Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 7

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 9, 2023)

Problem 1. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ und $(Z, \mathcal{C}, \eta)$ σ-endliche Maßraume. Definiere $A \otimes B \otimes C := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{C})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \mathcal{C} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$.

Hinweis: Betrachten Sie $\Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ *mit*

$$\Pi : X \times Y \times Z \to X \times Y, \ \Pi(x, y, z) := (x, y).$$

(b) Es gilt $(\mu \otimes \nu) \otimes \eta = \mu \otimes (\nu \otimes \eta)$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$.

Problem 2. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2, a < b \in \mathbb{R}, r : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und

$$A := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < r(z)^2, z \in [a, b]\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie $\lambda_2(B_R(x_0))$ für $R > 0$ mittels dem Satz von Fubini.

(b) Zeigen Sie:

$$\lambda_3(A) = \pi \int_a^b r(z)^2 \, \mathrm{d}z \, .$$

Proof. (a) Aus Bewegungsinvarianz der Lebesgue-Maß genügt es, $B_R(0)$ zu betrachten. Per Definition ist es definiert durch

$$x^2 + y^2 < R^2.$$

Insbesondere ist, für jedes $x \in [-1, 1]$,

$$\{y | (x, y) \in B_R(0)\} = [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Aus Satz 2.81 folgt

$$\begin{aligned} \lambda_2(B_R(0)) &= \int_{-R}^{R} \lambda_1([-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Die Funktion ist Riemann-integrierbar, also wir dürfen Sätze vom Riemann-Integral verwenden. Hier integrieren wir es per Substitution. Sei $x = R\sin\theta, \mathrm{d}x = R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. Wenn $x = -R$, ist $\theta = -\pi/2$ und wenn $x = R$ ist $\theta = \pi/2$.

$$\begin{aligned}
\lambda_2(B_R(0)) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R\sqrt{1-\sin^2\theta} R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2R^2\left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 2R^2\left[\sin\pi - \sin 0 + \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \pi R^2 \\
&= \lambda_2(B_R(x_0))
\end{aligned}$$

(b) Wir vorher ist $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ σ-endlich. Wir können daher das Maß als Integral schreiben:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(A) &= \int_{[a,b]} A_z\,\mathrm{d}\lambda_1 \\
&= \int_{[a,b]} \pi r(z)^2\,\mathrm{d}\lambda_1 \\
&= \pi\int_a^b r(z)^2\,\mathrm{d}z\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Problem 3. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq |a| + |b|$. Definiere

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, 0 \leq z \leq ax + by + c\right\}.$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(E)$.

Problem 4. Seien $B_1 := B_1(0,0,0) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $B_2 := B_1(0,0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$ die offenen Kugeln mit Radius 1 um die Punkte $(0,0,0)$ und $(0,0,1)$. Bestimmen Sie $\lambda_3(B_1 \cap B_2)$.