

Theoretische Mechanik Hausaufgaben Blatt Nr. 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 3, 2023)

Problem 1. Die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen lautet:

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \omega^2 \vec{x} = 0 \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Entwickeln Sie den Ortsvektor $x(t)$ und seine zeitlichen Ableitungen in der Polarkoordinatenbasis $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\phi\}$ und überzeugen Sie sich, dass die so aus (1) folgenden Differentialgleichungen den Bewegungsgleichungen entsprechen, die Sie wie in der Vorlesung mittels der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

direkt aus der Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $q_i = r, \phi$ erhalten.

Proof.

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}} &= \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + r \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{x}} &= \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} + r\dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weil $(\cos \phi, \sin \phi)^T$ und $(\sin \phi, \cos \phi)^T$ linear unabhängig (sogar orthogonal) sind, kann die Gleichung $\ddot{\vec{x}} + \omega^2 \vec{x}(t)$ als

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r = 0$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Man schreibt auch direkt die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$r : m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + m\omega^2 r = 0$$

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r = 0$$

$$\phi : \frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\phi} \right) = 0$$

$$2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = 0$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0.$$

□

Problem 2. Eine Punktmasse m rotiere reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen gespannten Faden der Länge l ($l = r + s$) sei sie durch ein Loch in der Platte mit einer anderen Masse M verbunden (s. Skizze). Wie bewegt sich M unter dem Einfluss der Schwerkraft?

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen.
2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten s und φ auf und ermitteln Sie daraus die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \text{const} \equiv C$ gilt.
3. Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2, um die φ -Abhängigkeit in der Differentialgleichung für s zu eliminieren. Betrachten Sie nun den Gleichgewichtsfall $s(t) = \text{const}$ und finden Sie einen Ausdruck für die resultierende Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t) = \text{const} \equiv \omega_0$ der Masse m . Ausgehend vom Gleichgewichtsfall, unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?
4. Diskutieren Sie das Ergebnis für die Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(t_0) = 0$.

Proof. 1. $\frac{dl}{dt} = 0$.

2.

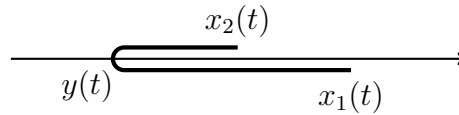
$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + Mg(l - r).$$

Weil $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, gilt aus der Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$, also $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \equiv C$.

3. Weil $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \equiv C$, gilt

□

Problem 3. Eine einmal gefaltete Schnur mit Gesamtlänge l und konstanter Masse pro Länge ρ bewegt sich auf der x -Achse. Die Endpunkte der Schnur seien mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet. Die Stelle, an der die Schnur gefaltet ist, sei mit $y(t)$ bezeichnet.



1. Geben Sie die Zwangsbedingungen des Systems an.
2. Geben Sie eine Langrangefunktion des Systems an.

Betrachten Sie für die kinetische Energie T die Endpunkte x_1 und x_2 , deren “Masse” durch die integrierte Masse des Schnurstücks zwischen x_1 und y bzw. x_2 und y gegeben ist.

3. Die Lagrangefunktion kann in den Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = x_1 - x_2 \text{ und } X = \frac{1}{2l} [(x_1 - y)(x_1 + y) + (x_2 - y)(x_2 + y)]$$

zu

$$L = \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\xi}^2$$

umgeschrieben werden, wobei M und μ Funktionen von X und ξ sind. Bestimmen Sie M und μ durch den Vergleich der Lagrangefunktionen in Koordinaten (x_1, x_2) und (X, ξ) .

Proof. 1. $l = x_2(t) - y(t) + x_1(t) - y(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2y(t)$

□