Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 9

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 16, 2024)

Problem 1. (Stetigkeit, partielle und totale Differenzierbarkeit) Sind die Funktionen mit den Funktionswerten

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/4}$,

(b) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

stetig, partiell oder total differenzierbar in $(0, 0)$?

Proof. (a) Die Funktion ist stetig. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Sei $\delta = \epsilon^2$. Dann für alle $r \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|r - 0\| = \|r\| < \delta$ gilt $f(x, y) = (\|r\|^2)^{1/4} = \|r\|^{1/2} < \epsilon$.

Die Funktion ist nicht partiell differenzierbar. Für die Gerade $x = 0$ gilt $f(0, y) = (y^2)^{1/4} = \sqrt{|y|}$. Aber $g(y) = \sqrt{|y|}$ ist nicht bei 0 differenzierbar. Ähnlich ist sie auch nicht durch x partiell differenzierbar.

Weil die Funktion nicht partiell differenzierbar ist, ist sie auch nicht total differenzierbar.

(b) Die Funktion ist stetig. Es gilt

$$\left|(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right| \leq (x^2 + y^2).$$

Da $x^2 + y^2 \to 0$ wenn $(x, y) \to (0, 0)$, gilt es auch fü $f(x, y)$ und $f(x, y)$ ist in $(0, 0)$ stetig.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Sie ist nicht partiell differenzierbar. z.B. Für die Gerade $y = 0$ ist $f(x,0) = x^2\sin(1/|x|)$, was nicht differenzierbar bei 0 ist. Ähnlich existiert auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht.

Weil f nicht partiell differenzierbar ist, ist f nicht total differenzierbar.

(c) Die Funktion ist stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \frac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} \\ =& \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}} \end{aligned}$$

Da $\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to \infty$ wenn $(x,y) \to (0,0)$, geht die Funktion $f(x,y) \to 0$. Dann ist $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, also die Funktion ist stetig.

Sie ist auch partiell differenzierbar. Da $f(x,0) = 0$, ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Es gilt

$$f(0,y) = \frac{y(y^2)^{3/2}}{y^4+y^2}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} &= \lim_{y\to 0} \frac{(y^2)^{3/2}}{y^4+y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{|y|^3}{y^4+y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y^2+1} \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{y^2+1}$ stetig ist und $\frac{1}{y^2+1} \to 0$ wenn $y \to 0$, existiert der Grenzwert. Der Grenzwert ist auch 0.

Sie ist aber nicht total differenzierbar. Falls eine Ableitung existiere, kann die Ableitung durch die partielle Ableitungen dargestellt werden. Diese Darstellung liefert eine totale Ableitung von 0. Es würde also gelten:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2+y^2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{(x^2+y^2)+\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\frac{x^2}{y}+y+\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$\square$

Problem 2. (Tangenten von Kurven) Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt $t \in [a,b]$ ein regulärer Punkt, falls $\gamma'(t) \neq 0$. Andernfalls nennen wir t ein singulären Punkt.

Bestimmen Sie die Menge der regulären/singulären Punkte folgender Kurven:

(a) $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (t^2, t^3)^T$,

(b) $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_2(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))^T$,

(c) $\gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_3(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$.

Proof. (a) $\gamma_1(t) = (2t, 3t^2)^T$.

Singulären Punkte: $\{0\}$.

Regularären Punkte: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(b) $\gamma_2'(t) = (3\cos^2(t)(-\sin t), 2\sin^2(t)\cos t)$, also

Singulären Punkte: $S = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$

Regulären Punkte: $[0, 2\pi]\backslash S$.

(c) $\gamma_3'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t - t\cos t, 1)^T$

Die Ableitung ist nie der Nullvektor, also

Singulären Punkte: $\varnothing$

Regulären Punkte: $[0, 2\pi]$. $\square$

Problem 3. (Rechnen mit der Kettenregel) Der reelwertigen Funktionen $f(u_1, \dots, u_n)$ und $u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m)$ seien auf den offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $G \subset \mathbb{R}^m$ erklärt, und die Funktion

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) := f(u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m))$$

existiere auf G.

