

## 10. Übung zur Einführung in die Algebra

Abgabe online in WueCampus bis zum 22.01.2024, 12 Uhr

### Aufgabe 10.1 (4 Punkte; Sylow-Aufgabentyp: Gruppen zusammenbasteln)

Bestimmen Sie alle Isomorphietypen für Gruppen der Ordnung  $45 = 3^2 \cdot 5$ .

### Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Seien  $N$  und  $U$  zwei Gruppen. Zeigen Sie: Genau dann gilt  $N \rtimes_{\phi} U = N \times U$ , wenn  $\phi_u = \text{id}_N$  für alle  $u \in U$  gilt.

### Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Von einer Gruppe  $G$  seien bekannt:

- (1) Sie habe Ordnung  $p^2 \cdot q^2$  mit zwei verschiedenen Primzahlen  $p, q \in \mathbb{P}$ .
- (2) Die  $q$ -Sylowgruppe  $Q$  von  $G$  sei normal.
- (3)  $p$  sei kein Teiler von  $|\text{Aut}(Q)|$ .

Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.

(Hinweis: Denken Sie an semidirekte Produkte. Verwenden Sie an geeigneter Stelle Übung 10.2.)

### Aufgabe 10.4 (2+2 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 100 ein Element der Ordnung 10 enthält.
- (b) Zeigen Sie, dass  $A_4$  keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt (vgl. auch Bemerkung 2.29 im Skript).

**Hinweis:** Es wird insgesamt 12 Übungszettel geben, wobei der 12. Übungszettel zwar in den Präsenzübungen behandelt, jedoch nicht mehr korrigiert wird. Der 12. Übungszettel liefert daher keine Übungspunkte mehr. Dies ist der vorletzte bewertete Übungszettel.

Die Präsenzübungen in der letzten Vorlesungswoche finden statt. Sie können diese Übungen als allgemeine Fragestunden zum Stoff nutzen.

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.