Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

8. Übungsblatt

Hinweis:
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Mittwoch (13.12.2023) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Teiler des Minimalpolynoms und invariante Unterräume (3 + 9)**
   Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ und μ_A das Minimalpolynom zu A. Angenommen es existieren normierte Polynome p_1 und p_2, sodass
   $$\mathbb{K}^n = \ker(p_1(A)) \oplus \ker(p_2(A)).$$
   (a) Es sei B_1 eine Basis von $\ker(p_1(A))$ und B_2 eine Basis von $\ker(p_2(A))$ und $B = B_1 \cup B_2$. Zeigen Sie, dass mit geeigneter Sortierung der Basisvektoren in B gilt
   $$_B[A]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$
   mit $A_1 \in M_{|B_1|}(\mathbb{K})$ und $A_2 \in M_{|B_2|}(\mathbb{K})$.
   Hier verbirgt sich Aufgabe 7.2 b)

   (b) Gilt nun zusätzlich, dass $\mu_A = p_1 \cdot p_2$ dann folgt bereits $\mu_{A_1} = p_1$ und $\mu_{A_2} = p_2$.
   Nach Voraussetzung ist $A = T_B[A]_B T^{-1}$ mit den Basiswechselmatrizen T gemäß Basis B. Wie sieht nun die rechte Seite für $p_1(A)v$ mit $v \in \ker(p_1(A))$ aus? Folgern Sie μ_{A_1} teilt p_1 teilt μ_{A_1}.

2. **Eine alternative Herleitung der Hauptraumzerlegung (8 + (3 + 3 + 2) + 2)**
   Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $M_n(\mathbb{K})$ der Raum der quadratischen Matrizen über $\mathbb{K}$.

   (a) Es ist
   $$p = \prod_{k=1}^{r} p_i$$
   für teilerfremde $p_1, ..., p_r \in \mathbb{K}[x]$. Zeigen Sie:
   $$\ker(p(A)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(p_i(A)).$$
   Hinweis: Lemma von Bezout! Es reicht, wenn Sie den Fall $r = 2$ verifizieren um dann induktiv zu argumentieren.

   (b) Zu $A \in M_n(\mathbb{K})$ definieren wir
   $$\tilde{V}_{\lambda_i} = \{v \mid \exists\, l : (A - \lambda_i I)^l v = 0\}.$$
   Zeigen Sie mit Hilfe von (b)
   (i) $\tilde{V}_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$, mit m_i der Exponent des Linearfaktors $(\lambda_i - x)$ im Minimalpolynom.
   (ii) Es ist $\dim(\tilde{V}_{\lambda_i}) = \mu_i$.
   (iii) Es ist $\tilde{V}_{\lambda_i} \cap \tilde{V}_{\lambda_j} = \{0\}$ für $\lambda_i \neq \lambda_j$.

   (c) Angenommen das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_A$ von A zerfalle in Linearfaktoren. Beweisen Sie direkt
   $$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \tilde{V}_{\lambda_i}.$$

3. **Jordannormalform berechnen (8 + 3 + 5)**

(a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3i \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte, Haupträume, Minimalpolynom und Jordannormalform von A. Geben Sie ebenso die Transformationmatrix an, welche A in seine JNF überführt.

(b) Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen jeweils nur die JNF direkt

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Es sei $A \in M_8(\mathbb{K})$ mit Minimalpolynom $m_A(\lambda) = \lambda^3$ und $\dim(\ker(A)) = 4$. Welche Möglichkeiten können für die zugehörige JNF auftreten? Was gilt für die JNF, wenn zusätzlich erfüllt ist

$$\dim(\ker(A^2)) = 7.$$