Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 9, 2023)

Problem 1. (a) Seien $(X,\mathcal{A}),(Y,\mathcal{B})$ messbare Räume, $C \in A \otimes B$ und $a \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\{y \in Y | (a,y) \in C\} \in \mathcal{B}.$$

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann $M \times N$ eine λ_{m+n}-Nullmenge ist.

(c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine λ_m-Nullmenge und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann $M \times N$ eine λ_{m+n}-Nullmenge ist.

(d) Zeigen Sie Bemerkung 1.71, also dass $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n) \subsetneq \mathcal{L}(m+n)$.

Hinweis: Sie dürfen hierfür annehmen, dass $B \notin \mathcal{L}(n)$ tatsächlich existiert.

Proof. (a) Wir wissen, dass C eine abzählbare Vereinigung von Mengen $A_i \times B_i,\ A_i \in \mathcal{A},\ B_i \in \mathcal{B}$.

$\square$

Problem 2. Sei $A \in \mathcal{L}(n)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(K) | K \supseteq A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

(b) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(O) | O \subseteq A,\ O \text{ offen}\}.$$

Proof. (a) Falsch. Betrachten Sie $A = \mathbb{Q}$. Weil $\mathbb{Q}$ nicht beschränkt ist, gibt es keine kompakte Mengen K mit $K \supseteq A$. Deswegen ist

$$0 = \lambda_n(\mathbb{Q}) \neq \inf\{\lambda_n(K) | K \supseteq A,\ K \text{ kompakt}\} = \infty.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Bemerkung

Erinnern Sie sich daran, dass wir $\inf(\varnothing) = \infty$ definieren. Sonst kann man $\lambda_n(\mathbb{R})$ betrachten.

(b) Wahr.

$\square$