Aufgabe 1 *Bose-Einstein-Verteilung für das freie bosonische Gas* **7 P.**

Das großkanonische Potential des freien Bosegases (mit Spin $S = 0$) ist gegeben durch

$$\mathcal{J} = k_B T \sum_{\mathbf{k}} \log\left(1 - e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}-\mu)}\right) . \quad (1)$$

Die Bose-Einstein-Verteilung ist gegeben durch

$$N_B(E_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-\mu)} - 1} . \quad (2)$$

a) Zeigen Sie, dass die Entropie gegeben ist durch *3 P.*

$$S = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial T} = -k_B \sum_{\mathbf{k}} N_B(E_{\mathbf{k}}) \cdot \log[N_B(E_{\mathbf{k}})] - [1 + N_B(E_{\mathbf{k}})] \cdot \log[1 + N_B(E_{\mathbf{k}})] . \quad (3)$$

$$S = -\frac{\partial J}{\partial T} = k_B \sum_{k} \ln\left(1 - e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}\right)$$

$$+ k_B T \sum_{k} \frac{1}{1-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}} e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)} (E_{\vec{k}}-\mu) \frac{\partial \beta}{\partial T}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{k_B} \frac{1}{T^2}$$

$$S = k_B \sum_{k} \ln\left(1 - e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}\right) - \frac{1}{T} \sum_{k} \frac{E_{\vec{k}}-\mu}{1-e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}}$$

$$= -k_B \sum_{k} \ln \frac{1}{1-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}} + \frac{1}{T} \sum_{k} \frac{E_{\vec{k}}-\mu}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1}$$

$$= -k_B \sum_{k} \ln \frac{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1} + \frac{1}{T} \sum_{k} \frac{E_{\vec{k}}-\mu}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1}$$

$$= -k_B \sum_{k} \left[\ln\left(\frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1}\right) + \beta(E_{\vec{k}}-\mu)\right] + \frac{1}{T} \sum_{k} \frac{E_{\vec{k}}-\mu}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1}$$

$$= -k_B \sum_{k} \left[\ln N_B(E_{\vec{k}}) + \beta(E_{\vec{k}}-\mu)\right] + \frac{1}{T} \sum_{k} (E_{\vec{k}}-\mu) N_B(E_{\vec{k}})$$

$$N_B(E_{\vec{k}}) = \frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1}$$

$$e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)} = 1 + \frac{1}{N_B(E_{\vec{k}})} = \frac{N_B(E_{\vec{k}})+1}{N_B(E_{\vec{k}})}$$

$$\beta(E_{\vec{k}}-\mu) = \ln\left(N_B(E_{\vec{k}})+1\right) - \ln N_B(E_{\vec{k}})$$

$$= -k_B \sum_{k} \left[\ln \cancel{N_B(E_{\vec{k}})} + \ln\left(N_B(E_{\vec{k}})+1\right) - \ln \cancel{N_B(E_{\vec{k}})}\right]$$

$$+ \frac{1}{\cancel{T}} \sum_{k} k_B \cancel{T} \left[\ln\left(N_B(E_{\vec{k}})+1\right) - \ln N_B(E_{\vec{k}})\right] N_B(E_{\vec{k}})$$

$$= -k_B \sum N_B(E_{\vec{k}}) \ln N_B(E_{\vec{k}}) - k_B \sum_k \left(1+N_B(E_{\vec{k}})\right) \ln\left(1+N_B(E_{\vec{k}})\right)$$

b) Leiten Sie aus dem großkanonischen Potential (1) her, dass die Gesamtteilchenzahl *4 P.*
N und die innere Energie U gegeben sind durch

$$N = \sum_{\mathbf{k}} N_B(E_{\mathbf{k}}), \quad U = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \cdot N_B(E_{\mathbf{k}}). \tag{4}$$

$$N = -\frac{\partial J}{\partial \mu}$$

$$= -\left[k_{\cancel{B}} T \sum_k \frac{1}{1-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}} \left(-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}\right) \cancel{\beta}\right]$$

$$= \sum_k \frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1} = \sum_k N_B(E_{\vec{k}})$$

$$U - \mu N = \beta \frac{\partial J}{\partial \beta}$$

$$= \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{1}{\beta} \sum_k \ln\left(1-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}\right)\right]$$

$$= \cancel{\beta}\left[-\frac{1}{\beta^{\cancel{2}}} \sum_k \ln\left(1-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}\right) + \frac{1}{\cancel{\beta}} \sum_k \frac{1}{1-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}} \left(-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}\right)\left[-(E_{\vec{k}}-\mu)\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{\beta} \sum_k \ln\left(1-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}\right) + \sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1} (E_{\vec{k}}-\mu)$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_k \ln \frac{1}{1-e^{-\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}} + \sum_k (E_{\vec{k}}-\mu) N_B(E_{\vec{k}})$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_k \ln \frac{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}-1} + \sum_k (E_{\vec{k}}-\mu) N_B(E_{\vec{k}})$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_{k}\left[\ln N_\beta(E_{\vec{k}}) + \beta(E_{\vec{k}}-\mu)\right] + \sum_{k}(E_{\vec{k}}-\mu)\,N_\beta(E_{\vec{k}})$$

