Einführung in die Differentialgeometrie Hausaufgaben Blatt Nr. 5

Max Mustermann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 19, 2024)

Aufgabe 1. (a) Sei $r > 0$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres offenes Intervall. Bezeichne $rI := \{rs : s \in I\}$. Seien $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\beta : rI \to \mathbb{R}^2$ glatte und reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven. Wir nehmen an, es gelte $\kappa_\beta(rs) = \frac{1}{r}\kappa_\alpha(s)$, für alle $s \in I$. Zeigen Sie, dass α und β im folgenden Sinne ähnlich sind: Es gibt eine orientierungserhaltende Isometrie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $r\alpha(s) = F(\beta(rs))$, für alle $s \in I$. (In dem Fall heißt r manchmal Streckfaktor.)

(b) Für $a > 0$ bezeichne $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die nach Bogenlänge parametrisierte *Klothoide* mit Krümmungsfunktion $\kappa_a(s) := \frac{s}{a^2}$, $s \in \mathbb{R}$. Seien $a, b > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass γ_a und γ_b im Sinne von (a) ähnlich sind, und bestimmen Sie den zugehörigen Streckfaktor r.

Beweis. (a) Wir bezeichnen $I = [a, b]$. Zunächst wählen wir $v \in \mathbb{R}^2$, sodass $t_v(\beta(ra)) = r\alpha(a)$. Per Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(rs) =& \beta''(rs) \cdot J\beta'(rs) \\ \kappa_\alpha(s) =& \alpha''(s) \cdot J\alpha'(s) \\ \|\beta''(rs)\| =& \frac{1}{r}\|\alpha''(s)\| \end{aligned}$$

Das heißt: Es gibt eine Matrix $U \in O(3, \mathbb{R})$ sodass

$$U\beta''(rs) = \frac{1}{r}\alpha''(s).$$

Jetzt integrieren wir die Gleichung bzgl s:

$$\begin{aligned} \int_a^x U\beta''(rs)\,\mathrm{d}s = & \int_{ra}^{xa} \frac{1}{r}\beta''(rs)\,\mathrm{d}(rs) \\ =& \frac{1}{r}(U\beta'(rx) - U\beta'(ra)) \\ =& \frac{1}{r}\int_a^x \alpha''(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{r}(\alpha'(x)-\alpha'(a))$$

Diese Gleichung integrieren wir noch einmal

$$\begin{aligned}\int_a^x U(\beta'(rs)-\beta'(ra))\,\mathrm{d}s =&\frac{1}{r}\int_{ra}^{rx}(\beta'(rs)-\beta'(ra))\,\mathrm{d}(rs)\\ =&\frac{1}{r}U[\beta(rx)-\beta(ra)-\beta'(ra)(rx-ra)]\\ =&\frac{1}{r}\int_a^x(\alpha'(s)-\alpha'(a))\,\mathrm{d}s\\ =&\alpha(x)-\alpha(a)-\alpha'(a)(x-a)\end{aligned}$$

also

$$U\beta(rs)-U\beta(ra)-rU\beta'(ra)(s-a)=r\alpha(s)-r\alpha(a)-r\alpha'(a)(s-a)$$

oder

$$r\alpha(s)=U\beta(rs)+[r\alpha(a)-U\beta(ra)]+r(\alpha'(a)-\beta'(ra))(s-a).$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\kappa_a(s)=&\frac{s}{a^2}\\ \kappa_b(s)=&\frac{s}{b^2}\end{aligned}$$

daraus folgt

$$\kappa_b(s)=\frac{a^2}{b^2}\kappa_a(s),$$

also $r=a^2/b^2$.