Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 7

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 9, 2023)

Problem 1. (a) Eine Gruppe G der Ordnung 21 operiere auf einer Menge M mit 11 Elementen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Bahn der Länge 1 besitzt.

(Ist $\{m\} \subseteq M$ eine solche einelementige Bahn, dann gilt $g.m = m$ für alle $g \in G$. Jedes $g \in G$ fixiert also m. Man nennt m daher auch einen Fixpunkt der Operation.)

(b) Sei $G := \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen (2×2)-Matrizen und M die Menge aller komplexen (2×2)-Matrizen, die nur reelle Eigenwerte besitzen. Dann operiert G per Konjukation auf M. (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation an)

Proof. (a) Wir schreiben die Klassengleichung

$$|M| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_m].$$

Jeder Term im Summe ist eine Teiler von 21, also $1, 3, 7$ oder 21. Die Operation besitzt eine Bahn der Länge 1 genau dann, wenn 1 zumindest einmal vorkommt. Wir schreiben die mögliche Summen:

$$\begin{aligned}
11 &= 1 \times 11 \\
11 &= 3 + 1 \times 8 \\
11 &= 3 \times 2 + 1 \times 5 \\
11 &= 3 \times 3 + 1 \times 2 \\
11 &= 7 + 1 \times 4 \\
11 &= 7 + 3 + 1
\end{aligned}$$

Weil 1 immer vorkommt, gibt es immer eine Bahn der Länge 1.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Konjukation ist genau eine Ähnlichkeitstransformation. Trotz der Aufgabenstellung brauchen wir noch die Eigenschaften.

Lemma 1. *Sind zwei Matrizen A und B ähnlich, dann haben sie dieselben Eigenwert.*

Proof. Sei $A = Q^{-1}BQ$. Sei außerdem v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt $QA = BQ$ und

$$\begin{aligned} QAv =& Q\lambda v = \lambda(Qv) \\ =& BQv = B(Qv) \end{aligned}$$

also Qv ist ein Eigenvektor von B mit Eigenwert λ. Wir können die Rollen von A und B vertauschen, um die andere Richtung zu zeigen. □

Remark 2. *Die Umkehrrichtung gilt nicht immer. Es gilt wenn die Matrizen diagonalisierbar sind.*

Es folgt sofort: Wenn zwei Matrizen in der gleichen Bahn liegen, haben die die gleichen Eigenwerte. Wenn die Matrizen nicht diagonaliserbarsind, schreiben wir die in Jordan-Normalform. Daraus ergibt sich ein Repräsentantensystem der Bahnen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

□