Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 5

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 22, 2023)

Problem 1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ nicht-negativ und messbar. Es existiere eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie, dass ein $\epsilon > 0$ und eine Menge $B \in A$ mit $\mu(B) > 0$ existieren, sodass $f(x) > \epsilon$ für alle $x \in B$ gibt.

Proof. Wir beweisen es per Widerspruch. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Dann für jedes $\epsilon > 0$ ist $\{f > \epsilon\}$ eine Nullmenge. (Wir wissen, dass die Menge messbar ist, weil f bessbar ist.)

Insbesondere gilt es für alle $\mathbb{Q} \ni \epsilon > 0$. Wir bezeichnen $\mathbb{Q}^+ := \{x | x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$. Es gilt

$$A \subseteq \{f > 0\} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^+} \{f > x\},$$

also

$$\begin{aligned} \mu(A) \leq& \mu(\{f > 0\}) \\ \leq& \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} \{f > x\} \\ =& \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} 0 \\ =& 0 \end{aligned}$$

also A ist eine Nullmenge, ein Widerspruch zu die Annahme, dass $\mu(A) > 0$. ∎

Problem 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei (f_n) punktweise μ-fast überall konvergent, d.h. es existiert ein μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ und eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, sodass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X \backslash N$ gilt. Zeigen Sie, dass f messbar ist.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Proof. Wir wissen, dass sowohl

$$f_s = \limsup_{n\to\infty} f_n \text{ als auch}$$
$$f_l = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

messbar sind. Es gilt auch $f_s(x) = f_l(x)$, $\forall x \in X\backslash N$. Sei jetzt $U \subseteq \mathbb{R}$ messbar. Es gilt $f^{-1}(U) = [f^{-1}(U) \cap N^c] \cup [f^{-1}(U) \cap N]$.

Es ist $f^{-1}(U) \cap N \in \mathcal{A}$, weil $f^{-1}(U) \cap N \subset N$, N ist eine Nullmenge und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist vollständig. Es gilt auch

$$f^{-1}(U) \cap N^c = f_{l/s}^{-1}(U) \cap N^c,$$

wobei $f_{l/s}$ bedeutet, dass entweder f_l oder f_s funktionert (hier möchten wir betonen, dass die beide Funktionen auf $X\backslash N$ gleich sind). Aber weil $f_{l/s}$ messbar sind, ist

$$f^{-1}(U) \cap N^c = \underbrace{f_{l/s}^{-1}(U)}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{N^c}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

Es ist dann

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{A}\ \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ messbar},$$

also f ist messbar. □

Problem 3. Sei $A \subsetneq \mathbb{R}$ nichtleer. Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A} := \{\varnothing, A, A^c, \mathbb{R}\}$ messbar sind.

Proof. Es gilt immer $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Außerdem wissen wir aus der Mengentheorie, dass $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A^c) = \varnothing$, und das Bild von einer nichtleeren Menge ist immer nichtleer. Die unterschiedliche Funktionen sind

$$\begin{array}{lll} f(A) = A & f(A^c) = A^c & f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \\ f(A) = A^c & f(A^c) = A & f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \end{array}$$

□

Problem 4. Der Beweis von Lemma 1.83 funktionert anstelle von $[0, 1]$ auch analog für jede beliebige Lebesgue-messbare Menge in $\mathbb{R}$, die keine Nullmenge ist. Das heißt für jede solche Menge existiert eine Teilmenge, die nicht Lebesgue-messbar ist. Sei nun f die Cantor-Funktion aus Präsenzübung 3 und definiere $g : [0, 1] \to [0, 2], x \to x + f(x)$.

Wir definieren die Funktionenfolge (f_n) durch $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to x$ und

$$f_{n+1} : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \to \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, & \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases} .$$

Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f.

(a) Zeigen Sie, dass g bijektiv und die Umkehrfunktion g^{-1} messbar ist.

(b) Zeigen Sie nun, dass der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda_1|_{\mathcal{B}^1})$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Nutzen Sie eine geeignete nicht Lebesgue-messbare Menge.

Proof. (a) Wir wissen, dass f stetig und monoton wachsend ist. Daraus folgt, das s $x + f(x)$ stetig und *streng* monoton wachsend ist. Es gilt auch $g(0) = 0$ und $g(1) = 2$.

Das g surjektiv ist folgt aus dem Zwischenwertsatz. g ist auch injektiv. Sei $x > y$. Dann gilt $g(x) > g(y)$, insbesondere $g(x) \neq g(y)$.

Es gilt $(g^{-1})^{-1} = g$, also wir betrachten eine messbare Teilmenge von $[0,1]$.

□