Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 9

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 18, 2024)

I. ZAHLENTHEORIE

Theorem 1. *(Division mit Rest)*

$$a = bq + r,\ 0 \leq r \leq |b| - 1.$$

Theorem 2. *Sei $\mathbb{Z}^2 \ni (a,b) \neq (0,0)$. Dann gibt es $s,t \in \mathbb{Z}$ mit*

$$ggT(a,b) = sa + tb.$$

Theorem 3. *Sei $\mathbb{Z}^2 \ni (a,b) \neq (0,0)$ und d ein Teiler von a und b. Es gilt*

$$d \cdot ggT\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{d}\right) = ggT(a,b).$$

Theorem 4. *Seien $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Sind a,b teilerfremd, gilt*

(a) $a|bc \implies a|c$

(b) $a|c$ *und* $b|c \implies ab|c$.

(c) $ggT(a,bc) = ggT(a,c)$

Theorem 5. *Sei $a,b \in \mathbb{N}^*$.*

$$ab = ggT(a,b) \cdot kgV(a,b).$$

Theorem 6. *Sei $a \in \mathbb{Z}$, p eine Primzahl, $a \nmid p$. Dann ist*

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

II. ALLGEMEIN GRUPPENTHEORIE

III. GRUPPENHOMOMORPHISMEN

Theorem 7. *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Es gilt $ord(\phi(g))|ord(g)$.*

Theorem 8. *Sei $U \leq G, N \trianglelefteq G$.*

$$U/U \cap N \cong UN/N.$$

Theorem 9. *Sei $K \trianglelefteq G, K \subseteq H \leq G$. $H \trianglelefteq G$ genau dann, wenn $H/K \trianglelefteq G/K$. In diesem Fall ist*

$$\frac{G}{H} \cong \frac{G/K}{H/K}.$$

IV. GRUPPENOPERATIONEN

Definition 10. Eine Operation ist ein Homomorphismus $G \to \mathrm{Sym}(M)$.

Theorem 11. *Die Länge der Bahn durch $m \in M$ ist $[G : G_m]$.*

Theorem 12. *Sei $m, n \in M$ in der gleichen Bahn. Dann sind die Stabilisatoren konjugiert.*

Theorem 13. *Sei $m_1, \ldots, m_r$ Repräsentanten der Bahnen.*

$$|M| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_{m_i}].$$

Theorem 14. *Sei $m_1, \ldots, m_r$ Repräsentanten der Konjugationsklassen, die großer als 1 sind. Es gilt*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : G_{m_i}].$$

V. ABELSCHE GRUPPEN

Theorem 15. *Sei n die größte Elementordnung in einer abelschen Gruppe G. Dann gilt $g^n = e$ für alle $g \in G$.*

Theorem 16. *G ist genau dann abelsch, wenn die Zentrumsfaktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist.*

Theorem 17. *Sei p eine Primzahl. Alle Gruppen der Ordnung p^2 sind abelsch.*

VI. ZYKLISCHE GRUPPEN

Theorem 18. *Sei a ein Erzeuger der zyklischen Gruppe G mit $|G| = n$. a^m ist genau dann Erzeuger, wenn m und n teilerfremd sind.*

Theorem 19. *G ist zyklisch genau dann, wenn G zu jedem positiven Teiler t von $|G|$ genau eine Untergruppe der Ordnung t besitzt.*

VII. SYMMETRISCHE & ALTERNIERENDE GRUPPEN

Theorem 20. *Sei $\sigma, \tau \in S_n$ disjunkt. Es gilt $ord(\sigma\tau) = kgV(ord(\sigma), ord(\tau))$*

Theorem 21.

$$S_n = \langle (12), (123 \dots n) \rangle.$$

Theorem 22. *Sei $\phi = (a_1 a_2 \dots)(b_1 b_2 \dots) \dots \in S_n$ in Zykelnotation und $\psi \in S_n$. Es gilt*

$$\psi\phi\psi^{-1} = (\psi(a_1)\psi(a_2)\dots)(\psi(b_1)\psi(b_2)\dots)\dots.$$

VIII. EINFACHE GRUPPEN

IX. PRODUKTGRUPPEN

Theorem 23. *Sei $A, B \leq G$. AB ist eine Gruppe genau dann, wenn $AB = BA$.*

Theorem 24.

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}.$$

Theorem 25. *Internes direktes Produkt: $A, B \trianglelefteq G,\ A \cap B = \{e\} \implies AB \cong A \times B$.*

Theorem 26. *Internes semidirektes Produkt: $A \trianglelefteq G, B \leq G, A \cap B = \{e\} \implies AB \cong A \rtimes B$*

Definition 27. $A \rtimes_\varphi B = (A \times B, \circ, (e,e))$, wobei $(u,v) \circ (\tilde{u}, \tilde{v}) = (u\varphi_v(\tilde{u}), v\tilde{v})$

X. BEISPIELVERZEICHNIS