5. Übung zur Einführung in die Algebra

Abgabe online in WueCampus bis zum 27.11.2023, 12 Uhr

Aufgabe 5.1 (2+2 Punkte)

- (a) Begründen Sie, dass die Permutation $\sigma=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&5&8&3&9&1&6&4&2\end{smallmatrix}\right)\in S_9$ in der alternierenden Gruppe A_9 liegt. (Algebra-Staatsexamen Frühjahr 2021)
- (b) Finden Sie i und k, so dass die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix} \in S_9$ gerade ist. (Algebra-Staatsexamen Herbst 2019)

Aufgabe 5.2 (2+2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Die Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ seien disjunkt.

- (a) Beweisen Sie Lemma 2.41: Es gilt $\sigma \tau = \tau \sigma$.
- (b) Folgern Sie: Es ist $ord(\sigma \tau) = kgV(ord(\sigma), ord(\tau))$.

Aufgabe 5.3 (2+2 Punkte)

- (a) Zeigen Sie: Für jeden m-Zykel σ gilt ord(σ) = m.
- (b) Bestimmen Sie das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass S_n ein Element der Ordnung 20 enthält.

Aufgabe 5.4 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$V_4 := \{ \sigma \in A_4 \mid \operatorname{ord}(\sigma) \le 2 \}$$

eine Untergruppe der Ordnung 4 von A_4 (und daher auch S_4) ist.

(b) Zeigen Sie, dass V_4 ein Normalteiler von S_4 (und daher auch von A_4) ist.

Hinweis: V_4 heißt auch Kleinsche Vierergruppe.

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.