

Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 23, 2024)

I. MESSUNG

Zur Berechnung der Fehler nehmen wir an, dass die Streuung durch eine Poissonverteilung gut beschrieben ist. Der Fehler ist also der quadratische Wurzel des Messwerts. Wir bezeichnen die Anzahl der Zerfälle mit r .

Zeit (s)	Anzahl Zerfälle	Poissonfehler
20	33	5,7
40	30	5,5
60	27	5,2
80	26	5,1
100	23	4,8
120	20	4,5
140	19	4,4
160	17	4,1
180	18	4,2
200	12	3,5

Radioaktive Zerfall ist durch das Zerfallsgesetz beschrieben

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Deren Ableitung ist

$$N'(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

und die Anzahl der Zerfälle ist damit proportional zu $\lambda e^{-\lambda t}$. Wir schreiben die Anzahl der Zerfälle als $r(t) = k\lambda e^{-\lambda t}$. Es gilt also

$$\ln r = \ln(k\lambda) - \lambda t \quad (2)$$

Wir plotten $\ln r$ in Abhängigkeit von der Zeit, und die Steigung ist $-\lambda$. Man kann daraus die Halbwertszeit bestimmen, indem man $N(t) = N_0/2$ in Gl. (1) einsetzt.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

mit Lösung

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (3)$$

Wir bestimmen also das natürliche Logarithmus der Zerfallanzahl. Dessen Fehler ist durch

$$\Delta(\log r) = \frac{\Delta r}{r}$$

bestimmt. Weiterhin bezeichnen wir die Zeit mit x und $\ln r$ mit y .

Zeit (s)	$\ln r$	$\Delta(\ln r)$
20	3,50	0,17
40	3,40	0,18
60	3,30	0,19
80	3,26	0,20
100	3,14	0,21
120	3,00	0,22
140	2,94	0,23
160	2,83	0,24
180	2,89	0,24
200	2,48	0,29

II. UNGEWICHTETE LINEARE REGRESSION

Wir finden eine Gerade

$$y = a + bx$$

sodass der Fehler so klein wie möglich ist. Die benötigten Größen sind

$$N = 10$$

$$\sum x_i = 1100$$

$$\sum y_i = 30,73579556754441$$

$$\sum x_i^2 = 154000$$

$$\sum x_i y_i = 3220,197114428394$$

Dann berechnen wir

$$\Delta = N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$$

$$= 330000$$

$$a = \frac{1}{\Delta} (\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i)$$

$$= 3,609380883426078$$

$$b = \frac{1}{\Delta} (N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i)$$

$$= -0,004870921151560359$$