \{p\}$ derart, dass

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \le \varepsilon |z - z_0| \quad \text{für alle } z \in K_\delta(z_0)\,. \tag{$*$}$$

Wir beachten nun, dass das lineare Taylorpolynom $p_1(z) := f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ in U eine holomorphe Stammfunktion besitzt, so dass

$$\int_{\partial\Delta_n} p_1(z)\,dz = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, siehe Beispiel 6.4. Wegen (i) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\Delta_m \subseteq K_\delta(z_0)$ für alle $m \geq N$ gilt.
Daher folgt zusammen mit der Standardabschätzung (Satz 4.4)

$$\left| \int_{\partial\Delta_m} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_m} [f(z) - p_1(z)]\,dz \right| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon \cdot \max_{z \in \partial\Delta_m} |z - z_0| \cdot L(\partial\Delta_m) \overset{\text{(iii)}}{\leq} \varepsilon \left(\frac{L(\partial\Delta)}{2^m} \right)^2$$

für alle $m \geq N$, da $|z - z_0| \leq L(\partial\Delta_m) = 2^{-m}L(\partial\Delta)$ für alle $z \in \partial\Delta_m$. Insgesamt ergibt sich

$$|I| \leq \varepsilon (L(\partial\Delta))^2\,, \qquad \text{also } I = 0\,.$$

(2) $p \in \partial\Delta$: Wähle $r > 0$ und $2r < \operatorname{dist}(\Delta, \partial U)$. Dann ist

$$K := \{z \in U : \operatorname{dist}(z, \Delta) \leq r\}$$

kompakt und f somit gleichmäßig stetig auf K. Ferner existiert eine Nullfolge $(\eta_n) \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$\Delta'_n := \Delta(a + \eta_n, b + \eta_n, c + \eta_n) \subseteq K$$

und $p \notin \Delta'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Fall 1 zeigt

$$\int_{\partial\Delta'_n} f(z)\,dz = 0$$

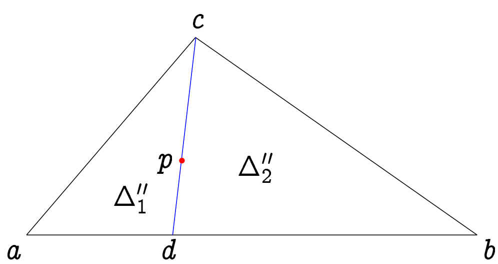
für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es sei nun $(x, y) \in \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$. Die gleichmäßige Stetigkeit von f auf K impliziert die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge (φ_n) mit $\varphi_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\varphi_n(t) = f((1 - t)(x + \eta_n) + t(y + \eta_n))$ gegen $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\varphi = f((1 - t)x + ty)$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{[x+\eta_n, y+\eta_n]} f(z)\,dz &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f((1 - t)(x + \eta_n) + t(y + \eta_n))(y - x)\,dt \\ &= \int_{[0,1]} f((1 - t)x + ty)(y - x)\,dt = \int_{[x,y]} f(z)\,dz\,.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta'_n} f(z)\,dz = 0\,.$$

(3) Falls $p \in \overset{\circ}{\Delta}$, so teile Δ in zwei Dreiecke $\Delta''_1 = \Delta(a, d, c)$ und $\Delta''_2 = \Delta(d, b, c)$ derart, dass p auf einer gemeinsamen Seite von Δ''_1 und Δ''_2 liegt.



Dies impliziert

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1''} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2''} f(z)\,dz = 0 + 0 = 0\,.$$

■

Satz 6.7 (Cauchy Integralsatz für sternförmige Gebiete)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $p \in G$, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $f \in H(G\backslash\{p\})$. Dann existiert ein $F \in H(G)$ mit $F' = f$. Insbesondere ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Beweis. Nach Satz 6.6 gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes in G gelegene Dreieck Δ. Satz 6.3 zeigt nun, dass es ein $F \in H(G)$ gibt mit $F' = f$ in G und $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in G. ■

Kapitel 7

Die Cauchy Integralformel

Satz 7.1 (Cauchy Integralformel für sternförmige Gebiete und Kreisscheiben)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(G)$ und γ ein geschlossener Weg in G. Dann gilt für jedes $z \in G \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$

$$\boxed{f(z) \cdot n(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.} \tag{CIF}$$

Spezialfall: (Lokale Cauchy Integralformel)
Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(U)$, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,, \qquad z \in K_r(z_0)\,,$$

für jede kompakte Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$.

Beweis. Fixiere $z \in G \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$. Dann ist die Funktion $g : G \to \mathbb{C}$,

$$g(w) := \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{für } w \in G\setminus\{z\}, \\[2ex] f'(z) & \text{für } w = z\,, \end{cases}$$

stetig in G und holomorph in $G\setminus\{z\}$. Satz 6.7 impliziert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma g(w)\, dw = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w - z}\, dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - 2\pi i\, f(z) \cdot n(z, \gamma)\,. \end{aligned}$$

■

Korollar 7.2 (Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(U)$. Dann gilt für jede kompakte Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\,.$$

Beweis. Satz 7.1 für den Spezialfall $z = z_0$ ergibt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}\, i\, re^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\,.$$

■

Korollar 7.3 (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(U)$.

(a) *Ist $z_0 \in U$ und $r_0 := \operatorname{dist}(z_0, \partial U)$, so gilt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k ,$$

für alle $z \in K_{r_0}(z_0)$[1] *wobei die Koeffizienten a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, eindeutig bestimmt sind durch*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw \qquad \text{für jedes } r \in (0, r_0) .$$

Insbesondere ist f in der größten in U enthaltenen offenen Kreisscheibe um z_0 in eine Potenzreihe um z_0 entwickelbar.

(b) *$f^{(k)} \in H(U)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es sei $0 < r < r_0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to U$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Satz 7.1 zeigt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw , \qquad z \in K_r(z_0) .$$

Satz 5.2 impliziert

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k , \qquad z \in K_r(z_0) \tag{7.1}$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw$$

für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Korollar 1.8 zeigt $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Da die $a_k's$ eindeutig bestimmt sind, folgt

$$a_k = \frac{f^k(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw .$$

Die Eindeutigkeit der $a_k's$ impliziert auch, dass (7.1) für jedes $r < r_0$ gilt. Somit folgt die Behauptung.

Korollar 1.8 zeigt weiter, dass f in $K_{r_0}(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar ist. Somit gilt $f^{(k)} \in H(U)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. ∎

Beispiel 7.4 (Bestimmung von Konvergenzradien, ohne Rechnung)
Es sei $G := \mathbb{C} \setminus \{(k + 1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und

$$f : G \to \mathbb{C} , \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z} .$$

Dann ist f holomorph in G. Folglich hat die Taylorreihe von tan *um* 0 *mindestens den Konvergenzradius*

$$\operatorname{dist}(0, \partial G) = \frac{\pi}{2} .$$

Wegen $|f(x)| \to +\infty$ für $(0, \pi/2) \ni x \to \pi/2$, ist der Konvergenzradius sogar $= \pi/2$.

[1] Falls $r_0 = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in $\mathbb{C}$.

Korollar 7.5 (Cauchy Ungleichungen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $f \in H(U)$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$. *Für* $z_0 \in U$ *sei* $r_0 := \operatorname{dist}(z_0, \partial U)$. *Dann gilt für jedes* $r \in (0, r_0)$

$$\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} \leq \frac{||f||_{\partial K_r(z_0)}}{r^k} \leq \frac{||f||_{\overline{K_r(z_0)}}}{r^k}.$$

Beweis. Korollar 7.3 und Satz 4.4 ergeben

$$\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw \right| \leq \frac{||f||_{\partial K_r(z_0)}}{r^k} \leq \frac{||f||_{K_r(z_0)}}{r^k}$$

für jedes $r \in (0, r_0)$. ■

Definition 7.6 (ganze Funtkion)
Eine auf ganz $\mathbb{C}$ *holomorphe Funktion heißt auch ganze Funktion.*

Satz 7.7 (Satz von Liouville)
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.[2]

Beweis. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ für ein $M > 0$. Dann gilt wegen Korollar 7.3

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Wähle $r > 0$ beliebig. Korollar 7.5 zeigt

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Da $r > 0$ beliebig war, folgt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f(z) = a_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. ■

Satz 7.8
Es sei $f \in H(\mathbb{C})$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann sind äquivalent:*

(a) *Es existieren Konstanten* $R \geq 1$ *und* $M > 0$ *derart, dass* $|f(z)| \leq M|z|^n$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \geq R$.

(b) f *ist ein Polynom vom Grad* $\leq n$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Da f ganz ist, gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

und

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{||f||_{\partial K_r(0)}}{r^k}$$

für jedes $r > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$, siehe Korollar 7.3 und Korollar 7.5. Für $r \geq R$ gilt daher

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq M r^{n-k}$$

[2] D.h. für $f \in H(\mathbb{C})$ existiert ein $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Ist nun $k \geq n+1$, so folgt für $r \to \infty$

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} = 0\,.$$

Somit ist f ein Polynom vom Grade $\leq n$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Der Grad des Polynoms f sei m, also $f(z) = a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_m \neq 0$. Wir definieren $\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} z^m f\left(\frac{1}{z}\right) & \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \\ a_m & \text{für } z = 0\,. \end{cases}$$

Dann ist $\hat{f}$ ein Polynom vom Grad $\leq m$. Setze $M := \|\hat{f}\|_{\overline{\mathbb{D}}}$. Dann gilt

$$|z^m f(1/z)| = |\hat{f}(z)| \leq M \qquad \text{für } z \in \overline{\mathbb{D}}\backslash\{0\}\,.$$

Hieraus folgt $|f(z)| \leq M|z|^m$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1 =: R$. Da $m \leq n$, folgt $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1 = R$. ■

Korollar 7.9 (Fundamentalsatz der Algebra)
Es sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $\tilde{c} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ derart, dass

$$p(z) = \tilde{c}(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) \qquad \textit{für } z \in \mathbb{C}\,.$$

Beweis. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Wir nehmen an, dass p nullstellenfrei ist. Dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/p(z)$ holomorph. Wegen

$$\frac{|p(z)|}{|z|^n} \to |a_n| \neq 0 \quad \text{für } |z| \to \infty\,.$$

folgt

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^n \frac{|p(z)|}{|z|^n}} \to 0 \quad \text{für } |z| \to \infty\,.$$

Der Satz von Liouville (Satz 7.7) impliziert $f \equiv 0$, ein Widerspruch. Daher existiert ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_1) = 0$. Wegen Korollar 7.3 gilt

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_1)^k \qquad (z \in \mathbb{C})$$

mit $c_0 = 0$ und $c_n \neq 0$, also

$$p(z) = (z - z_1) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k (z - z_1)^{k-1}}_{=:q(z)} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Somit ist q ein Polynom vom Grad $n-1$ und es existiert ein $z_2 \in \mathbb{C}$ mit $q(z_2) = 0$. Daher folgt induktiv: es existieren $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $\tilde{c} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ derart, dass $p(z) = \tilde{c}(z - z_1)\cdots(z - z_n)$ für $z \in \mathbb{C}$. ■

Korollar 7.10 (Verallgemeinerte Cauchy Integralformel für sternförmige Gebiete und Kreisscheiben)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(G)$, γ ein geschlossener Weg in G und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für jedes $z \in G \setminus tr(\gamma)$

$$\boxed{f^{(k)}(z) \cdot n(z,\gamma) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw\,.}$$

Spezialfall:
Ist $U \subseteq \mathbb{C}$, $f \in H(U)$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw\,, \qquad z \in K_r(z_0)\,,$$

für jede kompakte Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$.

Beweis. Wir beginnen mit einer Aussage über partielle Integration holomorpher Funktionen.
(PI): *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g, h \in H(G)$. Dann ist $F : G \to \mathbb{C}$, $F(z) = g(z)h(z)$ eine holomorphe Stammfunktion der stetigen Funktion $g'h + h'g$. Somit gilt nach Satz 6.3*

$$\int_\gamma \left(g'(w)h(w) + g(w)h'(w)\right) dw = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.
Wähle $z \in K_r(z_0)$ (beliebig, aber fest). Dann folgt mithilfe von Korollar 7.3 (b), Satz 7.1 und **(PI)**

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f^{(k)}(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f^{(k-1)}(w)}{(w-z)^2}\, dw = \ldots \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw\,. \end{aligned}$$

■

Ein einfaches Kompaktheitsargument erlaubt es die „punktweisen“ Cauchy Ungleichungen aus Korollar 7.5 zu den sog. Cauchy Ungleichungen für kompakte Mengen zu erweitern:

Korollar 7.11 (Cauchy Ungleichungen für kompakte Mengen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $L \subseteq U$ kompakt. Es sei $r > 0$ mit $r < \operatorname{dist}(L, \partial U)$. Dann ist

$$K := \bigcup_{z \in L} \overline{K_r(z)}$$

eine kompakte Teilmenge von U und für jedes $f \in H(U)$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{||f^{(k)}||_L}{k!} \le \frac{||f||_K}{r^k}\,. \tag{7.2}$$

Beweis. „K ist kompakt“: Es sei (w_n) eine Folge in K. Dann existiert zu jedem w_n ein $z_n \in L$ mit $w_n \in \overline{K_r(z_n)}$. Daher ist (z_n) eine Folge in L. Da L kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (z_{n_k}) mit Limes $z' \in L$. Wegen

$$|w_{n_k} - z'| \le |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z'| \le r + |z_{n_k} - z'| \to r$$

für $k \to \infty$, ist die Folge (w_{n_k}) beschränkt, hat also eine konvergente Teilfolge, deren Limes in $\overline{K_r(z')}$ liegt, also in K.

„Ungleichung (7.2)“: Es sei $z \in L$ beliebig. Korollar 7.10 zeigt

$$\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!} \leq \frac{||f||_{\overline{K_r(z)}}}{r^k} \leq \frac{||f||_K}{r^k}$$

und daher gilt

$$\frac{||f^{(k)}||_L}{k!} \leq \frac{||f||_K}{r^k} \,.$$

■

Kapitel 8

Holomorphiekriterien

Satz 8.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in H(U \setminus \{z_0\})$. Falls eine Kreisscheibe $K_\delta(z_0) \subseteq U$ existiert derart, dass f auf $K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist[1]*, so existiert ein $\tilde{f} \in H(U)$ mit $\tilde{f} = f$ auf $U \setminus \{z_0\}$.*

Beweis. Definiere $g : U \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & \text{für } z \in U \setminus \{z_0\}, \\ 0 & \text{für } z = z_0\,. \end{cases}$$

Dann ist g holomorph in U mit $g'(z_0) = 0$. Korollar 7.3 zeigt, es existiert $K_r(z_0) \subseteq U$ derart, dass

$$g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-2}, \quad z \in K_r(z_0)\,.$$

Setze $\hat{f} : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z-z_0)^k\,.$$

Dann ist wegen Korollar 1.8 $\hat{f} \in H(K_r(z_0))$ und $\hat{f}(z) = f(z)$ für alle $z \in K_r(z_0) \backslash \{z_0\}$. Definiert man $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \hat{f}(z) & \text{für } z \in K_r(z_0), \\ f(z) & \text{für } z \in U \backslash K_r(z_0), \end{cases}$$

so ist $\tilde{f}(z) = f(z)$ für alle $z \in U \backslash \{z_0\}$ und $\tilde{f}$ ist holomorph in U. ■

Satz 8.2 (Satz von Morera)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes in U gelegene abgeschlossene und ausgefüllte Dreieck Δ. Dann gilt $f \in H(U)$.

Beweis. Wähle $z_0 \in U$ und $K_r(z_0) \subseteq U$. Nach Satz 6.3 existiert ein $F \in H(K_r(z_0))$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in K_r(z_0)$. Korollar 7.3 zeigt, dass $f = F'$ ebenfalls holomorph in $K_r(z_0)$ ist. Da $z_0 \in U$ beliebig gewählt war, ist f holomorph in U. ■

Definition 8.3 (kompakte Konvergenz)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ heißt in U kompakt konvergent, falls ein $f : U \to \mathbb{C}$ existiert derart, dass die Folge (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq U$ gleichmäßig gegen f konvergiert:

$$\forall_{\substack{K \subseteq U \\ \text{kompakt}}} \quad ||f_n - f||_K \to 0 \text{ für } n \to \infty\,.$$

[1] d.h. es existiert ein $M > 0$ derart, dass $|f(z)| < M$ für alle $z \in K_\delta(z_0) \backslash \{z_0\}$

Beispiel 8.4
Es sei $(f_n) \subseteq H(\mathbb{D})$ *mit* $f_n(z) = z^n$. *Dann konvergiert* (f_n) *kompakt in* $\mathbb{D}$ *gegen* $f \equiv 0$, *denn ist* $K \subseteq \mathbb{D}$ *kompakt, so gibt es ein* $r \in (0,1)$ *mit* $|z| \le r$ *für alle* $z \in K$ *und* $|f_n(z) - f(z)| \le r^n$ *für alle* $z \in K$, *d.h.* $||f_n - f||_K \le r^n \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{D}$, *denn* $(1 - 1/n)^n \to 1/e \neq 0$.

Satz 8.5 (Konvergenzsatz von Weierstraß)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $(f_n) \subseteq H(U)$ *konvergiere in* U *kompakt gegen* $f : U \to \mathbb{C}$. *Dann gilt*

(a) $f \in H(U)$.

(b) $(f_n^{(k)})$ *konvergiert in* U *kompakt gegen* $f^{(k)}$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. (a) Da (f_n) kompakt in U gegen f konvergiert, ist f stetig in U und für jedes (abgeschlossene und ausgefüllte) Dreieck Δ in U gilt

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(w)\,dw \overset{(*)}{=} \int\limits_{\partial\Delta} \lim_{n\to\infty} f_n(w)\,dw \overset{(**)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\Delta} f_n(w)\,dw \overset{(***)}{=} 0\,,$$

wobei in $(*)$ $\partial\Delta$ kompakt, in $(**)$ Satz A.27 und in $(***)$ z.B. Satz 6.6 benutzt wurde. Der Satz von Morera (Satz 8.2) impliziert nun $f \in H(U)$.

(b) Sei $L \subseteq U$ kompakt, $0 < r < \operatorname{dist}(L, \partial U)$ und

$$K := \bigcup_{z\in L} \overline{K_r(z)} \subseteq U$$

vgl. Korollar 7.11. Da K kompakt ist, gilt $||f_n - f||_K \to 0$ für $n \to \infty$ nach Voraussetzung, also

$$||f_n^{(k)} - f^{(k)}||_L = ||(f_n - f)^{(k)}||_L \le \frac{k!}{r^k}||f_n - f||_K \to 0$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$, siehe Korollar 7.11. ∎

Beispiele 8.6 (Standardbeispiele für kompakt konvergente Reihen holomorpher Funktionen)

(a) *(vgl. Staatsexamen: Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 3; Herbst 2018, Thema 2, Aufgabe 2)*
Die Reihe

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}$$

konvergiert kompakt in $U = \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ *und* $f : U \to \mathbb{C}$ *ist holomorph.*

Beweis. *Für* $k \in \mathbb{N}$ *definiere* $f_k : U \to \mathbb{C}$,

$$f_k(z) = \frac{1}{z^2 - k^2}\,.$$

Dann ist $f_k \in H(U)$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$.

Wähle $K \subseteq U$ *kompakt. Dann gibt es ein* $R > 0$ *mit* $K \subseteq K_R(0)$. *Für* $z \in K$ *und* $k > R$ *gilt*

$$|f_k(z)| = \left|\frac{1}{z^2 - k^2}\right| \le \frac{1}{k^2 - R^2}$$

Das Majorantenkriterium von Weierstraß (Satz A.17) zeigt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$$

konvergiert gleichmäßig in K. Mit Satz 8.5 folgt $f \in H(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})$. ■

(b) *(Riemannsche ζ–Funktion)*
Es sei $U := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (n^s := e^{s \ln n})$$

kompakt in U und $\zeta : U \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

Beweis. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $s \mapsto 1/n^s$ ist holomorph in U. Wähle $K \subseteq U$ kompakt. Dann existiert ein $R > 1$ derart, dass $\mathrm{Re}(s) > R$ für alle $s \in K$. Daher gilt*

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leq \frac{1}{n^R} \qquad \text{für alle } s \in K \text{ und jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R} < \infty \qquad \text{für } s \in K.$$

Nach Satz A.17 konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

gleichmäßig in K und Satz 8.5 impliziert $\zeta \in H(U)$. ■

Bemerkung 8.7
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f \in H(U)$. Dann sind $u : U \to \mathbb{R}$, $u := \mathrm{Re}(f)$, und $v : U \to \mathbb{R}$, $v := \mathrm{Im}(f)$, partiell differenzierbar (siehe Satz 2.2) und es gilt

$$f' = f_x = u_x + iv_x \quad \text{und} \quad f' = -if_y = -i(u_y + iv_y).$$

in U. Da $f' : U \to \mathbb{C}$ als holomorphe Funktion stetig ist, sind u und v stetig partiell differenzierbar in U. Weiter impliziert die Holomorphie von f', dass u_x, v_x, u_y und v_y partiell differenzierbar in U sind. Es gilt

$$\begin{aligned} & f'' = f_{xx} = -if_{yx} = -if_{xy} = -f_{yy} \\ \Leftrightarrow \quad & f'' = u_{xx} + iv_{xx} = -i(u_{yx} + iv_{yx}) = -i(u_{xy} + iv_{xy}) = -(u_{yy} + iv_{yy}) \end{aligned}$$

in U. Also sind u_x, v_x, u_y und v_y stetig partiell differenzierbar in U. Insbesondere gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \quad \text{und} \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

in U.

Definition 8.8 (harmonisch)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine zweimal stetig (partiell) differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, falls

$$\Delta h(z) := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in U\,.$$

Hierbei heißt $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace–Operator.

Harmonische Funktionen spielen eine ubiquitäre Rolle in allen Naturwissenschaften.

Satz 8.9
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge.

(a) *Ist $f \in H(U)$, so sind $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ harmonische Funktionen auf U.*

(b) *Eine zweimal stetig (partiell) differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn $\frac{\partial h}{\partial z} \in H(U)$.*

(c) *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch, so existiert ein $f \in H(G)$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$.*

Beweis. (a) folgt aus Bemerkung 8.7.
Um (b) zu beweisen, beachten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial z} \in H(U) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial h}{\partial z}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in U \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial h}{\partial z}(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x}(z) - i\frac{\partial h}{\partial y}(z)\right) \\
&\qquad\quad = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(z) + i\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(z) - i\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(z) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(z)\right) \\
&\qquad\quad = \frac{1}{4}\Delta h(z) \text{ für alle } z \in U\,. \\
&\Longleftrightarrow \quad h \text{ ist harmonisch in } U.
\end{aligned}$$

Beoachtung: $\Delta = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}$.
(c) Nach (b) ist $2u_z \in H(G)$ und besitzt daher auf dem sternförmigen Gebiet G nach dem Cauchy Integralsatz (Satz 6.7) eine holomorphe Stammfunktion $g : G \to \mathbb{C}$. Definiert man $\varphi : G \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(g(z) + \overline{g(z)}\right) - u(z)\,,$$

so ist φ reell differenzierbar und erfüllt

$$\varphi_{\overline{z}}(z) = \frac{1}{2}\overline{g}_{\overline{z}}(z) - u_{\overline{z}}(z) = \frac{1}{2}\overline{g'(z)} - \overline{u_z(z)} = 0 \quad \text{für alle } z \in G\,.$$

Dies zeigt, dass φ holomorph auf G ist. Da zusätzlich φ reellwertig ist, existiert ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $\varphi(z) = c$ für $z \in G$. Um dies einzusehen, beachte, dass $\psi : G \to \mathbb{C}$, $\psi(z) = \exp(i\varphi(z))$ holomorph ist und $|\psi(z)| = 1$ für alle $z \in G$ erfüllt. Korollar 2.13 impliziert $\psi \equiv$ konst auf G und somit ist auch $\varphi \equiv$ konst auf G.
Es folgt $u(z) = \mathrm{Re}(g(z) - c)$ für alle $z \in G$. Setzt man $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = g(z) - c$, so gilt $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ für $z \in G$. ∎

Übersicht I

Charkaterisierung holomorpher Funktionen

Wir fassen unsere bisherigen Überlegungen zu holomorphen Funktionen zusammen:

Satz (Charakterisierung holomorpher Funktionen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen paarweise äquivalent:

(a) f *ist holomorph in* U.

