

Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 31, 2023)

Problem 1. Es seien die Punkte x_0, x_1, \dots, x_n mit $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren den Operator

$$\Phi : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \rightarrow y, \text{ mit } p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

wobei wir mit $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchsten n bezeichnen und $p(x)$ die Auswertung des Polynoms p im Punkt x beschreibt.

- (a) Zeigen Sie: Sind die Punkte x_i paarweise verschieden, so ist die Abbildung Φ wohldefiniert und isomorph. (Eine Konsequenz hieraus ist die eindeutige Lösbarkeit der Polynominterpolation.)
- (b) Was passiert, wenn Sie nicht fordern, dass die x_i paarweise verschieden sind? Kann Φ im Allgemeinen noch injektiv (surjektiv) sein?

Proof. (a) Injektiv: Nehme an, dass es zwei unterschiedliche Polynome p_1, p_2 gibt, mit $p_1(x_i) = p_2(x_i) \forall i = 0, \dots, n$. Dann ist $p(x) := p_1(x) - p_2(x)$ auch ein Polynom, mit $p(x_i) := 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$. Weil $\deg(p) \leq n$ ist, folgt daraus, dass $\forall x, p(x) = 0, p_1(x) = p_2(x)$. Das ist ein Widerspruch.

Surjektive: Sei $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$p(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n)$$

auch ein Polynom mit $\Phi(p) = (y_0, \dots, y_n)$.

Linearität: Sei $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x], a \in \mathbb{R}$. Sei auch $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$. Es gilt dann

$$p(x_i) = p_1(x_i) + p_2(x_i), i = 0, \dots, n$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(p_1 + p_2) = \Phi(p_1) + \Phi(p_2).$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Es gilt auch, für $p(x) := ap_1(x)$, dass

$$p(x_i) = ap_1(x_i), i = 0, \dots, n,$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(ap_1) = a\Phi(p_1).$$

(b) Nein. Sei, zum Beispiel, $n = 1$, $x_0 = x_1 = 0$. Dann gilt

$$\Phi(x) = (0, 0)^T$$

$$\Phi(x^2) = (0, 0)^T$$

Aber die zwei Polynome sind ungleich.

□

Problem 2. (a) Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben. Wir bilden die erweiterte Matrix

$$B = (A|1_n)$$

mit 1_n die Einheitsmatrix in \mathbb{R}^n . Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn A durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Verifizieren Sie weiterhin: Werden die dafür benötigten Zeilenumformungen auf ganz B angewendet, so ergibt sich im hinteren Teil, wo zu Beginn die Einheitsmatrix stand, genau A^{-1} .

(b) Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^{-1} .

Proof. (a) Definiert (x, y) , $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$ durch $\mathbb{K}^{n+m} \ni (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$.

Eine solche erweiterte Matrix bedeutet ein Gleichungssystem durch

$$B(x, -y) = Ax - 1_n y = 0,$$

wobei $x, y \in \mathbb{K}^n$. Für jeder $x \in \mathbb{K}^n$ gibt es $y \in \mathbb{K}^n$, so dass $B(x, -y) = 0$. Nehme an, dass wir durch elementare Zeilenumformung

$$B = (A|1_n) \rightarrow (1_n, A') := B'$$

kann. Die Gleichungssystem ist dann $x = A'y$. Dadurch können wir für jeder $y \in \mathbb{K}^n$ eine $A'y = x \in \mathbb{K}^n$ rechnen, für die gilt, dass $Ax = y$. Das heißt, dass $A' = A^{-1}$.

(b)

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 - 3R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + 2R_3} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \times -\frac{1}{2}} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_4} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

□

Problem 3. Es seien die Vektorräume V, W über \mathbb{K} gegeben mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Wir betrachten eine lineare Abbildung

$$T : V \rightarrow W, v \rightarrow T(v)$$

Seien B_V und B_W Basen von V , bzw. W . Wir nehmen an T ist nicht die konstante Nullabbildung. Beweisen Sie:

- (a) Der Kern von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder trivial (d.h. nur die 0) oder hängt nur von der Wahl von B_V ab, aber nicht von B_W .
- (b) Das Bild von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder der ganze \mathbb{K}^m oder hängt nur von der Wahl von B_W ab, aber nicht von B_V .
- (c) Der Rang von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist unabhängig von B_W und B_V .

Proof. Nach Korollar 5.43 gilt, für $A, A' \subseteq V$ und $B, B' \subseteq W$ Basen der Vektorräume V und W über \mathbb{K} , und $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$.

$${}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'}.$$

Lemma 1. *Jeder Basiswechsel für sowohl B_V als auch B_W kann als zwei Basiswechseln interpretiert werden, wobei eine Basiswechsel nur B_V verändert, und die andere nur B_W .*

Proof.

$${}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B ({}_B[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'}) {}_A[\text{id}_V]_A.$$

(In den Klammern gibt es zuerst ein Basiswechsel in V , dann ein Basiswechsel in W). Ein ähnliche Argument zeigt, dass wir zuerst ein Basiswechseln in W betrachten kann. \square

Corollary 2. *In die Aufgabe muss man nur das Fall betrachten, in dem entweder B_V oder B_W sich verändert.*

- (a) Nehme an, $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V}) \neq 0$. Die zwei Fälle

- (i) Nur B_W sich verändert.

