Einfürung in die Differentialgeometrie Hausaufgaben Blatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 25, 2024)

Aufgabe 1. Auf einem Kreis mit Radius 4 rollt innen ein Kreis mit Radius 1 ab. Die Kurve, die dabei ein fest gewählter Punkt auf dem kleineren Kreis beschreibt, heißt Astroide (dt. "sternähnliche Kurve").

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Astroide und fertigen Sie eine Skizze der Kurve an (oder visualisieren Sie sie auf Geogebra). An welchen Stellen ist Ihre Parametrisierung singulär?

(b) Seien a, b mit $a < b$ beliebige aus dem Definitionsbereich Ihrer Parametrisierung. Leiten Sie eine Formel für die Bogenlänge Ihrer parametrisierten Kurve auf dem Intervall $[a, b]$ her.

Beweis. (a) Der Schwerpunkt der Masse bewegt sich mit Winkelgeschwindigkeit ω. Der Kreis dreht deswegen mit Winkelgeschwindigkeit 3ω.

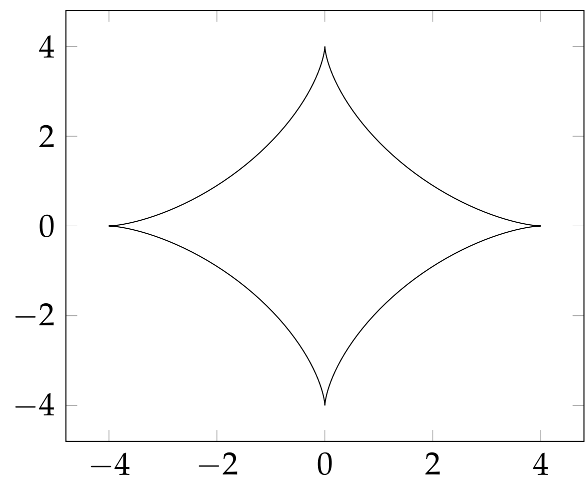
Ein Punkt hat die Parametrisierung

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(3\cos\omega t + \cos\left(3\omega t + \delta\right), 3\sin\omega t + \sin\left(3\omega t + \delta\right)\right).$$

OBdA ist $\omega = 1$ und in diesem Fall ist $t \in [0, 2\pi)$.

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(3\cos t + \cos(3t + \delta), 3\sin t - \sin(3t + \delta)\right).$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de



(b) …

Aufgabe 2. Betrachten Sie die *Traktrix* (dt. "Ziehkurve") $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := \left(\cos t + \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), \sin t\right), \qquad t \in (0, 2\pi).$$

(a) Skizzieren Sie die gegebene parametrisierte Kurve (oder visualisieren Sie sie auf Geogebra).

(b) Zeigen Sie, dass jede Tangente der Traktrix die x-Achse schneidet, und dass die Länge der Strecke der Tangente zwischen dem Berührungspunkt mit der Traktrix und dem Schnittpunkt mit der x-Achse für alle Tangenten der Traktrix gleich ist.