(b) Für jede Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)}$ *in* U *gilt die lokale Cauchy Integralformel für* f:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \text{für alle } z \in K_r(z_0)$$

(c) f *besitzt in jeder offenen Kreisscheibe* K *in* U *eine holomorphe Stammfunktion.*

(d) f *ist in* U *reell differenzierbar und erfüllt dort die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung* $f_{\overline{z}} = 0$.

(e) f *ist in jeder Kreisscheibe* $K_r(z_0) \subseteq U$ *durch eine in* $K_r(z_0)$ *konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt mit* z_0 *darstellbar.*

(f) Für jede offene Kreisscheibe K *in* U *gibt es Polynome, die kompakt in* K *gegen* f *konvergieren.*

(g) Für jedes in U *gelegene abgeschlossene und ausgefüllte Dreieck* Δ *gilt*

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0\,.$$

Beweis.

(a) $\Longrightarrow$ (b) Satz 7.1	(b) $\Longrightarrow$ (a) Satz 5.2
(a) $\Longrightarrow$ (c) Satz 6.7	(c) $\Longrightarrow$ (a) Korollar 7.3
(a) $\Longleftrightarrow$ (d) Satz 2.8	
(a) $\Longrightarrow$ (e) Korollar 7.3	(e) $\Longrightarrow$ (a) Satz 1.6
(a) $\Longrightarrow$ (f) Korollar 7.3	(f) $\Longrightarrow$ (a) Satz 8.5
(a) $\Longrightarrow$ (g) Satz 6.6	(g) $\Longrightarrow$ (a) Satz 8.2

■

Kapitel 9

Nullstellen holomorpher Funktionen und Identitätsprinzip

Jede holomorphe Funktion ist lokal als Potenzreihe darstellbar. Dies ermöglicht folgende

Definition 9.1 (Nullstellenordnung)
Es sei $f \in H(K_r(z_0))$ und $f(z_0) = 0$. Dann gilt nach Korollar 7.3

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für alle } z \in K_r(z_0)$$

mit $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. Falls $f \not\equiv 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq 0$. Die Zahl

$$N := \min\{k : a_k \neq 0\}$$

heißt die Ordnung (Vielfachheit) der Nullstelle z_0.

Satz 9.2 (Multiplikative Normalform holomorpher Funktionen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in H(U)$. Dann sind äquivalent:

(a) f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $N \in \mathbb{N}$.

(b) Es existiert ein $g \in H(U)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^N \cdot g(z) \qquad \text{für alle } z \in U.$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Es sei $K_r(z_0) \subseteq U$. Da f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung N hat, gilt

$$f(z) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k \,(z - z_0)^k\,, \quad z \in K_r(z_0), \tag{$*$}$$

mit $a_N \neq 0$. Definiere $g : U \to \mathbb{C}$

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^N}\,, & z \in U \backslash \{z_0\}, \\ \displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-N} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+N} (z - z_0)^k\,, & z \in K_r(z_0)\,. \end{cases}$$

Dann gilt $g \in H(U)$ mit $g(z_0) \neq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Es sei $K_r(z_0) \subseteq U$. Da $g \in H(U)$ und $g(z_0) \neq 0$, folgt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \,(z - z_0)^k\,, \quad z \in K_r(z_0),$$

mit $c_0 \neq 0$. Es folgt

$$f(z) = (z - z_0)^N \sum_{k=0}^{\infty} c_k \,(z - z_0)^k = \sum_{k=N}^{\infty} c_{k-N} \,(z - z_0)^k\,, \quad z \in K_r(z_0)\,.$$

Da $c_0 \neq 0$, folgt, dass f eine Nullstelle der Ordnung N in z_0 besitzt. ■

Bemerkung
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$ besitze in $z_0 \in G$ eine Nullstelle der Ordnung $N \in \mathbb{N}$. Dann existiert $K_\delta(z_0) \subseteq G$ derart, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$, d.h. z_0 ist isoliert.

Satz 9.3 (Isoliertheit der Nullstellen)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, $f \not\equiv 0$. Dann ist die Nullstellenmenge

$$\mathcal{Z}_f := \{z \in G : f(z) = 0\}$$

diskret in G, d.h. zu jedem $z_0 \in \mathcal{Z}_f$ existiert ein $K_\delta(z_0) \subseteq G$ derart, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$. (Insbesondere hat $\mathcal{Z}_f$ keinen Häufungspunkt in G.)

Beweis. Wir zeigen, dass die Menge

$$M := \{\, w \in G : w \text{ ist ein Häufungspunkt von } \mathcal{Z}_f \,\}$$

offen und abgeschlossen in G ist. Satz 2.12 impliziert dann $M = \emptyset$ oder $M = G$. Da $f \not\equiv 0$ folgt $M = \emptyset$.

(i) $G \setminus M$ ist offen in G: Dazu sei $z_0 \in G \setminus M$. Dann ist z_0 kein Häufungspunkt von Nullstellen von f. Es existiert daher ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $f(w) \neq 0$ für alle $w \in K_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dies zeigt $K_\varepsilon(z_0) \subseteq G \setminus M$. Folglich ist $G \setminus M$ offen.

(ii) M ist offen in G: Dazu sei $z_0 \in M$. Da f stetig ist, folgt $f(z_0) = 0$.

1. Fall: Es existiert $K_r(z_0) \subseteq G$ derart, dass $f \equiv 0$ auf $K_r(z_0)$. Dann folgt $K_r(z_0) \subseteq M$.

2. Fall: $f \not\equiv 0$ für jede Kreisscheibe $K_r(z_0) \subseteq G$. Dann hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung N. Nach Satz 9.2 existiert eine Kresischeibe $K_\varrho(z_0) \subseteq U$ derart, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\varrho(z_0) \setminus \{z_0\}$. Somit kann z_0 kein Häufungspunkt von Nullstellen sein, d.h. $z_0 \notin M$. Dieser Fall kann daher nicht eintreten. ∎

Bemerkung und Beispiel 9.4

(i) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_* \in G$, $(z_k) \subseteq G \setminus \{z_*\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_*$ und $f \in H(G)$. Falls $f(z_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, so folgt $f \equiv 0$ auf G.

(ii) Es sei $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin(1/z)$. Dann ist $f \in H(G)$ und für $(z_k) \subseteq G$ mit $z_k = 1/(k\pi)$ gilt $f(z_k) = 0$. Beachte $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0 \notin G$.

Bemerkung
Man beachte, dass die Nullstellen nichtkonstanter harmonischer Funktionen **nicht** isoliert liegen müssen, z.B. $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $u(z) = \mathrm{Re}(z)$.

Satz 9.5 (Identitätsprinzip)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in H(G)$. Es sei $z_* \in G$ und $(z_k) \subseteq G \setminus \{z_*\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_*$. Falls

$$f(z_k) = g(z_k) \qquad \text{für jedes } k \in \mathbb{N},$$

so ist

$$f(z) = g(z) \qquad \text{für jedes } z \in G.$$

Beweis. Definiere $h \in H(G)$ durch $h(z) = f(z) - g(z)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $h(z_k) = 0$. Somit ist $z_* \in G$ ein Häufungspunkt von Nullstellen von h. Satz 9.3 bzw. Bemerkung und Beispiel 9.4 (i) impliziert $h \equiv 0$ auf G. ■

Bemerkung
Beachte, Satz 9.3 und Satz 9.5 sind für offene Mengen i. Allg. nicht gültig.

Beispiel 9.6 (Permanenzprinzip)
Um

$$e^{z+w} = e^z e^w \tag{9.1}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ zu zeigen, genügt es die Identität (9.1) für reelle *z, w zu kennen. Denn ist $w \in \mathbb{R}$ fixiert, so stimmen die beiden ganzen Funktionen $z \mapsto e^{z+w}$ und $z \mapsto e^z e^w$ für alle $z \in \mathbb{R}$ und daher nach dem Identitätsprinzip für alle $z \in \mathbb{C}$ überein. Fixiert man nun $z \in \mathbb{C}$ so stimmen die ganzen Funktionen $w \mapsto e^{w+z}$ und $w \mapsto e^w e^z$ für alle $w \in \mathbb{R}$ und daher wegen des Identitätsprinzips für alle $w \in \mathbb{C}$ überein.*

Beispiel (Staatsexamen Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 2 a)
Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Lösung. Auf dem Gebiet $G = \mathbb{C}\backslash\{2\}$ stimmen die beiden holomorphen Funktionen f und $g(z) = \frac{1}{2-z}$ in den Punkten $z_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, überein. Da $z_n \to z^* = 0 \in G$ folgt aus dem Identitätsprinzip $f(z) = \frac{1}{2-z}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{2\}$, d.h. f ist nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. ■

Bemerkung (Identitätsprinzip für harmonische Funktionen)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u, v : G \to \mathbb{R}$ harmonische Funktionen. Falls eine nichtleere offene Menge $U \subseteq G$ existiert derart, dass $u(z) = v(z)$ für alle $z \in U$ gilt, so ist $u \equiv v$ on G.

Beweis. Wir definieren $h : G \to \mathbb{R}$, $h(z) = u(z) - v(z)$ und zeigen $h \equiv 0$ auf G. Nach Satz 8.9 (b) ist $h_z : G \to \mathbb{C}$

$$h_z(z) = \frac{1}{2}(h_x(z) - ih_y(z))$$

holomorph auf G es gilt und $h_z(z) = 0$ für alle $z \in U$. Das Identitätsprinzip (Satz 9.5) zeigt, $h_z \equiv 0$ auf G. Somit ist $h_x \equiv 0$ auf G und $h_y \equiv 0$ auf G. Daher ist $h \equiv$ konst auf G und wegen $h \equiv 0$ auf U folgt $h \equiv 0$ auf G. ■

Bemerkung 9.7
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(U)$ habe in $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung $N \in \mathbb{N}$. Dann existiert nach Satz 9.2 ein $g \in H(U)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^N g(z)$ für alle $z \in U$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$. Wir identifizieren die in $U\backslash\{z_0\}$ holomorphe Funktion $z \mapsto f(z)/(z - z_0)^n$ mit der auf U holomorphen Funktion $z \mapsto (z - z_0)^{N-n} g(z)$ und sagen kurz $z \mapsto f(z)/(z - z_0)^n$ ist holomorph in U, vgl. auch Satz 8.1.

Bemerkungen 9.8
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, $f \not\equiv 0$.

(a) Ist $K \subseteq G$ kompakt, so hat f nur endlich viele Nullstellen in K nach Satz 9.3 und Satz A.38.

(b) In G besitzt f höchstens abzählbar viele Nullstellen, siehe Satz A.40.

Definition 9.9
Eine ganze Funktion f heißt ganz–transzendent, wenn f kein Polynom ist.

Bemerkung
Eine ganze Funktion ist entweder ein Polynom oder eine ganz–transzendente Funktion. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, so nimmt f jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ genau n–mal (mit Vielfachheiten gezählt) an, denn das Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = f(z) - w$, besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Korollar 7.9) genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (mit Vielfachheiten gezählt). Insbesondere gilt $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ für jedes nicht–konstante Polynom f. Für ganz–transzendente Funktionen f gilt $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, i.Allg. jedoch nicht $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ wie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)$ zeigt, denn $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Satz 9.10 (Casorati–Weierstraß)
Es sei f ganz–transzendent. Dann existiert zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_j) \subseteq \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} |z_j| = \infty$ derart, dass

$$\lim_{j\to\infty} f(z_j) = w\,.$$

Insbesondere ist $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

Beweis. Annahme: es existiert ein Punkt $w \in \mathbb{C}$, der nicht Grenzwert einer Folge $(f(z_j))$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} |z_j| = \infty$ ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ derart, dass

$$|\underbrace{f(z) - w}_{=:g(z)}| > \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R\,.$$

Die ganze Funktion g besitzt auf der kompakten Menge $\overline{K_R(0)}$ nur endlich viele Nullstellen $z_1, \ldots, z_N$ (mit Vielfachheiten) gezählt. Für $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) := \prod_{j=1}^{N}(z - z_j)$ gibt es nach Satz 9.2 eine *nullstellenfreie* ganze Funktion $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $H(z)P(z) = g(z)$. Da $|P(z)| \leq M|z|^N$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ für ein $M > 0$ gilt (vgl. Satz 7.8), folgt

$$\left|\frac{1}{H(z)}\right| \leq \frac{M}{\varepsilon}|z|^N \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq \max\{1, R\}\,.$$

Nach Satz 7.8 ist daher $1/H$ ein Polynom vom Grad $\leq N$. Da $1/H$ nullstellenfrei ist, folgt $1/H \equiv \text{konst} \neq 0$ auf $\mathbb{C}$. Dann ist g und daher auch f ein Polynom. Widerspruch! ∎

Übersicht II

Ganze Funktionen

Wir fassen unsere Ergebnisse zu ganzen Funktionen zusammen:

Satz (Charakterisierung ganzer Funktionen)
Es sei $f \in H(\mathbb{C})$. Dann gilt

(a) $f \equiv$ *konst* $\iff f$ *ist beschränkt.*

(b) f *ist ein Polynom (Grad* ≥ 1*)* $\iff \lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.[1]

(c) f *ist ganz–transzendent* $\iff$ *zu* $c, d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $c \neq d$, *existieren* (z_n), $(w_n) \subseteq \mathbb{C}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n| = \infty$ *derart, dass* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f(w_n) = d$.[2]

[1] $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ bedeutet, dass für jede Folge $(z_j) \subseteq \mathbb{C}$ mit $\lim_{j\to\infty} |z_j| = \infty$ gilt $\lim_{j\to\infty} |f(z_j)| = \infty$.

[2] Falls o.E. $d = \infty$, so steht $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = d$ für $\lim_{n\to\infty} |f(w_n)| = \infty$.

Kapitel 10

Das Maximumprinzip und das Offenheitsprinzip

Satz 10.1 (Starkes lokales Maximumprinzip/Minimumprinzip für holomorphe Funktionen)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$.

(a) *Besitzt $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist $f : G \to \mathbb{C}$ konstant.*

(b) *Ist f in G nullstellenfrei und besitzt $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so ist $f : G \to \mathbb{C}$ konstant.*

Beweis. (a) Es gibt ein $R > 0$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in \overline{K_R(z_0)} \subseteq G$. Die Mittelwerteigenschaft (Korollar 7.2) impliziert

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \leq |f(z_0)| \qquad \text{für jedes } r \in (0, R]\,.$$

Insbesondere besteht in der zuletzt betrachteten Ungleichung Gleichheit, d.h. $|f(z)| = |f(z_0)|$ für alle $z \in K_R(z_0)$. Satz 2.9 zeigt $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in K_R(z_0)$, d.h. f ist konstant auf dem Gebiet G aufgrund des Identitätsprinzips (Satz 9.5).
(b) folgt aus (a) für $1/f \in H(G)$. ■

Korollar 10.2 (Schwaches Maximumprinzip/Minimumprinzip für holomorphe Funktionen I)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f \in H(G)$.

(a) *Dann nimmt die Funktion f ihr Betragsmaximum auf ∂G an, d.h.*

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|\,.$$

(b) *Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so nimmt die Funktion $|f|$ ihr Minimum auf ∂G an:*

$$\min_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \min_{z \in \partial G} |f(z)|\,.$$

Beweis. (a) Als stetige Funktion nimmt $|f|$ auf der kompakten Menge $\overline{G}$ ihr Maximum an. Wird dieses im Inneren von G angenommen, so ist f konstant nach Satz 10.1 (a), d.h. das Maximum wird dann (auch) auf ∂G angenommen.
(b) Wende Teil (a) auf die Funktion $1/f \in H(G)$ an. ■

Bemerkung
Die Beschränktheit des Gebietes G in Korollar 10.2 ist wesentlich. Betrachte z.B. $G := \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$ und $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$. Dann ist $|f(\zeta)| = 1$ für alle $\zeta \in \partial G$, aber $|f|$ nimmt sicher nicht ihr Maximum auf ∂G an.

Bemerkung (Maximumprinzipien für harmonische Funktionen)

(a) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $h : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Falls h ein lokales Maximum (Minimum) in G annimmt, so ist $h \equiv$ konst auf G.

(b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $h : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig und $h : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gilt $\max_{z\in\overline{G}} h(z) = \max_{z\in\partial G} h(z)$ $(\min_{z\in\overline{G}} h(z) = \min_{z\in\partial G} h(z))$.

Beweis. (a) Es sei $K_r(z_0) \subseteq G$ derart, dass $h(z_0) \geq h(z)$ für alle $z \in K_r(z_0)$ gilt. Nach Satz 8.9 (c) existiert ein $f \in H(K_r(z_0))$ mit $h(z) = \mathrm{Re}(f(z))$. Definiere $g : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$, $g(z) = \exp(f(z))$. Dann ist $g \in H(K_r(z_0))$ und $|g(z_0)| \geq |g(z)|$ für alle $z \in K_r(z_0)$. Nach Satz 10.1 ist $g \equiv$ konst auf $K_r(z_0)$ und somit ist auch $f \equiv$ konst auf $K_r(z_0)$, also gilt auf $h \equiv$ konst auf $K_r(z_0)$. Das Identitätsprinzip für harmonische Funktionen impliziert $h \equiv$ konst auf G.

(b) h nimmt als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{G}$ ihr Maximum an. Wird dieses im Inneren von G angenommen, so ist h konstant nach (a), d.h. das Maximum wird dann (auch) auf ∂G angenommen.

Da mit h auch $-h$ harmonisch ist, folgen die entsprechenden Aussagen für das Minimum. ■

Definition 10.3 ($\limsup$, $\liminf$)
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge, $\zeta \in \overline{D}$ und $g : D \to \mathbb{R}$. Dann ist der Limes superior bzw. Limes inferior von g in ζ definiert durch

$$\limsup_{z\to\zeta} g(z) := \lim_{r\to 0} \sup\{\, g(z) : z \in D \cap K_r(\zeta) \,\},$$

$$\liminf_{z\to\zeta} g(z) := \lim_{r\to 0} \inf\{\, g(z) : z \in D \cap K_r(\zeta) \,\}.$$

Bemerkung
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $\zeta \in \overline{D}$ und $g : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\limsup_{z\to\zeta} g(z) = \sup\left\{ \limsup_{n\to\infty} g(z_n) : (z_n) \subseteq D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} z_n = \zeta \right\},$$

$$\liminf_{z\to\zeta} g(z) = \inf\left\{ \liminf_{n\to\infty} g(z) : (z_n) \subseteq D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} z_n = \zeta \right\}.$$

Korollar 10.4 (Schwaches Maximumprinzip/Minimumprinzip für holomorphe Funktionen II)
Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $m > 0$ und $M \geq 0$ Konstanten, und $f \in H(G)$.

(a) Falls

$$\limsup_{z\to\zeta} |f(z)| \leq M \qquad \text{für alle } \zeta \in \partial G, \tag{10.1}$$

so ist

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{für alle } z \in G.$$

(b) Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ und gilt

$$\liminf_{z\to\zeta} |f(z)| \geq m \qquad \text{für alle } \zeta \in \partial G,$$

so ist

$$|f(z)| \geq m \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Beweis. (a) Es sei $S := \sup_{z\in G} |f(z)|$. Ziel $S \leq M$.

Es existiert $(z_n) \subseteq G$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_* \in \overline{G}$ und $S = \lim_{n\to\infty} |f(z_n)|$.

1. Fall: Es sei $z_* \in G$. Dann nimmt $|f|$ in z_* ein (globales) Maximum an. Nach Satz 10.1 ist dann $|f| \equiv S$ auf G. Die Randbedingung (10.1) impliziert $S \leq M$.

2. Fall: Es sei $z_* \in \partial G$. Dann gilt

$$S = \lim_{n\to\infty} |f(z_n)| \leq \limsup_{z\to z_*} |f(z)| \leq M\,.$$

(b) Wende Teil (a) auf $1/f \in H(G)$ an. ∎

Beispiel 10.5
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, $f \not\equiv 0$, mit $f(0) = 0$. Für die nach Bemerkung 9.7 holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z)/z$ gilt dann $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Um dies einzusehen, beachte, dass

$$\limsup_{z\to\xi} |g(z)| = \limsup_{z\to\xi} \frac{|f(z)|}{|z|} = \limsup_{z\to\xi} |f(z)| \leq 1$$

für alle $\xi \in \partial\mathbb{D}$ gilt. Mit Korollar 10.4 folgt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Bemerkung 10.6
Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $m > 0$, und f eine nullstellenfreie holomorphe Funktion in G, die

$$\limsup_{z\to\zeta} |f(z)| = \liminf_{z\to\zeta} |f(z)| = m \qquad \text{für alle } \zeta \in \partial G$$

erfüllt. Dann ist $f \equiv$ konst, genauer $f(z) = \eta\, m$ für alle $z \in G$ mit $\eta \in \partial\mathbb{D}$.

Bemerkung (Schwaches Maximumprinzip für harmonische Funktionen)
Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $m \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}$ Konstanten, und $h : G \to \mathbb{R}$ harmonisch.

(a) Falls

$$\limsup_{z\to\zeta} h(z) \leq M \qquad \text{für alle } \zeta \in \partial G,$$

so ist

$$h(z) \leq M \qquad \text{für alle } z \in G.$$

(b) Falls

$$\liminf_{z\to\zeta} h(z) \geq m \qquad \text{für alle } \zeta \in \partial G,$$

so ist

$$h(z) \geq m \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Eine wichtige Anwendung des Maximumprinzips ist das sogenannte Offenheitsprinzip:

Satz 10.7 (Offenheitsprinzip/Satz von der Gebietstreue)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$ nicht konstant. Dann ist für jede offene Menge U in G die Bildmenge $f(U)$ offen. Insbesondere ist $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis. Es sei $z_0 \in U$. Da $f \not\equiv$ konst existiert nach Satz 9.3 ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\overline{K_\varepsilon(z_0)} \subseteq U$ und

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - f(z_0)| > 0\,.$$

(i) Wir zeigen $K_\delta(f(z_0)) \subseteq f(K_\varepsilon(z_0))$. Fixiere $w \in K_\delta(f(z_0))$. Dann gilt

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| \geq 2\delta - \delta = \delta > |f(z_0) - w|\,.$$

für alle $z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$. Daher folgt

$$\min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - w| \geq |f(z_0) - w|\,.$$

Korollar 10.2 (b), angewendet auf die Funktion $z \mapsto f(z) - w$, $z \in \overline{K_\varepsilon(z_0)}$, zeigt, dass es ein $z_* \in K_\varepsilon(z_0)$ mit $f(z_*) = w$ gibt.

(ii) Aus (i) folgt, dass $f(G)$ offen ist. Da G wegzusammenhängend und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig ist, ist auch $f(G)$ wegzusammenhängend. ∎

Bemerkung und Beispiel 10.8

(a) *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $U \subseteq G$ offen und $f \in H(G)$. Falls $f(U)$ nicht offen ist, so ist $f : G \to \mathbb{C}$ konstant.*

(b) *Es sei $G \subseteq G$ ein Gebiet. Bestimme alle $g \in H(G)$ mit $\mathrm{Re}(g(z)) = \sin(\mathrm{Im}(g(z))$ für $z \in G$ und $g(0) = 2\pi i$. (vgl. Staatsexamen Frürhjahr 2012, Thema 2, A2 (b))*

Lösung. Es sei $g \in H(G)$ derart, dass $\mathrm{Re}(g(z)) = \sin(\mathrm{Im}(g(z))$ für $z \in G$ und $g(0) = 2\pi i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(G) &= \{\mathrm{Re}(g(z)) + i\,\mathrm{Im}(g(z)) \,:\, z \in G\} \\ &= \{\sin(\mathrm{Im}(g(z)) + i\,\mathrm{Im}(g(z)) \,:\, z \in G\} \\ &= \{\sin y + iy \,:\, y \in \mathrm{Im}(g(G))\} \end{aligned}$$

ist nicht offen. Somit folgt $g \equiv 2\pi i$. ∎

Bemerkung (Offenheitsprinzip $\Rightarrow$ Maximumprinzip)

Das Offenheitsprinzip impliziert in einfacher Weise das starke lokale Maximumprinzip: Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und hat $f \in H(G)$ in $z_0 \in G$ ein lokales Betragsmaximum, so ist $f(z_0)$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ein Randpunkt der Bildmenge $f(K_\varepsilon(z_0))$, die daher nicht offen ist.

