Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 9

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 18, 2024)

I. ZAHLENTHEORIE

II. ALLGEMEIN GRUPPENTHEORIE

III. GRUPPENHOMOMORPHISMEN

Theorem 1. *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Es gilt $ord(\phi(g))|ord(g)$.*

IV. GRUPPENOPERATIONEN

V. ABELSCHE GRUPPEN

Theorem 2. *Sei n die größte Elementordnung in einer abelschen Gruppe G. Dann gilt $g^n = e$ für alle $g \in G$.*

Theorem 3. *G ist genau dann abelsch, wenn die Zentrumsfaktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist.*

Theorem 4. *Sei p eine Primzahl. Alle Gruppen der Ordnung p^2 sind abelsch.*

VI. ZYKLISCHE GRUPPEN

Theorem 5. *G ist zyklisch genau dann, wenn G zu jedem positiven Teiler t von $|G|$ genau eine Untergruppe der Ordnung t besitzt.*

VII. SYMMETRISCHE GRUPPEN

Theorem 6. *Sei $\sigma, \tau \in S_n$ disjunkt. Es gilt $ord(\sigma\tau) = kgV(ord(\sigma), ord(\tau))$*

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Theorem 7.

$$S_n = \langle (12), (123 \ldots n) \rangle.$$

VIII. EINFACHE GRUPPEN

IX. PRODUKTGRUPPEN

Theorem 8. *Sei $A, B \leq G$. AB ist eine Gruppe genau dann, wenn $AB = BA$.*

Erfüllt, wenn A oder B normal in G sind.

Theorem 9.

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}.$$

Theorem 10. *Internes direktes Produkt: $A, B \trianglelefteq G,\ A \cap B = \{e\} \implies AB \cong A \times B$.*

Theorem 11. *Internes semidirektes Produkt: $A \trianglelefteq G, B \leq G, A \cap B = \{e\} \implies AB \cong A \rtimes B$*

Definition 12. $A \rtimes_\varphi B = (A \times B, \circ, (e, e))$, wobei $(u, v) \circ (\tilde{u}, \tilde{v}) = (u\varphi_v(\tilde{u}), v\tilde{v})$

X. BEISPIELVERZEICHNIS