Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Institute of
MATHEMATICS

Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

Analysis 2

Stefan Waldmann

Wintersemester 2023/2024

Hausaufgabenblatt Nr. 4

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)
Git revision of ana2-ws2324: `(None)` (None)

08. 11. 2023
(22 Punkte. Abzugeben am 15. 11. 2023)

Hausaufgabe 4-1: Verknüpfung Riemann-integrierbarer Funktionen

In dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Verknüpfung zweier Riemann-integrierbarer Funktionen i.A. nicht Riemann-integrierbar ist. Dazu gehen wir wie folgt vor:

i.) Es sei $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, d.h. eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Weiterhin sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & x = q_n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist. **(2 Punkte)**

ii.) Weiterhin sei

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g Riemann-integrierbar ist, die Verknüpfung $g \circ f$ mit der Funktion f jedoch nicht. **(4 Punkte)**

Hausaufgabe 4-2: Positive Integrale

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf dem echten Intervall $[a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x > 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein echtes Intervall $J \subset [a,b]$ gibt, auf dem f strikt positiv ist, d.h. mit $f(x) > 0$ für alle $x \in J$. **(5 Punkte)**
Hinweis: Eine Möglichkeit ist, die Charakterisierung der Darboux-Integrierbarkeit zu benutzen und Untersummen zu betrachten.

Hausaufgabe 4-3: Wahr oder falsch

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i.) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $|f|$ integrierbar auf $[a,b]$, so ist es auch f. **(2 Punkte)**

ii.) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a,b]$ und ein $\delta > 0$, so ist auch $\frac{1}{f}$ über $[a,b]$ integrierbar. **(2 Punkte)**

iii.) Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt **(2 Punkte)**

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Hausaufgabe 4-4: Wanderdüne

Man gebe eine Folge von nicht-negativen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, sodass

- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$,
- $f_n(x) \not\to 0$ für jedes $x \in [0,1]$. **(5 Punkte)**