

Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 19, 2024)

I. GRUND DER ANNAHME

Weshalb könnte man mit den gegebenen Informationen davon ausgehen, dass die registrierten γ -Quanten einer Poissonverteilung folgen?

Die Population ist unendlich. Die Anzahl von Versuche (hier: 336) ist groß. Die Größe $n \cdot p$ beträgt

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \text{ s} \cdot \frac{1}{10 \text{ years}} < 9,$$

also die beste Verteilung ist eine Poissonverteilung.

II. DATENTABELLE

Mittelwert : $\mu = 2,73214$

Standardabweichung : $\sigma = 1,67784$

Ereignisse	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Häufigkeit	11	89	65	71	48	28	16	6	2
Relative Häufigkeit	0,032738	0,26488	0,19345	0,21131	0,14286	0,083333	0,047619	0,017857	0,0059524
Poisson-Wahrscheinlichkeit	0,0650797	0,177807	0,242897	0,22121	0,151094	0,0825622	0,0375953	0,0146737	0,00501132

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

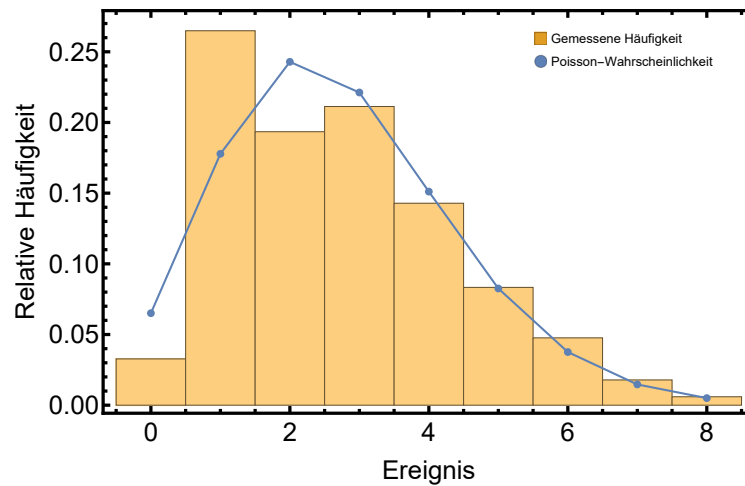


FIG. 1.

III. HISTOGRAMM

IV. ZENTRALE χ^2 VERTEILUNG

Dichtefunktion:

$$f_{\chi_n^2} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

Erwartungswert

$$\begin{aligned}
 E[x] &= \int_{\text{Supp } f} f_{\chi_n^2}(x) x \, dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x \, dx \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \, dx \\
 &= \frac{2}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \int_0^\infty (2x)^{\frac{n}{2}} \exp(-x) \, dx \\
 &= \frac{2}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}} \exp(-x) \, dx \\
 &= \frac{2}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\
 &= \frac{2}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \left(\frac{n}{2}\right)! \\
 &= 2(n/2) = n
 \end{aligned}$$

Varianz

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(x - \mu)^2] \\
&= E[(x - n)^2] \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) (x - n)^2 dx \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}+1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \\
&\quad - 2nx^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) + n^2 x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \left[2^{\frac{n}{2}+2} \Gamma\left(2 + \frac{n}{2}\right) - 2^{\frac{n}{2}+1} n^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + 2^{\frac{n}{2}} n^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \left[2^{\frac{n}{2}+2} \Gamma\left(2 + \frac{n}{2}\right) - 2^{\frac{n}{2}} n^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right] \\
&= \frac{4}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right)! - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \right] \\
&= 4 \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \right] \\
&= 2n
\end{aligned}$$