1. Dipol und Quadrupol

Betrachten Sie einen elektrischen Dipol $\vec{p}$ an der Stelle $\vec{a}$ im Halbraum $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$, der bei $x_3 = 0$ durch einen geerdeten Leiter beschränkt wird.

a) Bestimmen Sie das Potential $\phi(\vec{x})$im Halbraum V.

b) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ im Halbraum V.

c) Berechnen Sie die auf der Oberfläche des Leiters induzierte Oberflächenladungsdichte.

d) Berechnen Sie die Kraft auf den Dipol, wenn die Orientierung im Raum festgehalten ist.

e) Welche Orientierung nimmt der Dipol ein, wenn er frei rotieren kann, aber sein Aufhängungspunkt $\vec{a}$ festgehalten wird?

f) Berechnen Sie Potential und elektrisches Feld, wenn der Dipol durch einen Quadrupol Q ersetzt wird.

a) Definiere $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Bilddipol $\vec{p}' = \begin{pmatrix} -p_x \\ -p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ bei $\vec{b} := \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} + \frac{\vec{p}'\cdot(\vec{r}-\vec{b})}{|\vec{r}-\vec{b}|^3} \right]$$

b) $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$

$$\partial_i \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} = \frac{p_i}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} + \vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})\,\partial_i \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}$$

$$= \frac{p_i}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} + \vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})\,(-3)\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|^4}\,\partial_i|\vec{r}-\vec{a}|$$

$$= \frac{p_i}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} + \vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})\,(-3)\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|^4}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}(r_i - a_i)$$

$$= \frac{p_i}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - 3\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^5}(r_i - a_i)$$

$$-\nabla \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} = \frac{3\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^5}(\vec{r}-\vec{a}) - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^5}(\vec{r}-\vec{a}) - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}\right.$$

$$\left. + \frac{3\vec{p}'\cdot(\vec{r}-\vec{b})}{|\vec{r}-\vec{b}|^5}(\vec{r}-\vec{b}) - \frac{\vec{p}'}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}\right]$$

c) Bei $x_3=0$ ist $|\vec{r}-\vec{a}| = |\vec{r}-\vec{b}| = (r_x-a_x)^2+(r_y-a_y)^2+a_z^2$

$$\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a}) = p_x(r_x-a_x) + p_y(r_y-a_y) + p_z(\underbrace{r_z}_{\to 0}-a_z)$$

$$\vec{p}'\cdot(\vec{r}-\vec{b}) = \begin{pmatrix} -p_x \\ -p_y \\ p_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r_x-a_x \\ r_y-a_y \\ r_z+a_z \end{pmatrix}$$

$$= -p_x(r_x-a_x) - p_y(r_y-a_y) + p_z(\underbrace{r_z}_{\to 0}+a_z)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3[p_x(r_x-a_x)-p_y(r_y-a_y)-p_z a_z]}{|\vec{r}-\vec{a}|^5}\begin{pmatrix} r_x-a_x \\ r_y-a_y \\ -a_z \end{pmatrix} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + \frac{3[-p_x(r_x-a_x)-p_y(r_y-a_y)+p_z a_z]}{|\vec{r}-\vec{a}|^5}\begin{pmatrix} r_x-a_x \\ r_y-a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}\begin{pmatrix} -p_x \\ -p_y \\ p_z \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{6[p_x(r_x-a_x)-p_y(r_y-a_y)-p_z a_z]}{|\vec{r}-\vec{a}|^5}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_z \end{pmatrix} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2p_z \end{pmatrix}\right\}$$

$$\sigma = -\epsilon_0\,\vec{E}\cdot\hat{z}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{6[p_x(r_x-a_x)-p_y(r_y-a_y)-p_z a_z]}{|\vec{r}-\vec{a}|^5}a_z + \frac{2}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix}\right\}$$

d) Wir betrachten die Kraft vom Bilddipol auf den Dipol

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}'\cdot(\vec{r}-\vec{b})}{|\vec{r}-\vec{b}|^5}(\vec{r}-\vec{b}) - \frac{\vec{p}'}{|\vec{r}-\vec{b}|^3}\right]$$

$$\partial_i \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3p_i'}{|\vec{r}-\vec{b}|^5}(\vec{r}-\vec{b}) + \frac{3\vec{p}'\cdot(\vec{r}-\vec{b})}{|\vec{r}-\vec{b}|^5}\hat{e}_i \right.$$

$$\left. + \left[3\vec{p}'(\vec{r}-\vec{b})\right]\left[\vec{r}-\vec{b}\right]\partial_i|\vec{r}-\vec{b}|^{-5} - \vec{p}'\,\partial_i|\vec{r}-\vec{b}|^{-3}\right]$$

$$\partial_i|\vec{r}-\vec{b}|^{-k} = -\frac{k}{|\vec{r}-\vec{b}|^{k+1}}\;\partial_i|\vec{r}-\vec{b}|$$

$$= -\frac{k}{|\vec{r}-\vec{b}|^{k+1}}\;\frac{r_i-b_i}{|\vec{r}-\vec{b}|} = -\frac{k(r_i-b_i)}{|\vec{r}-\vec{b}|^{k+2}}$$

$$\partial_i \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3p_i'}{|\vec{r}-\vec{b}|^5}(\vec{r}-\vec{b}) + \frac{3\vec{p}'\cdot(\vec{r}-\vec{b})}{|\vec{r}-\vec{b}|^5}\hat{e}_i \right.$$

$$\left. - \left[3\vec{p}'\cdot(\vec{r}-\vec{b})\right]\left[\vec{r}-\vec{b}\right]\frac{5(r_i-b_i)}{|\vec{r}-\vec{b}|^7} - \frac{3\vec{p}'(r_i-b_i)}{|\vec{r}-\vec{b}|^5}\right]$$

