Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Komplexe Analysis
Prof. Dr. Oliver Roth
Annika Moucha

# Einführung in die Funktionentheorie

8. Übungsblatt, Abgabe bis 10. Juni 2024 um 10 Uhr

## Hausaufgaben

H8.1 **Spezielle ganze Funktionen (3)**

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen, die für alle $r > 0$ folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| \, dt \leq r^n.$$

H8.2 **Eine ganze Funktion (3)**

Es sei $r > 0$ und $f \in \mathscr{H}(K_r(0))$. Ferner sei für $z \in \mathbb{C}$ die (formale) Potenzreihe

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k!)^2} z^k$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion definiert und dass für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $0 \leq R < r$ folgende Ungleichung gilt

$$|F(z)| \leq \|f\|_{\partial K_R(0)} \exp\left(\frac{|z|}{R}\right).$$

H8.3 **Konstante Funktion (3)**

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze, nullstellenfreie Funktion mit der Eigenschaft

$$|f(2z)| \leq 2|f(z)|, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ konstant ist.

H8.4 **Holomorphe Fortsetzungen (2+3)**

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in \mathscr{H}\big(U \setminus \{z_0\}\big)$. Zeigen Sie, dass jede der folgenden Voraussetzungen hinreichend für die Existenz einer holomorphen Fortsetzung $\tilde{f} \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ von $f$ auf $U$ ist.

(a) $f\big(U \setminus \{z_0\}\big) \subseteq \mathbb{H}^+ = \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; \operatorname{Re}(z) > 0\big\}$.

(b) Es existieren $C > 0$ und $\alpha > -1$ derart, dass

$$|f(z)| \leq C|z - z_0|^{\alpha}$$

für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ ist.