Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 7

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 19, 2023)

Problem 1. Sei

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \to \frac{x^2}{y^2}, \\
&A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2, xy \geq 1 \right\}.
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie $\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_2$.

Proof. Zuerst zeigen wir: f ist messbar. Wir betrachten dazu $\{f < \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ (Wenn $\alpha \leq 0$ ist die Menge die Leermenge, weil $f \geq 0$ stets). Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
x^2 &< \alpha y^2 \\
|x| &< \sqrt{\alpha} |y|
\end{aligned}
$$

Dann ist $\{f < \alpha\}$ eine Borelmenge, also f ist messbar.

Ähnlich wie in Übungen 8.2 ist A eine Borelmenge. Die dritte Voraussetzung kann umgeformt werden:

$$
\begin{aligned}
y &\geq 1/x \\
x &\geq y \geq 1/x
\end{aligned}
$$

was nur möglich ist, wenn $2 \geq x \geq 1$ und in diesem Fall ist der Schnitt $\{y | (x, y) \in A\}$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

nichtleer. Also wir berechnen das Integral über die Teilmenge nach der Präsenzübung

$$\begin{aligned}\int_A f \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[1,2]} \int_{A_x} f \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_1^2 \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(y) \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \int_1^2 -x^2 y^{-1}|_{1/x}^x \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 \\ &= \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

□

Problem 2. Sei

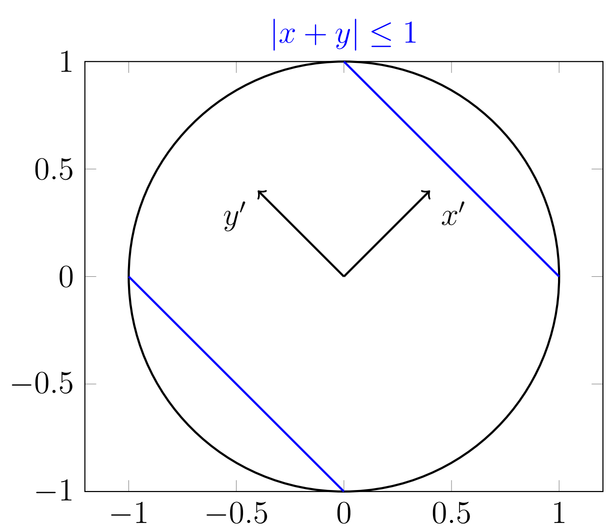
$$A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(A)$.

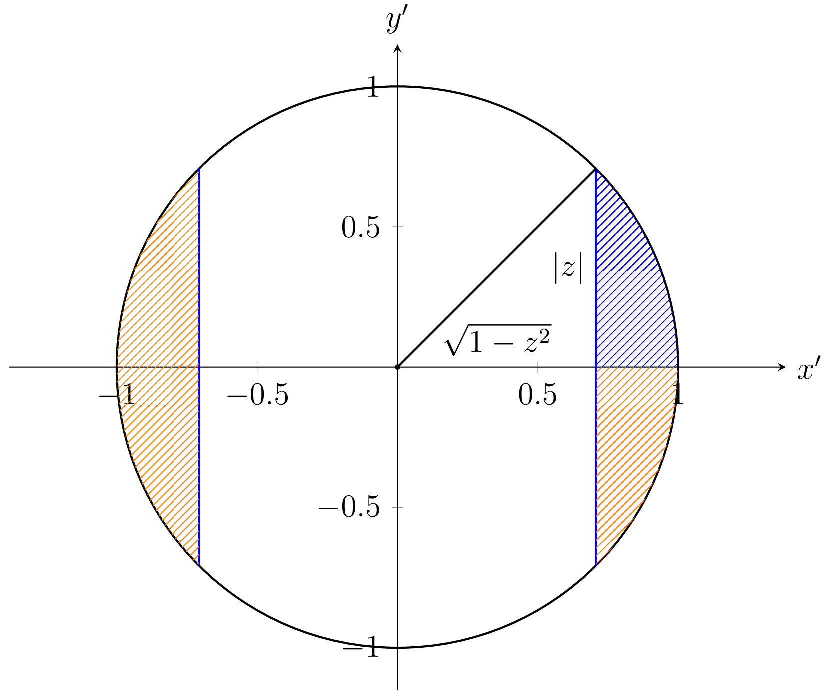
Hinweis: Rotation

Proof. A ist eine Borelmenge und daher messbar. Wir schreiben A_z. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \\ 2(1-z^2) &\geq (x+y)^2 \\ |x+y| &\leq \sqrt{2}\sqrt{1-z^2}\end{aligned}$$



Wir rotierenden dann das Koordinatensystem wie im Diagramm.



