Elektrodynamik Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 29, 2024)

Problem 1. Die allgemeine Form des Stokes'schen Satzes lautet

$$\int_{\partial A} \omega = \int_A \mathrm{d}\omega \,,$$

wobei $\mathcal{M}$ eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und $A \in M$ ein d-dimensionales Gebiet darin mit Rand ∂A. Weiterhin ist ω eine $(d-1)$-Form und $\mathrm{d}\omega$ eine äußere Ableitung von ω. Das Dachprodukt wird mit $\wedge$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass Sie aus (1) im Spezialfall $\mathcal{M} = V \in \mathbb{R}^3$ und

$$\omega = E_1 \,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + E_2 \,\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + E_3 \,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$$

den aus der Elektrodynamik bekannten Gauß'schen Integralsatz erhalten,

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \int_V \mathrm{d}^3x \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass Sie im Spezialfall $\omega = B_\mu \,\mathrm{d}x^\mu$ und A eine zweidimensionale Fläche, die im $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist, aus (1) der aus Magnetostatik bekannte Stokes'sche Satz folgt,

$$\oint_{\partial A} \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \int_A \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \, \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}.$$

Proof. (a) Es gilt per Definition

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \int_{\partial V} \omega.$$

Außerdem ist die äußere Ableitung

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega =& \,\mathrm{d}E_1 \,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \dots \\ =& (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) \,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3\end{aligned}$$

Da die Dimension 3 ist, ist $\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$ das Volumenform und

$$\int_V \mathrm{d}\omega = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} \,\mathrm{d}V \,.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Ähnlich ist

$$\int_{\partial A} \omega = \oint \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega =& \mathrm{d}B_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \\
=&(\partial_i B_\mu) \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^\mu \\
=&\partial_1 B_2 \, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + \partial_2 B_1 \, \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&+ \partial_1 B_3 \, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + \partial_3 B_1 \, \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&+ \partial_2 B_3 \, \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \partial_3 B_2 \, \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
=&(\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1) \, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \\
&+ (\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3) \, \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \\
&+ (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) \, \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\
=& \int \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

□

Problem 2. (a) Nennen Sie die Definition der Delta-Distribution und geben Sie ihre wesentlichen Eigenschaften an.

(b) Drücken Sie mit Hilfe geeigneter Koordinaten die folgenden Ladungsverteilungen als Delta-Distribution aus:

(1) Eine über eine Kugelschale vom Radius R gleichmä ssig verteilte Ladung Q;

(2) Eine über die Oberfläche eines Zylinders vom Radius R verteilte Ladung Q (pro Längeneinheit in z-Richtung).

Proof. (a)

$$\int_I f(x)\delta(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} f(0) & 0 \in I \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

(b) (1)

$$\frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r - R).$$

(2)

$$\frac{Q}{2\pi R}\delta(\rho - R).$$

□

Problem 3. Ein einfacher Kondensator besteht aus zwei zueinander parallelen Leitern, die durch einen Isolator voneinander getrennt sind. Bringt man auf die Leiter entgegengesetzt gleiche Ladungen, so stellt sich zwischen den Leitern eine bestimmte Potentialdifferenz ein. Der Quotient aus dem Betrag der Ladung eines der beiden Leiter und dem Betrag der Potentialdifferenz wird Kapazität genannt. Berechnen Sie mit dem Gauß'schen Gesetz die Kapazität

(a) von zwei großen leitenden Flächen der Fläche A, die durch einen kleinen Abstand d voneinander getrennt sind;

(b) von zwei konzentrischen leitenden Kugeln mit den Radien a und b ($\geq a$).

Proof. (a) Mit Symmetrie ist $\vec{\mathbf{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 2EA = Q/\epsilon_0$. Das gesamte Feld ist danach $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ und die Potentialdifferenz $V = Qd/\epsilon_0 A$. Damit ist $C = A\epsilon_0/d$.

(b) Das Feld ist $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ und die Potentialdifferenz damit

$$\int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Die Kapazität ist also

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}.$$

□