Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 24, 2024)

Problem 1. Sei $f(t, x(t), \dot{x}(t)) := 3t - 4 + 4\dot{x}(t) - 3x(t)$. Zeigen Sie, dass $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t$ für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ ist. Bestimmen Sie anschließend C_1 und C_2 so, dass $x(0) = x(1) = 1$ gilt.

Proof. Mit

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t$$

ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} + 1 \\ \ddot{x}(t) &= C_1 e^t + 9C_2 e^{3t} \end{aligned}$$

Eingesetzt ist

$$\begin{aligned} &3t - 4 + 4\dot{x}(t) - 3x(t) \\ =&3t - 4 + 4(C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} + 1) - 3(C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t) \\ =&C_1 e^t + 9C_2 e^{3t} = \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

Dann setzen wir $t = 0$ und $t = 1$ ein:

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_2 = 1 \\ x(1) &= C_1 e + C_2 e^2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungsystem mit Unbekannten C_1 und C_2. Die Lösung ist einfach

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{e}{e-1}, \\ C_2 &= \frac{1}{1-e}. \end{aligned}$$

□

Problem 2. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(a) $\dot{x}(t) = tx^2(t), \qquad x(1) = 1.$

(b) $\dot{x}(t) = t(1 + x^2(t)), \qquad x(0) = 1.$

(c) $\dot{x} = \frac{\sin(t)}{x+1}, \qquad x(0) = 1.$

Proof. Wir benutzen die Schreibweise aus Abschnitt 2.1 des Skripts: Die DGL

$$\dot{x} = g(x)h(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

hat Losung

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}r}{h(r)} = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{1}$$

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Gl. (1) ergibt

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

und

$$x(t) = \frac{2}{3 - t^2}.$$

Der Definitionsbereich ist $t \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 + x^2,\ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Gl. (1) liefert

$$\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(1) = \frac{t^2}{2}$$

und

$$x(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Da $g(x) \neq 0$, muss $-1 < x < 1$ und der Definitionsbereich ist dadurch beschränkt.

(c) $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}, h = \sin$. Gl. (1) liefert

$$\frac{r^2}{2} + r\Big|_{r=x_0}^{r=x(t)} = -\cos(s)|_0^t\,.$$

Damit ist

$$\frac{x(t)^2}{2} + x(t) - \frac{3}{2} = -\cos t + 1.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit Lösung

$$x(t) = -1 \pm \sqrt{1 - 2\left(\cos t - \frac{5}{2}\right)}$$

$$= -1 \pm \sqrt{6 - 2\cos t}$$

Da $x(0) = 1$, ist die Lösung die + Lösung der quadratischen Gleichung, und

$$x(t) = -1 + \sqrt{6 - 2\cos t}. \qquad \square$$

Problem 3. Untersuchen Sie, für welchen Anfangswert $x(1) = C$ die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = e^t(x(t))^2$ eine Lösung hat und berechnen Sie diese.

Proof. Wie in Aufgabe 2 verwenden wir Gl. (1) mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^2$. Die (formelle) Lösung ist

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{C} = e^t - e$$

und

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{C} + e - e^t}.$$

Offensichtlich brauchen wir $C \neq 0$ für diese Lösung. Falls $C = 0$, ist $x(t) = 0$ die Lösung. $\square$

Problem 4. Die Abnahme der Lichtintensität I mit zunehmender Meerestiefe erfolgt nach dem Gesetz

$$I'(x) = -\mu I(x),$$

wobei x die Meerestiefe in Meter angibt. Berechnen Sie, in welcher Tiefe die Oberflächenintensität auf

(a) 50%

(b) 20%

gefallen ist, wenn der Absorptionskoeffizient $\mu = 2,5\ \mathrm{m}^{-1}$ beträgt.

Proof. Die Lösung ergibt sich analog wie Aufgabe 2 und lautet

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x},$$

wobei I_0 die Oberflächenintensität ist. Wir suchen x, sodass $I(x) = \eta I_0$. Das heißt:

$$\begin{aligned} \eta \cancel{I_0} &= \cancel{I_0} e^{-\mu x} \\ \ln \eta &= -\mu x \\ x &= -\frac{1}{\mu} \ln \eta \end{aligned}$$

Dann setzen wir $\eta = 0.5$ und $\eta = 0.2$ ein und erhalten

(a) $x \approx 0.277$ m

(b) $x \approx 0.161$ m. $\square$

Problem 5. Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\dddot{x} - 4\ddot{x} - \dot{x} - 3x - 9\ddot{y} - 5\dot{y} - y = 0$$
$$\dddot{y} - 8\ddot{y} - \ddot{x} - 8\dot{x} + 6\dot{y} + 7\ddot{x} + 8\ddot{y} + 9y - 9x = 0$$

Proof. Wir formen die Gleichungen um

$$\dddot{x} = 4\ddot{x} + 9\ddot{y} + \dot{x} + 5\dot{y} + 3x + y$$
$$\dddot{y} = -6\ddot{x} - 8\ddot{y} + 8\dot{x} - 6\dot{y} + 9x - 9y$$

und definieren $z = (\ddot{x}, \ddot{y}, \dot{x}, \dot{y}, x, y)^T$. Damit ist $\dot{z} = (\dddot{x}, \dddot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}, \dot{x}, \dot{y})^T$ und

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dddot{x} \\ \dddot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ -6 & -8 & 8 & -6 & 9 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$ $\square$