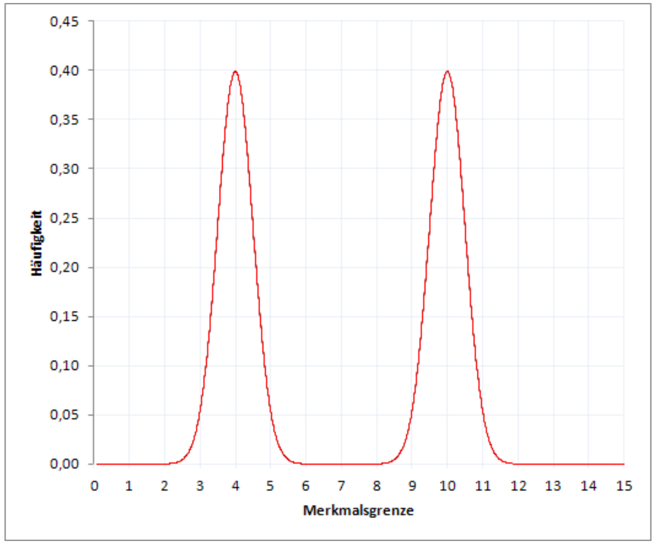
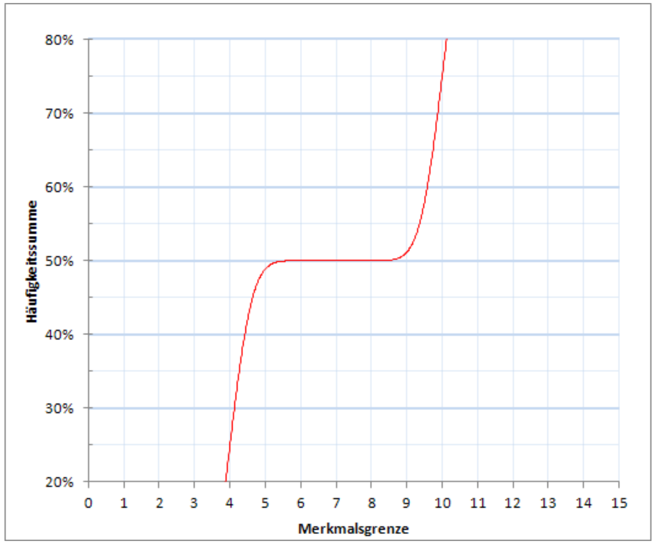
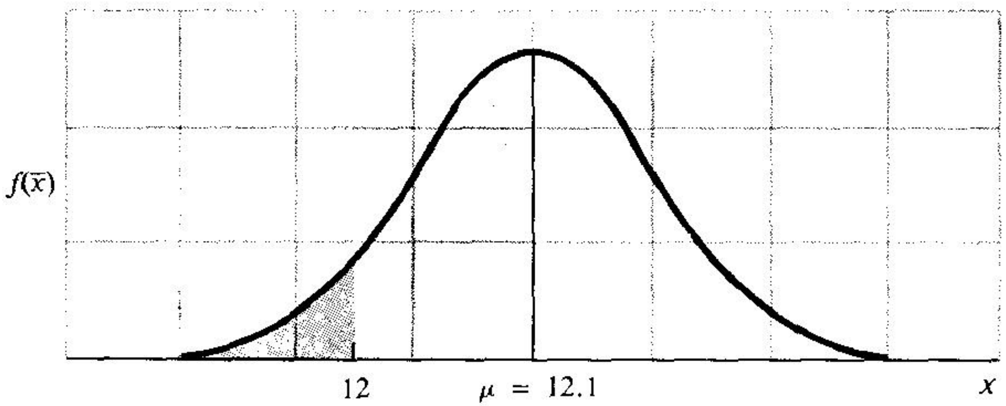
Übung 4





Häufig auftretende Fragestellungen:

Wie viel % der Messwerte liegen oberhalb (unterhalb) eines bestimmten Messwertes?



Die Wahrscheinlichkeitsdichte gibt die Häufigkeit des Auftretens eines Merkmals wider.

Die Verteilungsfunktion ist das Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichte und gibt somit die Häufigkeitssumme an.

Übung 4

A) Familienplanung

Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt liegt in Deutschland bei 52 %.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie mit 7 Kindern…

		1. Abgabe		2. Abgabe	
1.	…genau 2 Jungen hat?				
2.	…höchstens 2 Jungen hat?				

Die Binomialverteilung:

$$W(\beta = m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Konkret: p = 52 %, n = 7; genau W(2); höchstens W(0)+W(1)+W(2)

Übung 4

B) Qualitätskontrolle

Ein Computerhersteller will eine neue Bestückungsmaschine für Platinen beschaffen. Die Ausschussrate dieser Maschine soll höchsten 1 % sein. Zur Kontrolle wird ein Probelauf mit 50 Platinen durchgeführt. Sind mehr als k Platinen fehlerhaft muss die Produktion gestoppt werden.

