Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 6

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 7, 2024)

Problem 1. Die Fibonacci-Folge ist definiert durch $f_0 := 0, f_1 := 1 und f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Proof. Per Definition gilt

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Dann beweisen wir die Behauptung per Induktion. Weil $M^0 = E_2$ für alle 2x2 Matrizen, gilt die Behauptung für $n = 0$. Jetzt nehmen wir an, dass es für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. □

Problem 2. Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit $A^m = 0$. Zeigen Sie: Dann gilt $(E_n - A)(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) = E_n$.

Proof. Es gilt

$$(E_n - A)(E_n + A + \cdots + A^{m-1}) = E_n + A + \cdots + A^{m-1}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{aligned}
&- A - A^2 - \cdots - \cancelto{0}{A^m} \\
=&E_n.
\end{aligned}
$$
□

Problem 3. Entscheiden Sie jeweils, ob es eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, die die gegebenen Eigenschaften erfüllt. Entscheiden Sie zudem, ob diese eindeutig ist. Falls es genau eine solche Abbildung gibt, skizzieren Sie das Bild des Quadrates mit den Eckpunkten $P = (0,0), Q = (1,0), R = (1,1), S = (0,1)$ unter dieser Abbildung in einem geeigneten Koordinatensystem. Sie müssen Ihre Skizze nicht begründen.

(a) fro mit $fro((1,0)) = (1,0)$ und $fro((0,1)) = (1,1)$.

(b) pa mit $pa((3,6)) = (1,1), pa((4,7)) = (3,4)$ und $pa((7,13)) = (9,3/4)$.

(c) $hewe$ mit $hewe((1,3)) = (2,6), hewe((2,3)) = (8,12)$ und $hewe((3,6)) = (10,18)$.

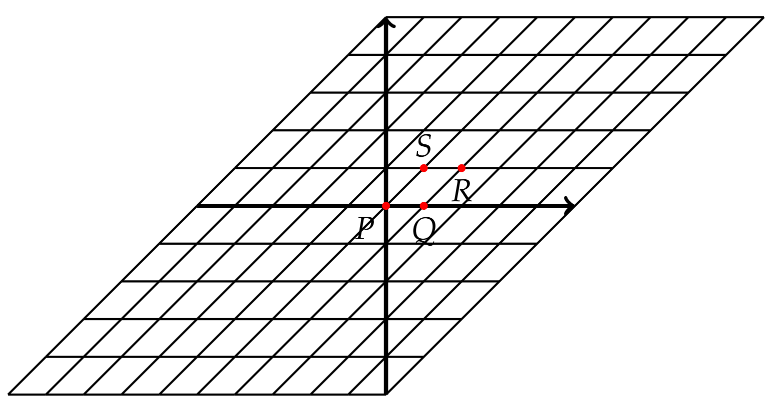
(d) ihn mit $ihn((2,4)) = (6,16)$ und $ihn((-1,2)) = (-3,4)$.

(e) un mit $un((2,3)) = (3,4)$ und $un((4,6)) = (6,8)$.

(f) ach mit $ach((1,0)) = (1,0)$ und $ach(3/5,-1/5) = (12/25,-4/25)$.

(g) ten mit $ten((2,4)) = (1,2)$ und $ten((1,1)) = (2,4)$

Proof. (a) Es existiert und ist eindeutig.

