

Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 5, 2024)

Problem 1. Betrachten Sie den Vektorraum \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle v, w \rangle = \bar{v}^T w$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die adjungierte Abbildung von A , wie in Definition 7.66, ist gerade durch die in Definition 7.13 beschriebene adjungierte Matrix $A^* = \overline{A^T}$ gegeben.

(b) Es gilt $\text{tr}(A^*) = \overline{\text{tr}(A)}$.

(c) Es gilt $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

(d) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann Eigenwert von A , wenn $\bar{\lambda}$ Eigenwert von A^* ist.

Sei A nun ein invertierbarer und adjungierbarer Endomorphismus auf dem unitären Vektorraum V . Dann gilt

(e) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Proof. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle A^* v, w \rangle &= (A^* v)^T w \\ &= v^T (\overline{A^*})^T w \\ &= v^T (\overline{\overline{A^T}})^T w \\ &= v^T (\overline{\overline{A}})^T w \\ &= v^T \overline{\overline{A}} w \\ &= v^T A w \\ &= \langle v, A w \rangle\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A^*) &= \sum_{i=1}^n (A^*)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^n (\overline{A^T})_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{A_{ii}^T} \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{A_{ii}} \\
&= \overline{\sum_{i=1}^n A_{ii}} \\
&= \overline{\operatorname{tr}(A)}.
\end{aligned}$$

(c) Wir brauchen aus den vorherigen Übungsblätter: $\det(A^T) = \det A$. Wir wissen auch aus den Eigenschaften der komplexe Konjugierte

$$\overline{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^k a_{ij}} = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \overline{a_{ij}} \quad (1)$$

Es folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\det(A^*) &= \det(\overline{A^T}) \\
&= \overline{\det(A^T)} \\
&= \overline{\det(A)}
\end{aligned} \quad (1)$$

(d) Sei λ ein Eigenwert von A . Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\det(A^* - \overline{\lambda}I) &= \det(\overline{A^T} - \overline{\lambda}I) \\
&= \det(\overline{A^T - \lambda I^T}) \\
&= \det(\overline{(A - \lambda I)^T}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A^* . Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det(\overline{(\overline{A} - \overline{\lambda}I)}) \\
&= \det(\overline{((\overline{A^T} - \lambda I^T))^T}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(e) Sei $v, w \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle (A^*)^{-1}w, v \rangle &= \langle (A^*)^{-1}w, AA^{-1}v \rangle \\ &= \langle A^*(A^*)^{-1}w, A^{-1}v \rangle \\ &= \langle w, A^{-1}v \rangle\end{aligned}$$

also $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. □

Problem 2. Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

im unitären Vektorraum \mathbb{C}^4 , versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle x, y \rangle := \bar{x}^T y$. Sei $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U sowie von U^\perp .

Proof.

$$U^\perp = \ker \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2iR_1} \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & i & 4i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & -2i \\ 0 & 2 & i & 4i \end{pmatrix}$$

Eine Basis für den Kern ist dann

$$\begin{pmatrix} i \\ -i/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Gram-Schmidt-Algorithmus ergibt dann Orthonormalbasen. Für U ist $\langle v_2, v_1 \rangle = 3i$, $\langle v_1, v_1 \rangle = 6$. Dann ist eine Basis

$$\left\{ v_1, v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \\ 3i/2 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus ergibt sich eine Orthonormalbasis für U :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} \right\}.$$

Für U^\perp ist ähnlich eine Basis

$$\left\{ 3 \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i \\ -4i \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Problem 3. Sei $V_n \subset \mathbb{C}[x]$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Sei

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

für $f, g \in V_n$.

- (a) Zeigen Sie, dass durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V_n definiert ist.
- (b) Starten Sie mit der Basis der Monome $1, x, x^2, x^3$ und führen Sie den Gram-Schmidt-Algorithmus durch, um eine Orthonormalbasis von V_3 bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu finden.

Proof. (a) Die Linearitätseigenschaften folgen alle aus der Linearität des Integrals. Es bleibt positiv Definitheit zu zeigen.

(Es wurde nicht geschrieben, welche Definition des Integrals hier benutzt wurde. Ich benutze das Lebesgue-Integral, weil es einfacher ist).

Es gilt

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx.$$

Weil $|f| \geq 0$, ist das Integral ≥ 0 . Es ist 0 genau dann, wenn $|f(x)|^2$ λ_1 -fast überall 0 ist. Das Integral ist 0 genau dann, wenn $|f(x)|^2$ λ_1 -fast überall 0 ist. Aber alle Polynome sind stetig. $|f|^2$ ist dann als Verkettung stetiger Funktionen auch stetig und eine λ_1 -fast überall 0 stetige Funktion ist überall 0. Daraus folgt: $f = 0$, das Nullpolynom.