		1. Abgabe		2. Abgabe	
1.	Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer tatsächlichen Fehlerrate von 1 % höchstens 2 kaputte Platinen?				
2.	Wie muss k gewählt werden, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Produktionsstopp trotz ausreichender Ausschussrate kleiner als 10 % ist?				

$$W(\beta = m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Übung 4

C) Arm und reich

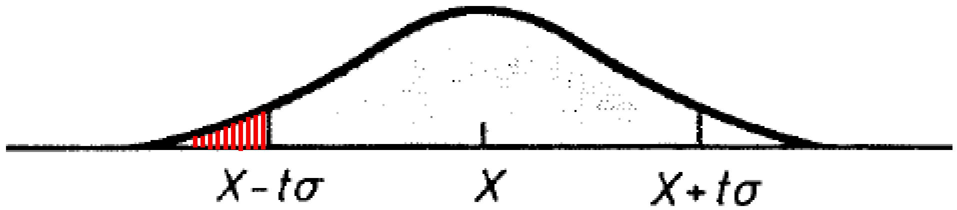
Nehmen wir an, die Haushaltsnettoeinkommen in Deutschland seien normalverteilt mit $\mu = 1800$ € und $\sigma = 900$ €. Statistisch gelte ein Haushalt als arm, wenn er über weniger als 50 % des Durchschnittseinkommens verfügt.

		1. Abgabe		2. Abgabe	
1.	Wie hoch ist der Anteil armer Haushalte unter obigen Annahmen?				
2.	Über welches Nettoeinkommen verfügen die 5,0 % wohlhabendsten Haushalte mindestens?				

In obigem Beispiel entspricht 50 % genau 1 σ.

Übung 4: Tabelle im Anhang Taylor

Tab. A. Die prozentuale Wahrscheinlichkeit,
$P\,(\text{innerhalb } t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)\,dx$,
als Funktion von t.



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00	0,80	1,60	2,39	3,19	3,99,	4,78	5,58	6,38	7,17
0,1	7,97	8,76	9,55	10,34	11,13	11,92	12,71	13,50	14,28	15,07
0,2	15,85	16,63	17,41	18,19	18,97	19,74	20,51	21,28	22,05	22,82
0,3	23,58	24,34	25,10	25.86	26,61	27,37	28,12	28,86	29.61	30,35
0,4	31,08	31,82	32,55	33,28	34,01	34,73	35,45	36,16	36,88	37,59
0,5	38,29	38.99	39.69	40,39	41,08	41,77	42,45	43,13	43,81	44,48
0,6	45,15	45,81	46,47	47,13	47,78	48,43	49,07	49,71	50,35	50,98
0,7	51,61	52,23	52,85	53,46	54,07	54,67	55,27	55,87	56,46	57,05
0,8	57,63	58,21	58,78	39,35	59,91	60,47	61,02	61,57	62,11	62,65
0,9	63,19	63,72	64,24	64,76	65,28	65,79	66,29	66,80	67,29	67.78
1,0	68,27	68,75	69,23	69,70	70,17	70,63	71,09	71,54	71,99	72,43
1,1	72,87	73,30	73,73	74,15	74,57	74,99	75,40	75,80	76,20	76,60
1,2	76,99	77,37	77,75	78,13	78,50	78.87	79,23	79,59	79,95	80,29
1,3	80,64	80,98	81,32	81,65	81,98	82.30	82,62	82,93	83,24	83,55
1,4	83,85	84,15	84,44	84,73	85,01	85,29	85,57	85,84	86,11	86,38

Übung 4

C) Arm und reich

Nehmen wir an, die Haushaltsnettoeinkommen in Deutschland seien normalverteilt mit $\mu = 1800$ € und $\sigma = 900$ €. Statistisch gelte ein Haushalt als arm, wenn er über weniger als 50 % des Durchschnittseinkommens verfügt.

		1. Abgabe		2. Abgabe	
1.	Wie hoch ist der Anteil armer Haushalte unter obigen Annahmen?				
2.	Über welches Nettoeinkommen verfügen die 5,0 % wohlhabendsten Haushalte mindestens?				

In obigem Beispiel entspricht 50 % genau 1 σ.

$$P\,(x < 1\,\sigma) = (1 - 0{,}6827)\,/\,2.$$

Übung 4

D) Datenausreisser

Sie messen mit einem Drehspulmessinstrument Spannungen und erhalten folgende Werte in Volt:
7,81, 7,92, 7,63, 7,71, 7,85, 7,90, 8,56.
Nehmen wir an, es liegen keine systematischen Fehler vor.

		1. Abgabe
1.	Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Datenpunkt beobachtet, der mindestens so stark streut wie der letzte Messwert?	

Dazu benötigen wir jetzt ein paar grundsätzliche Überlegungen zu unseren zufälligen Fehlern.

Übung 4

D) Datenausreisser

Sie messen mit einem Drehspulmessinstrument Spannungen und erhalten folgende Werte in Volt:
7,81, 7,92, 7,63, 7,71, 7,85, 7,90, 8,56.
Nehmen wir an, es liegen keine systematischen Fehler vor.

