Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 26, 2023)

Problem 1. (Maß über $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere

$$\mu_\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}, \mu_\lambda(A) := \sum_{k \in A} \exp(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bestimmen Sie jeweils alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_\lambda)$ ein Maßraum ist.

(b) μ_λ ein endliches Maß ist.

(c) μ_λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Proof. (a) μ_λ ist auf jedem Fall für endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ wohldefiniert. Weil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ konvergiert (absolut) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, konvergiert absolut alle Teilfolge.

μ_λ ist auch trivialweise additiv.

(b) Das passt für $\lambda \in \mathbb{R}$

(c) Wir brauchen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)(\exp(\lambda) - 1) = 1,$$

oder

$$\exp(\lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Weil $\exp(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ immer positiv ist, gibt es nur eine reelle Lösung:

$$\lambda = \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5} \right) \right].$$

$\square$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. (vollständiger Maßraum) Sei X eine nichtleere Menge, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\mu_B(A) := \mu(A \cap B)$.

(a) Zeigen Sie, dass μ_B ein Maß über $\mathcal{A}$ ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ ein vollständiger Maßraum, dann auch $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, dann auch $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$.

Proof. (a) In der Übungsblatt 1. haben wir schon bewiesen, dass es wohldefiniert ist.

Sei dann $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ eine Folge disjunkte Menge. Es gilt

$$\mu_B\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(B \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)$$
$$= \underbrace{\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B \cap A_i)}_{\sigma-\text{additivität von } \mu} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_B(A_i)$$

μ_B ist dann σ-Additiv, und daher Maß.

(b) Ja. Sei $\mu(A) = 0$. Weil $A \cap B \subseteq A$ ist, gilt auch $\mu_B(A) = 0$. Weil $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ vollständig ist, ist jede Teilmenge $\mathcal{A} \ni A' \subseteq A$. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist dann vollständig.

(c) Nein. Sei $X = \{a, b, c\}, B = \{a\}, \mathcal{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$.

Sei auch $\mu(\{b, c\} \neq 0, \mu(X) \neq 0, \mu(\{a\}) \neq 0$. Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ trivialweise vollständig (es gibt keine Nullmenge), aber $\mu_B(\{b, c\}) = \mu(\{a\} \cap \{b, c\}) = \mu(\varnothing) = 0$. Deswegen ist $\{b, c\}$ eine Nullmenge in (X, A, μ_B), aber $\{b\} \subseteq \{b, c\} \notin \mathcal{A}$

□

Problem 3. (a) Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varnothing \in K_i$ für $i = 1, 2$ und $\nu_i : K_i \to [0, \infty]$ mit $\nu_i(\varnothing) = 0$ für $i = 1, 2$. Bezeichne nun mit μ_i^* die analog zu Satz 1.37 von ν_i induzierten äußeren Maße. Es existiere ein $\alpha > 0$, so dass

$$\forall I_1 \in K_1 \exists I_2 \in K_2 : I_1 \subseteq I_2 \text{ und } \alpha\nu_2(I_2) \leq \nu_1(I_1).$$

Zeigen Sie: Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\alpha\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$.

(b) Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 1.55: Zeigen Sie, dass

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ und } \lambda_a^*(A) \leq \lambda_r^*(A) \leq \lambda_n^*(A)$$

für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt.

Proof. (a) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine Überdeckung $(A_{1,j}), A_{1,j} \in K_1$, für die gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1,k} \supseteq A$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{1,k}) \leq \mu_1^*(A) + \epsilon$$

Es gibt auch per Hypothese eine Folge $(A_{2,k}), A_{2,k} \in K_2, A_{2,k} \supseteq A_{1,k}, \alpha\nu_2(A_{2,k}) \leq \nu_2(A_{1,k})$. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2,k} \supseteq A$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha\nu_2(A_{2,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{2,k}) < \mu_1^*(A) + \epsilon$$

Weil das für alle ϵ gilt, ist $\alpha\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$

(b) Es existiert, für jede Elemente $(a,b) = J \in \mathbb{J}(n)$, ein Element $[a,b) \in \mathbb{J}_l(n) \supseteq (a,b)$, und es gilt $\mathrm{vol}_n([a,b)) \leq \mathrm{vol}_n((a,b))$. Für jede Elemente $[a,b) \in \mathbb{J}_l$ existiert auch $\overline{\mathbb{J}}(n) \ni [a,b] \supseteq [a,b)$, für die gilt $\mathrm{vol}_n([a,b]) \leq \mathrm{vol}_n([a,b))$. Daraus folgt die Behauptung:

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ für alle } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ähnlich folgt die andere Teil. Man muss nur $(a,b]$ statt $[a,b)$ einsetzen, und alle Aussagen bleiben richtig. □

Problem 4. Zeigen Sie folgende Aussagen über das äußere Lebesgue-Maß:

(a) Es gilt $\lambda_n^*(A) = 0$ für alle abzählbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$mit $\lambda_n^*(B) = 0$. Dann gilt $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A)$.

(c) Es ist $\lambda_1^*([0,1] \backslash \mathbb{Q}) = 1$.

(d) Es ist $\lambda_2^*(\mathbb{R} \times \{0\}) =0$

Proof. (a) Sei $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Sei auch

$$M_\epsilon = \left\{ \left(x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) | i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Für jede $\epsilon > 0$ ist M_ϵ eine Überdeckung von A. Es gilt auch:

$$\begin{aligned}\sum_{B \in M_\epsilon} \mathrm{vol}_n(B) =& \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n \left(\left(x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) \right) \\ =& \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\ =& \epsilon \end{aligned}$$

Weil dann $\lambda_n^*(A) \leq \epsilon \forall \epsilon > 0$, ist $\lambda_n^*(A) = 0$.

(b) ...

(c) Weil $\{[0,1]\}$ eine Überdeckung von $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$ ist, ist $\lambda_1^* ([0,1] \backslash \mathbb{Q}) \leq 1$. Wegen subadditivität gilt $\lambda_1^*([0,1]) = 1 \leq \lambda_1^*([0,1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \lambda_1^*([0,1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q})$.Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gilt $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$ und daraus folgt $1 \leq \lambda_1^* ([0,1])$. Daher gilt $\lambda_1^* ([0,1]) = 1$

□