Lecture Notes

Einführung in die Funktionentheorie

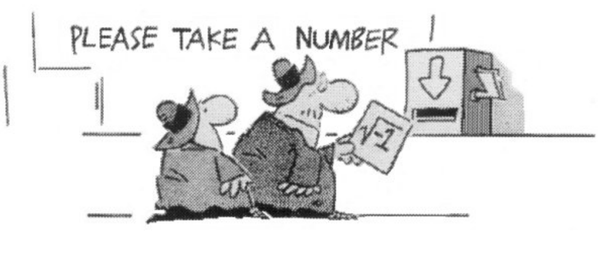
Daniela Kraus und Oliver Roth

Institut für Mathematik Universität Würzburg

15. Juni 2024

Die Einführung der complexen Grössen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher durch Grössenoperationen ausgedrückter Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Grössen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, indem man den veränderlichen Grössen, auf welche sie sich beziehen, complexe Werthe giebt, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmässigkeit hervor.

B. Riemann, [62, §20]



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

G.H. Hardy [30, S. 85]

Die Funktionentheorie (engl. complex analysis) oder genauer die „Theorie der holomorphen Funktionen einer komplexen Variablen“ ist eines der zentralen klassischen Gebiete der Mathematik. Ihr Hauptgegenstand sind Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit komplexen Zahlen als Funktionswerte. Komplexe Zahlen waren bereits mehr als 250 Jahre bekannt bevor überzeugende Anwendungen entdeckt wurden; *G. Cardano* diskutiert sie bereits 1545 in seinem Buch *Ars Magna*. Im 18. Jahrhundert rechnet *Euler* virtuos mit komplexen Zahlen und verfolgt erste Ansätze für die Entwicklung einer „komplexen Analysis“ basierend auf Lagranges kühnen Gedanken, die gesamte Analysis konsequent auf Potenzreihen aufzubauen. Für *Gauß* sind die komplexen Zahlen bereits selbstverständlich, und er ist mit den Grundprinzipien der heutigen Funktionentheorie vertraut, obwohl er sich nicht am eigentlichen Ausbau der Theorie beteiligt. Dieser bleibt *Cauchy*, *Weierstraß* und *Riemann* vorbehalten. Heutzutage sind komplexe Zahlen und holomorphe Funktionen ubiquitär in vielen Teilgebieten der Mathematik und ihren Anwendungen bis hin zu den Ingenieurswissenschaften und der Physik.

Es gibt drei völlig unterschiedliche und doch äquivalente Zugänge zur Funktionentheorie; sie sind mit den Namen *Cauchy*, *Weierstrass* und *Riemann* verbunden. Für *Cauchy* steht der Begriff der komplexen Differenzierbarkeit und die Darstellung mithilfe der Cauchy Integralformel im Zentrum. *Weierstrass* betont hingegen die Entwickelbarkeit in konvergente Potenzreihen. Für *Riemann* sind die geometrischen Eigenschaften holomorpher Funktionen als (lokal) winkeltreue Abbildungen zwischen Teilmengen der komplexen Ebene der zentrale Aspekt sowie der damit verbundene intime Zusammenhang mit der mathematischen Physik.

Die erstaunliche Tatsache, dass sich diese drei Zugänge als gleichwertig erweisen, verleiht der Funktionentheorie ihren besonderen Reiz, ihre ihr eigene Eleganz und große Ästhetik, aber auch ihre große Wirkungskraft nach außen. Holomorphe Funktionen besitzen frappierende Eigenschaften und lassen sich mit vielen verschiedenen Werkzeugen und aus unterschiedlichen Blickwinkeln heraus analysieren und verstehen. Dies ist einer der Gründe für die beeindruckende Reichhaltigkeit und Tragweite funktionentheoretischer Methoden.

Somit ist es nicht verwunderlich, dass zentrale Schlüsselresultate der Funktionentheorie sowie funktionentheoretische Herangehensweisen in vielen Gebieten der Mathematik, den angrenzenden Naturwissenschaften wie der Physik sowie den Ingenieurswissenschaften eine wichtige Rolle spielen, oft in deutlich sichtbarer Art und Weise, zuweilen aber auch sehr subtil und verborgen, jedoch gleichwohl von grundlegender Bedeutung. Ohne eine auch nur annähernd erschöpfende Liste anstreben zu wollen, seien hier exemplarisch erwähnt:

- *Funktionalanalysis:* insbesondere in der Spektraltheorie, dem (holomorphen) Funktionalkalkül, der Theorie der Banachalgebren, Operatortheorie, Dilationstheorie, bei total monotonen Operatorfunktionen, Hilberträumen mit reproduzierendem Kern und Pickräumen, sowie für die bisher ungeklärte Frage nach der Existenz invarianter Unterräume von Operatoren auf Hilberträumen, sind Techniken aus der Funktionentheorie allgegenwärtig. Gewisse Räume holomorpher Funktionen (z.B. Hardy–, Bergman– und Dirichlet–Räume) spielen als grundlegende Beispiele für Banach– und Hilberträume eine eigentümlich zentrale Rolle; der Raum der auf einem Gebiet holomorphen Funktionen ist neben dem Raum der Distributionen das strukturbestimmende Beispiel der Klasse der lokalkonvexen Vektorräume und war von essentieller Bedeutung für die Entwicklung dieser Theorie durch Grothendieck, Schwartz, Köthe und anderen. Scharfe Abschätzungen der Normen stetig linearer Operatoren basieren oftmals auf funktionentheoretischen Methoden wie beispielsweise dem Maximumprinzip oder Verfeinerungen desselben wie dem Drei-Geradensatz, siehe Kapitel 10. (Diese auf Riesz und Thorin zurückgehende Idee wurde von Littlewood bewundernd als die „frechste Idee der Analysis“ bezeichnet.) Wir werden einige funktionalanalytische Anwendungen der Funktionentheorie in der Vorlesung und einige weitere in den ergänzenden Kapitel dieses Skriptums kennenlernen.

- *Maßtheorie:* ein anwendungsreicher Aspekt der Funktionentheorie besteht darin, dass sich die eindimensionale (Borel) Maßtheorie äquivalent zur Theorie der holomorphen Selbstabbildungen der oberen Halbebene erweist. Dies ist die Grundlage für einige erstaunliche Anwendungen, beispielsweise einen direkten Zugang zum Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren mithilfe der sog. Herglotz Darstellungsformel harmonischer Funktionen, die auf der Poisson Integralformel und damit letztlich auf der Cauchy Integralformel basiert, siehe Kapitel 7.
- *Harmonische Analysis:* zentrale Untersuchungsgegenstände in der harmonischen Analysis sind (singuläre) Integraloperatoren, und das herausragende Beispiel eines singuläre Integraloperators ist die Hilbert–Transformation. Sie beruht auf der frappierenden Erkenntnis, dass man eine holomorphe Funktion (lokal) im Wesentlichen alleine aus ihrem Realteil rekonstruieren kann, siehe Kapitel 2. Die Hilbert–Transformationen besitzt zahlreiche Anwendungen in der Fourieranalysis und der Signalverarbeitung. Sie ist weiter eng mit funktionentheoretischen Fragen, insbesondere mit Randwertproblemen für holomorphe Funktionen, sog. Riemann–Hilbert Problemen, verknüpft. Die zugrundeliegenden Darstellungssätze lernen wir in Kapitel 7 kennen.
- *Dynamische Systeme:* Ein hochaktuelles Forschungsgebiet im Bereich der dynamischen Systeme ist die *komplexe Dynamik*. Diese befasst sich mit der Iteration holomorpher oder meromorpher Funktionen und untersucht sog. chaotisches Verhalten und die möglichen Szenarios dorthin. Die Grundlagen wie den Satz von Montel lernen wir in Kapitel 16 kennen. Als Nebeneffekt der komplexen Dynamik entstehen spektakuläre Computerbilder; die dahinterstehenden funktionentheoretischen Überlegungen sind aber mindestens genau so schön.

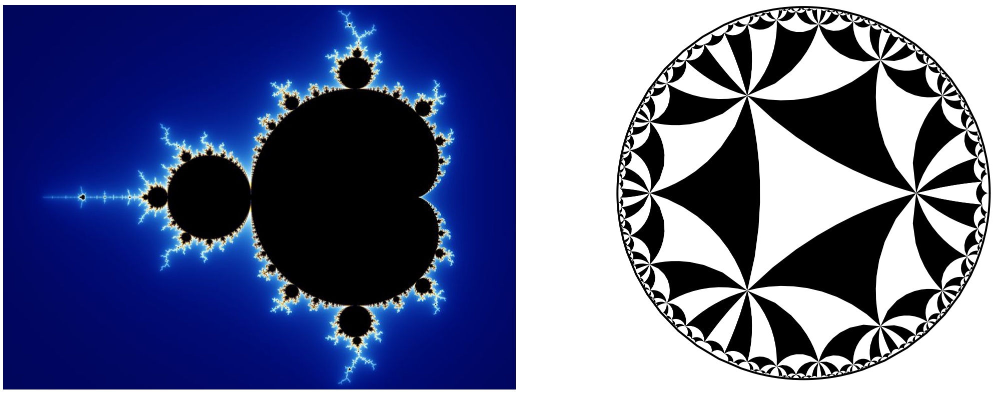


Abbildung 1: Komplexe Dynamik (links) und hyperbolische Geometrie (rechts)

- *Topologie und Geometrie:* Die Funktionentheorie ist in natürlicher Weise aufs Engste mit den drei möglichen zweidimensionalen Geometrien, nämlich der aus der Schule bekannten euklidischen Geometrie sowie der hyperbolischen und der sphärischen Geometrie verknüpft, und bietet somit Gelegenheit zu erkunden, was sich jenseits der euklidischen Geometrie abspielt, siehe

Kapitel 11. Der von Riemann propagierte geometrische Aspekt der Funktionentheorie eröffnet die Möglichkeit, holomorphe Funktionen zur Behandlung geometrischer Probleme heranzuziehen. Grundlage hierfür ist der berühmte Riemannsche Abbildungssatz, siehe Kapitel 17.

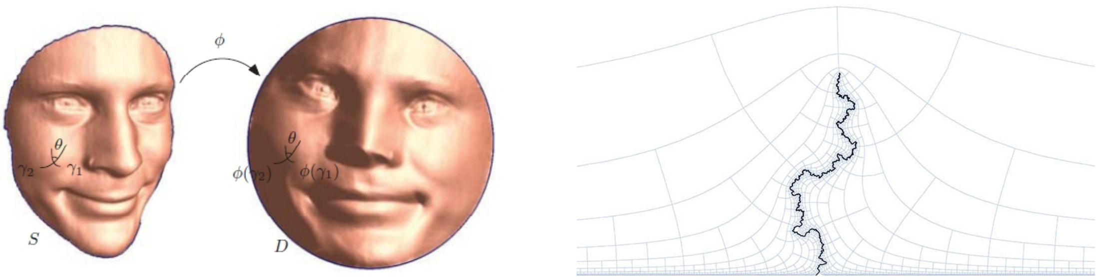


Abbildung 2: Computer Vision und holomorphe Modellierung Brownscher Bewegungen

- *Mathematische Physik:* Der bedeutende Mathematiker Hermann Weyl schreibt: „Die komplexen Variablen haben eine durchaus reale Bedeutung. Ihre Funktionen lassen eine geometrische Deutung durch Abbildung, außerdem eine physikalische als Bild der elektrischen Strömung zu. Auf Grund beider Bedeutungen hat sich ihre Entwicklung vollzogen. Man kann die Funktionentheorie geradezu auffassen als einen Teil der mathematischen Physik.“ [73, S. 1] Entsprechend sind funktionentheoretische Methoden in der mathematischen Physik reichlich vertreten. Neben den bereits oben erwähnten Zusammenhängen mit der Funktionalanalysis sind hier u.a. der residuentheoretische Zugang zur Berechnung von reellen Integralen und Fourier–Transformationen (Kapitel 15), die Bedeutung des „Prinzips der analytischen Fortsetzung“ (vgl. Satz 9.5) für Pfad–Integrale sowie die Untersuchung der vielen sog. speziellen Funktionen der mathematischen Physik wie Hermite–, Legendre– und Bessel–Funktionen, dies sich systematisch den hypergeometrischen Funktionen zuordnen lassen, zu nennen. Eine Klasse holomorpher Funktionen, die eine zentrale Rolle in unseren Überlegungen und der Funktionentheorie im Allgemeinen spielen, sind die sog. *Möbius–Transformationen* (siehe Beispiel 3.6). In der Physik sind diese Abbildungen als *Lorentz–Transformationen* bekannt; sie bilden die Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie von Einstein sowie der vom Physik–Nobelpreisträger R. Penrose entwickelten vereinheitlichen Theorie für die Gravitation und die Quantenfeldtheorie, der sog. Twistor–Theorie, siehe [56].

- Algebra: Eine Standardanwendung der Komplexen Analysis, die in jeder Funktionentheorie–Vorlesung behandelt wird, ist ein „Ein–Zeilen–Beweis“ des Fundamentalsatzes der Algebra (siehe Beispiel 7.11). Weniger bekannt sind feinere Untersuchungen der Nullstellenverteilung komplexer Funktionen (siehe Kapitel 9), die u.a. für den von Einstein vorhergesagten Gravitationslinseneffekt relevant sind. Die geometrischen Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen (vgl. Kapitel 10 und 14) sind grundlegend für Grothendiecks Zugang zum inversen Problem der Galoistheorie, siehe [35], mittels *dessins d'enfants* („Kinderzeichnungen“).

- Zahlentheorie: die wahrscheinlich wichtigste offene Vermutung der Mathematik ist die *Riemannsche Vermutung*. Diese bezieht sich auf die Beschreibung der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, einer speziellen holomorphen Funktion, deren besondere Relevanz für die Verteilung der Primzahlen von Euler und Riemann herausgestellt wurde, siehe Beispiel 8.8. Solche und ähnliche Fragestellungen nach der Verteilung von Funktionswerten holomorpher Funktionen sind zentrale Aufgaben der Funktionentheorie und Gegenstand von Kapitel 14.

In der Ausbildung von Mathematikerinnen und Mathematiker für Schule, Wirtschaft, Industrie und Forschung fungiert eine einführende Vorlesung zur Funktionentheorie als bewährtes Bindeglied zwischen den Analysis Vorlesungen der ersten beiden Studienjahre und den fortgeschrittenenen Vorlesungen zur Analysis, aber auch der Algebra, Geometrie, Zahlentheorie und angewandten Mathematik.

Ein wesentlicher Grund hierfür liegt in der Strukturierung der mathematischen Grundausbildung. Bei genauerem Hinsehen bleibt nämlich eine Reihe grundlegender Fragen in der reellen Analysis mit den dort vorhandenen Methoden unbeantwortet. Dies betrifft zum einen die durch Potenzreihen definierbaren Funktionen. Im Reellen gibt es keinen offensichtlichen Zusammenhang zwischen einer solchen Funktion und der Größe des Konvergenzintervalls ihrer Taylorentwicklung. Die Funktion $x \mapsto 1/(1+x^2)$ ist beispielsweise in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ auf einem gewissen Intervall mittels ihrer Taylorreihe darstellbar, aber es gibt keinen erkennbaren Grund dafür, warum diese Taylorreihe für z.B. $x_0 = 0$ genau auf dem Intervall $(-1,1)$ konvergiert. Wesentliche Eigenschaften ganz elementarer Funktionen wie reeller Polynome und deren Faktorisierbarkeit in Polynome vom Grad ≤ 2 sind mit rein reellen Methoden nur sehr umständlich nachzuweisen. Die trigonometrischen, die Hyperbelfunktionen und die Exponentialfunktion gehorchen anscheinend ähnlich anmutenden Gesetzmässigkeiten wie etwa einfachen Additionstheoremen. Der Tatsache, dass einfache Funktionen wie $x \mapsto 1/(1+x^2)$ kompliziert erscheinende Stammfunktionen wie $\arctan x$ besitzen oder die Berechnung scheinbar nur geringfügig komplizierterer Integrale wie $\int dx/\sqrt{1-x^4}$ in der reellen Analysis auf unüberwindbare Schwierigkeiten stößt, sowie vielen weiteren Merkwürdigkeiten liegt eine einzige Ursache zugrunde. Diese besteht darin, dass die betrachteten Funktionen ihre “wahre Natur” erst dann offenbaren, wenn man sie als komplex differenzierbare Funktionen einer komplexen Veränderlichen auffasst. Wagt man diesen Schritt, so tritt eine „sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmässigkeit“ ([62, §20]) zutage und die genannten Schwierigkeiten lösen sich wie von Geisterhand auf.

Ein Hauptanliegen einer jeden Einführung in die Funktionentheorie besteht daher darin, die Freundschaft, die jede Mathematikerin und jeder Mathematiker mit den zentralen Funktionen der Analysis wie der Exponentialfunktion, der Logarithmusfunktion und den trigonometrische Funktionen, geschlossen haben sollte, mit neuen und effizienten Methoden wesentlich zu vertiefen. Die Techniken, die wir hierzu gemeinsam entwickeln, werden sich in vielerlei Hinsicht als universell herausstellen, und die Untersuchung vieler anderer konkreter Funktionen, wie etwa der Riemannschen Zetafunktion, überhaupt erst ermöglichen. Das zugrundeliegende Schlüsselkonzept ist die Einsicht, dass ein umfassendes Verständnis einer Funktion nur durch die Identifizierung ihres größten und in dieser Hinsicht natürlichen Definitions– oder Lebensbereichs entstehen kann, und dass dies damit einhergeht, dass erst dieser Perspektivwechsel eine Fülle vollkommen neuer und effizienter Techniken zur Anwendung bringt. Die gewonnenen Einsichten ermöglichen nicht nur einen Blick auf die eindimensionale reelle Analysis von einem „höheren Standpunkt“ aus. Im Zusammenspiel mit der Betonung der verschiedenen Möglichkeiten der *Darstellung* einer komplexen Funktion entsteht auch ein vertieftes Verständnis des Funktionsbegriffes an sich. Darüber hinaus werden beim Aufbau der komplexen Analysis die grundlegenden Begrifflichkeiten der Differentialrechnung mehrerer reeller Variablen rekapituliert und mit in die Theorie integriert. Bekanntes in neuem Licht zu sehen, ist ein wesentlicher Bestandteil jedes Lernprozesses, und für das Verständnis unumgänglich.

Bei unseren Streifzügen durch die Funktionentheorie werfen wir nicht nur immer wieder einen Blick „zurück“ auf die reelle Analysis, sondern dringen bald auch in unbekanntes Terrain vor und beginnen die Grundeigenschaften holomorpher Funktionen Schritt für Schritt aufzudecken. Dabei orientieren wird uns der Hauptsache nach an der inneren Logik und der Ästhetik. Der Schwerpunkt liegt auf der Vielfalt und der Kraft der Methoden. Dabei ergeben sich mancherlei Anwendungen „wie von selbst“, wie etwa die Berechnung reeller Integrale mit der Residuenmethode (Kapitel 15). Ein besonderes Charakteristikum der Funktionentheorie sind die durchwegs eleganten Beweise, die mit einem Minimum an Rechenaufwand auskommen und von großer Klarheit geprägt sind.

Wir wünschen Ihnen viel Freude bei der Beschäftigung mit der Funktionentheorie!

Daniela Kraus & Oliver Roth Würzburg, im April 2024

Kapitel 1

Holomorphe Funktionen

Nicht einer mystischen Verwendung von $\sqrt{-1}$ hat die Analysis ihre wirklich bedeutenden Erfolge des letzten Jahrhunderts zu verdanken, sondern dem ganz natürlichen Umstande, dass man unendlich viel freier in der mathematischen Bewegung ist, wenn man die Grössen in einer Ebene statt nur in einer Linie variiren lässt.

L. Kronecker [39, S. 52]

Es sei $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ die aus den Vorlesungen des ersten Studienjahres bekannte Menge der komplexen Zahlen. Hierbei bezeichnet i die **imaginäre Einheit**,[1] für die $i^2 = i \cdot i = -1$ gilt. Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist der **Realteil** von z durch $x = \operatorname{Re} z$ und der **Imaginärteil** von z durch $y = \operatorname{Im} z$ gegeben. Die komplexe Zahl $\bar{z} := x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ **komplex–konjugierte** Zahl. Es gilt

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Ferner ist $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\bar{z} = z$. Man nennt $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ den **Betrag** der komplexen Zahl; er entspricht der euklidischen Länge des Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und es gilt

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Komplexe Zahlen lassen sich als Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$ visualisieren. Für einen Punkt $p \in \mathbb{C}$ und eine reelle Zahl $r > 0$ bezeichnet

$$K_r(p) := \{z \in \mathbb{C} : |z - p| < r\}$$

die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $p \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$. Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt offen, wenn zu jedem Punkt $p \in U$ eine Kreisscheibe $K_r(p)$ existiert, die in U enthalten ist.

Ausgangspunkt der Funktionentheorie ist das Konzept der "komplexen Differenzierbarkeit":

Definition 1.1 (komplex differenzierbar, holomorph).
*Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung eines Punktes $p \in \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt $p \in U$ **komplex differenzierbar**, falls der Grenzwert*

$$f'(p) := \lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

*(in $\mathbb{C}$) existiert. In diesem Fall heißt die komplexe Zahl $f'(p)$ **(komplexe) Ableitung** von f im Punkt p. Wir nennen $f : U \to \mathbb{C}$ **holomorph** in U, wenn f in jedem Punkt $p \in U$ komplex differenzierbar ist. Die Menge aller in U holomorphen Funktionen wird mit $\mathscr{H}(U)$ bezeichnet.*

Bei dieser Definition ist es entscheidend, dass man für den Limes beliebige Annäherungen an p, also *alle* Folgen $(z_n) \in U \setminus \{p\}$ mit $z_n \to p$ zulässt.

[1] „Naturally "i" is henceforth unavailable for any others jobs, in particular, as an index of summation.“ [15, p. 8]

Beispiel 1.2 (Monome sind holomorph auf ganz $\mathbb{C}$)**.**
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^n$. Dann ist f in jedem Punkt $p \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, d.h. $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$. Dies ergibt sich mit Hilfe der *geometrischen Summenformel* $(\star)$ wie folgt

$$\lim_{z\to p} \frac{f(z)-f(p)}{z-p} = \lim_{z\to p} = \frac{z^n - p^n}{z-p} \overset{(\star)}{=} \lim_{z\to p} \sum_{k=0}^{n-1} p^k z^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} p^k p^{n-1-k} = np^{n-1}\,.$$

Beispiel 1.3 (Konjugationsabbildung = Spiegelung an der reellen Achse)**.**
Die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, die jeder komplexen Zahl $x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ die zu ihr komplex–konjugierte komplexe Zahl $\overline{z} = x - iy$ zuordnet, heißt **Konjugationsabbildung**. Aus geometrischer Sicht beschreibt sie die Spiegelung an der reellen Achse. Die Konjugationsabbildung ist additiv, d.h. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, und multiplikativ, d.h. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, jeweils für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Ferner ist sie wegen $|f(z) - f(p)| = |\overline{z} - \overline{p}| = |\overline{z-p}| = |z-p|$ in jedem Punkt $p \in \mathbb{C}$ stetig. Hingegen ist sie in keinem Punkt p komplex differenzierbar. Hierzu sei $p = x_0 + iy_0$ mit $x_0 = \operatorname{Re} p$ und $y_0 = \operatorname{Im} p$. Dann gilt:

(i) Für $z = x_0 + iy$ $(\neq p)$ mit $y \in \mathbb{R}$ gilt für $z \to p$ (Annäherung parallel zur imaginären Achse)

$$\frac{f(z)-f(p)}{z-p} = \frac{\overline{x_0+iy} - \overline{(x_0+iy_0)}}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)} = \frac{\overline{iy} - \overline{iy_0}}{iy - iy_0} \to -1\,.$$

(ii) Für $z = x + iy_0$ $(\neq p)$ mit $x \in \mathbb{R}$ gilt für $z \to p$ (Annäherung parallel zur reellen Achse)

$$\frac{f(z)-f(p)}{z-p} = \frac{\overline{x+iy_0} - \overline{(x_0+iy_0)}}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \to 1\,.$$

Die Funktion aus Beispiel 1.3 ist ein einfaches Beispiel einer auf ganz $\mathbb{C}$ stetigen, aber *nirgends* komplex differenzierbaren Funktion. Im Reellen ist es wesentlich schwieriger, solche Beispiele zu konstruieren.

Für komplex differenzierbare bzw. holomorphe Funktionen gelten die üblichen Rechenregeln.

Satz 1.4.
Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen. Ferner seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ im Punkt $p \in U$ und $h : V \to \mathbb{C}$ im Punkt $f(p) \in V$ komplex differenzierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) *$f : U \to \mathbb{C}$ ist stetig im Punkt p.*

(b) *$f \pm g : U \to \mathbb{C}$ und $f \cdot g : U \to \mathbb{C}$ sind im Punkt p komplex differenzierbar mit*

$$(f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p)$$

und

$$(f \cdot g)'(p) = f'(p)\,g(p) + f(p)\,g'(p)\,. \qquad \text{(Produktregel)}$$

(c) *Falls $g(p) \neq 0$, so ist f/g im Punkt p komplex differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)\,g(p) - f(p)\,g'(p)}{g(p)^2}\,. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

(d) *Die Komposition $h \circ f$ ist im Punkt p komplex differenzierbar mit*

$$(h \circ f)'(p) = h'(f(p)) \cdot f'(p)\,. \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$\mathscr{H}(U)$ ist also insbesondere ein $\mathbb{C}$–Vektorraum.

Beispiel 1.5 (Polynome)**.**
Es sei $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $p \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ und es gilt

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$$

Dies folgt aus Beispiel 1.2 und Satz 1.4 (b).

Beispiel 1.6 (Rationale Funktionen)**.**
Es seien $p,q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome und $U := \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$. Dann ist U als Urbild der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Funktion $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ offen und die rationale Funktion $r : U \to \mathbb{C}$, $r(z) := p(z)/q(z)$, ist holomorph in U. Dies folgt aus Beispiel 1.5 und Satz 1.4 (c).

Die Holomorphie überträgt sich von Polynomen auf Potenzreihen im Inneren ihrer Konvergenzkreisscheibe, die man als „verallgemeinerte Polynome" auffassen kann:

Satz 1.7.
Es sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \qquad (a_k \in \mathbb{C})$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > 0$.[2] *Dann ist f holomorph in der Konvergenzkreisscheibe $K_R(z_0)$, die Ableitung $f' : K_R(z_0) \to \mathbb{C}$ ist wiederum eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und es gilt*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (z-z_0)^{k-1}, \quad z \in K_R(z_0).$$

Beweis. O.E. sei $z_0 = 0$; anderenfalls betrachte man $\tilde{f}(z) := f(z+z_0)$ anstelle von $f(z)$ und wende dann Satz 1.4 (d) auf $\tilde{f}(z-z_0)$ an. Wir berechnen für $z \neq w$ aus $K_R(0)$ den Differenzenquotienten von f in den Punkten z und w mithilfe der geometrischen Summenformel

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z-w} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{k-1} z^n w^{k-n-1} \right).$$

Man beachte, dass der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung auch für $w = z$ wohldefiniert ist und sich als

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

schreiben lässt, wobei sich die (absolute) Konvergenz dieser Reihe für $|z| < R$ aus der Cauchy–Hadamardschen Formel

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$$

und aus $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$ ergibt. Wir setzen daher

$$F(z,w) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{k-1} z^n w^{k-n-1} \right), \qquad z,w \in K_R(0) \tag{1.1}$$

und müssen zeigen, dass

$$\lim_{w\to z} F(z,w) = F(z,z).$$

Tatsächlich ist die Funktion $F : K_R(0) \times K_R(0) \to \mathbb{C}$ sogar in jedem Punkt $(z,w) \in K_R(0) \times K_R(0)$ stetig. Dazu wählen wir eine reelle Zahl r im Intervall $(0,R)$ und zeigen, dass die Funktionenreihe

[2] Siehe Appendix, insbesondere Satz 0.26.

(1.1) gleichmäßig auf $\overline{K_r(0)} \times \overline{K_r(0)}$ konvergiert. Dazu beachten wir, dass für alle $z, w \in \overline{K_r(0)}$ daus der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\left| a_k \sum_{n=0}^{k-1} z^n w^{k-n-1} \right| \leq k|a_k| r^{k-1}$$

folgt. Aus dieser Abschätzung ergibt sich nun wiederum mithilfe der Cauchy–Hadamardschen Formel und $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$, dass die Reihe (1.1) aufgrund des Wurzelkriteriums gleichmäßig auf $\overline{K_r(0)} \times \overline{K_r(0)}$ konvergiert und dort somit stetig ist. Da dies für alle $r \in (0, R)$ gilt, ist $F : K_R(0) \times K_R(0) \to \mathbb{C}$ wie behauptet stetig, und der Satz ist bewiesen. □

Beispiel 1.8 (Die Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus im Komplexen, Polarkoordinaten)**.**
Die Potenzreihe

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

hat wegen $\sqrt[k]{k!} \to +\infty$ für $k \to \infty$ den Konvergenzradius $R = +\infty$. Nach Satz 1.7 ist daher die hierdurch definierte Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Die komplexe Exponentialfunktion ist die **wichtigste Funktion der Mathematik**. Sie verbindet aufgrund der Funktionalgleichung

$$e^{z+w} = e^z e^w \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

die Addition mit der Multiplikation. Die Funktionalgleichung kann man genau wie im Reellen beweisen, indem man $e^z e^w$ durch das Bilden des Cauchy–Produktes der Potenzreihen für e^z und e^w berechnet. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist symmetrisch zur reellen Achse, d.h.

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dies folgt direkt aus der Reihendarstellung von $\exp(z)$ sowie der Stetigkeit, Additivität und Multiplikativität der Konjugationsabbildung $z \mapsto \bar{z}$. Mithilfe der **komplexen** Exponentialfunktion definiert man die Sinus und Cosinus Funktion im Komplexen wie folgt

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Insbesondere sind Sinus und Cosinus jeweils auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Ist $x \in \mathbb{R}$, so ergibt sich $\mathrm{Re}(e^{ix}) = (e^{ix} + \overline{e^{ix}})/2 = (e^{ix} + e^{-ix})/2 = \cos(x)$ und analog $\mathrm{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$, also durch Addition die berühmte Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Für $x = \pi$ erhält man hieraus mit $\cos(\pi) = -1$ und $\sin(\pi) = 0$ die Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0;$$

sie setzt die fünf "Naturkonstanten" e, π, i, 0 und 1 miteinander in Beziehung.

Der innere Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion ist nur im Komplexen erkennbar:[3] Die reellen Additionstheoreme für Sinus und Cosinus folgen mühelos aus der Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion, ebenso wie die Darstellbarkeit komplexer Zahlen durch Polarkoordinaten: Zu jeder Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $r > 0$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$ mit

$$z = re^{i\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}\, z = r\cos(\theta), \quad \mathrm{Im}\, z = r\sin(\theta).$$

Hierbei ist $r = |z|$ der Betrag von z. Die Zahl θ nennt man das **Argument** von z. Allgemeiner bezeichnet man auch jede der Zahlen $\theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ als Argument von z.

[3] Diese Einsicht geht auf Euler zurück: „In der Analysis hatte er eine für die meisten seiner Zeitgenossen unbegreifliche Vorliebe für die komplexen Größen, mit deren Hilfe es ihm gelungen war, den Zusammenhang zwischen den Kreisfunktionen und der Exponentialfunktion herzustellen." [27, Band 3, S. 733]

Aus Satz 1.7 ergibt sich durch wiederholte Anwendung das folgende Korollar.

Korollar 1.9.
Eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (a_k \in \mathbb{C})$$

ist in jedem Punkt ihrer Konvergenzkreisscheibe $K_R(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, a_k (z-z_0)^{k-n}, \quad z \in K_R(z_0).$$

Insbesondere sind die Koeffizienten der Potenzreihe durch

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegeben.

Korollar 1.9 hat folgende Konsequenz: Ist f eine auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ **analytische** Funktion, d.h. $f : U \to \mathbb{C}$ lässt sich **lokal** in U, also in einer Umgebung eines jeden Punktes in U, als Potenzreihe darstellen, so ist f holomorph auf U. Kurz: Analytische Funktionen sind holomorph:

Korollar 1.10.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$. Falls zu jedem $z_0 \in U$ eine Kreisscheibe $K_r(z_0) \subseteq U$, $r > 0$, existiert derart, dass f in $K_r(z_0)$ durch eine Potenzreihe dargestellt wird, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in K_r(z_0),$$

so ist f holomorph in U.

Bezeichnet man mit $\mathscr{A}(U)$ die Menge aller in U analytischen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, so zeigt Korollar 1.10, dass $\mathscr{A}(U) \subseteq \mathscr{H}(U)$. Dies legt die Frage nahe, welche holomorphen Funktionen analytisch sind.

V.1 Verständnisfragen

1. In welchen Punkten ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := |z|^2$, komplex differenzierbar?
   (Hinweis: $|z|^2 = z\bar{z}$)
2. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ und $p \in U$. Ist f in p genau dann komplex differenzierbar, wenn es eine stetige Funktion $\phi : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = f(p) + \phi(z) \cdot (z - p)$ für alle $z \in U$? Wie hängt $f'(p)$ mit $\phi(p)$ zusammen?
3. Es sei $K_R(z_0)$ die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
   (i) Die Potenzreihe konvergiert für kein $z \in \mathbb{C} \setminus K_R(z_0)$.
   (ii) Die Potenzreihe konvergiert für mindestens ein $z \notin \overline{K_R(z_0)}$ nicht.
   (iii) Die Potenzreihe divergiert für alle $z \in \overline{K_R(z_0)}$.
4. Es sei f analytisch in der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. Ist dann auch f' analytisch in U?

5. Richtig oder falsch?

   (a) $\mathrm{Re}(e^z) = \cos z$ und $\mathrm{Im}(e^z) = \sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (b) $|z| = 1 \Longleftrightarrow z = 1/\bar{z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   (c) $\sin z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

6. In Beispiel 1.8 wurde behauptet, dass die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus mühelos aus der Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion folgen. Man bestätige dies.

A.1 Ergänzungen und Ausblicke

A.1.1 Differenzenquotienten holomorpher Funktionen

Satz 1.7 zeigt, dass man eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

im Inneren ihrer Konvergenzkreisscheibe $K_R(z_0)$ gliedweise differenzieren darf. Unser Beweis von Satz 1.7 zeigt indes etwas mehr, nämlich dass der *Differenzenquotient* $F : K_R(z_0) \times K_R(z_0) \to \mathbb{C}$

$$F(z,w) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{für } z \neq w \\ f'(w) & \text{für } z = w\,, \end{cases}$$

stetig (als Funktion beider Variablen) ist. Für den Beweis von Satz 1.7 hätte die Stetigkeit von F auf der „Diagonalen" $\{(w,w) : w \in K_R(z_0)\}$ ausgereicht. Der Differenzenquotient $F : U \times U \to \mathbb{C}$ einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und insbesondere die Frage nach seiner Stetigkeit wird uns bei der Fortentwicklung der Theorie wiederbegegnen und eine beweistechnisch entscheidende Rolle spielen. Die Stetigkeit des Differenzenquotienten $F : U \times U \to \mathbb{C}$ einer (holomorphen) Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ auf der Diagonalen $\{(w,w) : w \in U\}$ ist äquivalent zur Holomorphie von f; seine Stetigkeit auf $U \times U$ ist hingegen äquivalent zur Stetigkeit der Ableitung $f' : U \to \mathbb{C}$.

A.1.2 Potenzreihen sind analytisch

Man kann duch Umordnen direkt zeigen, dass Potenzreihen im Inneren Ihrer Konvergenzkreisscheibe analytisch sind. Ein entsprechender Beweis findet sich z.B. in [45, S. 21]. Wir verzichten hier auf einen solchen Beweis, da sich die Aussage im Laufe unserer Untersuchungen „von selbst" ergeben wird.

— Übungsaufgaben —

Wir bezeichnen mit $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe $K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 1.1.
Es sei $a \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie:

(a) $|a - z| < |1 - \bar{a}z| \Longleftrightarrow |z| < 1$.
Hinweis: $|\ \ |^2$.

(b) Durch
$$T_a(z) := \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$$
ist eine holomorphe bijektive Abbildung $T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gegeben. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung T_a^{-1}.

Aufgabe 1.2.
Zeigen Sie: Eine Menge $P \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann eine Gerade oder Kreislinie in $\mathbb{C}$, falls $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha > 0$ und $|\beta|^2 - \alpha\delta > 0$ existieren mit
$$P = \{z \in \mathbb{C} : \alpha z\overline{z} + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \delta = 0\}.$$
Hinweis: Quadratische Ergänzung!

Aufgabe 1.3.

(a) Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ das Bild der Menge $\{x+iy : y \in \mathbb{R}\}$ unter der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie für $y \in \mathbb{R}$ das Bild der Menge $\{x+iy : x \in \mathbb{R}\}$ unter der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 1.4.
Es sei
$$g(z) := \cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass g holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist.

(b) Für $N \in \mathbb{N}$ sei R_N das Rechteck mit den Eckpunkten $\pm(N+1/2) \pm iN$. Zeigen Sie, dass $|g(z)| \leq ig(i/2) \approx 1.09033$ für alle $z \in \partial R_N$.

Aufgabe 1.5.

(a) In welchen Punkten $z_0 \in \mathbb{C}$ ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2$, komplex differenzierbar? Ist $f \in \mathscr{H}(U)$ für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$?

(b) Es sei a eine reelle positive Zahl a. Zeigen Sie, dass $z \mapsto a^z := e^{z\ln a}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist und berechnen Sie $(a^z)'$.

Aufgabe 1.6 (Littlewood–Polynome)**.**
Ein Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_j \in \{-1, 1\}$ für alle $j = 0, \ldots, n$ heißt Littlewood–Polynom. Zeigen Sie, dass alle Nullstellen eines Littlewood–Polynoms stets im Kreisring $1/2 < |z| < 2$ enthalten sind.

Aufgabe 1.7 (Reziproke Polynome; entspricht Satz 7.12 (b) $\Longrightarrow$ (a))**.**
Es sei $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt
$$p^\sharp(z) := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_{n-1} z + a_n$$
das **zum Polynom p reziproke** oder **gespiegelte Polynom**. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Funktion $p^\sharp$ ist auf der Menge $\overline{\mathbb{D}}$ beschränkt ist, d.h.
$$M := \sup_{|z| \leq 1} \left| p^\sharp(z) \right| < \infty.$$

(b) Es gilt $p^\sharp(z) = z^n p(1/z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) Es gilt $|p(z)| \leq M|z|^n$ für alle $|z| \geq 1$.
Man sagt, “Polynome vom Grad n wachsen höchstens so schnell wie z^n.”

Aufgabe 1.8 ([58], Band 1, Nr. 74, S. 97)**.**
Zeigen Sie, dass $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = z^2 + 2z + 3$, injektiv in $\mathbb{D}$ ist.

Aufgabe 1.9.

(a) (vgl. Staatsexamen Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 4)
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 - i = 0$.

(b) (vgl. Staatsexamen Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 1)
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $1 + z^2 + z^4 = 0$.

(c) (vgl. Staatsexamen Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 3)
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $1 + z^{2n} = 0$.

Aufgabe 1.10 (vgl. Staatsexamen Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 2)**.**

(a) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2}\left(e^{|y|} - e^{-|y|}\right) \text{ ist.}$$

(b) Gegeben sei die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$f_n(z) := \frac{\sin(nz)}{n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Geben Sie die Menge M aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ an, für die $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \qquad z \in M.$$

Zusatzfrage: Konvergiert die Funktionenfolge $\{f_n\}$ gleichmäßig auf M ?

