# Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 1


Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*



(Dated: April 16, 2024)


**Aufgabe 1.** Es seien $\mathbb{D} = K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{D}$.

(a) Zeigen Sie

$$|a - z| < |1 - \overline{a}z| \iff |z| < 1$$

und

$$|a - z| = |1 - \overline{a}z| \iff |z| = 1.$$

*Hinweis:* $|\cdot|^2$

(b) Es sei die folgende bijektive (holomorphe) Funktion definiert:

$$T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ T_a(z) := \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von $T_a$.

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned}
|a - z|^2 =& (a - z)\overline{(a - z)} \\
=& (a - z)(\overline{a} - \overline{z}) \\
=& |a|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |z|^2 \\
|1 - \overline{a}z|^2 =& (1 - \overline{a}z)(1 - \overline{a}z)^* \\
=& (1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{z}) \\
=& 1 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2|z|^2.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$|a - z| < |1 - \overline{a}z|$$


* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}
&\iff |a-z|^2 < |1-\bar{a}z|^2 \\
&\iff |a|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |z|^2 \\
&\qquad < 1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2,
\end{aligned}$$

was genau dann erfüllt ist, wenn

$$\begin{aligned}
|a|^2 + |z|^2 <& 1 + |a|^2|z|^2 \\
1 >& |a|^2 + |z|^2 - |a|^2|z|^2 \\
=& |a|^2 + |z|^2(1-|a|^2)
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die rechte Seite der Gleichung eine monoton steigende Funktion von $|z|^2$. Da $a \in \mathbb{D}$, ist $0 \le |a|^2 < 1$. Wenn wir $a$ als fest betrachten, und nach der passenden $|z|$ suchen, brauchen wir also nur einen Wert von $|z|$. Denn

$$|a|^2 + (1)(1-|a|^2) = 1,$$

ist 1 der "kritische Wert", also

$$\begin{aligned}
&1 > |a|^2 + |z|^2(1-|a|^2) \\
\iff &1 > |z|^2 \\
\iff &1 > |z|
\end{aligned}$$

Der zweite Teil folgt aus den gleichen Ausdrucke.

(b)

$$\begin{aligned}
T_a(x) =& \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \\
=& a\frac{1-z/a}{1-\bar{a}z} \\
=& a\frac{1-\frac{z}{a}+\bar{a}z-\bar{a}z}{1-\bar{a}z} \\
=& a\left[1+\frac{\bar{a}z-\frac{z}{a}}{1-\bar{a}z}\right] \\
=& a\left[1+\frac{\bar{a}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{z}-\bar{a}}\right]
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{\bar{a}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{z}-\bar{a}} = \frac{T_a(z)}{a} - 1$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}-\overline{a} =& \frac{\overline{a}-\frac{1}{a}}{\frac{T_a(z)}{a}-1}\\ \frac{1}{z} =& \frac{1}{\frac{T_a(z)}{a}-1}\left[\overline{a}-\frac{1}{a}+\frac{\overline{a}}{a}T_a(z)-\overline{a}\right]\\ =& \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{T_a(z)}{a}-1}\left[\overline{a}T_a(z)-1\right]\end{aligned}$$

Damit ist

$$T_a^{-1}(z) = \frac{z-a}{\overline{a}z-1}.$$ 🎉

**Aufgabe 2.** (a) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2}(e^{|y|} - e^{-|y|})$$

ist.

*Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung* $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ *vgl. Beispiel 1.8*

(b) Gegeben sei die Funktionfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$f_n(z) := \frac{\sin(nz)}{n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Geben Sie die Menge $M$ aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ an, für die $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \qquad z \in M.$$

(c) Konvergiert die Funktionfolge $\{f_n\}$ gleichmäßig auf $M$?

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned}|\sin(z)| =& \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right|\\ =& \frac{1}{2}\left|e^{iz}-e^{-iz}\right|\\ \geq& \frac{1}{2}\left[|e^{iz}|-|e^{-iz}|\right]\end{aligned} \tag{1}$$

Ähnlich ist

$$\sin(z) \geq \frac{1}{2}\left[|e^{-iz}|-|e^{iz}|\right]. \tag{2}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
|e^{\pm iz}| =& |e^{\pm i(x+iy)}| \\
=& |e^{\pm ix}e^{\mp y}| \\
=& |e^{\pm ix}||e^{\mp y}| \\
=& |e^{\mp y}| \\
=& e^{\mp y}
\end{aligned}$$

Einsetzen in entweder Gl. (1) oder GL. (2) liefert

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2}\left(e^{|y|} - e^{-|y|}\right). \tag{3}$$

(b) Wir betrachten deren Betrag

$$\begin{aligned}
|f_n(z)| =& \left|\frac{\sin(nz)}{n}\right| \\
\geq& \frac{1}{2n}[e^{|ny|} - e^{-|ny|}] \\
\geq& \frac{1}{2n}e^{n|y|}
\end{aligned}$$

Wenn $|y| \neq 0$, konvergiert die Folge nicht, da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

nach L'Hopital.

Damit konvergiert $\{f_n\}$ nicht, wenn $z \notin \mathbb{R}$ gilt .

Wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, konvergiert $\{f_n\}$, da

$$|f_n(z)| = \left|\frac{\sin(nz)}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right|,$$

was gegen 0 geht.

Insgesamt ist $M = \mathbb{R}$ und $f(z) = 0$.

(c) Ja. Da $|f_n(z)| \leq |1/n|$, ist auch $\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_n(z)| \leq |1/n|$. Damit konvergiert $\{f_n\}$ im Supremumsnorm. $\{f_n\}$ konvergiert also gleichmäßig. 🎉