Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lukas Then

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 31, 2023)

Problem 1. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}\backslash 0$ und $D \subset \mathbb{K}$ offen. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ ebenfalls n-mal differenzierbar ist und weiterhin

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für jedes $x \in D$ gilt.

Proof. Wir zeigen es per Induktion, für $n = 1$ ist es das Produktregel. Nehme jetzt an, dass f, g $(n+1)-$ mal differenzierbar Funktionen sind und

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

gilt (weil alle $(n+1)$-mal differenzierbar Funktionen sind auch n-mal differenzierbar). Dann ist $(f \cdot g)^{(n)}(x)$ differenzierbar, weil die rechte Seite eine Linearkombination von Produkte aus (zumindest) einmal differenzierbar Funktionen. Es gilt auch,

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n)}(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) && n = 1 \text{ Fall} \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
=& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
=& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x)
\end{aligned}$$

□

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. i) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2x^2 + 1}.$$

Beweisen Sie, dass $(f_n), n \in \mathbb{N}$ gegen eine zu bestimmende Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, diese jedoch nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Warum ist das kein Widerspruch zu Proposition 5.5.2?

ii) Untersuchen Sie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, x \in \mathbb{R}.$$

auf Differenzierbarkeit.

Proof. i)

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Es ist klar, dass $f_n(x)$ konvergiert gegen $\sqrt{x^2} = |x|$. Sei dann $r(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|$. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
r(x) =& \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - x \\
r'(x) =& \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1 \\
\leq& \frac{x}{\sqrt{x^2}} - 1 \\
=& 0
\end{aligned}$$

Deswegen ist $r(x)$ monoton fallend auf $(0, \infty)$. Ähnlich beweist man, dass $r(x)$ monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$ ist. Deswegen ist $x = 0$ ein globales Maximum, und $r(x) \leq r(0) = \frac{1}{n}$. Daher konvergiert (f_n) gleichmäßig.

Man berechnet:

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Die Folge der Ableitungen konvergiert gegen $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)$, falls $x \neq 0$, und 0, falls $x = 0$. Es konvergiert aber nicht lokal gleichmäßig in eine Umgebung U auf 0.

Sei $1 > \epsilon > 0$ gegeben, und nehme an, dass existiere $N \in \mathbb{N}$, für die gilt,

$$|f_n(x)' - g(x)| \leq \epsilon \qquad n > N, x \in U,$$

wobei

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Nehme eine solche Abbildung $f_n'(x)$. Weil f_n' stetig ist, und $f_n'(0) = 0$, gibt es eine Umgebung $0 \in V$, in der gilt, dass $|f_n'(x) - f_n'(0)| = f_n'(x) \leq 1 - \epsilon, x \in V$. Sei dann $0 \neq x \in V$, und $|1 - f_n'(x)| > \epsilon$, also die Folge f_n' konvergiert nicht lokal gleichmäßig.

Man kann auch beachten, dass $f_n'(x)$ stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist. Wenn die Folge lokal gleichmäßig in eine Umgebung auf 0 konvergiert, wäre das Grenzwert auch stetig. Weil das Grenzwert nicht stetig ist, kann die Folge nicht lokal gleichmäßig konvergieren.

Deswegen ist es kein Widerspruch zu den Korollar, weil die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

ii) Es gilt $\left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$. Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig (Weierstraßsches Majorantenkriterium).

Jetzt ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos(nx)}{n^3} = -\frac{\cancel{n}\sin(nx)}{n^{\cancelto{2}{3}}}$. Weil $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|$ gleichmäßig. Deswegen ist f differenzierbar, mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\sin(nx)}{n^2}\right].$$

□

Problem 3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \max\{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Proof. Wir wissen schon, dass es $q_n(x)$ existiert, $q_n(x)$ Polynome, und $q_n(x) \to |x|$ gleichmäßig. Es gilt auch

$$f(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{x}{2}.$$

Daher konvergiert gleichmäßig

$$\frac{q_n(x)}{2} + \frac{x}{2} \to f(x).$$

□

Problem 4. i) Es seien $f : (a, b) \to (c, d)$ und $g : (c, d) \to R$ n-mal differenzierbare Funktionen mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f$ n-mal differenzierbar ist.

ii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert ist. Bestimmen Sie zudem $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Proof. i)

