Elektrodynamik Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 6, 2024)

Problem 1. Man betrachte den Raum zwischen zwei unendlich großen, geerdeten Leiterplatten, die parallel zueinander an den Punkten $x = 0$ und $x = d$ aufgestellt sind. Eine weitere Platte mit Flächenladungsdichte σ befindet sich bei $x = a$ mit $0 < a < d$.

(a) Zeigen Sie, dass die Herleitung des Potentials $\varphi(x)$ für $0 \leq x \leq d$ äquivalent ist zur Berechnung einer eindimensionalen Green'schen Funktion und somit zur Lösung der

$$\Delta_x G(x, a) = -\delta(x - a), \ \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen $G(0, a) = G(d, a) = 0$.

Um die Lösung der folgenden Teilaufgaben zu vereinfachen, bietet es sich an, das Koordinatensystem so zu verschieben, dass die geladene Platte sich bei $x = 0$ und die geerdeten Leiterplatten sich bei $x = -a$ bzw. $x = d - a$ befinden.

(b) Teilen Sie den Raum in zwei ladungsfreie Regionen $-a < x < 0$ und $0 < x < d - a$ auf, und lösen Sie dort die zwei separaten, homogenen Laplace-Gleichungen für das Potential. Integrieren Sie dann die Poisson-Gleichung von $x = -\epsilon$ bis $x = +\epsilon$, und betrachten Sie den Grenzwert $\epsilon \to 0$, um die Bedingungen zu finden, welche die zwei Lösungen für das Potential in $x = 0$ verbinden. Bestimme schließlich das Potential für den gesamten Bereich $-a < x < d - a$.

(c) Bestätigen Sie das obige Resultat, indem Sie die Differenzialgleichung für das Potential unter Berücksichtigung der Randbedingungen bei $x = -a$ und $x = d - a$ direkt integrieren.

(d) Führen Sie eine Fouriertransformation der Differenzialgleichung für das Potential durch, lösen Sie die transformierte Gleichung im Fourier-Raum und transformieren

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Sie die Lösung zurück in den Ortsraum. Überzeugen Sie sich von der Existenz einer partikulären Lösung, welche mit den vorherigen übereinstimmt.

Proof. (a) Die Ladungsverteilung ist 0 außer wenn $x = a$, also die Ladungsverteilung ist proportional zu $\delta(x-a)$. Die Definition der Greensche Funktion ist also proportional zu die Poisson-Gleichung.

Die Greensche Funktion verschwindet genau dann wenn die Potential verschwindet, also bei $x = 0$ und $x = d$.

(b) Die Lösungen in einer ladungsfreien Region ist

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0 \implies V = mx + c.$$

Der Gradient ist das elektrische Feld, also $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Die Lösungen sind also

$$-a < x < 0 : V = k_1(x + a) \tag{1}$$

$$0 < x < d - a : V = k_2(d - a - x) \tag{2}$$

Integriert zwischen $x = -\epsilon$ und $x = +\epsilon$ ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} &= \delta(x) \\
\int_{-\epsilon}^{x} \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int_{-\epsilon}^{x} \delta(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \\
V'(x) &= V'(-\epsilon) - \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \\
V(\epsilon) &= V(-\epsilon) + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= V(-\epsilon) + 2\epsilon V'(-\epsilon) - \epsilon
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die vorherige Lösungen (1) und (2) liefert

$$\begin{aligned}
V'(-\epsilon) &= k_1 \\
V(-\epsilon) &= k_1(a - \epsilon)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(\epsilon) =& k_1(a-\epsilon) + 2\epsilon k_1 - \epsilon \\
=& k_2(d-a-\epsilon)
\end{aligned}
$$

Wir lösen die Gleichung für k_2 und erhalten

$$k_2 = \frac{k_1(a-\epsilon) + 2\epsilon k_1 - \epsilon}{d-a-\epsilon}.$$

Die Lösungen sind also (außerhalb $(-\epsilon, \epsilon)$)

$$
V(x) = \begin{cases} k_1(x+a) & -a < x < -\epsilon, \\ \frac{k_1(a-\epsilon)+2\epsilon k_1 - \epsilon}{d-a-\epsilon}(d-a-x) & \epsilon < x < d-a. \end{cases}
$$

Wenn wir $\epsilon \to 0$ nehmen, ist

$$
V(x) = \begin{cases} k_1(x+a) & -a < x < 0, \\ \frac{k_1}{d-a}(d-a-x) & 0 < x < d-a. \end{cases}
$$

(c) Die Differentialgleichung ist

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\delta(x).$$

Mit Randbedingungen $V(-a) = V(d-a) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{x} \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int_{-a}^{x} \delta(x)\,\mathrm{d}x \\
V'(x) - V'(-a) &= \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \\
V'(x) =& V'(-a) - \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \\
V(x) - \cancelto{0}{V(-a)} =& \int_{-a}^{x} V'(x)\,\mathrm{d}x \\
=& V'(-a)(x+a) - x\theta(x) \\
:=& k_1(x+a) - x\theta(x).
\end{aligned}
$$

Wir schreiben jetzt die zweite Randbedingungen

$$V(d-a) = k_1 d - (d-a) = 0$$

und damit

$$k_1 = \frac{d-a}{d}.$$

Das Potential ist also

$$\frac{d-a}{d}(x+a) - x\theta(x).$$

(d) Da der Definitionsbereich endlich ist, nutzen wir eine Fourierreihe

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi \frac{x+a}{d}\right),$$

wobei die a_n definiert durch

$$a_n = \int_{-a}^{d-a} V(x) \sin\left(n\pi \frac{x+a}{d}\right) \mathrm{d}x$$

sind. Die Ableitung von V ist

$$V''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \sin\left(n\pi \frac{x+a}{d}\right).$$

Die Fourierreihe von $\delta(x)$ ist

$$\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi a}{d}\right) \sin\left(n\pi \frac{x+a}{d}\right).$$

Vergleich der Koeffizienten liefert

$$a_n = \left(\frac{d}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi a}{d}\right).$$

Die Lösung ist

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi a}{d}\right) \sin\left(n\pi \frac{x+a}{d}\right).$$

Keine Ahnung wie man die Summe berechnet, aber plotten zeigt, dass die Lösung korrekt ist. $\square$