Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

# 2. Übungsblatt

**Hinweis:**
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Donnerstag (02.11.2023) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Polynominterpolation (3 + 4 Pkte)**

   Es seien die Punkte $x_0, x_1, ..., x_n$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren den Operator

   $$\Phi : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad p \mapsto y, \quad \text{mit} \quad p(x_i) = y_i,\ i = 0, ..., n,$$

   wobei wir mit $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchsten $n$ bezeichnen und $p(x)$ die Auswertung des Polynoms $p$ im Punkt $x$ beschreibt.

   (a) Zeigen Sie: Sind die Punkte $x_i$ paarweise verschieden, so ist die Abbildung $\Phi$ wohldefiniert und isomorph. (Eine Konsequenz hieraus ist die eindeutige Lösbarkeit der Polynominterpolation.)

   (b) Was passiert, wenn Sie nicht fordern, dass die $x_i$ paarweise verschieden sind? Kann $\Phi$ im Allgemeinen noch injektiv (surjektiv) sein?

2. **Elementare Zeilenoperationen und Invertieren (6 + 3 Pkte)**

   (a) Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben. Wir bilden die erweiterte Matrix

   $$B = \left(A \mid \mathbb{1}_n\right)$$

   mit $\mathbb{1}_n$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $A$ ist genau dann invertierbar, wenn $A$ durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Verfizieren Sie weiterhin: Werden die dafür benötigten Zeilenumformungen auf ganz $B$ angewendet, so ergibt sich im hinteren Teil, wo zu Beginn die Einheitsmatrix stand, genau $A^{-1}$.

   *Hinweis: Falls benötigt, dürfen Sie die Lemma 5.56 - 5.59 voraussetzen*

   (b) Es sei nun

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie $A^{-1}$.

3. **Darstellungsmatrizen (3 + 3 + 2 + 2 Pkte)**

   Es seien die Vektorräume $V, W$ über $\mathbb{K}$ gegeben mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Wir betrachten eine lineare Abbildung

   $$T : V \to W, \quad v \mapsto T(v).$$

   Seien $B_V$ und $B_W$ Basen von $V$, bzw. $W$. Wir nehmen an $T$ ist nicht die konstante Nullabbildung. Beweisen Sie:

   (a) Der Kern von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder trivial (d.h. nur die 0) oder hängt nur von der Wahl von $B_V$ ab, aber nicht von $B_W$.

   (b) Das Bild von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder der ganze $\mathbb{K}^m$ oder hängt nur von der Wahl von $B_W$ ab, aber nicht von $B_V$.

   (c) Der Rang von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist unabhängig von $B_W$ und $B_V$.

(d) Ist $id_V$ die Identität auf $V$ so gilt

$$\left({}_{B_V^*}[id_V]_{B_V}\right)^{-1} = \left({}_{B_V}[id_V]_{B_V^*}\right).$$

*Hinweis: Korollar 5.43 kann hier sehr nützlich sein.*

4. **Darstellungsmatrizen II (3 + 3 + 3 Pkte)**

Es wird gerechnet.

(a) Wir definieren die lineare Abbildung $T(x) = A \cdot x$ mit $A$ gegeben wie in 2(b). Wir definieren die Basen

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie

$${}_{B_2}[T]_{B_1}.$$

(b) Wir schauen nochmal auf Aufgabe 1. Es seien die paarweise verschiedene Punkte $x_0, x_1, ..., x_n$ gegeben und die Abbildung $\Phi$ wie zuvor. Gegeben sei die kanonische Basis

$$B := \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

vom $\mathbb{R}^n$ sowie die Basen

$$B_M := \{1, x, x^2, ..., x^n\}$$

und

$$B_l := \{l_0(x), l_1(x), l_2(x), ..., l_n(x)\}, \quad \text{mit} \quad l_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Bestimmen Sie

$${}_{B}[\Phi]_{B_M}, \quad \text{und} \quad {}_{B}[\Phi]_{B_l}.$$

Ausgehend von den entstandenen Matrizen: Stellen Sie eine Vermutung, welche Basis für große $n$ bevorzugt wird.

*Ohne Wertung: Man mache sich klar, dass $B_l$ tatsächlich eine Basis liefert (Lagrangeinterpolation).*