Einfürung in die Differentialgeometrie Hausaufgaben Blatt Nr. 2

Max Mustermann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 28, 2024)

Aufgabe 1. (a) Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und seien $r : (\alpha, \beta) \to [0, \infty)$ und $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Leiten Sie eine Formel für die Bogenlänge der in Polarkoordinaten parametrisierten Kurve $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := (r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t)), \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

auf dem Intervall $[a, b]$ her, wobei $\alpha < a < b < \beta$.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der archimedischen Spirale $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) := (t \cos t, t \sin t), \qquad t \in (0, \infty)$$

auf dem Intervall $[\pi, 2\pi]$. Skizzieren Sie die Kurve γ (oder zeichnen Sie mit Geogebra).

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} r'(t) \cos \varphi(t) - r(t)\varphi'(t) \sin \varphi(t) \\ r'(t) \sin \varphi(t) + r(t)\varphi'(t) \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \\
\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \varphi'(t)^2} \\
l &= \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \varphi'(t)^2} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(b) Wir idenfizieren $r(t) = t \ \varphi(t) = t$. Damit ist

$$\begin{aligned}
l &= \int_\pi^{2\pi} \sqrt{1^2 + t^2} \, \mathrm{d}t \\
t &= \sinh u \ \ \mathrm{d}t = \cosh u \, \mathrm{d}u \\
l &= \int_{\sinh^{-1} \pi}^{\sinh^{-1} 2\pi} \cosh^2 u \, \mathrm{d}u \\
&= \int_{\sinh^{-1} \pi}^{\sinh^{-1} 2\pi} \frac{1}{4} \left(e^u + e^{-u}\right)^2 \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}e^{-2u} + 2u\right]_{\sinh^{-1}\pi}^{\sinh^{-1}2\pi} \\
&= \frac{1}{4}\left[\sinh(2u) + 2u\right]_{\sinh^{-1}\pi}^{\sinh^{-1}2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[t(1+t^2) + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right]_{t=\pi}^{t=2\pi}.
\end{aligned}
$$

🎉