Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Elektrodynamik, SoSe 2024

Übungsblatt XIII - Probeklausur

Bitte laden Sie Ihre Lösungen auf WUE Campus hoch, und zwar vor 16.00 Uhr am Montag, dem 15. Juli.

Sie dürfen in Dreiergruppen abgeben.

Bemerkung. Diese Probeklausur umfasst drei Textaufgaben. In der 'echten' Klausur gibt es zusätzlich eine Liste von Verständnisfragen.

1. Geladener Draht vor kugelförmigen Leiter

In der Ebene $x^3 = 0$ befindet sich ein kreisförmiger Draht mit dem Radius a. Sein Mittelpunkt befindet sich am Ursprung des Koordinatensystems. Er ist homogen mit der Gesamtladung Q aufgeladen.

a) Bestimmen Sie das auf der x^3-Achse herrschende elektrische Feld $\vec{E}(x^1 = 0, x^2 = 0, x^3)$.

In den Mittelpunkt des Drahtkreises wird nun eine dreidimensionale Kugel mit Radius r_0 platziert, mit $r_0 < a$, die ein geerdeter Leiter ist.

b) Zeigen Sie, dass die Green'sche Funktion für dieses Problem, mit Dirichlet-Randbedingungen auf der Kugeloberfläche, gegeben ist durch

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\frac{r_0}{|\vec{x}'|}}{4\pi\left|\vec{x} - \frac{{r_0}^2}{|\vec{x}'|^2}\vec{x}'\right|} \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie hierfür, dass die Differentialgleichung erfüllt ist, mit der die Green'sche Funktion definiert wird, und dass die Randbedingungen erfüllt sind.

c) Geben Sie das Potential $\phi(\vec{x})$ im Außenraum der Kugel in Form eines eindimensionalen Integrals an. Berechnen Sie dann das Potential auf der x^3-Achse, $\phi(x^1 = 0, x^2 = 0, x^3)$.

d) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(x^1 = 0, x^2 = 0, x^3)$ entlang der x^3-Achse außerhalb der Leiterkugel.

2. Elektromagnetische Wellen

a) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum (keine Ladungen oder Ströme vorhanden) die homogenen Wellengleichungen für die Felder $\vec{E}(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x})$ her.

b) Betrachten Sie eine ebene Welle, gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\,, \qquad \vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Lösungen der homogenen Wellengleichung sind.

c) Zeigen Sie, dass die Welle transversal ist, d.h. $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$. Drücken Sie $\vec{B}_0$ durch $\vec{E}_0$ aus.

d) Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Energiedichte $\langle w \rangle$ und den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor $\langle \vec{S} \rangle$. Schreiben Sie die Ergebnisse als Funktion nur von $\vec{E}_0$.

e) Die Welle trifft senkrecht auf einen Leiter. Berechnen Sie die Eindringtiefe δ, d.h. die Länge, nach der die Amplitude der Welle auf $1/e$ des Wertes der transmittierten Welle an der Oberfläche abgefallen ist. Der komplexe Brechungskoeffizient n erfüllt dabei $k = (\omega/c)n$, mit k der komplexen Wellenzahl.

Spezielle Relativitätstheorie

a) Geben Sie die Lorentz-Transformation in eine Raum- und einer Zeitdimension an, und leiten Sie daraus die Längenkontraktion und die Zeitdilatation her.

b) Geben Sie die Lorentz-Transformarion des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ in Matrixschreibweise (d.h. mit. $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$) an. Leiten Sie daraus, zusammen mit der expliziten Darstellung von $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ für die Transformation aus Teil a), das Transformationsverhalten der Felder $\vec{E}(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x})$ her.

c) Zeigen Sie, dass die Wirkung

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3}$$

invariant ist unter Lorentz-Transformationen.

d) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen der angegebenen Wirkung $\mathcal{S}$. Schreiben Sie dafür den Feldstärketensor mit Hilfe des Viererpotentials A^{μ}. Diskutieren Sie die Beziehung zwischen den erhaltenen Gleichungen und den Maxwell-Gleichungen.