Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 4, 2024)

Problem 1. (a) Eine Riccati-Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2, \tag{1}$$

wobei $a, b, c : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ offen, stetige Funktionen sind. Zeigen Sie:

Kennt man eine Lösung $\varphi(t)$ von (1), so kann man (1) mit der Transformation $y = x - \varphi(t)$ in eine Bernoullische Differentialgleichung umwandeln.

(b) Kreuzen Sie bei der folgenden Tabelle an, welche Differentialgleichungen linear, nicht linear, homogen, inhomogen, bernoullisch oder riccatisch sind.

DGL	linear	nichtlinear	homogen	inhomogen	bernoullisch	riccatisch
$\sin(4t)x + 3\dot{x} + \sqrt{t} = 0$						
$t\dot{x} - 2x + 2tx^2 = 0$						
$\dot{x} - 2e^{2t}x + 3x^2 = 1 + e^{2t}$						
$\dot{x} + 3x = 0$						
$\dot{x} + 2x - tx^4 = 0$						

Proof. (a) Es gilt

$$x = y + \varphi(t)$$
$$\dot{x} = \dot{y} + \dot{\varphi}(t).$$

Daher ist nach Einsetzen

$$\dot{y} + \varphi'(t) = a(t) + b(t)(y + \varphi(t)) + c(t)(y^2 + 2y\varphi(t) + \varphi(t)^2)$$
$$\dot{y} + \varphi'(t) = a(t) + b(t)y + b(t)\varphi(t) + c(t)y^2 + 2y\varphi(t) + c(t)\varphi(t)^2$$
$$\dot{y} = [b(t) + 2\varphi(t)]y + c(t)y^2$$

wobei wir die blauen Terme kürzen dürfen, da φ bekanntermaßen eine Lösung der DGL ist. Die Gleichung am Ende ist offensichtlich eine bernoullische DGL.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b)

DGL	linear	nichtlinear	homogen	inhomogen	bernoullisch	riccatisch
$\sin(4t)x + 3\dot{x} + \sqrt{t} = 0$	$\times$			$\times$		$\times$
$t\dot{x} - 2x + 2tx^2 = 0$		$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
$\dot{x} - 2e^{2t}x + 3x^2 = 1 + e^{2t}$		$\times$		$\times$		$\times$
$\dot{x} + 3x = 0$	$\times$			$\times$	$\times$	$\times$
$\dot{x} + 2x - tx^4 = 0$		$\times$		$\times$	$\times$	

$\square$

Problem 2. In der Literatur findet man den *Potenzreihenansatz* zur Lösung von Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen. Um die Vorgehensweise dieses Ansatzes zu verstehen, betrachten wir die Differentialgleichung des Federpendels

$$m\ddot{x} + Dx = 0, \tag{2}$$

wobei $m > 0$ (Masse) und $D > 0$ (Federkonstante) gilt.

(a) Ermitteln Sie mit dem Ansatz

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \; a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

durch gliedweises Differenzieren, Einsetzen in (2) und Koeffizientenvergleich eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten a_n.

(b) Leiten Sie mit Hilfe der Rekursionsgleichung aus Teil (a)

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{D}{m}\right)^k t^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{D}{m}\right)^k t^{2k+1}$$

her.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\varphi(t) = a_0 \cos \omega t + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega t, \; \omega := \sqrt{\frac{D}{M}}$$

gilt.

(d) Lösen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes das Anfangswertproblem

$$\dot{x} + x = 0, \qquad x(0) = x_0.$$

(Hinweis: Falls Sie Probleme haben die entstehende Potenzreihe zu erkennen, dann lösen Sie für sich die Differentialgleichung mit dem Ansatz der Variation der Konstanten und vergleichen Sie Ihre Lösung mit der Potenzreihe.)

Proof. (a) Da Potenzreihen gleichmäßig konvergieren, ist

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2} t^n\end{aligned}$$

Setzt man diesen Ansatz in (2) ein, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} [m(n+2)(n+1)a_{n+2} + Da_n] = 0.$$

Daher bekommt man zwei Folgen $(a_n)_{n \text{ gerade}}$ und $(a_n)_{n \text{ ungerade}}$. Die Lösungen sind:

□

Problem 3. Sei $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = |x|^a, \qquad x(0) = 0$$

genau im Fall $a \geq 1$ eine eindeutige Lösung für $t \geq 0$ besitzt.