		1. Abgabe
1.	Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Datenpunkt beobachtet, der mindestens so stark streut wie der letzte Messwert?	

Wenn nur zufällige Fehler vorliegen, sind unsere Daten durch eine Normalverteilung beschrieben.

Die Frage ist also, wie viele (Stichproben)Standardabweichungen der letzte Wert vom Mittelwert entfernt ist.

Konfidenzintervalle

Die Mittelwerte $\overline{x}_i$ sind normalverteilt um den wahren Mittelwert μ

der Grundgesamtheit mit einer Standardabweichung von $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

wenn *n* groß ist.

Das heißt, alle Mittelwerte einer Stichprobe einer Normalverteilung liegen mit einer 68.27 % Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$\left(\mu_i - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \mu_i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Die wahre Standardabweichung σ kennen wir nicht.
Wir müssen Sie ebenfalls aus unserer Stichprobe schätzen.
Die Stichprobenstandardabweichung ergibt sich zu

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right)^2}$$

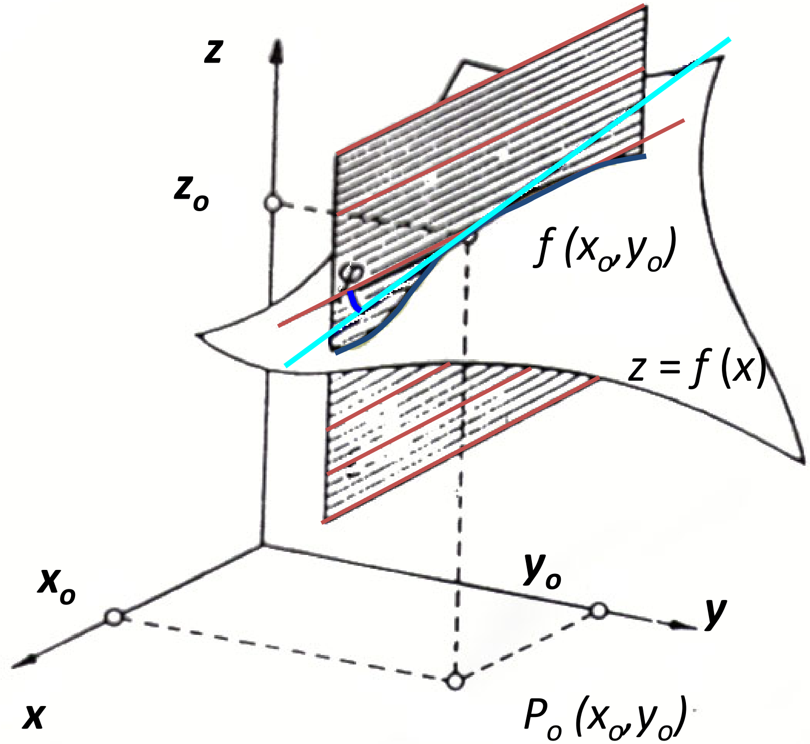
Damit ist die Angabe unserer Messergebnisse eine Wahrscheinlichkeitsausssage:
Wenn ich die Messung beliebig oft wiederhole, werde ich in 68.27 % der Fälle einen Werte im angegebenen Intervall erhalten

Fehlerfortpflanzung I:

Unabhängige fehlerbehafte Messgrößen

Partielle Differentiation

Allgemein stellt $z = f\,(x\,,\,y)$ eine Fläche im dreidimensionalen Raum dar.
Eine Ebene y = const schneidet diese Fläche, wobei sich eine Schnittkurve ergibt.



$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

ist der Tangens des Winkels, den die Tangente im Punkt P (x_o,y_o,z_o) der so entstandenen Schnittkurve mit der positiven x-Achse bildet.

Partielle Differentiation

Es sei *z = f (x, y)* eine Funktion der zwei Variablen *x* und *y*

Die folgenden Grenzwerte

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

bei festem *y*,
und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

bei festem *x*

heißen partielle Ableitungen 1. Ordnung der Funktion *f (x,y).*

Partielle Differentiation

Die Rechenregeln sind die gleichen wie für die Funktion einer Veränderlichen.

$f = 2x^2 + 5y^5 + 3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 25y^4$$

$f = x^3 y^2 + \sin(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 + \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y$$

Taylor Entwicklung

Sind in einem Punkt *x* der Funktionswert und die Ableitungen bekannt, dann lässt sich der Funktionswert im Punkt *x* + *Δx* berechnen:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial f^2}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Für kleine Δx ist $\Delta x^2 << \Delta x$ und man kommt mit dem ersten Glied aus *(Linearisierung):*

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$$

Taylor Entwicklung

Bei Funktionen von zwei Veränderlichen gilt
bei Fortfall der Glieder höherer Ordnung

$$f\left(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\ .$$

Entsprechendes gilt für Funktionen mit mehr als zwei Variablen.

Mit der linearisierten Form der Taylorentwicklung wird im Folgenden das Fehlerfortpflanzungsgesetz hergeleitet.