Kapitel 11

Biholomorphe Abbildungen

Bemerkung
Es seien G und Ω Gebiete in $\mathbb{C}$ und $f : G \to \Omega$ holomorph und bijektiv. Das Offenheitsprinzip (Satz 10.7) impliziert, dass $f^{-1} : \Omega \to G$ stetig ist, denn für jede offene Menge $U \subseteq G$ ist $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ offen.

Definition 11.1 (biholomorphe Abbildung)
Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen. Eine bijektive Abbildung $f : U \to V$ heißt biholomorphe Abbildung von U auf V, falls $f \in H(U)$ und $f^{-1} \in H(V)$.

Beispiel
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ und $c \neq 0$. Dann ist

$$T : \mathbb{C}\backslash\{-d/c\} \to \mathbb{C}\backslash\{a/c\}, \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biholomorph, vgl. Beispiel 3.7.

Satz 11.2 (lokales Biholomorphiekriterium)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f \in H(G)$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subseteq G$ von z_0 und eine offene Umgebung $W \subseteq f(G)$ von $f(z_0)$ derart, dass $f_{|V} : V \to W$ biholomorph ist.

Bemerkung
Satz 11.2 folgt direkt aus dem Umkehrsatz (Analysis 2). Wir geben einen hiervon unabhängigen Beweis, der sich auf die folgende einfache Hilfsaussage stützt, die wir später (Beweis von Satz 13.4) noch einmal verwenden werden.

Proposition 11.3
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(U)$. Dann ist $g : U \times U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } z \neq w, \\[2ex] f'(w) & \text{für } z = w\,. \end{cases}$$

stetig.

Beweis. Für Punkte $(z_0, w_0) \in U \times U$ mit $z_0 \neq w_0$ folgt dies aus der Stetigkeit von f.
Es sei $(z_0, z_0) \in U \times U$. Wähle $K_r(z_0) \subseteq U$. Dann gilt für $(z, w) \in K_r(z_0) \times K_r(z_0)$

$$g(z,w) - g(z_0,z_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{w-z} \displaystyle\int_{[z,w]} (f'(\xi) - f'(z_0))\, d\xi & \text{für } z \neq w\,, \\[2ex] f'(z) - f'(z_0) & \text{für } z = w\,. \end{cases}$$

Aufgrund der Stetigkeit von f' folgt

$$|g(z,w) - g(z_0,z_0)| \leq \left\{ \begin{array}{ll} \max\limits_{\xi \in [z,w]} |f'(\xi) - f'(z_0)| & \text{für } z \neq w \\ |f'(z) - f'(z_0)| & \text{für } z = w \end{array} \right\} \longrightarrow 0 \text{ für } (z,w) \to (z_0,z_0)\,.$$

■

Beweis von Satz 11.2. Wähle $\varepsilon = |f'(z_0)|/2 > 0$. Nach Proposition 11.3 existiert $K_\delta(z_0) \subseteq G$ derart, dass für alle $z, w \in K_\delta(z_0)$ mit $z \neq w$ gilt:

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z_0) \right| \leq \varepsilon\,.$$

Daher folgt

$$|f(w) - f(z)| \geq \frac{|f'(z_0)|}{2} |w - z| \quad \text{für alle } z, w \in K_\delta(z_0) \text{ mit } z \neq w\,.$$

Dies zeigt, dass f auf $K_\delta(z_0)$ injektiv ist.

Da $f'(z_0) \neq 0$ existiert $K_\varrho(z_0) \subseteq G$ derart, dass $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\varrho(z_0)$.

Setzt man $V = K_\delta(z_0) \cap K_\varrho(z_0)$ und $W = f(V)$, so ist $f : V \to W$ bijektiv. Da V offen ist, ist auch W offen, vgl. Satz 10.7. Da $z_0 \in V$ und $f(z_0) \in W$ ist V somit eine offene Umgebung von z_0 und W eine offene Umgebung von $f(z_0)$.

Wähle $w_* \in W$ beliebig. Für $w \in W \backslash \{w_*\}$ gilt

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_*)}{w - w_*} = \frac{z - z_*}{f(z) - f(z_*)} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*}}$$

mit $z, z_* \in V$, $z \neq z_*$ und $f(z_*) = w_*$, $f(z) = w$. Somit folgt wegen der Stetigkeit von f^{-1} und $f'(z_*) \neq 0$

$$(f^{-1})'(w_*) = \frac{1}{f'(z_*)} \quad (\in \mathbb{C})\,.$$

Daher gilt: $f^{-1} \in H(W)$. ■

Satz 11.4 (Holomorphie der Umkehrfunktion; bijektiv & holomorph = biholomorph)
Es seien G und Ω Gebiete in $\mathbb{C}$ und $f : G \to \Omega$ holomorph und bijektiv. Dann gilt $f^{-1} \in H(\Omega)$.

Beweis.
Wir betrachten die aufgrund der Stetigkeit von f' abgeschlossene Menge $M := \{z \in G : f'(z) = 0\}$. Nach Satz 9.3 ist M diskret.

Die Bildmenge $f(M)$ ist diskret in Ω, denn für jeden Häufungspunkt $\tilde{w} \in \Omega$ von $f(M)$ wäre aufgrund der Stetigkeit von f^{-1} der Punkt $f^{-1}(\tilde{w}) \in G$ ein Häufungspunkt von M. Dies widerspricht aber Satz 9.3.

Da M abgeschlossen und diskret ist, ist $G \backslash M$ ein Gebiet und $f(G \backslash M) = \Omega \backslash f(M)$. Insbesondere ist $f : G \backslash M \to \Omega \backslash f(M)$ holomorph und bijektiv und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G \backslash M$. Da $f^{-1} : \Omega \to G$ stetig und $f(M)$ diskret ist, implizert der Riemannsche Hebbarkeitssatz (Satz 8.1), dass $f^{-1} \in H(\Omega)$. ■

Korollar 11.5
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.

Beweis. Setze $\Omega = f(G)$. Dann ist $f : G \to \Omega$ holomorph und bijektiv und $f^{-1} \in H(\Omega)$. Weiter gilt

$$f^{-1}(f(z)) = z \qquad \text{für alle } z \in G\,.$$

Somit folgt mithilfe der Kettenregel $(f^{-1})'(f(z)) \cdot f'(z) = 1$, also $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. ■

Bemerkung
Im Reellen ist die analoge Aussage falsch: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist bijektiv und (beliebig oft) differenzierbar, jedoch ist $f'(0) = 0$ und f^{-1} ist in 0 nicht differenzierbar.

Bemerkung
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\Omega = f(G)$. Dann gilt

(a) f ist lokal konform (in z_0). $\iff$ f ist lokal biholomorph (in z_0).

(b) $f : G \to \Omega$ ist konform. $\iff$ $f : G \to \Omega$ ist biholomorph.

Definition 11.6
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine konforme Abbildung f von G auf G nennen wir auch einen Automorphismus von G und setzen $\mathrm{Aut}(G) := \{f : G \to G$ *holomorph und bijektiv*$\}$.

Bemerkung
Der Satz von der Holomorphie der Umkehrfunktion (Satz 11.4) zeigt, dass mit $f \in \mathrm{Aut}(G)$ auch $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$. Ferner gilt: $f, g \in \mathrm{Aut}(G) \implies f \circ g \in \mathrm{Aut}(G)$ und $\mathrm{Id} \in \mathrm{Aut}(G)$. D.h. $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe bzgl. Komposition. Man nennt $\mathrm{Aut}(G)$ die Automorphismengruppe von G.

Im folgenden Satz bestimmen wir $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ explizit. Der Satz zeigt außerdem, dass aus der Injektivität einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ automatisch deren Surjektivität folgt!

Satz 11.7 (Staatsexamen Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 5)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ und $f(z) = az+b$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b \,:\, a, b \in \mathbb{C},\, a \neq 0\}$.

Beweis. Betrachte $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) := f(z) - f(0)$. Dann ist $h \in H(\mathbb{C})$ und $h(0) = 0$. Da h injektiv ist, folgt $h(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $h'(0) \neq 0$, siehe Korollar 11.5. Daher besitzt h eine Nullstelle der Ordnung 1 in $z = 0$. Die Injektivität von h impliziert auch

$$h(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \cap h(\mathbb{D}) = \emptyset\,.$$

Da $h(\mathbb{D})$ nach Satz 10.7 eine offene Umgebung von 0 bildet, folgt $|h(z)| \geq \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ für ein $\varepsilon > 0$. Definiert man $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{z}{h(z)}\,,$$

siehe Bemerkung 9.7, so ist $g \in H(\mathbb{C})$ und es gilt

$$|g(z)| \leq \frac{|z|}{\varepsilon} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq 1\,.$$

Nach Satz 7.8 ist g ein Polynom vom Grad ≤ 1. Da g nullstellenfrei auf $\mathbb{C}$ ist, muss g konstant sein. D.h. es existiert ein $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $g(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$f(z) = \frac{1}{c}z + f(0) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

■

Kapitel 12

Das Lemma von Schwarz

Das folgende Ergebnis ist eines der wichtigsten Resultate der Funktionentheorie.

Satz 12.1 (Lemma von Schwarz)
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) $|f(z)| \leq |z|$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$.

(b) $|f'(0)| \leq 1$.

Gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ *für ein* $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ *oder* $|f'(0)| = 1$, *so folgt* $f(z) = \eta\, z$ *für ein* $\eta \in \partial\mathbb{D}$.

Beweis.[Carathéodory [12], S. 110]

Nach den Voraussetzungen ist die Funktion $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ für $|z| < 1$ regulär. Es sei ϱ eine positive Zahl, die kleiner als 1 ist; das Maximum des absoluten Betrages von $\varphi(z)$ innerhalb des Kreises $|z| \leqq \varrho$ wird auf der Peripherie $|z| = \varrho$ dieses Kreises erreicht. Auf dieser Peripherie ist aber

$$|\varphi(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \left|\frac{f(z)}{\varrho}\right| \leqq \frac{1}{\varrho},$$

letzteres weil $|f(z)| \leqq 1$ ist. Hieraus folgt, daß für $|z| \leqq \varrho$

$$|f(z)| \leqq \frac{|z|}{\varrho}$$

sein muß; und da diese Ungleichheit für jedes $\varrho < 1$ gilt, folgt schließlich, daß für jedes $|z| < 1$ (Gleichheit ausgeschlossen)

$$(3) \qquad |f(z)| \leqq |z|$$

sein muß. Ist $\varphi(z)$ nicht konstant, so kann für keinen inneren Punkt des Einheitskreises $|f(z)| = |z|$ sein, weil es sonst dann auch innere Punkte dieser Kreisfläche geben würde für welche $|f(z)| > |z|$ sein müßte, was der Bedingung (3) widerspricht. Ist aber $|\varphi(z)| = 1$ für jedes $|z| < 1$, so muß die Funktion $f(z)$ von der Form $e^{i\vartheta}z$ sein. Unser Satz ist in seinem ganzen Umfange bewiesen.

Alternativ: Betrachte die holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z)/z$, vgl. Bemerkung 9.7. Beispiel 10.5 zeigt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Falls $|f(z_0)| = |z_0|$ ($|f'(0)| = 1$) gilt, so ist $|g(z_0)| = 1$ ($|g(0)| = 1$). Die Funktion $|g|$ nimmt also ihr Maximum in $\mathbb{D}$ an. Satz 10.1 impliziert daher $g \equiv$ konst auf $\mathbb{D}$ mit $|g| \equiv 1$. Es folgt $f(z) = \eta\, z$ mit $\eta \in \partial\mathbb{D}$. ■

Geometrisch besagt das Lemma von Schwarz, dass jede holomorphe Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe, die den Nullpunkt fixiert, bereits jede der Kreisscheiben $K_r(0)$, $0 < r < 1$, in sich selbst abbildet! Eine unmittelbare Anwendung des Schwarzschen Lemmas bezieht sich auf die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ von $\mathbb{D}$.

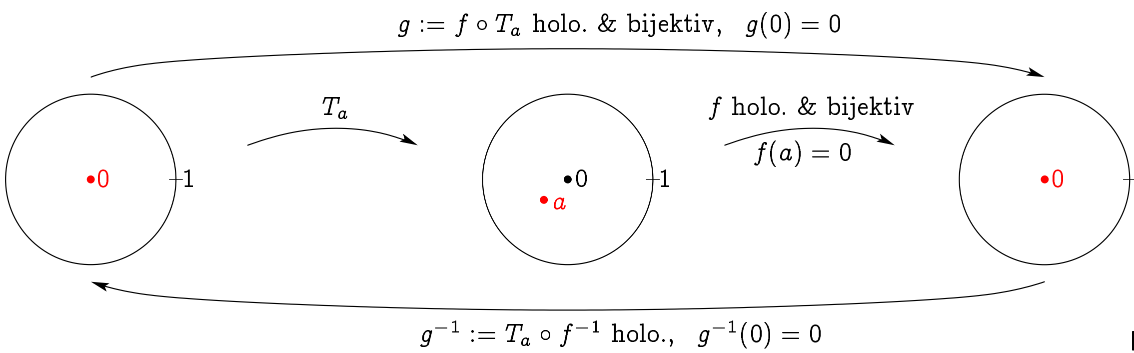
Korollar 12.2

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ T : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\, T(z) = \eta\, \frac{a-z}{1-\overline{a}z} \;:\; a \in \mathbb{D},\, \eta \in \partial\mathbb{D} \right\}.$$

Beweis. „$\supseteq$“: Es sei $a \in \mathbb{D}$ und $T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $T_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}\,z}$, siehe Beispiel 3.10 (b). Dann gilt $T_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ siehe Beispiel 3.10 (b) mit $T_a^{-1} = T_a$, denn für $T_a \circ T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gilt: $T_a \circ T_a(0) = 0$ und $T_a \circ T_a(a) = a$. Nach dem Lemma von Schwarz gilt daher $T_a \circ T_a(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Für jedes $\eta \in \partial\mathbb{D}$ ist daher $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f(z) = \eta\, T_a(z)$ holomorph und bijektiv, also $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit

$$f^{-1}(z) = T_a(\overline{\eta} z) = \overline{\eta}\, \frac{a\eta - z}{1-\overline{a\eta} z} = \overline{\eta}\, T_{a\eta}(z)\,.$$

„$\subseteq$“: Es sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ und $a \in \mathbb{D}$ mit $f(a) = 0$. Dann ist $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $g(z) = f \circ T_a(z)$ holomorph und bijektiv mit $g(0) = 0$, d.h. $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit $g(0) = 0$. Das Lemma von Schwarz angewendet auf g bzw. auf g^{-1} zeigt $|g(z)| \le |z|$ bzw. $|g^{-1}(z)| \le |z|$ jeweils für alle $z \in \mathbb{D}$, also $|g(z)| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Eine nochmalige Anwendung des Lemmas von Schwarz impliziert nun $g(z) = \eta\, z$ für ein $\eta \in \partial\mathbb{D}$, also $f(z) = \eta\, T_a^{-1}(z) = \eta\, T_a(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$.



■

Satz 12.3 (Lemma von Schwarz–Pick)
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt

(a) $$\left| \frac{f(z_*) - f(z)}{1 - \overline{f(z_*)}\, f(z)} \right| \le \left| \frac{z_* - z}{1 - \overline{z_*}\, z} \right| \quad \text{für alle } z, z_* \in \mathbb{D}.$$

Gleichheit besteht für ein Paar von Punkten $z, z_* \in \mathbb{D}$ mit $z \neq z_*$, genau dann wenn $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

(b) $$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Gleichheit besteht für ein $z \in \mathbb{D}$ genau dann wenn $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Beweis. (a) Wähle $z_* \in \mathbb{D}$ beliebig und betrachte die Funktionen

$$T_{f(z_*)} \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}\,, \quad T_{f(z_*)} \circ f(z) = \frac{f(z_*) - f(z)}{1 - \overline{f(z_*)} f(z)}$$

$$T_{z_*} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}\,, \quad T_{z_*}(z) = \frac{z_* - z}{1 - \overline{z_*} z}\,.$$

Dann ist $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $g(z) = T_{f(z_*)} \circ f \circ T_{z_*}(z)$ holomorph und $g(0) = 0$. Das Lemma von Schwarz zeigt $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Daher gilt $|T_{f(z_*)}(f(z))| \leq |T_{z_*}(z)|$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Zur Gleichheit:

(i) Für Punkte $w, w_* \in \mathbb{D}$ mit $w \neq w_*$ gelte

$$\left| \frac{f(w_*) - f(w)}{1 - \overline{f(w_*)} f(w)} \right| = \left| \frac{w_* - w}{1 - \overline{w_*} w} \right| ,$$

d.h. $|T_{f(w_*)} \circ f(w)| = |T_{w_*}(w)|$. Setzt man $\xi = T_{w_*}(w)$, so folgt $|T_{f(w_*)} \circ f \circ T_{w_*}(\xi)| = |\xi|$. Definiert man nun $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $g(z) = T_{f(w_*)} \circ f \circ T_{w_*}(z)$, so gilt: $g \in H(\mathbb{D})$, $g(0) = 0$ und $|g(\xi)| = |\xi|$. Da $\xi \neq 0$, folgt mit dem Lemma von Schwarz $g(z) = \eta z$ für $z \in \mathbb{D}$ mit $\eta \in \partial\mathbb{D}$. Es folgt $f(z) = T_{f(w_*)}(\eta T_{w_*}(z))$ für $z \in \mathbb{D}$, d.h. $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$.

(ii) Es sei $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. Wähle $z_* \in \mathbb{D}$ beliebig und betrachte $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $h(z) = T_{f(z_*)} \circ f(z)$. Dann gilt $h \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ und $h(z_*) = 0$. Somit existiert ein $\eta \in \partial\mathbb{D}$ derart, dass

$$h(z) = \eta \frac{z_* - z}{1 - \overline{z_*} z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Dies impliziert

$$\left| \frac{f(z_*) - f(z)}{1 - \overline{f(z_*)} f(z)} \right| = \left| \frac{z_* - z}{1 - \overline{z_*} z} \right|$$

für alle $z, z_* \in \mathbb{D}$.

(b): Teil (a) zeigt:

$$\left| \frac{f(z_*) - f(z)}{z_* - z} \right| \frac{1}{|1 - \overline{f(z_*)} f(z)|} \leq \frac{1}{|1 - \overline{z_*} z|}$$

für alle $z, z_* \in \mathbb{D}$ mit $z \neq z_*$. Für $z_* \to z$ folgt

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Zur Gleichheit:

(i) Es sei $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. Teil (a) zeigt

$$\left| \frac{f(z_*) - f(z)}{1 - \overline{f(z_*)} f(z)} \right| = \left| \frac{z_* - z}{1 - \overline{z_*} z} \right|$$

für alle $z, z_* \in \mathbb{D}$. Daher folgt

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

(ii) Es sei nun $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f \in H(\mathbb{D})$ mit

$$\frac{|f'(\tilde{z})|}{1 - |f(\tilde{z})|^2} = \frac{1}{1 - |\tilde{z}|^2}$$

für ein $\tilde{z} \in \mathbb{D}$. Definiert man $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $h(z) = T_{f(\tilde{z})} \circ f \circ T_{\tilde{z}}(z)$, so gilt $h \in H(\mathbb{D})$ und $h(0) = 0$. Weiter gilt

$$|h'(0)| = \frac{|h'(0)|}{1 - |h(0)|^2} = \frac{|f'(T_{\tilde{z}}(0))||T'_{\tilde{z}}(0)|}{1 - |f(T_{\tilde{z}}(0))|^2} = \frac{|T'_{\tilde{z}}(0)}{1 - |T_{\tilde{z}}(0)|^2} = 1 \,.$$

Mit dem Lemma von Schwarz folgt $h(z) = \eta z$ für alle $z \in \mathbb{D}$ mit einem $\eta \in \partial\mathbb{D}$. Also ist $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. ■

Korollar 12.4 (Jensensche Ungleichung)
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit Nullstellen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$, die nicht notwendigerweise paarweise disjunkt sind. Dann gilt

$$|f(z)| \leq \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z} \right| \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}\,.$$

Man beachte, dass dies das Lemma von Schwarz verallgemeinert und verbessert.

Beweis. Betrachte die holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}}\,,$$

vgl. Bemerkung 9.7. Dann gilt

$$\limsup_{z \to \xi} |g(z)| = \limsup_{z \to \xi} \frac{|f(z)|}{\left| \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z} \right|} = \limsup_{z \to \xi} |f(z)| \leq 1 \qquad \text{für alle } \xi \in \partial\mathbb{D}\,.$$

Mit Korollar 10.4 folgt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. ■

Definition 12.5 (endliches Blaschke Produkt)
Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ und $\eta \in \partial\mathbb{D}$. Dann heißt $B : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$,

$$B(z) := \eta \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}$$

endliches Blaschke Produkt (vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$).

Satz 12.6
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(a) Es gilt $\lim\limits_{z \to \xi} |f(z)| = 1$ für jedes $\xi \in \partial\mathbb{D}$.

(b) f ist ein endliches Blaschke Produkt vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (b) $\Longrightarrow$ (a): klar

(a) $\Longrightarrow$ (b): f hat in $\mathbb{D}$ nur endlich viele Nullstellen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten). Wir betrachten die holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

$$g(z) := \frac{f(z)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}}\,.$$

Insbesondere ist g nullstellenfrei. Es gilt

$$\lim_{z \to \xi} |g(z)| = 1 \quad \text{für alle } \xi \in \partial\mathbb{D}\,.$$

Bemerkung 10.6 zeigt, es existiert ein $\eta \in \partial\mathbb{D}$ derart, dass $g(z) = \eta$ für alle $z \in \mathbb{D}$. ■

Korollar 12.7
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und nicht konstant mit Nullstellen $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{D}$[1]*. Dann gilt die sogenannte Blaschke Bedingung*

$$\sum_{j\geq 1} (1 - |a_j|) < \infty\,. \tag{12.1}$$

D.h. die Nullstellen einer nichtkonstanten *beschränkten* holomorphen Funktion auf $\mathbb{D}$ häufen sich „so schnell“ gegen den Rand $\partial\mathbb{D}$, so dass die Blaschke Bedingung erfüllt ist. Beispielsweise gibt es keine *beschränkte* Funktion $f \in H(\mathbb{D})$, die ihre Nullstellen genau in den Punkten $1 - 1/j$, $j = 2, 3, \ldots$, hat.

Beweis. 1. Fall: Hat f hat in $z = 0$ keine Nullstelle, so zeigt Korollar 12.4

$$-\sum_{j=1}^{n} \log |a_j| = -\log \prod_{j=1}^{n} |a_j| \leq -\log |f(0)|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $-\log x \geq 1 - x$ für alle $x \in (0, 1)$, ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - |a_j|) \leq -\log |f(0)|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt (12.1).

2. Fall: Hat f hat in $z = 0$ eine Nullstelle der Ordnung N, so betrachten wir $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $g(z) := f(z)/z^N$. Insbesondere ist g holomorph auf $\mathbb{D}$, $g(0) \neq 0$ und $g(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Falls $g \equiv$ konst so gilt (12.1). Falls g nicht konstant ist, so impliziert Korollar 10.4 $g(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Somit erfüllen die Nullstellen von g die Blaschke Bedingung (12.1) und daher erfüllen auch die Nullstellen von f die Blaschke Bedingung. ∎

Korollar 12.8 (Verschärftes Identitätsprinzip für beschränkte holomorphe Funktionen)
Es seien $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Gilt $f(a_j) = g(a_j)$ für eine Folge (a_j)[2] *in $\mathbb{D}$ mit*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) = \infty,$$

so gilt $f \equiv g$.

Beweis. Wende Korollar 12.7 auf die holomorphe Funktion $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $h(z) = (f(z) - g(z))/2$ an. ∎

Das folgende Resultat verallgemeinert das Lemma von Schwarz.

Satz 12.9 (Lindelöf 1909)
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt

$$|f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)|\,|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

---

[1] Hat f eine Nullstelle der Ordnung k in ξ, so erscheint ξ in der „Folge“ (a_j) genau k-mal.