Im Folgenden ist jeweils die Ableitung $D\varphi$ der Funktion φ zu berechnen:

(a) $f(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2; \qquad u(t) = e^t \cos t,\ v(t) = e^t \sin t,\ w(t) = e^t,$

(b) $f(u,v) = \ln(u^2+v^2)$ für $(u,v) \neq (0,0)$; $u(x,y) = xy,\ v(x,y) = \sqrt{x}/y$ für $x,y > 0,$

(c) $f(u,v,w) = uv + vw - uw; \qquad u(x,y) = x+y, v(x,y) = x+y^2, w(x,y) = x^2+y.$

Proof. (a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \to (u(t), v(t), w(t))^T$. Es gilt

$$\begin{aligned}
D(f \circ g)(t) =& Df(g(t))Dg(t) \\
=& (2u, 2v, 2w)(u'(t), v'(t), w'(t))^T \\
=& 2uu'(t) + 2vv'(t) + 2ww'(t) \\
=& 2(e^t \cos t)(e^t \cos t - e^t \sin t) \\
& + 2(e^t \sin t)(e^t \sin t + e^t \cos t) + 2e^{2t} \\
=& 4e^{2t}.
\end{aligned}$$

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \to (u(x,y), v(x,y))^T$. Es gilt

$$Df = \left(\frac{2u}{u^2+v^2}, \frac{2v}{u^2+v^2} \right)$$

$$Dg = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & \sqrt{x} \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned}
D(f \circ g)(x,y) =& Df(g(x,y))Dg(x,y) \\
=& \left(\frac{2xy}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}, \frac{2\sqrt{x}/y}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \right) \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & \sqrt{x} \end{pmatrix} \\
=& \left(\frac{1+2xy^4}{x+x^2y^4}, \frac{2y(1+xy^2)}{1+xy^4} \right)
\end{aligned}$$

(c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \to (u(x,y), v(x,y), w(x,y))^T$. Es gilt

$$Df(u,v,w) = (v-w, u+w, v-u)$$

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
D(f\circ g)(x,y) =& Df(g(x,y))Dg(x,y)\\
=&(x+y^2-x^2-y, x^2+x+2y, y^2-y)\\
&\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2y\\ 2x & 1\end{pmatrix}\\
=&(y(1+y)+2x(1-y+y^2),\\
&x+2xy+x^2(2y-1)+2y(3y-1)).
\end{aligned}
$$

□

Problem 4. Beweisen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und geben Sie die Ableitung an:

(a) $f(x) = x^T Ax$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

(b) $f(X,Y) = XY$ für $(X,Y) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times k}$.

Proof. (a) Wir berechnen $f'(x_0)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\delta x) =& (x_0+\delta x)^T A(x_0+\delta x)\\
=& x_0Ax_0 + (\delta x)^T Ax_0 + (x_0)^T A(\delta x)\\
&+ (\delta x)^T A(\delta x)\\
=& f(x_0) + ((x_0)^T A^T\delta x)^T + (x_0)^T A(\delta x)\\
&+ (\delta x)^T A(\delta x)\\
=& f(x_0) + x_0^T A^T(\delta x) + (x_0)^T A(\delta x) && (x_0)^T A^T\delta x \in \mathbb{R}\\
&+ (\delta x)^T A(\delta x)\\
=& f(x_0) + x_0^T(A^T+A)(\delta x) + (\delta x)^T A(\delta x)
\end{aligned}
$$

Wir idenfizieren $Df(x_0) = x_0^T(A^T+A)$. Es bleibt zu zeigen, dass $(\delta x)^T A(\delta x)$ eigentlich die Restabbildung ist. Da

$$\lim_{\|\delta x\|\to 0}\left|\frac{(\delta x)^T}{\|\delta x\|}A\delta x\right| \le \lim_{\|\delta x\|\to 0}\|A\|\|\delta x\| = 0,$$

gilt die Behauptung.

(b) Ähnlich berechnen wir $f'(X_0, Y_0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(X_0 + \delta X, Y_0 + \delta Y) =& (X_0 + \delta X)(Y_0 + \delta Y) \\ =& X_0 Y_0 + (\delta X) Y_0 + X_0(\delta Y) + (\delta X)(\delta Y) \end{aligned}$$

□

Problem 5. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = xy$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen kritischen Punkt in $(x, y) = (0, 0)$ besitzt, aber kein Extremum.

Proof.

$$f'(x, y) = (y, x)^T$$

und $f'(0, 0) = (0, 0)$. Die Funktion besitzt in $(0, 0)$ daher einen kritischen Punkt. Es ist aber kein Extremum. Es gilt $f(0, 0) = 0$. Es ist kein Maximum, weil auf der Gerade $x = y = t$ gilt $f(t, t) = t^2 > 0$ für $t \neq 0$, also in jede offene Menge bzw. offenem Kugel gibt es mindestens ein Punkt $(x, y) = (t, t)$, so dass $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$. Ähnlich gilt, auf der Gerade $(x, y) = (t, -t)$, $f(t, -t) = -t^2 < 0$, also $f(0, 0)$ ist kein Minimum. Dann besitzt f kein Extremum in $(0, 0)$. □