Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 9

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 11, 2024)

Problem 1. (a) Beweisen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung 15 zyklisch sind.

(b) Funktioniert die Schlussweise aus Aufgabenteil (a) auch bei Gruppen der Ordnung 45?

Proof. (a) $15 = 3 \times 5$, zwei Primzahlen, also die Teiler von 15 sind $1, 3, 5$ und 15. Da 3 teilt 15, $3^2 = 9$ aber nicht, gibt es mindestens eine 3-Sylowgruppe G_3. Für die Zahl der 3-Sylowgruppen n_3 gilt:

$$n_3 \equiv 1 \pmod 3$$
$$n_3 | [G : G_3] = 5$$

Aus den ersten Gleichung folgt: n_3 ist 1 oder 4. Da $4 \nmid 5$, ist $n_3 = 1$, also es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 3. Ähnlich gibt es genau eine Gruppe der Ordnung 5. Es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 1, die triviale Gruppe und genau eine Gruppe der Ordnung 15, die ganze Gruppe.

Da es für jeder Teiler t von 15 genau eine Untergruppe der Ordnung t gibt, sind alle solche Gruppen zyklisch.

(b) Nein. Es kann mehr als eine Gruppe der Ordnung 5 geben, weil für die Zahl der 5-Sylowgruppen n_5 gilt:

$$n_5 \equiv 1 \pmod 5$$
$$n_5 | 9$$

Eine Möglichkeit ist $n_5 = 6$, also wir dürfen den Fall, in dem mehr als eine Untergruppe der Ordnung 5 gibt, nicht ausschließen. □

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. (a) Seien p eine Primzahl, G eine Gruppe, P eine p-Sylowgruppe von G und n_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Zeigen Sie, dass $P \trianglelefteq G$ genau dann gilt, wenn $n_p = 1$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 12 nicht einfach ist.

Proof. (a) Sei $n_p \neq 1$, also $n_p > 1$. Dann gibt es eine andere p-Sylowgruppe U. Weil alle Sylowgruppen konjugiert sind, gibt es $x \in G$, so dass $x^{-1}Px = U \neq P$, also $x^{-1}Px \neq P$ für alle $x \in G$, und P ist kein Normalteiler.

Sei umgekehrt P kein Normalteiler. Es gibt dann $x \in G$, so dass $x^{-1}Px = U \neq P$, Weil die Abbildung $p \to x^{-1}px$ injektiv ist, ist U auch eine p-Sylowgruppe, also $n_p > 1$.

(b) $12 = 2^2 \times 3$. Für die Zahlen der 3 bzw. 2-Sylowgruppen gilt

$$
\begin{aligned}
n_2 \equiv& 1 \pmod 2 \\
n_2|&3 \\
n_3 \equiv& 1 \pmod 3 \\
n_3|&4
\end{aligned}
$$

Falls irgendeine Zahl n_2 oder n_3 1 ist, sind wir nach (a) fertig. Also wir nehmen an, dass weder n_2 noch n_3 1 sind. Die einzige Lösung ist dann $n_2 = 3,\ n_3 = 4$.

Die 3-Sylowgruppen sind außer das Neutrale disjunkt. In andere Worte: Sei H' und H 3-Sylowgruppen. Dann ist $H' \cap H = \{e\}$. Beweis: Wir beweisen es per Widerspruch. Weil $H = H'$ angenommen ist, ist $|H \cap H'| = 2$. Alle Elemente in H bzw. H' haben die Ordnung 3, weil die Ordnung ein Teiler von der Gruppenordnung (3) ist, was nicht 1 ist, wenn das Element nicht das Neutrale ist. Dann ist $H \cap H' = \{e, p\}$, wobei p die Ordnung 3 hat. Das ist aber ein Widerspruch, weil 3 teilt 2 nicht.

Das heißt: Aus 4 3-Sylowgruppen bekommen wir 8 unterschiedliche Elemente, die nicht e sind. Es gibt eine 2-Sylowgruppe der Ordnung 4, z.B. H. Da Sylowgruppen von unterschiedliche Ordnung einen trivialen Schnitt haben, bekommen wir daraus 3 neue Elemente. Es gibt aber mehr als eine 2-Sylowgruppe, z.B. H'.

Da $H = H'$, bekommen wir zumindest ein neues Element. Aus dem gleichen Argument ist dies nicht in den 8 Elemente aus der 3-Sylowgruppen enthalten.

