Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: June 13, 2024)

Die Regressionsparameter sind bestimmt durch

$$
\begin{aligned}
a_1 =& \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{1}{\sigma_i} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^4}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} \\
a_2 =& \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^4}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} \\
a_3 =& \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{1}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} \\
\Delta =& \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^4}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

I. HERLEITUNG DES FEHLERAUSDRUCKS

Wir bestimmen $\sigma_{a_i}^2 = \sum_k \left[\sigma_k \left(\frac{\partial a_i}{\partial y_k}\right)^2\right]$. Dazu bestimmen wir zuerst $\frac{\partial a_i}{\partial y_k}$. Weil

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \sum_i y_i \frac{x_i^n}{\sigma_i^p} = \frac{x_k^n}{\sigma_k^p},$$

können wir mit der Laplace-Entwicklung den Fehler berechnen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a_1}{\partial y_k} =& \frac{1}{\Delta}\frac{1}{{\sigma_k}^2}\left[\sum \frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2} \sum \frac{{x_i}^4}{{\sigma_i}^2} - \left(\sum \frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}\right)^2 - x_k \left(\sum \frac{x_i}{{\sigma_i}^2} \sum \frac{{x_i}^4}{{\sigma_i}^2} - \sum \frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2} \sum \frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\right)\right. \\
& \left. + {x_k}^2 \left(\sum \frac{x_i}{{\sigma_i}^2} \sum \frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2} - \left(\sum \frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\right)^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\frac{\partial a_2}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta}\frac{1}{{\sigma_k}^2}\left[-\left(\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^4}{{\sigma_i}^2}-\sum\frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\right)+x_k\left(\sum\frac{1}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^4}{{\sigma_i}^2}-\left(\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.-{x_k}^2\left(\sum\frac{1}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}-\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta}\frac{1}{{\sigma_k}^2}\left[\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}-\left(\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\right)^2-x_k\left(\sum\frac{1}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}-\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\right)\right.$$
$$\left.+{x_k}^2\left(\sum\frac{1}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}-\left(\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\right)^2\right)\right]$$

$$\Delta = \sum\frac{1}{{\sigma_i}^2}\left(\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^4}{{\sigma_i}^2}-\left(\sum\frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}\right)^2\right)-\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\left(\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^4}{{\sigma_i}^2}-\sum\frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\right)$$
$$+\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\left(\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}-\left(\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\right)^2\right)$$

Eingesetzt in $\sigma_{a_i} = \sqrt{\sum_k\left[{\sigma_k}^2\left(\frac{\partial a_i}{\partial y_k}\right)^2\right]}$ liefert

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^4}{{\sigma_i}^2}-\left(\sum\frac{{x_i}^3}{{\sigma_i}^2}\right)^2\right)}$$
$$\sigma_{a_2} = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{1}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^4}{{\sigma_i}^2}-\left(\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}\right)^2\right)}$$
$$\sigma_{a_3} = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{1}{{\sigma_i}^2}\sum\frac{{x_i}^2}{{\sigma_i}^2}-\left(\sum\frac{x_i}{{\sigma_i}^2}\right)^2\right)}$$

II. POLYNOMREGRESSION

Die theoretisch zu erwartende Daten erfüllen die Gleichung

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

Eine Linearisierung ist also nicht sinnvoll, da $v_0 = 0$ gilt unbedingt nicht, also die Fallbeschleunigung lässt sich nicht immer aus der Steigung berechnen.

Die Daten sind in der Aufgabenstellung gegeben. Jede Bohrung entspricht 2,0 cm. Außerdem können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die erste Bohrung als Ursprung ($y = 0$ cm) definieren. Daraus berechnen wir die Datentabelle für die Regression

Bohrung	**Zeit (s)**	**Ort (m)**
1	0	0,00
2	0,065743	0,02
3	0,092204	0,04
4	0,111701	0,06
5	0,129847	0,08
6	0,143638	0,10
7	0,156868	0,12
8	0,169667	0,14
9	0,181285	0,16
10	0,192732	0,18
11	0,202532	0,20
12	0,21236	0,22
13	0,222212	0,24
14	0,230763	0,26
15	0,238582	0,28

Wir werden im Zukunft den Fehler durch die Streuung schätzen. Dann sind alle Fehler gleich und die σ_i kürzen sich. Wir verwenden also eine alternative Definition von Δ

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum y_i x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum y_i x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} N & \sum y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum y_i x_i & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum y_i x_i^2 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum y_i x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum y_i x_i^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta = 0,0003341947203678026 \text{ s}^6$$

$$a_1 = 0,00001890136308573145 \text{ m}$$

$$a_2 = -0,02499490722866542 \text{ ms}^{-1}$$

$$a_3 = 4,997999358352541 \text{ ms}^{-2}$$

Zur Berechnung der Fehler verwenden wir wieder die alternative Definition von Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta}\left[\sum x_i^2 \sum x_i^4 - \left(\sum x_i^3\right)^2\right]}$$

$$\sigma_{a_2} = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta}\left[N \sum x_i^4 - \left(\sum x_i^2\right)^2\right]}$$

$$\sigma_{a_3} = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta}\left[N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right]}$$

wobei s^2 durch

$$s^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N}(y_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2)^2$$

definiert ist. In dieser Gleichung ist $k = 3$ die Anzahl der Freiheitsgrade. Einsetzen liefert

$$s^2 = 5,927310697739735 \times 10^{-7}.$$

Insgesamt sind

$$a_1 = (0,00033 \pm 0,00071) \text{ s}^2$$

$$a_2 = (-0,025 \pm 0,011)\ \mathrm{ms}^{-1}$$
$$a_3 = (4,998 \pm 0,041)\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Die Fallbeschleunigung und deren Fehler ist bestimmt durch

$$g = 2a_3$$
$$\Delta g = 2\Delta a_3$$

Daraus folgt

$$g = (9,996 \pm 0,082)\ \mathrm{ms}^{-2}$$