Fehlerfortpflanzung

Es sei $f = f\,(x\,,\,y)$ eine physikalische Größe,
die als Funktion zweier Messgrößen x und y gegeben ist,
wobei x und y statistisch voneinander unabhängig sind.

Es sei ferner:

$$x_i = \bar{x} + u_i \quad \{\text{r Messwerte}\}$$
$$y_k = \bar{y} + v_k \quad \{\text{s Messwerte}\}$$

u_i und v_k sind Abkürzungen für die bisher verwendeten Δx und Δy.

$$f_{ik} = f\left(x_i, y_k\right) = f\left(\bar{x} + u_i\,,\,\bar{y} + v_k\right)$$

f_{ik} sind alle möglichen Endergebnisse,
die wir aus den Messwerten x_i und y_k berechnen können.

Fehlerfortpflanzung

$$f_{ik} \;=\; f\left(x_i, y_k\right) \;=\; f\left(\bar{x} + u_i\,,\, \bar{y} + v_k\right)$$

Unter der Annahme, dass u_i und v_k kleine Größen sind, lässt sich f_{ik} entwickeln

$$f_{ik} \;=\; f\left(\bar{x}\,,\bar{y}\right) + u_i\,\frac{\partial\, f\left(\bar{x},\bar{y}\right)}{\partial\, x} + v_k\,\frac{\partial\, f\left(\bar{x},\bar{y}\right)}{\partial\, y}$$

Mit $r + s$ Messwerten lassen sich $r \cdot s$ Funktionswerte f_{ik} bilden.

Wie groß ist der Mittelwert dieser Funktionswerte f_{ik} ?

Wie groß ist der Mittelwert dieser Funktionswerte f_{ik} ?

$$\overline{f} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} f_{ik}}{r\,s}$$

$$= \frac{1}{r\,s} \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \left\{ f(\overline{x}, \overline{y}) + u_i \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{y})}{\partial x} + v_k \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{y})}{\partial y} \right\}$$

$$= \frac{1}{r\,s} \left\{ r\,s\, f(\overline{x}, \overline{y}) + s \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{y})}{\partial x} \underbrace{\sum_{i=1}^{r} u_i}_{=0} + r \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{y})}{\partial y} \underbrace{\sum_{k=1}^{s} v_k}_{=0} \right\}$$

Also ist: $$\overline{f(x,y)} = \overline{f} = f(\overline{x}, \overline{y})$$

Der Mittelwert aller Funktionswerte ist gleich der Funktion der Mittelwerte.

Fehlerfortpflanzung

Es gilt wie oben gezeigt : $$\bar{f} = f\left(\bar{x}\ ,\ \bar{y}\right)$$

Die Abweichungen g_{ik} der berechneten Werte vom Mittelwert sind:

$$\begin{aligned} g_{ik} &= f_{ik} - \bar{f} \\ &= u_i \frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x} + v_k \frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y} \end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung

Die Quadratsumme der g_{ik} ist:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} g_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left\{u_i \frac{\partial f(\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial x} + v_k \frac{\partial f(\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial y}\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left\{\left[u_i \frac{\partial f(\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial x}\right]^2 + 2\left[u_i \frac{\partial f(\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial x}\ v_k \frac{\partial f(\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial y}\right] + \left[v_k \frac{\partial f(\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial y}\right]^2\right\}$$

$$= \mathrm{s}\left\{\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x}\right\}^2 \sum_{i=1}^{r} u_i^2 + \mathrm{r}\left\{\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}\right\}^2 \sum_{k=1}^{s} v_k^2$$

$$+ 2\ \frac{\partial f\ (\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial x}\ \frac{\partial f(\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial y}\ \underbrace{\sum_{i=1}^{r} u_i}_{=0} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{s} v_k}_{=0}$$

$$= \mathrm{s}\left\{\frac{\partial f(\bar{x}\ ,\ \bar{y})}{\partial x}\right\}^2 \sum_{i=1}^{r} u_i^2 + \mathrm{r}\left\{\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}\right\}^2 \sum_{k=1}^{s} v_k^2$$

Fehlerfortpflanzung

Die Varianz ist also:

$$\sigma_f^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{k=1}^{s} g_{ik}^2}{r\ s} = \frac{1}{r\ s} \left(s \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \right\}^2 \sum_{i=1}^{r} u_i^2 + r \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\}^2 \sum_{k=1}^{s} v_k^2 \right)$$

$$= \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \right\}^2 \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} u_i^2}{r} + \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\}^2 \frac{\sum\limits_{k=1}^{s} v_k^2}{s}$$

$$\sigma_f^2 = \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \mathrm{x}} \right\}^2 \sigma_x^2 + \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\}^2 \sigma_y^2$$

Fehlerfortpflanzung

$$g_{ik} = f_{ik} - \bar{f}$$

$$= u_i \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + v_k \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$$

