Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

6. Übungsblatt

Hinweis:
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Mittwoch (22.11.2023) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Eine Verallgemeinerung des Rangsatzes (2 + 4 Pkte)**

   Es seien V, W zwei nicht notwendigerweise endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Wir definieren eine lineare Abbildung $\Phi : V \to \operatorname{im}(\Phi) \subseteq W$. Zeigen Sie:

   (a) Für jedes Komplement U von $\ker(\Phi)$, d.h. $V = \ker(\Phi) \oplus U$, ist
   $$\Phi\big|_U : U \to \operatorname{im}(\Phi)$$
   ein Isomorphismus.

   (b) Sei g eine Funktion der Art
   $$g : \operatorname{im}(\Phi) \to V, \quad b \mapsto x$$
   für ein ausgewähltes x, sodass $\Phi(x) = b$ und sei g linear, dann gilt
   $$V = \ker(\Phi) \oplus g(\operatorname{im}(\Phi)).$$

2. **Determinante von Blockmatrizen (4 + 3 Pkte)**

   Es sei A, B, C, D Matrizen über $\mathbb{K}$ in den Dimensionen $m \times m,\ m \times n,\ n \times m,\ n \times n.$

   (a) Zeigen Sie: Ist A invertierbar, dann gilt
   $$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

   (b) Beweisen Sie die Gleichheit
   $$\det(\mathbb{1}_m + BC) = \det(\mathbb{1}_n + CB).$$

3. **Spatprodukt (9 Pkte)**

   Gegeben seien die Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ \frac{3}{2}t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$
   Finden Sie alle $t \in \mathbb{R}$ für welche das Volumen des durch $v_1, v_2, v_3(t)$ aufgespannten Spat verschwindet. Für welche $t \in [1, 4]$ wird das Volumen maximal?

4. **Determinanten berechnen (6 + 6 + 6 Pkte)**

   Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

   (a) $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, mit
   $$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$
   und $a \neq 0$.
   Wenden Sie möglichst geschickt 2(a) an.

(b) $A \in \mathbb{K}^{n+1 \times n+1}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & t & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_n \end{pmatrix}$$

Sie dürfen die Entwicklungsformel nach Laplace verwenden

(c) $V_{ij},\ R_{i\lambda},\ S_{ij}\ \in \mathbb{K}^{n \times n}$ aus den Lemmata 5.56 - 5.58.