Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 8

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 6, 2024)

Problem 1. (a) Beweisen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung 15 zyklisch sind.

(b) Funktioniert die Schlussweise aus Aufgabenteil (a) auch bei Gruppen der Ordnung 45?

Proof. (a) $15 = 3 \times 5$, zwei Primzahlen, also die Teiler von 15 sind $1, 3, 5$ und 15. Da 3 teilt 15, $3^2 = 9$ aber nicht, gibt es mindestens eine 3-Sylowgruppe G_3. Für die Zahl der 3-Sylowgruppen n_3 gilt:

$$n_3 \equiv 1 \pmod 3$$
$$n_3 | [G : G_3] = 5$$

Aus den ersten Gleichung folgt: n_3 ist 1 oder 4. Da $4 \nmid 5$, ist $n_3 = 1$, also es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 3. Ähnlich gibt es genau eine Gruppe der Ordnung 5. Es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 1, die triviale Gruppe und genau eine Gruppe der Ordnung 15, die ganze Gruppe.

Da es für jeder Teiler t von 15 genau eine Untergruppe der Ordnung t gibt, sind alle solche Gruppen zyklisch.

(b) Nein. Es kann mehr als eine Gruppe der Ordnung 5 geben, weil für die Zahl der 5-Sylowgruppen n_5 gilt:

$$n_5 \equiv 1 \pmod 5$$
$$n_5 | 9$$

Eine Möglichkeit ist $n_5 = 6$, also wir dürfen den Fall, in dem mehr als eine Untergruppe der Ordnung 5 gibt, nicht ausschließen. □

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. (a) Seien p eine Primzahl, G eine Gruppe, P eine p-Sylowgruppe von G und n_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Zeigen Sie, dass $P \trianglelefteq G$ genau dann gilt, wenn $n_p = 1$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 12 nicht einfach ist.

Problem 3. Sei G eine Gruppe der Ordnung $392 = 2^3 \cdot 7^2$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Problem 4. (a) Sei G eine endliche Gruppe mit zyklischer *Zentrumsfaktorgruppe* $Z/Z(G)$. Zeigen Sie, dass dann $G = Z(G)$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Sind $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und G ein Gruppe der Ordnung p^2, so ist G abelsch.

(c) Sind auch Gruppen der Ordnung p^3 (mit primem $p \in \mathbb{P}$) stets abelsch?