

Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 6

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 2, 2023)

Problem 1. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Für $(E_j) \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ gilt

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, d\mu.$$

(b) Sei nun $X := \mathbb{R}$ und $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq n\} = (-\infty, -n] \cup [n, \infty)$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \int_{A_n} f \, d\mu \right| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt.

Proof. (a) Wir wissen (Satz 2.39), dass $|f|$ integrierbar ist mit Integral $\int |f| \, d\mu < \infty$.

Wir betrachten dann die Funktionfolge

$$f_n = \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} f.$$

f_n konvergiert gegen f , und es gilt $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ für alle x , also die Folge ist durch $|f(x)|$ dominiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_E f_n \, d\mu \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^n \int_{E_j} f \, d\mu \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_{E_j} f \, d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, d\mu. \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

- (b) Es gilt $\left| \int_{A_n} f \, d\mu \right| \leq \int_{A_n} |f| \, d\mu$, also wir müssen es nur für $|f|$ beweisen. Wir betrachten die Funktionfolge $g_n = \chi_{A_n} |f|$. g_n konvergiert gegen 0 für alle x . Außerdem gilt $|g_n| \leq f$ für alle n . Wir verwenden dann den dominierte konvergenz Satz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

Aus dem Definition von Konvergenz einer Folge bekommen wir für jedes $\epsilon > 0$ eine ganze Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_{A_n} |f| \, d\mu < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. □

Problem 2. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein endlicher Maßraum, $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge integrierbare Funktionen, die gleichmäßig gegen ein Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

- (a) Zeigen Sie, dass f integrierbar ist mit

$$\int f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, d\mu.$$

- (b) Zeigen Sie, dass auf Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ im Allgemein nicht verzichtet werden kann.

Proof. (a) f ist messbar (Folgerung 2.25).

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir bezeichnen mit ϵ gleichzeitig eine Zahl und die konstante Funktion $\epsilon(x) = \epsilon \, \forall x \in X$.

ϵ ist integrierbar, weil $\int \epsilon \, d\mu = \epsilon \mu(X) < \infty$. Dann ist $|f| + \epsilon := g$ integrierbar. Weil f_k gleichmäßig konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Das heißt, dass

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + \epsilon.$$

Dann ist die Funktionfolge für alle $n \geq N$ durch g dominiert: $|f_n| \leq g$. Weil nur das Verhalten für n groß wichtig für Konvergenz ist, können wir den Satz von dominierte Konvergenz verwenden, also

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

- (b) Wir betrachten $(1, \infty)$ mit der eingeschränkten Lebesgue σ -Algebra und Maß. Sei ϵ_j eine Folge, $\epsilon_j \in \mathbb{R}$, $\epsilon_j \searrow 0$ und die Funktionfolge

$$f_j(x) = \frac{1}{x^{1+\epsilon_j}}.$$

Die Folge f_j konvergiert gegen $f(x) = 1/x$. Wir zeigen die Eigenschaften:

- (i) Die Funktionfolge konvergiert gleichmäßig.

Wir berechnen den Fehler für beliebiges $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\epsilon}} \\ &= \frac{x^\epsilon - 1}{x^{1+\epsilon}} \\ \frac{d\Delta(x)}{dx} &= -x^{-2} + (1+\epsilon)x^{-(2+\epsilon)} = 0 \\ -1 + (1+\epsilon)x^{-\epsilon} &= 0 \\ x^{-\epsilon} &= \frac{1}{1+\epsilon} \\ x^\epsilon &= 1+\epsilon \\ x &= (1+\epsilon)^{1/\epsilon} \\ \Delta(x) &\leq \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} \\ &= \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{1+1/\epsilon}}, \end{aligned}$$

also der Fehler ist durch eine streng monoton fallende Funktion eingeschränkt, und die Folge konvergiert gleichmäßig.

- (ii) f_j ist integrierbar für alle $j \in \mathbb{N}$.

Dies folgt nicht aus Satz 2.61, weil wir nicht über einem kompakten Intervall integrieren. Wir wissen nur, dass das Riemann-Integral konvergent ist. Sei j fest und definiere

$$f_{j,n} = \chi_{[1,n]} f_j.$$

Dann stimmt das Lebesgue-Integral mit dem Riemann-Integral für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die Funktionfolge ist auch durch f_j dominiert, also

$$\begin{aligned}\int f_j \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{j,n} \, d\mu && \text{dominierte Konvergenz} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} R - \int_1^n f_j(x) \, dx && \text{Satz 2.61} \\ &= R - \int_1^\infty f_j(x) \, dx && \text{Definition}\end{aligned}$$

Weil wir wissen, dass das uneigentliche Riemann-Integral existiert, ist f_j auch integrierbar für alle $j \in \mathbb{N}$.

(iii) Ähnlich haben wir

$$\int \frac{1}{x} \, d\mu = R - \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx.$$

Weil das Riemann-Integral auf der rechten Seite nicht existiert, ist $\frac{1}{x}$ auch nicht Lebesgue-integrierbar. \square

Problem 3. (a) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum mit $\mu(X) > 0$. Zeigen Sie, dass dann eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ existiert mit $f > 0$ auf X und $0 < \int |f| \, d\mu < \infty$.

(b) Geben Sie einen Maßraum an, für den $\mathcal{L}^1(\mu) = \{0\}$ gilt.

Proof. (a) Per Definition gibt es eine Folge $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$, so dass alle A_j endliche Maß haben und $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = X$. Wir definieren $f = \sum_{j=1}^\infty \frac{2^{-j}}{\mu(A_j)} \chi_{A_j}$. Per Definition als eine Reihe von einfachen Funktionen gilt (f ist positiv, also wir müssen kein Betrag schreiben):

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^\infty \frac{2^{-j}}{\mu(A_j)} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}.$$

Die Summe konvergiert und ist endlich.

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$, wobei

$$\mu(X) = \begin{cases} 0 & X = \emptyset \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Sei $f \neq 0$, also es gibt ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x_0)| > 0$. Es gilt $|f| \geq |f(x_0)| \chi_{\{x_0\}}$.

Es gilt auch

$$\int |f(x_0)| \chi_{\{x_0\}} \, d\mu = |f(x_0)| \mu(\{x_0\}) = \infty,$$

also f ist nicht in $\mathcal{L}^1(\mu)$. \square

Problem 4. (a) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$.
Zeigen Sie, dass dann $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$ gilt.

(b) Seien (X, \mathcal{A}) und (Y, \mathcal{B}) messbare Räume und $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar.
Zeigen Sie, dass dann für jedes $x \in X$ die Funktion $f_x(y) := f(x, y)$ \mathcal{B} -messbar ist.

Proof. (a) Es gilt $\mu(A \triangle B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$. Außerdem ist

$$|\mu(A) - \mu(B)| = |\mu(A) + \mu(B) - 2\mu(B)|.$$

Daraus folgt:

□