Lehrstuhl für Mathematik VIII
Julius-Maximilians Universität Würzburg
Vorlesung Stochastik 1
Wintersemester 2024/25
Markus Bibinger / Adrian Grüber

Übungsblatt 3

Klausurübung 3.1

Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = c - 1/2$ und $\mathbb{P}(B \setminus A) = k - 1/2$ mit Konstanten c und k gelten.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A^\complement \cap B^\complement)$.

(c) Welche Bedingungen müssen c und k erfüllen?

(d) Für welche Werte von c und k sind die Ereignisse A und B (stochastisch) unabhängig?

Übung 3.2

In der Situation von Beispiel 2.24 habe sich eine Person r-mal einem ELISA-Test unterzogen, $r \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die einzelnen Testergebnisse – unabhängig davon, ob eine Infektion vorliegt oder nicht – als unabhängige Ereignisse angesehen werden können.
Zeigen Sie: Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Person infiziert ist, wenn alle r Tests positiv ausfallen, ist in Verallgemeinerung von Beispiel 2.24,[1] mit $q = \mathbb{P}(K)$ als Prävalenz, gegeben durch

$$\frac{q p_{se}^r}{q p_{se}^r + (1-q)(1-p_{sp})^r} .$$

Berechnen Sie diese bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Werte aus Beispiel 2.24 und für $r = 2, 3, 5$.

Aufgabe 3.3 (keine Abgabe)

Eine Urne enthalte fünf Kugeln, zwei rote und drei schwarze Kugeln. Es wird zufällig eine Kugel gezogen. Danach werden diese, sowie eine weitere Kugel der gleichen Farbe, in die Urne gelegt. Nun wird erneut eine Kugel gezogen, diese sei rot. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dann auch die erste Kugel rot war.

Aufgabe 3.4 (keine Abgabe)

Führen Sie die folgenden Schritte durch, um eine normierte, additive Mengenfunktion zu erhalten, die trotzdem nicht σ-additiv ist.

[1] Notation siehe Skript, Beispiel 2.24

(1) Setzen Sie $\Omega := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und betrachten Sie die folgende Familie von Teilmengen von Ω:

$$\mathcal{E} := \{[a,b] \cap \mathbb{Q} : \ a,b \in \Omega,\ a \leqslant b\} \cup \{(a,b] \cap \mathbb{Q} : \ a,b \in \Omega,\ a < b\}$$
$$\cup \{[a,b) \cap \mathbb{Q} : \ a,b \in \Omega,\ a < b\} \cup \{(a,b) \cap \mathbb{Q} : \ a,b \in \Omega,\ a < b\} \cup \{\emptyset\}.$$

(Per Konvention gilt $[a,a] = \{a\}$, für alle $a \in \mathbb{R}$.) Weiter sei

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} E_i : \ n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \text{ paarweise disjunkte Mengen aus } \mathcal{E} \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $[0,1] \in \mathcal{B}$

(b) Ist $A \in \mathcal{B}$, so ist auch $A^{\complement} = [0,1] \setminus A \in \mathcal{B}$.

(c) Sind $A, B \in \mathcal{B}$, so ist auch $A \cap B \in \mathcal{B}$.

(Man sagt, dass $\mathcal{B}$ eine *Algebra* über Ω ist.)

(2) Betrachten Sie die Abbildung $\mu : \mathcal{E} \to [0,\infty)$, die folgendermaßen definiert ist: Sind $n \in \mathbb{N}$ und $E_1, \ldots, E_n$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{E}$, so definieren wir

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) := \sum_{i=1}^{n} \ell(E_i),$$

wobei $\ell(\emptyset) = 0$, $\ell(\{a\}) = 0$ und

$$\ell([a,b] \cap \mathbb{Q}) = \ell((a,b] \cap \mathbb{Q}) = \ell([a,b) \cap \mathbb{Q}) = \ell((a,b) \cap \mathbb{Q}) = b - a,$$

für alle $a, b \in \Omega$ mit $a < b$.

Zeigen Sie, dass $\mu([0,1]) = 1$ gilt und μ additiv ist.

Bemerkung. Eigentlich müsste man zuerst beweisen, dass μ wohl-definiert ist, mit anderen Worten dass es bei der Definition von $\mu(A)$ nicht auf die jeweilige Darstellung $A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ankommt. Darauf dürfen Sie bei dieser Teilaufgabe verzichten.

(3) Zeigen Sie, dass es eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{B}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ gibt, aber zugleich

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Hinweis. Die Menge Ω ist abzählbar.

Bearbeitung bis Donnerstag, den 07.11.2024.