Übungen zur

Einführung in die Differentialgeometrie

(Sommersemester 2024)

Prof. Dr. Madeleine Jotz*
Dr. Spyridon Kakaroumpas†

Übungsblatt 1

15. 04. 2024

Präsenzaufgabe 1-1:

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, die keine Translation ist. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist F orientierungserhaltend, so existiert genau ein Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ mit $F(p) = p$. Ferner ist F eine Drehung um p.

(b) Ist F orientierungsumkehrend, so gilt genau eines von beiden:

  (1) Es existiert genau eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass F eine Spiegelung an g ist.

  (2) Es existiert eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ derart, dass F eine Spiegelung an g, gefolgt von einer Translation um einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor ist, der parallel zur Gerade g ist. (Man spricht in dem Fall von einer *Gleitspiegelung an* g.) Ferner ist g die einzige Gerade auf dem $\mathbb{R}^2$ mit $F(g) = g$.

Präsenzaufgabe 1-2:

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orientierungserhaltende Isometrie des euklidischen dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$, die keine Translation ist. Zeigen Sie, dass genau eines von beiden gilt:

(a) Es existiert genau eine Gerade (*Drehachse*) $g \subseteq \mathbb{R}^3$, sodass F eine Drehung um g ist.

*madeleine.jotz@uni-wuerzburg.de
†spyridon.kakaroumpas@uni-wuerzburg.de

(b) Es existiert eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^3$ derart, dass F eine Drehung um g, gefolgt von einer Translation um einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor ist, der parallel zu g ist. (Man spricht von einer *Schraubung um g*.) Ferner ist g die einzige Gerade im $\mathbb{R}^3$ mit $F(g) = g$.

Peer-Review Aufgabe 1: (Differentiation von bilinearen Abbildungen)

Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $B\colon U \times V \to W$ eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung. Ferner sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-triviales Interval und seien $f\colon I \to U$ und $g : I \to V$ stetig differenzierbare Abbildungen. Betrachten Sie die Abbildung $B(f,g)\colon I \to W$, die folgendermaßen definiert ist:

$$B(f,g)(t) := B(f(t), g(t)), \quad t \in I.$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $B(f,g) : I \to W$ ist ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt die *Produktregel*

$$B(f,g)'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)), \quad \forall t \in I.$$

Abgabe auf WueCampus bis 22. 04. 2024, 10:00 Uhr.

Hausaufgabe 1-1: (Matrixdarstellung von Bilinearformen)

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit der *Matrixdarstellung* von Bilinearformen. (Im Anhang zum Vorlesungsskript findet man einen kurzen Überblick über einige Grundlagen zu Matrizen.)

Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K mit $\dim_K V = m > 0$ und $\dim_K W = n > 0$. Ferner sei $E : V \times W \to K$ eine Bilinearform.

i.) Sei $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ eine (geordnete) Basis für V bzw. W. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige $(m \times n)$-Matrix A mit Einträgen aus K gibt, sodass

$$E(v, w) = ([v]_{\mathcal{B}})^{\mathrm{t}} A [w]_{\mathcal{C}}, \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Geben Sie explizit die Einträge von A an in Abhängigkeit von E sowie $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Wir bezeichnen $[E]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} := A$.

ii.) Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen für V und seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen für W. Zeigen Sie, dass

$$[E]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1} = ([\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1})^t [E]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2} [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{C}_1}.$$

Hier bezeichne $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$ bzw. $[\mathrm{id}_W]^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{C}_1}$ die Basiswechselmatrix für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ bzw. von $\mathcal{C}_1$ nach $\mathcal{C}_2$.

iii.) Sei $V = W$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $E : V \times V \to K$ genau dann *symmetrisch* ist (d.h. die Eigenschaft $E(v, w) = E(w, v)$, für alle $v, w \in V$ besitzt), wenn die $(n \times n)$-Matrix $[E]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ symmetrisch ist.

iv.) Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = W = \mathbb{R}^n$. Ferner sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis für $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Matrix $[E]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ genau dann die $(n \times n)$-Einheitsmatrix ist, wenn E mit dem üblichen (euklidischen) Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

Hausaufgabe 1-2:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-triviales Interval und sei $r : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion mit $r(t) \neq 0$, für alle $t \in I$, wobei n eine positive ganze Zahl ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $\|r\| : I \to \mathbb{R}$, die durch

$$\|r\|(t) := \|r(t)\|, \quad t \in I$$

angegeben wird, ebenfalls differenzierbar ist mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|r\|(t) = \frac{r(t) \cdot r'(t)}{\|r(t)\|}, \quad \forall t \in I.$$

Hausaufgabe 1-3:

i.) Beweisen Sie den sog. *Graßmannschen Entwicklungssatz* für das Kreuzprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$:

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

ii.) Zeigen Sie folgende Identität:

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^3.$$