Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 6

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: June 17, 2024)

Wir führen eine Messung durch und erhalten die folgenden Messwerte für die Zählereignisse eines befüllten Behälters und die Zählereignisse eines *leeren* Behälters.

Winkel (°)	**Zählereignisse befülltes Behälters (y_f)**	**Zählereignisse leeres Behälters (y_l)**
155	184	5
135	134	4
120	99	4
100	49	1
90	53	3
75	55	1
65	70	4
55	81	9
40	130	8
20	216	7

Zur Bereinigung der Untergrund müssen wir die Zählereignisse bei einem leeren Behälter vom Zählereignisse bei einem befüllten Behälter abziehen. Es ist allerdings dabei zu beachten, dass die Anzahl der Teilchen in dieser Messung eine Hälfe die Anzahl beim Versuch mit einem befüllten Target, also wir müssen *zweimal* y_l vom y_f abziehen. Wir bezeichnen die Anzahl der Ereignisse ohne Untergrund als y.

$$y = y_f - 2y_l \tag{1}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Der Fehler kann nach Gauss fortgepflanzt werden:

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y_f)^2 + 4(\Delta y_l)^2}$$

Wir nehmen an, dass die Anzahl der Ereignisse poissonverteilt ist. Daher ist der Fehler in y_f $\Delta y_f = \sqrt{y_f}$ und analog für $\Delta y_l = \sqrt{y_l}$. Daraus ergibt sich

$$\Delta y = \sqrt{y_f + 4y_l} \tag{2}$$

Winkel (°)	$\cos\theta$	**Zahlereignisse ohne Untergrund (y)**
155	-0.9063077870366499	179 ± 14
135	-0.7071067811865475	130 ± 12
120	-0.5	95 ± 11
100	-0.1736481776669303	$48,0 \pm 7,3$
90	0	$50,0 \pm 8,1$
75	0.2588190451025207	$54,0 \pm 7,7$
65	0.4226182617406994	$66,0 \pm 9,3$
55	0.573576436351046	72 ± 11
40	0.766044443118978	122 ± 13
20	0.9396926207859084	209 ± 16

Wir suchen die Parameter $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Funktion

$$y(x) = a_1 P_0(x) + a_2 P_1(x) + a_3 P_2(x) \tag{3}$$

die beste Anpassung an die Daten ist. Dabei sind $P_i,\ i \in \{0, 1, 2\}$ die *Legendre-Polynomen*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

Die Regressionskoeffizienten ergeben sich durch

$$a_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

Für den Fehler brauchen wir die Ableitung. Da $\frac{\partial}{\partial y_k} \sum y_i \frac{f_j(x_i)}{\sigma_i^2} = \frac{f_j(x_k)}{\sigma_k^2}$ gilt, ist

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial a_1}{\partial y_k} &= \begin{vmatrix} \frac{f_1(x_k)}{\sigma_k^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \frac{f_2(x_k)}{\sigma_k^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \frac{f_3(x_k)}{\sigma_k^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_k \frac{f_1(x_k)}{\sigma_k^2} + \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ y_k \frac{f_2(x_k)}{\sigma_k^2} + \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ y_k \frac{f_3(x_k)}{\sigma_k^2} + \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

und analog für a_2 und a_3. Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial a_1}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{f_1(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \frac{f_2(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \frac{f_3(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \frac{f_1(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \frac{f_2(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \frac{f_3(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \frac{f_1(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \frac{f_2(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \frac{f_3(x_k)}{\sigma_k^2} + 2\sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$