Theorem 1. *Die Ableitung von ein Produkt* $f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$ *ist*

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_n(x).$$

Proof. Wir beweisen es per Indukion. Für $n = 2$ ist es das Produktregel. Jetzt nehme an, dass es für eine $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, und

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_1(x)f_2(x)\dots f_{n+1}(x)\right) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right) f_{n+1}(x) \\ &+ \left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right)\frac{\mathrm{d}f_{n+1}}{\mathrm{d}x} \\ =& \left(\sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_n(x)\right) \\ &+ \left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right) f_n'(x) \\ =& \sum_{i=1}^{n+1} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

□

Corollary 2. *Alle Monome von differenzierbare Funktionen sind differenzierbar, und die Ableitung ist noch eine lineare Kombination von Monome.*

Corollary 3. *Sei* f $k-$ *mal differenzierbar. Dann alle Monome von*

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$$

sind differenzierbar.

Theorem 4. $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f \circ g)$ *ist ein Monom von Ableitungen von* f *und* g *(höchstens die* k*-ste Ableitung), sofern* f *und* g, n*-mal differenzierbar sind.*

Proof. Für $k = 1$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Nehme an, dass es für ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ gilt. Dann per Korollar 2 gilt es auch für $k+1$. Per Induktion ist die Verkettung dann n-mal differenzierbar, □

ii)

Lemma 5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0, k > 0.$$

Proof. Wir beweisen es per Induktion auf p. Für $p = 1$ verwenden wir den Satz von L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^{k-1}(k)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^k} = 0.$$ □

Jetzt nehme an, dass es für p gilt. Wir zeigen, dass es für $p \to p+1$ auch gilt.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)(\ln x)^p}{kx^{k-1}(x)} = \frac{p+1}{k} \lim_{\xi\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0.$$

Lemma 6.

$$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-kx} = 0, k > 0.$$

Proof. Nimm $x = e^\xi$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-k}(\ln x)^p = \lim_{x\to\infty} e^{-k\xi}\xi^p = 0.$$ □

Die Ableitungen $f^{(n)}(x), x \neq 0$ haben den Form $p_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$, wobei $p_n(x)$ eine Polynome ist.

Theorem 1. $f^{(n)}(0) = 0$

Proof. Wir beweisen es per Induktion. $f^{(0)}(0) = 0$ per Definition.

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(f^{(n-1)}(x) \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} p_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to \infty} x p_n(x) e^{-x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Deswegen ist f überall (inkl. 0) differenzierbar, mit alle Ableitungen $f^{(n)}(0) = 0$ □

□

Problem 5. Es seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{K}$ nichtleere, kompakte Mengen und die Folgen stetiger Funktionen $f_n : K_1 \to K_2$ sowie $g_n : K_2 \to K$ seien gleichmäßig konvergent gegen $f : K_1 \to K_2$ bzw. $f : K_2 \to K$. Beweisen Sie, dass auch

$$g_n \circ f_n \to g \circ f$$

gleichmäßig auf K_1 gilt.

Proof. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann per Definition existiert $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}, x \in K_2, n \geq n_2 \tag{1}$$

Weil g stetig und auf eine kompakte Menge definiert ist, ist g gleichmäßig stetig, und es existiert $\delta > 0$, für die gilt

$$|g(a) - g(b)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |a - b| < \delta \tag{2}$$

Es gibt auch $n_1 \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| < \delta, x \in K_1, n \geq n_1$. Für $n > n_1$ gilt daher auch

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \frac{\epsilon}{2}, n > n_1, x \in K_1 \tag{3}$$

Sei $N = \max(n_1, n_2)$. Für $n \geq N$ gilt Eq. (1) und Eq. (3) auch, weil $N \geq n_1$ und $N \geq n_2$. Dann für $n \geq N$ gilt.

$$\begin{aligned}
|g(f(x)) - g_n(f_n(x))| =& |g(f(x)) - g(f_n(x)) + g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))| \\
\leq& \underbrace{|g(f(x)) - g(f_n(x))|}_{<\epsilon/2 \ (3)} + \underbrace{|g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))|}_{<\epsilon/2 \ (1)} \\
<& \epsilon
\end{aligned}$$

Also $g_n \circ f_n \to g \circ f$ gleichmäßig. □