Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 10, 2024)

Problem 1. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle v, w\rangle = \overline{v}^T w$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die adjungierte Abbildung von A, wie in Definition 7.66, ist gerade durch die in Definition 7.13 beschriebene adjungierte Matrix $A^* = \overline{A^T}$ gegeben.

(b) Es gilt $\mathrm{tr}(A^*) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$.

(c) Es gilt $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

(d) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann Eigenwert von A, wenn $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A^* ist.

Sei A nun ein invertierbarer und adjungierbarer Endomorphismus auf dem unitären Vektorraum V. Dann gilt

(e) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Proof. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle A^*v, w\rangle =& (A^*v)^T w \\ =& v^T \overline{(A^*)^T} w \\ =& v^T \overline{(\overline{A^T})^T} w \\ =& v^T \overline{(\overline{A}^T)^T} w \\ =& v^T \overline{\overline{A}} w \\ =& v^T A w \\ =& \langle v, Aw\rangle\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b)

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^*) &= \sum_{i=1}^{n} (A^*)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\overline{A^T})_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{A^T_{ii}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{ii}} \\ &= \overline{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}} \\ &= \overline{\operatorname{tr}(A)}.\end{aligned}$$

(c) Wir brauchen aus den vorherigen Übungsblätter: $\det(A^T) = \det A$. Wir wissen auch aus den Eigenschaften der komplexe Konjugierte

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} a_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \overline{a_{ij}} \tag{1}$$

Es folgt daraus:

$$\begin{aligned}\det(A^*) &= \det(\overline{A^T}) \\ &= \overline{\det(A^T)} \qquad (1) \\ &= \overline{\det(A)}\end{aligned}$$

(d) Sei λ ein Eigenwert von A. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\det(A^* - \overline{\lambda} I) &= \det(\overline{A^T} - \overline{\lambda} I) \\ &= \det(\overline{A}^T - \overline{\lambda} I^T) \\ &= \det(\overline{(A - \lambda I)}^T) \\ &= 0\end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A^*. Es gilt:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det(\overline{(\overline{A} - \overline{\lambda} I)}) \\ &= \det(((\overline{\overline{A}^T - \lambda I^T}))^T) \\ &= 0\end{aligned}$$

(e) Sei $v, w \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left\langle (A^*)^{-1}w, v\right\rangle &= \left\langle (A^*)^{-1}w, AA^{-1}v\right\rangle \\ &= \left\langle A^*(A^*)^{-1}w, A^{-1}v\right\rangle \\ &= \left\langle w, A^{-1}v\right\rangle\end{aligned}$$

also $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. □

Problem 2. Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

im unitären Vektorraum $\mathbb{C}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle := \overline{x}^T y$. Sei $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. Bestimmen Sie eine Orthonomalbasis von U sowie von $U^\perp$.

Proof.

$$U^\perp = \ker \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2iR_1} \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & i & 4i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & -2i \\ 0 & 2 & i & 4i \end{pmatrix}$$

Eine Basis für den Kern ist dann

$$\begin{pmatrix} i \\ -i/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Gram-Schmidt-Algorithismus ergibt dann Orthonomalbasen. Für U ist $\langle v_2, v_1\rangle = 3i,\ \langle v_1, v_1\rangle = 6$. Dann ist eine Basis

$$\left\{ v_1, v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ i/2 \\ -i \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus ergibt sich eine Orthonomalbasis für U:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ i/2 \\ -i \end{pmatrix} \right\}.$$

Für $U^{\perp}$ ist ähnlich eine Basis

$$\left\{ 3 \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i \\ -4i \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Problem 3. Sei $V_n \subset \mathbb{C}[x]$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Sei

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) \, \mathrm{d}x$$

für $f, g \in V_n$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V_n definiert ist.

(b) Starten Sie mit der Basis der Monome $1, x, x^2, x^3$ und führen Sie den Gram-Schmidt-Algorithmus durch, um eine Orthonomalbasis von V_3 bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu finden.

Proof. (a) Die linearität Eigenschaften folgen alle aus die Linearität des Integrals. Es bleibt positiv Definitheit zu zeigen.

(Es wurde nicht geschrieben, welche Definition des Integrals hier benutzt wurde. Ich benutze das Lebesgue-Integral, weil es einfacher ist).

Es gilt

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \, .$$

Weil $|f| \geq 0$, ist das Integral ≥ 0. Es ist 0 genau dann, wenn $|f(x)|^2$ λ_1-fast überall 0 ist. Das Integral ist 0 genau dann, wenn $|f(x)|^2$ λ_1-fast überall 0 ist. Aber alle Polynome sind stetig. $|f|^2$ ist dann als Verkettung stetige Funktionen auch stetig und eine λ_1-fast überall 0 stetige Funktion ist überall 0. Daraus folgt: $f = 0$, das Nullpolynom.

