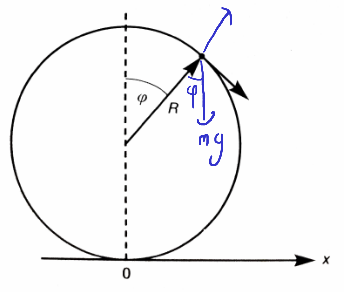
**Aufgabe 6.1:** *Rutschen von einer Kugel* ........................................(4 Punkte)

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei im Schwerefeld der Erde auf einer Kugel vom Radius $R$ herab (siehe Abb.). Die Bewegung beginnt im höchsten Punkt der Kugel aus der Ruhe. Die minimale Verschiebung aus dem labilen Gleichgewicht, die für den Start des Rutschvorgangs nötig ist, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden.




(2 P) a) Unter welchem Winkel $\varphi$ hebt der Massenpunkt von der Kugeloberfläche ab?

(2 P) b) In welchem Abstand $x_1$ vom Auflagepunkt der Kugel trifft der Massenpunkt auf der horizontalen Unterlage auf?

a) Erhaltung von Energie: $\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gR\cos\varphi = \cancel{m}gR$

$$v = \sqrt{2gR}\sqrt{1-\cos\varphi}$$

Zentripetalkraft

$$mg\cos\varphi - N = \frac{mv^2}{R}$$

$$mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R} = N \geq 0$$

$$\cancel{g}\cos\varphi - \frac{2\cancel{g}\cancel{R}(1-\cos\varphi)}{\cancel{R}} \geq 0$$

$$\cos\varphi - 2(1-\cos\varphi)$$

$$3\cos\varphi - 2 \geq 0$$

$$\cos\varphi \geq \frac{2}{3}$$

Er hebt ab, wenn $\cos\varphi = \frac{2}{3}$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

b) y-Komponent: $R + R\cos\varphi = vt\sin\varphi + \frac{1}{2}gt^2$

wobei $v = \sqrt{2gR}\sqrt{1-\cos\varphi}$

$$t = \frac{-v\sin\varphi \pm \sqrt{v^2\sin^2\varphi + 2gR(1+\cos\varphi)}}{g}$$

$\cos\varphi = \frac{2}{3}$, $\cos^2\varphi = \frac{4}{9}$

$$\sin^2\varphi = \frac{5}{9}$$

$$t = \frac{-v\sin\varphi \pm \sqrt{v^2\sin^2\varphi + 2gR(1+\cos\varphi)}}{g}$$

$$= \frac{-v\sin\varphi}{g} \pm \frac{1}{g}\left[2gR(1-\cos\varphi)\sin^2\varphi + 2gR(1+\cos\varphi)\right]^{1/2}$$

$$= -\frac{v\sin\varphi}{g} \pm \frac{1}{g}\left[2gR(1-\cos\varphi)\right]^{1/2}\left[\sin^2\varphi + 1\right]^{1/2}$$

$$= -\frac{v\sin\varphi}{g} \pm \frac{1}{g}\sqrt{2gR}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{14}{9}}$$

$$v = \sqrt{2gR}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t = \frac{\sqrt{2gR}}{g}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5}{9}} \pm \frac{\sqrt{2gR}}{g}\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2R}{g}}\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{5} \pm \sqrt{14}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{2R}{g}}\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{5} + \sqrt{14}\right)$$ aus physikalische Gründe

$$x = vt\sin\varphi + R\sin\varphi$$

$$= (vt + R)\sin\varphi$$

$$= \left[\sqrt{\frac{2\cancel{g}R}{3}}\sqrt{\frac{2R}{\cancel{g}}}\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{5} + \sqrt{14}\right) + R\right]\sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{9}}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}R\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{5} + \sqrt{14}\right) + R\right]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}\left[\frac{2}{9}\left(\sqrt{5} + \sqrt{14}\right) + 1\right]R$$