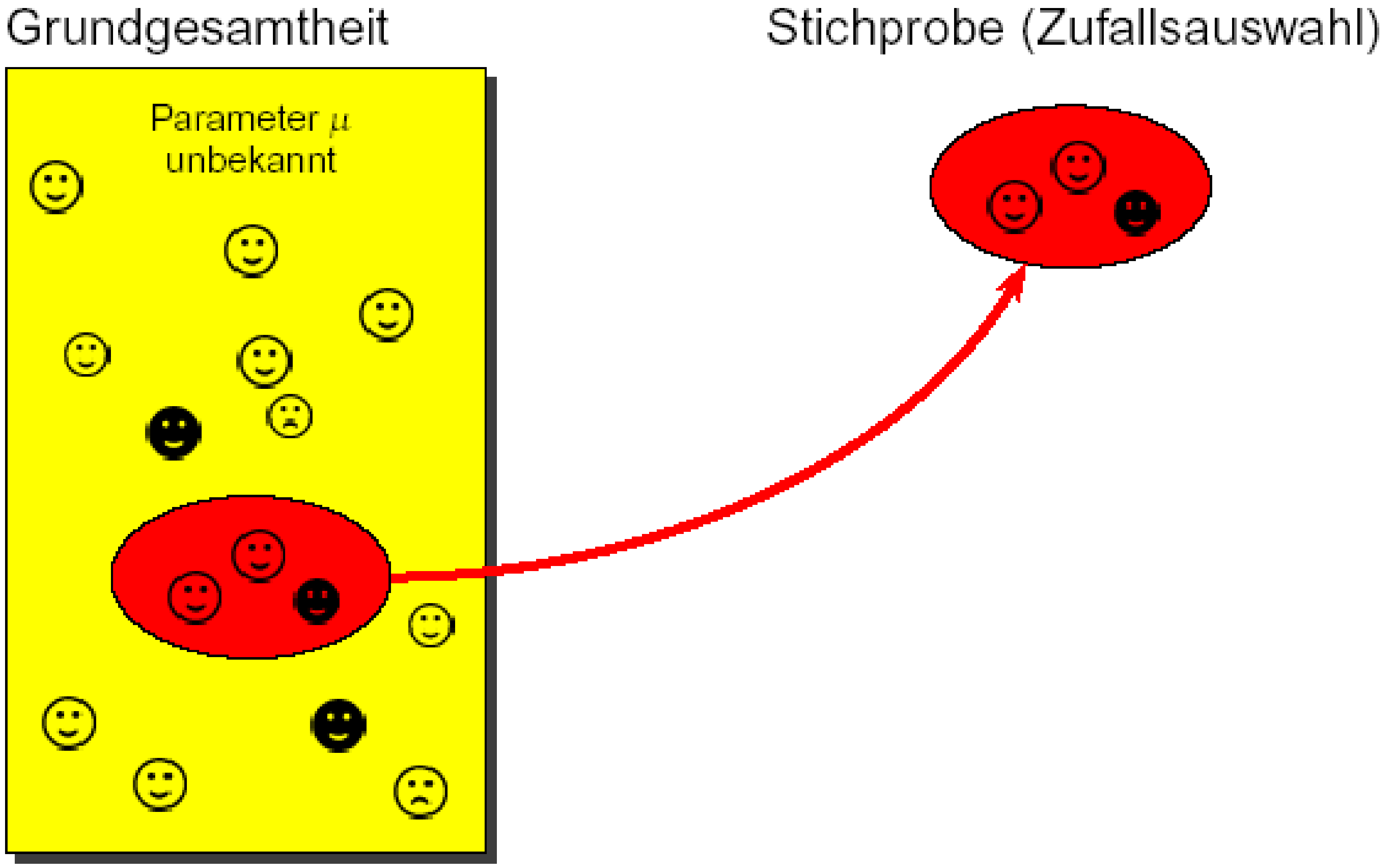
Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz:

$$\sigma_f^2 = \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \mathrm{x}} \right\}^2 \sigma_x^2 + \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\}^2 \sigma_y^2$$

$$\sigma_f = \sqrt{\left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \mathrm{x}} \right\}^2 \sigma_x^2 + \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\}^2 \sigma_y^2}$$

Fehlerfortpflanzung

Wir erinnern uns: **Eine physikalische Messreihe ist immer eine Stichprobe**



Standardfehler in der Fehlerfortpflanzung

Bei der Berechnung des Standardfehlers bei Rechnungen zur Fehlerfort-pflanzung wird die Standardabweichung durch den Standardfehler ersetzt, **sofern eine Messreihe vorliegt**:

$$\sigma_{\bar{f}}^2 = \left\{\frac{\partial \bar{f}(x,y,z,..)}{\partial x}\right\}^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left\{\frac{\partial \bar{f}(x,y,z,..)}{\partial y}\right\}^2 \sigma_{\bar{y}}^2 + \left\{\frac{\partial \bar{f}(x,y,z,..)}{\partial z}\right\}^2 \sigma_{\bar{z}}^2 + ...$$

$$\sigma_{\bar{f}} = \sqrt{\left\{\frac{\partial \bar{f}(x,y,z,..)}{\partial x}\right\}^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left\{\frac{\partial \bar{f}(x,y,z,..)}{\partial y}\right\}^2 \sigma_{\bar{y}}^2 + \left\{\frac{\partial \bar{f}(x,y,z,..)}{\partial z}\right\}^2 \sigma_{\bar{z}}^2 + ...}$$

