Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 25, 2024)

Problem 1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x(x-2)e^{\cos x}, \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie alle x_0, für die (1) konstante Lösungen hat.

Nun sei die Anfangwertbedingung gegeben durch $x(0) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung $\varphi(t)$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung aus Teilaufgabe (b) beschränkt, streng monoton fallend ist und auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} \varphi(t)$ existieren und bestimmen Sie diese Grenzwerte.

Proof. (a) Bei einer konstanten Lösung muss $\dot{x} = 0$ für alle Zeitpunkte gelten, insbesondere in t_0. Da $\exp(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ist, muss $x(x-2) = 0$, also $x_0 = 0$ oder $x_0 = 2$.

(b) Die Funktion $f(t,x) = x(x-2)e^{\cos x}$ ist stetig in t (da sie nicht von t abhängt) und lokal Lipschitz stetig in x, da sie nach x stetig differenzierbar ist.

(c) Die Lösung darf nur zwischen 0 und 2 sein.

Angenommen es gäbe $\tilde{t}$ mit $\varphi(t) = 2$. Dann ist φ eine Lösung des Anfangswertproblems (1), $x(\tilde{t}) = 2$. Die konstante Lösung ist aber auch eine Lösung, was ein Widerspruch zur lokalen Eindeutigkeit ist. Analog ist $\varphi(t) \neq 0$. Aufgrund Stetigkeit muss dann $0 < \varphi < 2$.

Die Lösung ist streng monoton fallend, wachsend oder konstant nach Präzensaufgabe 5.2. Da $\dot{x}(0) < 0$, ist sie streng monoton fallend.

□

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Übergangsmatrix und eine Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax$$

Proof. Sei $x = (x_1, x_2)^T$. Damit ist die DGL

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= tx_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + tx_2 \end{aligned}$$

Die erste DGL kann man direkt lösen mit TDV:

$$x_1 = Ae^{\frac{t^2}{2}},\ A \in \mathbb{R}$$

Eingesetzt ist die zweite DGL eine DGL nur in x_2. Wir können die Lösung durch Variation der Konstanten bestimmen:

$$x_2(t) = Ate^{\frac{t^2}{2}} + Be^{\frac{t^2}{2}}.$$

Zwei linear unabhängige Lösungen sind also

$$x = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} \\ te^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}$$

und eine Fundamentalmatrix ist

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}} & 0 \\ te^{\frac{t^2}{2}} & e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix ist

$$\Psi(t, t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} = e^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t - t_0 & 1 \end{pmatrix}.$$ □

Problem 3. Sei I ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Sei $\Phi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix von

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie eine stetige Abbildung $B : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $\Psi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\Psi(t) := (\Phi^T)^{-1}(t)$ eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = B(t)x$ definiert.

(Hinweis: Als Fundamentalmatrix muss $\Psi(t)$ die Differentialgleichung $\dot{\Psi}(t) = B(t)\Psi(t)$ erfüllen.)

(b) Sei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(C) \neq 0$ und sei $\Psi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $\Psi(t) := C\Phi(t)$. Zeigen Sie, dass $\Psi(t)$ genau dann eine Fundamentalmatrix von (2) ist, wenn

$$CA(t) = A(t)C$$

für alle $t \in I$ gilt.

Proof. (a) Die Fundamentalmatrizen Φ und Ψ erfüllen die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t) &= A(t)\Phi(t)\\ \dot{\Psi}(t) &= B(t)\Psi(t)\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $\Psi(t) = (\Phi^T)^{-1}(t)$ ist. Dafür müssen wir zunächst ein Lemma beweisen:

Lemma 1. *Sei $A(t)$ eine von Zeit abhängige Matrix. Es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}t} = -A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A$$

Proof. Es gilt $AA^{-1} = 0$ und damit

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{-1} + A\frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}t} &= -A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{-1}.\end{aligned}$$ □

also

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} = -(\Phi^T)^{-1}\frac{\mathrm{d}\Phi^T}{\mathrm{d}t}(\Phi^T)^{-1} &= B(t)(\Phi^T)^{-1}\\ -(\Phi^T)^{-1}\frac{\mathrm{d}\Phi^T}{\mathrm{d}t} &= B(t)\\ B(t) &= -(\Phi^T)^{-1}\left(A(t)\Phi(t)\right)^T\\ &= -(\Phi^T)^{-1}\Phi^T A(t)^T\\ &= A(t)^T\end{aligned}$$

(b) Ψ ist eine Fundamentalmatrix, wenn $\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t)$, oder

$$\begin{aligned} C\dot{\Phi} &= AC\Phi \\ CA\Phi &= AC\Phi \\ 0 &= (CA - AC)\Phi \end{aligned}$$

da Φ invertierbar ist, ist dies genau dann erfüllt, wenn $CA - AC = 0$ für alle $t \in I$. $\square$

Problem 4. Beurteilen Sie, ob die folgenden 4 Behauptungen wahr oder falsch sind.

Sie müssen bei dieser Aufgabe keine Begründungen angeben.

Für jede richtig beantwortete Frage gibt es einen Punkt.

Für jede falsch beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen.

Für jede nicht beantwortete Frage gibt es keine Punkte.

Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet (sie können also nicht z. B. -1 Punkte bekommen). Insgesamt können bis zu 4 Punkte erreicht werden.

	Wahr	Falsch
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitz-stetig und $\dot{x} = f(t, x)$ eine Differentialgleichung. Weiter sei $\varphi_{\max}$ eine maximale Lösung mit maximalem Existenzintervall $I_{\max} = (-\infty, t^+), t^+ < \infty$. Dann ist $\varphi_{\max}$ beschränkt.		
Sei $\ddot{x} = \frac{\dot{x}-1}{x}$ eine skalare Differentialgleichung, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $\varphi(t) = t\ln(t), t > 1$, eine Lösung dieser Differentialgleichung.		
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $\dot{x} = f(t, x)$. Ist $I = (t_0, t_1)$ und hat φ in t_1 einen linksseitigen Grenzwert $x_1 = \lim_{t \to t_1} \varphi(t)$ mit $(t_1, x_1) \in D$, so ist φ nach rechts fortsetzbar.		
Jede Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ ist auch eine Wronski-Matrix $W(t)$.		

Proof.

	Wahr	Falsch
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitz-stetig und $\dot{x} = f(t,x)$ eine Differentialgleichung. Weiter sei $\varphi_{\max}$ eine maximale Lösung mit maximalem Existenzintervall $I_{\max} = (-\infty, t^+), t^+ < \infty$. Dann ist $\varphi_{\max}$ beschränkt.		×
Sei $\ddot{x} = \frac{\dot{x}-1}{x}$ eine skalare Differentialgleichung, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $\varphi(t) = t\ln(t), t > 1$, eine Lösung dieser Differentialgleichung.	×	
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $\dot{x} = f(t,x)$. Ist $I = (t_0, t_1)$ und hat φ in t_1 einen linksseitigen Grenzwert $x_1 = \lim_{t \to t_1} \varphi(t)$ mit $(t_1, x_1) \in D$, so ist φ nach rechts fortsetzbar.	×	
Jede Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ ist auch eine Wronski-Matrix $W(t)$.	×	

$\square$