Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

Analysis 2

Stefan Waldmann

Wintersemester 2023/2024

Hausaufgabenblatt Nr. 11

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)
Git revision of ana2-ws2324: `(None)` (None)

17. 01. 2024
(22 Punkte. Abzugeben am 24. 01. 2024)

Hausaufgabe 11-1: Der Laplace-Operator

Der Laplace-Operator Δ ist für $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f.$$

Allgemeiner ist ein (homogener) Differentialoperator P zweiter Ordnung für $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$Pf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j f.$$

Zeigen Sie, dass die einzigen rotationsinvarianten Differentialoperatoren, d.h. solche, welche

$$P(f(Qx)) = (Pf)(Qx) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle orthogonalen Matrizen } Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

erfüllen, Vielfache des Laplace-Operators darstellen. **(4 Punkte)**

Hausaufgabe 11-2: Approximationssatz von Weierstraß

Beweisen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Die Menge der Polynome auf dem Intervall $[a,b]$ ist also dicht im Raum der stetigen Funktionen bzgl. der Supremumsnorm.
Gehen Sie wie folgt vor:

i.) (Hutfunktionen) Es sei

$$h_{a,b}(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{|x-a|}{b}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

für $a \in \mathbb{R}, b > 0$. Begründen Sie, dass auf jedem kompakten Intervall I für jedes ε ein Polynom p existiert mit $\|h_{a,b} - p\|_{\infty,I} \leq \varepsilon$. **(2 Punkte)**
Hinweis: Übungsblatt 2

ii.) (Lineare Interpolante) Zu einer gegebenen Partition von $[a,b]$ mit Stützstellen $x_0 = a < x_1 < ... < x_N = b$ definieren wir die lineare Interpolante von f durch

$$H(x) = \sum_{i=0}^{N} h_{x_i,\Delta x_i}(x) f(x_i),$$

wobei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, ..., n$ und $\Delta x_0 = x_1 - a$. Bestimmen Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Partition von $[a,b]$, sodass $\|H - f\|_\infty \leq \varepsilon$ gilt. **(3 Punkte)**

iii.) Beweisen Sie den Approximationssatz von Weierstraß. **(3 Punkte)**

Hausaufgabe 11-3: Nicht-Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

gilt. Ist f in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar? **(5 Punkte)**

Hausaufgabe 11-4: Beispiel von Peano

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Zeigen Sie:

i.) Für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nimmt $f_v(t) = f(tv),\ t \in \mathbb{R}$ ein striktes lokales Minimum in $t = 0$ an. **(2 Punkte)**

ii.) Die Funktion f besitzt in $(0,0)$ kein lokales Minimum. **(3 Punkte)**