(b) (i) Das erste Element ist 1. Es gilt

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 \, dx = 1.$$

(ii) $\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 |x| \, dx = 1/2$. Das zweite Element ist $x - 1/2$. Es gilt

$$\left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{12}.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \langle x^2, 1 \rangle &= \int_0^1 x^2 \, dx = 1/3 \\ \left\langle x^2, x - \frac{1}{2} \right\rangle &= 1/12 \end{aligned}$$

Das zweite Element ist

$$x^2 - \frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Es gilt

$$\left\langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle = \frac{1}{180}.$$

(iv)

$$\begin{aligned} \langle x^3, 1 \rangle &= 1/4 \\ \left\langle x^3, x - \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{3}{40} \\ \left\langle x^3, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle &= \frac{1}{120} \end{aligned}$$

Dann ist das dritte Element

$$x^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{10} \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{1}{20}.$$

Insgesamt ist die Basis

$$\left\{ 1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}, x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{1}{20} \right\}.$$

□

Problem 4. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $M, N \subseteq V$ Teilmengen von V .

(a) Sei $N \subseteq M$. Zeigen Sie, dass dann $M^\perp \subseteq N^\perp$ gilt.

(b) Zeigen Sie $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ und geben Sie ein Beispiel für einen euklidischen oder unitären Vektorraum V , sowie eine Teilmenge $M \subseteq V$ an, sodass $M \neq (M^\perp)^\perp$.

(c) Zeigen Sie, dass das Orthogonalkomplement von M durch

$$M^\perp = \bigcap_{v \in M} \ker v^\flat$$

gegeben ist, wobei $v^\flat = \langle v, \cdot \rangle \in V^*$ wie in Bemerkung 7.2iii.

(d) Zeigen Sie, dass $(M^\perp)^{\perp\perp} = (M^{\perp\perp})^\perp$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass $M^\perp + N^\perp \subset (M \cap N)^\perp$ gilt.

(f) Zeigen Sie, dass $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$ gilt, wenn M und N Unterräume von V sind.

Beweisen oder widerlegen Sie:

(g) Es gilt $M^\perp \cup N^\perp \subset (M \cup N)^\perp$.

(h) Es gilt $(M \cup N)^\perp \subset M^\perp \cup N^\perp$.

Proof. (a) Sei $v \in M^\perp$. Per Definition gilt $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in M$. Dann gilt es auch für alle $w \in N$, weil $N \subseteq M$. Dann ist $M^\perp \subseteq N^\perp$.

(b) Sei $v \in M^\perp$, $w \in M$. Per Definition ist $\langle v, w \rangle = 0$ für alle solche w . Daraus folgt: $v \in (M^\perp)^\perp$ und $M \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Gegenbeispiel: Sei $V = \mathbb{C}[x]$ mit innerem Produkt

$$\langle a_0 + a_1x + \cdots + a_nx_n, b_0 + b_1x + \cdots + b_mx_m \rangle = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} a_i b_i$$

und M die Menge aller Polynome f , so dass für die Polynomfunktion $f(1) = 1$ gilt. Dann ist $M^\perp = \{0\}$ und $(M^\perp)^\perp = V$. Aber $M \neq V$ offenbar gilt.

(c) Die Definitionen sind gleich: Auf der linken Seite haben wir alle Vektoren $w \in V$, so dass $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $v \in M$.

Per Definition ist $w \in \ker v^\flat$ genau dann, wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Wenn w in alle $\ker v^\flat$ liegt, gilt das für alle v , was genau der Definition von M^\perp ist.

(d)

$$(M^\perp)^{\perp\perp} = ((M^\perp)^\perp)^\perp = (M^{\perp\perp})^\perp.$$

(e) Sei

$$v := \underbrace{v_M}_{\in M^\perp} + \underbrace{v_N}_{\in N^\perp} \in M^\perp + N^\perp$$

und $w \in M \cap N$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle w, v \rangle &= \cancel{\langle w, v_M \rangle} \xrightarrow{0} & w \in M \\ &+ \cancel{\langle w, v_N \rangle} \xrightarrow{0} & w \in N \\ &= 0 \end{aligned}$$

also $v \in (M \cap N)^\perp$. Daraus folgt: $M^\perp + N^\perp \subseteq (M \cap N)^\perp$.(f) Sei $v \in M^\perp \cap N^\perp$ und

$$w := \underbrace{w_M}_{\in M} + \underbrace{w_N}_{\in N} \in M + N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \cancel{\langle v, w_M \rangle} \xrightarrow{0} & v \in M^\perp \\ &+ \cancel{\langle v, w_N \rangle} \xrightarrow{0} & v \in N^\perp \\ &= 0 \end{aligned}$$

also $(M + N)^\perp \supseteq M^\perp \cap N^\perp$.Sei jetzt $v \in (M + N)^\perp$ und $w \in M$. Da $M + N \supseteq M$ und $M + N \supseteq N$ gilt, ist

$$\begin{aligned} (M + N)^\perp &\subseteq M^\perp \\ (M + N)^\perp &\subseteq N^\perp \end{aligned}$$

und daher

$$(M + N)^\perp \subseteq M^\perp \cap N^\perp.$$

(g) Falsch. Sei $V = \mathbb{R}^3$, $M = \text{span}((1, 0, 0)^T)$, $N = \text{span}((0, 1, 0)^T)$. Es gilt

$$M^\perp = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$N^\perp = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$(M \cup N)^\perp = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(h) Wahr. Es gilt $M \cup N \supseteq M$ und $M \cup N \supseteq N$. Daraus folgt:

$$(M \cup N)^\perp \subseteq M^\perp$$

$$(M \cup N)^\perp \subseteq N^\perp$$

Die Behauptung folgt.

□