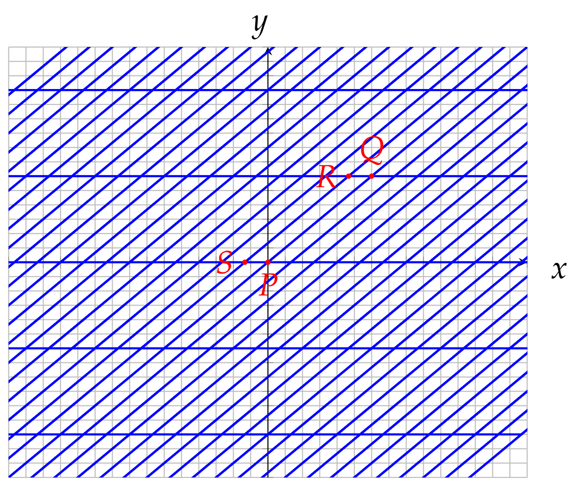


(b) Existiert nicht, weil

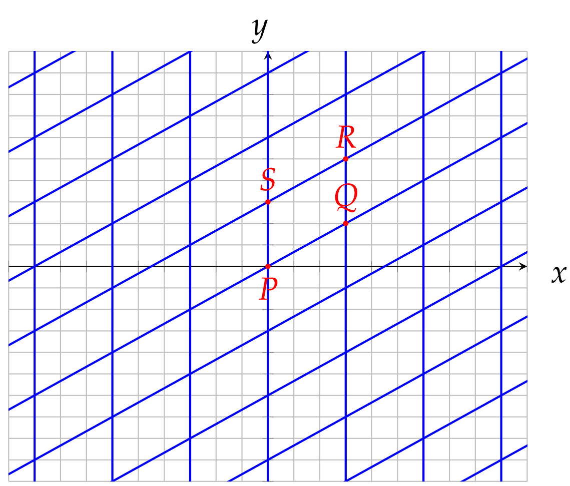
$$
\begin{aligned}
pa((3,6)) =&(1,1) \\
pa((4,7)) =&(3,4)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} pa((3,6)+(4,7)) &= pa((7,13)) \\ &= (9,3/4) \\ &\neq (1,1)+(3,4) \\ &= pa((3,6)) + pa((4,7)) \end{aligned}$$

(c) Existiert und ist eindeutig

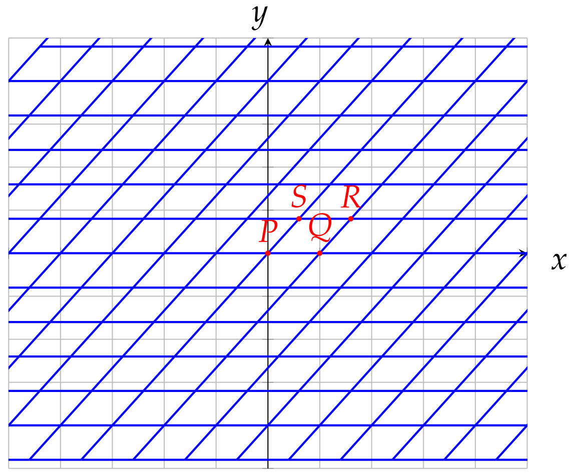


(d) Existiert und ist eindeutig.

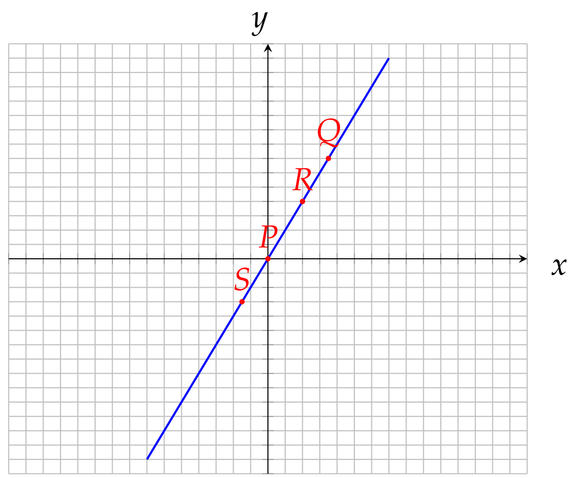


(e) Existiert, ist aber nicht eindeutig, weil die Wirkung auf einem 1-Dimensionale Unterraum definiert ist.

(f) Existiert und ist eindeutig.



(g) Existiert und ist eindeutig



□

Problem 4. Für einen Körper K und zwei quadratische, gleich große Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ definieren wir den Kommutator $[A, B]$ von A und B als $[A, B] := AB - BA \in K^{n\times n}$.

(a) Berechnen Sie $[A, B]$ für $K = \mathbb{R}$, $n = 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie ein Beispiel für $A \neq B$ mit $[A, B] = 0$, wobei A und B keine skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix sein sollen.

Es definiert also $[\cdot,\cdot] : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K^{n\times n}$ eine Verknüpfung auf $K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(c) Die Verknüpfung hat für kein $n \in \mathbb{N}$ ein Linksneutrales, d.h. es existiert für kein $E \in K^{n\times n}$ mit $[E, A] = A$ für alle $A \in K^{n\times n}$.

(d) Zeigen Sie für die Matrizen A, B aus Teilaufgabe (a) $[[A, B], B] \neq 0$ und folgern Sie: Die Verknüpfung $[\cdot,\cdot]$ ist für $n = 3$ nicht assoziativ.

Proof. (a) Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 8 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$
$$[A, B] = \begin{pmatrix} 10 & 9 & -14 \\ 5 & 4 & -8 \\ 8 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

(b) Irgendeine skalare Vielfache gilt: Wenn $A = kB$, ist $AB = kB^2 = BA$ und $AB - BA = 0$. Ein konkretes Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $A = E_n$. Für alle Matrizen $E \in K^{n\times n}$ gilt:

$$\begin{aligned}[E, E_n] &= EE_n - E_nE \\ &= E - E = 0 \neq E_n\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$[A, B]B = \begin{pmatrix} 11 & -14 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \\ 2 & -22 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B[A,B] = \begin{pmatrix} 35 & 31 & -50 \\ 20 & 17 & -30 \\ 35 & 30 & -52 \end{pmatrix}$$

Jetzt ist es klar, dass $[[A,B],B] \neq 0$, weil die Matrizen ungleich sind.