Aufgabe 1.11 (Staatsexamen Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 2)**.**

(a) Definieren Sie den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz für Folgen und Reihen von komplexwertigen Funktionen auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(b) Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(0) = 0$.

  (i) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ auf jeder in $\mathbb{E}$ enthaltenen kompakten Menge gleichmäßig konvergiert.

  (ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ i.A. nicht gleichmäßig auf $\mathbb{E}$ konvergiert.

Aufgabe 1.12 (Konvergenzradien)**.**

(a) Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus\{1\})$ durch

$$f(z) := \frac{1}{1-z} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$$

gegeben und $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ sei fixiert. Zeigen Sie, dass sich f in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 entwickeln lässt und bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe in Abhängigkeit von z_0. Interpretieren Sie diesen Konvergenzradius geometrisch.

(b) Versuchen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe der Funktion $g(z) = \tan z$ im Entwicklungspunkt 0 zu bestimmen.

Kapitel 2

Die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung

Um klar zu sehen, genügt oft ein Wechsel der Blickrichtung.

A. de Saint-Exupéry, *Die Stadt in der Wüste*

Wir wechseln nun die Perspektive: mittels der Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto x+iy$, lässt sich jede komplexwertige Funktion $f = u+iv$, wobei $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$, mit der $\mathbb{R}^2$–wertigen Abbildung $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ identifizieren. In diesem Kapitel untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der komplexen Differenzierbarkeit von f und der reellen Differenzierbarkeit von f als Abbildung in den $\mathbb{R}^2$. Wir erinnern zunächst an die

Definition 2.1 (Partielle Differenzierbarkeit, vgl. Analysis II).
*Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt $p \in U$ **partiell differenzierbar**, wenn die folgenden beiden Limites existieren:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) := \lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{R}} \frac{f(p+h)-f(p)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) := \lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{R}} \frac{f(p+ih)-f(p)}{h}.$$

Schreibt man $f = u+iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$, so überzeugt man sich leicht davon, dass f genau dann partiell differenzierbar ist, wenn $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ partiell differenzierbar sind und dass in diesem Fall gilt[1]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.1}$$

Satz 2.2.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei im Punkt $p \in U$ komplex differenzierbar. Dann ist f in p partiell differenzierbar mit

$$f'(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

*und erfüllt die **komplexe Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung***

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(p). \tag{CR$_\mathbb{C}$}$$

Beweis. Es gilt unter Beachtung von $1/i = -i$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = f'(p) = \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(p+ih)-f(p)}{ih} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(p).$$

□

[1] Dies folgt aus Korollar 0.15 (Appendix).

Bemerkung 2.3.
Für $f = u + iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ ist die komplexe Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung $(\mathrm{CR}_{\mathbb{C}})$ äquivalent zu den beiden ***reellen Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(p) = -\frac{\partial v}{\partial x}(p)\,.} \tag{$\mathrm{CR}_{\mathbb{R}}$}$$

Zur Illustration von Satz 2.2 betrachten wir erneut die Konjugationsabbildung $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z):=\bar{z}$, d.h. $x+iy\mapsto x-iy$, aus Beispiel 1.3. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = 1$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = -i$, also $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = 1 \neq -1 = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)$, d.h. f erfüllt in keinem Punkt $z\in\mathbb{C}$ die komplexe Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung, ist also nirgendwo komplex differenzierbar.

Beispiel 2.4 (($\mathrm{CR}_{\mathbb{C}}$) $\not\Rightarrow$ komplex differenzierbar)**.**
Die durch $f(x+iy) := 0$ falls $xy = 0$ und $f(x+iy) := 1$ falls $xy \neq 0$ definierte Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ist auf den Koordinatenachsen identisch 0 und erfüllt daher $(\mathrm{CR}_{\mathbb{C}})$ in $p = 0$, ist aber dort nicht stetig, also auch nicht komplex differenzierbar.

Bemerkung 2.5 (Die komplexe Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung)**.**
Satz 2.2 motiviert die Einführung der sog. ***Wirtinger Ableitungen***

$$\partial f := \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{2.2}$$

Damit lässt sich die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung $(\mathrm{CR}_{\mathbb{C}})$ in der kompakten Form

$$\boxed{\bar{\partial} f(p) = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0} \tag{$\mathrm{CR}_{\mathbb{C}}$}$$

schreiben. Falls f in p komplex differenzierbar ist, so gilt $\partial f(p) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(p) = f'(p)$.

Beispiel 2.6.
Es sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2$. Dann gilt $f(z) = x^2 + y^2$ für $z = x+iy$ mit $x, y\in\mathbb{R}$, also

$$\bar{\partial} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) = \frac{1}{2}(2x+2yi) = z\,.$$

Folglich ist f in keinem Punkt $z\neq 0$ komplex differenzierbar.

Bemerkung (Wirtinger–Kalkül Yoga)**.**
Schreibt man die Funktion aus Beispiel 2.6 in der Form $f(z) = z\bar{z}$ und betrachtet z und $\bar{z}$ als "unabhängige" Variablen, so ergibt "die formale Ableitung von $f(z) = z\bar{z}$ nach der Variablen $\bar{z}$", dass $\bar{\partial} f(z) = \bar{\partial}(z\bar{z}) = z$, also dasselbe Ergebnis wie in Beispiel 2.6. Dies suggeriert die

> **Merkregel**[2]
> *Man erhält $\frac{\partial f}{\partial z}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ indem man z und $\bar{z}$ als unabhängige Variablen auffasst und die Funktion f formal nach z bzw. $\bar{z}$ differenziert. Die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung besagt, dass eine Funktion, die nicht von $\bar{z}$, sondern nur von z abhängt, komplex differenzierbar ist.*

Natürlich sind z und $\bar{z}$ keineswegs unabhängige Variablen und die beiden Wirtinger Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sind daher auch *keine* partiellen Ableitungen. In den Ergänzungen zu diesem Kapitel setzen wir auseinander, dass die obige Merkregel unter durchaus praktikablen Voraussetzungen dennoch tatsächlich streng gerechtfertigt werden kann, siehe Satz A.2.4.

[2] Diese Merkregel ist, frei nach dem Mathematischen Physiker und Nobelpreisträger W. Pauli, nicht nur nicht richtig, sondern „nicht einmal falsch."

Bemerkung 2.7 (3–Strich–Regel).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ in $p \in U$ partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\overline{\partial} f(p) = \overline{\partial(\overline{f})(p)}\,, \qquad \overline{\partial}(\overline{f})(p) = \overline{\partial f(p)}\,.$$

Beweis. Es gilt mit den Abkürzungen $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\overline{\partial(\overline{f})} = \overline{\frac{1}{2}\Big((\overline{f})_x - i(\overline{f})_y\Big)} = \frac{1}{2}\Big(\overline{(\overline{f})_x} + i\overline{(\overline{f})_y}\Big) = \frac{1}{2}\Big(f_x + i f_y\Big) = \overline{\partial} f\,. \tag{$*$}$$

Dies zeigt die erste Identität. Ersetzt man in $(*)$ f durch $\overline{f}$, so folgt $\overline{(\partial f)} = \overline{\partial}(\overline{f})$. □

Wir untersuchen nun, unter welchen Zusatzbedingungen aus der Gültigkeit der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen die komplexe Differenzierbarkeit gefolgert werden kann. Wir identifizieren hierzu wie gehabt eine komplexwertige Funktion $f = u + iv$, wobei $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$, mit der Abbildung $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$. Wir schreiben zur Abkürzung

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y}\,, \qquad \text{etc.}$$

und rufen zunächst das aus der reellen Analysis bekannte Konzept der totalen Differenzierbarkeit in Erinnerung:

Definition 2.8 (Reelle Differenzierbarkeit).
*Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $p \in U$. Man nennt eine Funktion $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ im Punkt p **reell differenzierbar**, wenn die Funktion $x + iy \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ im Punkt p total differenzierbar ist, d.h. die reellen Funktionen u, v sind in p partiell differenzierbar und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $p + (x,y) \in U$ gilt:*

$$\begin{pmatrix} u(p+(x,y)) \\ v(p+(x,y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(p) \\ v(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R(x,y)\,, \tag{2.3}$$

wobei die hierduch festgelegte reelle Fehlerfunktion R der Bedingung $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ genügt.

Mithilfe des Wirtinger Kalküls lässt sich die reelle Differenzierbakeit einer Funktion elegant und übersichtlich wie folgt charakterisieren:

Satz 2.9 (Reelle Differenzierbarkeit und Wirtinger Kalkül).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f im Punkt $p \in U$ genau dann reell differenzierbar, wenn f im Punkt p partiell differenzierbar ist und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $p + z \in U$ gilt:

$$f(p+z) = f(p) + \partial f(p) \cdot z + \overline{\partial} f(p) \cdot \overline{z} + R(z)\,, \tag{2.4}$$

wobei die hierdurch festgelegte Fehlerfunktion R der Bedingung $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{R(z)}{z} = 0$ genügt.

In Analogie dazu, dass man (2.3) auch als reelle Taylor–Formel 1. Ordnung bezeichnet, nennt man (2.4) auch **komplexe Taylor–Formel 1. Ordnung**.

Beweis. Man beachte, dass für jede Wahl von $x, y \in \mathbb{R}$ der Vektor

$$\begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(p)\,x + u_y(p)\,y \\ v_x(p)\,x + v_y(p)\,y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{2.5}$$

mit der komplexen Zahl$(u_x(p)x+u_y(p)y)+i(v_x(p)x+v_y(p)y)$ identifiziert werden kann. Mit $z=x+iy$ und den Wirtinger Ableitungen $\partial f(p)$ und $\overline{\partial} f(p)$ lässt sich diese komplexe Zahl wie folgt ausdrücken

$$\begin{aligned}(u_x(p)x+u_y(p)y)+i(v_x(p)x+v_y(p)y) &\overset{(2.1)}{=} f_x(p)x+f_y(p)y \\ &\overset{(2.2)}{=} \Big(\partial f(p)+\overline{\partial} f(p)\Big)\frac{z+\overline{z}}{2}+\Big(\partial f(p)-\overline{\partial} f(p)\Big)\frac{z-\overline{z}}{2} \\ &= \partial f(p)z+\overline{\partial} f(p)\overline{z}.\end{aligned}$$

Im Hinblick auf (2.5) liest man hieraus ab, dass die Bedingung (2.3) der reellen Differenzierbarkeit von f in p mit der Bedingung (2.4) übereinstimmt, wenn man $R(x,y)$ mit $R(x+iy)$ identifiziert und $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ beachtet. □

Korollar 2.10.
Es sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen, $p\in U$ und $f:U\to\mathbb{C}$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) f ist im Punkt p komplex differenzierbar.

(b) f ist im Punkt p reell differenzierbar und erfüllt in p die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung $\overline{\partial} f(p)=0$.

Beweis. Es sei f in p partiell differenzierbar. Wir setzen

$$R(z):=f(p+z)-f(p)-\partial f(p)z-\overline{\partial} f(p)\overline{z}.$$

(a) $\Longrightarrow$ (b): Ist f in p komplex differenzierbar, so gilt nach Bemerkung 2.5, dass $\overline{\partial} f(p)=0$ sowie $\partial f(p)=f'(p)$, also

$$\frac{R(z)}{z}=\frac{f(p+z)-f(p)-f'(p)z}{z}=\frac{f(p+z)-f(p)}{z}-f'(p)\to f'(p)-f'(p)=0 \qquad \text{für } z\to 0\,.$$

Somit ist f nach Satz 2.9 im Punkt p reell differenzierbar.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Nach Voraussetzung und nach Satz 2.9 gilt

$$\frac{f(p+z)-f(p)}{z}-\partial f(p)=\frac{f(p+z)-f(p)-\partial f(p)z}{z}=\frac{R(z)}{z}\to 0 \qquad \text{für } z\to 0\,.$$

Folglich ist f in p komplex differenzierbar und $f'(p)=\partial f(p)$. □

In Korollar 2.10 lässt sich in Bedingung (b) die reelle Differenzierbarkeit von f in p nicht durch die Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit von f in p ersetzen, siehe Beispiel A. 2.7.

Da aus der stetigen partiellen Differenzierbarkeit die totale Differenzierbarkeit folgt, ergibt sich:

Folgerung. *Es sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen, $p\in U$, und $f:U\to\mathbb{C}$. Sind $u=\mathrm{Re}(f)$ und $v=\mathrm{Im}(f)$ stetig (partiell) differenzierbar in p und gilt dort die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung, so ist f in p komplex differenzierbar.*

Als weitere Anwendung der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichung zeigen wir nun, dass für *holomorphe* Funktionen f sich die Konstantheit der „Hälfte“ von f auf die gesamte Funktion „lokal fortpflanzt“.

Satz 2.11.
Es sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen und $f\in\mathscr{H}(U)$.

(a) Ist $|f|$ konstant auf U, so ist $f'\equiv 0$ in U.

(b) Ist $f'\equiv 0$ in U, so ist f lokal (d.h. in jeder Kreisscheibe $K\subseteq U$) konstant.

Beweis. (a) Ist $|f|$ identisch 0 in U, so ist auch f und somit f' identisch 0 in U. Anderenfalls ist $|f|$ konstant $\neq 0$ und es folgt mit der auch für die ∂–Ableitung gültigen Produktregel sowie der 3–Strich–Regel aus Bemerkung 2.7

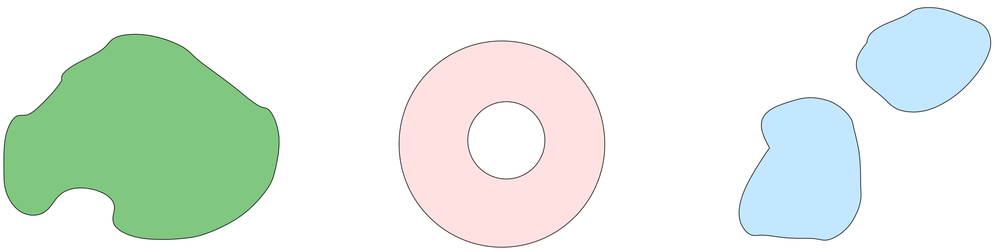
$$0 = \partial(|f|^2) = \partial(\overline{f} \cdot f) = \big(\partial(\overline{f})\big) \cdot f + \overline{f} \cdot \partial f = \overline{\overline{\partial} f} \cdot f + \overline{f} \cdot \partial f = \overline{f} \cdot f' \,.$$

Hierbei wurde zuletzt die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung ($\mathrm{CR}_{\mathbb{C}}$) sowie $\partial f = f'$ verwendet. Da $\overline{f(z)} \neq 0$ für alle $z \in U$, ergibt sich $f' \equiv 0$ in U.

(b) Ist $K_R(p) \subseteq U$ eine offene Kreisscheibe in U und $\theta \in \mathbb{R}$, so folgt für $g(r) := f(p + re^{i\theta})$, dass $g'(r) = f'(p + re^{i\theta})e^{i\theta} = 0$ für alle $r \in [0,R)$. Beachte, dass $g : [0,R) \to \mathbb{C}$ wegen Korollar 2.10 als Komposition der beiden reell differenzierbaren Funktionen f und $r \mapsto p + re^{i\theta}$ selbst reell differenzierbar ist. Der Mittelwertsatz aus der Analysis 1 impliziert $g(r) = g(0) = f(p)$ für alle $r \in [0,R)$. Dies zeigt, dass $f(z) = f(p)$ für alle $z \in K_R(p)$, d.h. f ist auf $K_R(p)$ konstant. □

Für Satz 2.11 ist die Holomorphievoraussetzung wesentlich: $f(z) = e^{i\,\mathrm{Re}\,z}$ ist betragsmäßig konstant, denn $|f(z)| = |e^{i\,\mathrm{Re}\,z}| = 1$, aber f selbst ist nicht konstant. Um eine **globale** Variante von Satz 2.11 (b) zu erhalten, führen wir die folgenden Begriffsbildungen ein.

Definition 2.12 (Kurve, Wegzusammenhang, Gebiet).
*Eine **Kurve** γ in $\mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Das Intervall $[a,b]$ heißt **Parameterintervall** von γ und der Wertebereich $\mathrm{tr}(\gamma) := \gamma([a,b])$ heißt **Träger** oder **Spur** von γ. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt **wegzusammenhängend**, falls zu je zwei Punkten $z,w \in X$ eine Kurve $\gamma : [a,b] \to X$ in X mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$ existiert. Eine nicht–leere, offene und wegzusammenhängende Menge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**.*



wegzusammenhängend — wegzusammenhängend — nicht wegzusammenhängend

Bemerkung 2.13.
Das Bild $f(X)$ einer wegzusammenhängenden Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ unter einer stetigen Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$ ist wieder wegzusammenhängend.

Beispiel 2.14 (Sternförmige Mengen)**.**
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **sternförmig** bzgl. eines Punktes $p \in A$, falls für jeden Punkt $z \in A$ die Strecke $[p,z] := \{(1-t)p + tz : t \in [0,1]\}$ von p nach z in A liegt. Jede sternförmige Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend. Insbesondere ist jede nicht–leere, offene und sternförmige Menge ein Gebiet.

In $\mathbb{R}$ sind die offenen und zugleich wegzusammenhängenden Mengen genau die offenen Intervalle. Gebiete in $\mathbb{C}$ sind daher die „natürlichen" Verallgemeinerungen offener Intervalle.

Um eine Eigenschaft von einer Teilmenge eines Gebietes G auf das gesamte Gebiet G zu übertragen, werden wir häufig das folgende topologische Hilfsmittel verwenden.

Satz 2.15.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subseteq G$. Falls M offen und abgeschlossen in G ist, so ist entweder $M = \emptyset$ oder $M = G$.

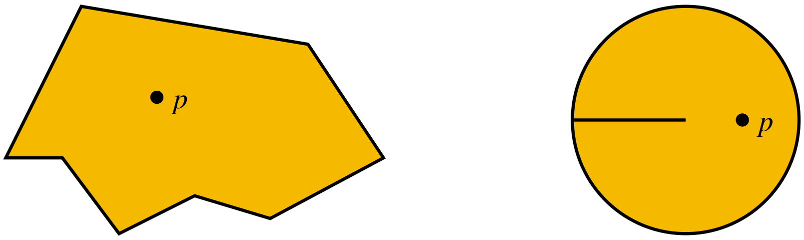


Abbildung 2.1: Sternförmige Mengen

Beweis. Annahme: $\emptyset \subsetneq M \subsetneq G$. Wähle einen Punkt $z \in M$ und einen Punkt $w \in G \backslash M$. Da G wegzusammenhängend ist, existiert eine Kurve $\gamma : [a,b] \to G$ in G mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$. Insbesondere existiert ein $t \in [a,b]$ mit $\gamma(t) \in \partial M$, z.B. $t := \inf\{s \in [a,b] \, : \, \gamma(s) \notin M\}$. Da M und $G \backslash M$ offen sind, folgt $\gamma(t) \notin M$ und $\gamma(t) \notin G \backslash M$, also $\gamma(t) \notin M \cup G \backslash M = G$. Widerspruch! □

Damit sind wir in der Lage die folgende globale Variante von Satz 2.11 (b) zu beweisen.

Korollar 2.16.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$. Ist $|f|$ konstant auf G, so ist f konstant auf G.

Beweis. Es sei ein Punkt $p \in G$ fixiert. Wir betrachten die Menge $M := \{z \in G \, : \, f(z) = f(p)\}$.

M ist abgeschlossen in G: Da f stetig auf G ist (vgl. Satz 1.3), ist M als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{f(p)\}$ unter der stetigen Funktion f abgeschlossen in G (vgl. Satz 0.44).

M ist offen in G: Es sei $q \in M$. Da G offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $K := K_r(q) \subseteq G$. Nach Satz 2.11 ist f konstant auf K, also $f(z) = f(p)$ für alle $z \in K$. Folglich ist $K_r(q) = K \subseteq M$.

Da $M \neq \emptyset$ folgt aus Satz 2.15, dass $M = G$. Folglich ist f konstant auf G. □

Bemerkung.
In Korollar 2.16 ist es wesentlich, dass die Menge G ein Gebiet und insbesondere zusammenhängend ist. Beispielsweise ist die durch $f(z) := 1$ für $\operatorname{Im} z > 0$ und $f(z) := -1$ für $\operatorname{Im} z < 0$ definierte Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorph und $|f|$ ist konstant auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, die Funktion f dagegen nicht.

V.2 Verständnisfragen

1. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine in p reell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Wir bezeichnen mit $J_f(p) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Jacobi–Matrix der Abbildung $(x,y) \mapsto (\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy))$ im Punkt $(\operatorname{Re}(p), \operatorname{Im}(p))$. Beweisen oder widerlegen Sie: f ist in p genau dann komplex differenzierbar, wenn $J_f(p)$ die Form αA mit einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einer nichtnegativen ganzen Zahl a hat.

2. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind offen bzw. ein Gebiet bzw. sternförmig?

   (i) $K_1(1) \cup K_1(2)$ (ii) $\mathbb{C} \setminus \{1/n \, : \, n \in \mathbb{N}\}$

   (iii) $\mathbb{C} \setminus \big\{x + iy \, : \, x \in \{0\} \cup \{1/n \, : \, n \in \mathbb{N}\}, y \in [-1,1]\big\}$ (iv) $K_1(0) \setminus (-1,0)$

3. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$. Ferner sei $\operatorname{Re} f : G \to \mathbb{R}$ konstant. Ist dann f konstant auf G ?

A.2 Ergänzungen und Ausblicke

A.2.1 Richtungsableitungen für holomorphe Funktionen

Definition A 2.1 (Richtungsableitung).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $\eta \in \partial\mathbb{D}$. Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt der Limes

$$\partial_\eta f(p) := \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0^+} \frac{f(p+h\eta)-f(p)}{h\eta},$$

*im Falle seiner Existenz, die **Richtungsableitung von f im Punkt p in Richtung η**.*

Proposition A 2.2.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ in p reell differenzierbar. Dann existiert für jedes $\eta \in \partial\mathbb{D}$ die Richtungsableitung von f im Punkt p in Richtung η und es gilt

$$\partial_\eta f(p) = \partial f(p) + \overline{\eta}^2 \overline{\partial} f(p).$$

Der Beweis ist eine einfache Anwendung der komplexen Taylor–Formel (2.4) und sei der Leserin überlassen. Ist insbesondere f in p komplex differenzierbar, so ist die Richtungsableitung von f in p unabhängig von der Richtung.

Satz A 2.3.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ mit $U \supseteq \overline{\mathbb{D}}$. Für $f \in \mathscr{H}(U)$ gelte

$$f(1) = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|.$$

Dann ist $f'(1)$ reell und nichtnegativ.

Beweis. Es sei f nicht konstant 0. Nach Voraussetzung ist $f(1)$ reell und gleich dem Maximum der stetigen Funktion $|f|$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$.
(i) Die Funktion $t \mapsto |f(e^{it})|^2$ ist daher in $t = 0$ differenzierbar und hat in $t = 0$ ein lokales Maximum, also dort eine verschwindende Ableitung

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(|f(e^{it})|^2\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(f(e^{it})\overline{f(e^{it})}\right) = if'(1)f(1) + f(1)\overline{(if'(1))} = 2f(1)\,\mathrm{Im}\, f'(1).$$

Dies impliziert $f'(1) \in \mathbb{R}$.
(ii) Die Funktion $r \mapsto |f(r)|^2$ ist definiert auf einem Intervall $[0,R)$ für ein $R > 1$ und nimmt ihr Maximum auf dem Intervall $[0,1]$ im Punkte $r = 1$ an. Dort ist sie differenzierbar. Daher gilt

$$0 \le \frac{d}{dr}\bigg|_{r=1} \left(|f(r)|^2\right) = f'(1)\overline{f(1)} + f(1)\overline{f'(1)} = 2f(1)\,\mathrm{Re}\, f'(1).$$

Dies impliziert $f'(1) \geq 0$. □

Wir werden später (Satz A.11.4) sehen, dass für nichtkonstantes f sogar $f'(1) > 0$ gilt. Der Schritt von $f'(1) \geq 0$ (Satz A.2.3) zu $f'(1) > 0$ ist nichttrivial, und folgt aus dem Lemma von Schwarz (Satz 11.1). Ähnliche Aussagen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen und werden dort unter dem Label „Hopf Lemma“ subsumiert. Eine ganze Industrie innerhalb der Mathematik befasst sich mit Verallgemeinerungen und Variationen des Hopf Lemmas.

A.2.2 Wirtinger Kalkül

Wir geben zunächst eine Rechtfertigung der auf Seite 14 formulierten Merkregel für die Berechnung der Wirtinger Ableitungen.

Satz A 2.4 (Wirtinger Kalkül).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $V := \{\overline{z} : z \in U\}$. Ferner sei $F : U \times V \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $w_0 \in V$ sei $F(\cdot, w_0)$ holomorph in U mit komplexer Ableitung $(D_1F)(\cdot, w_0) : U \to \mathbb{C}$;

(ii) Für jedes $z_0 \in U$ sei $F(z_0, \cdot)$ holomorph in V mit komplexer Ableitung $(D_2F)(z_0, \cdot) : V \to \mathbb{C}$.

Dann ist die Funktion

$$f : U \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := F(z, \overline{z})$$

in jedem Punkt $p \in U$ reell differenzierbar und es gilt

$$\partial f(p) = (D_1F)(p, \overline{p}), \qquad \overline{\partial} f(p) = (D_2F)(p, \overline{p}).$$

Wir beweisen Satz 2.4 unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$D_1F : U \times V \to \mathbb{C}, \quad D_2F : U \times V \to \mathbb{C} \quad \text{sind stetig}. \tag{2.6}$$

Tatsächlich folgt (2.6) automatisch aus den in Satz A.2.4 gestellten Voraussetzungen. Dies ist ein tiefliegendes Resultat aus der Funktionentheorie mehrerer komplexer Variablen, der sog. Satz von Hartogs über separate Analytizität [31], den wir in diesem Buch nicht beweisen werden. Wir werden aber in Ergänzungen zu Kapitel 7 zeigen, dass (2.6) aus der Stetigkeit bzw. bereits aus der (lokalen) Beschränkheit von $F : U \times V \to \mathbb{C}$ (und den Bedingungen (i) und (ii)) folgt, siehe Satz A.7.4.

Beweis. Unter der Voraussetzung (2.6) folgt, dass $F : U \times V \to \mathbb{C}$ im folgenden Sinne differenzierbar ist[3]. Für jeden Punkt $(p,q) \in U \times V$ ist

$$F(p+z, q+w) = F(p,q) + D_1F(p,q)z + D_2f(p,q)w + R(z,w)$$

mit

$$\lim_{(z,w)\to(0,0)} \frac{R(z,w)}{|z|+|w|} = 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(p+z) = F(p+z, \overline{p}+\overline{z}) &= F(p,\overline{p}) + D_1F(p,\overline{p})z + D_2F(p,\overline{p})\overline{z} + R(z,\overline{z}) \\ &= f(p) + D_1F(p,\overline{p})z + D_2F(p,\overline{p})\overline{z} + R(z,\overline{z}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

mit

$$\lim_{z\to 0} \frac{R(z,\overline{z})}{z} = 0. \tag{2.8}$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = D_1F(p,\overline{p}) + D_2F(p,\overline{p}) + \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{R(h,\overline{h})}{h} = D_1F(p,\overline{p}) + D_2F(p,\overline{p}),$$

$$\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(p+ih)-f(p)}{h} = D_1F(p,\overline{p})i - D_2F(p,\overline{p})i + \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{R(ih,\overline{ih})}{h} = i\left(D_1F(p,\overline{p}) - D_2F(p,\overline{p})\right).$$

[3] Hierzu kann man in vollkommen analoger Weise zum Beweis des aus der reellen Analysis bekannten Satzes vorgehen, der besagt, dass eine partiell differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen total differenzierbar ist.

Daher ist f in p partiell differenzierbar mit

$$\partial_x f(p) = D_1F(p,\overline{p}) + D_2F(p,\overline{p}), \qquad \partial_y f(p) = i\,(D_1F(p,\overline{p}) - D_2F(p,\overline{p}))\,.$$

Dies impliziert

$$\partial f(p) = (D_1F)(p,\overline{p}), \qquad \overline{\partial} f(p) = (D_2F)(p,\overline{p})\,.$$

Aus (2.7) und (2.8) folgt nach Satz 2.9, dass f in p reell differenzierbar ist mit $\partial f(p) = (D_1F)(p,\overline{p})$ sowie $\overline{\partial} f(p) = (D_2F)(p,\overline{p})$. □

Beispiel A 2.5.
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $f(z) = (1-|z|^2)^{-1}$. Dann ist $F(z,w) := (1-zw)^{-1}$ eine auf der Menge $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,:\, zw \neq 1\}$ definierte stetige Funktion, die bzgl. z und bzgl. w holomorph ist mit stetigen Ableitungen

$$D_1F(z,w) = w(1-zw)^{-2} \quad \text{und} \quad D_2F(z,w) = z(1-zw)^{-2}\,.$$

Nach Satz 2.4 ist dann f reell differenzierbar mit

$$\partial f(z) = D_1F(z,\overline{z}) = \overline{z}(1-|z|^2)^{-2} \quad \text{und} \quad \overline{\partial} f(z) = z(1-|z|^2)^{-2}\,.$$

Mit $f(x+iy) = (1-(x^2+y^2))^{-1}$ lassen sich diese Formeln natürlich auch direkt mithilfe der Definition von $\partial = (\partial_x - i\partial_y)/2$ und $\overline{\partial} = (\partial_x + i\partial_y)/2$ herleiten.

Es ist gelegentlich nützlich, die Wirtinger Ableitungen von Kompositionen reell differenzierbarer Funktionen berechnen zu können. Die entsprechenden Kettenregeln lassen sich einfach aus der komplexen Taylor–Formel (2.4) und der 3–Strich–Regel herleiten und lauten:

Satz A 2.6 (Kettenregel für die Wirtinger Ableitungen ∂ und $\overline{\partial}$).
Es seien $U,V \subseteq \mathbb{C}$ offen und $p \in U$. Es sei $f : U \to V$ in $p \in U$ reell differenzierbar und $g : V \to \mathbb{C}$ sei in $f(p) \in V$ reell differenzierbar. Dann ist $h := g \circ f : U \to \mathbb{C}$ in p reell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial z}(p) &= \frac{\partial g}{\partial w}(f(p)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(p) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(p)) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(p) \\
\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}(p) &= \frac{\partial g}{\partial w}(f(p)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(p)) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(p)\,.
\end{aligned}$$

Beweis. Es sei $q = f(p)$. Satz 2.9 impliziert

$$f(p+z) = f(p) + \partial f(p) z + \overline{\partial} f(p)\overline{z} + R_1(z) \tag{2.9}$$

$$g(q+w) = g(q) + \partial g(q) w + \overline{\partial} g(q)\overline{w} + R_2(w)\,, \tag{2.10}$$

wobei

$$\lim_{z\to 0} \frac{R_1(z)}{z} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{w\to 0} \frac{R_2(w)}{w} = 0\,.$$

Dann folgt aus (2.9) und (2.10) mit $q = f(p)$ und $w = f(p+z) - q$,

$$\begin{aligned}
g(f(p+z)) &= g(q + (f(p+z) - q)) \\
&= g(q) + \partial g(q)\Big(\partial f(p) z + \overline{\partial} f(p)\overline{z} + R_1(z)\Big) + \overline{\partial} g(q)\overline{\Big(\partial f(p) z + \overline{\partial} f(p)\overline{z} + R_1(z)\Big)} \\
&\quad + R_2\left(f(p+z) - q\right)\,.
\end{aligned}$$

Durch Umordnung erhält man

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(p+z) = g(f(p)) &+ \Big(\partial g(f(p))\partial f(p) + \overline{\partial} g(f(p))\overline{\overline{\partial} f(p)}\Big) z \\
&+ \Big(\partial g(f(p))\overline{\partial} f(p) + \overline{\partial} g(f(p))\overline{\partial f(p)}\Big)\overline{z} + R(z)\,,
\end{aligned}$$

wobei
$$R(z) := \overline{\partial} g(q) R_1(z) + R_2(f(p+z)-q)$$
die Bedingung
$$\lim_{z\to 0}\frac{R(z)}{z} = \lim_{z\to 0}\left(\overline{\partial} g(q)\frac{R_1(z)}{z} + \frac{R_2(f(p+z)-q)}{z}\right) = 0$$
erfüllt. Man beachte hierzu, dass für $z \neq 0$
$$\left|\frac{R_2(f(p+z)-q)}{z}\right| \le \left\{\begin{matrix} \left|\dfrac{R_2(f(p+z)-q)}{f(p+z)-q}\dfrac{f(p+z)-q}{z}\right| & \text{falls } f(p+z)-q \neq 0 \\ 0 & \text{falls } f(p+z)-q = 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow 0$$
für $z \to 0$. Wie im Beweis von Satz 2.4 folgt hieraus, dass $h = g \circ f$ in p reell differenzierbar ist mit
$$\partial h(p) = \partial g(f(p))\,\partial f(p) + \overline{\partial} g(f(p))\,\partial(\overline{f})(p)$$
$$\overline{\partial} h(p) = \partial g(f(p))\,\overline{\partial} f(p) + \overline{\partial} g(f(p))\,\overline{\partial}(\overline{f})(p)\,. \qquad \square$$

A.2.3 Partielle Differenzierbarkeit + $(\mathrm{CR})_{\mathbb{C}}$ vs. Komplexe Differenzierbarkeit

Wir untersuchen, inweit sich Bedingung (b) in Korollar 2.10 abschwächen lässt und beginnen mit einem instruktiven Beispiel.

Beispiel A 2.7.
Die Funktion
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{falls } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \\ 0 & \text{falls } = 0, \end{cases}$$
ist (auch in $z = 0$) stetig, und erfüllt
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{R\ni h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \lim_{R\ni h\to 0}\frac{f(ih)}{h} = i,$$
d.h. f ist in $p = 0$ partiell differenzierbar und erfüllt dort die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung. Dennoch ist f in $z = 0$ nicht komplex differenzierbar, da der Limes des Differenzenquotienten
$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{z^4}{|z|^4}$$
für $z \to 0$ nicht existiert.

Nach Korollar 2.10 kann die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in Beispiel 2.7 im Punkt $z = 0$ nicht reell differenzierbar sein (Dies lässt sich auch direkt überprüfen). Beispiel 2.7 zeigt daher auch, dass in Korollar 2.10 die Bedingung (b) “f ist reell differenzierbar in p mit $\overline{\partial} f(p) = 0$” sich nicht durch “$f$ ist partiell differenzierbar in p mit $\overline{\partial} f(p) = 0$” abschwächen lässt. Dies ändert sich, wenn man f als stetig und partiell differenzierbar auf einer *offenen* Menge U voraussetzt:

Satz A 2.8 (Satz von Looman–Menchoff).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig und partiell differenzierbar mit $\overline{\partial} f(z) = 0$ für alle $z \in U$. Dann ist $f \in \mathscr{H}(U)$.

Für einen Beweis verweisen wir auf [47, S. 43 ff.].

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 2.1.
Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial z}\Big(\log|z|\Big)$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big(\log|z|\Big)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2.2 (Staatsexamen Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 1)**.**

(a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $u(x,y) = x^2 + 2axy + by^2$ der Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$?

(b) Bestimmen Sie für jedes solche Paar (a,b) den Imaginärteil aller zugehörigen holomorphen Funktionen.

Aufgabe 2.3 (Komplexe Taylorformel 2. Ordnung)**.**
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ sei in z_0 zweimal reell differenzierbar (d.h. f, f_z und $f_{\overline{z}}$ sind in z_0 reell differenzierbar). Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f(z) \quad &= \quad f(z_0) + f_z(z_0) \cdot (z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big[f_{zz}(z_0) \cdot (z - z_0)^2 + 2 f_{z\overline{z}}(z_0) \cdot |z - z_0|^2 + f_{\overline{z}\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)}^2 \Big] + r(z)(z - z_0)^2 \end{aligned}$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $r : U \to \mathbb{C}$ für die $r(z_0) = 0$ gilt. Folgern Sie, dass

$$f_{z\overline{z}}(z_0) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt - f(z_0) \right).$$

Aufgabe 2.4 (Staatsexamen Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 1)**.**

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $G_* := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \overline{z} \in G\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_* : G_* \to \mathbb{C}\,, \qquad f_*(z) := \overline{f(\overline{z})}$$

ebenfalls holomorph ist.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = ax^2 + by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$?

Aufgabe 2.5.
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathscr{H}(G)$ mit $\operatorname{Im} f(z) = 0$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 2.6.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass zu je zwei Punkten $z, w \in G$ eine *stückweise stetig differenzierbare* Kurve $\gamma : [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$ existiert.

Aufgabe 2.7 (Staatsexamen Frühjahr 2018, Thema 1, Aufgabe 3)**.**
Wie üblich identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x + iy$. Sei

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & \text{wenn } z \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } z = 0\,. \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist und dass f in $(0,0)$ die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass f in $z = 0$ *nicht* komplex differenzierbar ist. Begründen Sie, warum dies nicht im Widerspruch zum Ergebnis aus Teil (a) steht.

Kapitel 3

Konforme Abbildungen

Die Geometrie wurde erfunden, um die Mühsamkeit der Berechnung durch Zeichnen von Linien schnell zu vermeiden.
I. Newton[1]

Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen besitzen eine elegante geometrische Interpretation. Hierzu wechseln wir wiederum die Perspektive und betrachten Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ nun als **Abbildungen** mit Definitions– und Wertebereich im **euklidischen** reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Wir verwenden hierbei das **kanonische** Skalarprodukt und die hiervon induzierte Winkelmessung.

