Vertiefung Analysis (Analysis 3)

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 25, 2023)

I. 17/10/23

Maß-und Integrationstheory

A. Bücher

1. Escher Analysis III
2. Forstes Analysis 3
3. Elstratt Maß- und Integrationstheorie

Kann man $A \subseteq \mathbb{R}^3$ Volumen zuweisen?

a. Inhaltsproblem Man sollte eine Abbildung finden

$$m : \mathcal{P} \to [0, +\infty].$$

Eigenschaften von m:

1. $$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \qquad \text{für} \qquad A \cap B = \varnothing.$$

2. $$m(A) = m(\beta(A)),$$

   wobei $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung ist.

3. $$m([0,1]^n) = 1,$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

4. Es hat für $n \geq 3$ keine lösung.

5. Nicht trivial wegen des Banach-Tarski-Paradox

Von (2) und (3) errichen wir die Folge

Theorem 1.

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j),$$

für paarweise disjunkt, also

$$A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j.$$

Proof. Es gibt *keine* Lösung für alle n. □

Definition 2. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma-$ Algebra, falls es die folgende Eigenschaften hat:

1. $x \in \mathcal{A}$

2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$

3. $(A_j), A_j \in A \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$

Theorem 3. *Sei A ein σ-Algebra über X. Dann*

1. $\varnothing \in X$

2. $A_1, A_2 \in A \implies A_1 \cap A_2 \in X$ *und* A_1
   $A_2 \in X$

3. $(A_j)A_j \in X \implies \bigcap_j^{\infty} A_j \in X$

Proof. Beachten:

$$A^c = \varnothing \in \mathcal{A}.$$

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c.$$

$$A_1 A_2 = A_1 \cap A_2^c.$$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right)^c.$$

□

Example 4. *Sei* $X = \{1, 2, 3\}$*. Dann ist*

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, X, \{1, 2\}, \{3\}\}$$

ein $\sigma-$ *Algebra.*

Theorem 5. *Sei* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ σ*-Algebren über* X *und* Y*. Dann sind*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\right\}$$
$$f_*(\mathcal{A}) = \left\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$

auch σ*-Algebren*

Proof. Wir beweisen es nur für f_*.

1. $Y \in f_*(\mathcal{A})$, weil $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$

2. Sei $B \in f_x(\mathcal{A})$. Dann gilt

$$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{A}.$$

3. Sei $(B_j), B_j \in f_*(\mathcal{A} \forall j$. Dann ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j) \in \mathcal{A}.$$

□

Lemma 6. *Sei* I *nichtleer, und* $\mathcal{A}_i$ σ*-Algebren für jeder* $i \in I$*. Dann ist*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

ein σ*-Algebra*

Definition 7. Sei $X \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann wird es definiert

$$A_\sigma(S) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist ein } \sigma\text{-Algebra mit } S \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Corollary 8. *Ist* $\mathcal{A}$ σ*-Algebra mit* $S \subseteq \mathcal{A}$*, dann*

$$\mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}.$$

Theorem 9. *Die Abbildung $S \to A_\sigma(S)$ hat folgende Eigenschaften:*

1. $S \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S)$
2. $S \subseteq T \subseteq \mathcal{P}(X) \implies \mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(T)$
3. $A_\sigma(A_\sigma(S)) = A_\sigma(S)$

Example 10. *Sei $S = \{\{x\}, x \in X\}$. Dann ist*

$$\mathcal{A}_\sigma(S) = \{A \subset X, A \textit{ oder } A^c \textit{ abzählbar (countable)}\}.$$

Proof. 1. $x \in A$ weil $A^c = \varnothing$ ist abzählbar

2. Es ist klar, dass $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{C}$.

3. Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$. Dann, entweder

   (a) alle A_j abzählbar sind und daher

   $$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

   abzählbar ist, oder mindestens eine A_j^c abzählbar ist, wobei

   $$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c$$

   abzählbar ist.

4. Zu zeigen:

   $$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S).$$

   Sei $A \in \mathcal{A}$. Angenommen A ist abzählbar. Dann

   $$A = \bigcup_{j=1} \infty \{a_j\} \in A_\sigma(S).$$

□

Definition 11. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann ist τ die Menge alle offene Menge. Wir definiert

$$\mathcal{B}(X) := A_\sigma(\tau)$$

und nennt das als das Borel-σ-Algebra.

b. *Frage* Warum muss das ein metrischer Raum sein?

Theorem 12. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $\mathcal{C}$ die Menge der abgeschlossenen Mengen und $\mathcal{K}$ die menge der kompakten Mengen. Dann ist*

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C})$$

Es existiert auch K_j kompakt, wofür gilt

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K})$$

wobei $X = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$

Proof. 1. $\mathcal{A}$ offen $\iff$ A^c abgeschlossen

2. Kompakte Menge sind abgeschlossen $\implies$ $A_\sigma(\mathcal{K}) \subseteq A_\sigma(\mathcal{C})$.

   Sei $\mathcal{C}$ abgeschlossen. Dann gilt

$$C = C \cap X = C \cap \left(\bigcup_{j=1}^\infty K_j \right) = \bigcup_{j=1}^\infty \left(\underbrace{C \cap K_j}_{\text{kompakt}} \right) \in A_\sigma(K).$$

