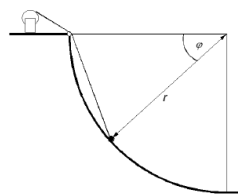


Aufgabe 4.2: Abseilen (4 Punkte)

Eine Masse wird auf einer Viertelkreisbahn (Radius r) an einem Seil herabgelassen (siehe Skizze). Das Seil wird von einer Winde (Radius R) mit konstanter Drehzahl (n -Umdrehungen pro Zeit) abgewickelt.



- (1 P) a) Bestimmen Sie die Länge des Seils innerhalb der Viertelkreisbahn als Funktion des Winkels φ .
- (1 P) b) Bestimmen Sie die zeitliche Änderung des Winkels $\dot{\varphi}(\varphi)$. Nutzen Sie dazu die zeitliche Änderung der Länge des Seils.
- (2 P) c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(\varphi)$ der Masse und daraus die Beschleunigung $\vec{a}(\varphi)$. Identifizieren Sie die Normalkomponente a_n und die Tangentialkomponente a_t . Verwenden Sie ein geeignetes Koordinatensystem.

a)

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_f(t) = -r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_f = \begin{pmatrix} r \cos \varphi - r \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Länge des Seils: $l(\varphi) = |\vec{r}_i - \vec{r}_f|$

$$= \left[(r \cos \varphi - r)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \right]^{1/2}$$

$$= \left[r^2 - 2r^2 \cos \varphi + r^2 \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} r \sqrt{1 - \cos \varphi}$$

b)

$$\dot{l} = \frac{d}{dt} \left[\sqrt{2} r \sqrt{1 - \cos \varphi} \right]$$

$$= \sqrt{2} r (1 - \cos \varphi)^{-1/2} \left(\frac{1}{2} \right) (\sin \varphi) (\dot{\varphi})$$

$$= \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi}} \dot{\varphi}$$

Es gilt auch

$$\dot{l} = 2\pi R n$$

also

$$2\pi R n = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi}} \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\sqrt{2} \pi R n \sqrt{1 - \cos \varphi}}{r \sin \varphi}$$

c) Koordinatensystem in (a) gezeichnet.

$$\vec{r}(t) = -r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pi R_n \sqrt{1-\cos \varphi}}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{2\sqrt{2} \pi R_n \sqrt{1-\cos \varphi}}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \ddot{\varphi} + \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \left[\frac{2\sqrt{2} \pi R_n \sqrt{1-\cos \varphi}}{\sin \varphi} \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pi R_n \sqrt{1-\cos \varphi}}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \ddot{\varphi} + 2\sqrt{2} \pi R_n \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \left\{ \frac{\frac{\sin \varphi}{2\sqrt{1-\cos \varphi}} \sin \varphi - \sqrt{1-\cos \varphi} \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right\} \dot{\varphi}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pi R_n \sqrt{1-\cos \varphi}}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \ddot{\varphi} + 2\sqrt{2} \pi R_n \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{1-\cos \varphi}} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \sqrt{1-\cos \varphi} \right\} \dot{\varphi}$$

weil $\hat{e}_r \parallel \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ und $\hat{e}_\varphi \parallel \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$, sind die Komponenten klar!

$$a_n = \frac{2\sqrt{2} \pi R_n \sqrt{1-\cos \varphi}}{\sin \varphi} \frac{2\sqrt{2} \pi R_n \sqrt{1-\cos \varphi}}{r \sin \varphi}$$

$$= \frac{8 \pi^2 R^2 n^2}{r \sin^2 \varphi} (1-\cos \varphi)$$

$$a_\varphi = 2\sqrt{2} \pi R_n \left\{ \frac{1}{2\sqrt{1-\cos \varphi}} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \sqrt{1-\cos \varphi} \right\} \frac{2\sqrt{2} \pi R_n \sqrt{1-\cos \varphi}}{r \sin \varphi}$$

$$= \frac{8 \pi^2 R^2 n^2}{r \sin \varphi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} (1+\cos \varphi) \right]$$

$$= \frac{4 \pi^2 R^2 n^2}{r \sin \varphi} \left[1 - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - \cot^2 \varphi \right]$$