Definition 3.1 (winkeltreu bzw. lokal konform in einem Punkt).
*Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine reell differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt $p \in U$ **lokal konform** oder **winkeltreu**, falls der orientierte Winkel zwischen je zwei sich in p schneidenden differenzierbaren Kurven bei der Abbildung unter f unverändert (invariant) bleibt.*

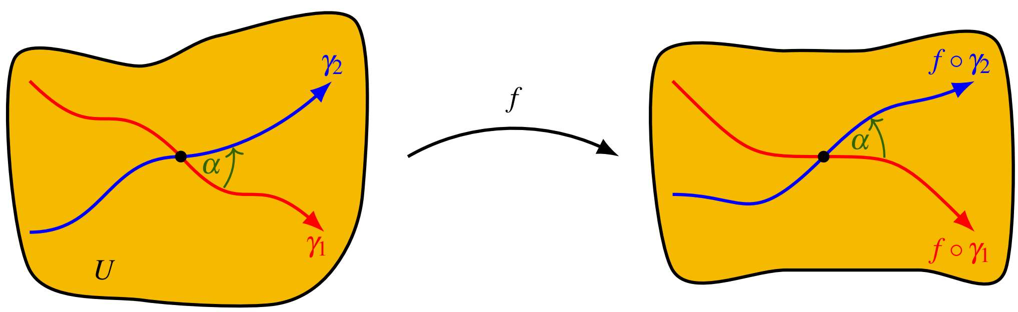


Abbildung 3.1: Orientierter Winkel zwischen zwei sich schneidenden Kurven; lokal konforme Abbildung

Bemerkung.
Man beachte, dass für zwei differenzierbare Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$, die sich für $t = t_0 \in (a,b)$ im Punkt $p = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ schneiden, der orientierte Winkel zwischen γ_1 und γ_2 in p durch

$$\angle\left(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0)\right) := \arg\left(\frac{\gamma_2'(t_0)}{\gamma_1'(t_0)}\right) \in (-\pi, \pi]\,,$$

gegeben ist. Hierbei wird vorausgesetzt, dass für die **Tangentialvektoren**

$$\gamma_j'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0}\,, \qquad j = 1,2$$

[1] Dieses Zitat findet sich in Newtons *Arithmetica Universalis* [48]. Dieses Werk wurde von William Whiston, Newtons Nachfolger auf dem Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge, herausgegeben und beruhte auf Newtons Vorlesungsaufzeichnungen. Die Publikation war von Newton nicht autorisiert. Es wird kolportiert, dass Newton in Erwägung gezogen hatte, alle Exemplare des Buches aufzukaufen, um dessen Verbreitung zu verhindern.

an die Kurven γ_j im Punkt p stets $\gamma_j'(t_0) \neq 0$ gilt. Die Bedingung der Winkeltreue besagt also, dass dann stets $(f \circ \gamma_j)'(t_0) \neq 0$ und

$$\angle\big((f\circ\gamma_1)'(t_0),(f\circ\gamma_2)'(t_0)\big) = \angle\big(\gamma_1'(t_0),\gamma_2'(t_0)\big)$$

gelten muss. Wir ergänzen noch, dass eine Umparametrisierung einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, d.h. der Übergang von γ zu $\gamma_* := \gamma \circ \phi : [c,d] \to \mathbb{C}$ mit einer stetig differenzierbaren bijektiven Abbildung $\phi : [c,d] \to [a,b]$, die die Bedingungen $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$ und $\phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [c,d]$ erfüllt, lediglich eine Multiplikation des Tangentialvektors $\gamma'(\phi(t_0))$ mit der (reell!) positiven Zahl $\phi'(t_0)$ bewirkt, d.h.

$$\gamma_*'(t_0) = \gamma'(\phi(t_0)) \cdot \phi'(t_0)\,.$$

Insbesondere hängt der orientierte Winkel zwischen zwei sich schneidenden Kurven nicht von der Wahl der Parametrisierungen derselben ab.

Die kompliziert anmutende Bedingung der lokalen Winkeltreue einer Abbildung in einem Punkt erweist sich nun als äquivalent dazu, dass die komplexe Ableitung der Funktion in diesem Punkt existiert und nicht verschwindet.

Satz 3.2 (Komplex differenzierbar vs. lokal konform).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei reell differenzierbar in $p \in U$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) f ist in p lokal konform.

(b) f ist in p komplex differenzierbar mit $f'(p) \neq 0$.

Beweis. Es sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine differenzierbare Kurve und $t_0 \in (a,b)$ mit $\gamma(t_0) = p$ und $\gamma'(t_0) \neq 0$. Da f in p reell differenzierbar ist, zeigt die komplexe Taylorformel (Satz 2.9), dass

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0)) + \partial f(p)\,(\gamma(t)-\gamma(t_0)) + \overline{\partial} f(p)(\overline{\gamma(t)-\gamma(t_0)}) + R(\gamma(t)-p)$$

mit

$$\lim_{z\to 0} \frac{R(z)}{z} = 0$$

und daher

$$(f\circ\gamma)'(t_0) = \partial f(p)\cdot\gamma'(t_0) + \overline{\partial} f(p)\cdot\overline{\gamma'(t_0)}\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Es seien $\gamma_1,\gamma_2 : [a,b]$ zwei differenzierbare Kurven in U für die $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = p$ und $\gamma_1'(t_0) \neq 0 \neq \gamma_2'(t_0)$ für ein $t_0 \in (a,b)$ gilt. Da $f'(p) \neq 0$ und $\overline{\partial} f(p) = 0$, ergibt sich $(f\circ\gamma_j)'(t_0) = f'(p)\gamma_j{}'(t_0) \neq 0$ und

$$\angle\big((f\circ\gamma_1)'(t_0),(f\circ\gamma_2)'(t_0)\big) = \arg\left(\frac{f'(z_0)\,\gamma_2{}'(t_2)}{f'(z_0)\,\gamma_1{}'(t_1)}\right) = \angle\big(\gamma_1{}'(t_0),\gamma_2{}'(t_0)\big)\,.$$

Dies zeigt, dass f in p lokal konform ist.

(a) $\Rightarrow$ (b) Wähle eine Kreisscheibe $K_r(p) \subseteq U$. Es sei $\eta \in \mathbb{C}$ mit $|\eta| = 1$ und $\gamma_\eta(t) = p + t\eta$, $t \in (-r,r)$. Dann gilt

$$\arg\left(\frac{\partial f(p)\,\eta + \overline{\partial} f(p)\,\overline{\eta}}{\partial f(p) + \overline{\partial} f(p)}\right) = \angle\big((f\circ\gamma_1)'(0),(f\circ\gamma_\eta)'(0)\big) = \angle\big(\gamma_1'(0),\gamma_\eta'(0)\big) = \arg\left(\frac{\eta}{1}\right)$$

und daher

$$\arg\left(\partial f(p) + \overline{\partial} f(p)\,\frac{\overline{\eta}}{\eta}\right) = \arg\big(\partial f(p) + \overline{\partial} f(p)\big)$$

für alle $|\eta| = 1$. Dies impliziert $\overline{\partial} f(p) = 0$. Folglich ist f in p komplex differenzierbar und $0 \neq (f\circ\gamma_1)'(0) = f'(p)$. □

Definition 3.3 (Konforme Abbildung).
Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt ***lokal konform*** *in U, falls f in jedem Punkt $p \in U$ lokal konform ist. Die Abbildung $f : U \to V$ heißt* ***konforme Abbildung von** U **auf** V*, falls sie bijektiv und lokal konform in U ist.*

Beispiel 3.4 (Quadratabbildung).
Die Funktion $f(z) := z^2$ bildet die rechte Halbebene $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ konform auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ ab. Die Abbildung f ist aber in $p = 0$ nicht mehr winkeltreu. Die Halbgeraden $\{re^{i\theta} : r > 0\}$ werden bijektiv auf die Halbgeraden $\{re^{2i\theta} : r > 0\}$ abgebildet

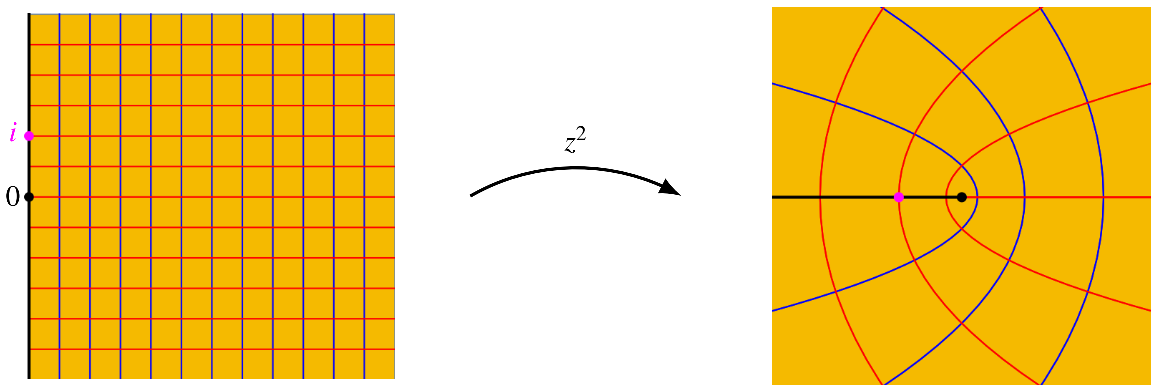


Abbildung 3.2: $f(z) = z^2$

Beispiel 3.5 (Exponentialfunktion).
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist surjektiv und lokal konform, aber nicht konform, da nicht injektiv. Dagegen bildet exp den horizontalen Streifen $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ konform auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ ab.

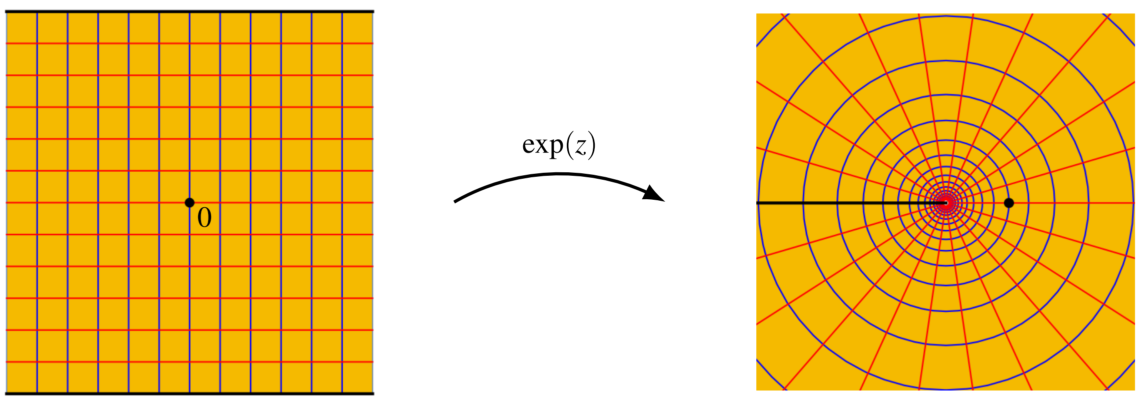


Abbildung 3.3: $f(z) = \exp(z)$

Beispiel 3.6 (Möbiustransformationen).
Sind $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, so ist die Möbiustransformation $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ wegen $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ lokal konform. Genauer gilt:

(a) Falls $c = 0$, so ist o.E. $T(z) = az + b$, $a \neq 0$. Daher ist T als Komposition einer Drehstreckung $z \mapsto az$ mit einer Translation $z \mapsto z + b$ eine konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$. Wir setzen $T(\infty) := \infty$.

(b) Falls $c \neq 0$, so ist T eine konforme Abbildung von $\mathbb{C} \backslash \{-d/c\}$ auf $\mathbb{C} \backslash \{a/c\}$ als Komposition von Drehstreckungen, Translationen und einer Inversion $z \mapsto 1/z$:

$$T(z) = \frac{bc-ad}{c^2}\,\frac{1}{z+d/c} + \frac{a}{c}\,.$$

Wir setzen $T(\infty) := a/c$ und $T(-d/c) := \infty$. Man beachte

$$T = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ T_4$$

mit

$$T_4(z) = z + \frac{d}{c}\,, \quad T_3(z) = \frac{1}{z}\,, \quad T_2(z) = \frac{bc-ad}{c^2} z\,, \quad T_1(z) = z + \frac{a}{c}\,.$$

Damit ist jede Möbiustransformation eine bijektive Selbstabbildung von $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Bemerkung (Gruppenstruktur)**.**
Es sei Möb die Menge aller Möbiustransformationen. Für die Abbildung

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) := \left\{M \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \det M \neq 0\right\} \to \text{Möb}\,, \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,,$$

gilt

$$T_M\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{au+bv}{cu+cv} = \frac{u'}{v'} \quad \text{mit} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Daher ist Möb eine Gruppe bzgl. der Komposition und $M \mapsto T_M$ ein Gruppenhomomorphismus, d.h. $T_{M_1 \cdot M_2} = T_{M_1} \circ T_{M_2}$.

Um das Abbildungsverhalten von Möbiustransformationen besser zu verstehen, erweist es sich als vorteilshaft, jede Gerade L in $\mathbb{C}$ mit der Menge $L \cup \{\infty\} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ zu identifizieren.

Beispiel 3.7 (Inversion)**.**
Die Möbiustransformation $z \mapsto 1/z$ bildet Kreislinien durch 0 auf Geraden ab.

Satz 3.8.
Das Bild einer Geraden oder Kreislinie unter einer Möbiustransformation ist wieder eine Gerade oder eine Kreislinie.

Beweis. Jede Möbiustransformation ist eine Komposition von Drehstreckungen, Translationen und einer Inversion. Für die beiden erstgenannten Abbildungen ist die Behauptung offensichtlich. Für die Inversion $z \mapsto 1/z$ beachten wir, dass aus der Gleichung für eine Gerade bzw. einer Kreislinie, siehe Aufgabe 1.2,

$$\alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \delta = 0\,, \qquad |\beta|^2 - \alpha\delta > 0$$

durch Ersetzen von z durch $1/z$ und anschließender Multiplikation mit $z\overline{z}$ sich wieder die Gleichung einer Geraden oder einer Kreislinie ergibt. □

Beispiele 3.9.

(a) Die Möbiustransformation

$$T(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

bildet die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ konform auf die rechte Halbebene $\mathbb{H}^+$ ab.
(Dieses Beispiel war Gegenstand einer Staatsexamensaufgabe im Frühjahr 2024 (Thema 2, Aufgabe 5.))

(b) Die Cayley–Abbildung

$$z \mapsto C(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

bildet die obere Halbebene $\mathbb{U}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ konform auf $\mathbb{D}$ ab.

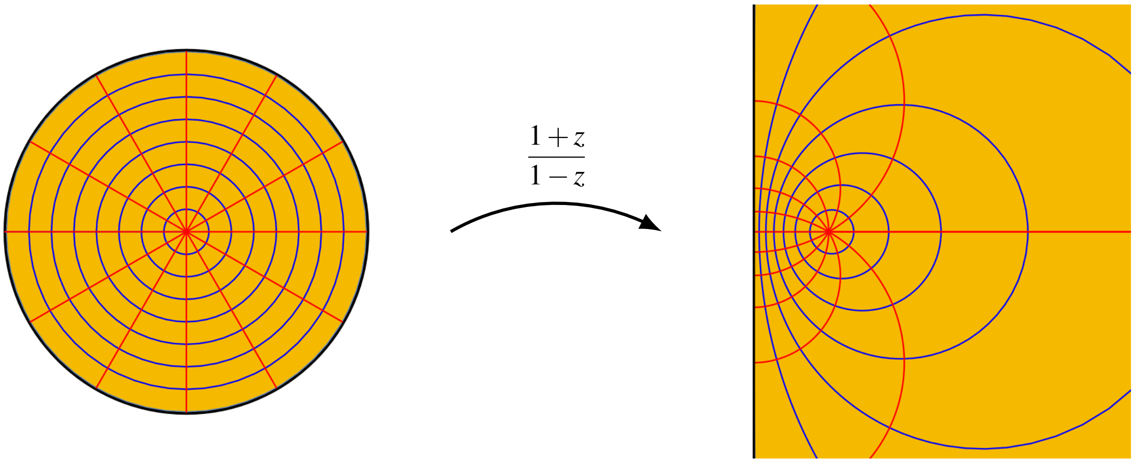


Abbildung 3.4: $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$

Beweis. (a) Dies sieht man ohne jegliche Rechnung wie folgt ein. Da offenbar $T(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ gilt, bildet T als Möbiustransformation (die Gerade) $\mathbb{R}$ auf (die Gerade) $\mathbb{R}$ ab. Ferner bildet T die Kreislinie $\partial\mathbb{D}$ wegen $T(1) = \infty$ auf eine Gerade durch $T(-1) = 0$ ab. Da sich $\partial\mathbb{D}$ und $\mathbb{R}$ orthogonal schneiden und T eine konforme Abbildung ist, schneiden sich auch die Bildmengen orthogonal, d.h. $T(\partial\mathbb{D})$ ist die imaginäre Achse. Wegen $T(0) = 1$ muss die bijektive und stetige Abbildung T daher $\mathbb{D}$ bijektiv auf die rechte Halbebene abbilden.
(b) Man beachte, dass die Umkehrabbildung

$$C^{-1}(w) = i\frac{1+w}{1-w}$$

der Cayley–Abbildung als Hintereinanderschaltung der Abbildung T aus (a) und der Abbildung $z \mapsto iz$ die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ auf die obere Halbebene abbildet. $\square$

Bemerkung (Cayley–Abbildung)**.**
Die Cayley–Abbildung findet u.a. Anwendung in der Funktionalanalysis. J. von Neumann [71] hat sie verwendet um den Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren zu beweisen, siehe z.B. [40, §32.2].

Beispiel 3.10.
Es sei $a \in \mathbb{D}$. Dann ist die Möbiustransformation $T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$,

$$T_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$$

konform.

Beweis. Die Abbildung $T_a : \mathbb{C}\backslash\{1/\overline{a}\} \to \mathbb{C}\backslash\{1/\overline{a}\}$, $T_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$ ist konform. Wegen

$$1 - \left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} \tag{$\heartsuit$}$$

gilt: $|z| = 1 \iff |T_a(z)| = 1$. Dies zeigt $T_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Da $T_a(0) = a \in \mathbb{D}$ folgt $T_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. $\square$

Die Gleichung ($\heartsuit$) erhält man durch einfaches „Ausmultiplizieren“. Die speziellen Möbiustransformationen T_a aus Beispiel 3.10 spielen im Folgenden eine wichtige Rolle, da sie es ermöglichen, Informationen vom Mittelpunkt $z = 0$ der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ in jeden anderen Punkt $a \in \mathbb{D}$ zu übertragen.

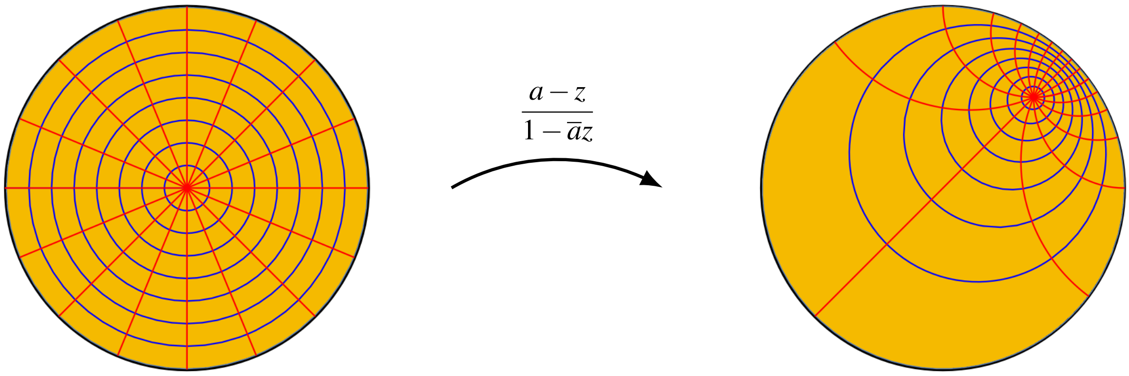


Abbildung 3.5: $T_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$ für $a = \frac{1+i}{2}$.

V.3 Verständnisfragen

1. Ist die Hintereinanderschaltung zweier lokal konformer Abbildungen wieder lokal konform ?
2. Gibt es eine konforme Abbildung von $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < 1\}$ auf $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$?
3. Man finde eine explizite konforme Abbildung des 1. Quadranten $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0 \wedge \mathrm{Im}\, z > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$.
4. Man zeige direkt mithilfe der Definition, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, in keinem Punkt $p \in \mathbb{C}$ lokal konform ist und schließe daraus, dass f in keinem Punkt $p \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

A.3 Ergänzungen und Ausblicke

A.3.1 Quasikonforme Abbildungen

Bemerkung A 3.1 (Quasikonforme Abbildungen).
Stattet man eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit einer Familie von Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_z$, $z \in U$, aus, so lassen sich auch winkeltreue Abbildungen

$$f : (U, \langle \cdot, \cdot \rangle_z) \to (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

betrachten. Wir skizzieren dies kurz. Ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_z$ im Punkt $z \in U$ durch die positiv definite Matrix

$$M(z) := \begin{pmatrix} E(z) & F(z) \\ F(z) & G(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gegeben, so können wir o.E. annehmen, dass $\det M(z) = E(z)G(z) - F(z)^2 = 1$. Bezeichnet nun $Df(z) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Jacobi–Matrix von f, so ist $f : (U, \langle \cdot, \cdot \rangle_z) \to (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ genau dann winkeltreu, wenn

$$\langle Df(z)\xi, Df(z)\xi \rangle = \phi(z) \langle \xi, M(z)\xi \rangle \,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2 \,,$$

mit einer zunächst unspezifizierten Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}_+$. Dies ist äquivalent mit

$$Df(z)^T Df(z) = \phi(z) M(z) \,, \qquad z \in U \,.$$

Wegen $\det M(z) = 1$ ist notwendigerweise $\phi(z) = \det Df(z)$. Somit ist die Abbildung $f : (U, \langle \cdot, \cdot \rangle_z) \to (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ genau dann winkeltreu, wenn

$$Df(z)^T Df(z) = \det Df(z) \cdot M(z) \,, \qquad z \in U \,.$$

Dies ist die sog. Beltrami Gleichung, die sich mithilfe der Wirtingerableitungen in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \mu(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

schreiben lässt, wobei

$$\mu(z) = \frac{E(z) - G(z) + 2iF(z)}{E(z) + G(z) + 2}\,.$$

Man beachte, dass wegen $1 = \det M(z) = E(z)G(z) - F(z)^2$ *die Ungleichung*

$$|\mu(z)|^2 = \frac{(E(z) - G(z))^2 + 4F(z)^2}{(E(z) + G(z) + 2)^2} = \frac{(E(z) + G(z))^2 - 4}{(E(z) + G(z) + 2)^2} < 1$$

für den sog. Beltrami Koeffzienten $\mu(z)$ *gilt. Für* $M(z) = I$ *ist* $\mu = 0$ *und die Beltrami Gleichung reduziert sich auf die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung. Man nennt daher winkeltreue Abbildungen* $f : (U, \langle\cdot,\cdot\rangle_z) \to (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *auch* ***quasikonforme Abbildungen****. Diese spielen eine ubiquitäre Rolle in vielen Teilgebieten der Mathematik, siehe u.a. [3, 4, 42].*

A.3.2 Möbiustransformationen

Satz 3.8 besitzt die folgende bemerkenswerte Umkehrung.

Satz A 3.2 (Carathéodory [19], siehe auch [9]).
Es seien G und Ω *Gebiete in* $\mathbb{C}$ *und* $f : G \to \Omega$ *eine bijektive Abbildung, die jede Kreislinie in G auf eine Gerade oder eine Kreislinie in* Ω *bildet. Dann ist* f *oder* $\overline{f}$ *eine Möbiustransformation.*

Man beachte, dass noch nicht einmal die Stetigkeit von f vorausgesetzt wird; sie folgt !

Bemerkung A 3.3 (Möbiustransformationen in der Physik I).
Möbiustranformationen lassen sich mit den in der speziellen Relativitätstheorie grundlegenden Lorentztransformationen identifizieren. Somit hat jede Aussage über Möbiustransformationen unmittelbare "reale" Auswirkungen. Für kurze Einführungen in diese Thematik verweisen wir auf [66, 70] und für die grundlegende Darstellung auf [56].

Bemerkung A 3.4 (Möbiustransformationen in der Physik II).
Spezielle Möbiustransformation (siehe Beispiel 3.9) spielen in der Funktionalanalysis eine tragende Rolle. Beispielsweise lässt sich der für die Quantenmechanik zentrale Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren mit deren Hilfe auf den Spektralsatz für unitäre (und damit beschränkte) Operatoren zurückführen (J. v. Neumann 1929).

Bemerkung A 3.5 (Möbiustransformationen in der dreidimensionalen hyperbolischen Geometrie).
Poincaré [57] hat 1883 entdeckt, dass sich die Möbiustransformation mit den Isometrien des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes identifizieren lassen. Dies deutet auf eine enge Beziehung der Funktionentheorie mit der dreidimensionalen Geometrie und führte Thurston in den 1980er Jahren zu einer großangelegten "Geometrisierungsvermutung", die 2002 von Perel'man bewiesen wurde. Wir verweisen auf [67, §2.6].

Bemerkung A 3.6 (Konforme Abbildungen und Möbiustransformationen in höheren Dimensionen).
Konforme (=winkeltreue) Abbildungen und Möbiustransformationen (geeignet geometrisch definiert) lassen sich auch in höheren Dimensionen untersuchen. Es zeigt sich jedoch, dass jede hinreichend glatte konforme Abbildung eines Gebietes in $\mathbb{R}^n$ *für* $n > 2$ *bereits eine Möbiustransformation ist (Liouville 1850). Dies ist auch unter weitaus schwächeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gewährleistet (siehe [34]). Die Klasse der Möbiustransformationen im* $\mathbb{R}^n$ *wird detailiert in [6] untersucht.*

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 3.1 (Staatsexamen Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 3)**.**
Konstruieren Sie eine Möbiustransformation, die die Kreisscheibe $K := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 2\}$ konform auf die obere Halbebene $H := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ abbildet. Ist eine solche Abbildung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3.2 (Staatsexamen Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 1)**.**
Gegeben sei die Möbius–Transformation $h(z) := \frac{1}{z-1}$. Sei $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe und $K \subseteq \mathbb{C}$ die abgeschlossene Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}\ |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$. Mit $\partial\mathbb{E}$ und ∂K werde der Rand von $\mathbb{E}$ bzw. K bezeichnet.

(a) Man zeige, dass $h(\partial\mathbb{E})$ und $h(\partial K)$ parallele Geraden sind.

(b) Man gebe die Geraden $h(\partial\mathbb{E})$ und $h(\partial K)$ jeweils explizit in der Form $ax+by=c$ an, wobei x und y Real– und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ sind.

(c) Man bestimme $h(\mathbb{E} \setminus K)$ explizit durch Ungleichungen der Form $ax+by \gtrless c$ und skizziere die Mengen $\mathbb{E} \setminus K$ und $h(\mathbb{E} \setminus K)$.

Aufgabe 3.3 (Staatsexamen Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 1)**.**
Betrachten Sie das Gebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z-1/2| > 1/2\}.$$

Geben Sie eine konforme Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$$

an.
(Hinweis: Bilden Sie zunächst G mit einer Möbiustransformation auf den Streifen
$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ab und verwenden Sie dann die Exponentialfunktion.)

Aufgabe 3.4.
Es sei $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$. Zeigen Sie, dass $f(z) = \cos(z)$ auf S injektiv ist und $f(\overline{S}) = \mathbb{C}$.

Aufgabe 3.5.
Es sei $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Bestimmen Sie

(a) $f(\partial K_r(0))$ für jedes $r > 0$;

(b) $f(\{t\eta : t \in (0,1]\})$ für jedes $\eta \in \partial\mathbb{D}$.

Kapitel 4

Integration im Komplexen

Geradeaus kann man nicht sehr weit kommen. A. de Saint-Exupéry, *Der kleine Prinz*

Zum weiteren Ausbau der Theorie erweist es sich als notwendig, Funktionen entlang geeigneter Kurven $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ zu integrieren. Für die Zwecke der Funktionentheorie ist es hierbei ausreichend, sich auf die Klasse der *stückweise stetig differenzierbaren* Kurven zu beschränken (siehe hierzu auch die Ergänzungen zu diesem Kapitel). Dies bedeutet, dass eine Partition $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ existiert derart, dass γ eingeschränkt auf jedes Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ stetig differenzierbar ist.

Definition 4.1 (Wege, Wegintegral).
Eine (stetige) Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, die stückweise stetig differenzierbar ist, heißt ***Weg***[1]*. Für einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f : \mathrm{tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$ heißt das Integral*

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re}\left(f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\left(f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)dt$$

das ***Wegintegral von f längs γ****.*

Die abkürzende Schreibweise

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

lässt sich gut merken, wenn man formal die Substitutionsregel für $z = \gamma(t)$, d.h. $dz = \gamma'(t)\,dt$, verwendet. Man beachte, dass z hier lediglich die Rolle einer Integrationsvariablen spielt, die man daher beliebig umbenennen darf, z.B.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(w)\,dw = \int_\gamma f(\heartsuit)\,d\heartsuit\,.$$

Beispiel 4.2.
Es sei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Dann gilt $\gamma'(t) = ie^{it}$ und

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}}\,ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i\,.$$

Bemerkung 4.3 (Umparametrisierung ändert den Wert eines Wegintegrals nicht).
Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $\varphi : [c,d] \subseteq \mathbb{R} \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ und $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ sowie $\gamma_* = \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$. Dann gilt für

[1] Vorsicht! Diese Terminologie ist keineswegs Standard. Manche Lehrbücher verwenden die Bezeichnung *Integrationsweg*.

jede stetige Funktion $f : \mathrm{tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma_*} f(z)\,dz = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\,\gamma'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \overset{\tau=\varphi(t)}{=} \int_a^b f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,d\tau = \int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Insbesondere lässt sich als Parameterintervall stets das Intervall $[0,1]$ wählen; eine passende Umparametrisierung ist durch $\varphi : [0,1] \to [a,b]$, $\varphi(t) = (1-t)a + tb$, gegeben. Von dieser Möglichkeit machen wir sogleich Gebrauch.

Bemerkung 4.4 (Entgegengesetzt durchlaufener Weg).
Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *ein Weg. Dann gilt für den* ***entgegengesetzt durchlaufenen Weg***

$$\gamma_- : [0,1] \to \mathbb{C}\,, \qquad \gamma_-(t) := \gamma(1-t)\,,$$

dass

$$\int_{\gamma_-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Bemerkung 4.5 (Zusammengesetzte Wege).
Es seien $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ *und* $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ *Wege mit* $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$*. Indem man erst* γ_1 *und dann* γ_2 *durchläuft, erhält man den aus* γ_1 *und* γ_2 ***zusammengesetzten Weg***

$$\gamma_2 \diamond \gamma_1 : [0,2] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \textit{für } t \in [0,1]\,, \\ \gamma_2(t-1) & \textit{für } t \in [1,2]\,. \end{cases}$$

Dann gilt für jede stetige Funktion $f : \mathrm{tr}(\gamma_2 \diamond \gamma_1) \to \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma_2 \diamond \gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Beweis. Setze $\gamma = \gamma_2 \diamond \gamma_1$. Dann gilt mit der Substitution $\tau = t-1$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^2 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt + \int_1^2 f(\gamma_2(t-1))\,\gamma_2'(t-1)\,dt$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_1^2 f(\gamma_2(\tau))\,\gamma_2'(\tau)\,d\tau = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

□

Wir diskutieren einige konkrete Beispiele für Wegintegrale, die im Folgendem eine wichtige Rolle spielen werden.

Beispiele 4.6 (Orientierte Kreislinien, orientierte Strecken und orientierte Dreiecke)**.**

(a) Der geschlossene Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = p + re^{it}$, durchläuft die Kreislinie $\partial K_r(p)$ einmal entgegen dem Uhrzeigersinn. Wir setzen für jede stetige Funktion $f : \partial K_r(p) \to \mathbb{C}$

$$\int_{\partial K_r(p)} f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(p + re^{it})\,i\,re^{it}\,dt\,.$$

Für jede Kreisscheibe $K_r(p)$ bekommt das Symbol $\partial K_r(p)$ somit eine zweite Bedeutung zugewiesen. Tritt es als „Integrationsbereich“ in einem Wegintegral in Erscheinung, so ist es stets als Abkürzung für den Weg $[0,2\pi] \ni t \mapsto p + re^{it}$ zu lesen.

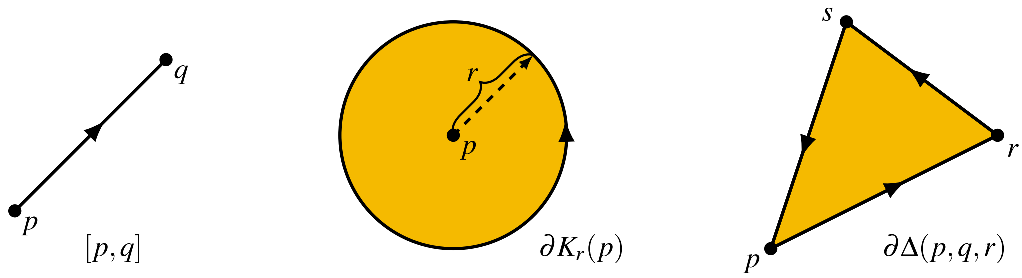


Abbildung 4.1: Orientierte Strecken, Kreislinien und Dreiecke

(b) Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = p + t(q-p)$, die (orientierte) Strecke, die die Punkte $p, q \in \mathbb{C}$ miteinander verbindet und $[p,q] =: \mathrm{tr}(\gamma)$. Dann setzen wir für jede stetige Funktion $f : [p,q] \to \mathbb{C}$

$$\int_{[p,q]} f(z)\,dz := \int_{\gamma} f(z)\,dz = (q-p)\int_0^1 f(p+(q-p)t)\,dt\,.$$

Falls $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p < q$, so gilt mit der Substitution $x = p + (q-p)t$:

$$\int_{[p,q]} f(z)\,dz = (q-p)\int_0^1 f(p+(q-p)t)\,dt = \int_p^q f(x)\,dx\,.$$

Die üblichen Integrale über Intervalle sind also spezielle Wegintegrale.

(c) Es seien $p, q, r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $\Delta = \Delta(p,q,r)$ bezeichne das (abgeschlossene und ausgefüllte) Dreieck mit den im mathematisch positiven Sinne orientierten Eckpunkten p, q und r. Für eine stetige Funktion $f : \partial\Delta \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz := \int_{[p,q]} f(z)\,dz + \int_{[q,r]} f(z)\,dz + \int_{[r,p]} f(z)\,dz\,.$$

Das Symbol $\partial\Delta$ bedeutet in diesem Zusammenhang also den zusammengesetzen Weg $[p,q] \diamond [q,r] \diamond [r,p]$.

Die Berechnung von Wegintegralen alleine auf Grundlage der Definition ist in vielen Fällen mühselig. Für holomorphe Funktionen und „geeignete“ Wege werden sich im weiteren Verlauf unserer Überlegungen sehr kraftvolle und im Grunde recht einfache Methoden für solche Berechungen erschließen. Für theoretische Überlegungen sind zuweilen Abschätzungen des Werts eines Integrales ausreichend.

Für eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ und eine Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ setzen wir im Folgenden

$$||f||_K := \sup_{z \in K} |f(z)|\,.$$

Ist K kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig ist, so gilt $||f||_K = \max_{z \in K} |f(z)|$.

Satz 4.7 (Dreiecksungleichung und Standardabschätzung für Wegintegrale).
Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *ein Weg mit Weglänge*

$$L(\gamma) := \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

und $f : \mathrm{tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$ *sei stetig. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) (Dreiecksungleichung)

$$\left| \int\limits_\gamma f(z)\,dz \right| \le \int\limits_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt\,; \tag{$\trianglelefteq$}$$

(b) (Standardabschätzung)

$$\left| \int\limits_\gamma f(z)\,dz \right| \le ||f||_{\mathrm{tr}(\gamma)} \cdot L(\gamma)\,. \tag{ML}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst für eine stückweise stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung

$$\left| \int\limits_a^b g(t)\,dt \right| \le \int\limits_a^b |g(t)|\,dt\,. \tag{$\trianglelefteq'$}$$

Hierzu wähle $\eta \in \partial\mathbb{D}$ derart, dass

$$\eta \int\limits_a^b g(t)\,dt = \left| \int\limits_a^b g(t)\,dt \right|\,.$$

Dann gilt

$$\left| \int\limits_a^b g(t)\,dt \right| = \mathrm{Re}\left(\eta \int\limits_a^b g(t)\,dt \right) = \int\limits_a^b \mathrm{Re}\,(\eta g(t))\;dt \le \int\limits_a^b |g(t)|\,dt\,,$$

also die Dreiecksungleichung ($\trianglelefteq'$). Hieraus ergeben sich dann sowohl ($\trianglelefteq$) also auch (ML)

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_\gamma f(z)\,dz \right| &= \left| \int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \right| \le \int\limits_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \\ &\le \max_{z \in \mathrm{tr}(\gamma)} |f(z)| \cdot \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\,dt = ||f||_{\mathrm{tr}(\gamma)} \cdot L(\gamma)\,. \end{aligned}$$

□

Die Standardabschätzung (ML) ist eine unmittelbare Folgerung aus der Dreiecksungleichung ($\trianglelefteq$). Sie ist im allgemeinen schwächer als diese, aber in der Regel einfacher anwendbar. Für viele Zwecke ist die Standardabschätzung ausreichend und wir werden sie häufig anwenden. Im Englischen nennt man sie treffend „ML–Inequality“. M steht für das Betragsmaximum der zu integrierenden Funktion; L für die Weglänge.

Die folgende einfache Konsequenz aus der Standardabschätzung (ML) werden wir später verwenden. Sie besagt, dass der Wert eines Wegintegrals längs einer (orientierten) Strecke stetig von den Endpunkten der Strecke abhängt.

Korollar 4.8.
Es seien $p,q \in \mathbb{C}$, U eine offene Umgebung von $[p,q]$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{[p+\eta,q+\eta]} f(z)\,dz = \int_{[p,q]} f(z)\,dz\,.$$

Beweis. Für $p = q$ ist nichts zu zeigen, es gelte also $p \neq q$. Für $\delta > 0$ sei $S_\delta := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z,[p,q]) \leq \delta\}$ der abgeschlossene δ–Schlauch um die Strecke $[p,q]$. Aufgrund der Überdeckungskompaktheit von $[p,q]$ existiert ein $\delta_0 > 0$ derart, dass S_{δ_0} in U enthalten ist. Konstruktionsgemäß liegt für jedes $\eta \in \mathbb{C}$ mit $|\eta| \leq \delta_0$ die Strecke $[p+\eta, q+\eta]$ in S_{δ_0} und man überprüft leicht, dass

$$\int_{[p+\eta,q+\eta]} f(z)\,dz = \int_{[p,q]} f(z+\eta)\,dz\,.$$

Die Standardabschätzung (ML) impliziert daher

$$\left| \int_{[p+\eta,q+\eta]} f(z)\,dz - \int_{[p,q]} f(z)\,dz \right| \leq \max_{z \in [p,q]} \big|f(z+\eta) - f(z)\big| \cdot |p-q|\,.$$

Nun beachte man, dass die stetige Funktion f auf der kompakten Menge S_{δ_0} gleichmäßig stetig ist. Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert daher ein positives $\delta \leq \delta_0$ derart, dass $|f(z+\eta) - f(z)| \leq \varepsilon$ für alle $z, z+\eta \in S_{\delta_0}$ mit $|z+\eta-z| = |\eta| \leq \delta$. Dies gilt insbesondere für alle $z \in [p,q]$ und alle $|\eta| \leq \delta$. Es folgt

$$\left| \int_{[p+\eta,q+\eta]} f(z)\,dz - \int_{[p,q]} f(z)\,dz \right| \leq \varepsilon \cdot |p-q| \quad \text{für alle} \quad |\eta| \leq \delta\,,$$

was zu zeigen war. □

V.4 Verständnisfragen

1. Unter welchen Bedingungen gilt in der Dreiecksungleichung (Satz 4.7 (a)) Gleichheit ?

2. Unter welchen Bedingungen gilt in der Standardabschätzung (Satz 4.7 (b)) Gleichheit ?

3. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Ferner seien $\gamma_n : [0,1] \to U$ Wege, die gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen den Weg $\gamma : [0,1] \to U$ konvergieren. Gilt dann

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,dz \to \int_{\gamma} f(z)\,dz\,?$$

4. (Wegintegrale und Konjugation)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [0,1] \to U$ ein Weg in U. Gilt dann

$$\overline{\int_{\gamma} f(z)\,dz} = \int_{\gamma} \overline{f(z)}\,dz\,?$$

A.4. Ergänzungen und Ausblicke

A.4.1 Das Lemma von Jordan

Die Standardabschätzung (ML) aus Satz 4.7 (b) ist in einigen praxisrelevanten Fällen zu grob und man arbeitet besser mit der Dreiecksungleichung ($\trianglelefteq$). Ein besonders wichtiger Fall ist:

Satz A 4.1 (Lemma von Jordan).
Für $R > 0$ sei $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{iw}\, dw \right| < \pi \quad \textit{und} \quad L(\gamma_R)\, ||e^{iz}||_{\mathrm{tr}(\gamma_R)} = \pi R\,.$$

Beweis. Eine elementare Überlegung (z.B. Kurvendiskussion) zeigt, dass $\sin(t) \geq 2t/\pi$ für alle $0 \leq t \leq \pi/2$ mit strikter Ungleichheit für $0 < t < \pi/2$, d.h.

$$\int_0^\pi \left| e^{i\gamma_R(t)} \gamma_R'(t) \right| dt = R \int_0^\pi e^{-R\sin(t)}\, dt = 2R \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(t)}\, dt < 2R \int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\, dt = \pi(1 - e^{-R})\,,$$

aber

$$L(\gamma_R)\, ||e^{iz}||_{\mathrm{tr}(\gamma_R)} = \pi R \max_{t \in [0,\pi]} e^{-R\sin(t)} = \pi R\,.$$

□

Das Lemma von Jordan kann man gewinnbringend bei der Berechnung von Fouriertransformierten einsetzen, siehe hierzu Satz 15.4.