Definition 13. Sei $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir

$$a \leq biffa_i \leq b_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

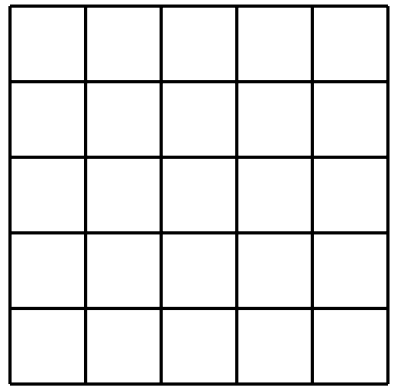
□

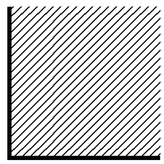
II. 18/10/23

Theorem 14. *Jede offene Menge des $\mathbb{R}^n$ ist eine disjunkte abzählbare Vereinigung von halboffenen Würfeln mit rationalen Eckpunkten.*

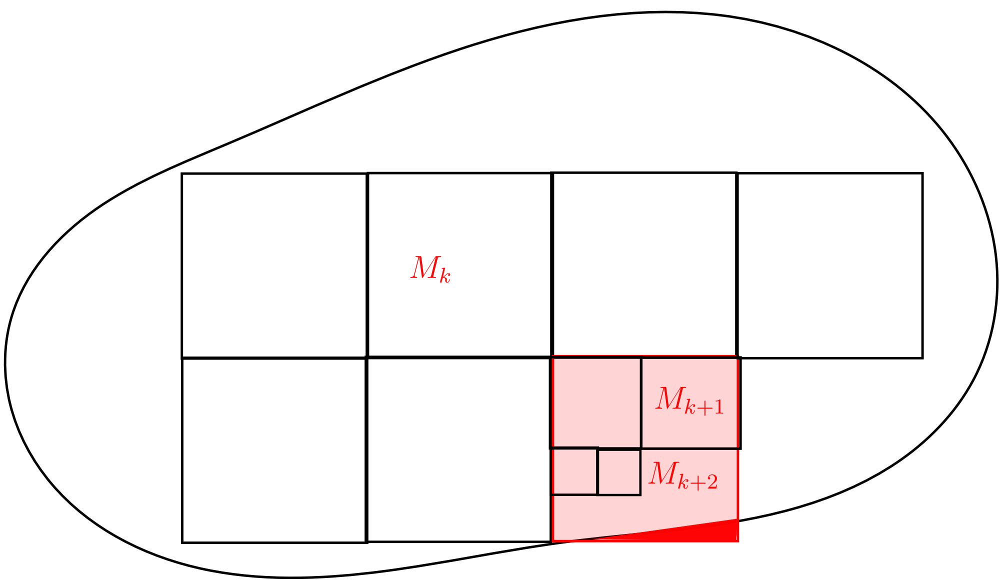
Proof. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$M_k := \left\{ \left(\prod_{i=1}^n \left[\frac{x_i}{2^k}, \frac{x_i + 1}{2^k} \right) \right), x \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$





Dann



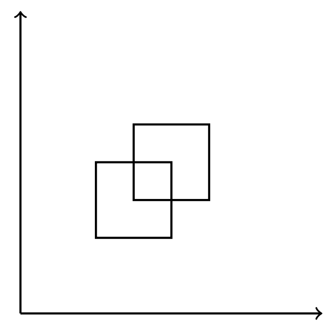
□

Remark 15. *(Produkt σ-Algebra) Sei* $(X_1, \mathcal{A}_1)$ *und* $(X_2, \mathcal{A}_2)$ *σ-Algebren. Wir bildet man ein σ-Algebra auf* $X_1 \times X_2$*?*

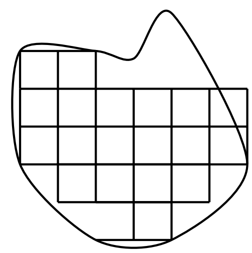
Leider ist

$$\{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

kein σ-Algebra.



Leider ist die Vereinigung kein Produkt-Menge



III. 24/10/23

Definition 16. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X, und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ Mengefunktion. Wenn μ σ-Additiv ist, heißt μ Maß.

Ist $\mu(X) = 1$, dann heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß.

Example 17. *Sei*

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1 & A \neq \varphi \\ 0 & A = \varphi \end{cases}.$$

Dann ist φ endlich und σ-subadditiv. Aber weil es nicht σ-Additiv ist, ist es keinen Maß.

Definition 18. Sei $(X, \mathcal{A})$ eine σ-Algebra über X und $a \in X$. Dann ist

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}.$$

ein Maß (Dirac-Maß)

Example 19. *Sei $\varphi(A) =$ anzahl der Elemente von A. Dann ist φ ein Maß.*

Theorem 20. *1.* $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

2. *Falls* $A \subseteq B$*, dann ist* $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$*.*

3. *Falls* $A \subseteq B$*, dann* $\mu(A) \leq \mu(B)$

4. *Falls* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots,$*. dann* $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$*.*

5. *Falls* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$ *und* $\mu(A_1) < \infty$*, dann ist* $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$

Proof. 1.

$$\begin{aligned} A \cup B =& A \cup (B \backslash A) \\ B =& (B \backslash A) \cup (A \cap B) \\ \mu(B \backslash A) =& \mu(A \cup B) - \mu(A) = \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) =& \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

2. $B = A \cup (B \backslash A)$, und daher $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$.

3. $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A)$.

□

Definition 21. Eine Menge $M \in \mathcal{A}$ heißt Nullmenge, Falls $\mu(M) = 0$. Der Maßraum heißt vollständig, wenn gilt: $M \subseteq N, N$ Nullmenge impliziert $M \in \mathcal{A}$ (alle Teilmenge von Nullmengen sind messbar)

Corollary 22. *Abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist Nullmenge.*

Definition 23. Eine Abbildung $\mu^* : [0, +\infty]$ heißt äußeres Maß, falls gilt:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$

2. $\mu*$ ist monoton, d.h $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3. μ^* ist σ-subadditiv