Formelsammlung zur Vorlesung Auswertung von Messungen und Fehlerrechnung

1. Rechengesetze und Kurzschreibungen

I. Ableitungsregeln: Seien $f(x)$, $g(x)$ und $h(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x))$ Funktionen von x

a) **Summenregel**: $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

b) **Produktregel**: $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]$

c) **Kettenregel**: $\frac{d}{dx}\left[h\big(g(x)\big)\right] = \frac{d}{dg}[h(g)]\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]$

II. Kurzschreibungen: Seien $k, n \in \mathbb{N}$.

a) **Summenzeichen** $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{x_k} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

b) **Produktzeichen** $\prod_{k=0}^{n} x_k = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

c) **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

d) **Binomischer Satz** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

2. Häufigkeit: Sei N die Anzahl aller Elemente / Meßwerte.

a) **Absolute Häufigkeit** H: Häufigkeit, mit der eine gewisse Merkmalsausprägung / ein gewisser Meßwert unter der Gesamtheit der Elemente / der Meßwerte vorliegt.

b) **Relative Häufigkeit** $h = \frac{H}{N}$

3. Lagemaße und gewichteter Mittelwert

I) Lagemaße: Sei n die Anzahl der Messungen und $m \in \mathbb{N}$

Arithmetisches Mittel	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Geometrisches Mittel $x_i > 0$	$\bar{x}_g = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$
Harmonisches Mittel $x_i > 0$	$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$
Median (diskret) $x_1 \le x_i \le x_j \le x_n$ für $1 \le i < j \le n$	$\bar{x}_{1/2} = \begin{cases} x_{m+1} & \text{falls } n = 2m+1 \\ \frac{x_{m+1}+x_m}{2} & \text{falls } n = 2m \end{cases}$

II) Gewichteter Mittelwert und dessen Fehler:

Sei $\bar{X}_i$ ein i-ter Mittelwert und σ_i dessen Fehler, dann gilt:

a) Gewichteter Mittelwert $X_{Best} \coloneqq \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$ mit $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$

b) Fehler des gewichteten Mittelwertes $\sigma_{Best} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}$

4. Erwartungswert, (Ko-)Varianz, Abweichungen und Korrelation:

Seien *X, Y* Zufallsvariablen mit Werten x_i bzw. y_i und $\bar{X}$, $\bar{Y}$ deren Mittelwerte bzw. *E[X], E[Y]* deren Erwartungswerte. Außerdem seien Ω die Menge aller Ergebnisse (der Ergebnisraum) und μ ein (Wahrscheinlichkeits-) Maß.

a) **Erwartungswert**

a.1) bei Existenz einer Wahrscheinlichkeitsdichte ρ zu einer Verteilung *P*: $E[X] \coloneqq \int_\Omega (\rho \cdot X) d\mu$

a.2) bei Existenz einer Verteilung *P* (ohne Wahrscheinlichkeitsdichte): $E[X] \coloneqq \int_\Omega (X) dP$
(im diskreten Fall analog einer Summation)

b) **Varianz** $V[X] \coloneqq E[(X - E[X])^2]$

c) **Kovarianz** $COV[X,Y] \coloneqq E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

d.1) **Standardabweichung** einer Verteilung $\sigma_X \coloneqq \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2}$

d.2) **Stichproben-Standardabweichung** (auch Streuung) $s_X \coloneqq \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2}$

e) **Standardfehler** $s_{\bar{X}} \coloneqq \frac{s_X}{\sqrt{n}}$ ebenso $\sigma_{\bar{X}} \coloneqq \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$

f) **Korrelation**: $COV[X,Y] = 0$, so werden *X* und *Y* als **unkorreliert** bezeichnet.

g) (linearer) **Korrelationskoeffizient**: $\rho[X,Y] \coloneqq \frac{COV[X,Y]}{(V[X]V[Y])^{1/2}}$

5. Axiome von Kolmogorow

Sei *(Ω; ℰ; P)*Wahrscheinlichkeitsraum eines Zufallsexperiments. Dann gelten für die Wahrscheinlichkeit *P(E)* eines Ereignisses *E* folgende drei Axiome:

1. $P(E) \geq 0$ (Nichtnegativität)
2. $P(\Omega) = 1$ (Normierung)
3. $E_1 \cap E_2 = \emptyset \implies P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ (Additionssatz)

6. Verteilungen

Seien n der Umfang einer Stichprobe aus einer Menge von N Elementen, von denen K eine bestimmte Eigenschaft bzw. mit einer Wahrscheinlichkeit p diese Eigenschaft besitzen, und k die Anzahl der Elemente mit dieser Eigenschaft innerhalb der Stichprobe.

a) Eine Zufallsgröße X heißt **binomial** nach B_p^n verteilt, wenn gilt:

$$B_p^n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ für } k = 0,1,\dots,n$$

(Dies nennt man auch eine Bernoulli-Kette der Länge n.)

b) Eine Zufallsgröße X heißt **hypergeometrisch** nach $H_{N;K}^n(k)$ verteilt, wenn gilt:

$$H_{N;K}^n(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ für } k = 0,1,\dots,n$$

c) **Poisson-Verteilung**: $P_\mu(k) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ mit Erwartungswert μ.

d) **Dichte der Gauß- / Normal-Verteilung**: $f_{\mu;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

e) **Dichte der χ^2-Verteilung**: $f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{(2^{n/2})\Gamma(n/2)} \cdot t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$

7. Residuum, Regression, χ^2-Testgröße und Freiheitsgrade

I) Residuum und Regression

Sei y eine Größe, die in Abhängigkeit von einer anderen Größe x bestimmt wird. Sei ferner $f(x) = \hat{y}$ der erwartete funktionale Zusammenhang zwischen den Größen x und y, mit dem ein erwartetes $\hat{y}$ bestimmt werden kann. Die Größe

$$r := y - f(x) = y - \hat{y}$$

wird **Residuum** genannt.

II) χ^2-Testgröße

$$\chi^2 = \sum_i Q_i = \sum_i \frac{\left(H_{i,exp.} - H_{i,theor.}\right)^2}{H_{i,theor.}}$$

III) Freiheitsgrade

Seien n die Anzahl der nach Zusammenfassung vorliegenden Klassen und c die Anzahl der Parameter, die aus der vorliegenden Messung erzeugt und ebenso zur Bestimmung der theoretischen Häufigkeiten $H_{theor.}$ herangezogen werden mußten. Dann definiert man die Freiheitsgrade ν als:

$$\nu := n - c$$