A.4.2 Die Substitutionsregel

Bemerkung 4.3 besitzt folgende nützliche Variante.

Satz A 4.2.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{H}(U)$ mit stetiger komplexer Ableitung, γ ein Weg in U sowie $g : \mathrm{tr}(f \circ \gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int_\gamma g(f(z)) f'(z)\, dz = \int_{f \circ \gamma} g(w)\, dw\,.$$

Der Beweis ist identisch mit dem Beweis von Bemerkung 4.3 und sei den Leserinnen und Lesern überlassen. Wie wir später sehen werden, ist die Voraussetzung, dass die holomorphe Funktion f eine stetige komplexe Ableitung besitzt, redundant.

Beispiel A 4.3.
Wir berechnen den Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{1} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}}$$

mit der Substitution (vgl. Beispiel 17.6)

$$w = \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \text{für } z \in \partial\mathbb{D}^+ := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \wedge \mathrm{Im}\, z \geq 0\}\,.$$

Wir setzen dazu $\gamma : [0, \pi] \to \partial\mathbb{D}^+$, $\gamma(t) = e^{it}$,

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

sowie

$$g:[-1,1]\to\mathbb{R}\,,\qquad g(w)=\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,,$$

und erhalten mit

$$f'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)=\frac{z-1/z}{2z}=\frac{z-\overline{z}}{2z}=\frac{i\operatorname{Im}z}{z}\qquad (z\in\partial\mathbb{D})$$

zunächst

$$\frac{f'(z)}{\sqrt{1-f(z)^2}}=\frac{1}{z}\frac{i\operatorname{Im}z}{\sqrt{1-(z+1/z)^2/4}}=\frac{i\operatorname{Im}z}{z}\frac{1}{\sqrt{-(z-1/z)^2/4}}=\frac{i\operatorname{Im}z}{\pm i(z-1/z)/2}=\frac{\mp i}{z}\,.$$

Wegen $zf'(z)/i=\operatorname{Im}z\geq 0$ für $z\in\partial\mathbb{D}^+$ muss hier stets das "+" gewählt werden. Dies impliziert

$$\int_{-1}^{1}\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}=\int_\gamma\frac{f'(z)}{\sqrt{1-f(z)^2}}\,dz=\frac{1}{i}\int_\gamma\frac{dz}{z}=\frac{1}{i}\int_0^\pi\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt=\int_0^\pi 1\,dt=\pi\,.$$

A.4.3 Geometrische Interpretation von Wegintegralen

Komplexe Wegintegrale besitzen eine elegante und nützliche Interpretation, die auf dem Konzept des Pólya-Vektorfelds beruht.

Definition A 4.4.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $H:U\to\mathbb{C}$. Dann heißt

$$H^*:U\to\mathbb{R}^2\,,\qquad H(z):=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}H(z)\\ -\operatorname{Im}H(z)\end{pmatrix}\,,$$

das ***Pólya-Vektorfeld*** *von H.*

Das Pólya-Vektorfeld H^* von H ist daher identisch mit der komplexwertigen Funktion $\overline{H}:U\to\mathbb{C}$, wenn man Vektoren $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ als Punkte $x+iy\in\mathbb{C}$ interpretiert. Die Divergenz des Pólya-Vektorfelds H^* von $H=u+iv$ ist

$$\operatorname{div}H^*(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}$$

und seine Rotation

$$\operatorname{rot}H^*(z)=-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Man nennt ein Vektorfeld $F:U\to\mathbb{R}^2$ **quellenfrei**, falls $\operatorname{div}F=0$ und **wirbelfrei**, falls $\operatorname{rot}F=0$.

Im Zusammenspiel mit der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichung ergibt sich aus Korollar 2.10 der folgende Zusammenhang.

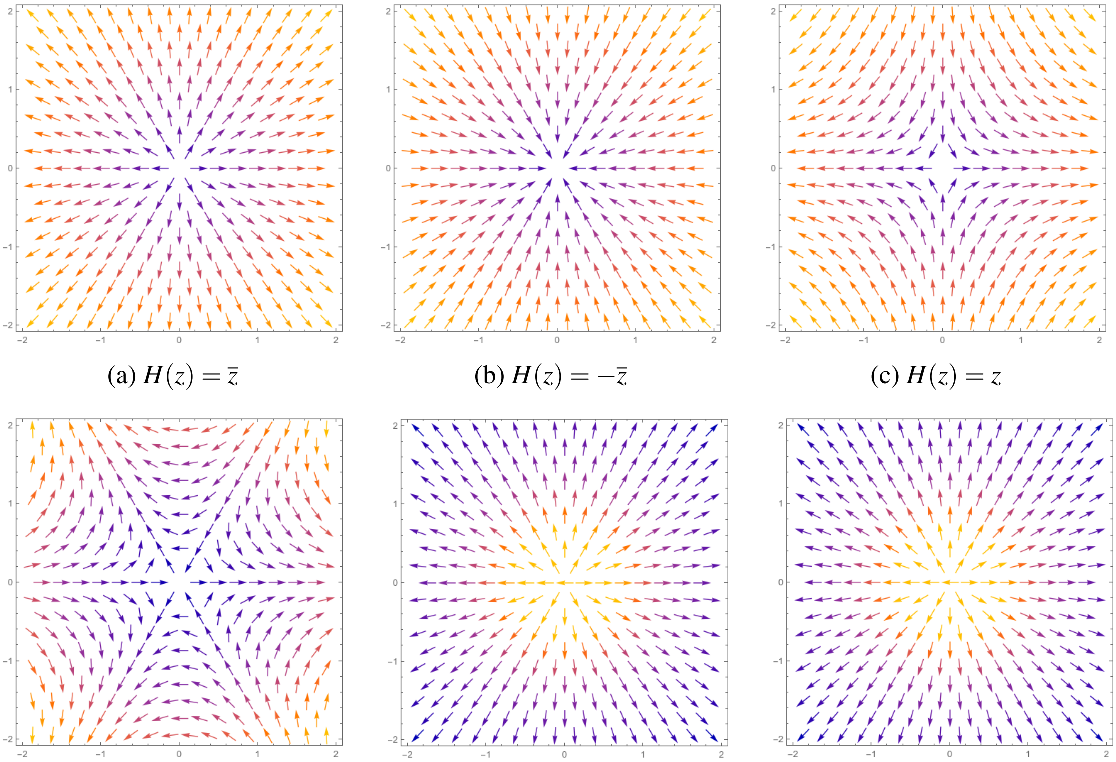
Satz A 4.5.
Es sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen und $H:U\to\mathbb{C}$ im Punkt $p\in U$ reell differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(a) H ist in p komplex differenzierbar;

(b) Das Pólya-Vektorfeld H^* von H ist quellen- und wirbelfrei in p.

Interpretiert man das Pólya-Vektorfeld einer Funktion als Strömungsfeld einer Flüssigkeit, so bedeutet dies, dass es keine Quellen oder Senken sowie keine Wirbel für die Flüssigkeit gibt, außer an den Stellen, an denen die Funktion nicht komplex differenzierbar ist.

— Übungsaufgaben —



(a) $H(z) = \bar{z}$ (b) $H(z) = -\bar{z}$ (c) $H(z) = z$

(d) $H(z) = z^2$ (e) $H(z) = 1/z$ (f) $H(z) = 1/z^2$

Abbildung 4.2: Beispiele von Pólya-Vektorfeldern

Aufgabe 4.1.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und und im Punkt $p \in U$. Zeigen Sie, dass f in p genau dann komplex differenzierbar ist, wenn

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \int\limits_{\partial K_r(p)} f(z)\,dz = 0\,.$$

Aufgabe 4.2.
Berechnen Sie jeweils die Integrale $\int\limits_\gamma \bar{z}\,dz$ und $\int\limits_\gamma z\,dz$ über die folgenden Wege:

(a) $\gamma(t) := t, t \in [-1,1]$.

(b) $\gamma(t) = e^{it}, t \in [-\pi, 0]$.

(c) $\gamma(t) = e^{it}, t \in [-\pi, \pi]$.

Kapitel 5

Cauchy–Integrale und Windungszahlen

Hilbert once said [...] that the best way to learn a theory is to find, and then to study a concrete example of that theory, a root example that illustrates everything that can happen.

P. Halmos, *The Problem of Learning to Teach*

Es seien $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ und $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}$ fixiert. Dann ist die Funktion

$$z \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j}{w_j - z}$$

holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{w_1, \ldots, w_n\}$. Mithilfe komplexer Wegintegrale konstruieren wir nun eine "große" Klasse holomorpher Funktionen, indem wir die Summe durch ein Integral ersetzen:

Definition 5.1 (Cauchy–Integral).
Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f : \mathrm{tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt

$$\mathscr{C}_f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{tr}(\gamma)\,,$$

*das **Cauchy–Integral von** f.*

Satz 5.2.
Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f : \mathrm{tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist für jedes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ das Cauchy–Integral $\mathscr{C}_f$ von f in der Kreisscheibe $K_\varrho(z_0)$, $\varrho := \mathrm{dist}(z_0, \mathrm{tr}(\gamma))$, durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad \textit{mit} \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw\,,$$

darstellbar.

Die Kreisscheibe $K_\varrho(z_0)$ in Satz 5.2 ist die größte offene Kreisscheibe um z_0, die in der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ enthalten ist. Satz 5.2 impliziert insbesondere, dass Cauchy–Integrale $\mathscr{C}_f$ in $\mathbb{C} \setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ analytisch und somit auch beliebig oft komplex differenzierbar sind.

Beweis. Wähle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{tr}(\gamma)$. Es sei $z \in K_\varrho(z_0)$ beliebig aber fest. Dann gilt

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| \le \frac{|z - z_0|}{\varrho} < 1$$

für alle $w \in \mathrm{tr}(\gamma)$. Es folgt daher mithilfe der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k}_{(*)}$$

für alle $w \in \operatorname{tr}(\gamma)$. Da die Reihe $(*)$ gleichmäßig auf $\operatorname{tr}(\gamma)$ konvergiert, zeigt Satz 0.36 (b) , dass

$$\mathscr{C}_f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \sum_{k=0}^\infty \frac{f(w)}{w-z_0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw\,.$$

□

Die folgende Bemerkung beschreibt für einen Weg γ die Struktur der offenen Menge $\mathbb{C}\setminus\operatorname{tr}(\gamma)$.

Bemerkung 5.3 (Komponenten offener Mengen).
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Zu jedem Punkt $z \in U$ sei $\mathscr{F}_z$ die Menge aller offenen wegzusammenhängenden Teilmengen $S \subseteq U$ mit $z \in S$. Dann ist

$$C_z := \bigcup_{S\in\mathscr{F}_z} S$$

offen und wegzusammenhängend, also ein Gebiet. Ferner enthält C_z jede Menge $S \in \mathscr{F}_z$, d.h. C_z ist das „größte“ Gebiet in U, das z enthält. C_z heißt ***Komponente***[1] *von U. Für alle Punkte $z_1, z_2 \in U$ gilt entweder $C_{z_1} = C_{z_2}$ oder $C_{z_1} \cap C_{z_2} = \emptyset$, d.h. U lässt sich als disjunkte Vereinigung seiner Komponenten darstellen.*

Ist γ ein Weg in $\mathbb{C}$, dann ist $U := \mathbb{C}\setminus\operatorname{tr}(\gamma)$ eine offene Menge in $\mathbb{C}$ mit genau einer unbeschränkten Komponente. Denn es gibt ein $R > 0$ mit $\operatorname{tr}(\gamma) \subseteq \overline{K_R(0)}$, d.h. $\mathbb{C}\setminus\overline{K_R(0)}$ ist wegzusammenhängende Teilmenge von U, also in einer Komponente von U enthalten, die daher unbeschränkt sein muss. Andererseits sind alle anderen Komponenten von U Teilmengen von $K_R(0)$, also beschränkt.

Wir können nun das Cauchy–Integral für $f \equiv 1$ *geometrisch* interpretieren.

Satz 5.4.
Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $z \in \mathbb{C}\setminus\operatorname{tr}(\gamma)$ und $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(a) - z = |\gamma(a) - z|e^{i\varphi_0}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = \varphi_0$ und $\gamma(t) - z = |\gamma(t) - z|e^{i\varphi(t)}$ für alle $t \in [a,b]$. Ist γ überdies geschlossen, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}\,.$$

Beweis. The proof is by magic (and essentially due to Ahlfors). Existenz: Die Funktion

$$\lambda(t) := \exp\left(\int\limits_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\right)\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

ist auf $[a,b]$ stückweise stetig differenzierbar mit

$$\lambda'(t) = \lambda(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,.$$

Dies impliziert

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda(t)}{\gamma(t)-z}\right) = 0\,.$$

[1] Komponenten werden in der Literatur of **Zusammenhangskomponenten** genannt. Wir verwenden der Kürze halber den Begiff Komponente.

Wegen $\lambda(a) = 1$ ergibt sich

$$\frac{\lambda(t)}{\gamma(t)-z} = \frac{1}{\gamma(a)-z}, \qquad t \in [a,b]. \tag{$*$}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\gamma(t)-z}{|\gamma(t)-z|} = \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}\frac{\gamma(a)-z}{|\gamma(a)-z|} = \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}e^{i\varphi_0} = \exp\left[i\,\mathrm{Im}\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\right) + i\varphi_0\right].$$

Also ist durch

$$\varphi(t) := \mathrm{Im}\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\right) + \varphi_0$$

eine stetige Funktion auf $[a,b]$ mit $\varphi(a) = \varphi_0$ und $\gamma(t) - z = |\gamma(t)-z|e^{i\varphi(t)}$ gegeben.
Eindeutigkeit: Hat auch $\tilde{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}$ diese Eigenschaften, so ist $e^{i\varphi(t)} = e^{i\tilde{\varphi}(t)}$, also $\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ für jedes $t \in [a,b]$. Da $\varphi - \tilde{\varphi}$ stetig ist und $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(0)$, folgt $\varphi \equiv \tilde{\varphi}$.

Ist γ geschlossen, so folgt aus $(*)$ für $t = b$, dass $1 = \lambda(b) = \exp\left(\int_\gamma \frac{dw}{w-z}\right)$, also

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}}_{\in\mathbb{Z}} = \mathrm{Im}\left(i \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}\right) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi}.$$

$\square$

Definition 5.5 (Windungszahl).
Es sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$. Dann heißt

$$n(z,\gamma) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

*die **Windungszahl** (oder **Umlaufzahl** oder **Index**) von γ bzgl. z.*

Satz 5.6.
Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Dann nimmt die Windungszahl $n(z,\gamma)$ nur ganzzahlige Werte an und ist in jeder Komponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ konstant. Auf der unbeschränkten Komponente gilt $n(z,\gamma) = 0$.

Beweis. Nach Satz 5.2 ist $z \mapsto n(z,\gamma)$ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$, also insbesondere stetig auf $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$. Nach Satz 5.4 ist $n(z,\gamma)$ stets ganzzahlig und somit auf jeder Komponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$ konstant. Ferner gilt mithilfe der Standardabschätzung (ML) und der Dreiecksungleichung

$$|n(z,\gamma)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{dw}{w-z}\right| \le \frac{L(\gamma)}{2\pi}\max_{w\in\mathrm{tr}(\gamma)}\frac{1}{|z-w|} \le \frac{L(\gamma)}{2\pi}\max_{w\in\mathrm{tr}(\gamma)}\frac{1}{\big||z|-|w|\big|} \to 0 \quad \text{für } |z| \to \infty.$$

Folglich ist $|n(z,\gamma)| < 1$ also $= 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem Betrag, d.h. für alle z in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{tr}(\gamma)$. $\square$

Beispiel 5.7.
Wählt man $\gamma = \partial K_r(z_0)$ in Satz 5.2, so ergibt sich

$$n(z, \partial K_r(z_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 1 & \text{für alle } z \in K_r(z_0)\,, \\ 0 & \text{für alle } z \notin \overline{K_r(z_0)}\,. \end{cases}$$

Nach Satz 5.6 genügt es hierzu, $n(z_0, \gamma)$ zu berechnen. Es ergibt sich

$$n(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dw}{w - z_0} \overset{w = z_0 + re^{it}}{=} \frac{r}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{re^{it}}\, dt = 1\,.$$

Dieses Beispiel spielt im Folgenden eine wichtige Rolle.

A.5 Ergänzungen und Ausblicke

Bemerkung A 5.1 (Nullstellen und Windungszahlen, Prä–Argumentprinzip).
Es sei

$$p(z) := a \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$$

ein Polynom vom Grade n. Dann ist

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}\,,$$

d.h.

$$n(p \circ \gamma_r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p \circ \gamma_r} \frac{dv}{v} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{p'(w)}{p(w)}\, dw = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{dw}{w - z_j} = n$$

für $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, *falls* $r > \max\{|z_j| \,:\, j = 1, \ldots, n\}$. *Somit gilt*

Windungszahl der Bildkurve von γ_r unter p
=
Anzahl der Nullstellen von p im Inneren von γ_r.

Satz A 5.2 (Walking–the–dog Lemma, basic).
Es seien $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *geschlossene Wege mit*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_2(t)| \quad \textit{für alle } t \in [a,b]\,.$$

Dann gilt

$$n(\gamma_1, 0) = n(\gamma_2, 0)\,.$$

(γ_1 beschreibe den Weg eines Hundes und γ_2 den Weg des Hundehalters um einen Baum ($z = 0$). Hund und Herrchen sind fortschrittlich und verwenden eine Hundeleine mit flexibler Länge. Kommt der Hundehalter dem Baum niemals näher als seinem Abstand zum Hund (=Länge der Hundeleine), so umrunden Hund und Hundehalter den Baum gleich oft.

Beweis. Für den "Quotientenweg" $\gamma := \gamma_1/\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $|\gamma(t) - 1| < 1$ oder $\gamma(t) \in K_1(1)$ für alle $t \in [a,b]$, d.h.

$$0 = n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}\, dt = n(\gamma_1, 0) - n(\gamma_2, 0)\,.$$

□

Die Formulierung von Satz A.5.2 ignoriert, dass die zugrundeliegende Situation an sich „symmetrisch“ ist.

Satz A 5.3 (Walking–the–dog Lemma, advanced).
Es seien $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *geschlossene Wege mit*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| + |\gamma_2(t)| \quad \textit{für alle } t \in [a,b] .$$

Dann gilt

$$n(\gamma_1, 0) = n(\gamma_2, 0) .$$

(Befindet sich der Baum niemals auf der geraden Strecke zwischen Hund und Hundehalter, so umrunden beider den Baum gleich oft.)

Beweis. Für $\gamma := \gamma_1/\gamma_2$ gilt $|\gamma(t) - 1| < 1 + |\gamma(t)|$ oder $\gamma(t) \notin (-\infty, 0]$ für alle $t \in [a,b]$, d.h. $n(\gamma, 0) = 0$ und man schließt wie eben. □

Windungszahlen bilden nach wie vor faszinierende Fragestellungen, siehe z.B. [14].

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 5.1. (a) Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg mit $0 \notin \operatorname{tr}(\gamma)$. Berechnen Sie das Cauchy–Integral von $f(z) := 1/z$ bzgl. γ.

(b) Es sei $\gamma = \partial\mathbb{D}$. Berechnen Sie das Cauchy–Integral von $f(z) := \bar{z}$ bzgl. $\partial\mathbb{D}$.

(Hinweis: Spezialfall von (a))

Aufgabe 5.2.
Es sei $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : \partial K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass für das Cauchy–Integral F von f bzgl. $\partial K_r(z_0)$ die Reihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k , \qquad a_k = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw$$

für alle $|z| > r$ gilt, wobei die Konvergenz absolut und auf jeder Menge $\mathbb{C} \setminus K_\varrho(z_0)$, $\varrho > r$, gleichmäßig ist.

Hinweis: Beachten Sie

$$-\frac{1}{w - z} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} ,$$

für geeignete $z, w \in \mathbb{C}$.

Kapitel 6

Die Integralsätze von Goursat und Cauchy

In der reellen eindimensionalen Analysis lassen sich bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ für stetige Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ prinzipiell mithilfe einer Stammfunktion F des Integranden berechnen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\,.$$

Diesem Mechanismus liegt der reelle *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* (HDI), vgl. Satz 0.33, zugrunde. Wir übertragen beide Konzepte, Stammfunktionen und HDI, ins Komplexe. Dies ist widerstandslos möglich und führt uns zugleich unausweichlich und in natürlicher Weise auf die Frage nach der Abhängigkeit eines Wegintegrals vom Verlauf des Weges, und schlussendlich zum Cauchy Integralsatz, einem der Grundpfeiler der Funktionentheorie.

Definition 6.1 (Stammfunktion).
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f:G\to\mathbb{C}$ eine Abbildung. Eine Funktion $F\in\mathscr{H}(G)$ heißt ***(holomorphe) Stammfunktion zu*** *f, falls $F'(z)=f(z)$ für alle $z\in G$ gilt.*

Satz 6.2 (HDI im Komplexen).
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Die Funktion $f:G\to\mathbb{C}$ sei stetig und besitze eine holomorphe Stammfunktion $F\in\mathscr{H}(G)$. Dann gilt für für jeden Weg $\gamma:[a,b]\to G$, dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))\,.$$

Beweis. Nach der Kettenregel und dem HDI (Satz 0.33) gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\big(F\circ\gamma\big)(t)\,dt = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))\,.$$

□

Zur Illustration behandeln wir nochmals Beispiel 5.7.

Beispiel 6.3.
Wir berechnen für fixiertes $z\in\mathbb{C}\setminus\partial K_r(p)$,

$$\frac{d}{dz}\Big(n\big(z,\partial K_r(p)\big)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_{\partial K_r(p)}\frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_r(p)}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{w-z}\right)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_r(p)}\frac{1}{(w-z)^2}\,dw = 0\,.$$

Die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration ist gestattet (Warum?), und das Integral rechter Hand verschwindet nach dem HDI im Komplexen, da der Integrand $w\mapsto(w-z)^{-2}$ in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ die dort holomorphe Stammfunktion $w\mapsto-(w-z)^{-1}$ besitzt. Folglich ist $n\big(\cdot,\partial K_r(p)\big)$ in jeder der beiden Zusammenhangskomponenten von $\partial K_r(p)$ konstant. Wegen $n\big(p,\partial K_r(p)\big)=1$ und $n\big(z,\partial K_r(p)\big)\to 0$ für $|z|\to\infty$ ergibt sich daher $n\big(z,\partial K_r(p)\big)=1$ für $z\in K_r(p)$ und $n\big(z,\partial K_r(p)\big)=0$ für $|z-p|>r$.

Besitzt eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Stammfunktion in G, so hängt also der Wert des Integrals $\int_\gamma f(z)\,dz$ längs eines Weges γ in G nur vom Anfangs– und Endpunkt des Weges γ ab, aber nicht vom sonstigen Verlauf des Weges. Ist insbesondere $\gamma : [a,b] \to G$ ein *geschlossener* Weg in G (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$), so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Diese Aussage lässt sich umkehren:

Satz 6.4 (Stammfunktionen vs. Wegunabhängigkeit).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f hat eine holomorphe Stammfunktion $F \in \mathscr{H}(G)$.

(b) Für jeden geschlossenen Weg γ in G gilt $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Ist das Gebiet G überdies sternförmig, so ist (b) äquivalent zu

(b') Für jedes Dreieck Δ in G gilt $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Beweis. "(b) $\Longrightarrow$ (a)": Es sei $z_0 \in G$ fest gewählt. Da G wegzusammenhängend ist, existiert für jedes $z \in G$ ein Weg $\gamma_z : [0,1] \to G$ mit $\gamma_z(0) = z_0$ und $\gamma_z(1) = z$. Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$,

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\,dw\,.$$

Beachte, dass F aufgrund der Voraussetzung (b) wohldefiniert ist, d.h. $F(z)$ hängt nicht von der Wahl des Weges γ_z ab.
Wir zeigen $F \in \mathscr{H}(G)$ und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$. Hierfür wähle $a \in G$ und $K_r(a) \subseteq G$. Für jedes $z \in K_r(a)$ wenden wir (b) auf den geschlossenen Weg $(\gamma_a)_- \diamond [z,a] \diamond \gamma_z$ an und erhalten

$$\int_{\gamma_z} f(w)\,dw + \int_{[z,a]} f(w)\,dw - \int_{\gamma_a} f(w)\,dw = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F(z) - F(a) = -\int_{[z,a]} f(w)\,dw\,.$$

Unter Ausnutzung von

$$f(a) = \frac{1}{z-a}\int_{[z,a]} f(a)\,dw\,.$$

folgt mit der Standardabschätzung

$$\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| = \frac{1}{|z-a|} \times \left|\int_{[z,a]} \big(f(w)-f(a)\big)\,dw\right| \le \max_{w\in[z,a]} |f(w)-f(a)| \to 0 \text{ für } z \to a\,,$$

da f stetig in $a \in G$ ist. Somit ist F holomorph in G und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$. Ist G sternförmig bzgl. z_0, so können wir einfach $\gamma_z = [z_0, z]$ wählen, und wenden das obige Argument mit (b') anstelle von (b) an. □

Beispiel 6.5 (Polynome).
Es sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n z^n$, ein Polynom. Dann ist das Polynom

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad P(z) := a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

eine holomorphe Stammfunktion von p auf $\mathbb{C}$. Insbesondere gilt $\int_\gamma p(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}$.

In der reellen Analysis gilt: Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat eine (reell differenzierbare) Stammfunktion. Im Komplexen ist die Situation wesentlich „interessanter", da nicht jede auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ stetige Funktion dort eine (holomorphe) Stammfunktion besitzt, wie das folgende Beispiel lehrt:

Beispiel 6.6.
Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$. Dann ist f holomorph, also stetig auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, besitzt dort jedoch keine holomorphe Stammfunktion, denn

$$\int\limits_{\partial K_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0\,.$$

Um Satz 6.4 gewinnbringend einsetzen zu können, stellt sich die Frage, wann Bedingung (b') erfüllt ist. Diese Frage wird im folgenden Resultat beantwortet, welches zu Recht als *Fundamentallemma der Funktionentheorie* bezeichnet wird.

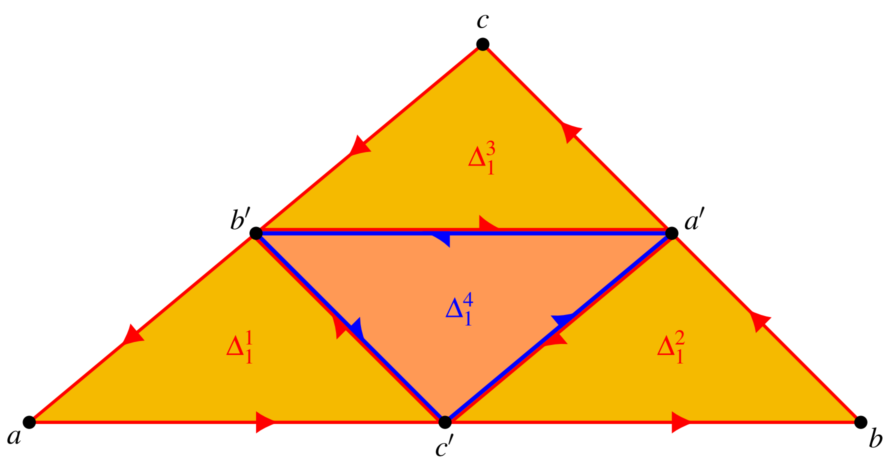
Satz 6.7 (Lemma von Goursat).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathscr{H}(U)$. Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subseteq U$, dass

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0\,.$$

Zusatz (zum Lemma von Goursat).
Die Aussage des Lemmas von Goursat gilt bereits dann, wenn die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ stetig ist und $f \in \mathscr{H}(U \setminus \{p\})$ für einen Punkt $p \in U$.

Die Relevanz des Lemmas von Goursat liegt darin, dass eine *lokale* Bedingung (komplexe Differenzierbarkeit in jedem Punkt) an eine Funktion eine *globale* Eigenschaft dieser Funktion nach sich zieht.

Beweis. Es sei $\Delta = \Delta(a,b,c) \subseteq U$ das orientierte Dreieck mit den Eckpunkten a,b,c, und $I := \int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz$.



Es seien a', b' und c' die Mittelpunkte von $[b,c]$, $[c,a]$ und $[a,b]$. Betrachte die orientierten Teildreiecke

$$\Delta_1^1 = \Delta(a,c',b')\,, \quad \Delta_1^2 = \Delta(c',b,a')\,, \quad \Delta_1^3 = \Delta(a',c,b')\,, \quad \Delta_1^4 = \Delta(a',b',c')$$

und beachte, dass

$$I = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)\,dz\,.$$

Bezeichnet daher Δ_1 dasjenige Teildreieck, das den betragsmäßig grössten Beitrag zur Summe beisteuert, so folgt aus der Dreiecksungleichung für Summen

$$|I| \leq 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|\,.$$

Wiederholt man diese Prozedur mit Δ_1 anstelle von Δ, so erhält man ein Dreieck Δ_2 mit

$$|I| \leq 4\cdot 4\left|\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz\right|\,.$$

Dieser Prozess generiert eine Folge von Dreiecken (Δ_n) mit $\Delta \supsetneq \Delta_1 \supsetneq \Delta_2 \ldots$ und $L(\partial\Delta_n) = 2^{-n}L(\partial\Delta)$ sowie

$$|I| \leq 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right|\,.$$

Aufgrund der Kompaktheit der Dreiecke Δ_n gibt es wegen Satz 0.48 einen Punkt $z_0 \in U$ mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{z_0\}\,.$$

Wähle $\varepsilon > 0$. Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\big|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big| \leq \varepsilon|z - z_0| \qquad (*)$$

für alle $z \in \Delta_n$ und alle $n \geq N$. Wir beachten nun, dass das lineare Taylorpolynom $p_1(z) := f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ in U eine holomorphe Stammfunktion besitzt (siehe Beispiel 6.5), so dass Satz 6.2 zeigt, dass

$$\int_{\partial\Delta_n} p_1(z)\,dz = 0\,.$$

Daher folgt zusammen mit der Standardabschätzung (ML)

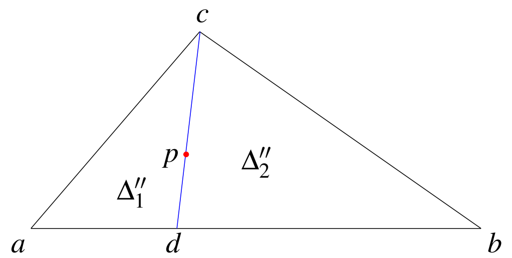
$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} [f(z) - p_1(z)]\,dz\right| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon \max_{z\in\partial\Delta_n} |z - z_0|\, L(\partial\Delta_n) \leq \varepsilon\left(\frac{L(\partial\Delta)}{2^n}\right)^2,$$

da $|z - z_0| \leq L(\partial\Delta_n) = 2^{-n}L(\partial\Delta)$ für alle $z \in \partial\Delta_n$. Insgesamt ergibt sich $|I| \leq \varepsilon(L(\partial\Delta))^2$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewält war, folgt $I = 0$.

Zum Zusatz: Wir müssen die beiden Fälle $p \in \partial\Delta$ und $p \in \mathring{\Delta}$ betrachten.

Falls $p \in \partial\Delta$, so gibt es eine Nullfolge $(\eta_n) \subseteq \mathbb{C}$ mit $p \notin \overline{\Delta_n'}$ für $\Delta_n' := \Delta(a + \eta_n, b + \eta_n, c + \eta_n)$, d.h. $\int_{\partial\Delta_n'} f(z)\,dz = 0$ nach dem bereits Bewiesenen. Korollar 4.8 zeigt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Falls $p \in \overset{\circ}{\Delta}$, so teile Δ in zwei Dreiecke $\Delta_1'' = \Delta(a,d,c)$ und $\Delta_2'' = \Delta(d,b,c)$ derart, dass p auf einer gemeinsamen Seite von Δ_1'' und Δ_2'' liegt.



Dies impliziert

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial\Delta_1''} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_2''} f(z)\,dz = 0+0=0\,.$$

□

Satz 6.8 (Cauchy Integralsatz für sternförmige Gebiete).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$. Dann existiert ein $F \in \mathscr{H}(G)$ mit $F' = f$. Insbesondere gilt

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Zusatz (zum Cauchy Integralsatz für sternförmige Gebiete).
Die Aussage des Cauchy Integralsatzes gilt bereits dann, wenn $f : G \to \mathbb{C}$ stetig ist und $f \in \mathscr{H}(G \setminus \{p\})$ für einen Punkt $p \in G$.

Beweis. Nach Satz 6.7 und seinem Zusatz gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes in G gelegene, abgeschlossene und ausgefüllte Dreieck Δ. Satz 6.4 zeigt nun, dass es ein $F \in \mathscr{H}(G)$ gibt mit $F' = f$ in G. □

V.6 Verständnisfragen

1. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathscr{H}(U)$ und Δ ein Dreieck mit $\partial\Delta \subseteq U$. Gilt dann $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$?
2. Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in G und jede Funktion $f \in \mathscr{H}(G)$. Ist dann G sternförmig ?
3. Es sei $L \subseteq \mathbb{D}$ und die stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ sei in $\mathbb{D} \setminus L$ holomorph. In welchem der folgenden Fälle besitzt f eine Stammfunktion $F \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$?
   (a) $L = \{-1/2, 1/2\}$;
   (b) L ist endliche Menge;
   (c) $L = \partial K_{1/2}(0)$;
   (d) L ist abzählbar.

A.6 Ergänzungen und Ausblicke

A.6.1 Das Lemma von Goursat und die Formeln von Stokes bzw. Green

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass im Lemma von Goursat die Funktion $f \in \mathscr{H}(U)$ eine *stetige* Ableitung besitzt, lässt sich das Lemma von Goursat als Spezialfall der Formel von Stokes bzw. Green aus der reellen Analysis auffassen. Diese besagt, dass für stetig differenzierbare Funktionen $u,v : U \to \mathbb{R}$ und jedes Dreieck $\Delta \subset U$

$$\int\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy)\,.$$

Wir merken an, dass sich die Formel von Stokes–Green für Dreiecke und stetig differenzierbare Funktionen u,v relativ einfach aus dem HDI für reellwertige Funktionen einer reellen Variablen herleiten lässt.
Ist $f = u + iv$ nun holomorph, so erfüllen u,v die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen ($\text{CR}_{\mathbb{R}}$) und unter der Voraussetzung der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von u und v impliziert die Formel von Stokes–Green daher $\int_{\partial\Delta}(v\,dx + u\,dy) = 0$ und analog $\int_{\partial\Delta}(u\,dx - v\,dy) = 0$ (man wende Green–Stokes auf $(-v,u)$ anstelle von (u,v) an). Dies ergibt

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy) = 0\,.$$

Es ist erstaunlich, dass im Lemma von Goursat die Stetigkeit der Ableitung nicht postuliert werden muss, sondern die punktweise(!) definierte komplexe Differenzierbarkeit genügt.

A.6.2 Zum Ausnahmepunkt im Lemma von Goursat und im Cauchy Integralsatz

Der „Ausnahmepunkt“ $p \in G$ im (Zusatz zum) Cauchy Integralsatz spielt im Folgenden eine eigentümliche, aber wichtige Rolle. Er ermöglicht im folgenden Kapitel die direkte Anwendung des Cauchy Integralsatzes auf den Differenzenquotienten einer holomorphen Funktionen. Dies führt ohne Umwege und in durchsichtiger Weise auf die für die Funktionentheorie zentrale Cauchy Integralformel. Als eine der Konsequenzen aus der Cauchy Integralformel wird sich dann herausstellen, dass es den “Ausnahmepunkt” $p \in G$ tatsächlich nicht gibt: Jede stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, die in $G \setminus \{p\}$ holomorph ist, ist sogar auf ganz G holomorph, siehe z.B. Satz 8.1.

A.6.3 Der Satz von Fejér–Riesz

Der Cauchy Integralsatz ermöglicht einen überaus eleganten Beweis der folgenden Ungleichung.

Satz A 6.1 (Féjer–Riesz [24]).
Es sei f holomorph in einer offenen Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$. Dann gilt

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx \le \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt\,.$$

Beweis. Es sei $\mathbb{D}^+ := \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Mit f ist auch $\overline{f(\overline{z})}$ holomorph in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$. Der Cauchy Integralsatz für $f(z)\overline{f(\overline{z})}$ und $\gamma = \partial(\mathbb{D}^+)$ impliziert

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx &= \int\limits_{-1}^{1} f(z)\overline{f(\overline{z})}\,dz = -\int\limits_{0}^{\pi} f(e^{it})\overline{f(e^{-it})}e^{it}\,dt \\
&\le \left(\int\limits_{0}^{\pi} |f(e^{it})|^2\,dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_{0}^{\pi} |f(e^{-it})|^2\,dt \right)^{1/2} \\
&\le \frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{\pi} |f(e^{it})|^2\,dt + \int\limits_{0}^{\pi} |f(e^{-it})|^2\,dt \right) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt\,.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung sowie $2ab \leq a^2+b^2$ für $a,b\in\mathbb{R}$ verwendet. □

Die Ungleichung von Féjer–Riesz besitzt zahlreiche Anwendungen in der reellen Analysis und in der Funktionalanalysis. In den Ergänzungen zu Kapitel 7 werden wir als eine solche Anwendung einen funktionentheoretischen Zugang zur berühmten Hillbertschen Ungleichung vorstellen, siehe Satz A.7.3.

