Übungen zur Theoretische Quantenmechanik

Prof. Dr. Ansgar Denner, MSc. Christoph Haitz, Dr. Christopher Schwan SS 2024

Blatt 2 — Ausgabe: 22. April 2024 — Besprechung: 18./19. Kalenderwoche 2024

Aufgabe 5: Wellenpaket eines freien Teilchens **9 Punkte**

Betrachten Sie ein *freies*, punktförmiges Teilchen der Masse m, das sich entlang der x-Achse bewegt. Es wird durch die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschrieben. Die Wellenfunktion soll hinreichend schnell abfallen, so dass $\Psi(x,t)$ und deren Ableitungen nach x an den Integrationsgrenzen vernachlässigbar sind. Im folgenden sei $\langle x\rangle_t$ der Erwartungswert des Ortes zu einer gegebenen Zeit t.

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle x\rangle_t = \langle x\rangle_0 + v_0 t \qquad \text{mit} \qquad v_0 = \frac{1}{m}\int \mathrm{d}x \Psi^*(x,t)\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t).$$

Was ist die physikalische Interpretation dieser Relation? Was repräsentiert v_0?
Hinweis: Berechnen Sie die zeitliche Ableitung von $\langle x\rangle_t$ und nutzen Sie partielle Integration. **3 Punkte**

Untersuchen Sie anhand der folgenden Teilaufgaben, wie das Wellenpaket mit der Zeit zerfließt.

b) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\frac{\mathrm{d}\langle x^2\rangle_t}{\mathrm{d}t} = A(t) \qquad \text{mit} \qquad A(t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\int \mathrm{d}x\, x \left(\Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right).$$

2 Punkte

c) Zeigen Sie dann, dass

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = B(t) \qquad \text{mit} \qquad B(t) = \frac{2\hbar^2}{m^2}\int \mathrm{d}x \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

und dass $B(t)$ eine Konstante ist. **2 Punkte**

d) Verifizieren Sie, dass $\langle x^2\rangle_t = \langle x^2\rangle_0 + \xi_0 t + v_1^2 t^2$ und bestimmen Sie ξ_0 und v_1. **1 Punkt**

e) Zeigen Sie schließlich, dass $\Delta x_t^2 = \Delta x_0^2 + \xi_1 t + \Delta v^2 t^2$. Was ergibt sich für ξ_1 und Δv? Interpretieren Sie das Ergebnis. **1 Punkt**

Aufgabe 6: Gauß'sche Wellenpakete

Wir nehmen nun an, dass das Teilchen aus Aufgabe 5 durch ein Gauß'sches Wellenpaket beschrieben wird, d.h. durch eine Wellenfunktion der Form

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E(p)t/\hbar}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp/\hbar}\phi(p) \tag{1}$$

mit $E(p) = \frac{p^2}{2m}$ und $\phi(p) = N \exp\left[-\frac{(p-p_0)^2}{2\hbar^2\sigma^2}\right]$.

a) Berechnen Sie das Integral in Gl. (1) und zeigen Sie, dass es die Form

$$\Psi(x,t) = \frac{N\sigma\sqrt{\hbar}}{\sqrt{1+\mathrm{i}\frac{\hbar t}{m}\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-v_0 t)^2\sigma^2}{2\left(1+\mathrm{i}\frac{\hbar t}{m}\sigma^2\right)}}$$

annimmt mit $k_0 = p_0/\hbar$, $\omega_0 = p_0^2/(2m\hbar)$ und $v_0 = p_0/m$.
Hinweise: Bringen Sie das Integral mittels quadratischer Ergänzung auf die Form $\tilde{N}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{-c_1(p-c_2)^2}$ wobei $\tilde{N}, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Welche Bedingungen müssen c_1 und c_2 erfüllen, damit das Integral konvergiert? Verformen Sie für die Berechnung den Integrationsweg im Komplexen unter Ausnutzung der Analytizitätseigenschaften des Integranden im Integrationsgebiet. **5 Punkte**

b) Bestimmen Sie N. Zeigen Sie, dass $|\Psi(x,t)|^2$ in die Form

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{m^2}\sigma^4}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-v_0 t)^2\sigma^2}{1+\frac{\hbar^2 t^2}{m^2}\sigma^4}}$$

gebracht werden kann. **2 Punkte**

c) Berechnen Sie $\Delta x_t^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$. **2 Punkte**

d) Bestimmen Sie durch Vergleich mit Aufgabe 5 d) und e) die Werte für ξ_0, ξ_1, v_1 und Δv für ein Gauß'sches Wellenpaket. **1 Punkt**

e) Innerhalb welcher Zeit T verdoppelt sich die bei $t = 0$ vorhandene Breite Δx_0 in den folgenden Fällen:

(i) Ein Elektron, das durch ein Gauß'sches Wellenpaket beschrieben wird, ist anfänglich auf einen Atomdurchmesser $\Delta x_0 = 0.1\,\mathrm{nm}$ lokalisiert.

(ii) Die Masse 10^{-3}g von Wasser ist innerhalb eines Bereiches von $\Delta x_0 = 1\,\mathrm{mm}$ lokalisiert und wird durch ein Gauß'sches Wellenpaket beschrieben. **1 Punkt**

Web-Seite der Vorlesung:
`https://wuecampus2.uni-wuerzburg.de/moodle/course/view.php?id=65639`