Das Maß der blauen Region ist

$$\frac{1}{2}\sin^{-1}|z| - \frac{1}{2}|z|\sqrt{1-z^2},$$

also das Maß von A_z ist

$$\begin{aligned}
\lambda_2(A_z) =& \pi(1)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}|z| - |z|\sqrt{1-z^2}\right)\\
=& \pi - 2\left(\sin^{-1}|z| - |z|\sqrt{1-z^2}\right)
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\lambda_3(A) =& \int_{-1}^{1} \pi - 2(\sin^{-1}|z| - |z|\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z\\
=& 2\int_{0}^{1} \pi - 2(\sin^{-1}|z| - |z|\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z\\
=& 2\int_{0}^{1} \pi - 2(\sin^{-1}z - z\sqrt{1-z^2})\,\mathrm{d}z\\
=& 2\left[\int_0^1 \pi\,\mathrm{d}z - 2\int_0^1 \sin^{-1}z\,\mathrm{d}z + 2\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right]\\
=& 2\left[\pi - 2\int_0^1 \sin^{-1}z\,\mathrm{d}z + 2\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right].
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin^{-1} z \,\mathrm{d}z =& z \sin^{-1} z|_0^1 - \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \,\mathrm{d}z \\
=& \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \,\mathrm{d}z \\
u =& 1-z^2, \qquad \mathrm{d}u = -2z \,\mathrm{d}z \\
\int_0^1 \sin^{-1} z \,\mathrm{d}z =& \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u \\
=& \frac{\pi}{2} + \sqrt{u}|_1^0 \\
=& \frac{\pi}{2} - 1 \\
\int_0^1 z\sqrt{1-z^2} \,\mathrm{d}z =& -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{u} \,\mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} \,\mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{3} u^{3/2}|_0^1 \\
=& \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(A) =& 2\left[\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{2}{3}\right] \\
=& 2\pi - 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{4}{3} \\
=& 2\pi - 2\pi + 4 + \frac{4}{3} \\
=& \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

□

Problem 3. Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n$. Definere damit die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \to a + Sx$. Sei außerdem $A \in \mathcal{L}(n)$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}(n) - B^1$ messbar, sodass $\chi_{\varphi(A)} f$ λ_n integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $\chi_A(f\circ\varphi)$ λ_n-integrierbar ist mit

$$\int_{\varphi(A)} f \,\mathrm{d}\lambda_n = |\det(S)| \int_A (f\circ\varphi) \,\mathrm{d}\lambda_n \,.$$

Hinweis: Lemma 2.92

Proof. Nach Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz ist $\varphi(A)$ messbar mit Maß $\lambda_n(\varphi(A)) = |\det(S)|\lambda_n(A)$. $\chi_{\varphi(A)}$ ist dann messbar. Weil φ affin ist, ist φ stetig und daher messbar. Dann ist $f\circ\varphi$ messbar, und als Produkt von messbare Funktionen ist $\chi_A(f\circ\varphi)$ λ_n-messbar.

Wir verwenden Lemma 2.93 und betrachten f^+. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu &= \int f^+ \chi_{\varphi(A)} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x : f^+(x)\chi_\varphi(A) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &= \int_0^\infty \mu(\{x : x \in \varphi(A) \wedge f^+(x) > t\} \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &= \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(x) > t\} \cap \varphi(A)) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)\end{aligned}$$

Weil φ bijektiv ist, gibt es für jedes Punkt $x \in \varphi(A),\ f^+(x) > t$ auch ein Punkt $y := \varphi^{-1}(x),\ y \in A,\ f^+(\varphi(y)) > t$ und andersherum. Daher ist

$$\{x : x \in \varphi(A) \wedge f^+(x) > t\} = \varphi(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\}).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu = &\int_0^\infty \mu(\varphi(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\})) \\ = &\int_0^\infty |\det(S)|\mu(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &\text{(Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz)} \\ =&|\det(S)| \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(\varphi(x)) > t\} \cap A) \\ =&|\det(S)| \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(\varphi(x))\chi_A(x) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\ =&|\det(S)| \int (f^+ \circ \varphi)\chi_A \,\mathrm{d}\lambda_n \\ =&|\det(S)| \int_A (f^+ \circ \varphi) \,\mathrm{d}\lambda_n\end{aligned}$$

Ähnlich gilt es auch für $-f^-$ und aus

$$\int_{\varphi(A)} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_{\varphi(A)} (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$$

auch für f. $\square$

Problem 4. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$. Für $h \in \mathbb{R}^n$ definiere die Funktion $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f_h(x) := f(x + h)$. Definiere außerdem die Abbildung

$$T_f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}^1(\lambda_n), \qquad h \to f_h.$$

Zeigen Sie:

(a) T_f ist wohldefiniert.