$\sigma_{\bar{i}}$ *wird in der Fehlerfortpflanzung gleichgesetzt mit dem Fehler des Messwerts* Δ_i

$$\Delta_{\bar{f}} = \sqrt{\left\{\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},..)}{\partial x}\right\}^2 \Delta_{\bar{x}}^2 + \left\{\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},..)}{\partial y}\right\}^2 \Delta_{\bar{y}}^2 + \left\{\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},..)}{\partial z}\right\}^2 \Delta_{\bar{z}}^2 +....}$$

Fehlerfortpflanzung - Beispiele

Beispiel 1 Produkt zweier Größen ***p = m · v***

$$\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial m}\right)^2 \sigma_{\overline{m}}^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 \sigma_{\overline{v}}^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial m} = \mathrm{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{v}} = \mathrm{m}$$

$$\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{(v)^2 \sigma_{\overline{m}}^2 + (m)^2 \sigma_{\overline{v}}^2}$$

$$\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{(v)^2 \sigma_{\overline{m}}^2 + (m)^2 \sigma_{\overline{v}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\overline{p}}}{mv} = \sqrt{\left(\frac{v}{mv}\right)^2 \sigma_{\overline{m}}^2 + \left(\frac{m}{mv}\right)^2 \sigma_{\overline{v}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\overline{p}}}{p} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{m}}}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{v}}}{v}\right)^2}$$

Bei einem Produkt:
Quadratische Addition der relativen Fehler

Fehlerfortpflanzung - Beispiele

Berechnung einer Fläche *(Rechteck)*

F = l · b

Produkt: Daher quadratische Addition der relativen Fehler

$$\frac{\sigma_{\overline{F}}}{F} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{l}}}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{b}}}{b}\right)^2}$$

$$\sigma_{\overline{F}} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)^2 \sigma_{\overline{l}}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 \sigma_{\overline{b}}^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = b \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial b} = l$$

$$\sigma_{\overline{F}} = \sqrt{(b)^2 \sigma_{\overline{l}}^2 + (l)^2 \sigma_{\overline{b}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\overline{F}}}{l \cdot b} = \sqrt{\left(\frac{b}{l \cdot b}\right)^2 \sigma_{\overline{l}}^2 + \left(\frac{l}{l \cdot b}\right)^2 \sigma_{\overline{b}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\overline{F}}}{F} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{l}}}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{b}}}{b}\right)^2}$$

Berechnung einer Fläche *(Kreis)*

$F = \pi \cdot r \cdot r$

Produkt: Daher quadratische Addition der relativen Fehler

$$\cancel{\frac{\sigma_{\overline{F}}}{F} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{r}}}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{r}}}{r}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{\sigma_{\overline{r}}}{r}\right)^2}}$$

$$\sigma_{\overline{F}} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 \sigma_{\overline{r}}^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$\sigma_{\overline{F}} = \sqrt{(2 \cdot \pi \cdot r)^2 \sigma_{\overline{r}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\overline{F}}}{\pi \cdot r^2} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\pi \cdot r^2}\right)^2 \sigma_{\overline{r}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\overline{F}}}{F} = \sqrt{4\left(\frac{\sigma_{\overline{r}}}{r}\right)^2}$$

Fehlerfortpflanzung - Beispiele

In manchen Gleichungen wird der Radius als Messgröße verlangt

☹ Gemessen wird aber meist der Durchmesser ☹

d = (3.12 $\pm$ 0.64) mm

r = (1.56 $\pm$???) mm

$$r = \frac{d}{2}$$

$$\sigma_{\bar{r}} = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial d}\right)^2 \sigma_{\bar{d}}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_{\bar{d}}$$

r = (1.56 $\pm$ 0.32) mm

Fehlerfortpflanzung - Beispiele

Messung der Dicke eines Blatt Papiers

Als Messinstrument ist nur eine Schieblehre vorhanden
Messgenauigkeit $\pm$ 0.1 mm

Dies ist mehr als ein Blatt dick ist.

