Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 4, 2024)

Problem 1. Es sei X eine Zufallsvariable, die diskret uniform verteilt ist auf den ganzen Zahlen $\{-n, \ldots, n\}$ zwischen $-n$ und n, für ein $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $X \stackrel{d}{=} -X$, also dass X und $-X$ dieselbe Verteilung haben. Was ist $\mathbb{P}(X = -X)$?

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.

(c) Leiten Sie die Verteilung von X^2 her.

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X^2]$.

Proof. (a)

$$\mathbb{P}(-X = a) = \underbrace{\mathbb{P}(X = -a) = \mathbb{P}(X = a)}_{\text{uniform verteilt}}$$

Das Ereignis $\{X = -X\}$ ist auch das Ereignis $\{X = 0\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2n+1}$.

(b) Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{2n+1} = p$ (unabhängig von a, da X uniform verteilt ist).

Der Erwartungswert ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=-n}^{n} pk = p(0) = 0.$$

(c) Es gilt, für $0 \leq a \leq n$

$$\mathbb{P}(X^2 < a^2) = \mathbb{P}(|X| < a) = \frac{2\lfloor a \rfloor + 1}{2n + 1}$$

und damit ist

$$\mathbb{P}(X^2 < a) = \frac{2\lfloor a^2 \rfloor + 1}{2n + 1}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

und die Verteilung von X

$$\mathbb{P}(X^2 < a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 1 & a \geq n^2 \\ \frac{2\lfloor a^2 \rfloor + 1}{2n+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2n+1} k^2 \\ &= \frac{1}{3} n(1+n). \end{aligned}$$

□

Problem 2. Es sei $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine Quantilsfunktion. Der Abstand $F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/4)$ heißt Interquartilsabstand der zugehörigen Verteilung.

(a) Was ist der minimal mögliche Interquartilsabstand einer Verteilung? Geben Sie ein entsprechendes Beispiel an.

(b) Leiten Sie den Interquartilsabstand einer uniformen Verteilung $\mathcal{U}(a,b)$ auf (a,b) her.

(c) Leiten Sie den Interquartilsabstand einer Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ her.

(d) Leiten Sie den Interquartilsabstand einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ her. Sie können benutzen, dass $\Phi(0{,}675) \approx 3/4$ ist für die Verteilungsfunktion Φ von $\mathcal{N}(0,1)$.

(e) Welche Werte kann $\mathbb{P}(F^{-1}(1/4) \leq X \leq F^{-1}(3/4))$ minimal und maximal annehmen, falls X mit Verteilungsfunktion F verteilt ist? Geben Sie entsprechende Beispiele an.

(f) Bei welchen der drei Verteilungen aus (b), (c) und (d) liegt der Median in der Mitte des Intervalls $[F^{-1}(1/4), F^{-1}(3/4)]$?

Proof. (a) 0, sei X eine konstante Zufallsvariabel $X = 1$. Die Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Quantilsfunktion ist

$$F^{-1}(x) = 1$$

für $x \in (0,1)$ und damit $F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/4) = 0$.

(b) Die Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

für $x \in (a,b)$. Da die Verteilungsfunktion stetig ist, ist die Quantilsfunktion einfach deren Inverse:

$$F^{-1}(x) = (b-a)x + a.$$

(c) Die Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

was wieder stetig und monoton steigend ist. Damit ist

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x).$$

(d) Die Verteilungsfunktion Φ der Normalverteilung ist stetig. Damit ist $\Phi^{-1}(3/4) = 0{,}675$.

Wir wissen auch, dass die Verteilung um 0 symmetrisch ist: Falls

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + a,$$

ist

$$\Phi(-x) = \frac{1}{2} - a.$$

Damit ist

$$\Phi(-0{,}695) = \frac{1}{4},$$

$\Phi^{-1}(1/4) = -0{,}695$ und

$$F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

(e) Die Wahrscheinlichkeit kann maximal 1 sein (siehe Beispiel aus (a)).

Die Wahrscheinlichkeit kann minimal 1/2 sein. Irgendeine stetige Verteilungsfunktion passt, beispielsweise $\mathcal{U}((0,1))$.

(f) (b) Ja, da F^{-1} linear ist.

(c) Nein, da $\ln \frac{3}{4} + \ln \frac{1}{4} \neq \ln \frac{1}{2}$.

(d) Ja, da $\Phi^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + \Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 0 = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. $\square$