Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lukas Then

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 6, 2023)

Problem 1. (a) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x)\cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius $R = +\infty$ dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht durch ihre Taylorreihe um x = 0 dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9?

Proof. (a)

$$\begin{aligned}
g(x) =& \sin(x)\cosh(x) \\
=& \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) \\
=& \frac{1}{4i}\left(e^{(i+1)x} + e^{(i-1)x} - e^{(1-i)x} - e^{-(i+1)x}\right) \\
=& \frac{i}{4}\left[e^{-(i+1)x} + e^{(1-i)x} - e^{(i+1)x} - e^{(i-1)x}\right] \\
g^{(n)}(x) =& \frac{i}{4}\left[\left[-(i+1)\right]^n e^{-(i+1)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x}\right. \\
& \left. -(1+i)^n e^{(i+1)x} - (i-1)^n e^{(i-1)x}\right] \\
|g^{(n)}(x)| \leq& \frac{1}{4}(\sqrt{2})^n \left[\left|e^{-(i+1)x}\right| + \left|e^{(1-i)x}\right| + \left|e^{(i+1)x}\right| + \left|e^{(i-1)x}\right|\right]
\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Die Bedingungen sind jetzt erfüllt: Sei $B_r(0)^{cl}$ ein abgeschlossenes Ball für beliebige $r > 0$. Sei außerdem

$$c = \sup_{x \in B_r(0)^{cl}} \frac{1}{4} \left[\left| e^{-(i+1)x} \right| + \left| e^{(1-i)x} \right| + \left| e^{(i+1)x} \right| + \left| e^{(i-1)x} \right| \right]$$

$$\alpha = \sqrt{2}$$

Es gilt $c \neq \infty$, weil die Abbildung in den Klammern stetig ist, und ist daher auf eine eingeschränkte Menge auch eingeschränkt. Es folgt:

$$\|g^{(n)}\|_{B_r(0)^{cl}} \leq c\alpha^n \tag{5.6.23}$$

Also die formale Taylorreihe hat einen Konvergenzradius $R > r$ und konvergiert gegen auf $B_r(0)^{cl}$ gegen g. Weil das für alle $r > 0$ gilt, konvergiert die Taylorreihe gegen f für alle $x \in \mathbb{R}$, und die Konvergenzradius $R = +\infty$.

(b) Es ist klar, dass es nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Die Taylorreihe ist $0 + 0x + 0x^2 + \cdots = 0$, aber $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.

□

Problem 2. Es sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Geben Sie das Taylorpolynom P_2 von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an und schätzen Sie den maximalen Fehler von $|f(x) - P_2(x)|$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ab.

Proof. Es gilt $f(x) = x^{1/3}$, und daher

$$f^{(n)}(x) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - i \right) \right] x^{\frac{1}{3} - n},$$

also

$$f^{(n)}(1) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - i \right).$$

Es gilt daher

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2.$$

Wir wissen schon

$$|R_{n,x_0}(f)(h)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \left| f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0) \right| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \tag{5.6.20}$$

Hier ist $n = 2$, und $|h| \leq \frac{1}{2}$.

Vereinfachung: (Nur in diesem Problem, falsch im Allgemein) Der maximale Fehler ist gleich $\sup_{t\in[-1,1]}\left|f^{(n)}(x_0+th)-f^{(n)}(x_0)\right|\frac{|h|^n}{(n-1)!}$, wobei $h=\frac{1}{2}, n=2$, und $x_0=1$.

Proof. Wir betrachten zuerst $R_{n,x_0}(f)(\xi)$ für $0\le\xi\le h$. Es gilt

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in[0,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) &\le \sup_{\xi\in[0,h]}\left[\sup_{t\in[0,1]}\left|f^{(n)}(x_0+t\xi)-f^{(n)}(x_0)\right|\frac{|\xi|^n}{(n-1)!}\right]\\ &= \sup_{\xi\in[0,h]}\left[\sup_{t\in[0,1]}\left|f^{(n)}(x_0+t\xi)-f^{(n)}(x_0)\right|\frac{|h|^n}{(n-1)!}\right]\\ &= \sup_{t\in[0,1]}\left|f^{(n)}(x_0+th)-f^{(n)}(x_0)\right|\frac{|h|^n}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Ähnlich gilt auch

$$\sup_{\xi\in[-h,0]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t\in[-1,0]}\left|f^{(n)}(x_0+th)-f^{(n)}(x_0)\right|\frac{|h|^n}{(n-1)!}.$$

