Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 9

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 11, 2024)

Problem 1. (Stetigkeit, partielle und totale Differenzierbarkeit) Sind die Funktionen mit den Funktionswerten

(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/4}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

stetig, partiell oder total differenzierbar in $(0,0)$?

Proof. (a) Die Funktion ist stetig. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Sei $\delta = \epsilon^2$. Dann für alle $r \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|r - 0\| = \|r\| < \delta$ gilt $f(x,y) = (\|r\|^2)^{1/4} = \|r\|^{1/2} < \epsilon$.

Die Funktion ist nicht partiell differenzierbar. Für die Gerade $x = 0$ gilt $f(0,y) = (y^2)^{1/4} = \sqrt{|y|}$. Aber $g(y) = \sqrt{|y|}$ ist nicht bei 0 differenzierbar. Ähnlich ist sie auch nicht durch x partiell differenzierbar.

Weil die Funktion nicht partiell differenzierbar ist, ist sie auch nicht total differenzierbar.

□

Problem 2. (Tangenten von Kurven) Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt $t \in [a,b]$ ein regulärer Punkt, falls $\gamma'(t) \neq 0$. Andernfalls nennen wir t ein singulären Punkt.

Bestimmen Sie die Menge der regulären/singulären Punkte folgender Kurven:

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(a) $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (t^2, t^3)^T$,

(b) $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_2(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))^T$,

(c) $\gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_3(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$.

Problem 3. (Rechnen mit der Kettenregel) Der reelwertigen Funktionen $f(u_1, \ldots, u_n)$ und $u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m)$ seien auf den offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $G \subset \mathbb{R}^m$ erklärt, und die Funktion

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := f(u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m))$$

existiere auf G.

Im Folgenden ist jeweils die Ableitung $D\varphi$ der Funktion φ zu berechnen:

(a) $f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2; \qquad u(t) = e^t \cos t,\ v(t) = e^t \sin t,\ w(t) = e^t$,

(b) $f(u, v) = \ln(u^2 + v^2)$ für $(u, v) \neq (0, 0)$; $u(x, y) = xy,\ v(x, y) = \sqrt{x}/y$ für $x, y > 0$,

(c) $f(u, v, w) = uv + vw - uw; \qquad u(x, y) = x + y, v(x, y) = x + y^2, w(x, y) = x^2 + y$.

Problem 4. Beweisen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und geben Sie die Ableitung an:

(a) $f(x) = x^T Ax$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

(b) $f(X, Y) = XY$ für $(X, Y) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times k}$.

Problem 5. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = xy$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen kritischen Punkt in $(x, y) = (0, 0)$ besitzt, aber kein Extremum.