Wintersemester 2024/2025 — 28.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

7. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 2.12. und 3.12. gelöst.

Aufgabe P7.1

Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch $A(t) := \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ t+1 & -t \end{pmatrix}$ definiert. Man rechnet direkt nach, dass die durch $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ definierte Abbildung $\varphi_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ ist.

Benutzen Sie die d'Alembert Methode aus der Vorlesung um zu zeigen, dass $\varphi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_2(t) = e^{-(t^2+t)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ eine weitere von φ_1 linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung ist.

(*Info: Eine weitere Aufgabe zum Üben der d'Alembert Methode finden Sie bei F7.5.*)

Aufgabe P7.2

Seien $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $b(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie eine Fundamentalmatrix für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Bestimmen Sie anschließend die Lösung zum Anfangswert $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P7.3

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A und die Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für die $S^{-1}AS$ eine Jordan-Normalform darstellt.

(*Weitere Übungen zur Jordan-Normalform können Sie bei den freiwilligen Aufgaben finden.*)

Wintersemester 2024/2025 | 28.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy | Andreas Schroll

7. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 5.12.2023 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 4 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H7.1 **(1 + 4 = 5 Punkte)**

Sei $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$. Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ durch

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (3t-1)x_1 - (1-t)x_2,\\ \dot{x}_2 &= -(t+2)x_1 + (t-2)x_2.\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante w durch $w = c \cdot e^{2t^2-3t}$, $c \in R$ gegeben ist.

b) Eine Lösung der Differentialgleichung ist durch $\varphi_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} e^{t^2}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante w eine weitere von φ_1 linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung. (*Hinweis: Setzen Sie dazu **mit Begründung** bei der Wronski-Determinante aus Teil a) für c einen festen Wert ein und benutzen Sie als Ansatz für die zweite Lösung* $\varphi_2(t) = (u(t)\ v(t))^T$.)

Aufgabe H7.2 **(4 + 2 = 6 Punkte)**

Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die reellen Eigenschwingungen und mit diesen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und eine Fundamentalmatrix.

b) Bestimmen Sie mit den reellen Eigenschwingungen die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $x(1) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe H7.3 **(8 + 2 = 10 Punkte)**

a) Berechnen Sie die Fundmentalmatrizen und Lösungen von

i) $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ und

ii) $\dot{x} = Bx$, $x(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $B = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -3 & -2 & 3\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

iii) $\dot{x} = Cx$, $x(0) = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ mit $C = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

b) Wir erweitern a.iii) zu $\dot{x} = Cx + c(t)$ mit $c(t) = \begin{pmatrix}-t\\ e^{-t}\\ 1+t\end{pmatrix}$. Lösen Sie dieses Anfangswertproblem.

Aufgabe H7.4 **(Multiple Choice)**

Beurteilen Sie, ob die folgenden 3 Behauptungen wahr oder falsch sind.
Sie müssen bei dieser Aufgabe **keine** Begründungen angeben.

Für jede richtig beantwortete Frage gibt es einen Punkt.
Für jede falsch beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen.
Für jede nicht beantwortete Frage gibt es keine Punkte.
Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.
Insgesamt können bis zu 3 Punkte erreicht werden.

	wahr	falsch
Die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \frac{\arctan(t)x^3}{1+x^2} + e^{-t^2}\sin(x) + 1$, $x(t_0) = x_0$ hat für alle $(t_0, x(t_0)) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung.		
Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $\varphi_i(t) := e^{\mu_i t}$, $i = 1, \dots, n$, genau dann $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind, wenn $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.		
Es sei $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, $f\colon Z_{a,b} \to \mathbb{R}$. Ist f in x lipschitz-stetig, so ist f auch in x stetig, womit es nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutige Lösung gibt.		

Wintersemester 2024/2025 | 28.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy | Andreas Schroll

7. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Freiwillige Aufgaben

Bitte geben Sie diese Aufgaben nicht mit den Hausaufgaben zusammen ab. Aufgabe F7.1 - F7.4 sind nochmal Übungen zur Jordan-Normalform. Aufgabe F7.5 ist eine Übung zur d'Alembert Methode.

Aufgabe F7.1

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A und die Transformationsmatrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, für die $S^{-1}AS$ eine Jordan-Normalform darstellt.

Aufgabe F7.2

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3i \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechnen Sie die verallgemeinerten Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

c) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A, indem Sie $S^{-1}AS$ explizit berechnen.

Aufgabe F7.3

Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von B.

b) Berechnen Sie die verallgemeinerten Eigenräume von B. Ist B diagonalisierbar?

c) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von B, indem Sie $S^{-1}BS$ explizit berechnen.

Aufgabe F7.4

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*Hinweis:* Die Matrix A hat nur einen Eigenwert.)

Aufgabe F7.5

Wir definieren $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch $A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t(1+t^2)} & \frac{1}{t^2(1+t^2)} \\ -\frac{t^2}{1+t^2} & \frac{2t^2+1}{t(1+t^2)} \end{pmatrix}$.

Man rechnet direkt nach, dass die durch $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ definierte Abbildung $\varphi_1\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ ist.

a) Benutzen Sie die d'Alembert Methode aus der Vorlesung um eine weitere von φ_1 linear unabhängige Lösung φ_2 der Differentialgleichung zu finden.

b) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung und berechnen Sie die Übergangsmatrix $\Phi(t, t_0)$ und Wronski-Determinante w. Berechnen Sie dann $\dot{w}$ einmal durch Ableiten der Wronski-Determinante und einmal mit Satz 7.13.

c) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert $x(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ an.