[2] Erscheint der Punkt ξ genau k-mal in der Folge (a_j), so hat $f - g$ in ξ eine Nullstelle der Ordnung k.

Beweis. Für alle $a, b \in \mathbb{D}$ gilt

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 = 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\overline{a}b|^2} \geq 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1-|a|\,|b|)^2} = \frac{(|a|-|b|)^2}{(1-|a|\,|b|)^2}\,.$$

Zusammen mit der Ungleichung von Schwarz–Pick folgt hieraus

$$\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(0)|\,|f(z)|} \leq \left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-0}{1-\overline{0}z}\right| = |z|\,.$$

Dies ist bereits die zu zeigende Ungleichung. ■

Kapitel 13

Allgemeiner Cauchy Integralsatz

Definition 13.1 (Zyklus)
Es seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene Wege in $\mathbb{C}$ und $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$. Die formale Summe

$$\Gamma := \sum_{k=1}^{n} m_k \gamma_k$$

heißt Zyklus und

$$tr(\Gamma) := \bigcup_{j=1}^{n} tr(\gamma_j)$$

heißt Spur von Γ. Die Länge des Zyklus ist definiert durch

$$L(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} |m_k| L(\gamma_k)\,.$$

Ist $f : tr(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig, so definiert man

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := m_1 \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + m_n \int_{\gamma_n} f(z)\,dz\,.$$

Für $z \in \mathbb{C}\setminus tr(\Gamma)$ heißt

$$n(z,\Gamma) := m_1 n(z,\gamma_1) + \cdots + m_n n(z,\gamma_n)$$

die Windungszahl von Γ bzgl. z.

Bemerkung 13.2
Es sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Gemäß Satz 5.6 ist $n(z,\Gamma)$ ist ganzzahlig, konstant auf jeder Komponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\Gamma)$ und $n(z,\Gamma) = 0$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\Gamma)$.

Bemerkung
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und Γ ein Zyklus in U. Wann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

für jede Funktion $f \in H(U)$? Notwendig hierfür ist $n(z,\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$.

Definition 13.3 (nullhomologer Zyklus)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ein Zyklus Γ in U ($tr(\Gamma) \subseteq U$) heißt nullhomolog in U, falls $n(z,\Gamma) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus U$ ist.

Satz 13.4 (Allgemeiner Cauchy Integralsatz)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und Γ ein nullhomologer Zyklus in U. Dann gilt für alle $f \in H(U)$

(a) $n(z,\Gamma)\, f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$ *für alle $z \in U \setminus tr(\Gamma)$.*

(b) $n(z,\Gamma)\, f^{(k)}(z) = \dfrac{k!}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw$ *für alle $z \in U \setminus tr(\Gamma)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$.*

(c) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$.

Der folgende Beweis von Satz 13.4 wurde 1971 von Dixon [15] publiziert.
Beweis. (a) Definiere $g : U \times U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } z \neq w, \\ f'(w) & \text{für } z = w\,. \end{cases}$$

Dann ist g nach Proposition 11.3 stetig auf $U \times U$. Für jedes feste $w \in \operatorname{tr}(\Gamma)$ ist $z \mapsto g(z,w)$ holomorph in $U \setminus \{z\}$ und wegen Satz 8.1 folgt $z \mapsto g(z,w)$ ist holomorph in U. Definiere

$$\varphi : U \to \mathbb{C}\,, \qquad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\, dw\,.$$

(i) φ ist stetig auf U: Es sei $z_* \in U$ beliebig. Wähle $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_*)} \subseteq U$. Dann ist g gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $\overline{K_r(z_*)} \times \operatorname{tr}(\Gamma)$. Daher existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0,r)$ derart, dass

$$|g(z,w) - g(z',w)| < \varepsilon$$

für alle $z, z' \in \overline{K_r(z_*)}$ mit $|z - z'| < \delta$ und alle $w \in \operatorname{tr}(\Gamma)$. Daher folgt

$$|\varphi(z) - \varphi(z_*)| \leq \frac{1}{2\pi} L(\Gamma) \max_{w \in \operatorname{tr}(\Gamma)} |g(z,w) - g(z_*,w)| < \frac{1}{2\pi} L(\Gamma)\varepsilon$$

für alle $z \in K_\delta(z_*)$.
(ii) φ ist holomorph auf U: Ist Δ ein abgeschlossenes und ausgefülltes Dreieck in U, so folgt mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\partial\Delta} \varphi(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \left(\int_\Gamma g(z,w)\, dw \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)\, dz \right) dw = 0$$

nach dem Satz von Goursat (Satz 6.6). Also ist $\varphi \in H(U)$ nach dem Satz von Morera (Satz 8.2).
Wir zeigen $\varphi \equiv 0$ auf U, denn dann folgt für alle $z \in U \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\, dw = n(z,\Gamma)\, f(z)\,.$$

Um $\varphi \equiv 0$ zu zeigen, betrachten wir die Menge $V := \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\Gamma) : n(z,\Gamma) = 0\}$. Es gilt:

* $\mathbb{C}\backslash U \subseteq V$, da Γ nullhomolog in U ist. Folglich ist $\mathbb{C} = U \cup V$.
* V enthält die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C}\backslash \operatorname{tr}(\Gamma)$.
* V ist offen, da $n(z,\Gamma)$ stetig und ganzzahlig auf $\mathbb{C}\backslash \operatorname{tr}(\Gamma)$ ist.
* $U \cap V$ ist offen und $U \cap V = \{z \in U\backslash \operatorname{tr}(\Gamma) : n(z,\Gamma) = 0\} \neq \emptyset$.

Wir betrachten nun das Cauchy Integral $\Phi : V \to \mathbb{C}$ von f bzgl. Γ,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,.$$

Dann ist $\Phi \in H(V)$, siehe Satz 5.2. Nach Definition gilt $\varphi(z) = \Phi(z)$ für $z \in U \cap V$. Daher ist die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$h(z) := \begin{cases} \varphi(z) & \text{für } z \in U, \\ \Phi(z) & \text{für } z \in V\,, \end{cases}$$

wohldefiniert und holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Aufgrund der Standardabschätzung gilt

$$\lim_{|z|\to\infty} |h(z)| = \lim_{|z|\to\infty} |\Phi(z)| \leq \lim_{|z|\to\infty} \frac{L(\Gamma)}{2\pi} \max_{w\in\operatorname{tr}(\Gamma)} \frac{|f(w)|}{\big||z|-|w|\big|} = 0\,.$$

Der Satz von Liouville (Satz 7.7) impliziert nun $h \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$. Daher ist $\varphi \equiv 0$ auf U.

(b) Es sei $\Gamma = \sum_{j=1}^n m_j\gamma_j$. Wähle $z \in U\backslash \operatorname{tr}(\Gamma)$ beliebig. Partielle Integration (vgl. Seite 37) ergibt

$$\begin{aligned} n(z,\Gamma)f^{(k)}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^{(k)}(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^n m_j \int_{\gamma_j} \frac{f^{(k)}(w)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{k!}{2\pi i}\sum_{j=1}^n m_j \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw\,. \end{aligned}$$

(c) Wähle $a \in U\backslash \operatorname{tr}(\Gamma)$ beliebig. Definiere $F : U \to \mathbb{C}$, $F(z) = (z-a)\,f(z)$. Dann ist $F \in H(U)$ und es gilt

$$0 = n(a,\Gamma)F(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(w)}{w-a}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\,dw\,.$$

■

Definition 13.5 (homologe Zyklen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zwei Zyklen Γ, Γ_* in U heißen homolog, falls der Zyklus $\Gamma - \Gamma_*$ nullhomolog in U ist.

Korollar 13.6
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und Γ und Γ_* homologe Zyklen in U. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_*} f(z)\,dz$$

für alle $f \in H(U)$.

Beweis. Satz 13.4 (c). ■

Definition 13.7 (einfach zusammenhängendes Gebiet)
Ein Gebiet G in $\mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, falls jeder Zyklus in G nullhomolog in G ist.

Bildlich: „Ein einfach zusammenhängendes Gebiet hat kein Loch."

Korollar 13.8
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(a) G ist einfach zusammenhängend.

(b) $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden Zyklus Γ in G und jedes $f \in H(G)$.

Beweis. „(a) $\Longrightarrow$ (b)" Satz 13.4 (c).
„(b) $\Longrightarrow$ (a)" Es sei Γ ein beliebiger Zyklus in G. Für $z \in \mathbb{C}\backslash G$ ist $f_z : G \to \mathbb{C}$, $f_z(w) := (w-z)^{-1}$ holomorph in G, d.h.

$$n(z,\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_z(w)\,dw = 0\,.$$

■

Beispiel 13.9
Jedes sternförmige Gebiet in $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, siehe Satz 6.7.

Korollar 13.10
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

(a) Für jeden Zyklus Γ in G und jedes $f \in H(G)$ gilt:

$$n(z,\Gamma)\, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw$$

für alle $z \in G\backslash\, tr(\Gamma)$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Jede Funktion $f \in H(G)$ hat eine Stammfunktion in $H(G)$.

Beweis. (a) folgt aus Satz 13.4 (a) & (b) und (b) aus Satz 13.4 (c) und Satz 6.3 ■

Kapitel 14

Laurentreihen und isolierte Singularitäten

Für einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R \leq \infty$ bezeichnet

$$A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\}$$

einen (entarteten) Kreisring und $\Delta_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| > r\}$.
Falls $R = \infty$ so setzen wir $K_R(z_0) = \mathbb{C}$. Daher gilt $A_{r,R}(z_0) = K_R(z_0) \cap \Delta_r(z_0)$.

Satz 14.1
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : A_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) *(Laurentzerlegung)*
Es gibt eindeutig bestimmte Funktionen $f_N \in H(K_R(z_0))$ und $f_H \in H(\Delta_r(z_0))$ mit $\lim\limits_{z\to\infty} |f_H(z)| = 0$ derart, dass

$$f(z) = f_H(z) + f_N(z) \quad \text{für alle } z \in A_{r,R}(z_0)\,.$$

(b) *(Laurententwicklung)*
Für $z \in A_{r,R}(z_0)$ gilt:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{=f_N(z)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k}}_{=f_H(z)} =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_\varrho(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw\,, \quad k \in \mathbb{Z},\ \varrho \in (r, R)\,.$$

Die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

konvergiert absolut und kompakt in $A_{r,R}(z_0)$.

Bemerkung
Die Reihe in Satz 14.1 (b) heißt Laurentreihe von f bzgl. $A_{r,R}(z_0)$. Man nennt f_H den Hauptteil von f und f_N den Nebenteil von f bzgl. $A_{r,R}(z_0)$. Satz 14.1 verallgemeinert Korollar 7.3.

Beweis.
(1) **Eindeutigkeit**: Es seien $f_N, g_N \in H(K_R(z_0))$, $f_H, g_H \in H(\Delta_r(z_0))$ mit

$$\lim_{|z|\to\infty} |f_H(z)| = \lim_{|z|\to\infty} |g_H(z)| = 0$$

und

$$f_H(z) + f_N(z) = f(z) = g_H(z) + g_N(z) \quad \text{für alle } z \in A_{r,R}(z_0)\,.$$

Dann folgt

$$g_H(z) - f_H(z) = f_N(z) - g_N(z) \quad \text{für alle } z \in A_{r,R}(z_0)\,.$$

Daher definiert

$$h(z) := \begin{cases} f_N(z) - g_N(z) & \text{für } z \in K_R(z_0), \\ g_H(z) - f_H(z) & \text{für } z \in \Delta_r(z_0) \end{cases}$$

eine ganze Funkion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to\infty} |h(z)| = 0$, d.h. $h \equiv 0$ aufgrund des Satzes von Liouville. Dies impliziert $g_H \equiv f_H$ auf $\Delta_r(z_0)$ und $g_N \equiv f_N$ auf $K_R(z_0)$.

(2) **Existenz**: Wähle r_1, R_1 derart, dass $r < r_1 < R_1 < R$. Dann ist $\Gamma := \partial K_{R_1}(z_0) - \partial K_{r_1}(z_0)$ ein nullhomologer Zyklus in $A_{r,R}(z_0)$. Nach Satz 13.4 (a) gilt somit wegen $n(z,\Gamma) = 1$ für $z \in A_{r_1,R_1}(z_0)$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{R_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw =: f_N(z) + f_H(z)\,, \qquad z \in A_{r_1,R_1}(z_0)\,,$$

wobei zunächst $f_N \in H(K_{R_1}(z_0))$ und $f_H \in H(\Delta_{r_1}(z_0))$. Satz 5.2 zeigt

$$f_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\,, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{R_1}(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\,.$$

Da die Koeffizienten a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, wegen Satz 13.4 (c) bzw. Korollar 13.6 nicht von $R_1 \in (r, R)$ abhängen, konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ absolut und kompkat in $K_R(z_0)$, also gilt $f_N \in H(K_R(z_0))$.

Wähle $z \in \Delta_{r_1}(z_0)$ beliebig (aber fest). Dann gilt für $w \in \partial K_{r_1}(z_0)$

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^j}{(z-z_0)^{j+1}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$w \mapsto \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}$$

auf $\partial K_{r_1}(z_0)$ folgt

$$\begin{aligned} f_H(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_1}(z_0)} \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k\,dw \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} \right) (z-z_0)^k\,dw \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k \quad \text{mit } a_k := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\,. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_k hängen wegen Satz 13.4 (c) bzw. Korollar 13.6 nicht von $r_1 \in (r, R)$ ab, d.h. die Reihe konvergiert absolut und kompakt in $\Delta_r(z_0)$, also $f_H \in H(\Delta_r(z_0))$.
Es gilt

$$|f_H(z)| \leq r_1 \max_{w \in \partial K_{r_1}(z_0)} \frac{|f(w)|}{|w - z|} \to 0 \quad \text{für } |z| \to \infty .$$

■

Beispiele 14.2

(a) *Die Laurentreihe der holomorphen Funktion*

$$f : \mathbb{C}\backslash\{1,2\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

im Kreisring $A_{1,2}(0)$ bestimmen wir mithilfe einer Partialbruchzerlegung (siehe hierzu auch Bemerkung 14.5) und der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{-1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k \qquad \text{für alle } z \in A_{1,2}(0) . \end{aligned}$$

(b) *Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(1/z^2)$. Dann ist $f \in H(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ und*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{|k|!} z^{2k} \qquad (z \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$$

ist die Laurentreihe von f in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Wir betrachten nun den Fall, dass der „innere" Radius $= 0$ ist.

Definition 14.3 (Isolierte Singularität)
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f \in H(A_{0,R}(z_0))$. Dann heißt z_0 isolierte Singularität von f. Ist

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die Laurentreihe von f bzgl. $A_{0,R}(z_0)$, so heißt die isolierte Singularität

(a) *hebbar, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$. In diesem Fall lässt sich f durch $f(z_0) := a_0$ zu einer in $K_R(z_0)$ holomorphen Funktion fortsetzen.*

(b) *Pol der Ordnung $N \in \mathbb{N}$, falls $a_{-N} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -N$, d.h.*

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{-1} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (z \in A_{0,R}(z_0)) .$$

(c) *wesentlich, falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele paarweise verschiedene $k < 0$.*

Bemerkung
Die Funktion in Beispiel 14.2 (a) hat einfache Polstellen in $z = 1$ und $z = 2$. Die Funktion in Beispiel 14.2 (b) hat eine wesentliche Singularität in $z = 0$.

Satz 14.4 (Abbildungsverhalten in der Nähe einer isolierten Singularität)
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f \in H(A_{0,R}(z_0))$. Dann hat f im Punkt z_0

(a) *eine hebbare Singularität* $\iff$ *f ist in z_0 beschränkt, d.h.* $\limsup\limits_{z \to z_0} |f(z)| < +\infty$.

(b) *einen Pol der Ordnung N* $\iff$ $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^N}$ *mit* $g \in H(K_R(z_0))$, $g(z_0) \neq 0$.

Insbesondere gilt in diesem Fall: $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

(b') *einen Pol der Ordnung N* $\iff$ *$1/f$ ist holomorph in $K_\varepsilon(z_0) \backslash \{z_0\}$ für ein $\varepsilon \in (0, R)$ und $1/f$ ist nach $K_\varepsilon(z_0)$ holomorph fortsetzbar mit einer Nullstelle der Ordnung N in z_0.*

(c) *eine wesentliche Singularität* $\iff$ *$f(A_{0,r}(z_0))$ liegt dicht in $\mathbb{C}$ für jedes $0 < r < R$.*

Beweis. (a) Dies ist Satz 8.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz).
(b) „$\Longrightarrow$“ Hat f in z_0 einen Pol der Ordnung N, so gilt

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{-1} a_k (z-z_0)^k + f_N(z) = (z-z_0)^{-N} \left(\sum_{k=-N}^{-1} a_k (z-z_0)^{k+N} + (z-z_0)^N f_N(z) \right)$$

für alle $z \in A_{0,R}(z_0)$ mit $a_{-N} \neq 0$ und $f_N \in H(K_R(z_0))$. Insbesondere ist $g : K_R(z_0) \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \sum_{k=-N}^{-1} a_k (z-z_0)^{k+N} + (z-z_0)^N f_N(z)$$

holomorph in $K_R(z_0)$ mit $g(z_0) = a_{-N} \neq 0$.
„$\Longleftarrow$“ Es gilt $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^N}$ mit $g \in H(K_R(z_0))$, $g(z_0) \neq 0$. Dann gilt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad \text{für } z \in K_R(z_0) \text{ mit } c_0 \neq 0\,,$$

d.h.

$$f(z) = (z-z_0)^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-N}^{\infty} c_{k+N} (z-z_0)^k$$

für $z \in K_R(z_0) \backslash \{z_0\}$ mit $c_0 \neq 0$.

(c) „$\Longleftarrow$“ Nach (a) und (b) kann f in z_0 weder eine hebbare Singularität (dann wäre f nach z_0 holomorph fortsetzbar) noch einen Pol (dann würde $|f(z)| \to +\infty$ für $z \to z_0$ gelten) haben, d.h. f hat in z_0 eine wesentliche Singularität.

„$\Longrightarrow$“ Annahme: Es existieren ein $\delta > 0$, ein $w \in \mathbb{C}$ sowie ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ für alle $z \in A_{0,\delta}(z_0)$. Dann ist $g : A_{0,\delta}(z_0) \to \mathbb{C}$, $g(z) := 1/(f(z) - w)$ in $A_{0,\delta}(z_0)$ durch $1/\varepsilon$ beschränkt, also nach (a) holomorph (fortsetzbar) auf $K_\delta(z_0)$. Folglich hat f einen Pol oder eine hebbare Singularität in z_0. ■

Aussage (c) in Satz 14.4 ist der *Satz von Casorati–Weierstraß für wesentliche isolierte Singularitäten.*

Bemerkung
Ist $f \in H(\mathbb{C})$, so hat $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) := f(1/z)$ eine isolierte Singularität in $z = 0$. Diese ist genau dann wesentlich, wenn f kein Polynom ist. Dies zeigt den Satz von Casorati–Weierstraß für ganze Funktionen, siehe Satz 9.10.

Bemerkung 14.5 (Partialbruchzerlegung)
Es seien $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome und $z_1, \dots, z_n$ seien die Polstellen der rationalen Funktion $r : \mathbb{C}\backslash\{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$, $r(z) = p(z)/q(z)$. In jedem Punkt z_j besitzt r eine Laurentzerlegung $r(z) = r_{N,j}(z) + r_{H,j}(z)$ mit jeweils endlichem Hauptteil $r_{H,j}$, d.h.

$$h(z) := \sum_{j=1}^{n} r_{H,j}(z)\,, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{z_1, \dots, z_n\}\,,$$

ist eine rationale Funktion mit den Hauptteilen $r_{H,j}$ bei z_j für $j = 1, \dots, n$. Somit ist $s(z) := r(z) - h(z)$ eine rationale Funktion ohne Polstellen, also ein Polynom und $r(z) = h(z) + s(z)$ ist die gewünschte Partialbruchzerlegung.

Charaterisierung isolierter Singularitäten

Wir fassen unsere Ergebnisse zu den isolierten Singulariäten einer holomorphen Funktion nochmals zusammen.

Bemerkung III.1
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in H(U \backslash \{z_0\})$. Dann gilt:

(a) f hat in z_0 eine hebbare Singularität $\Longrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existiert.

(b) f hat eine Polstelle in $z_0 \Longrightarrow$ es existiert ein $R > 0$ derart, dass $\mathbb{C} \backslash K_R(0) \subseteq f(U \backslash \{z_0\})$.

(c) f hat in z_0 eine wesentliche Singularität $\Longrightarrow$ für beliebige $a, c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, a \neq c$, existieren Folgen (z_n), $(w_n) \subseteq U \backslash \{z_0\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = z_0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = a$[1] sowie $\lim\limits_{n \to \infty} f(w_n) = c$.

Um den Typ der isolierten Singularität einer holomorphen Funktion zu bestimmen, ist oft folgende Charakterisierung hilfreich.

Bemerkung III.2
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in H(U \backslash \{z_0\})$. Dann gilt:

(a) f hat in z_0 eine hebbare Singularität $\Longleftrightarrow \limsup\limits_{z \to z_0} |f(z)| < \infty$.

(b) f hat in z_0 einen Pol $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

(c) f hat in z_0 eine wesentliche Singularität $\Longleftrightarrow$ es existieren Folgen (z_n), $(w_n) \subseteq U \backslash \{z_0\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = z_0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} |f(z_n)| = \infty$ sowie $\lim\limits_{n \to \infty} f(w_n) = c$ mit $c \in \mathbb{C}$.

[1] Falls z.B. $a = \infty$, so steht $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = a$ für $\lim\limits_{n \to \infty} |f(z_n)| = \infty$.

Der Residuensatz und das Argumentprinzip

Definition 15.1 (Residuum)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$ und $f \in H(U \backslash \{z_0\})$. Dann heißt die komplexe Zahl

$$\operatorname{res}(z_0, f) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} f(w)\, dw$$

das Residuum von f im Punkt z_0. Beachte, $\operatorname{res}(z_0, f)$ ist wohldefiniert, also unabhängig von r wegen Korollar 13.6.

Bemerkung 15.2 (Berechnung von Residuen; Integration via Differentiation)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K_R(z_0) \subseteq U$ und $f \in H(U \backslash \{z_0\})$ mit Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\,, \qquad z \in K_R(z_0) \backslash \{z_0\}\,.$$

Dann gilt

$$a_{-1} = \operatorname{res}(z_0, f)\,.$$

Hat f einen Pol der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ in z_0, so ist

$$g(z) = (z - z_0)^N f(z) = a_{-N} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{N-1} + a_0 (z - z_0)^N + \cdots\,,$$

holomorph in $K_R(z_0)$ und

$$\operatorname{res}(z_0, f) = a_{-1} = \frac{g^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!}$$

Insbesondere gilt falls f einen Pol der Ordnung 1 in z_0 hat

$$\operatorname{res}(z_0, f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)\,.$$

Beispiel 15.3 (Logarithmische Ableitungen)
Hat $f \in H(K_R(z_0))$ eine Nullstelle der Ordnung n in z_0, so gilt $f(z) = (z - z_0)^N g(z)$ mit $g \in H(K_R(z_0))$ und $g(z_0) \neq 0$. Insbesondere existiert $K_\delta(z_0) \subseteq K_R(z_0)$ mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\delta(z_0)$. Daher gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{für } z \in K_\delta(z_0)\,, \quad \text{also } \operatorname{res}(z_0, f'/f) = n\,.$$

Ist z_0 eine Polstelle von $f \in H(K_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ der Ordnung p, so gilt $f(z) = g(z)/(z - z_0)^p$ mit $g \in H(K_R(z_0))$, $g(z_0) \neq 0$ und $g(z) \neq 0$ für $z \in K_\delta(z_0)$ für ein $\delta < r$. Es folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{für } z \in K_\delta(z_0)\,, \quad \text{also } \operatorname{res}(z_0, f'/f) = -p\,.$$

Satz 15.4 (Residuensatz)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subseteq U$ diskret, $f \in H(U \backslash A)$ und Γ ein nullhomologer Zyklus in U mit $tr(\Gamma) \cap A = \emptyset$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(w)\, dw = \sum_{z \in A} \operatorname{res}(z, f)\, n(z, \Gamma)\,.$$

Bemerkung 15.5 (Inneres eines Zyklus)
Es sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Dann nennt man die Menge

$$\operatorname{Int}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \backslash \operatorname{tr}(\Gamma) : n(z, \Gamma) \neq 0\}$$

das Innere des Zyklus. Es gilt

(a) $\operatorname{Int}(\Gamma)$ ist offen und beschränkt.

