

Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 28, 2023)

Problem 1. (Stückweise Integrierbarkeit) Zeigen Sie: ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$ für ein $c \in (a, b)$, so auch auf $[a, b]$.

Proof. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Weil f auf sowohl $[a, c]$ als auch $[c, b]$ integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung $\mathcal{J}_1 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = c\}$ bzw. $\mathcal{J}_2 = \{x_n = c, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}$ von $[a, c]$ bzw. $[c, b]$, so dass

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathcal{J}_1} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}(f) &< \frac{\epsilon}{2} \\ \mathcal{O}_{\mathcal{J}_2} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2} &< \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}} < \epsilon.$$

Weil ϵ beliebig war, ist f integrierbar. □

Problem 2. (Bestimmte Integrale) Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale :

(a) $\int_1^4 \sin(\sqrt{x}) \, dx,$

(b) $\int_0^{1/2} \arcsin(x) \, dx,$

(c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx,$

(d) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx.$

Proof. (a) $u = \sqrt{x}, du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$, also $dx = 2u \, du$. Wenn $x = 1$ ist $u = 1$, und $x = 4$ ist $u = 2$. Es gilt

$$\int_1^4 \sin(\sqrt{x}) \, dx = \int_1^2 \sin(u)(2u \, du)$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_1^2 u \sin u \, du \\
&= 2 \left[u(-\cos u) \Big|_1^2 + \int_1^2 \cos u \, du \right] \quad \text{partielle Integration} \\
&= 2 \left[(\cos(1) - 2 \cos(2)) + [\sin u]_1^2 \right] \\
&= 2 \cos 1 - 4 \cos 2 + 2 \sin 2 - 2 \sin 1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \arcsin(x) \, dx &= x \arcsin(x) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
u &= 1 - x^2, \quad du = -2x \, dx.
\end{aligned}$$

Wenn $x=0$, ist $u=1$.Wenn $x=1/2$, ist $u=3/4$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \arcsin(x) \, dx &= \frac{\pi}{2} - \int_1^0 \frac{1}{(-2)} \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_1^0 u^{-1/2} \, du \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{3/4}^1 u^{-1/2} \, du \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} [2u^{1/2}]_{3/4}^1 \\
&= \frac{\pi}{2} - 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \\
&= -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(c) Substitution: $x = \tan \theta$, $dx = \sec^2 \theta \, d\theta$, für $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Es gilt $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$.

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx &= \int \frac{1}{(1+\tan^2 \theta)^2} (\sec^2 \theta \, d\theta) \\
&= \int \frac{1}{\sec^4 \theta} \sec^2 \theta \, d\theta \\
&= \int \cos^2 \theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) \, d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]$$

Es gilt auch $\sin \theta = \sin \tan^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $\cos \theta = \cos \tan^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Daraus folgt

$$\sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta = \frac{x}{1+x^2}.$$

Dann ist

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2} \right).$$

(d)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{x^2}{2} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx \\ &= 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ u &= 1-x^2 \quad du = -2x dx \\ x^3 dx &= \frac{1}{-2} x^2 (-2x dx) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 du \\ &= -\frac{1}{2} (1-u) du \end{aligned}$$

Wenn $x=0$ ist $u=1$

Wenn $x=1$ ist $u=0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx &= + \frac{1}{2} \int_1^0 \left(-\frac{1}{2} \frac{1-u}{\sqrt{u}} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1-u}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{4} \left[2\sqrt{u} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left[2 - \frac{2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Problem 3. (Der Hauptsatz) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.

- (b) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.
- (c) Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, welche eine Stammfunktion auf $[a, b]$ besitzt, ist integrierbar.

Hinweis: $F(x) = \sqrt{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$

Proof. (a) Falsch. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Es gilt dann

$$\int_0^x f(x) \, dx = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- (b) Ja (Proposition 6.4.1 und Definition 6.4.2).

□

Problem 4. (Riemann-Lemma) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx = 0 \quad (5.1)$$

gilt. Verifizieren Sie dazu:

- (i) Zeigen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ eine stückweise konstante Funktion $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$\int_a^b |f(x) - T(x)| \, dx \leq \epsilon.$$

- (ii) Zeigen Sie (5.1) für beliebige, stückweise konstante Funktionen.

- (iii) Folgern Sie die Behauptung.

Proof. (i) Weil f integrierbar ist, können wir eine Zerlegung $\mathcal{J} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ finden, so dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) - \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \leq \epsilon.$$

Wir definieren zwei stückweise konstante Funktionen:

$$\tau(x) = \begin{cases} \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f & x_i \leq x < x_{i+1}, 0 \leq i < n-1 \\ \sup_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} f & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} & x_i \leq x < x_{i+1}, 0 \leq i < n-1 \\ \inf_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Dann sind τ und σ Treppenfunktionen mit $\sigma \leq f \leq \tau$ auf $[a, b]$. Es gilt außerdem per Definition

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) - \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) - \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\tau(x_i) - \sigma(x_i)) (x_{i+1} - x_i) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} (\tau(x_i) - f(x_i)) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(\tau - \sigma) \\ &\geq \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(\tau - f) \\ &\geq \int_a^b (\tau - f)(x) \, dx \\ &= \int_a^b |\tau(x) - f(x)| \, dx \end{aligned}$$

□

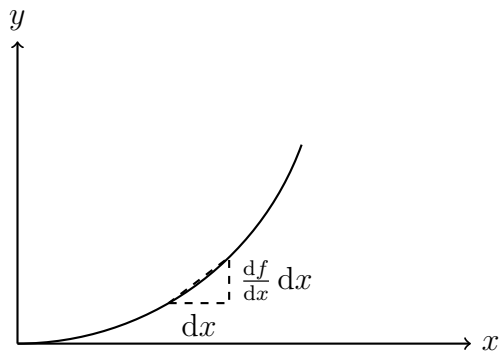
Problem 5. Für eine gegebene Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kann unter bestimmten Voraussetzungen (z.B. $f \in C^1([a, b])$, wir kommen in der Vorlesung darauf zurück) die Länge des Funktionsgraphen durch

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} \, dx$$

bestimmt werden.

- (i) Begründen Sie kurz anschaulich, warum diese Formel wahr sein kann. *Hinweis: Pythagoras.*
- (ii) Bestimmen Sie über obige Identität den Umfang eines Einheitskreises.

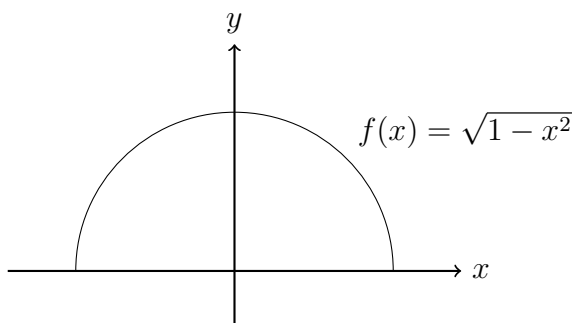
Proof. (i)



also intuitiv wäre

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{df}{dx} dx\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

(ii) Wir berechnen zuerst die Länge eines Hälftes des Kreises, also



Es gilt

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

und

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin(x) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \end{aligned}$$

also der Umfang ist 2π .

□