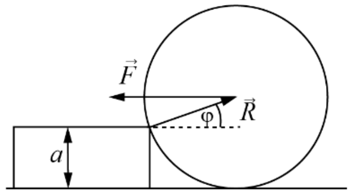
Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

**Aufgabe 7.1:** *Die Stufe hoch* ........................................................ (3 Punkte)

Ein Zylinder mit dem Radius $R$ und der Masse $M$ soll über eine Stufe mit der Höhe $a$ ($a < R$) gerollt werden (s. Abb.).

(1 P) a) Bestimmen Sie den Betrag der minimalen horizontalen Kraft als Funktion des Winkels $\varphi$, mit der an dem Zylinder gezogen werden muss, damit er die Stufe hochrollt.




(1 P) b) Ab welcher Stufenhöhe $a_{\max}$ ausgedrückt in Bruchteilen von $R$, ist es von der aufzubringenden Kraft her sinnvoller, den Zylinder zu heben als ihn zu rollen?

(1 P) c) Berechnen Sie mit $W = \int \vec{M} d\vec{\varphi}$ die Arbeit, die nötig ist um den Zylinder über die Stufe zu rollen.

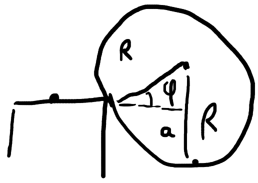
a) Wir betrachten die tangentiale Komponente der Kraft. Die muss größer als die tangentiale Komponente der Schwerkraft sein, damit der Zylinder hochrollen kann. D.h.

$$F \sin\varphi \geq mg\cos\varphi$$

$$F \geq mg\cot\varphi$$

also der Betrag der minimalen Kraft ist $mg\cot\varphi$

b) Geometrisch




$$\sin\varphi = \frac{R-a}{R}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{R-a}{R}\right)^2}$$

$$\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{R-a}{R}\right)^2}}{\frac{R-a}{R}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{R}{R-a}\right)^2-1}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2}{R^2+a^2-2Ra}-1}$$

$$= \sqrt{\frac{2Ra-a^2}{(R-a)^2}}$$

Es ist sinnvoller, den Zylinder zu heben, wenn $mg\cot\varphi \geq mg$

also $\cot\varphi \geq 1$

$$\frac{2Ra-a^2}{(R-a)^2} \geq 1$$

$$2Ra-a^2 \geq R^2+a^2-2Ra$$

$$0 \geq 2a^2-4Ra+R^2$$

Es gilt $2a^2-4Ra+R^2=0$ genau dann, wenn

$$a = \frac{4R \pm \sqrt{16R^2-8R^2}}{4}$$

$$= R \pm \frac{1}{\sqrt{2}}R$$

also $0 \geq 2a^2-4Ra+R^2$

$$\Leftrightarrow \quad R-\frac{1}{\sqrt{2}}R \leq a \leq R+\frac{1}{\sqrt{2}}R$$

also $a_{max} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R$

c) $|\vec{M}| = (F\sin\theta - mg\cos\theta)R$


$$W = \int \vec{M}\cdot d\vec{\theta} = R\int_{\varphi}^{\pi/2} F\sin\theta - mg\cos\theta \, d\theta$$

$$= R\left[-F\cos\theta - mg\sin\theta\right]_{\varphi}^{\pi/2}$$

$$= R\left[(-mg) + (F\cos\varphi + mg\sin\varphi)\right]$$

$$= RF\cos\varphi - mg(1-\sin\varphi)R$$

Im Fall, dass $F = mg\cot\varphi$, ist

$$W = mgR\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} - mgR + mgR\sin\varphi$$

$$= mgR\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} + \sin\varphi\right) - mgR$$

$$= mgR\left(\csc\varphi - 1\right)$$