Insgesamt: Die Gruppe besitzt ein neutrales Element. Aus den 3-Sylowgruppen bekommen wir 8 nicht neutrale Elementen. Aus den 2-Sylowgruppen bekommen wir mindestens 4 Elemente. Alle diese Elemente sind unterschiedlich. Dann hat die Gruppe mindestens 13 Elemente, ein Widerspruch. □

Problem 3. Sei G eine Gruppe der Ordnung $392 = 2^3 \cdot 7^2$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Proof. Es gibt Sylow-Untergruppen der Ordnung 7^2 und 2^3. Für die Zahl solche Untergruppen n_7 und n_2 gilt:

$$\begin{aligned} n_2 &\equiv 1 \pmod 2 \\ n_2 &| 49 \\ n_7 &\equiv 1 \pmod 7 \\ n_7 &| 8 \end{aligned}$$

Angenommen $n_2 \neq 1 \neq n_7$, sonst wären wir nach 2(a) fertig. Also es gilt $n_7 = 8$. Die Gruppe G operiere auf die Menge der 7-Sylowgruppen per Konjugation. Die Operation ist ein Homomorphismus $\varphi : G \to S_8$, dessen Kern ein Normalteiler ist. Wir zeigen, dass der Kern nicht trivial und nicht die ganze Gruppe ist.

Wenn der Kern die ganze Gruppe wäre, gibt es eine 7-Sylowgruppe H, so dass $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in G$. Dann sind die 7-Sylowgruppen nicht konjugiert, ein Widerspruch. (Außerdem wäre H ein Normalteiler.)

Wenn der Kern trivial wäre, wäre das Bild $\varphi(G)$ eine Untergruppe von S_8. Weil φ injektiv wäre, hätte diese der Ordnung 392. Die Ordnung alle Untergruppen teilt die Ordnung der ganzen Gruppe, also

$$392 | 8!.$$

Aber 7 kommt nur einmal in der Primfaktorzerlegung von 8! vor, während es zweimal in der Primfaktorzerlegung von 392 zweimal vorkommt. Das heißt: $392 \nmid 8!$, ein Widerspruch. □

Problem 4. (a) Sei G eine endliche Gruppe mit zyklischer *Zentrumsfaktorgruppe* $Z/Z(G)$. Zeigen Sie, dass dann $G = Z(G)$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Sind $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und G ein Gruppe der Ordnung p^2, so ist G abelsch.

(c) Sind auch Gruppen der Ordnung p^3 (mit primem $p \in \mathbb{P}$) stets abelsch?

Proof. (a) Die Zentrumsfaktorgruppe ist zyklisch genau dann, wenn es ein Element $x \in G$ gibt, so dass die Potenzen $x^n Z(G)$ alle Elemente erreichen können. Das heißt, dass für jedes $y \in G$ ein $p \in Z(G)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $y = x^n p$. Sei $y' \in G$ beliebig. Ähnlich gibt es $p' \in Z(G)$ und $n' \in \mathbb{N}$, so dass $y' = x^{n'} p'$. Wir betrachten die Menge

$$\{p, x^n, p', x^{n'}\}.$$

Da $p \in Z(G)$ ist, kommutiert p mit alle Elemente aus G, insbesondere x und daher x^n und $x^{n'}$. Das gilt auch für p'. Weil x^n und $x^{n'}$ Potenzen von x sind, kommutiert die miteinander. Also alle Elemente sind paarweise kommutativ und

$$yy' = x^n p x^{n'} p' = x^{n'} p' x^n p = y' y.$$

Da y und y' beliebig waren, kommutiert jedes beliebiges $y \in G$ mit alle andere Elemente $y' \in G$, also $G = Z(G)$.

(b) Das Zentrum ist eine Untergruppe. Weil $Z(G)$ nicht trivial ist (Korollar 2.78), ist $Z(G)$ entweder p oder p^2. Falls $|Z(G)| = p^2$, wäre $G = Z(G)$ und wir sind dann fertig.

Falls $|Z(G)| = p$, hat die Faktorgruppe $G/Z(G)$ Ordnung p. Nach der Satz von Cauchy gibt es ein Element der Ordnung p in $G/Z(G)$, also das Element ist ein Erzeuger von $G/Z(G)$, und $G/Z(G)$ ist zyklisch. Daraus folgt: $G = Z(G)$, und G ist abelsch.

(c) Nein. $2^3 = 8$ und es gibt eine Diedergruppe D_4 der Ordnung 8. Die Diedergruppe ist aber nicht abelsch. $\square$