AUSWEG : **Wir messen die Dicke von 100 Blättern D_{100}**

$$d = \frac{1}{100} D_{100}$$

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial D_{100}}\right)^2 \sigma^2_{\bar{D}_{100}}}$$

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 0.1^2}$$

$$= \frac{1}{100} \; 0.1 \quad mm$$

$$= 0.001 \quad mm$$

Fehlerfortpflanzung - Beispiele

Beispiel 2 Quotient zweier Größen

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$\sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial M}\right)^2 \sigma_{\bar{M}}^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial V}\right)^2 \sigma_{\bar{V}}^2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial M} = \frac{1}{V} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial V} = -\frac{M}{V^2}$$

$$\sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{1}{V}\right)^2 \sigma_{\bar{M}}^2 + \left(\frac{M}{V^2}\right)^2 \sigma_{\bar{V}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{\rho}}}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{1 \cdot V}{V\,M}\right)^2 \sigma_{\bar{M}}^2 + \left(\frac{M\,V}{V^2\,M}\right)^2 \sigma_{\bar{V}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{\rho}}}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{M}}}{M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{V}}}{V}\right)^2}$$

Bei einem Quotienten:
Quadratische Addition der relativen Fehler

Fehlerfortpflanzung - Beispiele

Beispiel 3 Volumen eines Drahtes

$$V = \pi \frac{d^2}{4} L$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \pi \frac{d^2}{4} \qquad \frac{\partial V}{\partial d} = \frac{2\, d\, L\, \pi}{4}$$

$$\sigma_{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_{\bar{L}}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 \sigma_{\bar{d}}^2}$$

$$\sigma_{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{\pi \cdot d^2}{4}\right)^2 \sigma_{\bar{L}}^2 + \left(\frac{\pi \cdot d \cdot L}{2}\right)^2 \sigma_{\bar{d}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{V}}}{V} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{L}}}{L}\right)^2 + (2)^2 \left(\frac{\sigma_{\bar{d}}}{d}\right)^2}$$

L = (24.1 $\pm$ 0.1) cm, gemessen mit Lineal (rel. Fehler 0.41 %)

d = (0.14 $\pm$ 0.02) cm, gemessen mit Schieblehre (rel. Fehler 14 %)

$$\frac{\sigma_{\bar{V}}}{V} = \sqrt{(0.0041)^2 + 4\ (0.14)^2} = 0.28003$$

Der Fehler des Volumens ist etwa zweimal der Fehler des Durchmessers.

Fehlerfortpflanzung - Potenzprodukte

$$f = x^{\alpha} \quad y^{\beta} \quad z^{\gamma}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \; x^{\alpha-1} \; y^{\beta} \; z^{\gamma}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \beta \; x^{\alpha} \, y^{\beta-1} \; z^{\gamma}; \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \gamma \; x^{\alpha} \; y^{\beta} \; z^{\gamma-1};$$

$$\sigma_{\bar{f}} = \sqrt{\left(\alpha \; x^{\alpha-1} y^{\beta} z^{\gamma}\right)^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\beta \; x^{\alpha} \; y^{\beta-1} \; z^{\gamma}\right)^2 \; \sigma_{\bar{y}}^2 \; + \left(\gamma \; x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma-1}\right)^2 \sigma_{\bar{z}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{f}}}{f} = \sqrt{\frac{\left(\alpha \; x^{\alpha-1} \; y^{\beta} \; z^{\gamma}\right)^2}{\left(x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}\right)^2}\sigma_{\bar{x}}^2 + \frac{\left(\beta x^{\alpha} y^{\beta-1} z^{\gamma}\right)^2}{\left(x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}\right)^2} \; \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{\left(\gamma x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma-1}\right)^2}{\left(x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}\right)^2}\sigma_{\bar{z}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{f}}}{f} = \sqrt{\frac{(\alpha)^2}{(x)^2}\sigma_{\bar{x}}^2 + \frac{(\beta)^2}{(y)^2} \; \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{(\gamma)^2}{(z)^2} \; \sigma_{\bar{z}}^2}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{f}}}{f} = \sqrt{(\alpha)^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + (\beta)^2 \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + (\gamma)^2 \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$$

Fehlerfortpflanzung - Potenzprodukte

$$\frac{\sigma_{\bar{f}}}{f} = \sqrt{(\alpha)^2 \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{x}\right)^2 + (\beta)^2 \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{y}\right)^2 + (\gamma)^2 \left(\frac{\sigma_{\bar{z}}}{z}\right)^2}$$

Bei einem Potenzprodukt erspart man sich die Berechnung der Differentialquotienten, da der relative Fehler durch die Summe der mit der Potenz gewichteten Quadrate der relativen Fehler berechnet wird.

Fehlerfortpflanzung - Beispiele

$$m_L = m_1 - m_2$$

$$\sigma_{\bar{m}_L} = \sqrt{\left(\frac{\partial m_L}{\partial m_1}\right)^2 \sigma_{\bar{m}_1}^2 + \left(\frac{\partial m_L}{\partial m_2}\right)^2 \sigma_{\bar{m}_2}^2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{m}_L}{\partial \mathrm{m}_1} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathrm{m}_\mathrm{L}}{\partial \mathrm{m}_2} = -1$$

$$\sigma_{\bar{m}_L} = \sqrt{(1)^2 \sigma_{\bar{m}_1}^2 + (-1)^2 \sigma_{\bar{m}_2}^2}$$

$$\sigma_{\bar{m}_L} = \sqrt{\sigma_{\bar{m}_1}^2 + \sigma_{\bar{m}_2}^2}$$

Fehlerfortpflanzung – Rückblick Größtfehler

Bei Produkten und Quotienten addieren sich die relativen Fehler.

