Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 11, 2024)

Problem 1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = x(t) + t, \qquad x(0) = 1.$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung für das Anfangswertproblem.

(b) Berechnen Sie die Schritte bis einschließlich φ_3 der Picard-Iteration

(c) Leiten Sie eine Formel für die Berechnung von φ_k her und beweisen Sie diese.

(d) Zeigen Sie, dass $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Lösung aus Teil a konvergiert.

Proof. (a) Lösung analog wie Blatt 3: Man verifiziere einfach, dass

$$\varphi(t) = -1 - t + 2e^t$$

eine Lösung ist.

(b) Wir immer setzen wir $\varphi_0(t) = 1$ und definieren $f(t, x) = t + x$. Danach führen wir das Iterationsverfahren durch

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= 1 + \int_0^t (s+1)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
\varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + \frac{s^2}{2}\right) \mathrm{d}s \\
&= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3!} \\
\varphi_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3!}\right) \mathrm{d}s \\
&= 1 + t + t^2 + 2 \cdot \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}
\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(c) Wir erraten:

$$\varphi_n(t) = 1 + t + t^2 + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

für $n \geq 3$ und sonst wie in (b). Klar gilt das Formel für $n = 3$. Jetzt beweisen wir es durch Induktion. Angenommen das Formel gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^t f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + s^2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{s^k}{k!} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \right) \mathrm{d}s \\
&= 1 + t + t^2 + 2 \cdot \frac{t^3}{3!} + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{s^{n+2}}{(n+2)!} \\
&= 1 + t + t^2 + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n+1} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

(d) Wir können die Potenzreihe umschreiben

$$\begin{aligned}
&1 + t + t^2 + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
=&(-1 - t) + 2 + 2t + 2 \cdot \frac{t^2}{2} + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n+1} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
=& -1 - t + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass die Summe $2 \cdot \sum_{k=0}^{n} t^k/k!$ gegen $2e^t$ (sogar gleichmäßig und absolut) konvergiert. Da $t^{n+1}/(n+1)!$ gegen Null für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert $\varphi_n(t)$ gegen die Lösung aus (a). $\square$

Problem 2. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} + x + \sqrt[3]{x^2} = 0, \qquad x(0) = 1.$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangwertproblems. Geben Sie auch den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung auf dem Intervall $I = (-\infty, 3\ln(2))$ eindeutig ist.

Proof. (a) Wir lösen die DGL durch TDV:

$$\int_1^x \frac{1}{r + \sqrt[3]{r^2}}\,\mathrm{d}r = -\int_0^t \mathrm{d}s\,.$$

$\square$

Problem 3. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sin(t)\sqrt{1+4x}, \qquad x(0) = x_0, \qquad x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right).$$

Geben Sie alle $x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist. Begründen Sie auch, warum es bei diesen Anfangswerten eine lokal eindeutige Lösung gibt.

Geben Sie für alle Anfangswerte, bei denen es keine eindeutige Lösung gibt, zwei verschiedene Lösungen an.