$$U = \sum_{k}\left[\cancel{\mu N_\beta}(E_{\vec{k}}) + \frac{1}{\beta}\ln N_\beta(E_{\vec{k}}) + (E_{\vec{k}}-\mu) + (E_{\vec{k}}-\cancel{\mu})\,N_\beta(E_{\vec{k}})\right]$$

$$= \sum_{k} E_{\vec{k}}\,N_\beta(E_{\vec{k}}) + \sum_{k}\left[\frac{1}{\beta}\ln N_\beta(E_{\vec{k}}) + (E_{\vec{k}}-\mu)\right]$$

???

Aufgabe 2 *Bose-Gas in einer 2D harmonischen Falle* **8 P.**

Ein Gas aus Bosonen mit Spin $S = 0$ sei in einem zweidimensionalen harmonischen Fallenpotential mit der Fallenfrequenz ω eingeschlossen. Die Zustandsdichte des Gases hat hierfür die Form $D(E) = E/(\hbar\omega)^2$.

a) Leiten Sie für diesen Fall einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und für die innere Energie U her. Drücken Sie anschließend das Resultat mithilfe der Bosefunktionen (Bose-Integrale) $g_\alpha(z)$ aus. *2 P.*

Definition: $g_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\xi^{\alpha-1}}{e^{\xi}/z - 1} d\xi$

$$N = \sum_{\substack{\text{Zustände} \\ E}} \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}$$

$$\to V \int_0^\infty \frac{D(E)}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} dE + \ln(1-z)$$

$$= \frac{V}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty \frac{E}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} dE + \ln(1-z)$$

$$= \frac{V}{(\hbar\omega)^2 \beta} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\beta}(\beta E)}{e^{\beta E} e^{-\beta\mu} - 1} d(\beta E) + \ln(1-z)$$

$$= \frac{V}{(\hbar\omega)^2 \beta^2} \Gamma(2) g_2(e^{-\beta\mu}) + \ln(1-z)$$

$$= \frac{V}{(\hbar\omega)^2 \beta^2} g_2(e^{-\beta\mu}) + \ln(1-z)$$

$$U = \sum_E \frac{E}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}$$ (kein Grundzustandbeitrag)

$$\to V \int_0^\infty \frac{E D(E)}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} dE$$

$$= \frac{V}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty \frac{E^2}{e^{\beta E} e^{-\beta\mu} - 1} dE$$

$$= \frac{V}{(\hbar\omega)^2 \beta^3} \int_0^\infty \frac{(\beta E)^2}{e^{\beta E} e^{-\beta\mu} - 1} d(\beta E)$$

$$= \frac{V}{(\hbar\omega)^2 \beta^3} \Gamma(3) g_3(e^{-\beta\mu})$$

$$= \frac{2V}{(\hbar\omega)^2 \beta^3} g_3(e^{-\beta\mu})$$

b) Zeigen Sie, dass für dieses System im thermodynamischen Limes die Relation $J = -\frac{1}{2}U$ zwischen der inneren Energie U und dem großkanonischen Potential J gilt. *1 P.*

$$J = k_B T \sum_E \ln\left(1-e^{-\beta(E-\mu)}\right)$$

$$\to \frac{V}{\beta}\int_0^\infty D(E)\ln\left(1-e^{-\beta(E-\mu)}\right)dE$$

$$= \frac{V}{\beta(\hbar\omega)^2}\int_0^\infty E\ln\left(1-e^{-\beta(E-\mu)}\right)dE$$

$$= \frac{V}{\beta(\hbar\omega)^2}\left[\left[\frac{E^2}{2}\ln\left(1-e^{-\beta(E-\mu)}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{E^2}{2}\frac{1}{1-e^{-\beta(E-\mu)}}\left(-e^{-\beta(E-\mu)}\right)(-\beta)\,dE\right.$$

$$= -\frac{V}{2(\hbar\omega)^2}\int_0^\infty E^2\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}-1}\,dE$$

$$= -\frac{V}{2(\hbar\omega)^2}\int_0^\infty \frac{1}{\beta^3}\frac{(\beta E)^2}{e^{\beta E}e^{-\beta\mu}-1}\,d(\beta E)$$

$$= -\frac{V}{2(\hbar\omega)^2\beta^3}\Gamma(3)\,g_3\left(e^{-\beta\mu}\right)$$

$$= -\frac{V}{(\hbar\omega)^2\beta^3}g_3\left(e^{-\beta\mu}\right) = -\frac{1}{2}U$$