(b) Ist Γ ein nullhomologer Zyklus in einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$, so ist $\operatorname{Int}(\Gamma)$ relativ kompakt in U, d.h. $\overline{\operatorname{Int}(\Gamma)}$ ist kompakt und $\overline{\operatorname{Int}(\Gamma)} \subseteq U$.

Beweis.
(a) $\operatorname{Int}(\Gamma)$ ist offen, da $z \mapsto n(z, \Gamma)$ stetig und ganzzahlig auf $\mathbb{C} \backslash \operatorname{tr}(\Gamma)$ ist.

$\operatorname{Int}(\Gamma)$ ist beschränkt: Da $\operatorname{tr}(\Gamma)$ kompakt ist, existiert ein $R > 0$ derart, dass $\operatorname{tr}(\Gamma) \subseteq K_R(0)$. Da $\mathbb{C} \backslash K_R(0)$ wegzusammenhängend und unbeschränkt ist, folgt $n(z, \Gamma) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \backslash K_R(0)$, siehe Bemerkung 13.2. Also gilt $\operatorname{Int}(\Gamma) \subseteq K_R(0)$.

(b) Wegen (a) genügt es $\overline{\operatorname{Int}(\Gamma)} \subseteq U$ zu zeigen. Da Γ nullhomolog in U gilt, folgt $\operatorname{Int}(\Gamma) \subseteq U$. Es sei nun z_* ein Häufungspunkt von $\operatorname{Int}(\Gamma)$. Wir nehmen an: $z_* \notin U$. Da Γ nullhomolog in U ist, ist $n(z_*, \Gamma) = 0$. Es existiert eine Folge $(z_n) \subseteq \operatorname{Int}(\Gamma)$ mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_*$ und $n(z_n, \Gamma) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt $\mathbb{Z} \backslash \{0\} \ni n(z_n, \Gamma) \to n(z, \Gamma) = 0$ für $n \to \infty$. Widerspruch! ■

Beweis von Satz 15.4.
Die Summe

$$\sum_{z \in A} \operatorname{res}(z, f)\, n(z, \Gamma)$$

konvergiert:
Für $z \in A \backslash \operatorname{Int}(\Gamma)$ gilt $n(z, \Gamma) = 0$. Da Γ nullhomolog ist, ist $\overline{\operatorname{Int}(\Gamma)} \subseteq U$ kompakt, und da A diskret ist, ist $\operatorname{Int}(\Gamma) \cap A$ endlich.

Es seien nun $z_1, z_2, \ldots, z_n \in A$ die isolierten Singularitäten von f in $\operatorname{Int}(\Gamma)$. Es gilt $n(z_j, \Gamma) \neq 0$ für jedes $j = 1, \ldots, n$.

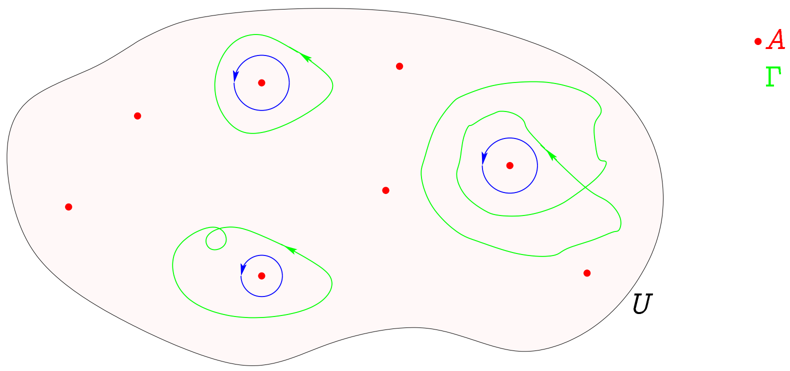
Zu z_j wähle $\varepsilon_j > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\overline{K_{\varepsilon_j}(z_j)} \subseteq \operatorname{Int}(\Gamma) \subseteq U \backslash \operatorname{tr}(\Gamma)$ (d.h. $\overline{K_{\varepsilon_j}(z_j)}$ ist Teilmenge der Komponente von $\operatorname{Int}(\Gamma)$, die z_j enthält),

(ii) $\overline{K_{\varepsilon_j}(z_j)} \cap \overline{K_{\varepsilon_k}(z_k)} = \emptyset$ für $j \neq k$.

Es sei $\gamma_j(t) = z_j + \varepsilon_j e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Definiere den Zyklus

$$\Gamma^* = \Gamma - \sum_{j=1}^{n} n(z_j, \Gamma)\, \gamma_j \,.$$



Dann ist Γ^* nullhomolog in $U \backslash A$, denn

(i) für $z \in \mathbb{C} \backslash U$ gilt $n(z, \Gamma) = 0$, da Γ nullhomolog in U und $n(z, \gamma_j) = 0$, da $z \notin \operatorname{Int}(\Gamma)$ und $\operatorname{Int}(\gamma_j) = K_{\varepsilon_j}(z_j) \subseteq \operatorname{Int}(\Gamma)$ für $j = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) für $z \in A \backslash \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ folgt $n(z, \Gamma) = 0$ und $n(z, \gamma_j) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$, da $z \notin \operatorname{Int}(\Gamma)$;

(iii) für $z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ folgt mit $z = z_k$

$$n(z_k, \Gamma^*) = n(z_k, \Gamma) - \sum_{j=1}^{n} n(z_j, \Gamma)\, \underbrace{n(z_k, \gamma_j)}_{=0 \text{ für } k \neq j} = n(z_k, \Gamma) - n(z_k, \Gamma) \cdot 1 = 0\,.$$

Der Cauchy Integralsatz (Satz 13.4) impliziert nun

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} f(w)\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(w)\, dw - \sum_{j=1}^{n} n(z_j, \gamma_j)\, \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(w)\, dw\,.$$

Wegen $\operatorname{res}(z_j, \gamma_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(w)\, dw$ für $j = 1, 2, \ldots, n$, ist dies die zu zeigende Identität. ∎

Wir fokussieren uns nun auf den wichtigen Fall, dass alle isolierten Singularitäten hebbar oder Pole sind.

Definition 15.6 (meromorphe Funktion)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine komplexwertige Funktion f heißt meromorph in U, falls eine diskrete Teilmenge A von U existiert derart, dass $f : U \backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph ist und f in jedem Punkt $z_0 \in A$ eine hebbare Singularität oder eine Polstelle besitzt. Wir setzen

$$\mathcal{M}(U) := \{f : f \text{ ist meromorph in } U\}.$$

Für ein $f \in \mathcal{M}(U)$ definieren wir $\mathcal{P}_f := \{z \in U \,:\, z \text{ ist Pol von } f\}$.

Beispiele 15.7
Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{1,2\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ *ist also meromorph in* $\mathbb{C}$, *aber* $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(1/z^2)$ *ist nicht meromorph in* $\mathbb{C}$, *siehe Beispiele 14.2.*

Bemerkungen 15.8
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Es sei $g \in \mathcal{M}(G)$ mit $g \not\equiv 0$ und $\mathcal{Z}_g := \{z \in G : g(z) = 0\}$. Dann sind $\mathcal{Z}_g$ und $\mathcal{Z}_g \cup \mathcal{P}_g$ diskret. Daher gilt $1/g \in \mathcal{M}(G)$. Insbesondere ist $1/g$ nach $G\backslash\mathcal{Z}_g$ holomorph fortsetzbar.

(b) Sind $f, g \in \mathcal{M}(G)$ und $g \not\equiv 0$, so ist $f/g \in \mathcal{M}(G)$, da $\mathcal{P}_f \cup \mathcal{Z}_g$ diskret in G ist.

Bemerkung (Identitätsprinzip für meromorphe Funktionen)
Es seien $f, g \in \mathcal{M}(G)$ mit $f \not\equiv 0$ und $g \not\equiv 0$. Weiter sei $z_* \in G$ und $(z_n) \subseteq G\backslash(\{z_*\} \cup \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g)$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_*$ derart, dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f \equiv g$.

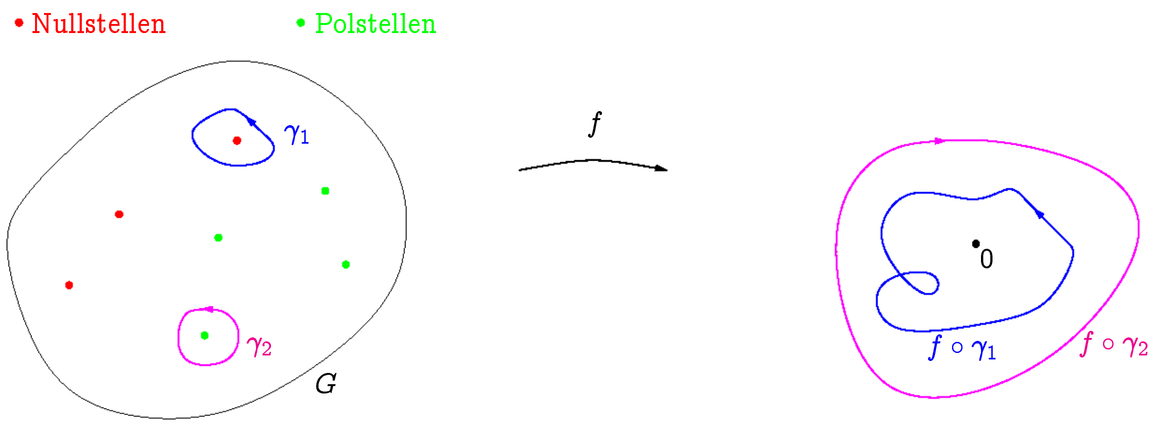
Beweis. Nach Voraussetzung sind f und g holomorph in $G\backslash(\mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g)$. Ist $z_* \notin \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$, so folgt die Behauptung mit Satz 9.5. Ist $z_* \in \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$, so existiert eine Kreisscheibe $K_r(z_*) \subseteq G$ derart, dass o.E. f/g holomorph in $K_r(z_*)\backslash\{z_*\}$ ist und f/g nach $K_r(z_*)$ holomorph fortsetzbar ist. Satz 9.5 impliziert $f/g \equiv 1$ auf $K_r(z_*)$ und daher $f \equiv g$ auf G. ■

Wendet man für eine meromorphe Funktion f den Residuensatz auf die logarithmische Ableitung f'/f an, so erhält man den folgenden wichtigen Satz.

Satz 15.9 (Argumentprinzip)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet,* $f \in \mathcal{M}(G)$, $f \not\equiv 0$, *und* Γ *ein nullhomologer Zyklus in* G *mit* $n(z,\Gamma) = 1$ *oder* $n(z,\Gamma) = 0$ *für alle* $z \in G\backslash\, tr(\Gamma)$. *Falls* f *keine Null– bzw. Polstellen auf* $tr(\Gamma)$ *besitzt, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw = n(0, f \circ \Gamma) = N - P\,,$$

wobei N *die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) von* f *in* $Int(\Gamma)$ *und* P *die Anzahl der Polstellen (mit Vielfachheiten) von* f *in* $Int(\Gamma)$ *bezeichnet.*



Beweis. Wir beachten, dass $\mathcal{Z}_f \cup \mathcal{P}_f$ diskret in G ist. Dann ist $f'/f \in H(G\backslash(\mathcal{Z}_f \cup \mathcal{P}_f))$ und mit Satz 15.4 folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw = \sum_{z\in\mathcal{Z}_f\cup\mathcal{P}_f} n(z,\Gamma)\,\operatorname{res}(z,f'/f) = N - P$$

im Hinblick auf Beispiel 15.3. Ferner gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\Gamma} \frac{1}{w}\,dw = n(0, f\circ\Gamma)\,.$$

■

Satz 15.10 (Satz von Rouché)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, Γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $n(z,\Gamma) = 1$ oder $n(z,\Gamma) = 0$ für alle $z \in G\backslash\, tr(\Gamma)$. Ferner seien $f, g \in H(G)$ mit

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad \text{für alle } z \in tr(\Gamma)\,. \tag{$*$}$$

Dann haben f und g dieselbe Anzahl von Nullstellen in $Int(\Gamma)$.

Beweis. Beachte, $(*)$ impliziert $f(z) \neq 0$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \operatorname{tr}(\Gamma)$. Betrachte die in G meromorphe Funktion $h := f/g$. Insbesondere gilt $\operatorname{tr}(\Gamma) \cap (\mathcal{Z}_h \cup \mathcal{P}_h) = \emptyset$.

Ziel: Die Anzahl N der Nullstellen von h stimmt mit der Anzahl P der Polstellen von h in $\operatorname{Int}(\Gamma)$ überein. Dann haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\operatorname{Int}(\Gamma)$.

Bedingung $(*)$ impliziert

$$|h(z) - 1| < |h(z)| + 1 \qquad \text{für } z \in \operatorname{tr}(\Gamma)\,.$$

Dies zeigt, $h(z) \notin (-\infty, 0]$ für alle $z \in \operatorname{tr}(\Gamma)$. Daher folgt mit dem Argumentprinzip

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{h\circ\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = 0,$$

denn $z \mapsto 1/z$ ist holomorph im einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. ■

Eine geschmeidigere Version des Satzes von Rouché lässt sich mithilfe des folgenden Lemmas beweisen. Es besagt, dass es zu jeder kompakten Teilmenge K einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ einen Zyklus Γ mit den in Satz 15.10 erforderlichen Eigenschaften gibt, der K „einmal umläuft".

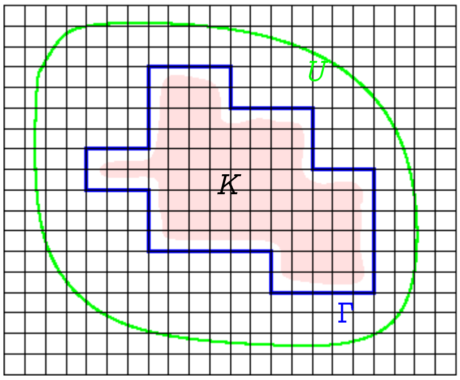
Lemma 15.11 (Lemma von Saks–Zygmund)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und K eine nicht–leere kompakte Teilmenge von U. Dann existiert ein in U nullhomologer Zyklus Γ mit $n(z,\Gamma) = 1$ oder $n(z,\Gamma) = 0$ für alle $z \in U\backslash\, tr(\Gamma)$ und $K \subseteq Int\,\Gamma \subseteq U$.

Beweis. Wähle $0 < \delta < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\backslash U)$. Für $k, m \in \mathbb{Z}$ sei

$$Q(k,m) = [k\,\delta, (k+1)\,\delta] \times [m\,\delta, (m+1)\,\delta],$$

d.h. wir überdecken $\mathbb{C}$ mit achsenparallelen kompakten ausgefüllten Quadraten der Seitenlänge δ, die paarweise disjunktes Inneres besitzen. Es sei $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ die Menge derjenigen, endlich vielen Quadrate $Q(k,m)$, für die $Q(k,m) \cap K \neq \emptyset$ gilt. Insbesondere ist

$Q_j \subseteq U$ für $j = 1, \ldots, n$. Es sei nun Γ die Summe derjenigen Kanten (=Strecken) der im mathematisch positiven Sinne durchlaufenen Quadrate aus $\mathcal{Q}$, die keine gemeinsame Kante zweier verschiedener Quadrate aus $\mathcal{Q}$ sind. Es gilt $\operatorname{tr}(\Gamma) \subseteq U \setminus K$, da anderenfalls K eine Kante aus Γ schneiden würde und folglich auch beide angrenzenden Quadrate.



Ferner gilt

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \partial Q_j \,,$$

denn die gemeinsamen Kanten der Quadrate $Q_1, \ldots, Q_n$ werden genau zweimal in gegenläufiger Richtung durchlaufen. Folglich ist Γ ein Zyklus in U. Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$. Dann gilt

$$n(z, \Gamma) = \sum_{j=1}^{n} n(z, \partial Q_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in \overset{\circ}{Q}_j \text{ für ein } j = 1, \ldots, n\,, \\ 0 & \text{falls } z \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j\,. \end{cases}$$

und

$$n(z, \Gamma) = 1 \qquad \text{falls } z \in \partial Q_j \setminus \operatorname{tr}(\Gamma) \text{ für ein } j = 1, \ldots, n$$

aus Stetigkeitsgründen.

Somit ist Γ ein nullhomologer Zyklus in U und $n(z, \Gamma) = 1$ für alle $z \in K$. ■

Satz 15.12 (Satz von Rouché, topologische Variante)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und M eine nicht–leere kompakte Teilmenge von G. Für $f, g \in H(G)$ gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad \text{für alle } z \in \partial M\,. \tag{$*$}$$

Dann haben f und g dieselbe Anzahl von Nullstellen in M.

Beweis. Wir betrachten

$$K := \{z \in M \;:\; |f(z) - g(z)| = |f(z)| + |g(z)|\}$$

und bemerken, dass weder f noch g in $M \setminus K$ Nullstellen haben. O.E. sei daher $K \neq \emptyset$. Da f und g stetig sind und aufgrund von $(*)$ ist K kompakt und in M° enthalten. Gemäß Lemma 15.11 gibt es einen in M° nullhomologen Zyklus Γ mit $n(z, \Gamma) = 1$ oder $n(z, \Gamma) = 0$ für alle $z \in M^\circ \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$ für den $K \subseteq \operatorname{Int} \Gamma \subseteq M^\circ$ und $\operatorname{tr}(\Gamma) \subseteq M^\circ \setminus K$ gilt. Satz 15.10 (angewendet auf die Komponenten von M°) impliziert, dass f und g gleichviele Nullstellen in $\operatorname{Int}(\Gamma)$ besitzen, also auch gleichviele Nullstellen in M. ■

Beispiele

(a) *Finde die Anzahl der Nullstellen des Polynoms*

$$p(z) = z^6 + 9z^4 + 2z + 4$$

die in $\mathbb{D}$ *liegen.*

Wir versuchen p *in der Form*

$$p(z) = \mathit{Groß} + \mathit{klein}$$

darzustellen, wobei die Funktion „Groß“ auf $\partial\mathbb{D}$ *die Funktion „klein“ dominiert und wir die Anzahl der Nullstellen von „Groß“ in* $\mathbb{D}$ *kennen. Gelingt dies, so folgt*

$$|p(z) - \mathit{Groß}| = |\mathit{klein}| < |\mathit{Groß}| \leq |\mathit{Groß}| + |p(z)|$$

auf $\partial\mathbb{D}$*. Nach dem Satz von Rouché haben dann* p *und „Groß“ dieselbe Anzahl von Nullstellen in* $\mathbb{D}$*.*

Wähle für „Groß“, $G(z) = 9z^4$*. Dann gilt*

$$|p(z) - G(z)| = |z^6 + 2z + 4| \leq 7 < 9 = |G(z)| \qquad \text{für} \qquad z \in \partial\mathbb{D}\,.$$

Also hat p *nach dem Satz von Rouché genau vier Nullstellen in* $\mathbb{D}$*.*

(b) *Finde alle Lösungen der Gleichung* $\exp(z) = 1 + 2z$ *in* $\mathbb{D}$*. Eine offensichtliche Lösung ist* $z = 0$*. Setze* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*,* $f(z) = \exp(z) - 1 - 2z$*. Finde zunächst die Anzahl der Nullstellen von* f *in* $\mathbb{D}$*. Hierzu wähle* $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*,* $g(z) = -2z$*. Dann gilt*

$$|f(z) - g(z)| = |\exp(z) - 1| \leq e - 1 < 2 = |g(z)| \qquad \text{für alle } z \in \partial\mathbb{D}\,.$$

Analog wie in (a) folgt, dass f *und* g *dieselbe Anzahl an Nullstellen in* $\mathbb{D}$ *besitzen. Da* g *nur eine Nullstelle in* $\mathbb{D}$ *besitzt, hat* f *genau eine Nullstelle in* $\mathbb{D}$*. Also hat* $\exp(z) = 1+2z$ *nur die Lösung* $z = 0$ *in* $\mathbb{D}$*.*

Kapitel 16

Anwendungen des Residuensatzes in der reellen Analysis

Bemerkung 16.1 (Berechnung reeller Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ mithilfe des Residuensatzes)

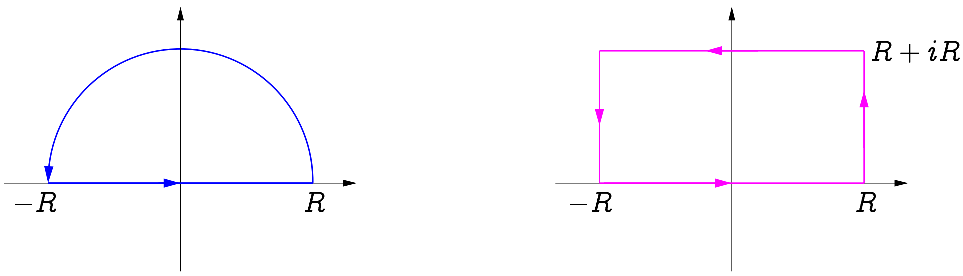
Gegeben: $A \subseteq \mathbb{C}$ diskret, $A \cap \mathbb{R} = \emptyset$, $f \in H(\mathbb{C}\backslash A)$.

Zu $R > 0$ wähle einen Hilfsweg Γ_R von R nach $-R$ derart, dass

$$\operatorname{tr}(\Gamma_R) \cap A = \emptyset$$

und für den zusammengesetzten Weg $\gamma_R := [-R, R]\Gamma_R$ gilt

$$n(z, \gamma_R) = 1 \text{ für alle } z \in \operatorname{Int}(\gamma_R).$$



Typische Integrationswege

Dann folgt mit dem Residuensatz (Satz 14.3)

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = -\int_{\Gamma_R} f(w)\,dw + 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{Int}(\gamma_R)} \operatorname{res}(z, f)\,.$$

Wähle nun eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen (R_n) mit $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ und zugehörige Hilfswege Γ_{R_n} derart, dass $\operatorname{tr}(\Gamma_{R_n}) \cap A = \emptyset$ und $n(z, \gamma_{R_n}) = 1$ für alle $z \in \operatorname{Int}(\gamma_{R_n})$ mit $\gamma_{R_n} = [-R_n, R_n]\Gamma_{R_n}$. Dann gilt

$$\int_{-R_n}^{R_n} f(x)\,dx = -\int_{\Gamma_{R_n}} f(w)\,dw + 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{Int}(\gamma_{R_n})} \operatorname{res}(z, f) \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}\,.$$

Falls

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_{R_n}} f(w)\,dw = 0 \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{z \in \operatorname{Int}(\gamma_{R_n})} \operatorname{res}(z, f) \text{ existiert},$$

so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-R_n}^{R_n} f(x)\,dx = 2\pi i \lim_{n\to\infty} \sum_{z \in \operatorname{Int}(\gamma_{R_n})} \operatorname{res}(z, f)\,.$$

Falls $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert, so gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-R_n}^{R_n} f(x)\,dx\,,$$

und daher

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \lim_{n\to\infty} \sum_{z\in \mathrm{Int}(\gamma_{R_n})} \operatorname{res}(z,f)\,.$$

Satz 16.2
Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$ diskret, $A\cap\mathbb{R} = \emptyset$ und $f \in H(\mathbb{C}\backslash A)$ derart, dass $\lim\limits_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$. Dann gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{res}(z,f)\,.$$

Beispiel 16.3 (Rationale Funktionen ohne reelle Pole)
Es seien $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und $Q:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ Polynome mit $Q(x)\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und $\operatorname{grad} P + 2 \le \operatorname{grad} Q$. Dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{res}(z, P/Q)\,.$$

Beweis. *Wegen $\operatorname{grad} P + 2 \le \operatorname{grad} Q$ existieren $R > 1$ und $M > 0$ mit*

$$|P(z)/Q(z)| \le M/|z|^2 \qquad \text{für alle } z\in\mathbb{C} \text{ mit } |z|\ge R\,.$$

Dies zeigt $|zP(z)/Q(z)| \to 0$ für $|z|\to\infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)/Q(x)\,dx$ existiert. Somit folgt die Behauptung mit Satz 16.2. ■

Satz 16.4 („Fourierintegrale")
Es sei $A\subseteq\mathbb{C}$ diskret, $A\cap\mathbb{R}=\emptyset$, $f\in H(\mathbb{C}\backslash A)$ mit $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. Für $p > 0$ gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,e^{ipx}\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{res}(z, fe^{ip\cdot})\,. \tag{16.1}$$

Für $p < 0$ gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,e^{ipx}\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}^-} \operatorname{res}(z, fe^{ip\cdot}) \tag{16.2}$$

mit $\mathbb{H}^- = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$.

