Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 15, 2025)

Problem 1. In einem Wassertank befinden sich 10 Liter Wasser, mit einem Zulauf- und Ablaufrohr. Durch das Zulaufrohr kommt Wasser mit 2 Liter pro Minute in den Wassertank. Beim Ablaufrohr fließt die gleiche Menge ab. Weiterhin zirkuliert das Wasser im Wassertank permanent.

Zur Zeit $t_0 = 0$ ist nur reines Wasser im Wassertank. Nun wird ab $t_0 = 0$ bei dem Zulaufrohr Salz mit 0,3 Kilogramm pro Liter hinzugefügt (das Salz ist bereits im Wasser gelöst). Im Wassertank vermischen sich durch die Zirkulation Wasser und Salz gleichmäßig, das heißt wir gehen immer davon aus, dass das Salz im Wassertank gleichmäßig verteilt ist. Im Folgenden sei $x(t)$ der Salzgehalt (in Kilogramm) im Wassertank zum Zeitpunkt t (in Minuten).

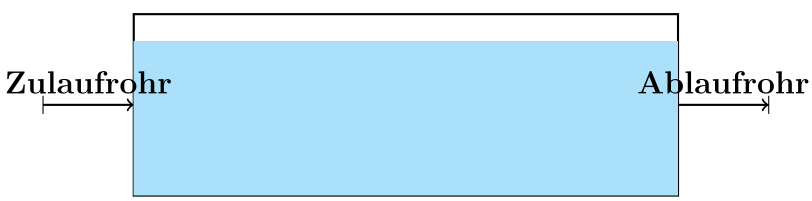

Abbildung 1: Wassertank mit Zulauf- und Ablaufrohr

(a) Leiten Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ her, die die Änderung des Salzgehalts im Wassertank beschreibt.

(b) Bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung des Salzgehalts $x(t)$ im Wassertank.

(c) Geben Sie den Salzgehalt im Wassertank nach 5 Minuten an.

(d) Bestimmen Sie den Salzgehalt im Wassertank, der sich auf lange Zeit einstellen würde.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Proof. (a) Sei x das Salzgehalt im Wassertank. In einem kleinen Zeitintervall $\mathrm{d}t$ kann man sich vorstellen, dass $2/10 \cdot x\,\mathrm{d}t$ Salz das Wassertank verlässt, da das Salz gleichmäßig verteilt ist.

Gleichzeitig wird $(2\,\mathrm{d}t) \cdot 0.3$ Salz durch das Zulaufrohr reingebracht. Damit ist

$$\mathrm{d}x = 0.6\,\mathrm{d}t - 0.2x\,\mathrm{d}t$$

oder

$$\dot{x} = 0.6 - 0.2x.$$

(b) Der Anfangswert ist $x = 0$. Wir lösen die DGL durch TDV

$$\int_0^x \frac{1}{0.6 - 0.2s}\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{d}t$$

mit Lösung

$$x = 3(1 - e^{-0.2t}).$$

(c) 1.90 kg/L.

(d) $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 3$ kg/L.

□

Problem 2. Es sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ eine von Null verschiedene Lösung von

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_1^3\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|\varphi(t)\|$ nie 0 werden kann und streng monoton fallend ist.

(b) Zeigen Sie, dass I nach rechts unbeschränkt ist und $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

Proof. (a) $\|\varphi(t)\| = 0$ nur wenn $x_1 = x_2 = 0$. Aber man sieht, dass $x_1(t) = x_2(t) = 0$ eine Lösung der DGL mit Anfangswert $(0, 0)$ ist. Weil die rechte Seite nach x_1 und x_2 stetig differenzierbar ist, ist sie lokal lipschit Stetig und die Lösung ist lokal eindeutig, was ein Widerspruch wäre, wenn $\|\varphi(t)\|$ 0 wird.

Wir betrachten $\|\varphi(t)\|^2$. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi(t)\|^2 = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$
\begin{aligned}
&= 2x_1(-x_1 + x_2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1 - x_2 - x_2^3) \\
&= -2(x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_2^4) \\
&< 0
\end{aligned}
$$

(strikt kleiner als 0, weil $\|\varphi(t)\| \neq 0$.)

(b) Sei $\|\varphi(0)\| = R$. Dann ist $\phi(t) \in \overline{B_r(0)}$ für all $t \in I$. Wenn I nach rechts beschränkt wäre mit $\sup_{x \in I} x = b < \infty$, wäre $\lim_{t \to b}(t, \varphi(t)) = (t, \phi)$ mit $\phi \in \overline{B_r(0)}$, da $\overline{B_r(0)}$ abgeschlossen und damit vollständig ist. Die Lösung wäre dann fortsetztbar.

Es gilt

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi(t)\|^2 = 2\|\varphi(t)\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi(t)\| = -2(x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_2^4) \leq -2\|\varphi(t)\|^2
$$

oder

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi(t)\| \leq -\|\varphi(t)\|.
$$

Nach der Gronwallsche Ungleichung ist damit $\|\varphi(t)\| \to 0$.

$\square$

Problem 3. (a) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein A-invarianter Unterraum (über $\mathbb{R}$) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (das heißt, es gilt $Ax \in U$ für alle $x \in U$). Zeigen Sie, dass U invariant bezüglich des linearen Systems

$$
\dot{x} = Ax
$$

ist. Das heißt jede Lösung von (3) mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0 \in U$ nimmt nur Werte aus U an.

(b) Nun sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Sei $y \in \mathbb{R}^n$ eine Ruhelage von

$$
\dot{x} = f(x),
$$

wobei (4) nicht als lineares System vorausgesetzt ist. Wir definieren den Attraktionsbereich $\mathcal{E}(y)$ durch die Menge aller Punkte x_0 mit der Eigenschaft, dass die Lösung $\varphi(\cdot; x_0)$ von (4) mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ auf $I \supseteq [0, \infty)$ existiert und $\lim_{t \to \infty} \varphi(t; x_0) = y$ gilt. Wir fordern, dass es eine solche Umgebung U von y gibt, dass $U \subset \mathcal{E}(y)$ gilt. Zeigen Sie:

Die Menge $\mathcal{E}(y)$ ist invariant bezüglich (4), d. h. für alle $x_0 \in \mathcal{E}(y)$ und $t \in I$ gilt $\varphi(t; x_0) \in \mathcal{E}(y)$.

Proof. (a) Die Propagator ist $\exp(At)$, was U offensichtlich invariant lässt.

(b) Angenommen es gäbe $x' \in \mathcal{E}(y)$ und $t' \in I$ mit $\varphi(t', x') = x^* \notin \mathcal{E}(y)$. Dann wäre $\varphi(t + t', x')$ eine Lösung der DGL mit Anfangswert x^*. Wir wissen aber, dass

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t, x') = \lim_{t\to\infty} \phi(t + t', x') = \lim_{t\to\infty} \phi(t, x^*) = y,$$

oder $x^* \in \mathcal{E}(y)$, ein Widerspruch. $\square$