Aber $[A,[B,B]] = 0$, weil $[B,B] = B^2 - B^2 = 0$. $\square$

Problem 5. Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^m$, dann nennen wir

$$P(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n | \forall i \in \{1, \dots, n\} : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

das von $v_1, ., v_n$ aufgespannte n-Parallelotop.

(a) Zeigen Sie: Jedes Rechteck $[0,a] \times [0,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ ist ein 2-Parallelotop und jeder Quader $[0,a] \times [0,b] \times [0,c] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ ist ein 3-Parallelotop.

(b) Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

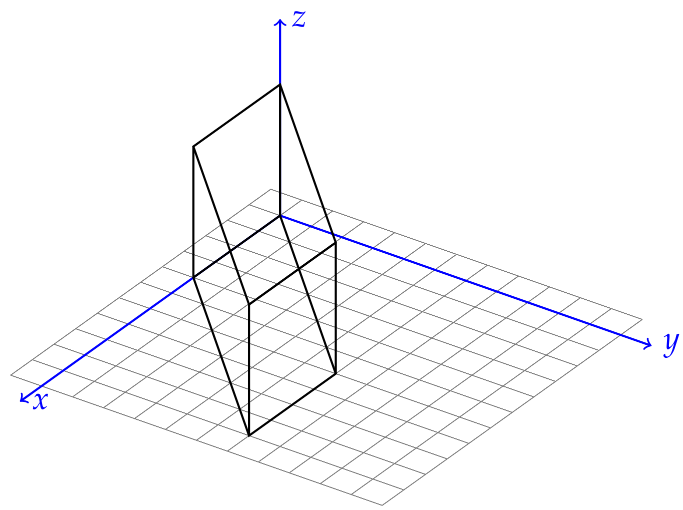
Skizzieren Sie $L([0,2] \times [0,3] \times [0,1])$ in einem geeigneten Koordinatensystem. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

(c) Zeigen Sie: Ist $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine bijektive lineare Abbildung und $P(v_1, \dots, v_n)$ ein n-Parallelotop, dann ist $\phi(P(v_1, \dots, v_n)) = P(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))$ und dies ist ein n-Parallelotop.

(d) Es sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $p(x,y,z) = (x,y)$. Bestimmen und skizzieren Sie $p(P((1,0,0),(0,1,0),(2,2,1)))$. Begründen Sie, dass dies kein Parallelotop ist.

Proof. (a) Per Definition ist $[0,1] \times [0,1] = P((a,0),(0,1))$ und $[0,a] \times [0,b] \times [0,c] = P((a,0,0),(0,b,0),(0,0,c))$.

(b)



(c) Es gilt wegen Linearität

$$\phi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \phi(v_1) + \cdots + \lambda_n \phi(v_n),$$

also

$$\phi(P(v_1, \ldots v_n)) = P(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)).$$

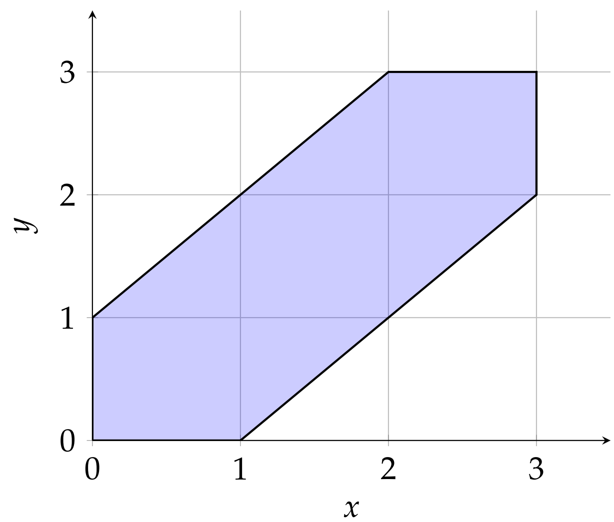
Es bleibt linear Unabhängigkeit zu zeigen. Per Definition müssen $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sein. Alle $v_1, \ldots, v_n$ sind unterschiedlich und ungleich null, weil ϕ bijektiv (insbesondere injektiv) ist. Falls $\phi(v_1), \ldots \phi(v_n)$ linear abhängig wäre, wäre

$$\begin{aligned} 0 =& a_1 \phi(v_1) + \cdots + a_n \phi(v_n) \\ =& \phi(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) && \text{Linearität} \end{aligned}$$

Weil ϕ bijektiv ist, ist deren Kern trivial und $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, was nur möglich ist, wenn $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0$. Daraus folgt: $\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)$ sind linear unabhängig und die Behauptung folgt.

