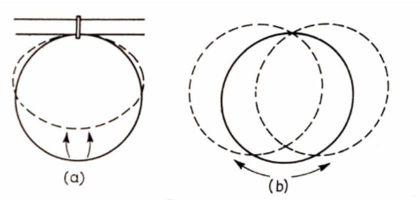
Aufgabe 8.4: *Schwingender Ring* .... (5 Punkte)

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

Betrachten Sie einen dünnen Ring (Masse m, Radius R), der am oberen Ende befestigt ist. Er kann zum einen um eine horizontale Achse schwingen, die in der Ebene des Rings liegt (a) und zum anderen um eine senkrecht zur Ebene (b).



(2 P) a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Schwingung (a) als Funktion des Auslenkwinkels auf.

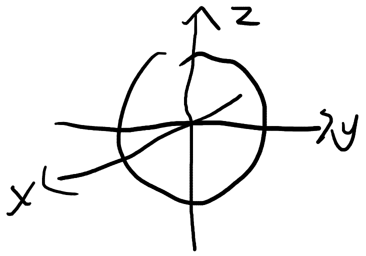
(2 P) b) Lösen Sie die in a) aufgestellte Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes und bestimmen Sie die Periodendauer $T_{(a)}$.

(1 P) c) Bestimmen Sie das Verhältnis der Periodendauern $\frac{T_{(b)}}{T_{(a)}}$.

a) **Schritt 1: Trägheitsmoment**

Wir nehmen hier an, dass der Definition der Trägheitsmoment aus der Vorlesung gegeben sei.

Schritt 1a: Trägheitsmoment bzgl. der y Achse hier.



(Der Ring liegt in der z-y Ebene)

$$\underbrace{J_x = mR^2}_{\text{aus der Vorlesung!}} = \int (y^2+z^2)\,dm$$

$$= \int y^2\,dm + \int z^2\,dm$$

dm = 0 wenn $x \neq 0$!

$$= \int (y^2+x^2)\,dm + \int (z^2+x^2)\,dm$$

$$= J_z + J_y$$

gegeben in der Übungen

Per Definition eines Ringes besitzt ein Ring eine Symmetrie, aus physikalische Grunden ist dann

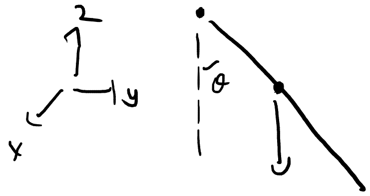
$$J_z = J_y$$

$$J_y = \frac{1}{2} J_x = \frac{1}{2} mR^2$$

Schritt 1b: Trägheitsmoment bzgl. der Achse im Bild von (a)

Satz von Steiner (Ansatz aus Vorlesung 6.2)

$$J = J_y + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{4} mR^2 = \frac{3}{4} mR^2$$



Ansatz aus der Vorlesung!

Aus der Vorlesung 5.2 wissen wir $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Wir wissen auch aus der Vorlesung, dass im Fall der

- Konstante Trägheitsmoment
- Stationäre bzw. feste Achse
- Rotation um einer Hauptachse

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J\dot{\vec{\omega}} = \hat{x} J \ddot{\theta}$$

Ansatz für die Schwerkraft aus Vorlesung 2.2: $F_G = mg$

Ansatz für das Drehmoment aus Vorlesung 3.1 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

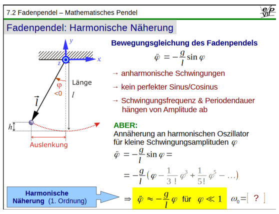
$$= -\hat{x} J mg \frac{R}{2} \sin\theta$$

Eingesetzt in die Gleichung von der Vorlesung 5.2 $\hat{x} J \ddot{\theta} = -\hat{x}\, mg \frac{R}{2} \sin\theta$

Aber im Fall der linear unabhängigen Achsen gilt dann $\ddot{\theta} = -mg\frac{R}{2}\sin\theta$

Für kleine Schwingungen $\theta \ll 1$ gilt $J\ddot{\theta} \approx -\frac{mgR}{2}\theta$

Woher? Aus der Vorlesung!



$$\frac{3}{\cancel{4}\,2}\cancel{m}R^2\ddot{\theta} = -\frac{\cancel{m}g\cancel{R}}{\cancel{2}}\theta$$