Bemerkung
Eine Funktion $f\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit $\mathcal{P}_f\cap\mathbb{R}=\emptyset$, die $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ erfüllt, hat nur endlich viele Polstellen, d.h. die Summen (16.1) und (16.2) sind endlich. Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar, so heißt

$$\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\,,\quad p\mapsto \hat{f}(p) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ipx}\,dx$$

die Fouriertransformierte von f.

Beweis von Satz 16.2 und 16.4. Wir beachten, dass die Bedingung $\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0\,(*)$ bzw. $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0\,(**)$ impliziert, dass f nur endliche viele Polstellen und wesentliche Singularitäten besitzt.

Wähle $R_* > 0$ derart, dass alle Polstellen und wesentlichen Singularitäten in $K_{R_*}(0)$ liegen. Für $R \geq R_*$ sei $\Gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, und $\gamma_R := [-R,R]\Gamma_R$. Dann gilt

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(w)e^{ipw}\,dw \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{it})||e^{ip(Re^{it})}|R\,dt \leq R \max_{w\in\mathrm{tr}(\Gamma_R)} |f(w)| \int_0^\pi |e^{ip(Re^{it})}|\,dt\,.$$

1. Fall: $p = 0$
Wegen $(*)$ folgt

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(w)e^{ipw}\,dw \right| \leq R\pi \max_{w\in\mathrm{tr}(\Gamma_R)} |f(w)| \to 0 \quad \text{für } R\to\infty\,.$$

2. Fall: $p > 0$
Für $t \in [0,\pi]$ gilt

$$\left|e^{ip(Re^{it})}\right| = e^{-pR\sin t}$$

und für $t \in [0,\pi/2]$ ist

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi}\,.$$

Es folgt

$$\int_0^\pi e^{-pR\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-pR\sin t}\,dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2pRt/\pi}\,dt = \frac{\pi\left(1-e^{-pR}\right)}{pR} < \frac{\pi}{pR}$$

Mit $(**)$ folgt daher

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(w)e^{ipw}\,dw \right| \leq \max_{w\in\mathrm{tr}(\Gamma_R)} |f(w)| \cdot \frac{\pi}{p} \to 0 \quad \text{für } R\to\infty\,.$$

Da

$$\sum_{z\in\mathrm{Int}(\gamma_R)} \mathrm{res}(z, fe^{ip\cdot}) = \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{res}(z, fe^{ip\cdot}) \qquad (p\geq 0)$$

für jedes $R > R_*$ gilt, folgt die Behauptung aus Bemerkung 16.1.

3. Fall: $p < 0$
Der Beweis verläuft analog zum 2. Fall, wenn man $\Gamma_R(t) = Re^{-it}$, $t \in [0,\pi]$, wählt und

$$\int_0^\pi |e^{ip(Re^{-it})}|\,dt = \int_0^\pi e^{pR\sin t}\,dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{2pRt/\pi}\,dt$$

beachtet.

■

Beispiel 16.5
Man bestimme den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+1}\,dx \qquad \text{für } a > 0.$$

(1) Mithilfe partieller Integration lässt sich die Existenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+1}\,dx < \infty$$

zeigen.
(2) Beachte,

$$\frac{x\sin(ax)}{x^2+1} = \frac{x\ \mathrm{Im}(e^{iax})}{x^2+1} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

Definiere die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-i,+i\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}\,.$$

Es gilt $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. *Mit Satz 16.4 für* $p = a$ *folgt*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x sin(ax)}{1+x^2} = \mathrm{Im}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{xe^{iax}}{1+x^2}\right) = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{res}(z, fe^{ia\cdot})\right)\,.$$

Die Funktion f *besitzt in* $\mathbb{H}$ *nur in* $z = i$ *eine isolierte Singularität. Ferner ist* $z = i$ *eine einfache Polstelle mit*

$$\mathrm{res}(i, fe^{ia\cdot}) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z)e^{iaz} = \frac{e^{-a}}{2}\,.$$

Somit folgt

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\sin(ax)}{1+x^2} = \pi e^{-a}\,.$$

Bemerkung
In diesem Beispiel hat das Integral für $a = 0$ den Wert 0, d.h. der Wert des Integrals hängt unstetig von dem Parameter a ab. Wir verweisen u.a. auf [8] für weitere Beispiele.

Bemerkung
In Beispiel 16.5 erscheint es zunächst naheliegend, den Residuenkalkül auf die Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{-i, i\} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) = \frac{z\sin(az)}{1+z^2}$$

anzuwenden. Dies führt aber auf die Schwierigkeit, dass für $y = \mathrm{Im}\,z$ die Asymptotik $|\sin z| \sim e^{|y|}/2$ für große $|z|$ gilt, d.h. man wird keinen geschlossenen Weg finden für den der Anteil außerhalb der reellen Achse nur einen kleinen Beitrag zum Integral liefert. Man wendet den Residuenkalkül daher besser auf $z \mapsto ze^{iz}/(1+z^2)$ an und nimmt dann den Imaginärteil, d.h. man ist in der Situation von Satz 16.4.

Kapitel 17

Die Logarithmus– und Wurzelfunktion

Definition 17.1 (Logarithmusfunktion)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Für eine Funktion $f \in H(G)$ heißt eine Funktion $g \in H(G)$ (holomorphe) Logarithmusfunktion von f, wenn $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in G$ gilt. Eine Funktion $l \in H(G)$ heißt Logarithmusfunktion auf G, falls $e^{l(z)} = z$ für alle $z \in G$.

Bemerkung
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Ist $g \in H(G)$ eine Logarithmusfunktion von f, so ist auch $g(z) + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Logarithmusfunktion von f. Sind $g, g_* \in H(G)$ Logarithmusfunktionen von f, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $g(z) = g_*(z) + 2\pi i k$ für alle $z \in G$.

Satz 17.2
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$ sei nullstellenfrei. Dann sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent.

(a) *f besitzt eine holomorphe Logarithmusfunktion auf G.*

(b) *f'/f besitzt auf G eine holomorphe Stammfunktion.*

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ *für jeden geschlossenen Weg γ in G.*

Ist insbesondere $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so besitzt jede nullstellenfreie Funktion $f \in H(G)$ eine holomorphe Logarithmusfunktion auf G.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Ist $g \in H(G)$ eine holomorphe Logarithmusfunktion von f auf G, so folgt aus $f = e^g$ durch Differentiation, dass $g' = f'/f$, d.h. g ist holomorphe Stammfunktion von f'/f auf G.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Es sei $g \in H(G)$ Stammfunktion von f'/f auf G. Es gilt dann $(fe^{-g})' = f'e^{-g} - fg'e^{-g} = 0$, d.h. $f = ce^g$ für ein $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, also ist $g + d$ für jedes $d \in \mathbb{C}$ mit $e^d = c$ eine holomorphe Logarithmusfunktion von f auf G.
(b) $\Longleftrightarrow$ (c): Siehe Satz 6.3. ■

Beispiel 17.3 (Hauptzweig des Logarithmus)
Es sei $G = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ und für $z = |z|e^{i\arg(z)} \in G$ sei $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$. Da G sternförmig und $w \mapsto 1/w$ holomorph auf G ist, ist $l : G \to \mathbb{C}$

$$l(z) := \int_{[1,z]} \frac{dw}{w} = \int_{[1,|z|]} \frac{dw}{w} + \int_\gamma \frac{dw}{w}$$

mit $\gamma(t) = |z|e^{it}$ für $t \in [0, \arg(z)]$ eine holomorphe Funktion, vgl. z.B. Spezialfall von Satz 6.3 und Satz 6.6. Es gilt

$$l(z) = \ln|z| + \int_0^{\arg(z)} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \ln|z| + \int_0^{\arg(z)} i\,dt = \ln|z| + i\arg(z) \qquad \text{für alle } z \in G,$$

d.h. $e^{l(z)} = z$ für alle $z \in G$. Die Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ heißt Hauptzweig des Logarithmus und wird mit $\log(z)$ bezeichnet. Beachte, $\log z = \ln z$ für alle $z \in (0, \infty)$.

Satz 17.4
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph und nicht konstant. Existiert auf $f(G)$ eine Logarithmusfunktion $l \in H(G)$, so ist $g := l \circ f$ holomorph in G und eine Logarithmusfunktion von f.

Beweis. Es gilt $\exp(g(z)) = \exp(l(f(z))) = f(z)$ für alle $z \in G$. ■

Beispiel 17.5
Die Funktion $h : \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to \mathbb{C}$, $h(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ besitzt auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ eine Logarithmusfunktion.

Beweis. Nach Beispiel 3.10 ist $h : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}$, $h(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ holomorph und bijektiv. Daher gilt

$$h(\mathbb{C}\backslash[-1,1]) = \mathbb{C}\backslash(\{1\} \cup h([-1,1))) = \mathbb{C}\backslash((-\infty,0] \cup \{1\}) .$$

Da auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ eine Logarithmusfunktion existiert, vgl. Beispiel 17.3, existiert nach Satz 17.4 eine Logarithmusfunktion $g(z) = \log(h(z))$, $z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$, von h auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. ■

Definition 17.6 (Potenzen)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$ besitze eine Logarithmusfunktion $g : G \to \mathbb{C}$. Für $b \in \mathbb{C}$ heißt die holomorphe Funktion

$$f(z)^b := \exp(b\, g(z)) , \quad z \in G,$$

ein (holomorpher) Zweig der b–ten Potenz von f auf G.

Beispiel 17.7
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein Gebiet und $l : G \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion auf G. Dann gibt es genau n (holomorphe) Zweige:

$$z \mapsto \exp\left(\frac{1}{n}\,[l(z) + 2\pi i\, k]\right) , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 ,$$

der $1/n$–ten Potenz von z auf G.

Definition 17.8 (Wurzeln)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $n \in \mathbb{N}$, und $f \in H(G)$. Eine Funktion $\varphi \in H(G)$ heißt eine n–te (holomorphe) Wurzel von f, falls $\varphi(z)^n = f(z)$ für alle $z \in G$ gilt.

Bemerkung
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $n \in \mathbb{N}$, und $f \in H(G)$. Falls $\varphi \in H(G)$ eine n–te Wurzel von f ist, so ist auch $\varphi_j : G \to \mathbb{C}$

$$\varphi_j(z) = \varphi(z)\, \exp\left(2\pi i\, \frac{j}{n}\right) \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n-1 ,$$

eine n–te Wurzel von f. Sind φ, $\varphi_* \in H(G)$ n–te Wurzeln von f, so existiert ein $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ mit $\varphi(z) = \varphi_*(z)\exp(2\pi i j/n)$ für alle $z \in G$.

Beweis. „$\Rightarrow$" ✓
„$\Leftarrow$" Gilt $\varphi(z)^n = f(z) = \varphi_*(z)^n$ für alle $z \in G$, so ist $\varphi/\varphi_* \in H(G)$ und $(\varphi(z)/\varphi_*(z))^n = 1$ für alle $z \in G$. Daher existiert $k : G \to \{0,1,\ldots,n-1\}$ mit $\varphi(z)/\varphi_*(z) = \exp(2\pi i\, k(z)/n)$ für alle $z \in G$. Da φ/φ_* stetig auf dem Gebiet G ist, folgt $k \equiv$ konst auf G. ■

Korollar 17.9
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $n \in \mathbb{N}$, $f \in H(G)$ nullstellenfrei und $g \in H(G)$ eine Logarithmusfunktion von f. Dann ist $\varphi : G \to \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{1}{n}\, g(z)\right),$$

eine n–te (holomorphe) Wurzel von f.

Ist insbesondere $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so besitzt jede nullstellenfreie Funktion $f \in H(G)$ eine n–te (holomorphe) Wurzel.

Korollar 17.10
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in H(U)$ derart, dass $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ in z_0 besitzt. Dann existiert eine Kreisscheibe $K_\delta(z_0) \subseteq U$ und eine Funktion $h \in H(K_\delta(z_0))$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $f(z) = f(z_0) + (h(z))^m$ für alle $z \in K_\delta(z_0)$,

(b) h ist injektiv auf $K_\delta(z_0)$.

Korollar 17.10 zeigt, dass eine Kreisscheibe $K_R(f(z_0)) \subseteq f(U)$ existiert derart, dass jedes $w \in K_R(f(z_0))\backslash\{f(z_0)\}$ genau m verschiedene Urbilder in $K_\delta(z_0)$ besitzt.

Beweis. Es existiert $K_r(z_0) \subseteq U$ derart, dass

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z)\,, \qquad z \in K_r(z_0),$$

und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in K_r(z_0)$. Somit existiert nach Korollar 17.9 eine n-te Wurzel $\varphi \in H(K_r(z_0))$ von g. Definiere nun $h : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = (z - z_0)\varphi(z)\,.$$

Es gilt $h \in H(K_r(z_0))$. Da $h'(z_0) = \varphi(z_0) \neq 0$, zeigt Satz 11.2, dass eine Kreisscheibe $K_\delta(z_0) \subseteq K_r(z_0)$ existiert derart, dass h auf $K_\delta(z_0)$ injektiv ist. ■

Beispiel 17.11

(a) Die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$ besitzt eine Logarithmusfunktion und eine Quadratwurzel auf $\mathbb{D}$.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$ besitzt auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ keine Logarithmusfunktion, jedoch eine Quadratwurzel.

Beweis.

(a) (i) f besitzt auf $\mathbb{D}$ eine Logarithmusfunktion $g \in H(\mathbb{D})$, da f nullstellenfrei auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{D}$ ist, siehe Satz 17.2.

(ii) f besitzt auf $\mathbb{D}$ eine Quadratwurzel $\varphi \in H(\mathbb{D})$ nach (i) und Korollar 17.9, etwa $\varphi(z) = \exp(g(z)/2)$ für $z \in \mathbb{D}$.

(b) (i) Annahme: f besitzt eine Logarithmusfunktion auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. Dann existiert ein $g \in H(\mathbb{C}\backslash[-1,1])$ mit $f(z) = \exp(g(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$. Es folgt

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2z}{1-z^2}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1].$$

Da

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_2(0)} \frac{2z}{1-z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_2(0)} \frac{1}{1-z}\,dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_2(0)} \frac{1}{1+z}\,dz = -2,$$

besitzt g' keine holomorphe Stammfunktion auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. Daher kann f keine Logarithmusfunktion auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ besitzen (vgl. Satz 17.2).

(ii) Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \underbrace{\frac{z+1}{z-1}}_{=:h(z)} \frac{1}{(z+1)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1].$$

Nach Beispiel 17.5 existiert eine Logarithmusfunktion $g : \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to \mathbb{C}$, $g(z) = \log(h(z))$, der Funktion h auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ und daher nach Korollar 17.9 auch eine Quadratwurzel $q : \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to \mathbb{C}$, $q(z) = \exp(1/2 \log(h(z)))$ der Funktion h auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. Somit ist die Funktion $\varphi : \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) = q(z)\,\frac{1}{z+1}$$

eine Quadratwurzel der Funktion f auf $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. ∎

Kapitel 18

Die Sätze von Hurwitz und Montel

Wir untersuchen zunächst, wie sich die Nullstellenfreiheit bzw. die Injektivität von holomorphen Funktionen unter kompakter Konvergenz auf die Grenzfunktion übertragen.

Satz 18.1 (Hurwitz)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n) \subseteq H(G)$ konvergiere kompakt in G gegen $f \in H(G)$.

(a) Falls $0 \notin f_n(G)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist entweder $f \equiv 0$ oder $0 \notin f(G)$.

(b) Falls $f_n : G \to \mathbb{C}$ injektiv für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, so ist entweder f konstant oder $f : G \to \mathbb{C}$ ist injektiv.

Beweis. (a) Es gelte $f \not\equiv 0$ auf G, aber $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in G$. Wegen der Isoliertheit der Nullstellen von f (vgl. Satz 9.3) existiert eine Kreisscheibe $K_\varepsilon(z_0)$ mit $\overline{K_\varepsilon(z_0)} \subseteq G$ derart, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{K_\varepsilon(z_0)} \backslash \{z_0\}$. Wegen der Stetigkeit von f auf G und der Kompaktheit von $\partial K_\varepsilon(z_0)$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(z)| \geq \delta$ für alle $z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$. Da (f_n) kompakt in G konvergiert, konvergiert (f_n) gleichmäßig auf der kompakten Menge $\partial K_\varepsilon(z_0)$ gegen f. Zum gewählten δ existiert daher ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|f_n(z) - f(z)| < \delta \leq |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial K_\varepsilon(z_0)\,.$$

Der Satz von Rouché zeigt f_n und f haben in $K_\varepsilon(z_0)$ gleichviele Nullstellen, also mindestens eine. Widerspruch!
(b) Es sei $f \not\equiv$ konstant auf G. Um die Injektivität von f nachzuweisen, sei $w \in G$ fixiert. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $g_n : G\backslash\{w\} \to \mathbb{C}$, $g_n(z) = f_n(z) - f_n(w)$ und $g : G\backslash\{w\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z) - f(w)$. Die Funktionen g_n sind nullstellenfrei und (g_n) konvergiert kompakt in $G\backslash\{w\}$ gegen g. Da $g \not\equiv 0$ auf $G\backslash\{w\}$, ist g auf $G\backslash\{w\}$ nullstellenfrei nach (a). Folglich gilt $f(z) \neq f(w)$ für alle $z \in G\backslash\{w\}$. Da $w \in G$ beliebig war, ergibt sich die Injektivität von f auf G. ■

Beispiel 18.2
Die Funktionen $f_n : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = z/n$ sind holomorph, injektiv und nullstellenfrei und $f_n \to 0$ kompakt in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ für $n \to \infty$.

Bemerkung
Im Reellen gelten die entsprechenden Aussagen des Satzes 18.1 i.Allg. nicht: Betrachte z.B. die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} x/n & \text{für } x \in (0,1] \\ (x-1)^2 + x/n & \text{für } x \in (1,\infty)\,. \end{cases}$$

Der Satz von Bolzano–Weierstraß besagt, dass für jede *beschränkte* Menge $F \subseteq \mathbb{R}$ jede Folge in F eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir suchen ein Analogon dieser Aussage für Mengen (oder Familien) $\mathcal{F}$ in $H(U)$ und setzen $C(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ ist stetig}\}$.

Definition 18.3 (Normal, lokal beschränkt)
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $\mathcal{F} \subseteq C(U)$ eine Familie.

(a) *$\mathcal{F}$ heißt normal (oder relativ kompakt), falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die in U kompakt (gegen ein $f : U \to \mathbb{C}$) konvergiert.*

(b) *$\mathcal{F}$ heißt lokal beschränkt, falls*

$$\forall_{K \subseteq U \text{kompakt}} \quad \exists_{M:=M(K)\in\mathbb{R}^+} \quad \forall_{f\in\mathcal{F}} \quad ||f||_K \le M\,.$$

Beispiele 18.4
(a) $\mathcal{F} = \{f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \,|\, f_n(z) = z^n\,,\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq H(\mathbb{D})$ *ist normal und lokal beschränkt.*

(b) $\mathcal{F} = \{f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \,|\, f_n(z) = nz\,,\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq H(\mathbb{D})$ *ist weder normal noch lokal beschränkt.*

Es ist eine der bemerkenswerten Eigenschaften holomorpher Funktionen, dass für Familien in $H(U)$ das folgende Analogon zum Satz von Bolzano–Weierstraß gilt. Der wesentliche Kern von Satz 18.5 liegt in der Richtung "$\Longleftarrow$".

Satz 18.5 (Montel 1907, [26])
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $\mathcal{F}$ eine Familie in $H(U)$. Dann gilt

$$\mathcal{F} \text{ normal} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{F} \text{ lokal beschränkt.}$$

Wir beginnen mit dem (einfachen) Beweis von "$\Longrightarrow$" (allgemeiner für Familien in $C(U)$).

Beweis von Satz 18.5. „$\Longrightarrow$" Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ nicht lokal beschränkt ist. Dann gibt es eine kompakte Menge K in U, Folgen $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ und $(z_n) \subseteq K$ mit $|f_n(z_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$. Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge (z_{n_k}) von (z_n) mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in K$, siehe Satz A.38. Da $\mathcal{F}$ normal ist, existiert eine Teilfolge $(f_{n_{k_j}})$ von (f_{n_k}), die kompakt gegen $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Insbesondere ist $f \in H(U)$, siehe Satz 8.5. Zu $\varepsilon = 1$ existiert daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||f_{n_{k_j}} - f||_K < 1$ für alle $j \ge N$, d.h.

$$\infty \leftarrow |f_{n_{k_j}}(z_{n_{k_j}})| \le |f(z_{n_{k_j}}) - f_{n_{k_j}}(z_{n_{k_j}})| + |f(z_{n_{k_j}})| < 1 + |f(z_{n_{k_j}})| \to 1 + |f(z_0)|$$

für $j \to \infty$. Widerspruch! ■

Bemerkung
Im Reellen folgt aus der lokalen Beschränktheit einer Familie stetiger Funktion i.Allg. nicht die Normalität. Betrachte z.B. $\mathcal{F} = \{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f_n(x) = \sin(nx)\,, n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ lokal beschränkt, aber keine Folge in $\mathcal{F}$ besitzt eine Teilfolge, die auf jeder kompakten Menge in $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Annahme: Es sei (f_{n_j}) eine Folge in $\mathcal{F}$, die auf jeder kompakten Menge K in $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert (f_{n_j}) gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen eine stetige Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon = 1/2$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|f(z) - f_{n_j}(z)| < \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } z \in [-\pi, \pi] \text{ und alle } j > N.$$

Es gilt $f(0) = 0$ und

$$0 \leftarrow \left| f\left(\frac{\pi}{2n_j}\right) \right| \overset{j>N}{\ge} \left| f_{n_j}\left(\frac{\pi}{2n_j}\right) \right| - \left| f\left(\frac{\pi}{2n_j}\right) - f_{n_j}\left(\frac{\pi}{2n_j}\right) \right| \ge 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{für } j \to \infty\,.$$

Satz 18.6
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, $A \subseteq U$ eine dichte Teilmenge und $(f_n) \subseteq H(U)$ eine lokal beschränkte Folge. Falls für jedes $z \in A$ die Folge $(f_n(z))$ in $\mathbb{C}$ konvergiert, so konvergiert (f_n) in U kompakt (gegen eine holomorphe Grenzfunktion).

Beweis. Es sei L eine kompakte Teilmenge von U. Wir zeigen (f_n) ist eine gleichmäßige Cauchy–Folge auf L.

Es sei $0 < 2r < \operatorname{dist}(L, \partial U)$. Nach Korollar 7.11 ist

$$K := \bigcup_{z \in L} \overline{K_r(z)}$$

eine kompakte Teilmenge von U und $r < \operatorname{dist}(K, \partial U)$. Weiter ist

$$K_* := \bigcup_{\xi \in K} \overline{K_r(\xi)}$$

eine kompakte Teilmenge von U.
(i) Korollar 7.11 zeigt

$$||f_n'||_K \le \frac{||f_n||_{K_*}}{r} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Da $\mathcal{F}$ nach Voraussetzung lokal beschränkt ist, existiert ein $M = M(K_*)$ derart, dass $||f_n||_{K_*} \le Mr$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$||f_n'||_K \le M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Wir wählen $\delta := \min\{\varepsilon/(3M), r\}$. Wähle $z \in L$ beliebig. Dann gilt für alle $a \in U$ mit $|z - a| < \delta$ (also $a \in K$) und für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(z) - f_n(a)| = \left| \int_{[a,z]} f_n'(w)\, dw \right| \overset{\text{(i)}}{\le} M|z-a| < M\delta < \frac{\varepsilon}{3}\,. \qquad (*)$$

(iii) Da L kompakt ist und A dicht in U liegt, gibt es eine endliche Teilmenge F von A mit

$$L \subseteq \bigcup_{a \in F} K_\delta(a)\,.$$

(iv) Da F endlich ist und $(f_n(a))$ für jedes $a \in F$ konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \ge N$ und $a \in F$ gilt

$$|f_n(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \qquad (**)$$

(v) Es sei $z \in L$ beliebig. Dann existiert ein $a \in F$ mit $z \in K_\delta(a)$ nach (iii). Daher gilt

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

für alle $n, m \ge N$ nach (ii) und (iv). Somit ist (f_n) auf L eine gleichmäßige Cauchy–Folge.

