Wintersemester 2024/2025 | 21.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy | Andreas Schroll

6. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 25.11. und 26.11. gelöst.

Aufgabe P6.1

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = -\tan(x)e^x, \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie alle x_0, für die (1) konstante Lösungen hat.

Nun sei die Anfangswertbedingung gegeben durch $x(0) = -1$. Weiterhin nehmen wir ohne Beweis an, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Lösung $\varphi(t)$ von oben durch 0 beschränkt ist.

Wir nehmen im Folgenden ohne Beweis an, dass $\varphi(t)$ streng monoton steigend und $I = (t^-, \infty)$ ist, $0 \in I$.

c) Zeigen Sie, dass $-\infty < t^-$ gilt.

(*Hinweis: Weitere Fragestellungen zu dieser Aufgabe werden bei F6.4 behandelt.*)

Aufgabe P6.2

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Zeigen Sie, dass die Matrix A diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie zudem Matrizen S, S^{-1} und D, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt, wobei D die zu A ähnliche Diagonalmatrix ist.

Wintersemester 2024/2025 — 21.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

6. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 28.11.2023 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 4 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H6.1 **(1 + 1 + 4 + 2 = 8 Punkte)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x(x-2)e^{\cos(x)}, \quad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie alle x_0, für die (2) konstante Lösungen hat.

Nun sei die Anfangswertbedingung gegeben durch $x(0) = 1$.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung $\varphi(t)$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass die Lösung aus Teilaufgabe b beschränkt, streng monoton fallend ist und auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

d) Zeigen Sie, dass die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} \varphi(t)$ existieren und bestimmen Sie diese Grenzwerte.

Aufgabe H6.2 **(5 Punkte)**

Sei $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben, durch

$$A(t) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Übergangsmatrix und eine Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Aufgabe H6.3 **(4 + 3 = 7 Punkte)**

Sei I ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Sei $\Phi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix von

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie eine stetige Abbildung $B : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $\Psi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\Psi(t) := \left(\Phi^T\right)^{-1}(t)$ eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = B(t)x$ definiert.
(*Hinweis: Als Fundamentalmatrix muss $\Psi(t)$ die Differentialgleichung $\dot{\Psi}(t) = B(t)\Psi(t)$ erfüllen.*)

b) Sei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(C) \neq 0$ und sei $\Psi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $\Psi(t) := C\Phi(t)$. Zeigen Sie, dass $\Psi(t)$ genau dann eine Fundamentalmatrix von (3) ist, wenn

$$CA(t) = A(t)C$$

für alle $t \in I$ gilt.

Aufgabe H6.4 **(Multiple Choice)**

Beurteilen Sie, ob die folgenden 4 Behauptungen wahr oder falsch sind.
Sie müssen bei dieser Aufgabe **keine** Begründungen angeben.

Für jede richtig beantwortete Frage gibt es einen Punkt.
Für jede falsch beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen.
Für jede nicht beantwortete Frage gibt es keine Punkte.
Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet (sie können also nicht z. B. -1 Punkte bekommen).
Insgesamt können bis zu 4 Punkte erreicht werden.

	wahr	falsch
Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitz-stetig und $\dot{x} = f(t,x)$ eine Differentialgleichung. Weiter sei φ_{max} eine maximale Lösung mit maximalem Existenzintervall $I_{max} = (-\infty, t^+)$, $t^+ < \infty$. Dann ist φ_{max} beschränkt.		
Sei $\ddot{x} = \frac{\dot{x}-1}{x}$ eine skalare Differentialgleichung, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dann ist $\varphi(t) = t\ln(t)$, $t > 1$, eine Lösung dieser Differentialgleichung.		
Sei $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $\dot{x} = f(t,x)$. Ist $I = (t_0, t_1)$ und hat φ in t_1 einen linksseitigen Grenzwert $x_1 = \lim_{t\to t_1}\varphi(t)$ mit $(t_1, x_1) \in D$, so ist φ nach rechts fortsetzbar.		
Jede Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ ist auch eine Wronski-Matrix $W(t)$.		

Wintersemester 2024/2025 — 21.11.2023

Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

6. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Freiwillige Aufgaben

Bitte geben Sie diese Aufgaben nicht mit der Hausaufgabe ab.

Aufgabe F6.1

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B diagonalisierbar sind. Bestimmen Sie zudem Matrizen S, T, S^{-1}, T^{-1}, D_1 und D_2, sodass $A = SD_1S^{-1}$ und $B = TD_2T^{-1}$ gilt, wobei D_1 bzw. D_2 die zu A bzw. B ähnliche Diagonalmatrix ist, $S, T, S^{-1}, T^{-1}, D_1, D_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Aufgabe F6.2

Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Begründen Sie, ob A bzw. B diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ ist.

b) Geben Sie im Falle der Diagonalisierbarkeit Matrizen S, S^{-1}, D an, sodass $A = SDS^{-1}$ bzw. $B = SDS^{-1}$ gilt.

Aufgabe F6.3

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Bestimmen Sie Matrizen S, S^{-1}, D, sodass $S^{-1}AS = D$ gilt, wobei D die zu A ähnliche Diagonalmatrix ist.

Aufgabe F6.4

Wir betrachten wieder (1) aus P6.1, also

$$\dot{x} = -\tan(x)e^x, \quad x(0) = -1.$$

a) In P6.1 haben wir ohne Beweis angenommen, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Zeigen Sie nun, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Wir haben gezeigt, dass die Lösung $\varphi(t)$ von oben durch 0 beschränkt ist. Zeigen Sie nun zusätzlich, dass $\varphi(t)$ streng monoton steigend ist.

c) Weiterhin haben wir gezeigt, dass $-\infty < t^-$ gilt und $I = (t^-, \infty)$ angenommen. Zeigen Sie, dass $t^+ = \infty$ wirklich gilt. Bestimmen Sie außerdem den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)$.

(*Hinweis: Beachten Sie die bewiesenen Aussagen aus P6.1.*)