A6.4. Die Fresnelschen Integrale und Fresnelschen Funktionen

Die sog. Fresnelschen Integrale

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

spielen eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik und in der Optik (Kirchhoffsche Beugungstheorie). Zur Überprüfung der obigen Formel betrachten wir die holomorphe Funktion $f(z)=e^{-z^2}$, $z\in\mathbb{C}$, und fixieren $R>0$. Der Cauchy Integralsatz impliziert

$$0 = \int_{[0,R]} e^{-z^2}\,dz + \underbrace{\int_{[R,R+iR]} e^{-z^2}\,dz}_{=:I_R} - \int_{[0,R+iR]} e^{-z^2}\,dz = \int_0^R e^{-x^2}\,dx + I_R - e^{i\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}R} e^{-it^2}\,dt\,.$$

Nun gilt

$$|I_R| = \left|\int_0^R e^{-(R+it)^2}\,i\,dt\right| \leq \int_0^R e^{-R^2}e^{t^2}\,dt \leq e^{-R^2}\int_0^R e^{Rt}\,dt = \frac{e^{-R^2}}{R}\left(e^{R^2}-1\right) \leq \frac{1}{R}\,.$$

Für $R\to\infty$ erhält man unter Benutzung der bekannten Formel

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (*)$$

somit

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt - i\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = e^{-i\pi/4}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - i\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,.$$

Einen funktionentheoretischen Beweis für $(*)$ lernen wir (evtl.) später kennen. Die Fresnelschen Funktionen sind definiert durch

$$C(x) := \int_0^x \cos(y^2)\,dy\,, \qquad S(x) := \int_0^x \sin(y^2)\,dy\,.$$

Die Kurve $E(t) := C(t)+iS(t)$ heißt Euler oder Cornu Spirale und hat die Eigenschaft, dass ihre Krümmung proportional zur Bogenlänge ist. Sie findet bei der Konstruktion von Eisen– und Autobahnen Verwendung.

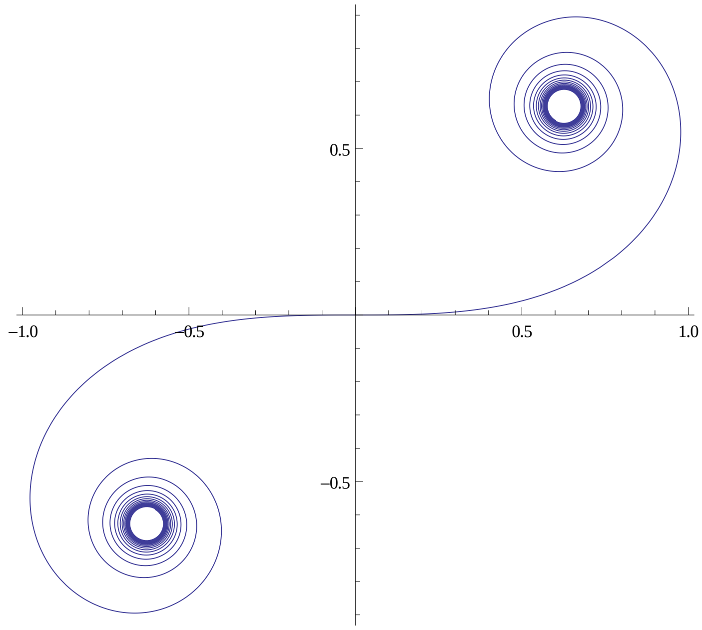


Abbildung 6.1: Die Cornu Spirale

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 6.1 (Der Satz von Wolff–Noshiro–Warschawski)**.**
Es sei G ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$, d.h. $[z,w] \subseteq G$ für alle Punkte $z,w \in G$. Ferner sei $F \in \mathscr{H}(G)$ mit $\operatorname{Re} f' > 0$ in G. Beweisen Sie, dass $F : G \to \mathbb{C}$ injektiv ist.

Aufgabe 6.2.
Es sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gilt

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dw}{(w-z)^{n+1}} = 0$$

für alle $z \notin \operatorname{tr}(\gamma)$. Insbesondere gilt

$$\int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{dw}{(w-z)^{n+1}} = 0$$

für alle $z \in K_r(z_0)$.

Aufgabe 6.3 (Staatsexamen Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 4)**.**
Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z^2}{z^2-1}$. Zeigen Sie, dass für $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ die Einschränkung $f_U : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z^2}{z^2-1}$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt.

Kapitel 7

Die lokale Cauchy Integralformel

Das hier abgeleitete Integral führt ganz insbesondere den Namen des C a u c h y ' s c h e n I n t e g r a l s. Es ist mit dem vorhergehenden allgemeinen $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ zusammen von solcher Tragweite, dass man ohne Uebertreibung sagen kann, in diesen beiden Integralen liege die ganze jetzige Functionentheorie concentrirt vor.

L. Kronecker [39, S. 167]

Satz 7.1 (Cauchy Integralformel für sternförmige Gebiete).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in \mathscr{H}(G)$ und γ ein geschlossener Weg in G. Dann gilt für jedes $z \in G \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$

$$f(z) \cdot n(z,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,. \tag{CIF}$$

Beweis. Fixiere $z \in G \setminus \operatorname{tr}(\gamma)$. Dann ist die Funktion $g : G \to \mathbb{C}$,

$$g(w) := \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } w \in G\setminus\{z\}, \\ f'(z) & \text{für } w = z\,, \end{cases}$$

stetig in G und holomorph in $G\setminus\{z\}$. Satz 6.8 ist daher auf $g : G \to \mathbb{C}$ anwendbar und impliziert

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_\gamma g(w)\,dw = \int\limits_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw \\ &= \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - 2\pi i\, f(z) \cdot n(z,\gamma)\,. \end{aligned}$$

□

Korollar 7.2 (Lokale Cauchy Integralformel).
Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathscr{H}(U)$, so gilt für jede Kreisscheibe $\overline{K_r(p)} \subseteq U$ und jedes $z \in K_r(p)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(p)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Beweis. Wegen $\overline{K_r(p)} \subseteq U$ gibt es ein $R > r$ mit $G := K_R(p) \subseteq U$. Nun wende man Satz 7.1 auf die im sternförmigen Gebiet G holomorphe Funktion f und den Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := p + re^{it}$, unter Beachtung von $n(z,\gamma) = 1$ (s. Beispiel 5.7) an. □

Eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist daher auf jeder kompakt in U gelegenen Kreisscheibe $K_r(p)$ bereits durch ihre Werte auf dem Rand $\partial K_r(p)$ eindeutig festgelegt. Die lokale Cauchy Integralformel zeigt darüberhinaus, wie f in $K_r(p)$ durch ihre Werte auf $\partial K_r(p)$ rekonstruiert werden kann, nämlich als Cauchy–Integral von $f|_{\partial K_R(p)}$. Da Cauchy–Integrale analytisch sind (Satz 5.2) erhält man unmittelbar das folgende Resultat.

Korollar 7.3 (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathscr{H}(U)$. Ist $z_0 \in U$ und $\varrho := \operatorname{dist}(z_0, \partial U)$, so gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

für alle $z \in K_\varrho(z_0)$[a], d.h. f ist in der größten in U enthaltenen offenen Kreisscheibe um z_0 in eine Potenzreihe um z_0 entwickelbar. Insbesondere ist f beliebig oft differenzierbar mit $f^{(k)} \in \mathscr{H}(U)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

[a] Falls $\varrho = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in $\mathbb{C}$.

Beweis. Es sei $0 < r < \varrho$. Aus Korollar 7.2 und Satz 5.2 ergibt sich die behauptete Potenzreihendarstellung zunächst in $K_r(z_0)$. Nach Korollar 1.9 gilt hierbei $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, womit diese Darstellung in der gesamten Kreisscheibe $K_\varrho(z_0)$ gilt. □

Korollar 7.3 besagt nicht nur, dass jede in einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ dort analytisch ist[1], sondern zeigt, dass für jeden Punkt $z_0 \in U$ der Konvergenzradius der Potenzreihendarstellung von f im Entwicklungspunkt z_0 mindestens gleich dem Abstand des Punktes z_0 zum Rand von U ist. Dies ermöglicht in vielen in der Praxis auftretenden Situationen die Bestimmung von Konvergenzradien ohne jegliche Rechnung.

Beispiel 7.4 (Bestimmung von Konvergenzradien, ohne Rechnung)**.**
Die Funktion $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{(k + 1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Folglich hat die Taylorreihe von tan um $z_0 = 0$ mindestens den Konvergenzradius $\pi/2$. Wegen $|\tan x| \to +\infty$ für $\mathbb{R} \ni x \to \pi/2$, ist der Konvergenzradius sogar $= \pi/2$.

Korollar 7.5 (Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathscr{H}(U)$. Dann gilt für jede kompakte Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\,.$$

Beweis. Korollar 7.2 für den Spezialfall $z = z_0$ impliziert

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}\, i re^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\,.$$

□

Korollar 7.6 (Verallgemeinerte Cauchy Integralformel und Cauchy Ungleichungen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathscr{H}(U)$. Ist $K := \overline{K_r(z_0)} \subseteq U$, so gilt für jedes $z \in K_r(z_0)$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}}\, dw$$

sowie

$$\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} \le \frac{||f||_{\partial K}}{r^k} \le \frac{||f||_K}{r^k}\,.$$

[1] Dass jede analytische Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ in U holomorph sind, hatten wir schon in Korollar 1.10 festgestellt. Somit wissen wir jetzt, dass die analytischen Funktionen genau die holomorphen Funktionen sind, d.h. $\mathscr{A}(U) = \mathscr{H}(U)$.

Beweis. Aus der Cauchy Integralformel für $f^{(k)}$ und wiederholte partielle Integration $(\star)$ (s. Aufgabe 7.1) folgt

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f^{(k)}(w)}{w-z}\,dw \overset{(\star)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f^{(k-1)}(w)}{(w-z)^2}\,dw = \ldots = \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw\,.$$

Zusammen mit der Standardabschätzung (ML) ergibt sich

$$\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right| \le L(\partial K_r(z_0)) \max_{w\in\partial K_r(z_0)} \left|\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\right| = \frac{r||f||_{\partial K}}{r^{k+1}} \le \frac{||f||_K}{r^k}\,.$$

□

Bemerkung.
Korollar 7.3 oder auch Korollar 7.6 zeigen insbesondere, dass eine in jedem Punkt $z_0 \in U$ einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ winkeltreue Abbildung (siehe Satz 3.2) beliebig oft differenzierbar ist! Die Cauchy Integralformel für Ableitungen wird in der Literatur zumeist aus der Cauchy Integralformel für f durch Vertauschung von Differentiation und Integration hergeleitet.

Als unmittelbare Folgerung aus der verallgemeinerten Cauchy Integralformel notieren wir:

Korollar 7.7 (Parsevalsche Gleichung).
Es sei $R > 0$ und $f \in \mathscr{H}(K_R(0))$ mit $\widehat{f}(k) := f^k(0)/k!$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $r \in [0,R)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 r^{2k}\,.$$

Bemerkung.
Korollar 7.7 für $r = 1$ stellt eine einfache, aber bedeutsame Verbindung zum Hilbertraum $L^2(\partial\mathbb{D})$ der auf der Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ quadratintegrierbaren Funktionen her. Dieser Zusammenhang eröffnet die Möglichkeit, Hilbertraummethoden zur Untersuchung holomorpher Funktionen heranzuziehen bzw. funktionentheoretische Werkzeuge auf Probleme für Hilberträume anzuwenden, siehe z.B. Satz A.7.3.

Beweis. Es sei $r \in [0,R)$ fixiert. Die verallgemeinerte Cauchy Integralformel zeigt insbesondere

$$\widehat{f}(k) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r(0)} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^k e^{ikt}}\,dt = \frac{1}{r^k 2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(re^{it})\,dt\,. \qquad (\star)$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{f(re^{it})}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) r^k e^{ikt}\overline{f(re^{it})}\,dt \overset{(!)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) r^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{-ikt} f(re^{it})}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) r^k \overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(re^{it})\,dt\right)} \overset{(\star)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 r^{2k}\,.$$

Die in (!) durchgeführte Vertauschung von Integration und Summation ist zulässig, da die Funktionenreihe

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) r^k e^{ikt}\overline{f(re^{it})}$$

auf dem Intervall $[0,2\pi]$ gleichmäßig (und absolut) konvergiert. (Warum ist dies der Fall?) □

Wir wenden uns nun ersten Anwendungen der Cauchy Ungleichungen zu.

Beispiel 7.8.
Es sei $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorph. Dann gilt
$$|f'(0)| \leq 1 .$$
Ferner gilt Gleichheit genau dann, wenn f die Form $f(z) = \eta z$ für ein $|\eta| = 1$ hat.

Beweis. Wendet man Korollar 7.6 für $K := \overline{K_r(0)}$ mit $0 < r < 1$ an, so ergibt sich
$$|f'(0)| \leq \frac{||f||_K}{r} \leq \frac{1}{r} ,$$
woraus für $r \nearrow 1$ die erste Behauptung folgt. Hat f die Form $f(z) = \eta z$ für ein $|\eta| = 1$, so gilt natürlich $|f'(0)| = 1$. Andererseits impliziert Korollar 7.7
$$\left|\widehat{f}(1)\right|^2 r^2 + \left|\widehat{f}(n)\right|^2 r^{2n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \leq 1$$
für alle $0 < r < 1$ and alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$. Für $r \to 1$ erhält man hieraus
$$\left|\widehat{f}(1)\right|^2 + \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \leq 1 .$$
Gilt nun $|\widehat{f}(1)| = |f'(0)| = 1$, so folgt $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$. $\square$

Beispiel 7.8 wird uns in Kapitel 11 im Lemma von Schwarz wiederbegegnen. Der Fall der Gleichheit lässt sich auch folgendermaßen formulieren: Für alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ gilt $|f'(0)| \leq 1$, wobei Gleichheit nur dann gelten kann, wenn $f(0) = 0$ und f eine konforme Abbildung **auf** die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ ist. Dieser Zusammenhang bildet die Kernidee für den wohl einfachsten Zugang zum berühmten Riemannschen Abildungssatzes, den wir in Kapitel 17 kennenlernen werden.

Eine interessante Funktionenklasse bilden diejenigen Funktionen, die auf der gesamten komplexen Zahlenebene holomorph sind.

Definition 7.9 (Ganze Funktion).
*Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt **ganze Funktion**.*

Satz 7.10 (Satz von Liouville).
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $M := ||f||_{\mathbb{C}} < \infty$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fixiert. Dann gilt für jede positive reelle Zahl r gemäß Korollar 7.6, dass
$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} ||f||_{\partial K_r(z_0)} \leq \frac{M}{r} .$$
Lässt man hier $r \to \infty$, so folgt $f'(z_0) = 0$. Da $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig war, folgt $f' \equiv 0$, d.h. f ist konstant. $\square$

Beweis mit Beispiel 7.8. Nach Voraussetzung ist $M := ||f||_{\mathbb{C}} < \infty$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fixiert. Dann ist für jedes $r > 0$ durch $f_r(z) := f(rz + z_0)/M$ eine holomorphe Funktion $f_r : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ definiert mit $f_r'(0) = r f'(z_0)$. Nach Beispiel 7.8 gilt $|f_r'(0)| \leq 1$, also $|f'(z_0)| \leq 1/r$. Dies gilt für jedes $r > 0$, woraus $f'(z_0) = 0$ folgt. $\square$

Beispiel 7.11 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Jedes nichtkonstante Polynom P hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. P hat die Form $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und es gilt $|P(z)|/|z|^n \to |a_n|$ für $|z| \to +\infty$. Hat P keine Nullstelle, so ist $h := 1/P \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ mit $|h(z)| \to 0$ für $|z| \to +\infty$. Der Satz von Liouville impliziert, dass $h \equiv 0$. Widerspruch ! $\square$

Bemerkung.
Mit rein algebraischer "Polynomdivision" folgt, dass ein Polynom P vom Grad $n \in \mathbb{N}$ die Form $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ mit einem Polynom Q vom Grad $n-1$ besitzt. Induktiv ergibt sich aus Beispiel 7.11 somit, dass

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$$

mit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Später zeigen wir die Existenz dieser n Nullstellen auf rein funktionentheoretische Weise – ohne Induktion und in einem Schritt.

Der Satz von Liouville besitzt zahlreiche Verallgemeinerungen.

Satz 7.12.
Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

(a) Es existieren Konstanten $R \geq 1$ und $M > 0$ derart, dass $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$.

(b) f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Für alle hinreichend großen $r \geq R$ gilt $\partial K_r(z_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus K_R(0)$. Somit folgt aus Korollar 7.6, dass

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} ||f||_{\partial K_r(z_0)} \overset{(a)}{\leq} \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} M \max_{|z-z_0|=r} |z|^n \leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} M (r + |z_0|)^n \to 0$$

für $r \to +\infty$. D.h. $f^{(n+1)} \equiv 0$ und f ist ein Polynom vom Grade $\leq n$.
(b) $\Longrightarrow$ (a): $f^\sharp(z) = z^n f(1/z)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit $|z^n f(1/z)| = |f^\sharp(z)| \leq ||f^\sharp||_{\overline{\mathbb{D}}} =: M$ für alle $|z| \leq 1$, d.h. $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $|z| \geq 1 =: R$. $\square$

Ein einfaches Kompaktheitsargument erlaubt es die "punktweisen" Cauchy Ungleichungen aus Korollar 7.6 zu den sog. *Cauchy Ungleichungen für kompakte Mengen* zu erweitern:

Korollar 7.13 (Cauchy Ungleichungen für kompakte Mengen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $L \subseteq U$ kompakt. Sei $r > 0$ mit $r < \operatorname{dist}(L, \partial U)$. Dann ist

$$K := \bigcup_{z \in L} \overline{K_r(z)}$$

eine kompakte Teilmenge von U und es gilt

$$\frac{||f^{(k)}||_L}{k!} \leq \frac{||f||_K}{r^k}$$

für alle $f \in \mathscr{H}(U)$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Es sei (w_n) eine Folge in K, d.h. $w_n \in \overline{K_r(z_n)}$ für eine Folge (z_n) in L. Da L kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (z_{n_k}) mit Limes $z' \in L$. Wegen $|w_{n_k} - z'| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z'| \leq r + |z_{n_k} - z'| \to r$

für $k \to \infty$, ist die Folge (w_{n_k}) beschränkt, hat also eine konvergente Teilfolge, deren Limes in $\overline{K_r(z')}$ liegt, also in K. Dies zeigt, dass dass K kompakt ist. Ist $z \in L$, so folgt aus Korollar 7.6

$$\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!} \leq \frac{||f||_{\overline{K_r(z)}}}{r^k} \leq \frac{||f||_K}{r^k}.$$

□

V.7 Verständnisfragen

1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x^4}\right)$.
   Man bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe von f um den Punkt $x_0 = \sqrt{17}$.

2. Eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfülle die Mittelwerteigenschaft

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt$$

   für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ und alle $R > 0$. Ist dann f notwendigerweise holomorph ?

A.7 Ergänzungen und Ausblicke

A.7.1. Beweis der lokalen Cauchy Integralformel für stetig differenzierbare Funktionen direkt mit dem HDI

Wir geben einen einfachen direkten Beweis der lokalen Cauchy Integralformel unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die holomorphe Funktion eine stetige Ableitung besitzt. Für diesen Beweis ist das Lemma von Goursat nicht notwendig. Es genügt der HDI im Komplexen.

Beweis von Korollar 7.2 für stetiges f' direkt mit dem HDI. Es gilt

$$\int_{\partial K_r(p)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw \overset{\text{(HDI)}}{=} \int_{\partial K_r(p)} \int_0^1 f'((1-t)z+tw)\, dt\, dw \overset{(\star)}{=} \int_0^1 \int_{\partial K_r(p)} f'((1-t)z+tw)\, dw\, dt$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} \int_{\partial K_r(p)} \frac{d}{dw}\big(f((1-t)z+tw)\big)\, dw\, dt = 0,$$

da das innere Integral nach dem HDI im Komplexen (Satz 6.2) angewendet auf die nach Voraussetzung stetige Funktion $w \mapsto \frac{d}{dw}\big(f((1-t)z+tw)\big)$ (z,t fixiert) verschwindet. Das Gleichheitszeichen $(\star)$ ergibt sich aus dem Satz von Fubini für die nach Voraussetzung stetige Funktion $(t,w) \mapsto f'((1-t)z+tw)$. □

Zusammen mit den Bemerkungen in Abschnitt A.6.1 ergibt sich, dass sowohl das Lemma von Goursat (und damit der Cauchy Integralsatz für sternförmige Gebiete) als auch die lokale Cauchy Integralformel für holomorphe Funktionen mit *stetiger* Ableitung direkt mithilfe des HDI bewiesen werden können. Die im Haupttext gegebenen Beweise des Cauchy Integralsatzes und der Cauchy Integralformel benötigen die Stetigkeit der Ableitung nicht, sondern verwenden lediglich die Existenz der komplexen Ableitung. Sie zeigen dann sogar, dass die Stetigkeit der Ableitung automatisch folgt, ohne dass man sie postulieren muss.

A.7.2 Alternativer Beweis der lokalen Cauchy Integralformel mithilfe des Cauchy Integralsatzes

Der im Haupttext gegebene Beweis der Cauchy Integralformel beruht auf dem Cauchy Integralsatz (Satz 6.8) inkl. Zusatz, der wiederum auf dem Lemma von Goursat inkl. Zusatz basiert. Wir geben nun einen Beweis der Cauchy Integralformel der lediglich den Cauchy Integralsatz (ohne den Zusatz) erfordert.

Beweis von Korollar 7.2 mit Satz 6.8 ohne Zusatz. Es sei $z \in K_r(p)$ fixiert. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < r - |z-p|$. Wähle Wege γ_1 and γ_2 wie in Abbildung 7.1.

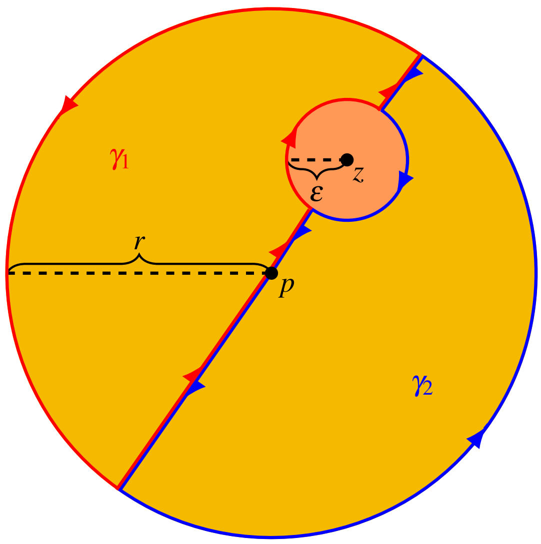


Abbildung 7.1: Alternativer Beweis der lokalen Cauchy Integralformel

Die Funktion
$$w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$$
ist holomorph in $U \setminus \{z\}$ und es gibt sternförmige Gebiete G_1 und G_2 in $U \setminus \{z\}$ derart, dass $\mathrm{tr}(\gamma_1) \subseteq G_1$ und $\mathrm{tr}(\gamma_2) \subseteq G_2$. Satz 6.8 impliziert daher
$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0\,.$$
Man beachte nun $\gamma_1 \diamond \gamma_2 = \partial K_r(p) \diamond (\partial K_\varepsilon(z))_-$, d.h.
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(p)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{it})\,dt \to f(z)$$
für $\varepsilon \to 0$, da $t \mapsto f(z+\varepsilon e^{it})$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig auf $[0,2\pi]$ gegen $f(z)$ konvergiert. □

A.7.3 Die Poissonsche und die Schwarzsche Integralformeln

Die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen (Korollar 7.5) entspricht gerade dem Spezialfall $z = z_0$ in der lokalen Cauchy Integralformel (Korollar 7.2). Sie wird im folgenden Satz dazu verwendet, zwei weitere Integralformeln für holomorphe Funktionen herzuleiten.

Satz A 7.1 (Poisson und Schwarz Integralformel).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq U$ und $f \in \mathscr{H}(U)$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{D}$

(a) (Poisson Integralformel)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) \frac{f(w)}{w}\, dw\,.$$

(b) (Schwarz Integralformel)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{w+z}{w-z} \frac{\operatorname{Re} f(w)}{w}\, dw + i \operatorname{Im} f(0)\,.$$

Beweis. (a) Für fixiertes $z \in \mathbb{D}$ sei $T_z(w) := \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$. Dann ist $T_z : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ bijektiv und $g := f \circ T_z$ holomorph auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$. Aus der Mittelwerteigenschaft für g ergibt sich

$$f(z) = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(e^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(T_z(e^{it}))\, dt\,.$$

Substituiert man im erhaltenen Integral $w = T_z(e^{it})$, so folgt unter Beachtung von $T_z(w) = e^{it}$, d.h.

$$iw\frac{dt}{dw} = \frac{wT_z'(w)}{T_z(w)} = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right),$$

die Behauptung.
(b) Das Integral ist eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion h (Cauchy–Integral!). Nach (a) gilt $\operatorname{Re} h = \operatorname{Re} f$ und die Mittelwerteigenschaft impliziert

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{it})\, dt = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt\right) = \operatorname{Re} f(0)\,.$$

Folglich gilt $(f-h)' = (f-h)_x = i(\operatorname{Im}(f-h))_x = -i(\operatorname{Re}(f-h))_y = 0$ aufgrund der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen. Aus dem HDI im Komplexen ergibt sich, dass $f-h$ konstant $= f(0) - h(0) = i \operatorname{Im} f(0)$ ist. □

Wir geben für die Poisson Integralformel einen “alternativen” Beweis, direkt mithilfe der Cauchy Integralformel.

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{D}$ fixiert und $\varrho := \min\{1/|z|, \operatorname{dist}(0, \partial U)\} > 1$. Dann ist die Funktion

$$g : K_\varrho(0) \to \mathbb{C}\,, \quad g(w) = \frac{f(w)}{1-\bar{z}w}\,,$$

holomorph, also zeigt die Cauchy Integralformel

$$f(z) = (1-|z|^2)g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{(w-z)(1-\bar{z}w)} f(w)\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) \frac{f(w)}{w}\, dw\,,$$

wobei (wieder)

$$\frac{1-|z|^2}{(w-z)(1-\bar{z}w)} = \frac{|w|^2-|z|^2}{|w-z|^2}\frac{1}{w} = \operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right)\frac{1}{w}$$

für $|w| = 1$ verwendet wurde. □

Im Gegensatz zur Poissonformel gilt die Cauchy Integralformel i.Allg. **nicht** für die Konjugierte $\overline{f}$ oder den Realteil $\operatorname{Re} f$ einer holomorphen Funktion f:

Satz A 7.2.
Es sei $r > 1$ und $f \in \mathscr{H}(K_r(0))$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \mathbb{D}} \frac{\overline{f(w)}}{w-z}\, dw = \overline{f(0)}\,.$$

Beweis. Es gilt mit der Mittelwerteigenschaft angewendet auf die Funktion $w \mapsto \frac{f(w)}{1-w\overline{z}}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \mathbb{D}} \frac{\overline{f(w)}}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\overline{f(e^{it})}}{e^{it}-z} e^{it}\, dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1-e^{it}\overline{z}}\, dt} = \overline{f(0)}\,.$$

□

Man vgl. mit dem Beweis in [60], S. 162(?), und mit Aufgabe 5.1.

A.7.4 Die Hilbertsche Ungleichung

Der Entwicklungssatz (Korollar 7.3) ermöglicht im Zusammenspiel mit dem Satz von Féjer–Riesz (Satz A.6.1) einen eleganten Beweis der sog. Hilbertschen Ungleichung:

Satz A 7.3 (Hilbertsche Ungleichung).
Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Dann gilt

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{a_n a_m}{n+m+1} \right| \leq \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\,.$$

Man beachte, dass in der Formulierung von Satz 7.3 zunächst kein Bezug zur Funktionentheorie erkennbar ist.

Beweis. O.E. gelte $a_n \in \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k}$ und beachten $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Es folgt für jedes $r \in [0,1)$

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{a_n a_m r^{2n+2m}}{n+m+1/2} \right| &= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n a_m r^{2n+2m} \int\limits_{-1}^{1} x^{2n+2m+1}\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n a_m r^{2n+2m} x^{2n+2m+1}\, dx = \int\limits_{-1}^{1} |f(rx)|^2\, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\, dt = \pi \sum_{n=0}^{\infty} r^{4n} |a_n|^2 \leq \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\,.\end{aligned}$$

Hierbeit wurden zuletzt die Ungleichung von Féjer–Riesz (Satz A.6.1) und die Parsevalsche Gleichung (Korollar 7.7) verwendet. Für $r \nearrow 1$ erhält man

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{a_n a_m}{n+m+1/2} \right| \leq \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\,,$$

woraus die Hilbertsche Ungleichung folgt. □

A.7.5 Über partiell holomorphe Funktionen zweier Variablen

Mithilfe der verallgemeinerten Cauchy Integralformel (Korollar 7.13) sind wir nun in der Lage den Beweis von Satz A.2.4 soweit zu ergänzen, dass dieser unter der zusätzlichen Voraussetzung der Beschränkheit der zugrundeliegenden Funktion, vollständig bewiesen ist.

Satz A 7.4.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $V := \{\bar{z} : z \in U\}$. Ferner sei $F : U \times V \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $w_0 \in V$ sei $F(\cdot, w_0)$ holomorph in U mit komplexer Ableitung $(D_1F)(\cdot, w_0) : U \to \mathbb{C}$;

(ii) Für jedes $z_0 \in U$ sei $F(z_0, \cdot)$ holomorph in V mit komplexer Ableitung $(D_2F)(z_0, \cdot) : V \to \mathbb{C}$.

Dann sind die Funktionen

$$D_1F : U \times V \to \mathbb{C}, \quad D_2F : U \times V \to \mathbb{C}$$

stetig.

Beweis. Die Behauptung ist lokaler Natur. Deshalb genügt es den Beweis für den Fall $F : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ zu führen. Hierzu sei $r \in (0,1)$ fixiert. Die verallgemeinerte Cauchy Integralformel für festes $z \in \mathbb{D}$ auf die in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion $w \mapsto F(z,w)$ angewendet, zeigt

$$D_2F(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(0)} \frac{F(z,\xi)}{(\xi - w)^2} \, d\xi$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ und alle $w \in K_r(0)$. Dies ist ein Parameterintegral bzgl. (z,w), wobei der Integrand

$$\xi \mapsto \frac{F(z,\xi)}{(\xi - w)^2}$$

für jedes feste $\xi \in \partial K_r(0)$ stetig vom Parameter (z,w) abhängt. Ferner gilt

$$\left| \frac{F(z,\xi)}{(\xi - w)^2} \right| \le \frac{1}{|\xi - w|^2} \le \frac{1}{\big(|\xi| - |w|\big)^2} \, .$$

Wählt man daher ein $\varrho \in (0,r)$, so gilt für alle $(z,w) \in \mathbb{D} \times K_\varrho(0)$

$$\left| \frac{F(z,\xi)}{(\xi - w)^2} \right| \le \frac{1}{(r - \varrho)^2} \qquad \text{für alle } \xi \in \partial K_r(0) \, .$$

Nach einem bekannten Satz über Parameterintegrale folgt, dass D_2F auf $\mathbb{D} \times K_\varrho(0)$ stetig ist. Da $\varrho \in (0,r)$ und $r \in (0,1)$ beliebig gewählt waren, ist D_2F stetig auf $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Die Stetigkeit von $D_1F : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ergibt sich analog. □

A.7.6 Eine Verschärfung des Satzes von Liouville

Satz A 7.5 (Borel–Carathéodory, Verschärfung des Satzes von Liouville).
Es sei $r > 1$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{H}(K_r(0))$. Dann gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} \big(\operatorname{Re} f(re^{it})\big) \, e^{-int} \, dt \, , \qquad n \ge 1 \, .$$

Ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ sowie $N \in \mathbb{N}_0$, $C > 0$ und $R > 0$ mit $\operatorname{Re} f(z) \le C|z|^N$ für alle $|z| \ge R$, so ist f ein Polynom vom Grade $\le N$.

Beweis. Wendet man die Mittelwerteigenschaft (Korollar 7.5) auf $f(z)z^n$ an, so folgt

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(re^{it})}\, e^{-int}\, dt = \overline{\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{int}\, dt} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\pi a_n r^n = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{Re} f(re^{it})\right) e^{-int}\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{Re} f(re^{it}) - Cr^N\right) e^{-int}\, dt\,.$$

Es ergibt sich somit für alle $r \geq R$, dass

$$\pi |a_n| r^n \leq \int_0^{2\pi} \left|\operatorname{Re} f(re^{it}) - Cr^N\right| dt = 2\pi \left(Cr^N - \operatorname{Re} f(0)\right), \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Lässt man hier $r \to \infty$ gehen, so erhält man $a_n = 0$ für alle $n > N$. □

Bemerkung A 7.6.
Diese Verschärfung des Satzes von Liouville besitzt zahllose Anwendungen u.a. in der Theorie der Banachalgebren (Satz von Gleason–Kahane–Żelazko, siehe [29, 36]).

A.7.7 Vermischtes

Satz A 7.7 (Polynominterpolation, siehe [58], Band 1, S. 116).
Es seien $r > 0$, f holomorph auf einer Umgebung von $\overline{K_r(0)}$, $z_1, \ldots, z_n \in \overline{K_r(0)}$ paarweise verschieden, und $\omega(z) := \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$. Dann ist

$$P(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(0)} \frac{f(w)}{\omega(w)} \frac{\omega(w) - \omega(z)}{w - z}\, dw$$

das eindeutig bestimmte Polynom $(n-1)$sten Grades, das an den Stellen $z_1, \ldots, z_n$ mit f übereinstimmt.

Beweis. $\frac{\omega(w)-\omega(z)}{w-z}$ ist ein Polynom $(n-1)$sten Grades in z, also auch P, wobei

$$P(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(0)} \frac{f(w)}{w - z_j}\, dw = f(z_j)$$

aufgrund der Cauchy Integralformel. □

Satz A 7.8 (Flächenmittelwertsatz und Bergmansche Integralformel).
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathscr{H}(U)$. Dann gilt für jede Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$ die Flächenmittelwerteigenschaft

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{K_r(z_0)} f(x + iy)\, dxdy\,.$$

Ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ mit $\iint_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\, dxdy < \infty$, so gilt die Bergmansche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - \overline{w}z)^2}\, dxdy\,, \qquad z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweisskizzze. Die Flächenmittelwerteigenschaft ergibt sich direkt aus der Mittelwerteigenschaft (Korollar 7.5). Aus der Flächenmittelwerteigenschaft lässt sich wiederum für jedes $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ mit $\iint_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\, dxdy < \infty$ die Bergmansche Integralformel mit der im Beweis von Satz A.7.1 verwendeten Methode herleiten. □

Die Laguerre Polynome L_n sind definiert durch

$$L_n(z) := e^z \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z} z^n\right).$$

Sie spielen eine Rolle bei der Behandlung der Schrödinger Gleichung für das Wasserstoffatom.

Satz A 7.9 (Erzeugende Funktion der Laguerre Polynome).
Es gilt

$$\frac{e^{-\frac{zw}{1-w}}}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(z)}{n!} w^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $w \in \mathbb{D}$.

Beweis. Zum Beweis beachte man für festes $z \neq 0$ und $0 < r < |z|$ die verallgemeinerte Cauchy Integralformel und die Variablensubstitution $w = T(u) := 1 - z/u$, die die Kreislinie $\partial K_r(z)$ auf eine Kreislinie C abbildet mit $n(0,C) = 1$:

$$\begin{aligned} e^z \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z} z^n\right) &= \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(z)} \frac{e^{z-u}}{(1-z/u)^n (u-z)}\, du = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{-\frac{zw}{1-w}}}{1-w} \frac{dw}{w^{n+1}} = \frac{d^n}{dw^n}\bigg|_{w=0} \frac{e^{-\frac{zw}{1-w}}}{1-w} \end{aligned}$$

□

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 7.1 (Partielle Integration im Komplexen)**.**
Es seien G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathscr{H}(G)$ und γ ein geschlossener Weg in G. Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_\gamma f'(w) g(w)\, dw = -\int\limits_\gamma f(w) g'(w)\, dw.$$

Aufgabe 7.2.
Es sei $K_R(z_0)$, $R < \infty$, die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (a_k \in \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, dass es keine in einer Kreisscheibe $K_\varrho(z_0)$, $\varrho > R$, holomorphe Funktion $\tilde{f}$ gibt mit $\tilde{f}(z) = f(z)$ für alle $z \in K_R(z_0)$.

Aufgabe 7.3.
Es sei
$$f(z) = z + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n!}.$$
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, aber es gibt kein $r > 1$, so dass f holomorph in $|z| < r$ ist.

(b) f ist stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und dort sogar beliebig oft (reell) differenzierbar.

(c) f ist injektiv auf $\overline{\mathbb{D}}$.

Aufgabe 7.4 (Berechnung reeller Integrale mit der Cauchy Integralformel)**.**
Es sei $R > 1$ und $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Berechnen Sie mithilfe der Cauchy Integralformel den Wert des Integrals
$$\int\limits_{[-R,R] \cup \gamma_R} \frac{dw}{1+w^2}.$$
Zeigen Sie, dass
$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{dw}{1+w^2} = 0,$$
und bestimmen Sie dann den Wert des Integrals
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Aufgabe 7.5 (Liouville mit der Cauchy Integralformel)**.**
Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$.

(a) Beweisen Sie
$$f(a) - f(b) = \frac{a-b}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_R(0)} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)}\, dw$$
für alle $a, b \in K_R(0)$ und alle $R > 0$.

(b) Es gelte $\lim\limits_{R\to\infty} ||f||_{\partial K_R(0)}/R = 0$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 7.6.
Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Es existieren Konstanten $R \geq 1$ und $M > 0$ derart, dass $|f(z)| \geq M|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$.

(b) f ein Polynom vom Grad $\geq n$.

Aufgabe 7.7 (Staatsexamen Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 2)**.** (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $|f(z)| \geq \pi$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(z) = f(\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z+1) = f(z)$ und $f(z+i) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 7.8 (Staatsexamen Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 1 a)**.**
Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z) - 3| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Kapitel 8

Holomorphiekriterien

Satz 8.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $f \in \mathscr{H}(U \setminus \{p\})$ sei beschränkt. Dann existiert ein $\hat{f} \in \mathscr{H}(U)$ mit $\hat{f}|_{U\setminus\{p\}} = f$.

Beweis. Die durch $g(z) := (z-p)^2 f(z)$ für $z \in U \setminus \{p\}$ und $g(p) = 0$ definierte Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ ist holomorph in U mit $g'(p) = 0$. Korollar 7.3 impliziert daher

$$g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-p)^k = (z-p)^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-p)^{k-2} =: (z-p)^2 \hat{f}(z)$$

in einer Kreisscheibe $K_r(p) \subseteq U$ mit einer Funktion $\hat{f} \in \mathscr{H}(K_r(p))$, die auf $K_r(p) \setminus \{p\}$ mit f übereinstimmt und sich daher zu einer Funktion $\hat{f} \in \mathscr{H}(U)$ fortsetzt. □

Satz 8.2 (Satz von Morera).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes Dreieck Δ in U. Dann gilt $f \in \mathscr{H}(U)$.

Beweis. Wähle $p \in U$ und $K_r(p) \subseteq U$. Nach Satz 6.4 existiert ein $F \in \mathscr{H}(K_r(p))$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in K_r(p)$. Korollar 7.3 zeigt, dass $f = F'$ ebenfalls holomorph in $K_r(p)$ ist. Da $p \in U$ beliebig gewählt war, ist f holomorph in U. □

Korollar 8.3.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, L eine Strecke in $\mathbb{C}$ und die stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph in $U \setminus L$. Dann ist $f \in \mathscr{H}(U)$.

