Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 11

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 25, 2024)

Problem 1. Seien p, q zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Primzahlen und G eine Gruppe der Ordnung pq. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Proof. Sei $p = q$. Dann ist G eine Gruppe der Ordnung p^2. Wir wissen, dass solche Gruppen abelsch ist, also $G' = \{e\}$ und G ist auflösbar.

Sei jetzt $p \neq q$. ObdA nehmen wir an, $p > q$. Nach den Sylowsätze gibt es Untergruppen der Ordnung p, für deren Anzahl n_p gilt:

$$\begin{aligned} n_p \equiv& 1 \pmod p \\ n_p &| q \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $n_p = 1, p + 1, \ldots$. Da $n_p | q$, ist die einzige Möglichkeit 1. Sei P die Untergruppe der Ordnung p. Als Gruppe einer Primzahlordnung ist P zyklisch, insbesondere abelsch und daher auflösbar. Da $n_p = 1$, ist P ein Normalteiler und G/P ist wohldefiniert. $|G/P| = q$, also $|G/Q|$ ist zyklisch, abelsch und auflösbar.

Dann ist G auflösbar. □

Problem 2. Zeigen Sie, dass jede Gruppe G der Ordnung 12 auflösbar ist.

Proof. $12 = 3 \times 2^2$, also es gibt nach den Sylowsätze Gruppen der Ordnung 4 und 3 von Anzahl n_2 bzw. n_3. Aus den vorherigen Übungsblätter wissen wir, dass $n_2 = 1$ oder $n_3 = 1$ gilt.

1. $n_2 = 1$. Sei H die Untergruppe der Ordnung 4. Als Gruppe der Ordnung $4 = 2^2$ ist H abelsch und auflösbar. Weil $|G/H| = 3$, ist G/H zyklisch, abelsch und auflösbar. Da sowohl H als auch G/H auflösbar sind, und H ein Normalteiler ist, ist G auflösbar.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

2. $n_3 = 1$. Sei H die Untergruppe der Ordnung 3. Als Gruppe von Primordnung ist H zyklisch, abelsch und auflösbar. Da $|G/H| = 4 = 2^2$, ist G/H abelsch und daher auflösbar. Da H normal ist und sowohl H als auch G/H auflösbar sind, ist G auflösbar. □

Problem 3. Sei R ein Ring, und seien $a, b \in R$. Es gelte $ab = 1$ und $ba \neq 1$. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $x^s = 0$ gibt. Ein Element $x \in R$ heißt idempotent, falls $x^2 = x$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass das Element $1 - ba$ idempotent ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Element $b^n(1 - ba)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ nilpotent ist.

(c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele nilpotente Elemente in R gibt.

Proof. (a)

$$
\begin{aligned}
(1 - ba)^2 =& (1 - ba)(1 - ba) \\
=& 1 - ba - ba + (-ba)(-ba) && \text{Distributivgesetz} \\
=& 1 - 2(ba) + baba && \text{Lemma 3.1} \\
=& 1 - 2(ba) + b(ab)a \\
=& 1 - 2ba + ba \\
=& 1 - ba
\end{aligned}
$$

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
[b^n(1 - ba)b^n(1 - ba)] =& b^n(b^n - bab^n)(1 - ba) \\
=& b^n(b^n - b\cancelto{1}{ab}b^{n-1})(1 - ba) \\
=& b^n(b^n - b^n)(1 - ba) \\
=& b^n 0 (1 - ba) \\
=& 0
\end{aligned}
$$

(c) Falls wir zeigen könnten, dass $b^n(1 - ba)$ für unterschiedliche n unterschiedlich sind, wäre wir schon fertig.

Wir betrachten $b^{n_1}(1-ba)$ und $b^{n_2}(1-ba)$ mit $n_2 > n_1$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Wir nehmen dann an, dass $b^{n_1}(1-ba) = b^{n_2}(1-ba)$. Es gilt

$$\begin{aligned} b^{n_1}(1-ba) &= b^{n_2}(1-ba) \\ a^{n_1}b^{n_1}(1-ba) &= a^{n_1}b^{n_2}(1-ba) \\ (1-ba) &= b^{n_2-n_1}(1-ba) \\ [(1-ba)]^2 &= \left[b^{n_2-n_1}(1-ba)\right]^2 \\ \underbrace{(1-ba)}_{\text{(a)}} &= 0 \text{ (b)} \end{aligned}$$

ein Widerspruch, weil $ba \neq 1$ und daher $1 - ba \neq 0$. □

Problem 4. (a) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) Für alle $r, s \in R$ gilt $(r+s)^4 = r^4 + s^4$.

(2) In R gilt $2 = 0$.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring an, der den Bedingungen aus (a) genügt, aber kein Körper ist.

Proof. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} (r+s)^2 &= (r+s)(r+s) \\ &= r^2 + sr + rs + s^2 \\ (r+s)^4 &= (r+s)^2(r+s)^2 \\ &= (r^2 + sr + rs + s^2)(r^2 + sr + rs + s^2) \\ &= r^4 + r^2sr + r^3s + r^2s^2 \\ &\quad + sr^3 + srsr + srrs + srs^2 \\ &\quad + rsr^2 + rssr + rsrs + rs^3 \\ &\quad + s^2r^2 + s^3r + s^2rs + s^4 \\ &= r^4 + r^3s + r^3s + r^2s^2 \\ &\quad + sr^3 + s^2r^2 + s^2r^2 + s^3r \\ &\quad + r^3s + r^2s^2 + r^2s^2 + rs^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ s^2r^2 + s^3r + s^3r + s^4 && \text{Kommutativgesetz} \\
=&r^4 + 4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 + s^4
\end{aligned}
$$

Die Behauptung $(s+r)^4 = r^4 + s^4$ ist dann äquivalent zu

$$4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 = 0 \ \forall s, r \in R.$$

Die Rückrichtung ist jetzt klar: Falls $2 = 0$, ist

$$2r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^2 = \overset{0}{\cancel{2}}(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 0.$$

Die andere Richtung: Wir nehmen an, dass

$$2(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 0 \ \forall r, s \in R.$$

Insbesondere betrachten wir $r = -1$ und $s = 1$. Dann ist $r^3 = 1$ und $r^2 = 1$. Alle Potenzen von s sind 1. Es gilt

$$2(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 2(-1) = 0.$$

Aber $-1 \neq 0$, also $2 = 0$.

(b) Wir konstruieren die "kompleze Zahlen" auf der Menge $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, also wenn $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ definieren wir

$$
\begin{aligned}
(a_1, b_1) + (a_2, b_2) :=&(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\
(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) =&(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)
\end{aligned}
$$

Als Eigenschaft der komplexen Zahlen haben wir das neutrale Element $(\overline{1}, \overline{0})$ bzgl. Multiplikation und $(\overline{0}, \overline{0})$ bzgl. Addition. Kommutativität folgt auch aus der entsprechenden Eigenschaft der komplexen Zahlen. Es gilt $2 = 0$, weil $(\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{0}) = (\overline{2}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{0})$. Es ist aber kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist. Es gilt

$$(\overline{1}, \overline{1}) \times (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{2}, \overline{2}) = (\overline{0}, \overline{0}). \qquad \square$$