Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 25, 2024)

I. GRUND DER ANNAHME

> Weshalb könnte man mit den gegebenen Informationen davon ausgehen, dass die registrierten γ-Quanten einer Poissonverteilung folgen?

Die Population ist unendlich. Die maximale Anzahl von Ereignisse (n) ist groß, da wir 10 g haben und ein Molekül leicht ist. Allerdings ist $n \cdot p$ wahrscheinlich sehr klein, da die Halbwertzeit > 10 Jahre ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül ein γ-Quanten emittiert, ist $1 - e^{\frac{(1\mathrm{s}) \ln 2}{t_{1/2}}}$, also sehr klein. Insgesamt ist die beste Verteilung eine Poissonverteilung.

II. DATENTABELLE

$$\begin{aligned} \text{Mittelwert} : \mu &= 2,73214 \\ \text{Standardabweichung} : \sigma &= 1,67784 \\ \text{Anzahl der Messungen} : n &= 336 \\ \text{Standardfehler} : s &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0,0050 \end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$\mu = (2,7321 \pm 0,0050)$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Ereignisse	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Häufigkeit	11	89	65	71	48	28	16	6	2
Relative Häufigkeit	0,032738	0,26488	0,19345	0,21131	0,14286	0,083333	0,047619	0,017857	0,0059524
Poisson-Wahrscheinlichkeit	0,0650797	0,177807	0,242897	0,22121	0,151094	0,0825622	0,0375953	0,0146737	0,00501132

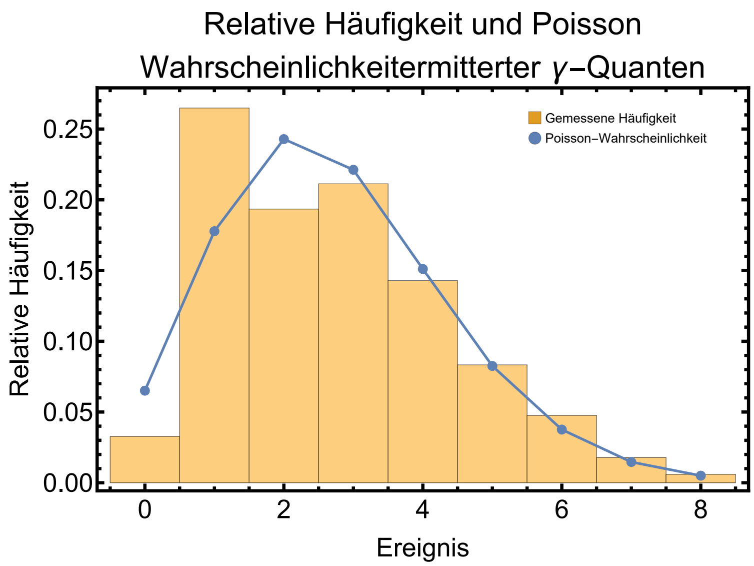

FIG. 1. Jun Wei Tan 25.04.24

III. HISTOGRAMM

IV. ZENTRALE χ^2 VERTEILUNG

Dichtefunktion:

$$f_{\chi_n^2} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_{\text{Supp } f} f_{\chi_n^2}(x) x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \int_0^\infty (2x)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-x\right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}} \exp\left(-x\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \\
&= \frac{2}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \left(\frac{n}{2}\right)! \\
&= 2(n/2) = n
\end{aligned}
$$

Varianz

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 =& E[(x-\mu)^2] \\
=& E[(x-n)^2] \\
=& \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) (x-n)^2 \,\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}+1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \\
& - 2nx^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) + n^2 x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \left[2^{\frac{n}{2}+2}\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right) - 2^{\frac{n}{2}+1} n^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + 2^{\frac{n}{2}} n^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right] \\
=& \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \left[2^{\frac{n}{2}+2}\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right) - 2^{\frac{n}{2}} n^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right] \\
=& \frac{4}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)! - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{2}-1\right)!\right] \\
=& 4\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] \\
=& 2n
\end{aligned}
$$