Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan* and Lukas Then

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 23, 2023)

Problem 1. Berechnen Sie Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{\arctan \sin x^2}{e^{1-x}}$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = x^{(x^x)}$ für $x > 0$

(a)

$$f(x) = e^{x-1} \arctan \sin x^2.$$

$$\begin{aligned} f'(x) =& e^{x-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \sin x^2 + \left(\arctan \sin x^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x-1} \\ =& \frac{e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x^2 + \left(\arctan \sin x^2\right) e^{x-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-1) \\ =& \frac{e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} (\cos x^2)(2x) + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \\ =& \frac{2x \cos x^2 e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g(x) =& x^{(x^x)} \\ \ln g(x) =& x^x \ln x \end{aligned}$$

Lemma 1.

$$\begin{aligned} h(x) &:= x^x \\ h'(x) &= x^x(1 + \ln x) \end{aligned}$$

Proof.

$$\ln h(x) = x \ln x.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|\ln h(x) =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln x)\\ \frac{h'(x)}{h(x)} =& \ln x + 1\\ h'(x) =& h(x)\,(1+\ln x)\\ =& x^x\,(1+\ln x)\end{aligned}$$

$\square$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln g(x) =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x\ln x)\\ \frac{g'(x)}{g(x)} =& \frac{1}{x}x^x + (\ln x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x)\\ =& \frac{x^x}{x} + (\ln x)x^x(1+\ln x)\\ g'(x) =& g(x)x^x\left[\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right]\\ =& x^{x^x+x}\left[\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right]\\ =& x^{x^x+x-1}\left[1+x\ln x+x\ln^2 x\right]\end{aligned}$$

Problem 2. Untersuchen Sie, für welche Argumente des Definitionsbereiches die folgenden Funktionen differenzierbar sind:

(a) $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

(c) $h(z) = \overline{z}, z \in \mathbb{C}$

(a) Für $x_0 \neq 0$ gibt es eine Umgebung auf x_0, worin $|x| = x$ oder $|x| = -x$. Dann ist die Ableitung von $|x|$ gleich mit die Ableitung von entweder x oder $-x$, also $f'(x_0)$ existiert für $x_0 \neq 0$.

Für $x_0 = 0$ gilt $|0| = 0$, und auch

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

Weil die beide ungleich sind, existiert die Grenzwert und daher auch die Ableitung nicht.

(b) Sei $x_0 \neq 0$ und $y_0 = x_0^2$. Dann für $0 < \epsilon < y_0$ existiert keine $\delta > 0$, sodass $|x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

Beweis: Es gibt zwei Fälle:

(i) $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann in jeder offenen Ball $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt es ein Zahl $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, also $|g(x) - g(x_0)| = g(x_0) = y_0 > \epsilon$

(ii) Sei $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dann in jeder offenen Ball $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt es ein Zahl $x \in \mathbb{Q}$, also $|g(x) - g(x_0)| = g(x) > y_0 > \epsilon$

Sei $x_0 = 0$. Dann gilt $g(x_0) = 0$, und auch:

(i) $x \in \mathbb{Q}$, also

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \frac{x^2}{x} \\ &= x \end{aligned}$$

(ii) oder $x \notin \mathbb{Q}$, also

$$g(x) - g(0) = 0 - 0 = 0 \implies \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

Deshalb ist

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

(c) Zu berechnen:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Sei $z = z_0 + x, x \in \mathbb{R}$. Dann, falls die Grenzwert existiert, ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{z_0 + x - z_0}}{z_0 + x - z_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sei jetzt $z = z_0 + ix, x \in \mathbb{R}$. Falls die Grenzwert existiert ist es gleich

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\overline{z_0 + ix - z_0}}{z_0 + ix - z_0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\overline{ix}}{ix} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-ix}{ix} \\ &= -1\end{aligned}$$

Weil das Grenzwert, wenn durch zwei Richtungen berechnet wurde, ungleich ist, existiert das Grenzwert nicht (für alle $z \in \mathbb{C}$)

Problem 3. Man zeige, dass die Gleichung

$$x = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

auf $[0, 1]$ genau eine Lösung besitzt.

Sei $f(x) = x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Dann ist die Gleichung gleich $f(x) = 0$. $f(x)$ ist auf $[0, 1]$ stetig, und auf $(0, 1)$ differenzierbar.

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 - 1 = -1 \\ f(1) &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es mindestens eine Lösung zu der Gleichung $f(x) = 0$. Dann

$$f'(x) = 1 + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0 \text{ für } x \in [0, 1].$$

f is dann monoton wachsend, und es gibt maximal eine Lösung zu $f(x) = 0$.

Deswegen besitzt die Gleichung genau eine Lösung.

Problem 4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{k\to\infty} k \ln \frac{k-1}{k}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}$

(a)

$$k \ln \frac{k-1}{k} = \frac{\ln(k-1) - \ln k}{1/k}.$$

Weil $\ln x$ und $1/x$ auf $x \in (0, \infty)$ differenzierbar sind, kann man den Satz von L'Hopital verwenden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\ln(k-1) - \ln k\right] = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{1}{k} = -\frac{1}{k^2}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k(k-1)}}{-\frac{1}{k^2}} &= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{k}{k-1}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

Weil das Grenzwert auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert, ist

$$\lim_{k\to\infty} k \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -1.$$

(b)

$$\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \frac{\left(e^{\ln x}\right)^{\ln x}}{e^x} = \frac{e^{\ln^2 x}}{e^x} = e^{\ln^2 x - x} = e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 1\right)}.$$

Lemma 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^p x}{x^q} = 0, \qquad p, q > 0.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^p x}{x^q} &= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{p/q}}\right)^q\\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x^{p/q})}\right)^q && \text{L'Hopital}\\ &= 0^q = 0\end{aligned}$$

$\square$

Corollary 3.

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 1\right)\right] = -\infty.$$

Deswegen ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 1\right)} = 0.$$

Problem 5. Überprüfen Sie die Funktion $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{8}{\pi} \arctan \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

auf lokale und globale Extrema.

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & -1 < x < 1 \\ \frac{8}{\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) & x > 1 \end{cases}.$$

Es ist klar, dass $x = 0$ eine Lösung zu $f'(x) = 0$ ist. Weil $f''(0) = 2 > 0$, ist es ein lokales Minimum. Es gibt auch $a, b \in \mathbb{R}, a < 1 < b$, wofür gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 & x &\in (a, 1) \\ f'(x) &< 0 & x &\in (1, b) \end{aligned}$$

Falls $f(1) \geq \lim_{x\to 1^-} f(x)$, ist $f(1)$ ein lokales Maximum (sogar wenn f nicht auf 1 stetig ist). Weil

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2 + 1\right) = 2$$

und

$$f(1) = \frac{8}{\pi} \arctan 1 = \frac{8}{\pi}\frac{\pi}{4} = 2$$

ist $f(1)$ ein lokales Maximum. Weil $f(x) < 2$ für $x > 1$ kann kein Punkt $x > 1$ ein globales Maximum sein. Es gilt auch, dass

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Außer $x \in \{-1, 0, 1\}$ gibt es keine Möglichkeiten für ein globales Maximum. Daher sind die globale Maxima auf $x \in \{-1, 1\}$

Für $x \in [1, 1)$ gilt $f(x) \geq 1$. Dennoch ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Deswegen gibt es *keine* globales Maximum auf $\mathbb{R}$. Wenn man $f(\infty)$ definiert durch $f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$, ist $f(\infty)$ das globale Maximum.