

Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 20, 2024)

Problem 1. Der Laplace-Operator Δ ist für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f.$$

Allgemeiner ist ein (homogener) Differentialoperator P zweiter Ordnung für $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$Pf = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j f.$$

Zeigen Sie, dass die einzigen rotationsinvarianten Differentialoperatoren, d.h. solche, welche

$$P(f(Qx)) = (Pf)(Qx).$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllen, Vielfache des Laplace-Operators darstellen.

Proof. Sei Q orthogonal und beliebig mit Elementen $Q_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$. Sei auch $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Die Voraussetzung ist dann

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j (f(Qx)) = .$$

□

Problem 2. Beweisen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, so existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein Polynom $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|f - p\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

Die Menge der Polynome auf dem Intervall $[a, b]$ ist also dicht im Raum der stetigen Funktionen bzgl. der Supremumsnorm.

Gehen Sie wie folgt vor:

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(a) (Hutfunktionen) Es sei

$$h_{a,b}(x) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{|x-a|}{b} \right\}, x \in \mathbb{R}$$

für $a \in \mathbb{R}, b > 0$. Begründen Sie, dass auf jedem kompakten Intervall I für jedes ϵ ein Polynom p existiert mit $\|h_{a,b} - p\|_{\infty, I} \leq \epsilon$.

(b) (Lineare Interpolante) Zu einer gegebenen Partition von $[a, b]$ mit Stützstellen $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ definieren wir die lineare Interpolante von f durch

$$H(x) = \sum_{i=0}^N h_{x_i, \Delta x_i}(x) f(x_i),$$

wobei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$ und $\Delta x_0 = x_1 - a$. Bestimmen Sie zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Partition von $[a, b]$, sodass $\|H - f\|_{\infty} \leq \epsilon$ gilt.

(c) Beweisen Sie den Approximationssatz von Weierstraß.

Proof. (a) Wir brauchen hier die Aufgaben

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \max \{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

□

Problem 3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

gilt. Ist f in \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar?

Problem 4. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Zeigen Sie:

- (a) Für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nimmt $f_v(t) = f(tv)$, $t \in \mathbb{R}$ ein striktes lokales Minimum in $t = 0$ an.
- (b) Die Funktion f besitzt in $(0, 0)$ kein lokales Minimum

Proof. (a) Sei $v = (a, b)^T$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 f_v(t) &= f(tv) \\
 &= (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2t^2) \\
 &= b^2t^2 + 2a^4t^4 - 2ba^2t^3 - ba^2t^3 \\
 &= b^2t^2 + 2a^4t^4 - 3ba^2t^3 \\
 &= t^2(2a^4t^2 - 3ba^2t + b^2)
 \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind...

- (b) Offensichtlich ist $f(0, 0) = 0$. Sei x fest. Wir wählen $x^2 < y < 2x^2$. Damit ist

$$f(x, y) = \underbrace{(y - x^2)}_{>0} \underbrace{(y - 2x^2)}_{<0} < 0,$$

also $f(x, y) < 0$. Da

$$\begin{aligned}
 \|(x, y)\| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 &\leq \sqrt{x^2 + (2x^2)^2} \\
 &= \sqrt{x^2 + 4x^4} \\
 &= |x|\sqrt{1 + 4x^2}
 \end{aligned}$$

was wir beliebig klein wählen kann, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein Punkt $p \in B_\epsilon((0, 0))$ so dass $f(p) < f((0, 0))$, also f besitzt kein lokales Minimum in $(0, 0)$.

□