Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 12, 2023)

Problem 1. In dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Verknüpfung zweier Riemann-integrierbarer Funktionen i.A. nicht Riemann-integrierbar ist. Dazu gehen wir wie folgt vor:

(a) Es sei $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, d.h. eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Weiterhin sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & x = q_n. \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.

(b) Weiterhin sei

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \backslash \left\{ \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \right\}, \\ 1 & x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g Riemann-integrierbar ist, die Verknüpfung $g \circ f$ mit der Funktion f jedoch nicht.

Proof. (a) Wir betrachten eine uniforme Zerlegung

$$\mathcal{J}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\},$$

und die Intervalle

$$I_n(k) = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right].$$

Es gilt $\inf_{x \in I_n(k)} f(x) = 0$. Wir müssen daher nur beweisen

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Ziel

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $\mathcal{J}_n$, sodass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}(n)} < \epsilon.$$

Die wichtigste Bemerkung ist: jedes q_x kommt maximal zweimal vor (das passiert im Fall wenn $q_x = k/n$ for eine $k \in \{0, \dots, n\}$). Es folgt dann für $n = 2p$ gerade,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathcal{J}(n)} &\leq \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2p}\frac{2}{j} \\
\overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2p}\frac{2}{j} \\
&< \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}(1+\ln p) \\
&=0
\end{aligned}$$

Also f ist integrierbar mit $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ so eine Zerlegung:

Sei $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}$. Außer $[x_0, x_1]$ gibt es dann nur endlich viele $x = \frac{1}{n}$ (eigentlich gibt es genau $n-1$). Sei dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_n = \Big\{ &0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} - \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \frac{1}{n-1} + \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \frac{1}{n-2} - \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \\
&\frac{1}{n-2} + \frac{\epsilon}{2^{n-2}}, \frac{1}{n-3} - \frac{\epsilon}{2^{n-3}}, \dots, 1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 \Big\}
\end{aligned}$$

Bemerkung: In der Intervall $\left[\frac{1}{n-p} + \frac{\epsilon}{2^{n-p}}, \frac{1}{n-p-1} - \frac{\epsilon}{2^{n-p-1}}\right]$ gibt es keine Zahlen mit dem Form $1/n, n \in \mathbb{Z}$, also $\sup f = 0$ auf solchen Intervalle. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathcal{J}_n} =& \frac{2}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^j} \\
\lim_{n\to\infty} \mathcal{O}_{\mathcal{J}_n} =& \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^j} \right] \\
=& \epsilon
\end{aligned}$$

Weil ϵ beliebig war, ist dann

$$\overline{\int_0^1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

also g ist integrierbar mit

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(c) Es gilt

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Sei $h := g \circ f$. h ist nicht auf $[0,1]$ integrierbar. Sei $\mathcal{J} = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_N = 1\}$. Es gibt, für alle Intervalle $[a,b] \subseteq [0,1]$, zwei Punkte

$$\mathbb{Q} \ni x_0 \in [a,b] \qquad \text{dichtheit von } \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \ni x_1 \in [a,b] \qquad \mathbb{Q} \text{ ist nur abzählbar}$$

Also gilt

$$\sup\left(h|_{[a,b]}\right) = 1 \tag{1}$$

$$\inf\left(h|_{[a,b]}\right) = 0 \tag{2}$$

Daraus folgt, für jede Zerlegung $\mathcal{J}$ von $[0,1]$, dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) = 1$$

$$\mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) = 0$$

also h ist nicht auf $[0,1]$ integrierbar. □

Problem 2. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf dem echten Intervall $[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein echtes Intervall $J \subset [a,b]$ gibt, auf dem f strikt positiv ist, d.h. mit $f(x) > 0$ für alle $x \in J$.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, die Charakterisierung der Darboux-Integrierbarkeit zu benutzen und Untersummen zu betrachten.

Proof. Wir beweisen es per Widerspruch. Nehme an, dass in jedem Intervall es mindestens ein Punkt x_0 gibt, für die $f(x_0) \leq 0$. Insbesondere gilt das für alle abgeschlossen Intervalle $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Sei jetzt $\mathcal{J}$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$, $\mathcal{J} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, mit die übliche Voraussetzung $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathcal{J}} =& \sum_{i=1}^{N} \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)(t_i - t_{i-1}) \\ \leq& \sum_{i=1}^{N} (0)(t_i - t_{i-1}) \\ =& 0\end{aligned}$$

Weil $\mathcal{J}$ beliebig war, gilt das für alle Zerlegungen, und

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0,$$

also

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0,$$

ein Widerspruch. □

Problem 3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $|f|$ integrierbar auf $[a,b]$, so ist es auch f.

(b) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a,b]$ und ein $\delta > 0$, so ist auch $\frac{1}{f}$ über $[a,b]$ integrierbar.

(c) Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Proof. (a) Falsch. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Dann ist $|f| = 1$ integrierbar (Proposition 6.1.6). Wir müssen jetzt nur beweisen, dass f nicht integrierbar ist. Der Beweis ist gleich zu der Beweis in der vorherigen Aufgabe. Wir müssen nur statt (2) schreiben

$$\inf\left(h|_{[a,b]}\right) = -1$$

(b) Wahr.

Bemerkung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \geq \delta$ für ein $\delta > 0$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\inf(f)} =&\sup\left(\frac{1}{f}\right) \\ \frac{1}{\sup(f)} =&\inf\left(\frac{1}{f}\right) \end{aligned}$$

wegen der Monotonie von $x \to 1/x$.