■

Bemerkung 18.7 (Gleichgradige Stetigkeit)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. In den Schritten (i) und (ii) des Beweises von Satz 18.6 haben wir gezeigt, dass eine lokal beschränkte Folge *holomorpher* Funktionen $(f_n) \subseteq C(U)$ in U *lokal gleichgradig stetig* ist, wobei man eine Familie $\mathcal{F} \subseteq C(U)$ lokal gleichgradig stetig nennt, falls für jede kompakte Menge $K \subseteq U$ gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{z\in K, a\in U:|z-a|<\delta}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\quad |f_n(z) - f_n(a)| < \varepsilon\,.$$

In den Schritten (iii) bis (v) des Beweises von Satz 18.6 wurde gezeigt, dass jede Folge $(f_n) \subseteq C(U)$ lokal gleichgradig stetiger Funktionen, die auf einer dichten Teilmenge von U konvergiert, bereits kompakt in U konvergiert.

Beweis von Satz 18.5. „$\Longleftarrow$" Es sei $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$. **Ziel:** Finde eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) die in U kompakt konvergiert. **Idee:** Wende Satz 18.6 an.

Es sei $A = \{z \in U : z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{Q}\}$. Dann ist $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ abzählbar und dicht in U. Wir konstruieren eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) derart, dass $(f_{n_k}(a_j))_k$ für jedes $a_j \in A$ konvergiert.

(i) Betrachte die Folge $(f_n(a_1))_n$:
Da $(f_n(a_1))_n$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(f_{1,n})$ von (f_n) derart, dass der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} f_{1,n}(a_1)$ in $\mathbb{C}$ existiert.

(ii) Betrachte die Folge $(f_{1,n}(a_2))_n$:
Da $(f_{1,n}(a_2))_n$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(f_{2,n})$ von $(f_{1,n})$ derart, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2,n}(a_2)$ in $\mathbb{C}$ existiert.

(iii) Betrachte die Folge $(f_{2,n}(a_3))_n$:
Da $(f_{2,n}(a_3))_n$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(f_{3,n})$ von $(f_{2,n})$ derart, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_{3,n}(a_3)$ in $\mathbb{C}$ existiert.

usw...

$$\begin{array}{lccccc|l}
 & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots & \lim\limits_{n\to\infty} f_{1,n}(a_1) \text{ ex.} \\
\hookrightarrow & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots & \lim\limits_{n\to\infty} f_{2,n}(a_2) \text{ und } \lim\limits_{n\to\infty} f_{2,n}(a_1) \text{ ex.} \\
\hookrightarrow & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots & \lim\limits_{n\to\infty} f_{3,n}(a_3),\ \lim\limits_{n\to\infty} f_{3,n}(a_2) \text{ und } \lim\limits_{n\to\infty} f_{3,n}(a_1) \text{ ex.} \\
\hookrightarrow & \cdots & & & & & \cdots
\end{array}$$

Betrachte die Diagonalfolge $(f_{n,n})_n$:

Die Folge $(f_{n,n})_n$ konvergiert in jedem Punkt a_j, denn die Folge $(f_{j,n}(a_j))_n$ konvergiert und die Folgenelemente $f_{l,l}$ sind für alle $l \geq j$ in der Folge $(f_{j,n})_n$ enthalten, also ist $(f_{l,l})_{l\geq j}$ eine Teilfolge von $(f_{j,n})_n$. Mit Satz 18.6 folgt dann die Behauptung. ■

Bemerkung 18.8 (Der Satz von Arzelà–Ascoli)
Wir haben im Beweis von Satz 18.5 „$\Longleftarrow$" gezeigt, dass jede *punktweise* beschränkte Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilfolge enthält, die auf einer dichten Teilmenge von D punktweise konvergiert. Im Hinblick auf Bemerkung 18.7 haben wir damit den folgenden Satz von Arzelà–Ascoli "mit" bewiesen: *Es $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n) \subseteq C(U)$ eine*

Folge punktweise beschränkter lokal gleichgradig stetiger Funktionen. Dann konvergiert eine Teilfolge von (f_n) kompakt in U gegen eine (dann stetige) Grenzfunktion $f : U \to \mathbb{C}$. Die "sperrige" Bedingung "punktweise beschränkt und lokal gleichgradig stetig" lässt sich im Falle *holomorpher* Funktionen durch die einfache Bedingung "lokal beschränkt" ersetzen. Wunderwelten!

Satz 18.9 (Vitali)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_* \in G$, $(z_j) \subseteq G\backslash\{z_*\}$ eine Folge mit $\lim_{j\to\infty} z_j = z_*$ und $(f_n) \subseteq H(G)$ eine lokal beschränkte Folge. Falls für jedes z_j die Folge $(f_n(z_j))_n$ konvergiert, so konvergiert (f_n) in G kompakt (gegen eine holomorphe Grenzfunktion).

Beweis. Wir zeigen (f_n) konvergiert punktweise in G. Dann folgt die Behauptung aus Satz 18.6. Annahme: es existiert ein $z_0 \in G$ derart, dass $(f_n(z_0))_n$ nicht konvergiert. Da $(f_n(z_0))_n$ beschränkt ist, hat die Folge $(f_n(z_0))_n$ mindestens zwei Häufungspunkte $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ mit $w_1 \neq w_2$. Es existieren daher Teilfolgen (f_{n_k}) und (f_{m_l}) mit

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = w_1 \quad \text{und} \quad \lim_{l\to\infty} f_{m_l}(z_0) = w_2 \,.$$

Der Satz von Montel (Satz 18.5) impliziert nun, dass Teilfolgen $(\tilde{f}_{n_k})$ von (f_{n_k}) und $(\hat{f}_{m_l})$ von (f_{m_l}) existieren, die kompakt gleichmäßig in G gegen holomorphe Grenzfunktionen $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ und $\hat{f} : G \to \mathbb{C}$ konvergieren. Da $(\tilde{f}_{n_k})$ und $(\hat{f}_{m_l})$ Teilfolgen der Folge (f_n) sind, gilt

$$\hat{f}(z_j) = \lim_{l\to\infty} \hat{f}_{m_l}(z_j) = \lim_{k\to\infty} \tilde{f}_{n_k}(z_j) = \tilde{f}(z_j) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \,.$$

Mit dem Identitätsprinzip (Satz 9.5) folgt nun $\hat{f} \equiv \tilde{f}$ auf G. Das ist ein Widerspruch, denn

$$\hat{f}(z_0) = \lim_{l\to\infty} \hat{f}_{m_l}(z_0) = w_2 \neq w_1 = \lim_{k\to\infty} \tilde{f}_{n_k}(z_0) = \tilde{f}(z_0) \,.$$

■

Kapitel 19

Der Riemannsche Abbildungssatz

Definition 19.1 (Konforme Äquivalenz)
Zwei Gebiete G und Ω in $\mathbb{C}$ heißen konform äquivalent (in Zeichen $G \sim \Omega$), falls es eine konforme Abbildung $f : G \to \Omega$ gibt.

Beispielsweise zeigt die Cayley–Abbildung (Beispiel 3.11 (a)), dass die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ und die obere Halbebene $\mathbb{H}$ konform äquivalent sind.

Bemerkung 19.2
Es seien G und Ω Gebiete in $\mathbb{C}$ und f eine konforme Abbildung von G auf Ω. Dann gilt:

$$G \text{ einfach zusammenhängend} \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega \text{ einfach zusammenhängend.}$$

Kurz: „Einfacher Zusammenhang ist eine konforme Invariante".

Beweis. Es sei G einfach zusammenhängend und Γ ein Zyklus in Ω. Dann ist $\gamma := f^{-1} \circ \Gamma$ ein nullhomologer Zyklus in G. Wähle $w \in \mathbb{C} \backslash \Omega$. Dann gilt

$$n(w, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z-w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)-w}}_{\text{holo. in } G}\, dz = 0$$

wegen Satz 13.4. ■

In diesem Abschnitt beweisen wir den „Fundamentalsatz für konforme Abbildungen":

Satz 19.3 (Riemannscher Abbildungssatz 1851, [34])
Es sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in G$. Dann gibt es genau eine konforme Abbildung $F : G \to \mathbb{D}$ mit $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) > 0$.

Bemerkung
Nach dem Satz von Liouville ist jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ konstant, d.h. es gibt keine konforme Abbildung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$. Daher muss der Fall $G = \mathbb{C}$ in Satz 19.3 ausgenommen werden. Satz 19.3 zeigt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ konform äquivalent zu $\mathbb{D}$ ist.

Beweis von Satz 19.3. Eindeutigkeit: Es seien F und g konforme Abbildungen von G auf $\mathbb{D}$ mit $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) > 0$ und $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) > 0$. Dann ist $f = g \circ F^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = g'(z_0)/F'(z_0) > 0$. Korollar 12.2 impliziert $f(z) = z$, also $F \equiv g$. ■

Der Beweis der Eindeutigkeit der konformen Abbildung in Satz 19.3 zeigt uns auch die Beweisidee für die Existenzaussage in Satz 19.3.

Ist $z_0 \in G$ fixiert und gibt es eine konforme Abbildung F von G auf $\mathbb{D}$ mit $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) > 0$, so zeichnet sich F durch folgende Extremaleigenschaft aus. Ist $g : G \to \mathbb{D}$ eine injektive holomorphe Funktion mit $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) > 0$, so ist $f_g := g \circ F^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

holomorph mit $f_g(0) = 0$ und $f_g'(0) = g'(z_0)/F'(z_0)$. Das Lemma von Schwarz (Satz 12.1) impliziert, dass

$$g'(z_0)/F'(z_0) = f_g'(0) = |f_g'(0)| \leq 1\,, \quad \text{d.h. } F'(z_0) \geq g'(z_0)\,.$$

Dies bedeutet, dass die gesuchte konforme Abbildung unter allen holomorphen und injektiven Funktionen von G auf $\mathbb{D}$, diejenige ist, die in z_0 die betragsmäßig größte Ableitung besitzt. Für den Nachweis der Existenz beweisen wir vorbereitend:

Satz 19.4
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $\mathcal{F} := \{g \in H(G) \text{ injektiv} \,:\, g(G) \subseteq \mathbb{D},\ g(z_0) = 0\}$. Falls $\mathcal{F} \neq \emptyset$, dann existiert ein $h \in \mathcal{F}$ mit

$$|h'(z_0)| = \sup\{|g'(z_0)| \,:\, g \in \mathcal{F}\} > 0\,.$$

Beweis. Es sei $\eta := \sup\{|g'(z_0)| \,:\, g \in \mathcal{F}\}$. Da $\mathcal{F} \neq \emptyset$, folgt $\eta > 0$. Es existiert eine Folge (g_n) in $\mathcal{F}$ mit $|g_n'(z_0)| \to \eta$ für $n \to \infty$. Da $\mathcal{F}$ eine beschränkte Familie ist, besitzt (g_n) nach dem Satz von Montel (Satz 18.5) eine Teilfolge (g_{n_j}), die in G kompakt gegen eine holomorphe Grenzfunktion $h : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Es gilt:

* $h(z_0) = \lim\limits_{j\to\infty} g_{n_j}(z_0) = 0$.
* $|h'(z_0)| = \lim\limits_{j\to\infty} |g_{n_j}'(z_0)| = \eta > 0$, vgl. Satz von Weierstraß (Satz 8.5).
* h ist injektiv auf G, da $\eta > 0$ ist, aufgrund des Satzes von Hurwitz (siehe Satz18.1).
* $h(G) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$; Satz 10.7 impliziert $h(G) \subseteq \mathbb{D}$.

Dies zeigt $h \in \mathcal{F}$. ■

Beweis von Satz 19.3. Existenz:

Schritt 1: $\mathcal{F} := \{g \in H(G) \text{ injektiv} \,:\, g(G) \subseteq \mathbb{D}, g(z_0) = 0\} \neq \emptyset$.
Da $G \neq \mathbb{C}$ existiert ein $w_0 \in \mathbb{C}\backslash G$. Dann ist $\psi : G \to \mathbb{C}$, $\psi(z) = z - w_0$ holomorph und nullstellenfrei auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G. Nach Korollar 17.9 existiert ein $\varphi \in H(G)$ mit $\varphi^2 = \psi$.

* φ ist injektiv auf G, denn für z_1, $z_2 \in G$ mit $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ gilt $\varphi(z_1)^2 = \varphi(z_2)^2$ und daher folgt $z_1 = z_2$.
* $\varphi(z_1) \neq -\varphi(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in G$ mit $z_1 \neq z_2$.

Setze nun $G' := \varphi(G)$ und wähle $z_* \in G'$. Wegen Satz 10.7 ist G' offen und es existiert eine Kreisscheibe $K_r(z_*) \subseteq G'$ mit $0 < r < |z_*|$. Beachte,

$$K_r(-z_*) = -K_r(z_*) \subseteq \mathbb{C}\backslash G'\,. \tag{19.1}$$

Die Funktion

$$\Phi : G \to \mathbb{C}, \quad \Phi(z) = \frac{r}{\varphi(z) + z_*}\,,$$

ist holomorph, injektiv und wegen (19.1) gilt $\Phi(G) \subseteq \mathbb{D}$. Setzt man $a = \Phi(z_0)$ und $T_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $T_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, so ist $g : G \to \mathbb{D}$, $g(z) = T_a \circ \Phi(z)$, holomorph und injektiv mit $g(z_0) = 0$. Also gilt $g \in \mathcal{F}$.

Schritt 2: Nach Satz 19.4 gibt es ein $h \in \mathcal{F}$ mit $|h'(z_0)| = \sup\{\,|g'(z_0)| : g \in \mathcal{F}\}$. Wir zeigen, $h : G \to \mathbb{D}$ ist surjektiv.

Annahme: Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{D}\backslash h(G)$. Es sei $T_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $T_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha} z}$. Dann ist $T_\alpha \circ h : G \to \mathbb{D}$ holomorph, injektiv und nullstellenfrei. Korollar 17.9 impliziert, dass es eine Funktion $s \in H(G)$ gibt mit $s^2 = T_\alpha \circ h$. Es sei $\beta := s(z_0)$ und $T_\beta : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $T_\beta(z) = \frac{\beta - z}{1-\overline{\beta} z}$. Dann ist $\Lambda : G \to \mathbb{D}$, $\Lambda(z) = T_\beta \circ s(z)$ holomorph und injektiv mit $\Lambda(z_0) = 0$. Dies zeigt $\Lambda \in \mathcal{F}$. Andererseits gilt mit $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = z^2$,

$$h(z) = T_\alpha \circ p \circ T_\beta \circ \Lambda(z)\,, \quad z \in G\,.$$

Setzt man $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f := T_\alpha \circ p \circ T_\beta$, so ist f holomorph und surjektiv mit $f(0) = 0$. Da jedoch f nicht injektiv ist, folgt $|f'(0)| < 1$ wegen des Lemmas von Schwarz (Satz 12.1). Da $|h'(z_0)| = |f'(0)|\,|\Lambda'(z_0)|$ gilt, folgt $|\Lambda'(z_0)| > |h'(z_0)|$ im Widerspruch zu $|h'(z_0)| = \sup\{\,|\psi'(z_0)| : \psi \in \mathcal{F}\}$. ■

Der Riemannsche Abbildungssatz garantiert für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ die *Existenz* (und im wesentlichen auch Eindeutigkeit) einer konformen Abbildung von G auf $\mathbb{D}$. Die explizite Bestimmung der konformen Abbildung in geschlossener Form ist allerdings ein i. Allg. schwieriges Problem, so dass in der Praxis oft eines der zahlreichen numerischen Verfahren für die Berechnung konformer Abbildungen herangezogen werden muss.

Beispiele 19.5 (Koebefunktion, Joukowski Abbildung)

(a) *Die Koebefunktion* $k : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$

$$k(z) := \frac{z}{(1+z)^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

bildet $\mathbb{D}$ *konform auf die geschlitzte Ebene* $\mathbb{C}\backslash[1/4, +\infty)$ *ab. Sie spielt eine zentrale Rolle in der geometrischen Funktionentheorie (u.a. im Hinblick auf die sog. Bieberbachsche Vermutung).*

(b) *Die Joukowski Abbildung* $\Psi : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$

$$\Psi(z) := \frac{1}{2k(z)} - 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

bildet daher $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ *konform auf* $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ *ab. Die Joukowski Abbildung und Variationen hiervon finden Verwendung im Design von Tragflügeln. Die Umkehrabbildung der Joukowski Abbildung* $\varphi : \mathbb{C} \setminus [-1,1] \to \mathbb{D}\backslash\{0\}$

$$\varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1} \quad \text{mit } \sqrt{z^2-1} = (z+1)\exp\left(-\frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right)$$

ist eine konforme Abbildung, siehe Satz 11.4. Sie spielt eine wichtige Rolle für die Theorie orthogonaler Polynome auf dem Intervall $[-1,1]$.

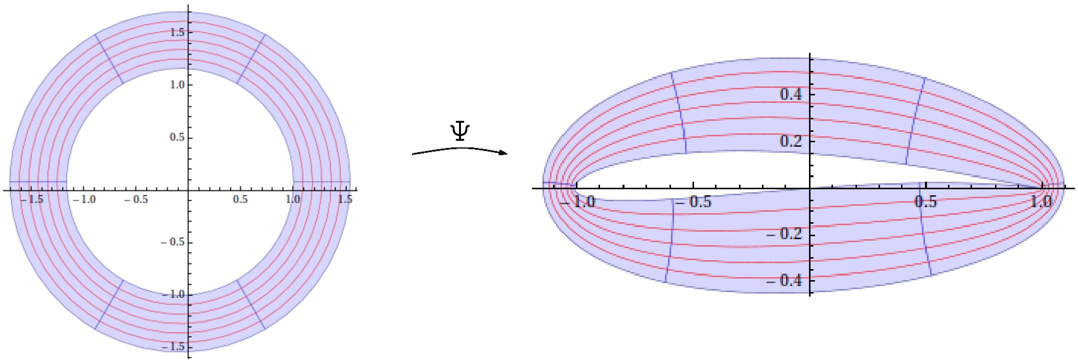


Illustration der Joukowski Abbildung

Die Umkehrfunktion der Koebefunktion $k^{-1} : \mathbb{C}\backslash[-1/4, +\infty) \to \mathbb{D}$ *als auch die Umkehrfunktion der Joukowski Abbildung* $\varphi : \mathbb{C}\backslash[-1, 1] \to \mathbb{D}\backslash\{0\}$ *besitzen keine stetige Fortsetzung auf* $\overline{\mathbb{C}\backslash[1/4, +\infty)}$ *bzw. auf* $\overline{\mathbb{C}\backslash[-1, 1]}$.
Dies zeigt, dass eine konforme Abbildung $F : G \to \Omega$ *i.Allg. keine stetige Fortsetzung auf* $\overline{G}$ *haben muss.*

Bemerkung (Randverhalten konformer Abbildungen)
Es seien G und Ω zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ und $F : G \to \Omega$ eine konforme Abbildung.

(i) Ist $(z_n) \subseteq G$ eine Randfolge in G, d.h. (z_n) verlässt jede kompakte Menge in G, so ist die Bildfolge $(F(z_n))$ eine Randfolge in Ω, d.h. $F(z_n)$ verlässt jede kompakte Menge in Ω.

(ii) Insbesondere gilt: Ist G beschränkt und F auf $\overline{G}$ stetig, so gilt $F(\partial G) = \partial\Omega$.

Beweis. (i) Es sei $(z_n) \subseteq G$ eine Randfolge für die eine Teilfolge $(F(z_{n_k}))$ von $(F(z_n))$ in einer kompakten Teilmenge K von Ω enthalten ist. Dann ist (z_{n_k}) in der Menge $F^{-1}(K)$ enthalten. Die Menge $F^{-1}(K)$ ist aufgrund der Stetigkeit von F^{-1} eine kompakte Teilmenge von G, d.h. (z_n) ist keine Randfolge in G. Widerspruch!

(ii) Es sei $\xi \in \partial G$ und $(z_n) \subseteq G$ mit $z_n \to \xi$ für $n \to \infty$. Da F stetig auf $\overline{G}$ ist, folgt $F(z_n) \to F(\xi)$ für $n \to \infty$. Da (z_n) eine Randfolge von G ist, ist auch $(F(z_n))$ eine Randfolge von Ω und $F(\xi) \in \partial\Omega$. Also gilt $F(\partial G) \subseteq \partial\Omega$.

Es sei nun $\eta \in \partial\Omega$ und $(w_n) \subseteq \Omega$ mit $w_n \to \eta$ für $n \to \infty$. Insbesondere existiert eine Folge $(z_n) \subseteq G$ mit $F(z_n) = w_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Da (z_n) beschränkt ist, existiert eine Teilfoge (z_{n_k}) von (z_n) mit $z_{n_k} \to \tau$ für $k \to \infty$ und $\tau \in G \cup \partial G$. Die Stetigkeit von F auf $\overline{G}$ impliziert $\eta = F(\tau)$. Das Offenheitsprinzip (Satz 10.7) zeigt $\tau \in \partial G$. Somit gilt $\partial\Omega \subseteq F(\partial G)$. ∎

Appendix A

Grundlagen aus Analysis 1 & 2

Komplexe Zahlen

Es sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Wir definieren zwei Verknüpfungen $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d) \\ (a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - bd, bc + ad)\,. \end{aligned}$$

Dann bildet $\mathbb{R}^2$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einen Körper mit der „Null" $0 := (0,0) \in \mathbb{R}^2$ und der „Eins" $1 := (1,0) \in \mathbb{R}^2$.

Insbesondere gilt $(0,1)^2 + 1 = (0,1) \cdot (0,1) + 1 = (-1,0) + (1,0) = (0,0) = 0$. Das Element $i := (0,1) \in \mathbb{R}^2$ hat also die Eigenschaft $i^2 = -1$. Wir nennen i die imaginäre Einheit.

Es gilt $(a,0) + i\,(b,0) = (a,0) + (0,1)(b,0) = (a,b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Identifiziert man also $(a,0) \in \mathbb{R}^2$ jeweils mit $a \in \mathbb{R}$, so lassen sich die Elemente $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ in der „komplexen" Form $a + ib$ schreiben.

Definition A.1
Es sei $\mathbb{C} := \{a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$. Wir nennen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit der Addition

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(bc + ad)$$

den Körper der komplexen Zahlen.

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt x der Realteil von z und wird mit $\operatorname{Re} z$ abgekürzt; die Zahl y heißt Imaginärteil von z und wird mit $\operatorname{Im} z$ abgekürzt.

Die komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt rein imaginär, wenn $\operatorname{Re} z = 0$. Sie heißt reell, wenn $\operatorname{Im} z = 0$. Wir schreiben dann $z \in \mathbb{R}$.

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $\overline{z} := x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag der komplexen Zahl.

Bemerkungen A.2

(a) Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ lässt sich mit dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren. Die Addition der beiden komplexen Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ entspricht dann gerade der Vektoraddition von $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ und $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Identifiziert man $\mathbb{R}$ mit $\{x + i0 \,:\, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$, so enthält der Körper der komplexen Zahlen den Körper der reellen Zahlen. Man nennt $\{x + i0 \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ deshalb auch die reelle Achse. Die Menge $\{iy \,:\, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ heißt imaginäre Achse.

(c) Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entspricht der euklidischen Länge des Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Bemerkung A.3
Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden.

Lemma A.4
Es gelten die Rechenregeln:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *und* $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(c) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ *und* $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(d) Für $z \in \mathbb{C}$ *gilt:* $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

(e) $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ *für alle* $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(f) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *gilt* $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$.

(g) $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(h) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ *und* $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Für eine komplexe Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnet

$$K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius r.

