Prof. Dr. Thorsten Ohl
Manuel Kunkel, Christopher Schwan

12. Übung zur Klassischen Mechanik
15. Januar 2024

Starre Körper

12.1 Kreisel

Betrachten Sie einen homogenen Zylinder der Masse M mit der Höhe h und Radius R. Legen Sie das Koordinatensystem mit der x_3-Achse entlang der Symmetrieachse und seinen Ursprung in den Schwerpunkt des Zylinders.

1. Berechnen Sie alle Elemente $\{\theta_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ des Trägheitstensors θ

   $$\theta_{ij} = \int \mathrm{d}^3x \, \rho(\vec{x}) \left(\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right) \tag{1}$$

   für den Zylinder bzgl. seines Schwerpunkts. Nutzen Sie Symmetrien, um möglichst wenig Integrale berechnen zu müssen.

2. Schreiben Sie die Euler'schen Gleichungen für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Zylinders bzgl. seines Schwerpunkts im körperfesten System

   $$\theta\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \theta\vec{\omega} = 0 \tag{2}$$

   in Komponenten.

3. Lösen Sie in (2) zunächst die Gleichung für ω_3 und anschließend die Gleichungen für ω_1 und ω_2.

12.2 Rollender Kegel

Betrachten Sie einen geraden Kreiskegel mit Masse M, Öffnungswinkel 2α und Höhe h.

1. Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente des Kegels mit dem Ursprung des Koordinatensystems in der Spitze.

2. Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente des Kegels mit dem Ursprung des Koordinatensystems in seinem Schwerpunkt.

3. Berechnen Sie die kinetische Energie T des Kegels, wenn seine Spitze fest im Ursprung liegt und sein Mantel auf der waagrechten (x, y)-Ebene abrollt.

   Formulieren Sie dazu geeignete Zwangsbedingung(en) und wählen Sie geeignete Koordinaten. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System als Funktion dieser Koordinate(n) und der zugehörigen Geschwindigkeit(en).

   Hinweis: Das Ergebnis lautet

   $$T = \frac{3}{40} M\, h^2\, (1 + 5\cos^2\alpha)\, \dot{\phi}^2$$

   wobei ϕ der Winkel von der x-Achse zur momentan Berührgeraden des Mantels mit der (x, y)-Ebene ist.

12.3 Scheibe mit Loch

Betrachten Sie eine homogene Scheibe D_M mit Radius R und Masse M welche reibungsfrei in der x-y-Ebene rutsche. Im Abstand b vom Mittelpunkt der Scheibe D_M sei ein zylindrisches Loch mit Radius $r < R$. Der Einfluss der Gravitation sei vernachlässigbar. *Hinweis: wegen der Additivität der Massen können Sie das Loch durch eine Scheibe D_{-m} mit negativer Masse $-m$ beschreiben.*

1. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Systems. *Hinweis: überzeugen Sie sich davon, daß sie dafür die Scheiben als Punktmassen ansehen können.*

2. Berechnen Sie das Gesamtträgheitsmoment des Systems für eine Rotation um den Schwerpunkt.

3. Stellen sie eine Lagrangefunktion in Schwerpunktskoordinaten auf.

4. Betrachten sie nun die beiden Scheiben als zunächst unabhängige Objekte. Bestimmen sie die jeweiligen kinetischen Energien der Schwerpunktsbewegung und die entsprechenden Rotationsenergien. Nutzen sie anschließend die Zwangsbedingungen. Geben sie wieder eine Lagrangefunktion an und vergleichen sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil 3).

5. Geben sie die Bewegungsgleichungen für beide Fälle an.