Beweis. Gemäß Satz 8.2 ist zu zeigen, dass $\int_{\partial\Delta} f(w)\,dw = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subseteq U$. (i) Falls $L \cap \Delta = \emptyset$, so folgt dies aus Satz 6.7. (ii) Falls $L \cap \Delta \subseteq \partial\Delta$, so ergibt sich die Behauptung daraus, dass für jede Strecke $[a,b] \subset U$ gilt, dass

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{[a+\eta, b+\eta]} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz,$$

siehe Korollar 4.8. (iii) Falls $L \cap \mathring{\Delta} \neq \emptyset$, so lässt sich $\partial\Delta$ als Summe von Rändern von drei Dreiecken schreiben für die jeweils Fall (ii) zutrifft. □

Für U in $\mathbb{C}$ setzen wir $U^+ := \{z \in U : \operatorname{Im} z > 0\}$, $U^0 := U \cap \mathbb{R}$ und $U^- := \{z \in U : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Satz 8.4 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge mit $U^- = \{\overline{z} : z \in U^+\}$ und die stetige Funktion $f : U^+ \cup U^0 \to \mathbb{C}$ sei holomorph in U^+ und nehme auf U^0 nur reelle Werte an. Dann ist die gespiegelte Funktion

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & z \in U^+ \cup U^0, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in U^-, \end{cases}$$

holomorph auf U.

Beweis. g ist holomorph in U^+ (nach Voraussetzung) und in U^- (siehe Aufgabe H3.3 (i)) sowie stetig in den Punkten von U^0, also holomorph auf U nach Korollar 8.3. □

Definition 8.5 (kompakte Konvergenz).
*Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ heißt in U **kompakt konvergent** gegen $f : U \to \mathbb{C}$, falls die Folge (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq U$ gleichmäßig gegen f konvergiert:*

$$\forall_{\substack{K \subseteq U \\ \text{kompakt}}} \quad ||f_n - f||_K \to 0 \text{ für } n \to \infty .$$

Beispiel 8.6.
Die Folge der Polynome z^n konvergiert auf $\mathbb{D}$ kompakt gegen $f \equiv 0$, denn ist $K \subseteq \mathbb{D}$ kompakt, so gibt es ein $r \in (0,1)$ mit $|z| \leq r$ für alle $z \in K$, d.h. $||z^n - 0||_K \leq r^n \to 0$ für $n \to \infty$. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{D}$, denn $(1 - 1/n)^n \to 1/e \neq 0$.

Satz 8.7 (Konvergenzsatz von Weierstraß).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n) \subseteq \mathscr{H}(U)$ konvergiere in U kompakt gegen $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist $f \in \mathscr{H}(U)$. Ferner konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Folge $(f_n^{(k)})$ kompakt in U gegen $f^{(k)}$.

Beweis. Da (f_n) kompakt in U gegen f konvergiert, ist f stetig in U (Satz 0.23) und für jedes (abgeschlossene und ausgefüllte) Dreieck Δ in U gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(w)\,dw = \int_{\partial\Delta} \lim_{n\to\infty} f_n(w)\,dw \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(w)\,dw \overset{(**)}{=} 0,$$

wobei in $(*)$ die auf der kompakten Menge $\partial\Delta$ gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen f sowie Satz 0.36 und in $(**)$ z.B. Satz 6.7 (Lemma von Goursat) benutzt wurden. Der Satz von Morera (Satz 8.2) impliziert nun $f \in \mathscr{H}(U)$. Die Übertragung der kompakten Konvergenz von (f_n) auf die Folge der k–ten Ableitungen beruht auf den Cauchy Ungleichungen für kompakte Mengen (Korollar 7.13). Sei hierzu $L \subseteq U$ kompakt und K wie in Korollar 7.13 gewählt. Dann gilt $||f_n - f||_K \to 0$ nach Voraussetzung, also

$$||f_n^{(k)} - f^{(k)}||_L = ||(f_n - f)^{(k)}||_L \leq \frac{k!}{r^k} ||f_n - f||_K \to 0 .$$

□

Für den Nachweis der kompakten Konvergenz von Funktionen*reihen* ist oftmals das Majoratenkriterium (Satz 0.24) ein probates Mittel.

Beispiele 8.8 (Standardbeispiele für kompakt konvergente Reihen holomorpher Funktionen)**.**

(a) (vgl. Staatsexamen Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 3])
Die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

konvergiert kompakt in $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ nach dem Majorantenkriterium von Weierstraß, d.h. $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ gemäß Satz 8.7.

Zum Beweis sei $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ eine kompakte Menge. Dann gibt es ein $R > 0$ mit $|z| \leq R$ und daher

$$\left| \frac{1}{z^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - R^2}$$

für alle $z \in K$ und alle $n > R$. Die Behauptung folgt nun aus dem Majorantenkriterium (Satz 0.24).

(b) (Riemannsche ζ–Funktion)
Die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert kompakt in $U := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$ gegen eine in U holomorphe Funktion. Dies folgt wieder aus dem Majorantenkriterium (Satz 0.24), denn ist K eine kompakte Menge in U, so existiert ein $R > 1$ mit $\operatorname{Re} s \geq R$, und mithilfe von $|n^s| = |e^{s \log n}| = e^{(\operatorname{Re} s) \log n} = n^{\operatorname{Re} s}$ folgt

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} \leq \frac{1}{n^R} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } s \in K\,.$$

Man beachte, dass die majorisierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R}$ wegen $R > 1$ konvergiert.

Bemerkung 8.9 (Entkoppelung der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen).
Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f \in \mathscr{H}(U)$, so ist f gemäß Korollar 7.3 und daher auch $u := \operatorname{Re}(f)$ und $v := \operatorname{Im}(f)$ beliebig oft (reell) stetig differenzierbar. Die reellen Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{CR$_\mathbb{R}$}$$

lassen sich daher bzgl. x bzw. y partiell ableiten und addieren. Insbesondere ergeben sich aus (CR$_\mathbb{R}$) die Beziehungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (-u_y)_x + (u_x)_y = 0\,.$$

Definition 8.10 (harmonisch).
*Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $v : U \to \mathbb{R}$ heißt **harmonisch in** U, falls*

$$\Delta v(z) := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(z) = 0 \quad \textit{für alle } z \in U\,.$$

*Hierbei heißt $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ **Laplace–Operator**.*

Harmonische Funktionen spielen eine ubiquitäre Rolle in allen Naturwissenschaften.

Satz 8.11.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge.

(a) Ist $f \in \mathscr{H}(U)$, so sind $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ harmonische Funktionen in U.

(b) Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn $\partial u \in \mathscr{H}(U)$.

(c) Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch, so existiert ein $f \in \mathscr{H}(G)$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$.

Beweis. (a) folgt aus Bemerkung 8.9. Um (b) zu beweisen, beachte man, dass

$$4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta, \qquad (*)$$

d.h. $\Delta u = 0 \iff (u_z)_{\bar{z}} = 0 \iff u_z$ ist holomorph in U (siehe Satz 2.9).

(c) Nach (b) ist $2u_z \in \mathscr{H}(G)$ und besitzt daher auf dem sternförmigen Gebiet G nach dem Cauchy Integralsatz eine holomorphe Stammfunktion $g : G \to \mathbb{C}$. Folglich gilt $(g + \overline{g} - 2u)_{\bar{z}} = \overline{g}_{\bar{z}} - 2u_{\bar{z}} = \overline{g_z} - 2\overline{u_z} = 0$. Somit ist $g + \overline{g} - 2u$ holomorph in G und reellwertig, also aufgrund der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen konstant $= 2c \in \mathbb{R}$, d.h. $u = \mathrm{Re}\, f$ in G für $f := g - c \in \mathscr{H}(G)$. □

Bemerkung 8.12.
*Formel $(*)$ ist bemerkenswert. Sie zeigt, dass der Laplace–Operator sich mithilfe der Wirtinger Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ **faktorisieren** lässt! Satz 8.11 (c) besagt, dass auf jeder offenen Menge U jede harmonische Funktion **lokal** (also auf jeder Kreissscheibe in U) Realteil einer holomorphen Funktion ist. Insbesondere ist jede harmonische Funktion beliebig oft stetig differenzierbar.*

Wir fassen unsere bisherigen Überlegungen zusammen:

Satz 8.13 (Charakterisierung holomorpher Funktionen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann sind für eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

(a) f ist holomorph in U.

(b) In jeder Kreisscheibe in U gilt die lokale Cauchy Integralformel für f.

(c) f besitzt in jeder Kreisscheibe in U eine holomorphe Stammfunktion.

(d) f ist in U reell differenzierbar und erfüllt dort die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen.

(e) f ist um jeden Punkt in U in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

(f) Für jedes in U gelegene Dreieck Δ gilt $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

(g) Für jede Kreisscheibe K in U gibt es Polynome, die kompakt in K gegen f konvergieren.

V.8 Verständnisfragen

1. Es sei K eine kompakte Menge von $\mathbb{C}$ und $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus K)$ sei beschränkt.

   (a) K sei endlich. Ist f konstant ?

   (b) K habe innere Punkte. Ist f konstant ?

   Bemerkung.
   Das Painlevé Problem (1888) besteht darin, eine *geometrische* Charakterisierung aller kompakten Mengen $K \subseteq \mathbb{C}$ zu geben, für die jede beschränkte Funktion $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus K)$ konstant ist.

2. Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D} \setminus \{0\})$ mit $\lim\limits_{z \to 0} z f(z) = 0$. Gibt es dann ein $\hat{f} \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ mit $\hat{f}|_{\mathbb{D}\setminus\{0\}} = f$?

3. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, die kompakt in U konvergiere. Ferner sei (z_n) eine konvergente Folge von Punkten in U mit Limes $p \in U$. Gilt dann $f_n(z_n) \to f(p)$ für $n \to \infty$?

A.8. Ergänzungen und Ausblicke

Die folgende Variante des Satzes von Morera für *Kreislinien* ist wesentlich tiefliegender und wurde wohl erstmals von T. Carleman bewiesen (s. [64, S. 179]

Satz A 8.1 (Morera für Kreislinien).
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig mit

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

für jede Kreislinie C in U. Dann ist $f \in \mathscr{H}(U)$.

Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf die beiden Arbeiten [74, 75] von L. Zalcman.

Satz A 8.2.
Es sei $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Fouriertransformierte

$$H(z) := \int_a^b h(t) e^{-itz}\, dt$$

eine ganze Funktion und es existieren positive Konstanten $A, C \in \mathbb{R}$ mit $|H(z)| \leq Ce^{A|y|}$ für alle $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Satz A 8.3 (Parameterintegrale).
Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $U \subseteq \mathbb{C}$ sei offen. Die Funktion $g : U \times \mathrm{tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$ sei stetig und für jedes $w \in \mathrm{tr}(\gamma)$ sei $z \mapsto g(z,w)$ holomorph in U. Dann ist $h : U \to \mathbb{C}$,

$$h(z) := \int_\gamma g(z,w)\, dw\,, \qquad z \in U\,,$$

holomorph in U. Ist ferner $g'(z,w) := \frac{\partial g}{\partial z}(z,w)$ auf $U \times \mathrm{tr}(\gamma)$ stetig, so folgt

$$h'(z) = \int_\gamma g'(z,w)\, dw\,.$$

Beweis. **(1)** Wie man in der Vorlesung *Analysis II* lernt, ist $h : U \to \mathbb{C}$ stetig.

(2) h ist holomorph in U: Es sei $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3)$ ein (abgeschlossenes und ausgefülltes) Dreieck in U. Für festes $w \in \operatorname{tr}(\gamma)$ gilt nach Satz 6.7 (Goursat)

$$0 = \int_{\partial\Delta} g(z,w)\, dw = \int_{\gamma} \left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)\, dz \right) dw\,.$$

Da g stetig auf $U \times \operatorname{tr}(\gamma)$ ist, können wir den Satz von Fubini anwenden und erhalten

$$\int_{\partial\Delta} \int_{\gamma} g(z,w)\, dw\, dz = 0\,.$$

Der Satz von Morera (Satz 8.2) zeigt nun, dass h in U holomorph ist.

(3) Differenzierbarkeit: Es sei $z_0 \in U$ und $K := \overline{K_r(z_0)} \subseteq U$. Dann ist g' gleichmäßig stetig auf $K \times \operatorname{tr}(\gamma)$. Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta < r$, derart, dass

$$\left| g'(\eta, w) - g'(z_0, w) \right| < \varepsilon$$

für alle $\eta \in K_\delta(z_0)$ und alle $w \in \operatorname{tr}(\gamma)$. Für $z \in K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} - \int_a^b g'(z_0,t)\, dt \right| &= \left| \frac{1}{z-z_0} \int_a^b \Big(g(z,t) - g(z_0,t) \Big)\, dt - \int_a^b g'(z_0,t)\, dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{z-z_0} \int_a^b \left(\int_{z_0}^{z} g'(\eta,t)\, d\eta \right) dt - \int_a^b g'(z_0,t)\, dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{z-z_0} \int_a^b \left(\int_{z_0}^{z} \Big(g'(\xi,t) - g'(z_0,t) \Big)\, d\xi \right) dt \right| \\
&\le \int_a^b \max_{\xi \in [z_0,z]} |g'(\xi,t) - g'(z_0,t)|\, dt < \varepsilon\,(b-a)\,.
\end{aligned}$$

□

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 8.1.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f \in \mathscr{H}(U)$ nullstellenfrei. Zeigen Sie, dass $v(z) := \log|f(z)|$ eine harmonische Funktion auf U darstellt.

Aufgabe 8.2.
Es sei $v(z) := \log|z|$ für $z \in G := \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Zeigen Sie, dass v in G harmonisch ist, aber dass es keine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ gibt, derart, dass $v = \operatorname{Re}(f)$.

Aufgabe 8.3 (Staatsexamen Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 1 b)).
Gibt es eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von 0, so dass $f^{(n)}(0) = n^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

Aufgabe 8.4 (Staatsexamen Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 2).
Es sei
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} + \frac{\sin z}{z^2}\,.$$
Berechnen Sie
$$\int\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz\,.$$

Aufgabe 8.5 (Staatsexamen Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 3).

a) Bestimmen Sie die Potenzreihe für $f(z) := (z-\pi)\sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$, um den Entwicklungspunkt $w = \pi$.

b) Sei $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$.

   i) Berechnen Sie $I := \int\limits_{\gamma} \frac{z^2}{2z+1}\,dz$.

   ii) Zeigen Sie, dass
   $$\int_0^{\pi} \frac{2\cos(2\theta)+\cos(3\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,d\theta = \frac{\pi}{8} \text{ gilt,}$$
   indem Sie das Wegintegral I in Teil i) als Integral über $[-\pi, \pi]$ betrachten.

Aufgabe 8.6 (Staatsexamen Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 5).
Gegeben sei die Funktion
$$g : D \to \mathbb{C}\,, \qquad g(z) := \frac{z}{\sin(z^2-4z)}$$
mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe für g um den Punkt 0.

Aufgabe 8.7 (Staatsexamen Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 3).
Sei $f_n : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$f_n(z) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z+k}\,.$$
Zeigen Sie, dass durch $f(z) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert wird.
(Zusätzlicher Hinweis: Konvergenzsatz von Weierstraß)

Aufgabe 8.8 ([58], Band 1, p. 94).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathscr{H}(U)$. Beweisen Sie für alle $z \in U$:

(a) $\Delta(|f(z)|^2) = 4|f'(z)|^2$.

(b) $\Delta u = -4e^{2u}$ für $u(z) := \log \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$.

Aufgabe 8.9 (Staatsexamen Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 2).
Es sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $u(x,y) = (x-y)(x+y+1)$ gegeben. Bestimmen Sie alle Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $f = u + iv \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ und geben Sie f als Funktion von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ an.

Kapitel 9

Nullstellen und Identitätssatz

Die Werte, die eine analytische Funktion in den verschiedenen Teilen ihres Existenzbereichs annimmt, sind miteinander solidarisch: sie verständigen sich durch analytische Fortsetzung und man kann den Wertverlauf nicht in einem Teil modifizieren, ohne eine Änderung des ganzen Werteverlaufes hervorzurufen. Deshalb kann eine analytische Funktion einem Organismus verglichen werden, dessen hervorstechendes Merkmal eben dies ist: Einwirkung auf irgendeinen Teil ruft eine solidarische Reaktion des Ganzen hervor.

G. Pólya und G. Szegö, [58], Band 1, S. 136

Jede holomorphe Funktion ist nach Korollar 7.3 lokal als Potenzreihe darstellbar. Dies ermöglicht folgende

Definition 9.1 (Nullstellenordnung).
Es sei $f \in \mathscr{H}(K_r(z_0))$ und $f(z_0) = 0$, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad \text{für alle } z \in K_r(z_0)$$

mit $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. Falls $f \not\equiv 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq 0$. Die Zahl

$$N := \min\{k : a_k \neq 0\}$$

*heißt **Ordnung** (oder **Vielfachheit**) der Nullstelle z_0.*

Die Taylorkoeffizienten a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ von $f \in \mathscr{H}(K_r(z_0))$ im Entwicklungspunkt z_0 und damit die Vielfachheit N der Nullstelle z_0 von f hängen nicht von $r > 0$ ab.

Satz 9.2 (Multiplikative Normalform holomorpher Funktionen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathscr{H}(U)$ und $z_0 \in U$ sei Nullstelle von f der Ordnung $N \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $g \in \mathscr{H}(U)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z-z_0)^N \cdot g(z) \qquad \text{für alle } z \in U.$$

Inbesondere gibt es ein $\varrho > 0$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\varrho(z_0) \setminus \{z_0\}$, d.h. z_0 ist isoliert.

Beweis. Es sei $K_r(z_0) \subseteq U$. Da f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung N hat, gilt

$$f(z) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad z \in K_r(z_0), \tag{$*$}$$

mit $a_N \neq 0$. Daher ist durch

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^N}, & z \in U \setminus \{z_0\}, \\ \displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-N}, & z \in K_r(z_0), \end{cases}$$

ein $g \in \mathscr{H}(U)$ mit $f(z) = (z - z_0)^N g(z)$ wohldefiniert. Wegen $g(z_0) = a_N \neq 0$ gibt es aus Stetigkeitsgründen ein $\varrho > 0$ mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\varrho(z_0)$, also $f(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\varrho(z_0) \setminus \{z_0\}$. □

Satz 9.3 (Isoliertheit der Nullstellen).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$, $f \not\equiv 0$. Dann hat die Nullstellenmenge

$$\mathscr{Z}_f := \{z \in G : f(z) = 0\}$$

keinen Häufungspunkt in G.

Aus den Analysis Grundvorlesungen ist (sollte) bekannt (sein), dass $z_0 \in G$ genau dann Häufungspunkt einer Menge $A \subseteq G$ ist, wenn in jeder Umgebung von z_0 mindestens ein Punkt aus $A \setminus \{z_0\}$ liegt.

Beweis. Wir zeigen, dass die Menge

$$M := \{w \in G : w \text{ ist ein Häufungspunkt von } \mathscr{Z}_f\}.$$

offen und abgeschlossen in G ist. Satz 2.15 impliziert dann $M = \emptyset$ oder $M = G$. Wegen $f \not\equiv 0$ folgt $M = \emptyset$.

(i) $G \backslash M$ ist offen in G: Dazu sei $z_0 \in G \backslash M$. Dann ist z_0 kein Häufungspunkt von Nullstellen von f. Es existiert daher ein $\varepsilon > 0$, derart, dass $f(w) \neq 0$ für alle $w \in K_\varepsilon(z_0) \backslash \{z_0\}$. Dies zeigt $K_\varepsilon(z_0) \subseteq G \backslash M$. Folglich ist $G \backslash M$ offen.

(ii) M ist offen in G: Dazu sei $z_0 \in M$. Da f stetig ist, folgt $f(z_0) = 0$. Sei $K_r(z_0) \subseteq G$.

1. Fall: $f \equiv 0$ auf $K_r(z_0)$. Dann folgt $K_r(z_0) \subseteq M$.

2. Fall: $f \not\equiv 0$ auf $K_r(z_0)$. Dann hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung N. Nach Satz 9.2 gibt es ein $\varrho \in (0, r)$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in K_\varrho(z_0) \backslash \{z_0\}$. Somit kann z_0 kein Häufungspunkt von Nullstellen sein, d.h. $z_0 \notin M$. Dieser Fall kann daher nicht eintreten. □

Beispiel 9.4.
Die Funktion $f(z) = \sin(1/z)$ ist holomorph auf dem Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und hat dort die unendlich vielen Nullstellen $1/(k\pi)$ für $k \in \mathbb{N}$. Diese häufen sich in $z = 0 \notin G$.

Bemerkung.
Man beachte, dass die Nullstellen nichtkonstanter harmonischer Funktionen **nicht** isoliert liegen müssen. Als Beispiel fungiert die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = x$.

Satz 9.5 (Identitätsprinzip).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in \mathscr{H}(G)$. Es sei $z_* \in G$ und $(z_k) \subseteq G \backslash \{z_*\}$ mit $\lim_{k \to \infty} z_k = z_*$. Falls

$$f(z_k) = g(z_k) \quad \textit{für jedes } k \in \mathbb{N},$$

so ist

$$f(z) = g(z) \quad \textit{für jedes } z \in G.$$

Beweis. Definiere $h \in \mathscr{H}(G)$ durch $h := f - g$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $h(z_k) = 0$. Somit ist $z_* \in G$ ein Häufungspunkt von Nullstellen von h. Satz 9.3 impliziert $h \equiv 0$ auf G. □

Bemerkung.
Beachte, Satz 9.3 und Satz 9.5 sind für offene Mengen i. Allg. nicht gültig.

Beispiel 9.6 (Permanenzprinzip).
Um $e^{z+w} = e^z e^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ zu zeigen, genügt es diese Identität für $z, w \in \mathbb{R}$ zu kennen. Denn ist $w \in \mathbb{R}$ fixiert, so stimmen dann die beiden ganzen Funktionen $z \mapsto e^{z+w}$ und $z \mapsto e^z e^w$ für alle $z \in \mathbb{R}$ und also nach dem

Identitätsprinzip für alle $z \in \mathbb{C}$ überein. Fixiert man daher $z \in \mathbb{C}$, so stimmen die in w holomorphen Funktionen e^{w+z} und $e^w e^z$ für alle $w \in \mathbb{R}$ und daher für alle $w \in \mathbb{C}$ überein.

Definition 9.7.
Eine ganze Funktion f heißt ganz–transzendent, wenn f kein Polynom ist.

Bemerkung.
Eine ganze Funktion ist entweder ein Polynom oder eine ganz–transzendente Funktion. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, so nimmt f jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ genau n–mal (mit Vielfachheiten gezählt) an, denn das Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = f(z) - w$, besitzt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (mit Vielfachheiten gezählt). Insbesondere gilt $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ für jedes Polynom f. Für ganz–transzendente Funktionen f gilt i.Allg. aber $f(\mathbb{C}) \subsetneq \mathbb{C}$, z.B. ist $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Satz 9.8 (Casorati–Weierstraß).
Es sei f ganz–transzendent. Dann gibt es zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_j) \subseteq \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{j \to \infty} |z_j| = +\infty$, so dass

$$\lim_{j \to \infty} f(z_j) = w\,.$$

Insbesondere ist $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

Beweis. Annahme: es existiert ein Punkt $w \in \mathbb{C}$, der nicht Grenzwert einer Folge $(f(z_j))$ mit $\lim\limits_{j \to \infty} |z_j| = +\infty$ ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ derart, dass

$$\underbrace{|f(z) - w|}_{=:g(z)} > \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R\,.$$

Die Funktion g besitzt auf der kompakten Menge $\overline{K_R(0)}$ nur endlich viele Nullstellen $z_1, \ldots, z_N$. Für $P(z) := \prod_{j=1}^{N} (z - z_j)$ gibt es nach Satz 9.2 eine *nullstellenfreie* ganze Funktion H mit $H(z)P(z) = g(z)$. Da $|P(z)| \leq M|z|^N$ für alle $|z| \geq 1$ (Satz 7.12)), folgt

$$\left| \frac{1}{H(z)} \right| \leq \frac{M}{\varepsilon} |z|^N \qquad \text{für alle } |z| \geq \max\{1, R\}\,.$$

Nach Satz 7.12 ist daher $1/H$ ein Polynom vom Grad $\leq N$. Da $1/H$ nullstellenfrei ist, folgt $1/H \equiv$ *const* $\neq 0$ auf $\mathbb{C}$. Dann ist g und daher auch f ein Polynom. $\square$

Im Zusammenspiel mit dem Fundamentalsatz der Algebra (Beispiel 7.11 stellt Satz 9.8 eine beträchtliche Verschärfung des Satzes von Liouville dar (Warum?). Wir können der Versuchung nicht widerstehen, den berühmten Satz von Picard zumindest zu erwähnen:

Satz 9.9 (Kleiner Satz von Picard).
Es sei f eine ganz–transzendente Funktion. Dann nimmt f jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

Für einen Beweis verweisen wir auf die Mastervorlesung zur Funktionentheorie.

V.9 Verständnisfragen

1. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$ sei nicht die Nullfunktion.

   (a) Es sei $K \subseteq G$ kompakt. Warum hat dann f in K höchstens endlich viele Nullstellen ?

(b) Warum besitzt f in G höchstens abzählbar viele Nullstellen ?

2. Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ mit $f^{(k)}(0) \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Begründen Sie warum, $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt.

3. (Zum Knobeln)
Die stetige Funktion $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ sei holomorph in $\mathbb{D}$. Ferner seien $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, so dass $f(e^{it}) = 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Zeigen Sie, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$.
(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den einfachen Spezialfall $\alpha = 0$ und $\beta = 2\pi$. Beachten Sie dann, dass man holomorphe Funktionen multiplizieren darf.)

4. (Die Regel von L'Hospital im Komplexen)
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ sei Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ einer Funktion $f \in \mathscr{H}(U)$ und Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ einer Funktion $g \in \mathscr{H}(U)$. Begründen Sie die Regel von L'Hospital:
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & n > m \\ \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)} \qquad \text{falls} & n = m \\ \infty & n < m\,. \end{cases}$$
Hierbeit ist $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)/g(z) = \infty$, als $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)/g(z)| = +\infty$ zu lesen.

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 9.1.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g \in \mathscr{H}(U)$, und $z_0 \in U$. f besitze eine Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ in z_0 und g besitze eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ in z_0. Zeigen Sie, dass $h := f/g$ genau dann in einer Umgebung von z_0 holomorph ist, wenn $n \geq m$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall auch $h(z_0)$.

Aufgabe 9.2.
Bestimmen Sie, ob folgende reellwertigen Funktionen definiert auf reellen Intervallen durch ihre Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ dargestellt werden und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Konvergenzradius.

(a) $f : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x - 1}$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 9.3 (Staatsexamen Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 2)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mt $0 \in \Omega$. Untersuchen Sie, ob es holomorphe Funktionen $f, g, h : \Omega \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt.

(a) $f\left(\frac{1}{n^{2011}}\right) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n^{2011}} \in \Omega$, aber $f \not\equiv 0$.

(b) $g^{(k)}(0) = (k!)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) $h\left(\frac{1}{2n}\right) = h\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \in \Omega$.

Aufgabe 9.4 (Staatsexamen Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 1 a))**.**
Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $D(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$. Sei $h : D(0,2) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $h(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D(0,2) \cap \mathbb{R}$.

i) Zeigen Sie, dass
$$h^{(n)}(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \cap D(0,2) \text{ und alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

ii) Folgern Sie aus (i) die Beziehung
$$\overline{h(z)} = h(\bar{z}) \qquad \text{für alle } z \in D(0,2)\,.$$

iii) Gelte zusätzlich $h(iy) \in \{it \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ für alle $y \in \mathbb{R} \cap D(0,2)$. Dann ist $h(-z) = -h(z)$ für alle $z \in D(0,2)$. Beweisen Sie diese Gleichung !

Aufgabe 9.5.
Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ mit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, wobei $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < 1$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ injektiv ist.

Aufgabe 9.6.
Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie
$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{zf'(z)}{f(z)} = n \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist Polynom vom Grade } n\,.$$

Aufgabe 9.7.
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathscr{H}(G)$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt $z \in G$ ein $n = n(z) \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^{(n)}(z) = 0$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist.

Kapitel 10

Maximumprinzip und Offenheitsprinzip

In der analytischen Landschaft einer holomorphen Funktion gibt es keine echten Gipfel. [60], S. 230

Das folgende Resultat beschreibt eine der wichtigsten Eigenschaften holomorpher Funktionen.

Satz 10.1 (Starkes lokales Maximumprinzip/Minimumprinzip für holomorphe Funktionen).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$.

(a)] Besitzt $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist $f : G \to \mathbb{C}$ konstant.

(b) Ist f in G nullstellenfrei und besitzt $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so ist $f : G \to \mathbb{C}$ konstant.

Beweis. "Nobody is above average"
(a) Es gibt ein $R > 0$ mit $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für alle $z \in \overline{K_R(z_0)} \subseteq G$. Die Mittelwerteigenschaft (Korollar 7.5) und die Dreieicksungleichung implizieren

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \le |f(z_0)|, \qquad r \in (0, R].$$

Insbesondere besteht in der zuletzt betrachteten Ungleichung Gleichheit, und dies zeigt $|f(z)| = |f(z_0)|$ für alle $z \in K_R(z_0)$. Satz 2.11 impliziert $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in K_R(z_0)$, d.h. f ist konstant auf dem Gebiet G aufgrund des Identitätsprinzips (Satz 9.5). (b) folgt aus (a) für $1/f \in \mathscr{H}(G)$. □

Korollar 10.2 (Schwaches Maximumprinzip/Minimumprinzip für holomorphe Funktionen).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$ derart, dass $|f|$ stetig auf $\overline{G}$ (fortsetzbar) ist.

(a) Dann nimmt die Funktion f ihr Betragsmaximum auf ∂G an, d.h.

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

(b) Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so nimmt die Funktion $|f|$ ihr Minimum auf ∂G an:

$$\min_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \min_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Beweis. (a) Als stetige Funktion nimmt $|f|$ auf der kompakten Menge $\overline{G}$ ihr Maximum in einem Punkt $p \in \overline{G}$ an. Falls $p \notin \partial G$, so wird dieses im Inneren von G angenommen und f ist konstant nach Satz 10.1 (a), d.h. das Maximum wird dann (auch) auf ∂G angenommen. (b) Falls $|f(\eta)| = 0$ für ein $\eta \in \partial G$, so ist die Behauptung offensichtlich. Andernfalls wende man Teil (a) auf die Funktion $1/f \in \mathscr{H}(G)$ an. □

Bemerkung.
Die Beschränktheit des Gebietes G in Korollar 10.2 ist wesentlich. Für die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und $f(z) = \exp(-iz)$ gilt $|f(z)| = 1$ auf $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$, aber $|f(i)| = e^1 > 1$.

Ein wichtige Anwendung des Maximumprinzips ist das sogenannte Offenheitsprinzip:

Satz 10.3 (Offenheitsprinzip/Satz von der Gebietstreue).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$ nicht konstant. Dann ist für jede offene Menge U in G die Bildmenge $f(U)$ offen. Insbesondere ist $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis. (i) Es sei $z_0 \in U$. Da f nicht konstant ist, existiert nach Satz 9.3 ein $\varepsilon > 0$, derart, dass $\overline{K_\varepsilon(z_0)} \subseteq U$ und

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - f(z_0)| > 0 .$$

Wir zeigen $K_\delta(f(z_0)) \subseteq f(K_\varepsilon(z_0))$, woraus folgt, dass $f(U)$ offen ist. Fixiere $w \in K_\delta(f(z_0))$. Dann gilt

$$\min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - w| \geq \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| > 2\delta - \delta = \delta > |f(z_0) - w| .$$

Folglich nimmt die holomorphe Funktion $f - w : G \to \mathbb{C}$ ihr Betragsminimum auf $\overline{K_\varepsilon(z_0)}$ nicht auf dem Rand $\partial K_\varepsilon(z_0)$ an. Satz 10.1 (b), zeigt daher, dass $f - w$ eine Nullstelle $z_* \in K_\varepsilon(z_0)$ besitzt, d.h. es gilt $f(z_*) = w$.

(ii) Aus (i) folgt, dass $f(U)$ offen ist. Insbesondere ist $f(G)$ offen. Da f Kurven in G auf Kurven in $f(G)$ abbildet, ist $f(G)$ wegzusammenhängend, also ein Gebiet. $\square$

Bemerkung (Offenheitsprinzip $\Longrightarrow$ Maximumprinzip).
Das Offenheitsprinzip impliziert in einfacher Weise das Maximumprinzip: Hat $f \in \mathscr{H}(G)$ in $z_0 \in G$ ein lokales Betragsmaximum, so ist $f(z_0)$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ein Randpunkt der Bildmenge $f(K_\varepsilon(z_0))$, die daher nicht offen ist.

Definition 10.4 (Biholomorphe Abbildungen).
*Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen. Eine bijektive Abbildung $f : U \to V$ heißt **biholomorphe Abbildung** von U auf V, falls $f \in \mathscr{H}(U)$ und $f^{-1} \in \mathscr{H}(V)$.*

Satz 10.5 (Lokales Biholomorphiekriterium).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in \mathscr{H}(U)$. Falls $f'(z_0) \neq 0$, so bildet f eine offene Umgebung V von z_0 biholomorph auf eine offene Umgebung W von $f(z_0)$ ab.

Bemerkung (konform $\Longrightarrow$ biholomorph).
Jede (lokal) konforme Abbildung ist also (lokal) biholomorph. Satz 10.5 folgt beispielsweise aus dem Umkehrsatz (Analysis 2). Wir geben einen hiervon unabhängigen Beweis, der sich auf die folgende einfache Hilfsaussage stützt, die wir später (Beweis von Satz 12.3) noch einmal verwenden werden.

Proposition 10.6 (Differenzenquotient einer holomorphen Funktion ist stetig).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathscr{H}(U)$. Dann ist $g : U \times U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{für } z \neq w, \\[2ex] f'(w) & \text{für } z = w . \end{cases}$$

stetig.

Beweis. Für Punkte $(z_0, w_0) \in U \times U$ mit $z_0 \neq w_0$ folgt dies aus der Stetigkeit von f. Für Punkte $(z_0, z_0) \in U \times U$ gilt

$$\begin{aligned}|g(z,w) - g(z_0,z_0)| = \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z-w} \int_{[w,z]} (f'(\eta) - f'(z_0))\, d\eta \right| \\ &\leq \max_{\eta \in [w,z]} |f'(\eta) - f'(z_0)|\end{aligned}$$

falls $w \neq z$ und $|g(z,w) - g(z_0,z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)|$ falls $w = z$. Also folgt $g(z,w) \to g(z_0,z_0)$ für $z, w \to z_0$ aufgrund der Stetigkeit von f'. □

Beweis von Satz 10.5. Nach Proposition 10.6 gibt es eine offene Umgebung V von z_0 derart, dass $|f(w) - f(z)| \geq \frac{|f'(z_0)|}{2}|w-z|$ für alle $z, w \in V$, d.h. $f : V \to \mathbb{C}$ ist injektiv und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in V$. Für jede offene Menge $U' \subseteq V$ ist nach Satz 10.3 die Menge $(f^{-1})^{-1}(U') = f(U')$ ebenfalls eine offene Menge, d.h. f^{-1} ist stetig auf der offenen Umgebung $W := f(V)$ von $f(z_0)$. Somit gilt für jedes $w_1 = f(z_1) \in W$,

$$\lim_{w \to w_1} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{f'(z_1)},$$

d.h. $f^{-1} \in \mathscr{H}(W)$. □

Satz 10.7 (Holomorphie der Umkehrfunktion; bijektiv & holomorph = biholomorph).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathscr{H}(G)$ injektiv und $\Omega := f(G)$. Dann ist $f^{-1} \in \mathscr{H}(\Omega)$ und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Daher ist f eine biholomorphe Abbildung von G auf $f(G)$.

Beweis. Zunächst ist $f^{-1} : \Omega \to G$ stetig, denn das Urbild jeder offenen Menge $U \subseteq G$ unter f^{-1} ist gegeben durch $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ und daher offen nach Satz 10.3. Wir betrachten nun die aufgrund der Stetigkeit von f' abgeschlossene Menge $M := \{z \in G : f'(z) = 0\}$.

Die Bildmenge $f(M)$ hat keinen Häufungspunkt in Ω, denn für jeden Häufungspunkt $\tilde{w} \in \Omega$ von $f(M)$ wäre aufgrund der Stetigkeit von f^{-1} der Punkt $f^{-1}(\tilde{w}) \in G$ ein Häufungspunkt von M. Dies widerspricht aber Satz 9.3, demzufolge M keinen Häufungspunkt in G besitzt.

Nach Satz 10.5 ist die stetige Funktion $f^{-1} : \Omega \to G$ holomorph auf der nach Satz 10.3 offenen Menge $\Omega \setminus f(M) = f(G \setminus M)$. Der Riemannsche Hebbarkeitssatz (Satz 8.1) zeigt, dass $f^{-1} \in \mathscr{H}(\Omega)$. Aus $f^{-1}(f(z)) = z$ folgt mithilfe der Kettenregel $(f^{-1})'(f(z)) \cdot f'(z) = 1$, also $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. □

Bemerkung (Satz 10.5 und Satz 10.7: konform = biholomorph**).**
Im Reellen ist die analoge Aussage falsch: $f(x) = x^3$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv und (beliebig oft) differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ab, jedoch ist $f'(0) = 0$ und f^{-1} ist in 0 nicht differenzierbar. Satz 10.7 zeigt auch: Die (lokal) konformen Abbildungen sind genau die (lokal) biholomorphen Abbildungen.

Definition 10.8 (Automorphismus).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine konforme Abbildung f von G auf G nennen wir auch einen ***Automorphismus von*** *G und setzen* $\mathrm{Aut}(G) := \{f : G \to G$ *holomorph und bijektiv*$\}$.

Bemerkung 10.9.
Der Satz von der Holomorphie der Umkehrfunktion (Satz 10.7) zeigt, dass mit $f \in \mathrm{Aut}(G)$ auch $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$. Ferner gilt: $f, g \in \mathrm{Aut}(G) \Longrightarrow f \circ g \in \mathrm{Aut}(G)$. D.h. $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe bzgl. Komposition. Man nennt $\mathrm{Aut}(G)$ die Automorphismengruppe von G.

Im folgenden Satz bestimmen wir $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ explizit. Der Satz zeigt außerdem, dass aus der Injektivität einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ automatisch deren Surjektivität folgt !

Satz 10.10 (Staatsexamen Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 5).
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ und $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b \,:\, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.

Beweis. Die Injektivität der ganzen Funktion $h(z) := f(z) - f(0)$ impliziert $h(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \cap h(\mathbb{D}) = \emptyset$. Da $h(\mathbb{D})$ nach Satz 10.3 eine offene Umgebung von 0 bildet, folgt $|h(z)| \geq \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ für ein $\varepsilon > 0$. Die ganze Funktion $g(z) := z/h(z)$ erfüllt daher $|g(z)| \leq |z|/\varepsilon$ für alle $|z| \geq 1$. Nach Satz 7.12 ist g somit ein Polynom vom Grade ≤ 1. Da g nullstellenfrei ist, muss g konstant sein. $\square$

Satz 10.11 (Lokale Normalform holomorpher Funktionen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathscr{H}(U)$ nicht konstant, und $z_0 \in U$. Es sei $w_0 = f(z_0)$ und die Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$ besitze in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m. Dann existiert eine Kreisscheibe $K_\delta(z_0) \subseteq U$ und eine Funktion $\varphi \in \mathscr{H}(K_\delta(z_0))$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $f(z) = w_0 + \big(\varphi(z)\big)^m$ für alle $z \in K_\delta(z_0)$,

(b) $\varphi : K_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ bildet $K_\delta(z_0)$ biholomorph auf eine Umgebung W von $\varphi(z_0)$ ab.

