Übungen zur

Einführung in die Differentialgeometrie
(Sommersemester 2024)

Prof. Dr. Madeleine Jotz*
Dr. Spyridon Kakaroumpas†

Übungsblatt 2

22. 04. 2024

Präsenzaufgabe 2-1:

Auf einem Kreis mit Radius 4 rollt innen ein Kreis mit Radius 1 ab. Die Kurve, die dabei ein fest gewählter Punkt auf dem kleineren Kreis beschreibt, heißt *Astroide* (dt. „sternähnliche Kurve “).

i.) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Astroide und fertigen Sie eine Skizze der Kurve an (oder visualisieren Sie sie auf Geogebra). An welchen Stellen ist Ihre Parametrisierung *singulär*?

ii.) Seien a, b mit $a < b$ beliebige Punkte aus dem Definitionsbereich Ihrer Parametrisierung. Leiten Sie eine Formel für die Bogenlänge Ihrer parametrisierten Kurve auf dem Intervall $[a, b]$ her.

Präsenzaufgabe 2-2:

Betrachten Sie die *Traktrix* (dt. „Ziehkurve“) $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := \left(\cos t + \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), \sin t\right), \quad t \in (0, \pi).$$

i.) Skizzieren Sie die gegebene parametrisierte Kurve (oder visualisieren Sie sie auf Geogebra).

ii.) Zeigen Sie, dass jede Tangente der Traktrix die x-Achse schneidet, und dass die Länge der Strecke der Tangente zwischen dem Berührungspunkt mit der Traktrix und dem Schnittpunkt mit der x-Achse für alle Tangenten der Traktrix gleich ist.

* `madeleine.jotz@uni-wuerzburg.de`
† `spyridon.kakaroumpas@uni-wuerzburg.de`

Peer-Review Aufgabe 2:

i.) Sei $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ und seien $r\colon (\alpha,\beta) \to [0,\infty)$ und $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Leiten Sie eine Formel für die Bogenlänge der in *Polarcoordinaten* parametrisierten Kurve $\gamma\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t)), \quad t \in (\alpha,\beta)$$

auf dem Intervall $[a,b]$ her, wobei $\alpha < a < b < \beta$.

ii.) Berechnen Sie die Bogenlänge der *archimedischen Spirale* $\gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) := (t\cos t, t\sin t), \quad t \in (0,\infty)$$

auf dem Intervall $[\pi, 2\pi]$. Skizzieren Sie die Kurve γ (oder zeichnen Sie sie mit Geogebra).

Abgabe auf WueCampus bis 29. 04. 2024, 10:00 Uhr.

Hausaufgabe 2-1:

Betrachten Sie die parametrisierte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

i.) Berechnen Sie die Bogenlänge von γ auf dem Intervall $[0, 1]$.

ii.) Handelt es sich bei γ um eine reguläre Kurve?

iii.) Finden Sie eine Umparametrisierung von γ nach Bogenlänge.

Hausaufgabe 2-2:

Sei $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ und sei $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge reguläre parametrisierte Kurve. Ist $\varphi : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to (\alpha, \beta)$ eine glatte Parametertransformation mit $-\infty \le \tilde{\alpha} < \tilde{\beta} \le \infty$ derart, dass die Kurve $\gamma \circ \varphi : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to \mathbb{R}$ ebenfalls nach Bogenlänge parametrisiert ist, so gilt notwendigerweise eines von beidem:

1. Es gibt $c \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{\alpha} = \alpha - c$, $\tilde{\beta} = \beta - c$ und $\varphi(t) = t + c$, für alle $t \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

2. Es gibt $c \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{\alpha} = -\alpha + c$, $\tilde{\beta} = -\beta + c$ und $\varphi(t) = -t + c$, für alle $t \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Hausaufgabe 2-3:

Sei $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ und sei $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Sei $t_0 \in (\alpha, \beta)$ mit $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es $\varepsilon > 0$ mit $\alpha < t_0 - \varepsilon < t_0 + \varepsilon < \beta$ und eine stetig differenzierbare Parametertransformation $\varphi \colon (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ mit $-\infty \le \tilde{\alpha} < \tilde{\beta} \le \infty$ gibt, sodass für die Umparametrisierung $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi \colon (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to \mathbb{R}^2$ von $\gamma|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} \colon (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ eines von beidem gilt:

1. Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f \colon (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (t, f(t))$, für alle $t \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

2. Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $g \colon (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (g(t), t)$, für alle $t \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.