Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 20, 2023)

Problem 1. Es seien V, W zwei nicht notwendigerweise endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Wir definieren eine lineare Abbildung $\Phi : V \to \operatorname{im}(\Phi) \subseteq W$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes Komplement U von $\ker(\Phi)$, d.h. $V = \ker(\Phi) \oplus U$, ist

$$\Phi|_U : U \to \operatorname{im}(\Phi)$$

ein Isomorphismus.

(b) Sei g eine Funktion der Art

$$g : \operatorname{im}(\Phi) \to V, b \to x$$

für ein ausgewähltes x, sodass $\Phi(x) = b$ und sei g linear, dann gilt

$$V = \ker(\Phi) \oplus g(\operatorname{im}(\Phi)).$$

Proof. (a) Es ist ein Homomorphismus, weil es linear ist. Wir müssen nur zeigen, dass es bijektiv ist.

Es ist injektiv. Nehmen wir an, dass es nicht injektiv ist. Es gibt dann zwei unterschiedliche Vektoren $v, u \in U$, sodass $\Phi(v) = \Phi(u)$. Es gilt dann

$$\Phi(\underbrace{v-u}_{\in U}) = \Phi(v) - \Phi(u) = 0,$$

also $v - u \in \ker(\Phi)$. Wir wissen jedoch, dass $v - u \neq 0$, ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass U ein Komplement von $\ker(\Phi)$ ist.

Es ist surjektiv. Für jedes $0 \neq v \in \operatorname{im}(\Phi)$ gibt es ein Vektor $u \in V$, sodass $v = \Phi(u)$ (Definition des Bilds). Wenn $v \neq 0$, kann u nicht in $\ker(\Phi)$ sein. Also wir schreiben $u = u_1 + u_2$, wobei $u_1 \in \ker(\Phi)$ und $u_2 \in U$. Es gilt

$$v = \Phi(u_1) + \Phi(u_2) = 0 + \Phi(u_2) = \Phi(u_2),$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

also für jedes $\mathrm{im}(\Phi) \ni v \neq 0$ gibt es ein Vektor $u_2 \in U$, sodass $\Phi(u_2) = v$, also $\Phi|_U$ ist surjektiv.

Schluss: $\Phi|_U$ ist ein Isomorphismus.

(b) Wir brauchen $x \neq 0$. Sei B ein Basis

$$B = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{Basis für }\ker(\Phi)}, \underbrace{x, v_{k+2}, \dots, v_n}_{\text{Basis für } U} \}.$$

Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to R^2, (x,y,z)^T \to (x,y,0)$. Sei dann $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \to (x,0,y)$

□

Problem 2. Es sei A, B, C, D Matrizen über $\mathbb{K}$ in den Dimensionen $m \times m, m \times n, n \times m, n \times n$.

(a) Zeigen Sie: ist A invertierbar, dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

(b) Beweisen Sie die Gleichheit

$$\det(1_m + BC) = \det(1_n + CB).$$

Proof. (a) Wir beweisen zuerst eine ähnliche Ergebniss zu die diagonale Matrizen: Wenn $B = 0$ und $C = 0$, ist

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

□

Problem 3. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ \frac{3}{2}t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie alle $t \in \mathbb{R}$ für welche das Volumen des durch $v_1, v_2, v_3(t)$ aufgespannten Spat verschwindet. Für welche $t \in [1,4]$ wird das Volumen maximal.

Problem 4. Es gilt $v_1 \times v_2 = (1, 2, -5)^T$ und

$$v_3(t) \cdot (v_1 \times v_2) = t^3 + 3t - 5t^2 = t(t^2 - 5t + 3).$$

Die Nullstellen des Polynoms $t^2 - 5t + 3$ sind $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{13})$, also das Volumen verschwindet für $t = 0$ oder $t = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{13})$.

Wir berechnen die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^3 - 5t^2 + 3t\right) = 3t^2 - 10t + 3.$$

Die Ableitung ist 0 genau dann, wenn $t = 3^{\pm 1}$. Die zweite Ableitung ist:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(t^3 - 5t^2 + 3t\right) = 6t - 10.$$

was < 0 ist, wenn $t = \frac{1}{3}$ und > 0 ist, wenn $t = 3$, also $t = \frac{1}{3}$ ist ein lokales Maximum. Wir betrachten dann zudem die Grenzpunkte

Problem 5. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

(a) $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

und $a \neq 0$

Wenden Sie möglichst geschickt 2(a) an.

(b) $A \in \mathbb{K}^{(n+1) \times (n+1)}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & t & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_n \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen die Entwicklungsformel nach Laplace verwenden.

(c) $V_{ij}, R_{i\lambda}, S_{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ aus den Lemmata 5.56 - 5.58.

Proof. (a) Wir bezeichnen die $n \times n$ solche Matriz als A_n und deren Determinante als $\Delta_n(a,b)$. Per Hinweis definieren wir $A = (a), B = (b, b, \ldots, b), C = B^T, D = M_{n-1}$. Falls $a \neq 0$ ist A invertierbar mit inverse $A^{-1} = (1/a)$.

Es gilt außerdem

$$CA^{-1}B = \begin{pmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b & \ldots & b \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} b^2 & b^2 & \ldots & b^2 \\ b^2 & b^2 & \ldots & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^2 & b^2 & \ldots & b^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\Delta_n(a,b) = a\Delta_n \left(a - \frac{b^2}{a}, b - \frac{b^2}{a} \right), \qquad n > 2.$$

Für $n = 2$ ist $\Delta_n(a,b) = a^2 - b^2$.

□