

6. Übung zur Klassischen Mechanik

20. November 2023

Symmetrien

6.1 Harmonischer Oszillator mit reduzierter Symmetrie

Betrachten Sie das Potential des sphärischen harmonischen Oszillators mit einer kleinen Störung δV :

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2 + \delta V(\vec{x}). \quad (1)$$

1. Es sei

$$\delta V(\vec{x}) = \lambda_1 x_3. \quad (2)$$

Formulieren und lösen Sie die entkoppelten Bewegungsgleichungen für die kartesischen Koordinaten. Was ist die geometrische Interpretation der Lösung? Kann man dies schon aus dem Potentials (1) ablesen?

2. Es sei nun

$$\delta V(\vec{x}) = \lambda_2 x_3^2. \quad (3)$$

Formulieren und lösen Sie auch hier die entkoppelten Bewegungsgleichungen für die kartesischen Koordinaten. Was erwarten Sie anschaulich für die Trajektorien im Vergleich zu den elliptischen Bahnen des ungestörten Problems?

6.2 Symmetrietransformationen

Betrachten Sie ein Teilchen auf der Ebene mit Konfigurationsraum $Q = \mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) = \vec{x}$ und Phasenraum $TQ = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = (\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ und der Lagrangefunktion

$$L : TQ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \mapsto L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - \frac{\beta}{2} (\vec{x}^2)^2. \quad (4)$$

1. Leiten Sie aus L die Euler-Lagrange Gleichungen (ELG) für x_1 und x_2 ab.
2. Betrachten Sie die einparametrische Familie ϕ von Koordinatentransformationen

$$\phi : \mathbf{R} \times TQ \times \mathbf{R} \rightarrow Q$$

$$(s, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \mapsto \phi_s(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \begin{pmatrix} \cos(s)x_1 - \sin(s)x_2 \\ \sin(s)x_1 + \cos(s)x_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \vec{x} + s\delta_\phi \vec{x} + \mathcal{O}(s^2)$$

- (a) Interpretieren Sie ϕ_s als geometrische Transformation der (x_1, x_2) -Ebene.
- (b) Bestimmen Sie die ELG, die Sie durch Anwendung der Transformation ϕ_s auf Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den ELG für x_1 und x_2 erhalten.
- (c) Bestimmen Sie infinitesimale Transformationen von Koordinaten $\delta_\phi \vec{x}$ und Geschwindigkeiten $\delta_\phi \dot{\vec{x}}$.
- (d) Bestimmen Sie transformierten Lagrangefunktionen

$$L^{\phi_s}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = L(\phi_s(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t), \dot{\phi}_s(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t), t) \quad (6)$$

und die zugehörige infinitesimale Transformierte $\delta_\phi L$.

- (e) Leiten Sie aus L^{ϕ_s} die ELG für x_1 und x_2 ab und vergleichen Sie sie mit den ELG, die Sie in (b) erhalten haben.
- (f) Falls $\delta_\phi L$ die Voraussetzungen des Noether-Theorems erfüllt, leiten Sie die zugehörige Erhaltungsgröße I_ϕ ab.

6.3 Noether-Theorem

Weil alle Zwischenschritte in knapper Form in den Skripten aus früheren Semestern zu finden sind, geht es in dieser Aufgabe **nicht** darum, diese Schritte abzuschreiben, sondern sie im Detail nachzuvollziehen!

Betrachten Sie die beiden Lagrangefunktionen

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad L_{\text{HO}} &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2 && (\text{Isotroper harmonischer Oszillator}) \\ \text{b)} \quad L_{\text{K}} &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{\alpha}{|\vec{x}|}. && (\text{Kepler-Problem}) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Anwendung der folgenden Transformationen auf die jeweilige Lagrangefunktion eine totale Zeitableitung ergibt (wobei φ eine symmetrische 3×3 -Matrix ist und $\vec{\rho}$ ein Vektor im dreidimensionalen Raum)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \delta_{\varphi}\vec{x} &= \varphi\dot{\vec{x}}, && (\delta_{\varphi}x_i = \sum_{j=1}^3 \varphi_{ij}\dot{x}_j \text{ mit } \varphi_{ij} = \varphi_{ji}) \\ \text{b)} \quad \delta_{\rho}\vec{x} &= 2(\vec{\rho}\dot{\vec{x}})\dot{\vec{x}} - (\dot{\vec{\rho}}\dot{\vec{x}})\vec{x} - (\vec{x}\dot{\vec{x}})\vec{\rho} && (\text{mit } \vec{\rho} \in \mathbf{R}^3) \end{aligned}$$

d. h. $\delta_{\varphi}L_{\text{HO}} = \frac{d}{dt}\Lambda_{\varphi}$ und $\delta_{\rho}L_{\text{K}} = \frac{d}{dt}\Lambda_{\rho}$. Verwenden Sie das Noether-Theorem, um die zugehörigen Erhaltungsgrößen F_{ij} und \vec{R} zu konstruieren.