Folgen und Reihen

Definition A.5

(a) Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ *heißt konvergent, falls ein* $a \in \mathbb{C}$ *existiert derart, dass*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \ge N} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ *heißt Cauchy–Folge, falls*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n,m \ge N} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Satz A.6
Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ *ist vollständig, d.h. jede Cauchy–Folge in* $\mathbb{C}$ *konvergiert in* $\mathbb{C}$.

Korollar A.7
Es sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ *eine Folge. Dann sind folgende Aussagen paarweise äquivalent.*

(a) (a_n) *konvergiert in* $\mathbb{C}$.

(b) (a_n) *ist eine Cauchy–Folge.*

(c) *Die reellen Folgen* $(\mathrm{Re}(a_n))$ *und* $(\mathrm{Im}(a_n))$ *konvergieren in* $\mathbb{R}$*.*

Definition A.8
Es sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ *eine Folge. Ein Punkt* $a_* \in \mathbb{C}$ *heißt Häufungspunkt der Folge* (a_n)*, falls eine Teilfolge* (a_{n_k}) *der Folge* (a_n) *existiert, die gegen* a_* *konvergiert.*

Definition A.9
Es sei $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$*. Die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *heißt konvergent, falls die Folge* (s_n) *der Partialsummen* $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *konvergiert.*

Bemerkung A.10
Es sei $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Falls $a_k \neq 0$ für fast alle k und $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

(b) Falls $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Stetige Funktionen

Definition A.11
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ *und* $f : D \to \mathbb{C}$*. Die Funktion* f *heißt stetig in* $z_0 \in D$*, falls eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt.*

(a) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{z\in K_\delta(z_0)\cap D} \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,.$

(b) *Für jede Folge* $(z_n) \subseteq D$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ *folgt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)\,.$

Bemerkung A.12
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$. f ist genau dann stetig in $z_0 \in D$, falls $\mathrm{Re}(f) : D \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(f) : D \to \mathbb{R}$ stetig in z_0 sind.

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Definition A.13
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ *und* $f_n : D \to \mathbb{C}$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

(a) *Die Funktionenfolge* (f_n) *heißt punktweise konvergent in* D*, falls ein* $f : D \to \mathbb{C}$ *existiert derart, dass für jedes* $z \in D$ *die Folge* $(f_n(z))$ *gegen* $f(z)$ *konvergiert, d.h.*

$$\forall_{z\in D} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geq N} \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt $f : D \to \mathbb{C}$ *Grenzfunktion der Funktionenfolge* (f_n)*.*

(b) (f_n) *heißt gleichmäßig konvergent in* D*, falls ein* $f : D \to \mathbb{C}$ *existiert derart, dass*

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geq N} \quad \forall_{z\in D} \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

(c) (f_n) *heißt gleichmäßige Cauchy–Folge in* D*, falls*

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n,m\geq N} \quad \forall_{z\in D} \quad |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Bemerkung A.14
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(a) (f_n) konvergiert gleichmäßig in D.

(b) (f_n) ist eine gleichmäßige Cauchy–Folge in D.

Definition A.15
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ heißt punktweise konvergent in D, falls für jedes $z \in D$ die Folge (s_k) der Partialsummen $s_k(z) = \sum_{n=1}^{k} f_n(z)$ punktweise konvergiert.

(b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ heißt gleichmäßig konvergent in D, falls die Folge (s_k) der Partialsummen $s_k(z) = \sum_{n=1}^{k} f_n(z)$ gleichmäßig konvergiert.

Satz A.16
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ sei stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(a) Konvergiert (f_n) gleichmäßig in D gegen $f : D \to \mathbb{C}$, so ist f stetig in D.

(b) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig in D, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ stetig auf D.

Satz A.17 (Majorantenkriterium)
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert. Falls $|f_n(z)| \leq c_n$ für alle $z \in D$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig in D.

Definition A.18
Es sei $a_k \in \mathbb{C}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0.
Die Zahl

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

wird Konvergenzradius der Potenzreihe genannt und die Kreisscheibe $K_R(z_0)$ die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe.

Satz A.19
Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *konvergiert in jeder kompakten Menge* $K \subseteq K_R(z_0)$ *ihrer Konvergenzkreisscheibe* $K_R(z_0)$ *absolut und gleichmäßig. Sie ist daher auf* $K_R(z_0)$ *stetig.*

Beispiele A.20
Die Funktionen

$$\begin{aligned}
\exp(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\
\sin(z) &:= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\
\cos(z) &:= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} z^{2k}
\end{aligned}$$

sind auf ganz $\mathbb{C}$ *wohldefiniert.*

Die Exponentialfunktion und Polarkoordinaten

Satz A.21
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z+w) = \exp(z)\,\exp(w)$.

(b) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.

(c) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *und* $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$.

(d) *Für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(t) > 0$ *und* $|\exp(it)| = 1$.

(e) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$. *Inbesondere gilt* $\exp(it) = \cos t + i \sin t$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

(f) *Es gilt* $\exp(i\pi/2) = i$. *Dies impliziert* $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(g) $\exp(z) = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2\pi i\, k$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung
Anstelle von $\exp(z)$ schreibt man auch kurz e^z.

Korollar A.22 (Polarkoordinaten)
Jede komplexe Zahl z *lässt sich schreiben als*

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ *und* $r = |z|$. *Für* $z \neq 0$ *ist* φ *bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von* 2π *eindeutig bestimmt.*

Die Zahl φ ist ein Maß für den Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ von $z = x + iy$. Man nennt φ Argument der komplexen Zahl $z \neq 0$. Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen lässt sich mit Polarkoordinaten visualisieren. Sind $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, so gilt $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. Man multipliziert also die Beträge und addiert die Argumente.

Beweis von Korollar A.22

Für $z = 0$ ist $z = 0 \cdot e^{i\varphi}$ für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$. Für $z \neq 0$ setzen wir $\eta := z/|z|$. Dann ist $|\eta| = 1$ und für $a =: \operatorname{Re}\eta$ und $b := \operatorname{Im}\eta$ gilt $a^2 + b^2 = 1$. Speziell ist $a \in [-1, 1]$. Die Funktion $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend mit $\cos 0 = 1$ und $\cos\pi = -1$. Es gibt also (genau) ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos\alpha = a$. Es gilt dann $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - a^2} = \pm b$. Wir setzen $\varphi := \alpha$, falls $\sin\alpha = b$ und $\varphi := -\alpha$, falls $\sin\alpha = -b$. Es gilt dann $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = a + ib = \eta = z/|z|$, d.h. $z = |z|e^{i\varphi}$. Ist $z = |z|e^{i\psi}$ für ein $\psi \in \mathbb{R}$, so ist $e^{i(\varphi-\psi)} = 1$, also $\varphi = \psi + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Differentation und Integration

Definition A.23

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt in $t_0 \in (a, b)$ differenzierbar, falls die reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re}(f) : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im}(f) : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind. Man definiert

$$
\begin{aligned}
f'(t_0) &:= \lim_{t\to t_0} \frac{\operatorname{Re}(f(t)) - \operatorname{Re}(f(t_0))}{t - t_0} + i \lim_{t\to t_0} \frac{\operatorname{Im}(f(t)) - \operatorname{Im}(f(t_0))}{t - t_0} \\
&= \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}
\end{aligned}
$$

Beachte, dass für eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ gilt

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{Re} f)'(t) &= \operatorname{Re}(f')(t) \quad \text{für alle } t \in (a, b), \\
(\operatorname{Im} f)'(t) &= \operatorname{Im}(f')(t) \quad \text{für alle } t \in (a, b).
\end{aligned}
$$

Definition A.24

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt integrierbar auf $[a, b]$ falls die reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re}(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im}(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Man definiert

$$
\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt .
$$

Beachte, dass für eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$
\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\,dt \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))\,dt .
$$

Satz A.25 (Hauptsatz der Differential– & Integralrechnung)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$
\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a) .
$$

Satz A.26 (Partielle Integration)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b g(t)\, f'(t)\, dt = g(b)\, f(b) - g(a)\, f(a) - \int_a^b g'(t)\, f(t)\, dt\,.$$

Satz A.27
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, stetig.

(a) *Falls die Folge (f_n) gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt\,.$$

(b) *Falls die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, so gilt*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt\,.$$

Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

Definition A.28
Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt offen (oder offen in $\mathbb{C}$), wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine Kreisscheibe $K_r(z_0)$ existiert derart, dass $K_r(z_0) \subseteq U$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \backslash A$ offen ist.

Bemerkung A.29
Es sei J eine Indexmenge. Dann gilt:

(a) Ist $U_j \subseteq \mathbb{C}$ für jedes $j \in J$ offen, so ist $\bigcup\limits_{j\in J} U_j$ offen.

(b) Ist $A_j \subseteq \mathbb{C}$ für jedes $j \in J$ abgeschlossen, so ist $\bigcap\limits_{j\in J} A_j$ abgeschlossen.

Definition A.30
Es sei $B \subseteq \mathbb{C}$. Dann heißt

$\overset{\circ}{B} := \{z \in B :$ *es existiert eine Kreisscheibe* $K_r(z) \subseteq B\}$ *das Innere von* B,

$\overline{B} := \{z \in \mathbb{C} :$ *in jeder Kreisscheibe* $K_r(z)$ *liegt ein Punkt* $z_* \in B\}$ *der Abschluss von* B.

$\partial B := \{z \in \mathbb{C} :$ *in jeder Kreisscheibe* $K_r(z)$ *liegt ein Punkt* $z_* \in B$ *und ein Punkt* $z_0 \in \mathbb{C} \backslash B\}$ *der Rand von* B.

Beachte, $\overset{\circ}{B}$ ist offen, $\overline{B}$ ist abgeschlossen und $\partial B = \overline{B} \backslash \overset{\circ}{B}$.

Definition A.31
Es sei $T \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Eine Teilmenge $U \subseteq T$ heißt offen in T, falls eine offene Menge $\tilde{U}$ in $\mathbb{C}$ mit $U = \tilde{U} \cap T$ existiert.

(b) Eine Teilmenge $A \subseteq T$ heißt abgeschlossen in T, falls eine abgeschlossene Menge $\tilde{A}$ in $\mathbb{C}$ mit $A = \tilde{A} \cap T$ existiert.

Bemerkung A.32
Es sei $T \subseteq \mathbb{C}$ und $A \subseteq T$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist abgeschlossen in T.

(b) $T \backslash A$ ist offen in T.

Bemerkung A.33
Es sei $T \subseteq \mathbb{C}$ offen und $U \subseteq T$. Dann sind äquivalent:

(a) U ist offen in T.

(b) U ist offen in $\mathbb{C}$.

Bemerkung A.34
Es sei $T \subseteq \mathbb{C}$ offen und $A \subseteq T$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist abgeschlossen in T.

(b) Jeder Häufungspunkt von A in T liegt bereits in A, d.h.

$$\textit{Ist } (z_n) \textit{ eine Folge in } A \textit{ mit } \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \textit{ und } z_0 \in T, \textit{ so folgt } z_0 \in A.$$

Beweis.
(a) ⇒ (b): Beachte, da T offen ist und A abgeschlossen in T, ist $T \backslash A$ offen (in $\mathbb{C}$), siehe Bemerkung A.32 und Bemerkung A.33.

Es sei $(z_n) \subseteq A$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $z_0 \in T$. Annahme: $z_0 \notin A \Longrightarrow z_0 \in T \backslash A$. Da $T \backslash A$ offen in $\mathbb{C}$ ist, existiert $K_r(z_0) \subseteq T \backslash A$. Widerspruch!

(b) ⇒ (a): Definiere $\tilde{A} = \overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{C}$). Dann ist $\tilde{A} \cap T = (A \cap T) \cup (\partial A \cap T)$. Es sei $z_0 \in \partial A \cap T$. Da $z_0 \in \partial A$, existiert $(z_n) \subseteq A$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Da $z_0 \in T$ folgt $z_0 \in A$. Somit ist $A = \tilde{A} \cap T$. ■

Satz A.35
Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(a) $f : X \to Y$ ist stetig.

(b) Ist U offen in Y, so ist $f^{-1}(U)$ offen in X.

(c) Ist A abgeschlossen in Y, so ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.

Beweis.
(a) ⇒ (b) Es sei $V \subseteq Y$ offen in Y, $U := f^{-1}(V)$ und $z \in U$. Dann ist $w = f(z) \in V$. Da V offen in Y ist, existiert ein $\tilde{V}$ offen (in $\mathbb{C}$) mit $V = \tilde{V} \cap Y$. Wähle $K_\varepsilon(w) \subseteq \tilde{V}$. Da f stetig ist, existiert ein $\delta_z > 0$ mit $f(K_{\delta_z}(z) \cap X) \subseteq K_\varepsilon(w) \cap Y \subseteq V$. Es folgt $K_{\delta_z}(z) \cap X \subseteq f^{-1}(V) = U$. Da

$$U = \bigcup_{z \in U} (K_{\delta_z}(z) \cap X) = \left(\bigcup_{z \in U} K_{\delta_z}(z) \right) \bigcap X \,,$$

ist U offen in X.

(b) ⇒ (a) Es sei $z \in X$. Wähle $\varepsilon > 0$ und setze $V := K_\varepsilon(f(z)) \cap Y$. Dann ist V offen in Y. Nach Voraussetzung ist $U := f^{-1}(V)$ offen in X, also existiert $\tilde{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $U = \tilde{U} \cap X$. Wähle $\delta > 0$ derart, dass $K_\delta(z) \subseteq \tilde{U}$. Dann folgt

$$f(K_\delta(z) \cap X) \subseteq f(U) \subseteq V \,.$$

(b) ⇔ (c) Es sei T abgeschlossen (offen) in Y. Dann ist $Y \backslash T$ offen (abgeschlossen) in Y. Also ist $f^{-1}(Y \backslash T) = X \backslash f^{-1}(T)$ offen (abgeschlossen) in X. Somit folgt $f^{-1}(T)$ abgeschlossen (offen) in X. ■

Definition A.36
Eine Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt beschränkt, falls ein $R > 0$ existiert, derart, dass $X \subseteq K_R(0)$.

Definition A.37
Eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz A.38 (Bolzano–Weierstraß)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Satz A.39
Es sei $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ eine Folge nichtleerer kompakter Mengen in $\mathbb{C}$. Dann ist

$$K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

kompakt und nichtleer.

Beweis. K ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Wähle $z_n \in K_n$. Dann ist $(z_n) \subseteq K_1$ und besitzt daher einen Häufungspunkt $z_0 \in K_1$. Wir behaupten $z_0 \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Annahme: Es existiert ein n_0 mit $z_0 \in \mathbb{C} \backslash K_{n_0}$. Da $\mathbb{C} \backslash K_{n_0}$ offen ist, existiert $K_r(z_0) \subseteq \mathbb{C} \backslash K_{n_0}$. Da $z_n \in K_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$, kann z_0 kein Häufungspunkt von (z_n) sein. ■

Satz A.40
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann existieren kompakte Mengen $K_n \subseteq U$, $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \,.$$

Beweis. Wähle z.B.

$$K_n := \left\{ z \in U \,:\, \operatorname{dist}(z, \partial U) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq n \}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. ∎

Satz A.41
Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(K)$ eine kompakte Menge in $\mathbb{C}$.

Satz A.42
Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Maximum und Minimum in K an.

Partielle und totale Differenzierbartkeit

Definition A.43 (Partielle Differenzierbarkeit)
Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $a \in E$ und e_j, $j \in \{1, 2\}$, der j-te Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^2$.

(a) Es sei

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2).$$

Existiert für ein $j \in \{1, 2\}$ der Limes

$$D_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t},$$

so heißt f im Punkt a nach der j–ten Komponente (nach x_j) partiell differenzierbar und die Zahl

$$D_j f(a) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

wird partielle Ableitung von f nach der j-ten Komponenete (nach x_j) im Punkt a genannt.

Die Funktion f heißt im Punkt a partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen $D_1 f(a)$ und $D_2 f(a)$ existieren.

$f : E \to \mathbb{R}$ heißt auf E partiell (nach der j–ten Komponente) differenzierbar, falls f in jedem Punkt $a \in E$ partiell (nach der j–ten Komponente) differenzierbar ist.

(b) Es sei

$$f : E \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt f in a partiell nach der j-ten Komponenete (nach x_j) differenzierbar, falls f_1 und f_2 in a partiell nach der j-ten Komponenete (nach x_j) differenzierbar ist. Die Vektoren

$$f_{x_1}(a) := D_1 f(a) := \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_1, x_2) \\ D_1 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad f_{x_2}(a) := D_2 f(a) := \begin{pmatrix} D_2 f_1(x_1, x_2) \\ D_2 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

werden die partielle Ableitung von f in a nach der j–ten Komponente (nach x_j) genannt.

Die Funktion f heißt im Punkt a partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen $D_1 f_1(a)$, $D_1 f_2(a)$, $D_2 f_1(a)$ und $D_2 f_2(a)$ existieren.

$f : E \to \mathbb{R}^2$ heißt auf E partiell (nach der j–ten Komponente) differenzierbar, falls f in jedem Punkt $a \in E$ partiell (nach der j–ten Komponente) differenzierbar ist.

Definition A.44 (Differenzierbarkeit)
Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $a \in E$. Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}^2$ heißt im Punkt a (total) differenzierbar, falls es eine stetige lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, und eine auf einer offenen Kreisscheibe $K_r(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ definierte Funktion $R : K_r(0) \to \mathbb{R}^2$ gibt, wobei $K_r(a) \subseteq E$, derart, dass

$$f(a+h) = f(a) + Lh + R(h)\,, \qquad h \in K_r(0)\,, \tag{$\star$}$$

mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{||h||_2} = 0\,.$$

Bemerkung A.45
Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $a \in E$ und $f : E \to \mathbb{R}^2$ sei in a (total) differenzierbar. Dann ist die lineare Abbildung L in ($\star$) eindeutig bestimmt. Es gilt

$$Lv = \lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \text{für jedes } v \in \mathbb{R}^2\,.$$

Wir setzen $Df(a) := L$ und nennen die stetige lineare Abbildung $Df(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die totale Ableitung von f in a.

Satz A.46
Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f = (f_1, f_2) : E \to \mathbb{R}^2$ sei in $a \in E$ (total) differenzierbar. Dann ist f in a partiell differenzierbar und für jeden Vektor $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$Df(a)h = \underbrace{\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = D_1 f(a) h_1 + D_2 f(a) h_2\,.$$

Definition A.47 (stetig differenzierbar)
Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Die Abbildung $f : E \to \mathbb{R}^2$ heißt stetig differenzierbar (im Punkt $a \in E$), wenn f auf E differenzierbar und $Df : E \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig (im Punkt a) ist.

Satz A.48 (Charakterisierung von stetig differenzierbaren Abbildungen des $\mathbb{R}^2$)
Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $a \in E$ und $f = (f_1, f_2) : E \to \mathbb{R}^2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $f : E \to \mathbb{R}^2$ ist (in a) stetig differenzierbar.

(b) $f : E \to \mathbb{R}^2$ ist (in a) stetig partiell differenzierbar, d.h. $f : E \to \mathbb{R}^2$ ist (in a) partiell differenzierbar, und jede partielle Ableitung $D_j f : E \to \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, ist (in a) stetig.

Literaturverzeichnis

[1] Lars V. Ahlfors. Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 3rd ed. McGraw-Hill., 1979.

[2] Lars V. Ahlfors. Conformal invariants. Topics in geometric function theory. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2010.

[3] Daniel Alpay. A complex analysis problem book. 2nd edition. Basel: Birkhäuser, 2nd edition edition, 2016.

[4] Mats Andersson. Topics in complex analysis. New York, NY: Springer, 1996.

[5] Joseph Bak and Donald J. Newman. Complex analysis. 3rd ed. New York, NY: Springer, 3rd ed. edition, 2010.

[6] H. Behnke and F. Sommer. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Studienausgabe der dritten Auflage. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976.

[7] Carlos A. Berenstein and Roger Gay. Complex variables. An introduction. New York etc.: Springer-Verlag, 1991.

[8] H. P. Boas. Cauchy's residue sore thumb. Am. Math. Mon., 125(1):16–28, 2018.

[9] Umberto Bottazzini and Jeremy Gray. Hidden harmony – geometric fantasies. The rise of complex function theory. New York, NY: Springer, 2013.

[10] Joaquim Bruna and Julià Cufí. Complex analysis. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2013.

[11] Robert B. Burckel. An introduction to classical complex analysis. Vol. 1. Basel: Birkhäuser Verlag, 1979.

[12] C. Carathéodory. Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Ann., 72:107–144, 1912.

[13] Constantin Carathéodory. Funktionentheorie. Band I. Verlag Birkhäuser, Basel, 1950.

[14] Alexander Dinghas. Vorlesungen über Funktionentheorie. Berlin- Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1961.

[15] J.D. Dixon. A brief proof of Cauchy's integral theorem. Proc. Am. Math. Soc., 29:625–626, 1971.

[16] Wolfgang Fischer and Ingo Lieb. Funktionentheorie. Komplexe Analysis in einer Veränderlichen. Wiesbaden: Vieweg, 9th corrected ed. edition, 2005.

[17] Theodore W. Gamelin. Complex analysis. New York, NY: Springer, 2001.

[18] G.M. Goluzin. Geometrische Funktionentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957.

[19] Adolf Hurwitz. Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über geometrische Funktionentheorie von R. Courant. Mit einem Anhang von K. Röhrl. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1964.

[20] Kunihiko Kodaira. Complex analysis. Cambridge: Cambridge University Press, combined 3-volume edition edition, 2007.

[21] Steven G. Krantz. Complex analysis: the geometric viewpoint. 2nd ed. Washington, DC: The Mathematical Association of America (MAA), 2nd ed. edition, 2004.

[22] Steven G. Krantz. Geometric function theory. Explorations in complex analysis. Boston, MA: Birkhäuser, 2006.

[23] Steven G. Krantz. The theory and practice of conformal geometry. Mineola, NY: Dover Publications, 2016.

[24] Dragoslav S. Mitrinović and Jovan D. Kečkić. The Cauchy method of residues. Theory and applications. Dordrecht - Boston - Lancaster: Kluwer Academic Publishers Group, 1984.

[25] Dragoslav S. Mitrinović and Jovan D. Kečkić. The Cauchy method of residues. Volume 2: Theory and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[26] P. Montel. Sur les suites infinies de fonctions. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3), 24:233–334, 1907.

[27] Raghavan Narasimhan and Yves Nievergelt. Complex analysis in one variable. Boston, MA: Birkhäuser, 2nd ed. edition, 2001.

[28] Tristan Needham. Visual complex analysis. Oxford: Clarendon Press, 1997.

[29] Bruce P. Palka. An introduction to complex function theory. New York etc.: Springer-Verlag, 1991.

[30] George Pólya and Gábor Szegö. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. 2. Bände. Berlin- Göttingen-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1964.

[31] Thomas Ransford. Potential theory in the complex plane. Cambridge: Univ. Press, 1995.

[32] Reinhold Remmert and Georg Schumacher. Funktionentheorie 1. Berlin: Springer, 2002.

[33] Reinhold Remmert and Georg Schumacher. Funktionentheorie. 2. Berlin: Springer, 3rd new revised ed. edition, 2007.

[34] B. Riemann. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen komplexen Grösse. PhD thesis, Inaugural Dissertation, Göttingen, 1851. Available online at http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Grund/.

[35] Rubí E. Rodríguez, Irwin Kra, and Jane P. Gilman. Complex analysis. In the spirit of Lipman Bers. New York, NY: Springer, 2nd revised ed. edition, 2013.

[36] Walter Rudin. Real and complex analysis. 3rd ed. New York, NY: McGraw-Hill, 3rd ed. edition, 1987.

[37] Dietmar A. Salamon. Funktionentheorie. Basel: Birkhäuser, 2011.

[38] G. Sansone and J. Gerretsen. Lectures on the theory of functions of a complex variable. Vol. II: Geometric theory. Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing, 1969.

[39] Giovanni Sansone and Johan Gerretsen. Lectures on the theory of functions of a complex variable. I: Holomorphic functions. Groningen: P. Noordhoff, 1960.

[40] Wilhelm Schlag. A course in complex analysis and Riemann surfaces. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2014.

[41] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. Complex analysis. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.

[42] David C. Ullrich. Complex made simple. Graduate Studies in Mathematics 97. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2008.

[43] Elias Wegert. Visual complex functions. An introduction with phase portraits. Basel: Birkhäuser, 2012.

Index