Wir haben auch

Korollar

(Korollar aus Proposition 6.2.3(vi)) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{J} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ von I gibt, sodass

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\sup\left(f|_{[a,b]}\right) - \inf\left(f_{[a,b]}\right)\right](t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Wir arbeiten mit dem Korollar. Sei $\mathcal{J} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} \left[\sup\left(\frac{1}{f}\bigg|_{[t_{i-1},t_i]}\right) - \inf\left(\frac{1}{f}\bigg|_{[t_{i-1},t_i]}\right)\right](t_i - t_{i-1}) \\ =&\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{\inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)} - \frac{1}{\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)}\right](t_i - t_{i-1}) \\ =&\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) - \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)}{\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)\inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)}\right](t_i - t_{i-1}) \\ \leq&\frac{1}{\delta^2}\sum_{i=1}^{N} \left[\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) - \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)\right](t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Per Hypothese gibt es eine Zerlegung $\mathcal{J}$ von $[a, b]$, für die gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) - \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)\right] < \epsilon\delta^2.$$

Dies ist genau die gewünschte Zerlegung, also nach dem Korollar ist f integrierbar.

(c) Falsch. Sei f und g Treppefunktionen, $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0.5 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $(f \cdot g)(x) = 0$, und daher $\int_0^1 (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Jetzt sei $\mathcal{J} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \geq & \sup\left(f|_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ = & 1(1/4) = 1/4 \\ \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(g) \geq & \sup\left(g|_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ = & 1(1/4) = 1/4 \end{aligned}$$

Also $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{1}{4} > 0$, und gleich für $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Daher ist

$$\int_0^1 (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad \square$$

Problem 4. (Wanderdüne) Man gebe eine Folge von nicht-negativen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, sodass

- $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
- $f_n \not\to 0$ für jedes $x \in [0,1]$.

Proof. Sei

$$g_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\int_0^1 g_{a,b}(x) = (b - a).$$

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$, und $k(n)$ das Zahl, sodass

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

gilt. Das ist immer möglich, weil $x \to x(x+1)/2$ monoton wachsend ist. Sei

$$p(k(n)) := \frac{k(n)(k(n)+1)}{2}$$
$$f_n(x) = g_{\frac{n-p(n)}{k(n)+1}, \frac{n-p(n)+1}{k(n)+1}}(x)$$

Wir beweisen die gewünschte Eigenschaften:

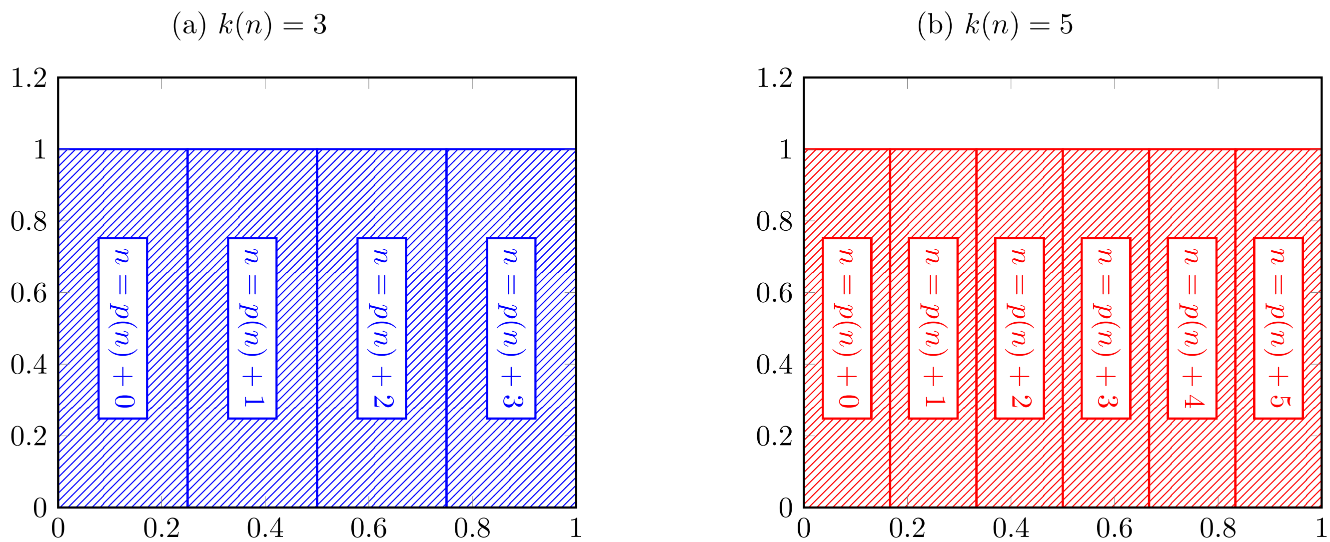

FIG. 1: Im Allgemein ergibt sich für $p(k) \leq n < p(k+1)$ eine Überdeckung von $[0,1]$ mit Treppen mit Länge $1/(k(n)+1)$.

(i) Es gilt $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k(n)+1}$. Weil $k(n)$ wachsend ist, und $k(n) \to \infty$ gilt, ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(ii) Sei $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei auch $q = \lfloor x(k(n)+2) \rfloor$. Es gilt dann

$$f_{p(k(n)+1)+q}(x) \neq 0,$$

also $f_n(x) \not\to 0$ für jedes $x \in [0,1]$. $\square$