Sei $v \in \mathbb{K}^n$, ${}_B[\Phi]_A v = 0$. Es gilt

$${}_B[\Phi]_A = {}_{B'}[\text{id}_W]_B [{}_{B'}\Phi]_{AA} [{}_{AA}[\text{id}_V]_A] v = {}_{B'}[\text{id}_W]_{BB} [{}_{BB}[\Phi]_A] v = {}_{B'}[\text{id}_W]_B (0) = 0.$$

Sei jetzt ${}_B[\Phi]_A v \neq 0$. Solange wir zeigen, dass

$${}_{B'}[\text{id}_W]_B u \neq 0$$

für $\mathbb{K}^m \ni u \neq 0$, sind wir fertig. Aber ${}_{B'}[\text{id}_W]_B u = 0$, nur wenn $u = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n, v_i \in B' = 0$ wegen der linear Unabhängigkeit.

- (ii) Nur B_V sich verändert. Es stimmt leider nicht, dass $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V})$ von B_V abhängig sein *muss*. Sei zum Beispiel B_K ein Basis für $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V})$, und B_V und B'_V Basen von V , für die gilt $B_K \subset B_V, B_K \subset B'_V$. Jetzt ist der Kern einen invarianten Unterraum von B unter ${}_{B'_V}[T]_{B_V}$, also der Kern verändert sich nicht, wenn der Basis sich verändert.

Wenn der Kern kein invarianter Unterraum ist, gilt es natürlich, dass der Kern sich durch das Basiswechsel verändert.

- (b) Nehme an, dass $\text{im}({}_{B_W}[T]_{B_V}) \neq \mathbb{K}^m$. Wir betrachten noch einmal die zwei Fälle

- (i) Nur B_V sich verändert. Weil ${}_{B_V}[\text{id}]_{B'_V} : V \rightarrow V$ bijektiv ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{im}({}_{B_W}[T]_{B'_V}) &= \{ {}_{B_W}[T]_{B'_V} v \mid v \in \mathbb{K}^m \} = \{ {}_{B_W}[T]_{B_V B'_V} [\text{id}]_{B'_V} v \mid v \in \mathbb{K}^m \} \\ &= \{ {}_{B_W}[T]_{B_V} v \mid v \in \mathbb{K}^m \} = \text{im}({}_{B_W}[T]_{B_V}) \end{aligned}$$

- (ii) B_W sich verändert. Jetzt gilt

$${}_{B'_W}[T]_{B_V} = {}_{B'_W}[\text{id}]_{B_W B_W} [T]_{B_V}.$$

Leider ist es noch falsch, dass das Bild von B_W abhängig sein *muss* wegen eines ähnliches Arguments zu das Kern.

- (c) Weil das Bild von B_V unabhängig ist, ist der Rang auch von B_V unabhängig.

Weil ${}_{B'_W}[\text{id}]_{B_W}$ bijektiv als Abbildung $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist, ist es auch bijektiv für alle Teilmengen $U \subseteq \mathbb{K}^m$. Das Bild vor und nach dem Basiswechsel sind dann isomorph. Deswegen ist der Rang von B_W unabhängig.

□

Problem 4. Es wird gerechnet.

- (a) Wir definieren die lineare Abbildung $T(x) = A \cdot x$ mit A gegeben wie in 2(b). Wir definieren die Basen

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie

$${}_{B_2}[T]_{B_1}.$$

- (b) Wir schauen nochmal auf Aufgabe 1. Es seien die paarweise verschiedene Punkte x_0, x_1, \dots, x_n gegeben und die Abbildung Φ wie zuvor. Gegeben sei die kanonische Basis

$$B := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

von \mathbb{R}^n sowie die Basen

$$B_M := \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

und

$$B_l := \{l_0(x), l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x)\}, \quad \text{mit} \quad l_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Bestimmen Sie

$${}_B[\Phi]_{B_M}, \quad \text{und} \quad {}_B[\Phi]_{B_l}.$$

Ausgehend von den entstandenen Matrizen: Stellen Sie eine Vermutung, welche Basis für große n bevorzugt wird.

Proof. Wir berechnen

$${}_{B_2}[\text{id}]_{B_1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$${}_{B_2}[\text{id}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $\{{}_{B_2}[\text{id}]_{B_1}\}^{-1}$

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4+R_1} \\
 &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4+3R_2} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+3R_4} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+2R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \times -1} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

also

$${}_{B_1}[\text{id}]_{B_2} = \{ {}_{B_2}[\text{id}]_{B_1} \}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
{}_{B_1}[\text{id}]_{B_2} A_{B_2} [\text{id}]_{B_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & -5 & -4 \\ 8 & 1 & 10 & 7 \\ -7 & 0 & -12 & -9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sei $p_k(x) = x^k \in B_M$. Es folgt, dass $\Phi(p_k(x)) = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\}$. Deswegen gilt

$${}_B[\Phi]_{B_M} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie dann $l_k(x)$. Weil $(x - x_i)$ für $i \neq k$ vorkommt, gilt $l_k(x_i) = 0 \forall i \neq k$. Für $i = k$ gilt $l_k(x_k) = \prod_{i \neq j=0}^n \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1$. Es gilt daher

$${}_B[\Phi]_{B_l} = I_n = \text{diag}_n(1, 1, \dots, 1).$$

Ich vermute, dass B_l für große n bevorzugt wird...

□