Universität Würzburg
Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Giorgio Sangiovanni
Linus Aliani, Alexander Baum,
Max Fischer, Jonathan Karl, Niklas Witt

11. Übung Statistische Mechanik und Thermodynamik

Bitte laden Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 23.01.2025 um 16:00 Uhr auf WueCampus hoch.
Die Blätter dürfen Sie dabei in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 *Bose-Einstein-Verteilung für das freie bosonische Gas* **7 P.**

Das großkanonische Potential des freien Bosegases (mit Spin $S = 0$) ist gegeben durch

$$\mathcal{J} = k_B\, T \sum_{\mathbf{k}} \log\left(1 - e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}-\mu)}\right) \,. \tag{1}$$

Die Bose-Einstein-Verteilung ist gegeben durch

$$N_B(E_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-\mu)} - 1} \,. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Entropie gegeben ist durch *3 P.*

$$S = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial T} = -k_B \sum_{\mathbf{k}} N_B(E_{\mathbf{k}}) \cdot \log[N_B(E_{\mathbf{k}})] - [1 + N_B(E_{\mathbf{k}})] \cdot \log[1 + N_B(E_{\mathbf{k}})] \,. \tag{3}$$

b) Leiten Sie aus dem großkanonischen Potential (1) her, dass die Gesamtteilchenzahl N und die innere Energie U gegeben sind durch *4 P.*

$$N = \sum_{\mathbf{k}} N_B(E_{\mathbf{k}}) \,, \quad U = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \cdot N_B(E_{\mathbf{k}}) \,. \tag{4}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 2 *Bose-Gas in einer 2D harmonischen Falle* **8 P.**

Ein Gas aus Bosonen mit Spin $S = 0$ sei in einem zweidimensionalen harmonischen Fallenpotential mit der Fallenfrequenz ω eingeschlossen. Die Zustandsdichte des Gases hat hierfür die Form $D(E) = E/(\hbar\omega)^2$.

a) Leiten Sie für diesen Fall einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und für die innere Energie U her. Drücken Sie anschließend das Resultat mithilfe der Bosefunktionen (Bose-Integrale) $g_\alpha(z)$ aus. *2 P.*

b) Zeigen Sie, dass für dieses System im thermodynamischen Limes die Relation $J = -\frac{1}{2}U$ zwischen der inneren Energie U und dem großkanonischen Potential J gilt. *1 P.*

c) Berechnen Sie die kritische Termperatur T_c und die Anzahl der kondensierten Teilchen N_0 als Funktion von T/T_c. *2 P.*

d) Betrachten Sie den klassischen Grenzfall, wobei $\sigma := N\,((\hbar\omega)/(k_B T))^2 \ll 1$ die Größenordnung der Zahl der Teilchen pro Fläche $\lambda_T \times \lambda_T$ beschreibt. λ_T meint hierbei die aus der Vorlesung bekannte thermische de-Broglie-Wellenlänge. Bestimmen Sie die Fugazität $z(\sigma)$ bis zur 3.Ordnung in σ. Schreiben Sie des Weiteren die innere Energie U als *3 P.*

$$U = 2\,N\,k_B\,T\,(1 + c_1\,\sigma + \ldots)$$

und bestimmen Sie den Koeffizienten c_1 für die Quantenkorrektur zur Energie.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $z = \alpha_1\sigma + \alpha_2\sigma^2 + \alpha_3\sigma^3 + \ldots$ und lösen Sie die auftretenden Gleichungen für α_i iterativ durch Vergleich der Potenzen von σ^n auf.