$$\left(\partial_i \vec{E}_2\right)(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3p_i'}{(2a_z)^5}(2a_z)\hat{e}_z + \frac{6p_z'a_z}{(2a_z)^5}\hat{e}_i \right.$$

$$\left. - (6p_i'a_z)(2a_z\hat{e}_z)\frac{5(2a_z)\delta_{iz}}{(2a_z)^7} - \frac{3\vec{p}'(2a_z)\delta_{iz}}{(2a_z)^5}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3}{2^4}\frac{p_i'}{a_z^4}\hat{e}_z + \frac{3}{2^4}\frac{p_z'}{a_z^4}\hat{e}_i - \frac{15}{2^4}\frac{p_i'\delta_{iz}}{a_z^4}\hat{e}_z - \frac{3}{2^4}\frac{\vec{p}'}{a_z^4}\delta_{iz}\right]$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} p_i\,\partial_i \vec{E}_2(\vec{a})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\;\cdots\;\right]$$

$\ddot{\frown}$

2. Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Gegeben sei eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(x')$. Das zugehörige Potential Φ kann außerhalb des Gebiets von ρ in Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ entwickelt werden,

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Q_{l,m}}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \phi) \,, \tag{1}$$

mit den Multipolmomenten $Q_{l,m}$. Letztere sind definiert durch

$$Q_{l,m} = \int d^3x' Y^*{}_{l,m}(\theta', \phi') r'^l \rho(x') \,. \tag{2}$$

Betrachten Sie eine kreisförmige Schleife mit Radius R in der x, y-Ebene, deren Mitte am Ursprung liegt. Sie trägt eine lineare Ladungsdichte $\lambda = \lambda_0 \cos\alpha$. α ist der Azimutwinkel in der x, y-Ebene.

1. Finden Sie einen Ausdruck in Kugelkoordinaten für die Ladungsdichte $\rho(x')$ der Schleife.

2. Berechnen Sie die Multipolmomente $Q_{l,m}$. Benutzen Sie Ihr Ergebnis, um das Dipol- und das Quadrupolmoment des Potentials Φ als die beiden führenden Terme für $|x| \gg R$ zu bestimmen. Diskutieren Sie die Eigenschaften beider Multipole.

3. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$, welches jeweils zu Dipol- und Quadrupolmoment gehört.

1) $\rho(\vec{x}') = \frac{\lambda_0 \cos\varphi}{R} \delta(r-R)\, \delta(\theta - \frac{\pi}{2})$

2) $Q_{l,m} = \int Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\, r^l \frac{\lambda_0 \cos\varphi}{R} \delta(r-R)\, \delta(\theta - \frac{\pi}{2})\, d^3x$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} Y^*_{lm}(\frac{\pi}{2},\varphi)\, r^l \frac{\lambda_0 \cos\varphi}{R} \delta(r-R)\, \delta(\theta - \frac{\pi}{2})\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} Y^*_{lm}(\frac{\pi}{2},\varphi)\, r^l \frac{\lambda_0 \cos\varphi}{R} \delta(r-R)\, r^2\, dr\, d\varphi$

$= R^{l+1} \lambda_0 \int_0^{2\pi} Y^*_{l,m}(\frac{\pi}{2},\varphi) \cos\varphi\, d\varphi$

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = N_{\ell,m}\, e^{im\varphi}\, P_\ell^m(\cos\theta)$$

$$Y_{\ell,m}(\tfrac{\pi}{2},\varphi) = N_{\ell,m}\, e^{im\varphi}\, P_\ell^m(0)$$

$$Q_{\ell,m} = R^{\ell+1}\lambda_0 \int_0^{2\pi} N_{\ell,m}\, e^{-im\varphi}\, P_\ell^m(0)\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \begin{cases} R^{\ell+1}\lambda_0\, P_\ell^m(0) N_{\ell,m} & m = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dipol: $\ell = 1$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q_{1,1}}{3}\frac{1}{r^2} Y_{1,1}(\theta,\varphi) + \frac{Q_{1,-1}}{3}\frac{1}{r^2} Y_{1,-1}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{1,1}(\theta,\varphi) = \underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}_{N_{1,1}} \sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$$Y_{1,-1}(\theta,\varphi) = \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}_{N_{1,-1}} \sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

$$Q_{1,1} = R^2\lambda_0\, P_1^1(0) N_{1,1}$$

$$= -\frac{R^2\lambda_0}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

$$Q_{1,-1} = \frac{R^2\lambda_0}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{R\lambda_0}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\frac{1}{3}\frac{1}{r^2}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}\right]$$

$$+\frac{R\lambda_0}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\frac{1}{3}\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}\right]$$

$$= \frac{R\lambda_0}{12\, r^2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)\sin\theta\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)$$

$$= \frac{R^2\lambda_0}{4\pi r^2}\sin\theta\cos\varphi$$

Dipolpotential $\propto \frac{1}{r^2}$

Quadrupol: $Q_{2,m} = R^3\lambda_0\int_0^{2\pi} Y^*_{2,m}\left(\frac{\pi}{2},\varphi\right)\cos\varphi\, d\varphi$

$= 0$ für alle m

3) Dipol:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{R^2\lambda_0}{4\pi r^2}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\vec{E} = -\frac{R^2\lambda_0\cos\varphi\sin\theta}{2\pi r^3}\hat{r} + \frac{R^2\lambda_0\cos\theta\cos\varphi}{4\pi r^3}\hat{\theta}$$

$$-\frac{R^2\lambda_0\sin\varphi}{4\pi r^3}\hat{\varphi}$$

Quadrupol: $\vec{E} = \vec{0}$