Elektrodynamik Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 25, 2024)

Problem 1. Vektorpotential für ein homogenes Magnetfeld Wir betrachten ein konstantes, homogenes Magnetfeld $\vec{B}$, das entlang der z-Richtung orientiert ist, d.h. $\vec{B} = (0, 0, B)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ ein Vektorpotential für $\vec{B}$ ist.

(b) Finden Sie für $\vec{B}$ ein Vektorpotential $\vec{A}'$, das in x-Richtung orientiert ist. Geben Sie eine Eichtransformation an, die $\vec{A}'$ in $\vec{A}$ überführt.

(c) Zeigen Sie, dass auch $\vec{A}'' = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}$ ein Vektorpotential für $\vec{B}$ ist. Geben Sie auch hier eine Eichtransformation an, die $\vec{A}''$ in $\vec{A}$ überführt.

Proof. (a)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A} =& \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Bx & 0 \end{vmatrix} \\ =& B\hat{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

(b) Durch eine direkte Rechnung

$$\vec{A}' = -By\hat{\mathbf{e}}_y.$$

Die gewünschte Eichtransformation ist definiert durch eine Funktion $f = -Bxy$, und die Eichtransformation

$$\vec{A}' \mapsto \vec{A}' + \boldsymbol{\nabla} f.$$

(c) Die Rechnung ergibt das Potential

$$\vec{A}'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Aus $\vec{A}'' = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{A}')$ sieht man einfach, dass das ein Vektorpotential ist.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}'' &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{A}'\right) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}' \\ &= \frac{1}{2}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{B} \\ &= \vec{B}\end{aligned}$$

Die Eichtransformation ist definiert durch $f = -Bxy/2$. $\square$