Lehrstuhl für Mathematik VIII
Julius-Maximilians Universität Würzburg
Vorlesung Stochastik 1
Wintersemester 2024/25
Markus Bibinger / Adrian Grüber

Übungsblatt 6

Klausurübung 6.1

Es sei U eine auf dem Intervall $(0,1)$ uniform verteilte Zufallsvariable, $U \sim \mathcal{U}((0,1))$, sowie

$$X = -\ln(U)\ ,\ Y = -\ln(1-U)\,,$$

mit dem natürlichen Logarithmus ln.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungen von X und von Y.

(b) Was können Sie über die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = Y)$ aussagen, was über $\mathbb{P}(X > Y)$?

Übung 6.2

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ c \cdot t^2 & \text{falls } t \in [0,1) \\ 1 & \text{falls } t \geqslant 1, \end{cases}$$

mit einer reellen Konstante c, gegeben ist.

(a) Welche Werte kommen für c in Frage?

(b) Für welche Werte von c ist die Verteilung absolutstetig, für welche diskret? Was ist im absolutstetigen Fall die zugehörige Dichte?

(c) Skizzieren Sie $F_X(t)$ für $c = 1/2$.

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(1/4 < X \leq 1/2)$, also die Wahrscheinlichkeit für $\{X \leq 1/2\} \cap \{X > 1/4\}$, abhängig von c.

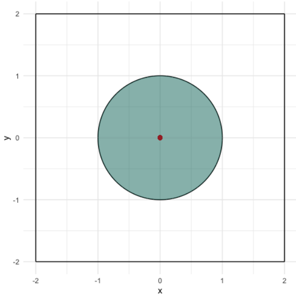
Aufgabe 6.3 (keine Abgabe)

(a) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt. Leiten Sie die Dichte der Verteilung von $Y = X^2$ her.

(b) Sei $U \sim \mathcal{U}((0,1))$ uniform auf $(0,1)$ verteilt. Leiten Sie die Dichte der Verteilung von $Z_1 = -2\log(U)$, sowie von $Z_2 = \sqrt{Z_1}$ her.

Aufgabe 6.4 (keine Abgabe)

Wir spielen Darts und die runde Dartscheibe habe Radius $r = 1$. Modellieren Sie die folgenden Szenarien.



(a) Angenommen, eine Spielerin trifft immer die Scheibe, aber der Treffpunkt ihres Pfeils ist rein zufällig, uniform* über die Scheibe verteilt. Eine Zufallsvariable Y beschreibe den Abstand des Treffpunktes vom Mittelpunkt der Scheibe. Geben Sie die Verteilungsfunktion F_Y von Y an und bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte f_Y. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ist $Y \leq 1/2$ und $1/2 \leq Y \leq 3/4$?

(b) Angenommen, die Dartscheibe ist nun mittig auf einem quadratischen Brett mit einer Länge und Höhe von 4 platziert und wir nehmen an, dass die Spielerin das Brett immer trifft. Der Treffpunkt ihres Pfeils ist rein zufällig, uniform über das Brett verteilt. Eine Zufallsvariable Z beschreibe den Abstand des Treffpunktes vom Mittelpunkt der Scheibe. Geben Sie die Verteilungsfunktion F_Z von Z an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $1/2 \leq Z \leq 3/4$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die Spielerin die Dartscheibe?

***Hinweis:** d.h. jede (Borel-)Teilmenge A des Einheitskreises mit Fläche $|A|$ hat unter dieser Verteilung $\mathbb{P}_T$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_T(A) = |A|/\pi$. Sie können für Teil (b) ohne Beweis verwenden, dass $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^2/2 \arcsin(x/|a|) + x/2\sqrt{a^2 - x^2}$ ist.

Bearbeitung bis Donnerstag, den 28.11.2024.