Lehrstuhl für Mathematik VIII
Julius-Maximilians Universität Würzburg
Vorlesung Stochastik 1
Wintersemester 2024/25
Markus Bibinger / Adrian Grüber

# Übungsblatt 13

**Klausurübung 13.1**

In einer Meinungsumfrage soll die Zustimmung oder Ablehnung eines generellen Tempolimits in der Bevölkerung geschätzt werden. Dazu werden $n$ zufällig ausgewählte Personen befragt. Dabei wird $S_n/n$, die relative Anzahl der Befürworter unter den befragten Personen, als Schätzung für die Zustimmungsrate $p$ verwendet.

(a) Begründen Sie, weshalb $S_n$ näherungsweise als binomialverteilt, $S_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, angenommen werden kann.

(b) Verwenden Sie den Satz von de Moivre-Laplace, um folgende Approximation herzuleiten:

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| > \varepsilon\Big) \approx 2\Big(1 - \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\Big)\Big)\,,$$

wobei $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet.

(c) Wie viele Personen sollte ein Meinungsforschungsinstitut befragen, um sicherzustellen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\alpha \in (0,1)$ die relative Anzahl der Befürworter nicht mehr als 5% von der wahren Zustimmungsrate $p$ abweicht?

**Übung 13.2**

(a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ identisch verteilte, reellwertige Zufallsvariablen (nicht notwendigerweise unabhängig) mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Angenommen, es existiert ein festes $h \geq 1$, so dass $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_j, X_k) = 0$ für $|j-k| \geq h$. Zeigen Sie unter dieser Annahme für $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die Abschätzung

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) \leq 2nh\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)\,.$$

(b) Folgern Sie, unter Verwendung von (a), dass auch unter diesen Annahmen ein schwaches Gesetz der großen Zahlen erfüllt ist.

**Aufgabe 13.3**

Eine Fluggesellschaft hat Flugzeuge mit jeweils 150 Sitzplätzen. Aus Erfahrung sei bekannt, dass 10% der Kunden mit gebuchten Tickets nicht erscheinen. Dabei können die Ereignisse, ob einzelne Kunden erscheinen, als unabhängig mit gleichen Wahrscheinlichkeiten angenommen werden.

(a) Die Airline überbucht und verkauft 160 Tickets für einen Flug. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Flugzeug genug Plätze für alle erscheinenden Kunden sind, mit dem Satz von de Moivre-Laplace, einmal mit und einmal ohne Stetigkeitskorrektur.

(b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kunden abgewiesen werden müssen, soll nun durch 1% beschränkt werden. Wie viele Tickets darf die Airline dann maximal verkaufen?

(c) Es soll mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% eine Auslastung von 90% nicht unterschritten werden. Muss die Airline einen Flug dann sogar überbuchen, um diesem Ziel gerecht zu werden?

**Hinweis:** Sie dürfen in dieser Aufgabe die folgenden Quantile der Standardnormalverteilung benutzen: $\Phi^{-1}(0{,}9) \approx 1{,}29$ und $\Phi^{-1}(0{,}99) \approx 2{,}33$.

**Aufgabe 13.4**

Es ist schwierig, das Integral

$$\int_0^\infty \sqrt{\sqrt{z} + z}\,\exp(-z)\,dz$$

analytisch zu berechnen. Numerisch kann dies, z. Bsp. von wolframalpha, jedoch approximiert werden. Eine Möglichkeit dazu bietet die Stochastik und das Gesetz der großen Zahlen („Monte-Carlo-Integration“). Schreiben Sie dazu das Integral als Erwartungswert $\mathbb{E}[g(X)]$, mit einer geeignet verteilten Zufallsvariable $X$ und Funktion $g$. Zeigen Sie die stochastische Konvergenz einer Summe mit u.i.v. Zufallsvariablen $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ gegen das Integral mit der Tschebyschev-Ungleichung. Implementieren Sie das Verfahren, zum Beispiel in R, und visualisieren Sie die Konvergenz für wachsende Werte von $n$.

**Bearbeitung bis Donnerstag, den 30.01.2025**.