(b) (i) Das erste Element ist 1. Es gilt

$$\langle 1,1\rangle = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1.$$

(ii) $\langle x,1\rangle = \int_0^1 |x| \,\mathrm{d}x = 1/2$. Das zweite Element ist $x - 1/2$. Es gilt

$$\left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{12}.$$

(iii)

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = 1/3$$
$$\left\langle x^2, x - \frac{1}{2} \right\rangle = 1/12$$

Das zweite Element ist

$$x^2 - \frac{1}{3} - (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Es gilt

$$\left\langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle = \frac{1}{180}.$$

(iv)

$$\langle x^3, 1\rangle = 1/4$$
$$\left\langle x^3, x - \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{40}$$
$$\left\langle x^3, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle = \frac{1}{120}$$

Dann ist das dritte Element

$$x^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{10}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{1}{20}.$$

Insgesamt ist die Orthogonalbasis

$$\left\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}, x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{1}{20}\right\}.$$

Wir normalisieren dann alle Elemente und erhalten die Orthonormalbasis

$$\left\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}\left(6x^2 - 6x + 1\right), \sqrt{7}\left(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1\right)\right\}. \qquad \square$$

Problem 4. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $M, N \subseteq V$ Teilmengen von V.

(a) Sei $N \subseteq M$. Zeigen Sie, dass dann $M^\perp \subseteq N^\perp$ gilt.

(b) Zeigen Sie $M \subseteq \left(M^\perp\right)^\perp$ und geben Sie ein Beispiel für einen euklidischen oder unitären Vektorraum V, sowie eine Teilmenge $M \subseteq V$ an, sodass $M \neq (M^\perp)^\perp$.

(c) Zeigen Sie, dass das Orthogonalkomplement von M durch

$$M^\perp = \bigcap_{v \in M} \ker v^\flat$$

gegeben ist, wobei $v^\flat = \langle v, \cdot \rangle \in V^*$ wie in Bemerkung 7.2iii.

(d) Zeigen Sie, dass $(M^\perp)^{\perp\perp} = (M^{\perp\perp})^\perp$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass $M^\perp + N^\perp \subset (M \cap N)^\perp$ gilt.

(f) Zeigen Sie, dass $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$ gilt, wenn M und N Unterräume von V sind.

Beweisen oder widerlegen Sie:

(g) Es gilt $M^\perp \cup N^\perp \subset (M \cup N)^\perp$.

(h) Es gilt $(M \cup N)^\perp \subset M^\perp \cup N^\perp$.

Proof. (a) Sei $v \in M^\perp$. Per Definition gilt $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in M$. Dann gilt es auch für alle $w \in N$, weil $N \subseteq M$. Dann ist $M^\perp \subseteq N^\perp$.

(b) Sei $v \in M^\perp$, $w \in M$. Per Definition ist $\langle v, w \rangle$ für alle solche w. Daraus folgt: $v \in (M^\perp)^\perp$ und $M \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Gegenbeispiel: Sei $V = \mathbb{C}[x]$ mit innerem Produkt

$$\langle a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x_n, b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x_m \rangle = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} a_i b_i$$

und M die Menge alle Polynome f, so dass für die Polynomefunktion $f(1) = 1$ gilt. Dann ist $M^\perp = \{0\}$ und $(M^\perp)^\perp = V$. Aber $M \neq V$ offenbar gilt.

(c) Die Definitionen sind gleich: Auf der linken Seite haben wir alle Vektoren $w \in V$, so dass $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $v \in M$.

Per Definition ist $w \in \ker v^\flat$ genau dann, wenn $\langle v, w\rangle = 0$. Wenn w in alle $\ker v^\flat$ liegt, gilt das für alle v, was genau der Definition von $M^\perp$ ist.

(d)

$$(M^\perp)^{\perp\perp} = ((M^\perp)^\perp)^\perp = (M^{\perp\perp})^\perp.$$

(e) Sei

$$v := \underbrace{v_M}_{\in M^\perp} + \underbrace{V_N}_{\in N^\perp} \in M^\perp + N^\perp$$

und $w \in M \cap N$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle w, v\rangle =& \cancelto{0}{\langle w, v_M\rangle} && w \in M \\ &+ \cancelto{0}{\langle w, v_N\rangle} && w \in N \\ =&0 \end{aligned}$$

also $v \in (M \cap N)^\perp$. Daraus folgt: $M^\perp + N^\perp \subseteq (M \cap N)^\perp$.

(f) Sei $v \in M^\perp \cap N^\perp$ und

$$w := \underbrace{w_M}_{\in M} + \underbrace{w_N}_{\in N} \in M + N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle =& \cancelto{0}{\langle v, w_M\rangle} && v \in M^\perp \\ &+ \cancelto{0}{\langle v, w_N\rangle} && v \in N^\perp \\ =&0 \end{aligned}$$

also $(M+N)^\perp \supseteq M^\perp \cap N^\perp$.

Sei jetzt $v \in (M+N)^\perp$ und $w \in M$. Da $M + N \supseteq M$ und $M + N \supseteq N$ gilt, ist

$$\begin{aligned} (M+N)^\perp \subseteq& M^\perp \\ (M+N)^\perp \subseteq& N^\perp \end{aligned}$$

und daher

$$(M+N)^\perp \subseteq M^\perp \cap N^\perp.$$

(g) Falsch. Sei $V = \mathbb{R}^3,\ M = \operatorname{span}((1,0,0)^T),\ N = \operatorname{span}((0,1,0)^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} M^\perp =& \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ N^\perp =& \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ (M \cup N)^\perp =& \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

(h) Wahr. Es gilt $M \cup N \supseteq M$ und $M \cup N \supseteq N$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (M \cup N)^\perp \subseteq& M^\perp \\ (M \cup N)^\perp \subseteq& N^\perp \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. $\square$