Einfürung in die Differentialgeometrie Hausaufgaben Blatt Nr. 1

Max Mustermann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 18, 2024)

Aufgabe 1. Seien $U,\ V,\ W$ endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $B : U \times V \to W$ eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung. Ferner sei $I \subseteq R$ ein nicht-triviales Interval und seien $f : I \to U$ und $g : I \to V$ stetig differenzierbare Abbildungen. Betrachten Sie die Abbildung $B(f,g) : I \to W$, die folgendermaßen definiert ist:

$$B(f,g)(t) := B(f(t), g(t)),\ t \in I.$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $B(f,g) : I \to W$ ist ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt die *Produktregel*

$$B(f,g)'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)),\ \forall t \in I.$$

Beweis. Per Definition gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta t \to 0} \frac{B(f,g)(t+\delta t) - B(f,g)(t)}{\delta t} \\
=&\lim_{\delta t \to 0} \frac{B(f(t+\delta t), g(t+\delta t)) - B(f(t), g(t))}{\delta t} \\
=&\lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}[B(f(t+\delta t), g(t+\delta t)) + B(f(t+\delta t), g(t)) \\
&- B(f(t+\delta t), g(t)) - B(f(t), g(t))] \\
=&\lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}[B(f(t+\delta t), g(t+\delta t) - g(t)) \\
&+ B(f(t+\delta t) - f(t), g(t))] \\
=&\lim_{\delta t \to 0} \left[B\left(f(t+\delta t), \frac{g(t+\delta t) - g(t)}{\delta t}\right)\right. \\
&\left. + B\left(\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}, g(t)\right)\right] \\
=&B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)).
\end{aligned}$$

🎉