Weil wir den maximalen Fehler auf dem ganzen Intervall schätzen möchten, ist die gewünschte Antwort daher

$$\sup_{\xi\in[-h,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t\in[-1,1]}\left|f^{(n)}(x_0+th)-f^{(n)}(x_0)\right|\frac{|h|^n}{(n-1)!}.$$ □

Wir betrachten deswegen

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[-1,1]}\left|f^{(n)}(x_0+th)-f^{(n)}(x_0)\right|\\ &=\sup_{t\in[-1,1]}\left|\left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)\right](x_0+th)^{\frac{1}{3}-n}-\left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)\right]\right|\\ &=\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)\right|\sup_{t\in[-1,1]}\left|\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-5/3}-1\right|\\ &=\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)\right|\left|\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-5/3}-1\right|\\ &=\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)\right|\left(2^{5/3}-1\right)\end{aligned}$$

Also der maximale Fehler ist

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{|0.5|^2}\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)\right|\left(2^{5/3}-1\right)=\frac{1}{18}\left(2^{5/3}-1\right).$$ □

Problem 3. Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in x_0.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ im Punkt $x_0 = 2$.

(b) $g(x) = \sin^2(\pi x)$ in $x_0 = 3$.

(c) $h(x) = \sin^{-1}(x)$ in $x_0 = 0$.

Proof. (a)

$$\begin{aligned}
f(2) =& 2^3 - 3(2)^2 + 3(2) + 2 = 4 \\
f'(x) =& 3x^2 - 6x + 3 \\
f'(2) =& 3 \\
f''(x) =& 6x - 6 \\
f''(2) =& 6 \\
f'''(x) =& 6 = f(2) \\
f''''(x) =& 0
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom ist dann

$$4 + 3(x-2) + 3(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

(b)

$$\begin{aligned}
g(x) =& \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x)) \\
g(3) =& 0 \\
g'(x) =& \pi \sin(2\pi x) \\
g^{(n)}(x) =& (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} \sin(2\pi x) & n \text{ ungerade} \\ \cos(2\pi x) & n \text{ gerade} \end{cases} && n \geq 1 \\
g^{(n)}(3) =& (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} && n \geq 1
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom vom Grad 30 ist

$$\sum_{n=1}^{15} \left[(-1)^{\lfloor (2n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} (x-3)^{2n} \right].$$

(c)

$$\begin{aligned} h(x) =& \sin^{-1} x \\ h(0) =& 0 \\ h'(x) =& \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \\ h'(0) =& 1 \end{aligned}$$

Sei $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Wir wissen, dass die Taylorreihe von $(1+x)^\alpha$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{5.6.41}$$

ist, wobei $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\left[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\right]$. Die Taylorreihe von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt:

$$\begin{aligned} T_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x) =& \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(-x^2\right)^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n}) \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n \qquad\qquad b_n = 0, \text{ n ungerade} \end{aligned}$$

Es gilt daher, für die Koeffizienten der Taylorreihe von $\sin^{-1}(x)$

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dass $a_n = b_{n-1}/n$, für $n \geq 1$. Es ist dann

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{14} \frac{1}{2n+1} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n+1}).$$

□

Problem 4. Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von $\exp : [0,1] \to \mathbb{R}$ für die markierten Zerlegungen (J_n, Ξ_n) mit der Auswahl $\Xi_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

Proof.

Wir werden später die folgende Lemma brauchen:

Lemma 1.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{-1/n}\right) = 1.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{-1/n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-1/n}}{1/n} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-x}}{x} && x = 1/n \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}}{1} && \text{L'Hopital} \\
&= 1 && \square
\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{O}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\exp\left(\frac{k+1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{(e-1)e^{1/n}}{e^{1/n}-1} \\
&= \frac{1}{n}\frac{e-1}{1-e^{-1/n}}
\end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{O}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n\left(1-e^{-1/n}\right)} = e-1.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\exp\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{e-1}{e^{1/n}-1} \\
&= \frac{1}{n}\frac{e-1}{e^{1/n}\left(1-e^{-1/n}\right)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n(e^{1/n}\left(1-e^{-1/n}\right)} = e-1. \qquad \square$$