Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 9, 2024)

Problem 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

(a) $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 8e^t$.

(b) $\ddot{x}(t) + x(t) = 4t\sin(t) - 2\sin(t)$.

Problem 2. Bestimmen Sie mit Begründung eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die folgende Lösungen besitzt:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 2e^{3t} + \sin(3t), \\ \varphi_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 3e^{-2t} + \sin(3t), \\ \varphi_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{-2t} + 5e^{3t} + \sin(3t). \end{aligned}$$

Problem 3. Sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig auf D und lokal Lipschitz-stetig in x ist. Weiterhin sei $C \geq 0$, sodass

$$\langle f(t, x), x \rangle \leq C|x|_2^2$$

für alle $(t, x) \in D$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne hier das Standardskalarprodukt und $|\cdot|_2$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie: Für das maximale Existenzintervall $I = (t^-, t^+)$ der Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ von (1), gilt $t^+ = +\infty$.

Bemerkung: Eine Möglichkeit diese Aufgabe zu lösen, verwendet folgende Hinweise:

1. Verwenden Sie als Ansatz $y(t) = |x(t)|_2^2$.

2. In dieser Aufgabe können Sie die Separation der Variablen ohne Beweis auch auf Differentialungleichungen der Form $y' \leq f(y)$ anwenden.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

PRÄZENSBLATT

Problem 4. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2x = 2\cos(t).$$

Problem 5. Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_3(t) = t^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Es ist bekannt, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Lösungen einer linearen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind.

Geben Sie die Menge aller Lösungen dieser Differentialgleichung an. Die Differentialgleichung selbst ist dabei nicht zu bestimmen. *(Hinweis: Beachten Sie, dass die Lösungen einer linearen inhomogenen Differentialgleichung einen affinen Unterraum aufspannen, siehe Satz 7.3.)*

Problem 6. Bei zeitunabhängigen linearen Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax$ können wir mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion $\exp(At)$ eine Fundamentalmatrix angeben. Man könnte daher versuchen zu beweisen, dass bei zeitabhängigen linearen Differentialgleichungen $\dot{x} = A(t)x$ die Matrix-Exponentialfunktion

$$\Phi(t) := \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds\right)$$

eine Fundamentalmatrix ist.

Erklären Sie, an welcher Stelle der Beweis schief gehen würde und belegen Sie dies mit einem Gegenbeispiel.