Beweis. Wähle $K_r(z_0) \subseteq U$, derart, dass $f(z) - f(z_0) \neq 0$ für alle $z \in K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dann existiert $g \in \mathscr{H}(K_r(z_0))$, $g(z_0) \neq 0$, mit

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z)\,, \qquad z \in K_r(z_0),$$

siehe Satz 9.2. Beachte, $g(z) \neq 0$ für $z \in K_r(z_0)$. Daher ist g'/g holomorph in $K_r(z_0)$ und besitzt auf $K_r(z_0)$ eine holomorphe Stammfunktion h, siehe Satz 6.8. Es gilt

$$\Big(g(z)\exp(-h(z))\Big)' = \left(g'(z) - g(z)\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\exp(-h(z)) = 0$$

für $z \in K_r(z_0)$. Daher existiert ein $d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, derart, dass

$$g(z)\exp(-h(z)) = d \qquad \text{für alle } z \in K_r(z_0)\,.$$

Dies impliziert $g(z) = \exp(h(z) + c)$ für alle $z \in K_r(z_0)$ mit $c \in \mathbb{C}$. Definiere nun $\varphi : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp\left(\frac{h(z) + c}{m}\right).$$

Dann gilt

$$w_0 + \varphi(z)^m = w_0 + (z - z_0)^m \exp(h(z) + c) = w_0 + (z - z_0)^m g(z)\,, \qquad z \in K_r(z_0)\,.$$

Da $\varphi'(z_0) \neq 0$ zeigt Satz 10.5, dass φ die angegebebenen Eigenschaften besitzt. $\square$

Bemerkung (Kompositionelle lokale Normalform holomorpher Funktionen).
Jede nichtkonstante holomorphe Funktion lässt sich daher lokal als Komposition einer lokal konformen Abbildung mit einem Polynom der Form $w \mapsto w_0 + w^m$ schreiben.

Bemerkung (Alternativer Beweis für Satz 10.7).
Falls $f'(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in G$, so hat $g := f - f(z_0)$ eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 2$ in z_0. Satz 10.11 zeigt, dass $g = \varphi^m$ für eine biholomorphe Abbildung φ einer Kreisscheibe $K_\delta(z_0)$ auf eine offene Umgebung W von 0. Insbesondere gibt es Punkte $\eta \neq \eta'$ in W mit $\eta^m = \eta'^m$, d.h. $z \neq z' \in K_\delta(z_0)$ mit $\varphi(z')^m = \varphi(z)^m$ oder $f(z) = f(z')$. Widerspruch! Also ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ und f^{-1} ist holomorph nach Satz 10.5.

A.10 Ergänzungen und Ausblicke

Benutzt man die einfache Tatsache, dass das Produkt holomorpher Funktionen wieder holomorph ist, so lässt sich das schwache Maximumprinzip für holomorphe Funktionen direkt aus der Cauchy Integralformel ableiten:

Satz A 10.1 (Schwaches Maximumprinzip für Kreisscheiben direkt aus der Cauchy Integralformel). *Es $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Menge U in $\mathbb{C}$ und $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$. Dann gilt*

$$|f(z)| \leq ||f||_{\partial K_r(z_0)} \quad \textit{für alle } z \in K_r(z_0)\,.$$

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann gilt mit der Cauchy Integralformel für $f^n \in \mathscr{H}(U)$ und der Standardabschätzung

$$|f(z)|^n = |f(z)^n| \leq \max_{|w-z_0|=r} \frac{1}{|w-z|} \cdot ||f||^n_{\partial K_r(z_0)} \qquad \text{für alle } z \in K_r(z_0)$$

Zieht man die n–te Wurzel und lässt dann $n \to \infty$, so folgt die Behauptung. □

Bemerkung A 10.2 (Maximumprinzip für Potenzreihen via Parsevalscher Gleichung). *Das starke Maximumprinzip lässt sich auch mithilfe der Parsevalschen Gleichung aus Korollar 7.7 beweisen. Ist $f \in \mathscr{H}(K_R(z_0))$, so gilt nämlich*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

für alle $z \in K_R(z_0)$ mit $a_0 = f(z_0)$. Gilt nun $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in K_\varrho(z_0)$ für ein $\varrho > 0$, so folgt aus der Parsevalsche Gleichung

$$|a_0|^2 = |f(z_0)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

für alle $r \in [0, \varrho)$ und daher $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in K_\varrho(z_0)$.

Satz A 10.3 (Maximumprinzip für die Summe der Beträge mehrerer holomorpher Funktionen). *Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{H}(G)$. Besitzt $|f_1| + \ldots + |f_n|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so sind alle Funktionen $f_1, \ldots, , f_n$ konstant.*

Bemerkung A 10.4 (Funktionentheoretischer Beweis der Hölder Ungleichung [63]). *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ stetige Funktionen mit*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt = 1\,.$$

Dann ist

$$\phi(z) := \int_a^b f(t)^{1-z} g(t)^z \, dt$$

holomorph auf $S := \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ und stetig auf $\overline{S}$. Dann gilt wegen $|a^z| = a^{\operatorname{Re} z}$ für $a \geq 0$ und $z \in \mathbb{C}$,

$$|\phi(s+it)| \leq |\phi(s)|\,, \qquad s + it \in S\,, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

Aus dem Maximumprinzip folgt $|\phi(z)| \leq \max\{\phi(0), \phi(1)\} = 1$ für alle $z \in S$, d.h. setzt man $q = 1/z \in [1,\infty]$, $1/p := 1 - 1/p$ und ersetzt f durch f^p und g durch g^q so folgt

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt \leq \left(\int_a^b f(t)^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b g(t)^q \, dt \right)^{1/q}\,.$$

Der berühmte Interpolationssatz von Riesz–Thorin aus der Funktionalanalysis (siehe z.B. [41, Section 3.5]) lässt sich auf ähnliche Weise beweisen, wobei man an Stelle des Maximumprinzips den Hadamardschen Drei–Linien–Satz anwendet.

Satz A 10.5 (Das Prinzip von Phragmén–Lindelöf und der Drei–Linien–Satz).
Es sei $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ *und* $f : S \to \mathbb{C}$ *stetig und holomorph und beschränkt in* $\overset{\circ}{S}$

(a) Es gelte $|f(z)| \leq M$ *für alle* $z \in \partial S$. *Dann gilt auch* $|f(z)| \leq M$ *für alle* $z \in S$.

(b) Es sei $M(x) := \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} |f(x+iy)|$. *Dann gilt*

$$M(x) \leq M(0)^{1-x} M(1)^x \,.$$

Satz A 10.6 (Das Hopf Lemma).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *holomorph und* $R \in (0,1)$. *Für*

$$\alpha = \frac{\log\left(\max\limits_{|z|=R} |f(z)|\right)}{\log R}$$

gilt dann

$$|f(z)| \leq |z|^\alpha \quad \textit{für alle } R < |z| < 1 \,,$$

sowie

$$\liminf_{|z| \to 1} \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} \geq \alpha \,.$$

Beweis. Wir betrachten das Ringgebiet $A_{R,1}(0) := \{z \in \mathbb{C} : R < |z| < 1\}$ und setzen

$$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| \,.$$

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ zeigt das Maximumprinzip

$$\left| \frac{f(z)^m}{z^n} \right| \leq \max\left\{ \frac{M(R)^m}{R^n}, 1 \right\}$$

d.h.

$$|f(z)| \leq |z|^{n/m} \max\left\{ \frac{M(R)}{R^{n/m}}, 1 \right\} \,.$$

□

Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Die Mittelwerteigenschaft für $f \in \mathscr{H}(U)$ impliziert insbesondere die *Mittelwertungleichung* für $s := |f|$:

$$s(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(z_0 + re^{it}) \, dt \tag{MWU}$$

für jede Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$. Eine Analyse des Beweises des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen zeigt, dass lediglich diese Eigenschaft des Betrags einer holomorphen Funktion verwendet wurde. Es ist daher naheliegend, diese Eigenschaft zum Anlass zu nehmen, eine "interessante" Klasse von Funktionen zu definieren.

Definition 10.12.
Eine stetige Funktion $s : U \to \mathbb{R}$ *auf einer offenen Menge* U *in* $\mathbb{C}$ *heißt subharmonisch, falls es zu jedem Punkt* z_0 *ein* $R > 0$ *gibt derart, dass (MWU) für alle* $0 < r \leq R$ *gilt.*

Beispiele A 10.7.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist $f \in \mathscr{H}(U)$, so sind $|f|$, $\pm\operatorname{Re} f$, $\pm\operatorname{Im} f$ subharmonisch auf U. Insbesondere sind $\pm h$ für jede in U harmonische Funktion h subharmonisch. Ist $s \in C^2(U)$, so gilt nach Aufgabe 2.3, dass aus u subharmonisch in U auch $\Delta s \geq 0$ in U folgt.

Satz A 10.8 (Globales Maximumprinzip für subharmonische Funktionen).
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $s : G \to \mathbb{R}$ eine subharmonische Funktion.

(a) (Starkes Maximumprinzip)
Besitzt s in einem Punkt $z_0 \in G$ ein globales Maximum, so ist $s : G \to \mathbb{R}$ konstant.

(b) (Schwaches Maximumprinzip)
Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und s stetig auf $\overline{G}$, so nimmt die Funktion s ihr Betragsmaximum auf ∂G an, d.h.

$$\max_{z \in \overline{G}} s(z) = \max_{z \in \partial G} s(z)\,.$$

Beweis. (a) Es existiert nach Voraussetzung ein $R > 0$ mit $s(z) \leq s(z_0)$ für alle $|z - z_0| \leq R$. Zusammen mit der Mittelwertungleichung folgt für $0 < r \leq R$:

$$0 = s(z_0) - s(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(z_0 + re^{it})\,dt - s(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(s(z_0 + re^{it}) - s(z_0)\big)\,dt \leq 0\,,$$

d.h. stets Gleichheit. Da der Integrand im zuletzt betrachteten Integral ≤ 0 ist, folgt $s(z) = s(z_0)$ für alle $z \in K_R(z_0)$. Die Menge $M := \{z \in G : s(z) = s(z_0)\}$ ist daher offen in G und aufgrund der Stetigkeit von s auch abgeschlossen. Da G ein Gebiet ist, folgt $M = G$.

(b) Als stetige Funktion nimmt s auf der kompakten Menge $\overline{G}$ ihr Maximum an. Wird dieses im Inneren von G angenommen, so ist s konstant nach (a), d.h. das Maximum wird dann (auch) auf ∂G angenommen. □

Bemerkung A 10.9.
Satz 10.8 ist insbesondere für jede harmonische Funktion h (und $-h$) anwendbar!

Das einfache *lokale* Injektivitätskriterium (Satz 10.5) hat das folgende globale Pendant. Ein Gebiet G in $\mathbb{C}$ heißt konvex, falls zu je zwei Punkten $z, w \in G$ die Strecke $[z, w]$ in G liegt.

Satz A 10.10 (Injektivitätskriterium von Wolff–Noshiro).
Es sei G ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathscr{H}(G)$ mit $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ für alle $z \in G$. Dann ist $f : G \to \mathbb{C}$ injektiv.

Beweis. Es gilt für alle $z_1, z_2 \in K$ mit $z_2 \neq z_1$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_2}^{z_2} f'(w)\,dw\right) = \int_0^1 \operatorname{Re} f'(z_1 + t(z_2 - z_1))\,dt > 0\,,$$

d.h. $f(z_2) \neq f(z_1)$. □

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 10.1 (Staatsexamen Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 2).
Sei f eine in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, für die $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Man zeige, dass dann sogar $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muss.

Aufgabe 10.2.
Beweisen Sie Satz A.10.3.

Aufgabe 10.3 (Staatsexamen Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 2).
Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

a) $f(z) = -f(\bar{z})$, $z \in \mathbb{C}$, bzw.

b) $\operatorname{Re} g(z) = \sin(\operatorname{Im} g(z))$, $z \in \mathbb{C}$, und $g(0) = 2\pi i$, bzw.

c) $h'(z) = z^2 h(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 10.4.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Die Funktion $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ sei stetig und auf G holomorph und injektiv. Zeigen Sie: $f(\partial G) = \partial f(G)$.

Aufgabe 10.5 (Staatsexamen Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 5).
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige und nichtkonstante Funktion.

a) Die Einschränkung $f|_G$ von f auf G sei holomorph.

   i) Zeigen Sie, dass $\partial f(G) \subset f(\partial G)$.

   ii) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $\partial f(G) \subsetneq f(\partial G)$.

b) Geben Sie en Beispiel für ein derartiges G und f an mit $f|_G$ unendlich oft differenzierbar und $\partial f(G) \not\subset f(\partial G)$.

Aufgabe 10.6 (Staatsexamen Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 4).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die bei Annäherung an ∂G gegen ∞ strebt (d.h. für jede Folge (z_n) in G mit $z_n \to z \in \partial G$ gilt $|f(z_n)| \to \infty$). Zeigen Sie: f ist nicht holomorph, indem Sie die folgenden drei Fälle unterscheiden:

(i) f hat keine Nullstelle in G.

(ii) f hat endlich viele Nullstellen in G.

(iii) f hat unendlich viele Nullstellen in G.

Aufgabe 10.7 (Staatsexamen Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 1).
Konstruieren Sie jeweils eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften oder begründen Sie, warum es eine solche Funktion nicht geben kann.

(a) f bildet $\mathbb{C}$ auf die offene Kreisscheibe $D = \{u + iv : (u-1)^2 + v^2 < 4\}$ ab.

(b) $f(z) = 0$ gilt genau für $z = k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(c) f erfüllt $f(0) = 2$ und $|f(z)| \leq 1$ für $|z| = 1$.

Kapitel 11

Das Lemma von Schwarz

Das Wesen der Mathematik ist das Beweisen von Sätzen – und das ist, was die Mathematiker tun: sie beweisen Sätze. Aber, um die Wahrheit zu sagen, was sie wirklich beweisen wollen, wenigstens einmal in ihrem Leben, ist ein Lemma, so wie das Lemma von Fatou in der Analysis, von Gauss in der Zahlentheorie, oder das Burnside–Frobenius Lemma in der Kombinatorik. Nun, wann wird eine mathematische Aussage ein wirkliches Lemma? Zunächst sollte es vielfältige Anwendungen haben, sogar auf Probleme, die nichts miteinander zu tun zu haben scheinen. Zweitens sollte die Aussage, sobald man sie gesehen hat, vollkommen offensichtlich sein. Die Reaktion des Lesers könnte durchaus von etwas Neid durchsetzt sein: „Warum habe ich das nicht gesehen?“ Und drittens sollten das Lemma und sein Beweis, von einem ästhetischen Standpunkt aus gesehen, schön sein!

M. Aigner, G. Ziegler, *Das Buch der Beweise*

Das folgende Ergebnis beruht auf dem Maximumprinzip und stellt eines der wichtigsten Resultate der Funktionentheorie dar.

Satz 11.1 (Lemma von Schwarz).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) $|f(z)| \le |z|$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$.

(b) $|f'(0)| \le 1$.

Gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ *für ein* $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ *oder* $|f'(0)| = 1$, *so folgt* $f(z) = \eta\, z$ *für ein* $\eta \in \partial\mathbb{D}$.

Beweis (vgl. Carathéodory [17], S. 110). Nach Satz 9.2 existiert ein $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ mit $f(z) = zg(z)$ und $g(0) = f'(0)$. Fixiere nun $0 < r < 1$ und betrachte $g_r(z) := g(rz)$. Dann ist $g_r \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ mit

$$|g_r(w)| = \frac{|f(rw)|}{r|w|} \le \frac{1}{r}, \qquad w \in \partial\mathbb{D}.$$

Das Maximumprinzip (Satz 10.1) impliziert $|g(rz)| = |g_r(z)| \le 1/r$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Für $r \to 1$ ergibt sich $|g(z)| \le 1$, d.h. $|f'(0)| = |g(0)| \le 1$ und $|f(z)| = |z| \cdot |g(z)| \le |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Falls $|f(z_0)| = |z_0|$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist $|g(z_0)| = 1$ oder $|g(0)| = 1$. Die Funktion $|g|$ nimmt also ihr Maximum in $\mathbb{D}$ an. Satz 10.1 impliziert daher $g \equiv const$ auf $\mathbb{D}$ mit $|g| \equiv 1$. Es folgt $f(z) = \eta\, z$ für ein $\eta \in \partial\mathbb{D}$. □

Geometrisch besagt das Lemma von Schwarz, dass jede holomorphe Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe, die den Nullpunkt fixiert, bereits jede der Kreisscheiben $K_r(0)$, $0 < r < 1$, in sich selbst abbildet! Eine unmittelbare Anwendung des Schwarzschen Lemmas bezieht sich auf die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ von $\mathbb{D}$.

Korollar 11.2.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \eta\, \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \; : \; a \in \mathbb{D}, \eta \in \partial\mathbb{D} \right\}.$$

Beweis. „$\supseteq$“: Sei $a \in \mathbb{D}$ und $T_a(z) := \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$. Dann gilt $T_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit $T_a^{-1} = T_a$. Für jedes $\eta \in \partial\mathbb{D}$ ist daher $f := \eta T_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit

$$f^{-1}(z) = T_a(\overline{\eta}z) = \overline{\eta}\,\frac{a\eta - z}{1-\overline{a\eta}z} = \overline{\eta}T_{a\eta}(z)\,.$$

„$\subseteq$“: Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ und $a \in \mathbb{D}$ mit $f(a) = 0$. Dann ist $g := f \circ T_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit $g(0) = 0$. Das Lemma von Schwarz angewendet auf g bzw. auf g^{-1} zeigt $|g(z)| \leq |z|$ bzw. $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ jeweils für alle $z \in \mathbb{D}$, also $|g(z)| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Eine nochmalige Anwendung des Lemmas von Schwarz impliziert nun $g(z) = \eta z$ für ein $\eta \in \partial\mathbb{D}$, also $f = \eta T_a^{-1} = \eta T_a$. □

Satz 11.3 (Lemma von Schwarz–Pick, invariante Form des Schwarzschen Lemmas).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt

(a) $$\left|\frac{f(a)-f(z)}{1-\overline{f(a)}\,f(z)}\right| \leq \left|\frac{a-z}{1-\overline{a}\,z}\right| \quad \text{für alle } z, a \in \mathbb{D}.$$

Gleichheit besteht für $z, a \in \mathbb{D}$, $z \neq a$, genau dann wenn $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

(b) $$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Gleichheit besteht für ein $z \in \mathbb{D}$ genau dann wenn $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Beweis. (a) $g := T_{f(a)} \circ f \circ T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ hat eine Nullstelle in 0, d.h. es gilt $|g(w)| \leq |w|$ für alle $w \in \mathbb{D}$ nach dem Lemma von Schwarz. Schreibt man $w = T_a(z)$, so bedeutet dies $|T_{f(a)}(f(z))| \leq |T_a(z)|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Gleichheit gilt genau dann, wenn g also f in $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ liegen. (b) folgt aus (a), wenn man (a) zu

$$\left|\frac{f(a)-f(z)}{a-z}\right| \leq \left|\frac{1-\overline{f(a)}f(z)}{1-\overline{a}z}\right|$$

unstellt und $a \to z$ betrachtet. Den Fall der Gleichheit in (b) überlassen wir der Leserin, siehe Aufgabe 11.1 und Beispiel 7.8. □

Insbesondere gilt: Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit einer Nullstelle $a_1 \in \mathbb{D}$, so folgt

$$|f(z)| \leq \left|\frac{a_1 - z}{1-\overline{a_1}z}\right|$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Um mehrere Nullstellen zu berücksichtigen, betrachten wir Produkte von Einheitskreisautomorphismen:

Definition 11.4 (Endliche Blaschke Produkte).
Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ und $\eta \in \partial\mathbb{D}$. Dann heißt

$$B(z) := \eta \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1-\overline{a_j}z}$$

***endliches Blaschke Produkt** (vom Grad n).*

Satz 11.5.
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten). Dann existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ mit

$$f(z) = g(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}.$$

Insbesondere gilt die Jensensche Ungleichung

$$|f(z)| \leq \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z} \right|, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Man beachte, dass die Jensenschen Ungleichung das Lemma von Schwarz verallgemeinert und verschärft.

Beweis. Satz 11.3 zeigt $|f(z)| \leq \left| \frac{a_1 - z}{1 - \overline{a_1} z} \right|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Folglich ist durch

$$f_1(z) := \frac{f(z)}{\frac{a_1 - z}{1 - \overline{a_1} z}}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

eine holomorphe Funktion $f_1 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit Nullstellen $a_2, \ldots, a_n$ definiert. Daher gilt wegen Satz 11.3

$$|f_1(z)| \leq \left| \frac{a_2 - z}{1 - \overline{a_2} z} \right| \qquad \text{also} \qquad |f(z)| \leq \left| \prod_{j=1}^{2} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z} \right| \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

So fortfahrend erhält man nach n Schritten die Behauptung mit

$$g(z) := f(z) \Big/ \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}.$$

□

Korollar 11.6.
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und nicht konstant mit Nullstellen $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{D}$ (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten). Dann gilt die sogenannte Blaschke Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) < \infty.$$

Dies bedeutet, dass die Nullstellen einer nichtkonstanten *beschränkten* holomorphen Funktion auf $\mathbb{D}$ sich „so schnell" gegen den Rand $\partial\mathbb{D}$ häufen müssen, dass die Blaschke Bedingung erfüllt ist. Beispielsweise gibt es keine *beschränkte* Funktion $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, die ihre Nullstellen genau in den Punkten $1 - 1/j$, $j = 2, 3, \ldots$, hat.

Beweis. O.E. sei 0 keine Nullstelle von f (sonst betrachte $f(z)/z^N$, wobei N die Ordnung der Nullstelle 0 sei). Die Jensensche Ungleichung zeigt

$$|f(0)| \leq \prod_{j=1}^{n} |a_j|,$$

d.h.

$$-\sum_{j=1}^{n} \log|a_j| = -\log \prod_{j=1}^{N} |a_j| \leq -\log|f(0)|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $-\log x \geq 1 - x$ für alle $x \in (0,1)$, ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - |a_j|) \leq -\log |f(0)|, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

□

A 11. Ergänzungen und Ausblicke

Bemerkung A 11.1.
Das Lemma von Schwarz wurde 1869 von H. A. Schwarz für den Fall injektiver holomorpher Abbildungen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bewiesen (siehe [65], Band II, S. 109). Die Bezeichung als "Das Schwarzsche Lemma" geht auf Carathéodory [17], S. 110, zurück. Dort und auch in [16] findet sich der oben angegebene Beweis, den Carathéodory (siehe auch [16]) E. Schmidt zuschreibt:

> *Kurz nach Schluß des Semesters kam P. Boutroux auf einige Tage nach Göttingen, und erzählte mir bei einem Spaziergang von seinen Bemühungen, den Borelschen Beweis des Picardschen Satzes, der damals sehr beliebt war, zu vereinfachen. Boutroux hatte bemerkt, daß dieser Beweis nur deshalb gelang, weil eine merkwürdige Rigidität bei konformen Abbildungen vorhanden war, die er übrigens nicht in Formeln fassen konnte. Diese Entdeckung von Boutroux ließ mich nicht ruhen und sechs Wochen später konnte ich die Landausche Verschärfung des Picardschen Satzes in wenigen Zeilen beweisen, indem ich den Satz benutzte, den man heute das Schwarzsche Lemma nennt. Diesen Satz hatte ich mit Hilfe des Poissonschen Integrals gewonnen; erst durch Erhard Schmidt, dem ich meinen Fund mitgeteilt hatte, erfuhr ich nicht nur, daß der Satz schon bei Schwarz steht, sondern daß man ihn mit ganz elementaren Mitteln gewinnen kann. Der Beweis, den mir Schmidt damals mitteilte, kann in der Tat nicht verbessert werden.*
>
> *Carathéodory, Autobiographische Notizen, [20], Band V, S. 497.*

Satz A 11.2.
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right|^2 \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} \cdot \frac{1 - |f(w)|^2}{1 - |w|^2} .$$

Beweis. Dies folgt aus der „magischen" Formel (♡) von Seite 29 und dem Lemma von Schwarz–Pick

$$\frac{(1 - |f(z)|^2) \cdot (1 - |f(w)|^2)}{\left| 1 - \overline{f(w)} f(z) \right|^2} \overset{(\heartsuit)}{=} 1 - \left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right|^2 \geq 1 - \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right|^2 \overset{(\heartsuit)}{=} \frac{(1 - |z|^2) \cdot (1 - |w|^2)}{|1 - \overline{w} z|^2} .$$

□

Das Lemma von Schwarz–Pick in der Form von Satz 11.2 spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der sog. *Modell*– bzw. *DeBranges–Rovnyak–Räume*, siehe [51, 49, 50, 28, 25, 26, 1]. In dieser Theorie ist die Ungleichung von Schwarz–Pick gerade die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung im von der holomorphen Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ induzierten DeBranges–Rovnyak–Raum $\mathscr{H}(f)$.

Satz A 11.3 (Ungleichung von Borel–Carathéodory).
Es sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ mit $a := \sup\limits_{z \in \mathbb{D}} \operatorname{Re} f(z) < \infty$. Dann gilt für alle $|z| \leq r < 1$, dass

$$|f(z)| \leq \frac{2a}{1 - |z|} + \frac{1 + |z|}{1 - |z|} |f(0)| .$$

Beweis. Die Möbiustransformation $z/(2a-z)$ bildet $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < a\}$ auf $\mathbb{D}$, also

$$g(z) := \frac{f(z)}{2a - f(z)}$$

$\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ ab. Falls $f(0) = 0$, so folgt

$$|f(z)| = \left|\frac{2ag(z)}{1+g(z)}\right| \le \frac{2a|g(z)|}{1-|g(z)|} \le \frac{2a|z|}{1-|z|}$$

nach dem Lemma von Schwarz. Wendet man diese Ungleichung auf $f(z) - f(0)$ and, so erhält man

$$|f(z) - f(0)| \le \frac{2|z|}{1-|z|}\left(a - \operatorname{Re} f(0)\right).$$

□

Satz A 11.4 (Das Lemma von Jack–Julia–Löwner–Hopf–Zaremba).
Es sei $f \in \mathscr{H}(U)$ für eine offene Umgebung U von $\overline{\mathbb{D}}$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$ sowie $f(1) = 1$. Dann gilt $f'(1) \ge 1$.

Beweis. Wir wissen bereits (Satz A.2.3), dass $f'(1)$ reell und nichtnegativ ist. Somit ist

$$f'(1) = |f'(1)| = \lim_{z \to 1}\left|\frac{f(1) - f(z)}{1-z}\right| \ge \lim_{\mathbb{R} \ni x \to 1-} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|}.$$

Satz 11.1 zeigt folglich, dass $f'(1) \ge 1$. □

Wir verweisen auf [11] für weitere Anwendungen.

Korollar 11.4 (Lemma von Jack–Julia–Löwner–Hopf–Zaremba) und dessen Geschichte wird ausführlich in [11] diskutiert.

Der folgende Resultat verallgemeinert das Lemma von Schwarz.

Satz A 11.5 (Lindelöf 1909, [44]).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt

$$|f(z)| \le \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)|\,|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. Für alle $a, b \in \mathbb{D}$ gilt

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 = 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\overline{a}b|^2} \ge 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1-|a|\,|b|)^2} = \frac{(|a|-|b|)^2}{(1-|a|\,|b|)^2}.$$

Es folgt aus der Ungleichung von Schwarz–Pick

$$\frac{|f(z)| - |f(0)|}{1-|f(0)|\,|z|} \le \left|\frac{f(z) - f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right| \le \left|\frac{z-0}{1-\overline{0}z}\right| = |z|.$$

Dies ist bereits die zu zeigende Ungleichung. □

Satz A 11.6 (Unkelbach 1938, [69], Satz 2 & Osserman 2000, [53]).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt

$$|f(z)| \le |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |f'(0)|\,|z|}.$$

Ist $f \in H(U)$ für eine offene Umgebung U von $\overline{\mathbb{D}}$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$ sowie $f(1) = 1$, so gilt

$$f'(1) \ge \frac{2}{1 + |f'(0)|}.$$

Beweis. O.E. sei $|f'(0)| < 1$. Dann zeigt das Lemma von Schwarz, dass Satz A.11.5 auf $g(z) := f(z)/z$ angewendet werden darf. Dies beweist die erste Ungleichung. Hieraus folgt

$$\left|\frac{f(z)-f(1)}{|z|-1}\right| \geq \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \geq \frac{1+|z|}{1+|f'(0)|\,|z|}\,.$$

Für $z \to 1$ erhält man hieraus die Behauptung. □

Satz A 11.7 (F.W. Wiener 1914, siehe Bohr 1914 [12]).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt

$$|a_n| \leq 1 - |a_0|^2 \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis. Für $n = 1$ ist dies das Lemma von Schwarz–Pick. Für $n > 1$ sei $\eta := e^{2\pi i/n}$. Dann ist

$$g(z) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\eta^j z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} z^{mn}$$

holomorph in $\mathbb{D}$ mit $g(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Dies gilt dann auch für

$$\phi(z) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} z^n = a_0 + a_n z + a_{2n} z^2 + \cdot\,,$$

d.h. $|a_n| \leq 1 - |a_0|^2$. □

Das Lemma von Schwarz–Pick besagt, dass für die hyperbolische Ableitung

$$f^h(z) := \left(1-|z|^2\right)\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \lim_{u\to z}\frac{\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(f(u),f(z))}{\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(u,z)}$$

einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die Ungleichung $f^h(z) \leq 1$ gilt, wobei $f^h(z) < 1$, falls $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Satz A 11.8 (Schwarz–Pick für hyperbolische Ableitung).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, $f \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Dann gilt $\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(f^h(z), f^h(w)) \leq 2\,\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z,w)$ für alle $z, w \in \mathbb{D}$.

Beweis. Es sei zunächst $w = 0$ und $f(0) = 0$. Durch

$$g(u) := \frac{f(u)-f(z)}{1-\overline{f(z)}f(u)}\,\frac{1-\bar{z}u}{z-u}\,, \qquad h(u) := \frac{f(u)}{u}$$

sind zwei holomorphe Funktionen $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ und $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definiert mit $|g(z)| = f^h(z)$ und $|h(0)| = f^h(0)$ sowie $g(0) = h(z)$. Damit folgt

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(f^h(z), f^h(0)) = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(|g(z)|,|h(0)|) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(|g(z)|,|g(0)|) + \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(|h(0)|,|h(0)|) \leq 2\,\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z,0)\,.$$

□

Ungleichungen vom Schwarz–Pick Typ für Ableitungen höherer Ordnung werden eingehend in [5] untersucht. Weitere Verallgemeinerungen des Lemmas von Schwarz finden sich in [21]. Wir geben nun eine geometrische Interpretation des Lemmas von Schwarz–Pick.

Definition 11.7 (Hyperbolische Metrik).
Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ ein Weg. Dann heißt

$$L_h(\gamma) := \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\,dt$$

die hyperbolische Länge von γ und

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z)\,|dz| := \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

heißt die hyperbolische Metrik bzw. die Poincaré Metrik von $\mathbb{D}$.

Beispiel.
Es sei $r \in (0,1)$ und $\gamma_r(t) := rt$, $t \in [0,1]$, die Strecke von 0 nach r. Dann gilt

$$L_h(\gamma_r) = \int_0^1 \frac{r}{1-r^2t^2}\,dt \overset{s=rt}{=} \int_0^r \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\,.$$

Bemerkung (Geometrische Interpretation des Lemmas von Schwarz–Pick)**.**
Das Schwarz–Pick Lemma impliziert

$$L_h(f\circ\gamma) = \int_a^b \frac{|(f\circ\gamma)'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2}\,dt = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))|}{1-|f(\gamma(t))|^2}|\gamma'(t)|\,dt \le \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\,dt = L_h(\gamma)$$

für jeden Weg γ in $\mathbb{D}$ und jede holomophe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ oder $L_h(\gamma) = 0$. Folglich ist die hyperbolische Länge invariant unter konformen Selbstabbildungen von $\mathbb{D}$ und alle anderen holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sind längenverkürzend.

Definition 11.8 (Hyperbolischer Abstand).
Für $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ heißt

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1,z_2) := \inf\{L_h(\gamma)\,|\,\gamma \text{ Weg in } \mathbb{D} \text{ von } z_1 \text{ nach } z_2\}$$

*der **hyperbolische Abstand von** z_1 **und** z_2.*

Satz A 11.9 (Hyperbolische Geodätische).
Es seien z_1, z_2 Punkte in $\mathbb{D}$ mit $z_1 \neq z_2$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Weg γ in $\mathbb{D}$ von z_1 nach z_2 mit $L_h(\gamma) = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1,z_2)$, die sog. hyperbolische Strecke von z_1 nach z_2. Diese ist Teil der hyperbolischen Geraden durch z_1 und z_2, welche durch den in $\mathbb{D}$ gelegenen Teil der Kreislinie durch z_1 und z_2 gegeben ist, die $\partial\mathbb{D}$ senkreckt schneidet.

Der hyperbolische Abstand $\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1,z_2)$ von $z_1 \in \mathbb{D}$ und $z_2 \in \mathbb{D}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}\,z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}\,z_2}\right|}\right),$$

und $(\mathbb{D},\mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ ist ein metrischer Raum.

Beweis. 1. Fall: $z_1 = 0$ und $z_2 \neq 0$. Ist γ ein Weg in $\mathbb{D}$ von 0 nach z_2, dann gilt

$$L_h(\gamma) \quad = \quad \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\,dt \geq \int_a^b \frac{\frac{d}{dt}(|\gamma(t)|)}{1-|\gamma(t)|^2}\,dt \overset{s=|\gamma(t)|}{=} \int_0^{|z_2|} \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+|z_2|}{1-|z_2|}\,.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn γ die Verbindungsstrecke von 0 nach z_2 darstellt. 2. Fall: $z_1 \neq z_2$. Sei γ ein Weg in $\mathbb{D}$ von z_1 nach z_2. Dann ist $T_{z_1} \circ \gamma$ ein Weg in $\mathbb{D}$ von 0 nach $T_{z_1}(z_2) \neq 0$ und

$$L_h(\gamma) = L_h(T_{z_1} \circ \gamma) \geq \frac{1}{2}\log\frac{1+|T_{z_1}(z_2)|}{1-|T_{z_1}(z_2)|} = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)\,,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $T_{z_1} \circ \gamma$ die Strecke von 0 nach $T_{z_1}(z_2)$ ist. Da T_{z_1} als Möbiustransformation Kreise & Geraden auf Kreise & Geraden abbildet und als Einheitskreisautomorphismus $\partial\mathbb{D}$ auf $\partial\mathbb{D}$ abbildet sowie winkeltreu ist, gilt Gleichheit genau dann, wenn γ der zwischen z_1 und z_2 gelegene Teil derjenigen Kreislinie durch z_1 und z_2, die $\partial\mathbb{D}$ senkrecht schneidet, ist. Zum Nachweis, dass $(\mathbb{D}, \mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ einen metrischen Raum bildet, genügt es die Dreiecksungleichung nachzuweisen. Dazu seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$, γ_1 die hyperbolische Strecke vonz_1 nach z_2 und γ_2 die hyperbolische Strecke von z_2 nach z_3. Durchläuft man diese beiden Wege hintereinander, so erhält man einen Weg γ in $\mathbb{D}$ von z_1 and z_3, d.h.

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, z_3) \leq L_h(\gamma) = L_h(\gamma_1) + L_h(\gamma_2) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) + \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_2, z_3)\,.$$

□

Bemerkung (Hyperbolische Geometrie)**.**
Stattet man die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ mit der hyperbolischen Metrik aus, so erhält man das sogenannte *Poincaré Modell der hyperbolischen Ebene*. Die hyperbolische Ebene erfüllt alle Axiome der euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxioms, da sich leicht einsehen lässt, dass es zu jeder hyperbolischen Geraden γ in $\mathbb{D}$ und jedem Punkt $a \in \mathbb{D} \backslash T(\gamma)$ unendlich viele hyperbolische Geraden gibt, die γ nicht schneiden und daher „parallel" zu γ liegen.

Satz A 11.10 (Hyperbolisches Kontraktionsprinzip).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}\big(f(z_1), f(z_2)\big) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)\,, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{D}\,.$$

Gleichheit gilt für zwei Punkte $z_1 \neq z_2$ in $\mathbb{D}$ genau dann, wenn $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Beweis. Es sei γ die hyperbolische Strecke von z_1 nach z_2. Dann ist $f \circ \gamma$ ein Weg in $\mathbb{D}$ von $f(z_1)$ nach $f(z_2)$, d.h.

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}\big(f(z_1), f(z_2)\big) \leq L_h(f \circ \gamma) \leq L_h(\gamma) = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)\,.$$

Falls $z_1 \neq z_2$, so kann Gleichheit nur für den Fall $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ gelten. □

Holomorphe Abbildungen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ vergrößern also den hyperbolischen Abstand nicht, die konformen Selbstabbildungen von $\mathbb{D}$ sind genau die holomorphen Isometrien (=abstandstreuen Abbildungen) und der hyperbolische Abstand ist eine konform invariante Größe. Diese konforme Invarianz ist der Hauptgrund dafür, dass die hyperbolische Metrik eine ubiquitäre Rolle in der Funktionentheorie spielt.

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 11.1.
Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 11.3.

Aufgabe 11.2 (Staatsexamen Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 1b)**.**
Es sei $f : K_r(a) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(a) = 0$ und $|f(z)| \leq 5$ für alle $z \in K_r(a)$. Zeigen Sie, dass

$$|f(z)| \leq \frac{5}{r} \cdot |z-a| \qquad \text{für alle } z \in K_r(a) \text{ gilt.}$$

Aufgabe 11.3.
Es sei $g \in H(\mathbb{D})$ mit $g(0) = 1$ und $\operatorname{Re} g(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Dann gilt

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \operatorname{Re} g(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweis. Die Funktion $T(z) := \frac{1+z}{1-z}$ bildet $\mathbb{D}$ holomorph und bijektiv auf die rechte Halbebene $RH := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ ab. Für $w(z) := (T^{-1} \circ g)(z)$ gilt daher $w : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ und $w(0) = 0$, d.h. $|w(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ nach dem Lemma von Schwarz. Es folgt

$$\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} \frac{1+w(z)}{1-w(z)} = \frac{1-|w(z)|^2}{|1-w(z)|^2} \leq \frac{1+|w(z)|}{1-|w(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\,.$$

Dies beweist die rechte Ungleichung. Die linke Ungleichung folgt aus der rechten angewendet auf $1/g$. □

Aufgabe 11.4 (Harnack Ungleichungen)**.**
Es sei $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ harmonisch und positiv. Dann gilt

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} u(0) \leq u(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} u(0)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. Nach Satz 8.11 (c) existiert zur harmonischen Funktion $u(z)/u(0)$ ein $g \in H(\mathbb{D})$ mit $\operatorname{Re} g = u/u(0)$ und $g(0) = 1$. Aufgabe 11.3 impliziert die Harnackschen Ungleichungen. □

Aufgabe 11.5.
Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ und $\eta \in \partial\mathbb{D}$. Dann heißt

$$B(z) := \eta \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z}$$

endliches Blaschke Produkt (vom Grad n).
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(a) Es gilt $\lim\limits_{z \to w} |f(z)| = 1$ für jedes $w \in \partial\mathbb{D}$.

(b) f ist ein endliches Blaschke Produkt vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 11.6 (Verschärftes Identitätsprinzip für beschränkte holomorphe Funktionen)**.**
Es seien $f, g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ beschränkt. Gilt $f(a_j) = g(a_j)$ für eine Folge (a_j) in $\mathbb{D}$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (1-|a_j|) = \infty$, so gilt $f \equiv g$.

