Wintersemester 2023/24 — 08.01.2024
Prof. Dr. Stephan Elsenhans — Benedikt Wolf

Lineare Algebra: Aufgabenblatt 11

11.1 Lineare Gleichungssysteme /30 Punkte

Bestimmen Sie für $b \in \left\{ \begin{pmatrix} i+2 \\ 2 \\ -i-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2i-6 \\ -5 \\ 3i+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3$ jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{C}^3$.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2i+6 & -i & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -3-2i & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

11.2 Elementarmatrizen /20 Punkte

(a) Bestimmen Sie für $m = 3$ die Elementarmatrizen $S_1(\lambda), Q_{12}(\lambda), P_{12}$ aus 3.6.1 als explizite 3×3-Matrizen und überprüfen Sie für damit die Behauptungen 1-6 aus 3.6.2 exemplarisch im Fall $i = 1, j = 2, m = 3$.

(b) Beweisen Sie für alle $i, j, m \in \mathbb{N}, \lambda \in K$ mit $i \neq j$ und $i, j \leq m$ die Behauptungen

$$S_i(\lambda)^{-1} = S_i(\lambda^{-1}), \quad Q_{ij}(\lambda)^{-1} = Q_{ij}(-\lambda), \quad P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

aus Bemerkung 3.6.2.

11.3 Permutationen /15 Punkte

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle. Alle Permutationen sind dabei Elemente von S_{10}. Ein Rechenweg/Begründung ist hier nicht verlangt, eine Beispielzeile ist vorgegeben.

Wertetabelle	Zykelschreibweise	Fehlstellungen	Signum
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 10 & 7 \end{bmatrix}$	$(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)$	(9, 10), (7, 10), (4, 6), (8, 10), (2, 3), (5, 6), (1, 3)	-1
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 9 & 1 & 10 \end{bmatrix}$			
	$(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10)$		
		(1, 2), (3, 7), (5, 7), (6, 7), (8, 9), (5, 9), (6, 9), (4, 7)	

11.4 Signum, Zykel, Fehlstellungen **/15 Punkte**

(a) Zeigen Sie: Der Zykel $c_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_N$ mit $N \geq n$ ist genau dann gerade, wenn n ungerade ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt zu jeder Teilmenge T von $\{(i,j) | 1 \leq i < j \leq 10\}$ genau eine Permutation in S_{10}, deren Fehlstellungen genau die Menge T sind.

11.5 Matrizen als Vektoren **/20 Punkte**

Die Menge $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{3\times 3}$ ist mit der gewöhnlichen Matrizenaddition und der komponentenweisen skalaren Multiplikation ein $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-Vektorraum (Siehe 3.6.1). Für eine gegebene Matrix $A \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{3\times 3}$ definieren wir die Multiplikationsabbildung $m_A : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{3\times 3} \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{3\times 3}$ durch $m_A(B) := AB$.

(a) Zeigen Sie, dass m_A linear ist

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von m_A bezüglich der Basis

$$(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{3,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, E_{3,2}, E_{1,3}, E_{2,3}, E_{3,3})$$

(c) Bestimmen Sie den Kern von m_A in Abhängigkeit von A und zeigen Sie: $\dim \ker m_A = 3 \dim \ker A$.

(d) Bestimmen Sie alle A, für die m_A bijektiv ist.

(e) Bestimmen Sie die Anzahl der Matrizen X, die die Gleichung $m_A(X) = A$ erfüllen, in Abhängigkeit von A.

Abgabetermin: **15.01.2024, 11:00 Uhr auf WueCampus**
Maximal 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Begründen Sie Ihre Behauptungen. Sofern nicht anders angegeben, dürfen Sie nur Aussagen verwenden, die in der Vorlesung oder in den Übungen bereits bewiesen wurden. $\sum$ **/100**

Lösungshinweise

Aufgabe 1:
Diese Aufgabe ist eine klassische „Rechenaufgabe“ (wenn auch mit etwas „komplizierteren“ Werten).
Achten Sie verstärkt auf eine übersichtliche, gut nachvollziehbare Darstellung und saubere Notation.
Welche Rechnungen können Sie einem Computer überlassen? Welche sollten Sie lieber selbst von Hand durchführen? Wie können Sie Ihre Rechnung prüfen?

Aufgabe 2:
Rechnen Sie in Teil (b) symbolisch, d.h. ohne die Matrizen explizit aufzustellen. Welchen Wert haben die Produkte $E_{ij} \cdot E_{kl}$?

Aufgabe 3:
Zykel der Länge 1 werden in der Zykeldarstellung für gewöhnlich weggelassen.

Aufgabe 4:
...

Aufgabe 5:
In dieser Aufgabe muss nicht viel „gerechnet“ werden. Sie sollten allerdings verstanden haben, wie Darstellungsmatrizen aufgestellt werden, welche algebraische Struktur Matrizen haben und was der Kern mit den Abbildungseigenschaften von A zu tun hat.