Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Wachsmuth
Bastian Dittrich

Wintersemester 2023/24

9. Übung zur Vertiefung Analysis

13. Dezember 2023

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 20. Dezember 2023* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

Aufgabe 9.1 (Integral, 2 Punkte) Sei

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x^2}{y^2}, \\ &A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 2,\ xy \geq 1\right\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\int_A f \,\mathrm{d}\lambda_2$.

Aufgabe 9.2 (Rotation, 4 Punkte) Sei

$$A := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ \frac{1}{2}(x + y)^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(A)$.

Hinweis: Rotation

Aufgabe 9.3 (Transformationssatz, 4 Punkte) Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n$. Definiere damit die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto a + Sx$. Sei außerdem $A \in \mathcal{L}(n)$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}(n) - \mathcal{B}^1$-messbar, sodass $\chi_{\varphi(A)} f$ λ_n-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $\chi_A(f \circ \varphi)$ λ_n-integrierbar ist mit

$$\int_{\varphi(A)} f \,\mathrm{d}\lambda_n = |\det(S)| \int_A (f \circ \varphi) \,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Hinweis: Lemma 2.92

Aufgabe 9.4 (Stetigkeit, 6 Punkte) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$. Für $h \in \mathbb{R}^n$ definiere die Funktion $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f_h(x) := f(x + h)$. Definiere außerdem die Abbildung

$$T_f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}^1(\lambda_n), \quad h \mapsto f_h.$$

Zeigen Sie:

(a) T_f ist wohldefiniert.

(b) T_f ist stetig.

Hinweis: Approximieren Sie die Funktion f.