(b) T_f ist stetig.

Hinweis: Approximieren Sie die Funktion f

Proof. (a) Hier zeigen wir: $f_h(x) \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$. Wir brauchen zuerst: f_h ist messbar.

$$\{f_h < \alpha\} = \{f < \alpha\} + h,$$

was messbar ist, was sonst ein Widerspruch zu der Bewegungsinvarianz wäre. Weil $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ σ-endlich ist, verwenden wir Satz 2.93:

$$\begin{aligned}
\int |f| \, \mathrm{d}\lambda_n &= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f_h(x)| > t\}) \, \mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f(x)| > t\} + h) \, \mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f(x)| > t\}) \, \mathrm{d}\lambda_1(t) && \text{Bewegungsinvarianz} \\
&= \int |f| \, \mathrm{d}\lambda_n < \infty && \text{Voraussetzung}
\end{aligned}$$

also $f_h \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$.

(b) Zuerst beweisen wir es für f einfach, dann f im Allgemein. Sei $f = \sum_{j=1}^n a_i A_i$, $A_i \in \mathcal{L}(n)$ eine Darstellung von f. Sei außerdem $\epsilon > 0$ gegeben. Das Ziel ist: Wir finden ein $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| < \delta$, so dass

$$\begin{aligned}
\|f - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} &= \int \left| \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} - \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i+h} \right| \mathrm{d}\lambda_n \\
&= \int \left| \sum_{i=1}^n \left[a_i \left(\chi_{A_i} - \chi_{A_i+h} \right) \right] \right| \mathrm{d}\lambda_n \\
&\leq \int \sum_{i=1}^n a_i |\chi_{A_i} - \chi_{A_i+h}| \, \mathrm{d}\lambda_n \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \int |\chi_{A_i} - \chi_{A_i+h}| \, \mathrm{d}\lambda_n \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \int |\chi_{A_i \triangle A_i+h}| \, \mathrm{d}\lambda_n \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \lambda_n(A_i \triangle A_i + h)
\end{aligned}$$

Jetzt sei f beliebig. Nach Satz 2.101 und Satz 2.100 gibt es eine stetige Funktion mit kompaktem Support f_ϵ, so dass

$$\|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon.$$

Existenz der Funktion

(i) Nach Satz 2.101 gibt es eine integrierbare Funktion mit kompaktem Support g_ϵ, so dass $\|f - g_\epsilon\| < \epsilon$. Sei A der Träger von g_ϵ.

(ii) Wir betrachten den Maßraum $(A, \mathcal{L}(n)|_A, \lambda_n|_A)$ und die Funktion g_ϵ. Satz 2.100 angewandt auf diesen Maßraum ergibt eine Funktion h'_ϵ, so dass $\|g_\epsilon - h_\epsilon\| < \epsilon < 2$.

(iii) Sei jetzt $B \subseteq A$ die Teilmenge $B := \{x | g_\epsilon(x) = 0\}$. Falls $\lambda_n(B) = 0$, definiere

$$h_\epsilon = \begin{cases} h_\epsilon(x) & x \in A^c \\ 1 & x \in A \end{cases}.$$

und sonst

$$h_\epsilon = \begin{cases} h'_\epsilon(x) & x \in A^c \\ \frac{\epsilon}{2\lambda_n(B)} & x \in A \end{cases}.$$

Damit hat h_ϵ kompakten Träger, weil sie überall in A nicht null ist.

(iv) Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|g_\epsilon - h_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} &= \int |g_\epsilon - h_\epsilon| \,\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_{B^c} |g_\epsilon - h_\epsilon| \,\mathrm{d}\lambda_n + \int_B | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f - h_\epsilon\| &= \|f - g_\epsilon + g_\epsilon - h_\epsilon\| \\ &\leq \|f - g_\epsilon\| + \|g_\epsilon - h_\epsilon\| \end{aligned}$$

Wir definieren außerdem $f_{\epsilon,h} = f_\epsilon(x + h)$, was auch messbar und einfach ist. Aus Bewegungsinvarianz gilt

$$\|f_h - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} = \|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \epsilon.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\|f - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} =& \|f - f_\epsilon + f_\epsilon - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
=& \|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} + \|f_\epsilon - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
\leq& \epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h} + f_{\epsilon,h} - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
\leq& \epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} + \|f_{\epsilon,h} - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
\leq& 2\epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
\leq& 3\epsilon
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wir die vorherigen Gezeigten benutzt haben, um h hinreichend klein zu wählen, damit $\|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \epsilon$. □