Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

6. Übungsblatt

Hinweis:
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Mittwoch (29.11.2023) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Dreiecksmatrizen (4 + 2 Pkte)**

   Betrachten Sie eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Zahlen $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ auf der Diagonalen.

   (a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $D := d_1 \cdots d_n \neq 0$ gilt. Beweisen Sie, dass in diesem Fall die zu A inverse Matrix ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist.

   (b) Seien nun alle Einträge von A ganze Zahlen und A invertierbar. Zeigen Sie, dass die inverse Matrix A^{-1} aus rationalen Einträgen besteht, wobei (im gekürzten Fall) als Nenner höchstens D auftritt.

2. **Eigenschaften der Spur (1 + 2 + 2 + 6 Pkte)**

   Es sei im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir definieren die Spur

   $$\mathrm{tr} \;:\; M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A \mapsto \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}.$$

   Zeigen Sie:

   (a) Die Spur ist ein lineares Funktional in $M_n(\mathbb{K})^*$.

   (b) Für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt
   $$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

   (c) Für $A \in GL_n(\mathbb{K})$ und $B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt
   $$\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}(B).$$

   (d) Ist $f \in M_n(\mathbb{K})^*$ ein lineares Funktional mit
   $$f(AB) = f(BA), \quad f(\mathbb{1}) = n$$
   für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, dann gilt bereits $f = \mathrm{tr}$.

3. **Eigenwerte und Eigenräume (3 + 6 + 6 + 6 Pkte)**

   Bestimmen Sie zu den folgenden linearen Abbildungen jeweils alle Eigenwerte und Eigenräume. Entscheiden Sie weiterhin, ob die entsprechende Abbildung diagonalisierbar ist.

   (a)
   $$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax,$$
   mit
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (b)
   $$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad x \mapsto Ax,$$
   mit A wie in (a).

   (c)
   $$T : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto \mathrm{tr}(A)\mathbb{1}_n.$$

(d)
$$T : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto A^T.$$

4. **Algebraische und geometrische Vielfachheit (5 Pkte)**

Über einen algebraisch vollständigen Körper $\mathbb{K}$ zerfällt das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_A(x)$ einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ immer in Linearfaktoren

$$\mathcal{X}_A(x) := \det(A - x\mathbb{1}) = (\lambda_1 - x)^{\mu_1} \cdot ... \cdot (\lambda_m - x)^{\mu_m}.$$

Dabei ist der Exponent μ_i die algebraische Vielfachheit zum Eigenwert λ_i und $n = \mu_1 + ... + \mu_m$. Es sei V_{λ_i} der Eigenraum zum Eigenwert λ_i, dann bezeichen wir die Dimension des Eigenraums

$$d_i := \dim(V_{\lambda_i})$$

als geometrische Vielfachheit von λ_i. Zeigen Sie: Es gilt immer

$$\mu_i \geq d_i \quad \forall i = 1, ..., m.$$

Hinweis: Führen Sie einen Basiswechsel mit einer möglichst geschickt gewählten Basis B durch