Das dürfen wir machen, weil aus physikalische Grunde $R \neq 0$ und $m \neq 0$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3R}\theta$$

b) Komplexer Ansatz

$$\theta = Ae^{i\omega t}, \quad A \neq 0$$

$$\dot{\theta} = i\omega A e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\theta} = (i\omega)^2 A e^{i\omega t}$$

$$= -\omega^2 A e^{i\omega t}$$

Eingesetzt

$$-\omega^2 \cancel{A} \cancel{e^{i\omega t}} = -\frac{2g}{3R} \left(\cancel{A} \cancel{e^{i\omega t}} \right)$$

$A \neq 0$ (nicht-triviale Lösung angenommen) und $e^{i\omega t} \neq 0$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

Also wir haben hier zwei linear unabhängige Lösungen. Weil die Differentialgleichung von zweite Ordnung ist, ist die allgemeinste Lösung ein lineare Kombination von die zwei Lösungen

$$\theta(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$$

$$= A_1 e^{i\sqrt{\frac{2g}{3R}}\, t} + A_1 e^{-i\sqrt{\frac{2g}{3R}}\, t}$$

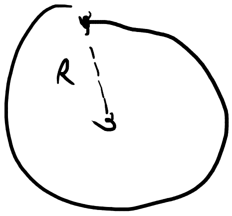
Perioddauer: Periodizität der Exponentialfunktion

$$\sqrt{\frac{2g}{3R}}\, T_{(a)} = 2\pi,$$

$$T_{(a)} = \sqrt{\frac{3R}{2g}}\, 2\pi$$

c) **Schritt 1: Trägheitsmoment**

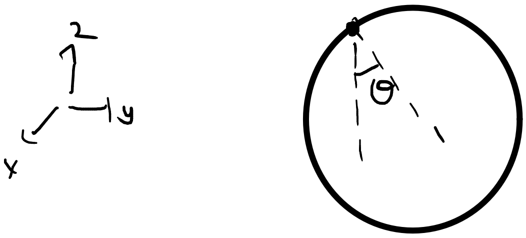
Satz von Steiner (Vorlesung 6.2)



$$J = mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = mR^2 + \frac{1}{4}mR^2$$

$$= \frac{5}{4}mR^2$$

Schritt 2: Bewegungsgleichung



Ansatz von Vorlesung	
5.1	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
2.2	$F_G = mg$
3.1	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = -\hat{x} R m g \sin\theta$

$$J\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta$$

$$\frac{5}{4}\ddot{\theta} m R^2 = -mgR\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{4g}{5R}\sin\theta$$

$$\approx -\frac{4g}{5R}\theta$$

Schritt 3: Komplexer Ansatz

Komplexer Ansatz

$$\theta = Ae^{i\omega t}, \quad A \neq 0$$

$$\dot{\theta} = i\omega A e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\theta} = (i\omega)^2 A e^{i\omega t}$$

$$= -\omega^2 A e^{i\omega t}$$

Eingesetzt

$$-\omega^2 \cancel{A}\cancel{e^{i\omega t}} = -\frac{4g}{5R}\left(\cancel{A}\cancel{e^{i\omega t}}\right)$$

$A \neq 0$ (nicht-triviale Lösung angenommen) und $e^{i\omega t} \neq 0$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{4g}{5R}}$$

Also wir haben hier zwei linear unabhängige Lösungen. Weil die Differentialgleichung von zweite Ordnung ist, ist die allgemeinste Lösung ein lineare Kombination von die zwei Lösungen

$$\theta(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$$

$$= A_1 e^{i\sqrt{\frac{4g}{5R}}\,t} + A_1 e^{-i\sqrt{\frac{4g}{5R}}\,t}$$

Periodendauer: Periodizität der Exponentialfunktion

$$\sqrt{\frac{4g}{5R}}\, T_{(b)} = 2\pi,$$

$$T_{(b)} = \sqrt{\frac{5R}{4g}}\, 2\pi$$

$$\frac{T_{(b)}}{T_{(a)}} = \frac{\sqrt{\frac{5\cancel{R}}{4\cancel{g}}}\, 2\cancel{\pi}}{\sqrt{\frac{3\cancel{R}}{2\cancel{g}}}\, 2\cancel{\pi}} = \sqrt{\frac{5}{4}\,\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$