Aufgabe 1 *N Teilchen-Zustände und -Hilbertraum* **8 P.**

Gegeben sei ein Einteilchen-Hilbertraum $\mathcal{H}_1$ mit der Eigenbasis $\{\,|\varphi_i\rangle\,\}$ des Einteilchen-Hamiltonoperators

$$\hat{h}\,|\varphi_i\rangle = \varepsilon_i\,|\varphi_i\rangle\ ,\ (i \in \{1, 2, 3\})\ . \tag{1}$$

Geben Sie für die Teilchenzahl $N = 2$ explizit an:

a) alle Basiszustände des Zweiteilchen-Hilbertraums $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$, wenn es sich um unterscheidbare Teilchen handelt. Welche Dimension hat der Hilbertraum $\mathcal{H}_2$? *2 P.*

$$\text{Basiszustände} = \{ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle,\ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle,\ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_3\rangle,\ |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle,\ |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_2\rangle,\ |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle,\ |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_1\rangle,\ |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_2\rangle,\ |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \}$$

$$\text{Dim}\,(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1) = 9$$

b) alle Basiszustände des total-symmetrischen 2-Teilchen-Hilbertraums $\mathcal{H}_2^S$, wenn es sich um bosonische Teilchen handelt. Geben Sie die Basiszustände von $\mathcal{H}_2^S$ sowohl in Form von Linearkombinationen von Produktzuständen und in Besetzungszahldarstellung an. Welche Dimension hat der Hilbertraum $\mathcal{H}_2^S$? *2 P.*

$$\text{Basiszustände} = \{ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle),\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_3\rangle + |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_1\rangle),\ |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_2\rangle,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle + |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_2\rangle),\ |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \}$$

c) alle Basiszustände des total-antisymmetrischen 2-Teilchen-Hilbertraums $\mathcal{H}_2^A$, wenn es sich um fermionische Teilchen handelt. Schreiben Sie die Basiszustände von $\mathcal{H}_2^A$ mit Hilfe der Slater-Determinante in Form von Linearkombinationen von Produktzuständen. Geben Sie des weiteren die Basiszustände in Besetzungszahldarstellung an. Welche Dimension hat der Hilbertraum $\mathcal{H}_2^A$? *2 P.*

$$\text{Basiszustände} = \{ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle - |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle),\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_3\rangle - |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_1\rangle),\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle - |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_2\rangle) \}$$

d) Geben Sie die Definition des Fock-Raums an. Welche Dimension hat der Fock-Raum $\mathcal{H}_{\text{Fock}}^F$ im Fall der Fermionen für einen Einteilchen-Hilbertraum mit drei Basiszuständen? *2 P.*

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_n$ Hilbert-Raum mit n Teilchen

Aufgabe 2 *Boltzmann-, Bose- und Fermi-Statistik* **7 P.**

Bei einem System von N wechselwirkungsfreien Teilchen und einem Einteilchen-Hilbertraum mit der Eigenbasis $\{|\varphi_i\rangle\}$ des Einteilchen-Hamiltonoperators:

$$\hat{h}\,|\varphi_i\rangle = \varepsilon_i\,|\varphi_i\rangle\ ,\ (i \in \{1, 2, 3\})\ . \tag{2}$$

Bestimmen Sie speziell für $N = 2$ die möglichen Energie-Eigenwerte des N-Teilchen-Problems und berechnen Sie die kanonische 2-Teilchen-Zustandssumme $Z_k(2)$

a) für unterscheidbare („klassische") Teilchen. *2 P.*

$$Z = tr\left(e^{-\beta\hat{H}}\right) = tr\left(e^{-\beta(\hat{H}_1+\hat{H}_2)}\right)$$

$$= \sum_{n_1,n_2=1}^{3} \langle\varphi_{n_1},\varphi_{n_2}|e^{-\beta(\varepsilon_{n_1}+\varepsilon_{n_2})}|\varphi_{n_1},\varphi_{n_2}\rangle$$

$$= \sum_{n_1,n_2=1}^{3} e^{-\beta(\varepsilon_{n_1}+\varepsilon_{n_2})}$$

$$= e^{-2\beta\varepsilon_1} + 2e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + 2e^{-\beta(\varepsilon_2+\varepsilon_3)} + 2e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_3)} + e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-2\beta\varepsilon_3}$$

b) für den klassischen Grenzfall identischer Teilchen, wobei die Ununterscheidbarkeit durch den Faktor $\frac{1}{N!}$ in der Zustandssumme berücksichtigt wird. *1 P.*

$$Z = \frac{1}{2!}\,Z_{\text{ein Teilchen}}^2$$

$$= \frac{1}{2!}\left[e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta\varepsilon_3}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-2\beta\varepsilon_1} + 2e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + 2e^{-\beta(\varepsilon_2+\varepsilon_3)} + 2e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_3)} + e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-2\beta\varepsilon_3}\right]$$

c) für Bosonen. *2 P.*

$$Z = tr\left[e^{-\beta\hat{H}}\right]$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=2} \langle n_1,n_2,n_3|e^{-\beta\hat{H}}|n_1,n_2,n_3\rangle$$

$$= e^{-2\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + e^{-\beta(\varepsilon_2+\varepsilon_3)} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$
$$+ e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-2\beta\varepsilon_3}$$