Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 7

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 14, 2023)

Problem 1. Sei

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \to \frac{x^2}{y^2},\\
&A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2, xy \geq 1\right\}.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_2$.

Proof. Zuerst zeigen wir: f ist messbar. Wir ebtrachten dazu $\{f < \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ (Wenn $\alpha < 0$ ist die Menge die Leermenge, weil $f \geq 0$ stets). Es gilt dann

$$\begin{aligned}
x^2 &< \alpha y^2\\
|x| &< \sqrt{\alpha}|y|
\end{aligned}$$

Dann ist $\{f < \alpha\}$ eine Borelmenge, also f ist messbar.

Ähnlich wie in Übungen 8.2 ist A eine Borelmenge. Die dritte Voraussetzung kann umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
y &\geq 1/x\\
x &\geq y \geq 1/x
\end{aligned}$$

was nur möglich ist, wenn $2 \geq x \geq 1$ und in diesem Fall ist der Schnitt $\{y | (x, y) \in A\}$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

nichtleer. Also wir berechnen das Integral über die Teilmenge nach die Präsenzübung

$$\begin{aligned}\int_A f\,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[1,2]}\int_{A_x} f\,\mathrm{d}\lambda_1\\ &= \int_1^2 \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \int_1^2 -x^2y^{-1}|_{1/x}^x\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\\ &= \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

□

Problem 2. Sei

$$A := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2\leq 1, \frac{1}{2}(x+y)^2+z^2\leq 1\right\}.$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(A)$.

Hinweis: Rotation

Proof. A ist eine Borelmenge und daher messbar. Wir schreiben A_z. Es gilt

$$\begin{aligned}1 &\geq \frac{1}{2}(x+y)^2+z^2\\ 2(1-z^2) &\geq (x+y)^2\end{aligned}$$

□

Problem 3. Sei $S\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ein invertierbare Matrix und $a\in\mathbb{R}^n$. Definere damit die Abbildung $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, x\to a+Sx$. Sei außerdem $A\in\mathcal{L}(n)$ und $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\mathcal{L}(n)-B^1$ messbar, sodass $\chi_{\varphi(A)}f$ λ_n integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $\chi_A(f\circ\varphi)$ λ_n-integrierbar ist mit

$$\int_{\varphi(A)} f\,\mathrm{d}\lambda_n = |\det(S)|\int_A (f\circ\varphi)\,\mathrm{d}\lambda_n\,.$$

Hinweis: Lemma 2.92

Proof. Nach Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz ist $\varphi(A)$ messbar mit Maß $\lambda_n(\varphi(A)) = |\det(S)|\lambda_n(A)$. $\chi_{\varphi(A)}$ ist dann messbar. Weil φ affin ist, ist φ messbar. Dann ist $f\circ\varphi$ messbar, und als Produkt von messbare Funktionen ist $\chi_A(f\circ\varphi)$ λ_n-messbar.

Wir verwenden Lemma 2.93 und betrachten f^+. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu &= \int f^+ \chi_{\varphi(A)} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x : f^+(x)\chi_\varphi(A) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x : x \in \varphi(A) \wedge f^+(x) > t\} \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(x) > t\} \cap \varphi(A)) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)
\end{aligned}$$

Weil φ bijektiv ist, gibt es für jedes Punkt $x \in \varphi(A),\ f^+(x) > t$ auch ein Punkt $y := \varphi^{-1}(x),\ y \in A,\ f^+(\varphi(y)) > t$ und andersherum. Daher ist

$$\{x : x \in \varphi(A) \wedge f^+(x) > t\} = \varphi(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\}).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu &= \int_0^\infty \mu(\varphi(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\})) \\
&= \int_0^\infty |\det(S)| \mu(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&\qquad \text{(Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz)} \\
&= |\det(S)| \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(\varphi(x)) > t\} \cap A) \\
&= |\det(S)| \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(\varphi(x))\chi_A(x) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= |\det(S)| \int (f^+ \circ \varphi)\chi_A \,\mathrm{d}\lambda_n \\
&= |\det(S)| \int_A (f^+ \circ \varphi) \,\mathrm{d}\lambda_n
\end{aligned}$$

Ähnlich gilt es auch für f^- und aus

$$\int_{\varphi(A)} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_{\varphi(A)} (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$$

auch für f. □

Problem 4. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$. Für $h \in \mathbb{R}^n$ definiere die Funktion $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f_h(x) := f(x+h)$. Definiere außerdem die Abbildung

$$T_f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}^1(\lambda_n), \qquad h \to f_h.$$

Zeigen Sie:

(a) T_f ist wohldefiniert.

(b) T_f ist stetig.

Hinweis: Approximieren Sie die Funktion f