(d) Sei $v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 0),\ v_3 = (2, 2, 1)$. Weil p linear ist, ist

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_3 v_3) =& \lambda_1 p(v_1) + \cdots + \lambda_3 p(v_3) \\ =& \lambda_1 (1, 0) + \lambda_2 (0, 1) + \lambda_3 (2, 2) \end{aligned}$$



Es ist klar, dass die Menge entweder ein 1 oder 2-Parallelotop sein kann, weil es keine 3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ gibt. Ein 1-Parallelotop ist eine Teilmenge $P(v) \subseteq \operatorname{span} v$, also die Menge ist kein 1-Parallelotop.

Dann muss es ein 2-Parallelotop sein. Aber das ist auch unmöglich, weil 2-Parallelotops Dreiecke sind, also die Menge ist kein Parallelotop. $\square$

Problem 6. Es sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Wir betrachten den Vektorraum $V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$.

(a) Zeigen Sie: Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, dann wird für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ durch $b_i^*(b_j) := \delta_{ij}$ für $j = 1, \ldots, n$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung festgelegt.

(b) Zeigen Sie: $(b_1^*, \ldots b_n^*)$ ist ein Erzeugendensystem von V^*,

(c) Zeigen Sie: $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ ist linear unabhängig.

Sei W ein weiterer endlich dimensionaler Vektoraum mit Basis $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ und $L : V \to W$ linear.

(d) Zeigen Sie: Die Abbildung $L^* : W^* \to V^*$ mit $\omega \to \omega \circ L$ ist linear.

(e) Die Abbildung L habe bezglich der Basen $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ die Darstellungsmatrix A. Zeigen Sie, dass L^* bezüglich der Basen $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$ und $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ die Darstellungsmatrix A^T hat.

Proof. (a) Die Wirkung auf einem Vektor ist eindeutig bestimmt. Sei $v \in V$ mit Basisdarstellung $v = v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} b_i^*(v) &= b_i^*(v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n) \\ &= v_1 b_i^*(b_1) + \cdots + v_n b_i^*(b_n) && \text{Linearität} \\ &= v_i \end{aligned}$$

(b) Sei $v^* \in V^*$, also eine lineare Abbildung $V \to K$.

Wir setzen $a_i = v^*(b_i) \in K$. Das Ziel ist:

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*.$$

Sei $V \ni v = v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*\right)(v) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{n} v_j b_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i v_j b_i^*(b_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i v_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i v^*(b_i) \\ &= v^*\left(\sum_{i=1}^{n} v_i b_i\right) \\ &= v^*(v). \end{aligned}$$

Weil v beliebig war, ist $v^* \in \operatorname{span}(b_1^*, \ldots, b_n^*)$. Weil v^* beliebig war, ist es ein Erzeugendensystem.

(c) Sei $\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^* = 0$. Wir wenden die Gleichung auf einem Basisvektor b_i an. Die rechte Seite ist natürlich 0. Die linke Seite ist

$$(\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \lambda_i = 0.$$

Daraus folgt: $\lambda_i = 0$ für alle i.

(d) Sei $k \in K$, $\omega \in W^*$ und $v \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}(L^*(a\omega))v =& a\omega(L(v))\\ =& a(\omega(L(v)))\\ =& a(L^*(\omega)(v))\end{aligned}$$

Weil v beliebig war, ist

$$L^*(a\omega) = aL^*(\omega).$$

Sei jetzt $\omega_1, \omega_2 \in W^*$. Es gilt

$$\begin{aligned}L^*(\omega_1 + \omega_2)(v) =& (\omega_1 + \omega_2)(L(v))\\ =& \omega_1(L(v)) + \omega_2(L(v))\\ =& (L^*(\omega_1) + L^*(\omega_2))(v)\end{aligned}$$

also

$$L^*(\omega_1 + \omega_2) = L^*(\omega_1) + L^*(\omega_2).$$

(e) Es gilt $L^*(\beta_i^*) = \beta_i^* \circ L$. Wir möchten diese als linear Kombination von b_j^* darstellen. Sei die Matrixdarstellung von L^* B, also

$$\beta_i^* \circ L = \sum_{j=1}^{n} B_{ji} b_j^*.$$

Wir wenden die Gleichung auf b_k an und erhalten, weil $b_j^*(b_k) = \delta_{jk}$

$$\beta_i^*(L(b_k)) = B_{ki}.$$

Aus der Matrixdarstellung erhalten wir $L(b_k) = \sum_{i=1}^{m} A_{ik}\beta_i$. Daraus folgt:

$$\beta_i^* \left(\sum_{j=1}^{m} A_{jk}\beta_j \right) = A_{ik} = B_{ki}.$$

Weil für die Komponente der Matrizen A und B gilt $A_{ik} = B_{ki}$, ist $B = A^T$.

□