$$C = A \cdot B \qquad \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

$$C = A \,/\, B \qquad \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

Die Gauss´sche Fehlerfortpflanzung wird für beide Fälle ergeben:

Wahrscheinlicher Fehler:

$$C = A \cdot B \qquad \frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

$$C = A \,/\, B \qquad \frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

Fehlerfortpflanzung – Rückblick Größtfehler

Bei Summen und Differenzen addieren sich die absoluten Fehler.

$$C = A + B \qquad \Delta C = \Delta A + \Delta B$$

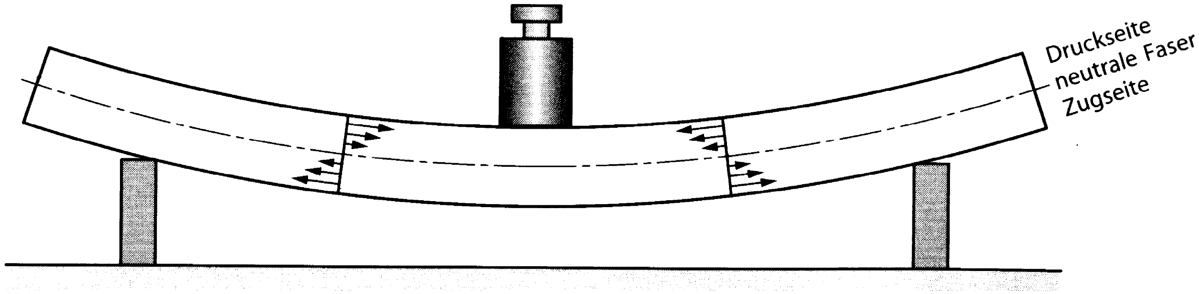
$$C = A - B \qquad \Delta C = \Delta A + \Delta B$$

Die Gauss´sche Fehlerfortpflanzung wird
für den wahrscheinlichen Fehler ergeben:

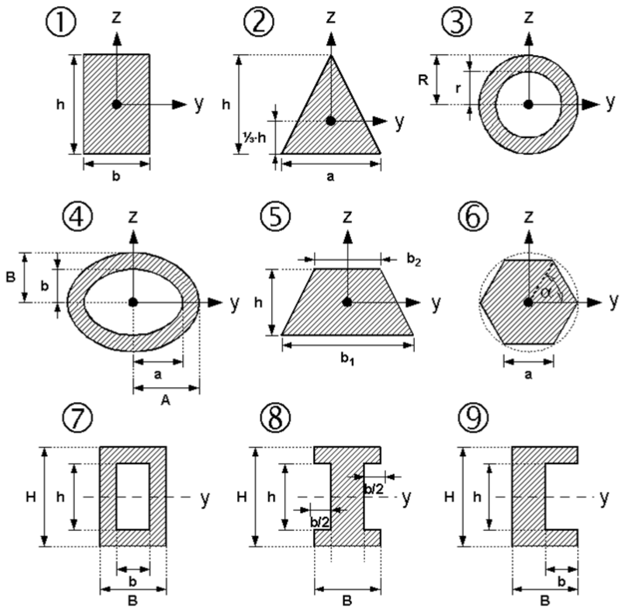
$$C = A + B \qquad \Delta C = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$$

Wahrscheinlicher Fehler

Aktuelle Übung



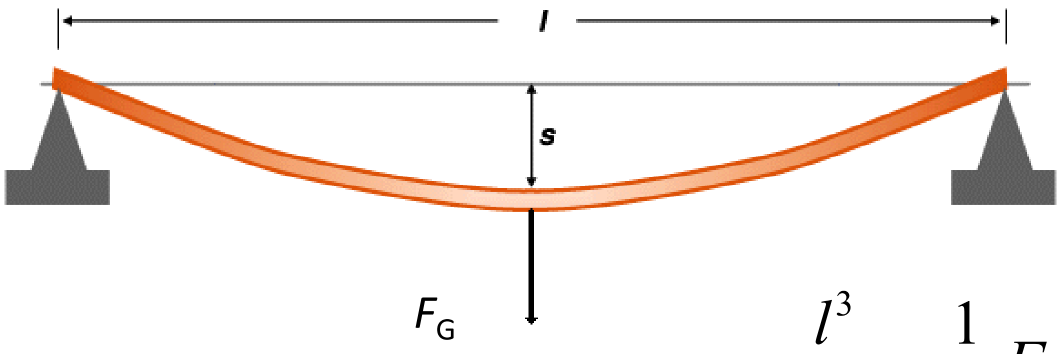
Die Durchbiegung von Stäben hängt außer vom Material (Elastizitätsmodul) auch von der Geometrie (Flächenträgheitsmoment) des Körpers ab.



http://de.wikipedia.org/wiki/Flächenträgheitsmoment

Praktikumsversuch:

Stab der Länge *l* mit rechteckigem Querschnitt der Breite *b* und der Höhe *h*.



$$s = \frac{l^3}{4 \cdot b \cdot h^3} \frac{1}{E} F_G$$