Aufgabe 11.7.
Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(\mathbb{D}, \mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ vollständig ist.

Kapitel 12

Allgemeiner Cauchy Integralsatz

Definition 12.1 (Zyklus).
Es seien $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ geschlossene Wege in $\mathbb{C}$ und $m_1,\dots,m_n\in\mathbb{Z}$. Die formale Summe

$$\Gamma := \sum_{k=1}^{n} m_k\gamma_k$$

*heißt **Zyklus** und*

$$\operatorname{tr}(\Gamma) := \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{tr}(\gamma_j)$$

*heißt **Spur** von Γ. Ist $f:\operatorname{tr}(\Gamma)\to\mathbb{C}$ stetig, so definiert man*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := m_1\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\dots+m_n\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\,.$$

Für $z\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{tr}(\Gamma)$ heißt

$$n(z,\Gamma) := m_1 n(z,\gamma_1)+\dots+m_n n(z,\gamma_n)$$

*die **Windungszahl** von Γ bzgl. z.*

Bemerkung.
Es sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Gemäß Satz 5.6 ist $n(z,\Gamma)$ ist ganzzahlig, konstant auf jeder Komponente von $\mathbb{C}\setminus\operatorname{tr}(\Gamma)$ und $n(z,\Gamma)=0$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\setminus\operatorname{tr}(\Gamma)$.

Bemerkung.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und Γ ein Zyklus in U. Wann gilt $\int_\Gamma f(z)\,dz=0$ für jede Funktion $f\in\mathscr{H}(U)$?
Notwendig hierfür ist $n(z,\Gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dw}{w-z}=0$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus U$.

Definition 12.2 (nullhomologer Zyklus).
*Es sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen. Ein Zyklus Γ in U ($\operatorname{tr}(\Gamma)\subseteq U$) heißt **nullhomolog in** U, falls $n(z,\Gamma)=0$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus U$ ist.*

Satz 12.3 (Allgemeiner Cauchy Integralsatz).
Es sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen und Γ ein nullhomologer Zyklus in U. Dann gilt für alle $f\in\mathscr{H}(U)$

(a) $n(z,\Gamma)f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-z}\,dw$ *für alle $z\in U\setminus\operatorname{tr}(\Gamma)$.*

(b) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz=0.$

Der folgende Beweis wurde 1971 von Dixon [22] publiziert.

Beweis. **(a)** Definiere $g : U \times U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } z \neq w, \\ f'(w) & \text{für } z = w\,. \end{cases}$$

Dann ist g nach Proposition 10.6 stetig auf $U \times U$ und $z \mapsto g(z,w)$ für jedes feste $w \in \operatorname{tr}(\Gamma)$ holomorph, d.h. die Funktion

$$\varphi : U \to \mathbb{C}, \qquad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\,dw$$

ist stetig auf U. Ist Δ ein Dreieck in U, so folgt mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\partial\Delta} \varphi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \left(\int_\Gamma g(z,w)\,dw \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)\,dz \right) dw = 0$$

nach dem Satz von Goursat. Also ist $\varphi \in \mathscr{H}(U)$ nach dem Satz von Morera. Wir zeigen, dass $\varphi \equiv 0$, denn dann folgt für alle $z \in U \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw = n(z,\Gamma)\, f(z)\,.$$

Um $\varphi \equiv 0$ zu zeigen, betrachten wir die Menge $V := \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\Gamma) : n(z,\Gamma) = 0\}$. Es gilt:

* $\mathbb{C} \setminus U \subseteq V$, da Γ nullhomolog in U. Folglich ist $\mathbb{C} = U \cup V$.
* V enthält die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$.
* V ist offen, da $n(z,\Gamma)$ stetig und ganzzahlig auf $\mathbb{C} \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$.
* $U \cap V$ ist offen und $U \cap V = \{z \in U \setminus \operatorname{tr}(\Gamma) : n(z,\Gamma) = 0\} \neq \emptyset$, denn $U \cup V = \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$ ist zusammenhängend.

Wir betrachten nun das Cauchy–Integral $\Phi : V \to \mathbb{C}$ von f bzgl. Γ,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Dann ist $\Phi \in \mathscr{H}(V)$, siehe Satz 5.2. Nach Definition gilt $\varphi(z) = \Phi(z)$ für $z \in U \cap V$. Daher ist die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$h(z) := \begin{cases} \varphi(z) & \text{für } z \in U, \\ \Phi(z) & \text{für } z \in V\,, \end{cases}$$

wohldefiniert und holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Es gilt aufgrund der Standardabschätzung

$$\lim_{|z|\to\infty} |h(z)| = \lim_{|z|\to\infty} |\Phi(z)| \leq \lim_{|z|\to\infty} \frac{L(\Gamma)}{2\pi} \max_{w \in \operatorname{tr}(\Gamma)} \frac{|f(w)|}{|z|-|w|} = 0\,.$$

Der Satz von Liouville (Satz 7.10) impliziert nun $h \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$. Daher ist $\varphi \equiv 0$ auf U.
(b) Wähle $a \in U \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$ beliebig. Definiere $F : U \to \mathbb{C}$, $F(z) = (z-a)\,f(z)$. Dann ist $F \in \mathscr{H}(U)$ und es gilt

$$0 = n(a,\Gamma)F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(w)}{w-a}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)\,dw\,.$$

□

Definition 12.4 (homologe Zyklen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zwei Zyklen Γ, Γ_* in U heißen ***homolog in*** *U, falls der Zyklus $\Gamma - \Gamma_*$ nullhomolog in U ist.*

Korollar 12.5.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und Γ und Γ_* homologe Zyklen in U. Dann gilt für alle $f \in \mathscr{H}(U)$,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_*} f(z)\,dz.$$

Definition 12.6 (einfach zusammenhängendes Gebiet).
Ein Gebiet G in $\mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend****, falls* jeder *Zyklus in G nullhomolog in G ist.*

Bildlich: „Ein einfach zusammenhängendes Gebiet hat kein Loch.“

Korollar 12.7.
Ein Gebiet G in $\mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{für alle Zyklen } \Gamma \text{ in } G \text{ und alle } f \in \mathscr{H}(G).$$

In diesem Fall gilt

(a) $n(z,\Gamma)\,f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ *für alle $z \in G \setminus \mathrm{tr}(\Gamma)$ und alle $f \in \mathscr{H}(G)$.*

(b) *Jede Funktion $f \in \mathscr{H}(G)$ hat eine Stammfunktion in $\mathscr{H}(G)$.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Satz 12.3. „$\Longleftarrow$“ Für $z_0 \in \mathbb{C}\setminus G$ ist $f(z) := (z-z_0)^{-1} \in \mathscr{H}(G)$, d.h. $n(z_0,\Gamma) = 0$.
(a) folgt aus Satz 12.3 und (b) aus Satz 6.4 □

Beispiel 12.8.
Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend, siehe Satz 6.8.

Definition 12.9 (Logarithmusfunktion).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$. Eine Funktion $g \in \mathscr{H}(G)$ heißt ***holomorphe Logarithmusfunktion von*** *f* ***auf*** *G, wenn $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in G$. Eine Funktion $l \in \mathscr{H}(G)$ heißt* ***Logarithmusfunktion auf*** *G, falls $e^{l(z)} = z$ für alle $z \in G$.*

Beispiel 12.10 (Hauptzweig des Logarithmus)**.**
Da das Gebiet $G = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ sternförmig ist, wird durch

$$l(z) := \int_{[1,z]} \frac{dw}{w} = \int_{[1,|z|]} \frac{dw}{w} + \int_\gamma \frac{dw}{w}$$

mit $\gamma(t) = |z|e^{it}$ für $t \in [0,\arg(z)]$, $\arg(z) \in (-\pi,\pi)$, eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ definiert. Es gilt

$$l(z) = \ln|z| + \int_0^{\arg(z)} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \ln|z| + \int_0^{\arg(z)} i\,dt = \ln|z| + i\arg(z)$$

mit $-\pi < \arg(z) < \pi$, d.h. $e^{l(z)} = z$ für alle $z \in G$. Die Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ heißt Hauptzweig des Logarithmus und wird mit $\log(z)$ bezeichnet.

Satz 12.11.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$ sei nullstellenfrei. Dann sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent.

(a) f besitzt eine holomorphe Logarithmusfunktion auf G.

(b) f'/f besitzt auf G eine holomorphe Stammfunktion.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in G.

Ist insbesondere $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammhängendes Gebiet, so besitzt jede nullstellenfreie Funktion $f \in \mathscr{H}(G)$ eine holomorphe Logarithmusfunktion auf G.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Ist $g \in \mathscr{H}(G)$ eine holomorphe Logarithmusfunktion von f auf G, so folgt aus $f = e^g$ durch Differentiation, dass $g' = f'/f$, d.h. g ist holomorphe Stammfunktion von f'/f auf G.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Es sei $g \in \mathscr{H}(G)$ Stammfunktion von f'/f auf G. Es gilt dann $(fe^{-g})' = f'e^{-g} - fg'e^{-g} = 0$, d.h. $f = ce^g$ für ein $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, also ist $g + d$ für jedes $d \in \mathbb{C}$ mit $e^d = c$ eine holomorphe Logarithmusfunktion von f auf G.
(b) $\Longleftrightarrow$ (c): Siehe Satz 6.4. □

Korollar 12.12.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$ nullstellenfrei. Dann existiert eine holomorphe Quadratwurzel von f auf G, d.h. ein $h \in \mathscr{H}(G)$ mit $h(z)^2 = f(z)$ für alle $z \in G$.

Beweis. Ist $g \in \mathscr{H}(G)$ mit $f = e^g$, so setzt man $h := e^{g/2}$. □

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 12.1.
Es sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Dann nennt man die Menge

$$\operatorname{int}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C}\setminus \operatorname{tr}(\Gamma) : n(z,\Gamma) \neq 0\}$$

das Innere des Zyklus. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\operatorname{int}(\Gamma)$ ist offen und beschränkt.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\operatorname{tr}(\Gamma) \subseteq U$, und Γ sei nullhomolog in U. Dann ist $\operatorname{int}(\Gamma)$ relativ kompakt in U, d.h. $\overline{\operatorname{int}(\Gamma)}$ ist kompakt und $\overline{\operatorname{int}(\Gamma)} \subseteq U$.

Aufgabe 12.2.
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathscr{H}(U)$ und Γ ein nullhomologer Zyklus in U. Zeigen Sie, dass

$$n(z,\Gamma)\, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw \qquad \text{für alle } z \in U\setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$$

und jedes $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 12.3.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathscr{H}(G)$ und $g \in \mathscr{H}(G)$ ein Logarithmus zu f. Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert eine Logarithmusfunktion auf $f(G)$.

Aufgabe 12.4. (a) Zeigen Sie: Auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ existiert eine holomorphe Funktion g, derart, dass $g(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$.

(b) Zeigen Sie: Es existiert auf $G := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$ keine holomorphe Funktion g, derart, dass $g(z)^2 = z$ für alle $z \in G$.

Aufgabe 12.5.
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, derart, dass jede Funktion $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ eine auf Ω holomorphe Stammfunktion besitzt. Zeigen Sie, dass Ω einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 12.6.
Zeigen Sie: Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede nullstellenfreie holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion auf Ω besitzt.

Aufgabe 12.7 (Staatsexamen, Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 3)**.**
Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{h(z)} = 1 + z^5 + z^{10}$$

für alle $z \in U$ gibt.

Aufgabe 12.8 (Staatsexamen, Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 2)**.**
Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i) = \mathrm{Log}\left(\frac{z+i}{z-i}\right), \quad z \in U,$$

wobei $\mathrm{Log} : \Omega_- \to \mathbb{C}$, mit $\Omega_- := \mathbb{C} \setminus \{x + 0i : x \in (-\infty, 0]\}$, der Hauptzweig des Logarithmus ist.

(b) Definiere für $z \in U$ das Wegintegral

$$f(z) := \int_{[1,z/2]} \frac{1}{1+\xi^2}\, d\xi, \quad z \in U.$$

Zeigen Sie:

$$f(z) = \frac{\pi}{4} + i\mathrm{Log}\left(\frac{z+2i}{z-2i}\right), \quad z \in U.$$

Aufgabe 12.9 (Staatsexamen, Frühjahr 2021, Thema 3, Aufgabe 2)**.**
Es sei $G = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$\frac{z-1}{z+1} = e^{h(z)} \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Aufgabe 12.10 (Staatsexamen, Herbst 2020, Thema 3, Aufgabe 2 b))**.**
Es sei $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe von Log mit Entwicklungspunkt $e^{3\pi i/4}$.

Kapitel 13

Laurentreihen und isolierte Singularitäten

Für einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \le r < R \le \infty$ bezeichnet

$$A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

einen (entarteten) Kreisring und $\Delta_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$.

Satz 13.1.
Es sei f holomorph in $A_{r,R}(z_0)$.

(a) (Laurentzerlegung)
Es gibt eindeutig bestimmte Funktionen $f_N \in \mathscr{H}(K_R(z_0))$ und $f_H \in \mathscr{H}(\Delta_r(z_0))$ mit

$$f = f_H + f_N \quad \text{in } A_{r,R}(z_0) \qquad \text{und} \qquad \lim_{z \to \infty} |f_H(z)| = 0\,.$$

(b) (Laurententwicklung)
Es gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k := \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{=f_N(z)} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{=f_H(z)}, \qquad z \in A_{r,R}(z_0)\,.$$

Die Konvergenz ist absolut und kompakt in $A_{r,R}(z_0)$ und die Laurentkoeffizienten a_k sind gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_\varrho(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw\,, \qquad k \in \mathbb{Z},\ \varrho \in (r, R)\,.$$

Bemerkung 13.2.
*Die Reihe in (b) heißt **Laurentreihe** von f bzgl. $A_{r,R}(z_0)$. Man nennt f_H den **Hauptteil** von f und f_N den **Nebenteil** von f bzgl. $A_{r,R}(z_0)$. Satz 13.1 verallgemeinert Korollar 7.3.*

Beweis von Satz 13.1. **(1) Eindeutigkeit:** Es seien $f(z) = f_H(z) + f_N(z)$ und $f(z) = g_H(z) + g_N(z)$ zwei Laurentzerlegungen mit den angegebenen Eigenschaften. Dann folgt

$$g_H(z) - f_H(z) = f_N(z) - g_N(z) \qquad \text{für alle } z \in A_{r,R}(z_0)\,.$$

Daher definiert

$$h(z) := \begin{cases} f_N(z) - g_N(z) & \text{für } z \in K_R(z_0), \\ g_H(z) - f_H(z) & \text{für } z \in \Delta_r(z_0) \end{cases}$$

eine ganze Funkion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to\infty} |h(z)| = 0$, d.h. $h \equiv 0$ aufgrund des Satzes von Liouville. Dies impliziert $g_H \equiv f_H$ auf $K_R(z_0)$ und $g_N \equiv f_N$ auf $\Delta_r(z_0)$.

(2) Existenz: Wähle r_1, R_1, derart, dass $r < r_1 < R_1 < R$. Dann ist $\Gamma := \partial K_{R_1}(z_0) - \partial K_{r_1}(z_0)$ ein nullhomologer Zyklus in $A_{r,R}(z_0)$. Nach Satz 12.3 (a) gilt somit wegen $n(z, \Gamma) = 1$ für $z \in A_{r,R}(z_0)$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{R_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \; - \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw =: f_N(z) + f_H(z)\,, \qquad z \in A_{r_1,R_1}(z_0)\,,$$

wobei zunächst $f_N \in \mathscr{H}(K_{R_1}(z_0))$ und $f_H \in \mathscr{H}(\Delta_{r_1}(z_0))$. Satz 5.2 zeigt

$$f_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\,, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{R_1}(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\,,$$

wobei die Koeffizienten a_k wegen Satz 12.3 (b) nicht von $R_1 \in (r,R)$ abhängen, d.h. die Potenzreihe konvergiert absolut und kompakt in $K_R(z_0)$, also $f_N \in \mathscr{H}(K_R(z_0))$. Benutzt man für festes $z \in \Delta_{r_1}(z_0)$ die gleichmäßige Entwicklung

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^j}{(z-z_0)^{j+1}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,, \qquad w \in \partial K_{r_1}(z_0)\,,$$

so folgt

$$f_H(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k\,, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_1}(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\,.$$

Die Koeffizienten a_k hängen wegen Satz 12.3 (b) nicht von $r_1 \in (r,R)$ ab, d.h. die Reihe konvergiert absolut und lokal gleichmäßig in $\Delta_r(z_0)$, also $f_H \in \mathscr{H}(\Delta_r(z_0))$. Ferner gilt

$$|f_H(z)| \le r_1 \max_{|w-z_0|=r_1} \frac{|f(w)|}{|w-z|} \to 0 \quad \text{für } |z| \to \infty.$$

□

Beispiele 13.3. **(a)** Die Laurentreihe der Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ im Kreisring $A_{1,2}(0)$ bestimmen wir mithilfe einer Partialbruchzerlegung (siehe hierzu auch Bemerkung 13.6) und der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{-1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k \qquad \text{für alle } z \in A_{1,2}(0)\,. \end{aligned}$$

(b) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \exp(1/z^2)$. Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{|k|!} z^{2k}$$

die Laurentreihe von f in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Wir betrachten nun den Fall, dass der „innere" Radius $= 0$ ist.

Definition 13.4 (Isolierte Singularität).
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und f holomorph in $0 < |z - z_0| < R$ für ein $R \leq \infty$. Dann heißt z_0 ***isolierte Singularität*** *von f. Ist*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die Laurentreihe von f bzgl. $A_{0,R}(z_0)$, so heißt die isolierte Singularität

(a) ***hebbar***, *falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$. In diesem Fall lässt sich f durch $f(z_0) := a_0$ zu einer in $K_R(z_0)$ holomorphen Funktion fortsetzen.*

(b) ***Pol der Ordnung*** *$N \in \mathbb{N}$, falls $a_{-N} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -N$, d.h.*

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{-1} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k;$$

(c) ***wesentlich***, *falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele paarweise verschiedene $k < 0$.*

Bemerkung.
Die Funktion in Beispiel 13.3 hat einfache Polstellen in $z = 1$ und $z = 2$ (Teil (a)) bzw. eine wesentliche Singularität in $z = 0$ (Teil (b)).

Satz 13.5 (Abbildungsverhalten in der Nähe einer isolierten Singularität).
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathscr{H}(A_{0,R}(z_0))$ für ein $R > 0$. Dann hat f im Punkt z_0

(a) *eine hebbare Singularität $\iff$ f ist in z_0 beschränkt ($\limsup_{z \to z_0} |f(z)| < +\infty$).*

(b) *einen Pol Nter Ordnung $\iff$ $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^N}$ mit $g \in \mathscr{H}(K_R(z_0))$, $g(z_0) \neq 0$.*

Insbesondere gilt in diesem Fall: $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

(c) *eine wesentliche Singularität $\iff$ $f(A_{0,r}(z_0))$ liegt dicht in $\mathbb{C}$ für jedes $0 < r < R$.*

Beweis. (a) Dies ist Satz 8.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz).
(b) f hat in z_0 einen Pol der Ordnung N genau dann, wenn es ein $h \in \mathscr{H}(K_R(z_0))$ gibt mit

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-N}^{-1} a_k (z - z_0)^k + h(z), \qquad a_{-N} \neq 0 \\ &= (z - z_0)^{-N} \left(\sum_{k=-N}^{-1} a_k (z - z_0)^{k+N} + (z - z_0)^N h(z) \right). \end{aligned}$$

(c) "$\Longleftarrow$" Nach (a) und (b) kann f in z_0 weder eine hebbare Singularität (dann wäre f nach z_0 holomorph fortsetzbar) noch einen Pol (dann würde $|f(z)| \to +\infty$ für $z \to z_0$ gelten) haben, d.h. f hat in z_0 eine wesentliche Singularität. "$\Longrightarrow$" Annahme: Es existieren ein $w \in \mathbb{C}$ sowie $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ mit $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ für alle $0 < |z - z_0| < \delta$. Dann ist $g(z) := 1/(f(z) - w)$ in $A_{0,\delta}(z_0)$ durch $1/\varepsilon$ beschränkt, also nach (a) holomorph (fortsetzbar) auf $K_\delta(z_0)$. Folglich hat f einen Pol oder eine hebbare Singularität in z_0. □

Aussage (c) in Satz 13.5 ist der *Satz von Casorati–Weierstraß für wesentliche isolierte Singularitäten*. Ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion, so hat $g(z) := f(1/z)$ eine isolierte Singularität in $z = 0$. Diese ist genau dann wesentlich, wenn f kein Polynom ist. Satz 13.5 (c) impliziert daher Satz 9.8.

Bemerkung 13.6 (Partialbruchzerlegung).
Es sei $r = p/q$ eine rationale Funktion (p,q Polynome) mit den Polstellen $z_1,\ldots,z_n$. In jedem der Punkte z_j besitzt r eine Laurentzerlegung $r(z) = r_{N,j}(z) + r_{H,j}(z)$ mit jeweils endlichem Hauptteil $r_{H,j}$, d.h.

$$h(z) := \sum_{j=1}^{n} r_{H,j}(z)$$

ist eine rationale Funktion mit den Hautteilen $r_{H,j}$ bei z_j, $j = 1,\ldots,n$. Somit ist $s(z) := r(z) - h(z)$ eine rationale Funktion ohne Polstellen, also ein Polynom und $r(z) = h(z) + s(z)$ die gewünschte Partialbruchzerlegung.

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 13.1 (Staatsexamen Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 2). (a) Bestimmen Sie die Laurentreihen–Entwicklung mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ von

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} + \frac{\sin z}{z^2}$$

im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

(b) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f und deren Typ.

Aufgabe 13.2 (Staatsexamen Frühjahr 2022, Thema 1, Aufgabe 5 (b)).
Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine nicht–konstante holomorphe Funktion, die unendlich viele Nullstellen in der punktierten Kreisscheibe $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ besitzt. Zeigen Sie, dass die Singularität von f in $z = 0$ wesentlich ist.

Kapitel 14

Der Residuensatz und das Argumentprinzip

Definition 14.1 (Residuum).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\overline{K_r(z_0)} \subseteq U$ und $f \in H(U\backslash\{z_0\})$. Dann heißt die komplexe Zahl

$$res(z_0, f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} f(w)\,dw$$

*das **Residuum von f im Punkt** z_0. Beachte, $res(z_0, f)$ ist wohldefiniert, also unabhängig von r wegen Korollar 12.5.*

Bemerkung 14.2 (Berechnung von Residuen).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K_R(z_0) \subseteq U$ und $f \in H(U\backslash\{z_0\})$ mit Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \qquad z \in K_R(z_0)\backslash\{z_0\}.$$

Dann gilt

$$a_{-1} = res(z_0, f).$$

Hat f einen Pol der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ in z_0, so ist

$$(z-z_0)^N f(z) = a_{-N} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{N-1} + a_0(z-z_0)^N + \cdots,$$

d.h.

$$res(z_0, f) = a_{-1} = \frac{1}{(N-1)!}\left[(z-z_0)^N f(z)\right]^{(N-1)}\Big|_{z=z_0}$$

Insbesondere gilt

$$res(z_0, f) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \quad \textit{falls } f \textit{ in } z_0 \textit{ einen Pol 1. Ordnung hat.}$$

Beispiel 14.3 (Logarithmische Ableitungen: Residuen vs. Ordnung von Null bzw. Polstellen)**.**
Hat $f \in H(K_R(z_0))$ eine Nullstelle der Ordnung N in z_0, so gilt $f(z) = (z-z_0)^N g(z)$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, d.h.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \text{ also} \quad \mathrm{res}(z_0, f'/f) = N.$$

Ist z_0 Polstelle von $f \in H(K_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ der Ordnung P, so gilt $f(z) = g(z)/(z-z_0)^P$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, d.h.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-P}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \text{ also} \quad \mathrm{res}(z_0, f'/f) = -P.$$

Satz 14.4 (Residuensatz).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subseteq U$ ohne Häufungspunkt in U, $f \in H(U \backslash A)$ und Γ ein nullhomologer Zyklus in U mit $\operatorname{tr}(\Gamma) \cap A = \emptyset$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)\, dw = \sum_{z \in A} res(z, f)\, n(z, \Gamma)\,.$$

Beweis. Es sei

$$\operatorname{int}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \backslash \operatorname{tr}(\Gamma) : n(z, \Gamma) \neq 0\}$$

das Innere des Zyklus. Die Summe

$$\sum_{z \in A} \operatorname{res}(z, f)\, n(z, \Gamma)$$

konvergiert: Für $z \in A \backslash \operatorname{int}(\Gamma)$ gilt $n(z, \Gamma) = 0$. Da Γ nullhomolog ist, ist $\overline{\operatorname{int}(\Gamma)} \subseteq U$ kompakt, und da A keinen Häufungspunkt in U hat, ist $\operatorname{int}(\Gamma) \cap A$ endlich.

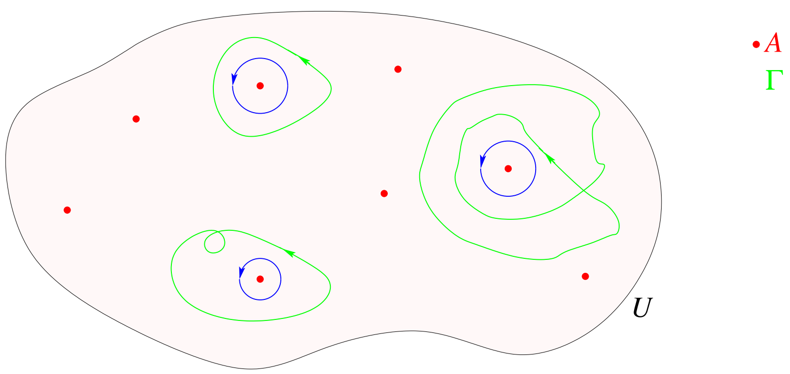
Es seien nun $z_1, z_2, \ldots, z_n \in A$ die isolierten Singularitäten von f in $\operatorname{int}(\Gamma)$. Es gilt $n(z_j, \Gamma) \neq 0$. Zu z_j wähle $\varepsilon_j > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\overline{K_{\varepsilon_j}(z_j)} \subseteq \operatorname{int}(\Gamma) \subseteq U \backslash \operatorname{tr}(\Gamma)$ (d.h. $\overline{K_{\varepsilon_j}(z_j)}$ ist Teilmenge der Komponente von $\operatorname{int}(\Gamma)$, die z_j enthält),

(ii) $\overline{K_{\varepsilon_j}(z_j)} \cap \overline{K_{\varepsilon_k}(z_k)} = \emptyset$ für $j \neq k$.

Es sei $\gamma_j(t) = z_j + \varepsilon_j e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Definiere den Zyklus

$$\Gamma^* = \Gamma - \sum_{j=1}^n n(z_j, \Gamma)\, \gamma_j\,.$$



Dann ist Γ^* nullhomolog in $U \backslash A$, denn

(i) für $z \in \mathbb{C} \backslash U$ gilt $n(z, \Gamma) = 0$, da Γ nullhomolog in U und $n(z, \gamma_j) = 0$, da $z \notin \operatorname{int}(\Gamma)$ und $\overline{K_{\varepsilon_j}(z_j)} \subseteq \operatorname{int}(\Gamma)$;

(ii) für $z \in A \backslash \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ folgt $n(z, \Gamma) = 0$ und $n(z, \gamma_j) = 0$, da $z \notin \operatorname{int}(\Gamma)$;

(iii) für $z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ folgt mit $z = z_k$

$$n(z_k, \Gamma^*) = n(z_k, \Gamma) - \sum_{j=1}^n n(z_j, \Gamma) \underbrace{n(z_k, \gamma_j)}_{=0 \text{ für } k \neq j} = n(z_k, \Gamma) - n(z_k, \Gamma) \cdot 1 = 0\,.$$

Der Cauchy Integralsatz (Satz 12.3) impliziert nun

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*} f(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(w)\,dw - \sum_{j=1}^{n} n(z_j,\gamma_j)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} f(w)\,dw\,.$$

Wegen $\operatorname{res}(z_j,\gamma_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} f(w)\,dw$ ist dies die zu zeigende Identität. □

Bemerkung.
Der allgemeine Cauchy Integralsatz (Satz 12.3 (b)) entspricht dem Fall $A = \emptyset$ von Satz 14.4. Die allgemeine Cauchy Integralformel (Satz 12.3 (a)) lässt sich ebenfalls als Spezialfall des Residuensatzes interpretieren: Wendet man für $f \in H(U)$ und $z_0 \in U$ Satz 14.4 mit $A = \{z_0\}$ auf die in $U \setminus A$ holomorphe Funktion $z \mapsto f(z)/(z-z_0)$ an, so erhält man Satz 12.3 (a).

Wir fokussieren uns nun auf den wichtigen Fall, dass alle isolierten Singularitäten hebbar oder Pole sind.

Definition 14.5 (meromorph).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $A \subseteq U$ ohne Häufungspunkt in U. Eine holomorphe Funktion $f : U\backslash A \to \mathbb{C}$ heißt ***meromorph in*** *U, falls jeder Punkt $z_0 \in A$ eine hebbare Singularität oder eine Polstelle ist. Wir setzen $\mathscr{P}_f := \{z \in U \,:\, z \text{ ist Pol von } f\}$ und*

$$\mathscr{M}(U) := \{f \text{ meromorph in } U\}\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ist also meromorph in $\mathbb{C}$, aber $\exp(1/z^2)$ ist nicht meromorph in $\mathbb{C}$.

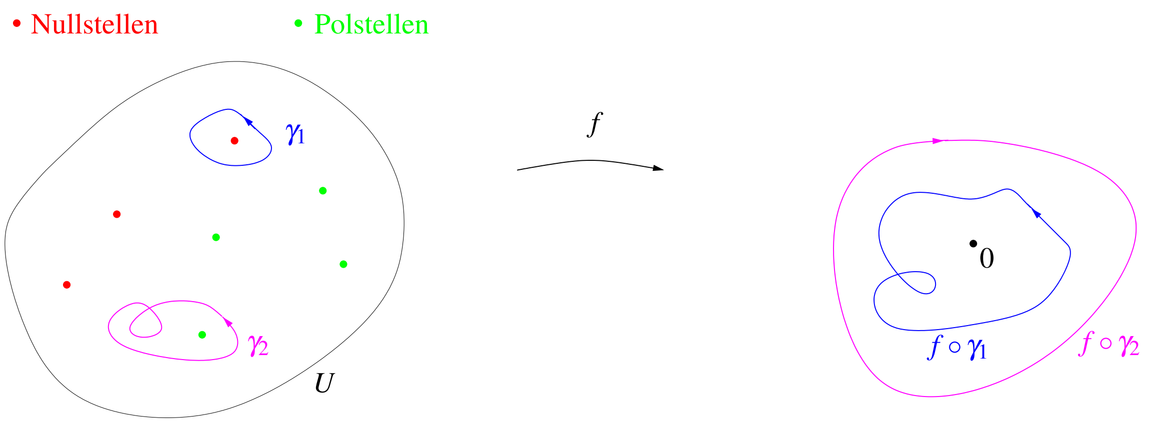
Bemerkung.
Sind $f,g \in \mathscr{M}(U)$ und $g \not\equiv 0$, so ist $f/g \in \mathscr{M}(U)$. Die Menge $\mathscr{M}(U)$ bildet einen Körper bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation mit $H(U)$ als Unterring.

Wendet man für eine meromorphe Funktion f den Residuensatz auf die logarithmische Ableitung f'/f an, so erhält man den folgenden wichtigen Satz.

Satz 14.6 (Argumentprinzip).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathscr{M}(U)$ nicht konstant und Γ ein nullhomologer Zyklus in U mit $n(z,\Gamma) = 1$ oder $n(z,\Gamma) = 0$ für alle $z \in U\backslash\operatorname{tr}(\Gamma)$. Falls f keine Null– bzw. Polstellen auf $\operatorname{tr}(\Gamma)$ besitzt, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw = n(0, f\circ\Gamma) = N - P\,,$$

wobei N die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) von f in $\operatorname{int}(\Gamma)$ und P die Anzahl der Polstellen (mit Vielfachheiten) von f in $\operatorname{int}(\Gamma)$ bezeichnet.



Beweis. Wir setzen $\mathscr{Z}_f := \{z \in U : f(z) = 0\}$ und beachten, dass $\mathscr{Z}_f \cup \mathscr{P}_f$ keine Häufungspunkte in U besitzen. Dann ist $f'/f \in H(U \backslash (\mathscr{Z}_f \cup \mathscr{P}_f))$ und mit Satz 14.4 folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw = \sum_{z \in \mathscr{Z}_f \cup \mathscr{P}_f} n(z,\Gamma) \operatorname{res}(z, f'/f) = N - P$$

im Hinblick auf Beispiel 14.3. Ferner gilt mit der Substitution $u = f(w)$, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\Gamma} \frac{du}{u} = n(0, f \circ \Gamma)\,.$$

□

Satz 14.7 (Satz von Rouché, homologische Variante).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, Γ ein nullhomologer Zyklus in U mit $n(z,\Gamma) = 1$ oder $n(z,\Gamma) = 0$ für alle $z \in U \backslash \operatorname{tr}(\Gamma)$. Für $f, g \in H(U)$ gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \operatorname{tr}(\Gamma)\,. \tag{$*$}$$

Dann haben f und g dieselbe Anzahl von Nullstellen in $\operatorname{int}(\Gamma)$.

Beweis. Beachte, $(*)$ impliziert $f(w) \neq 0$ und $g(w) \neq 0$ für alle $w \in \operatorname{tr}(\Gamma)$. Betrachte die in U meromorphe Funktion $h(z) := f(z)/g(z)$.

Ziel: Die Anzahl N der Nullstellen von h stimmt mit der Anzahl P der Polstellen von h in $\operatorname{int}(\Gamma)$ überein. Dann haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\operatorname{int}(\Gamma)$.

Bedingung $(*)$ impliziert

$$|h(z) - 1| < |h(z)| + 1 \qquad \text{für } z \in \operatorname{tr}(\Gamma)\,.$$

Dies zeigt, $h(z) \notin (-\infty, 0]$ für alle $z \in \operatorname{tr}(\Gamma)$. Daher folgt mit dem Argumentprinzip

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h'(w)}{h(w)}\, dw \overset{\eta = h(w)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{h\circ\Gamma} \frac{d\eta}{\eta} = n(0, h \circ \Gamma) = 0,$$

denn $\eta \mapsto 1/\eta$ ist holomorph im einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega = \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$. □

Eine geschmeidigere Version des Satzes von Rouché lässt sich mithilfe des folgenden Lemmas beweisen. Es besagt, dass es zu jeder kompakten Teilmenge K einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ einen Zyklus Γ mit den in Satz 14.7 erforderlichen Eigenschaften gibt, der K „einmal umläuft“.

Lemma 14.8 (Lemma von Saks–Zygmund).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und K eine nicht–leere kompakte Teilmenge von U. Dann existiert ein in U nullhomologer Zyklus Γ mit $n(z,\Gamma)=1$ oder $n(z,\Gamma)=0$ für alle $z \in U \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$ und $K \subseteq \operatorname{int}\Gamma \subseteq U$.

Beweis. Es sei $\delta > 0$. Wir überdecken $\mathbb{C}$ mit achsenparallelen kompakten ausgefüllten Quadraten der Seitenlänge δ, die paarweise disjunktes Inneres besitzen. Es sei $\mathscr{Q}$ die Menge derjenigen, endlich vielen Quadrate $Q_1,\ldots,Q_k$, die die kompakte Menge K treffen. Ist $\delta > 0$ hinreichend klein, so sind alle Quadrate in $\mathscr{Q}$ in U enthalten. Es sei nun Γ die Summe derjenigen Kanten der im mathematisch positiven Sinne durchlaufenen Quadrate aus $\mathscr{Q}$, die keine gemeinsame Kante zweier verschiedener Quadrate aus $\mathscr{Q}$ sind. Es gilt $\operatorname{tr}(\Gamma) \subseteq U \setminus K$, da anderenfalls K eine Kante aus Γ schneiden würde und folglich auch beide angrenzenden Quadrate. Ferner gilt

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{k} \partial Q_j\,,$$

denn die gemeinsamen Kanten der Quadrate $Q_1,\ldots,Q_k$ werden genau zweimal in gegenläufiger Richtung durchlaufen. Folglich ist Γ ein Zyklus in U. Es sei $z \in U \setminus \operatorname{tr}(\Gamma)$. Dann gilt

$$n(z,\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} n(z,\partial Q_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in \mathring{Q}_j \text{ für ein } j=1,\ldots,k\,, \\ 0 & \text{falls } z \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j\,. \end{cases}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt daher stets $n(z,\Gamma) \in \{0,1\}$ sowie $n(z,\Gamma)=1$ für $z \in K \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_k$. □

Satz 14.9 (Satz von Rouché, topologische Variante).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und M eine nicht–leere kompakte Teilmenge von U. Für $f,g \in H(U)$ gelte

$$|f(z)-g(z)| < |f(z)|+|g(z)| \qquad \textit{für alle } z \in \partial M\,. \tag{$*$}$$

Dann haben f und g dieselbe Anzahl von Nullstellen in M.

Beweis. Wir betrachten

$$K := \{z \in M \,:\, |f(z)+g(z)| = |f(z)|+|g(z)|\}$$

und bemerken, dass weder f noch g in $M \setminus K$ Nullstellen haben. O.E. sei daher $K \neq \emptyset$. Da f und g stetig sind und aufgrund von $(*)$ ist K kompakt und in M° enthalten. Gemäß Lemma 14.8 gibt es einen in M° nullhomologen Zyklus Γ mit $n(z,\Gamma)=1$ oder $n(z,\Gamma)=0$ für alle $z \notin \operatorname{tr}(\Gamma)$ und $K \subseteq \operatorname{int}\Gamma \subseteq M^\circ$. Satz 14.7 impliziert, dass f und g gleichviele Nullstellen in $\operatorname{int}(\Gamma)$ besitzen. □

Beispiel 14.10.
Finde die Anzahl der Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^6 + 9z^4 + 2z + 4$$

die in $\mathbb{D}$ liegen. Hierzu versuchen wir das Polynom p in der Form

$$p(z) = \text{Groß} + \text{klein}$$

darzustellen, wobei die Funktion „Groß“ auf $\partial\mathbb{D}$ die Funktion „klein“ dominiert und wir die Anzahl der Nullstellen von „Groß“ in $\mathbb{D}$ kennen. Gelingt dies, so folgt

$$|p(z) - \text{Groß}| = |\text{klein}| < |\text{Groß}| \le |\text{Groß}| + |p(z)|$$

auf $\partial\mathbb{D}$. Nach dem Satz von Rouché haben dann p und „Groß“ dieselbe Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{D}$.
Wähle für „Groß“, $G(z) = 9z^4$. Dann gilt

$$|p(z)-G(z)| = |z^6+2z+4| \le 7 < 9 = |G(z)| \qquad \text{für} \quad z \in \partial\mathbb{D}\,.$$

Also hat p nach dem Satz von Rouché genau vier Nullstellen in $\mathbb{D}$.

Ergänzungen und Ausblicke

Eine Anwendung des Argumentprinzips zusammen mit dem Jordanschen Kurvensatz (für glatte Kurven):

Satz A 14.1 (Darboux).
Es sei f holomorph in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ und injektiv auf $\partial\mathbb{D}$. Dann ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ injektiv.

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 14.1.
Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Argumentprinzips. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, F sei holomorph in G und f sei nicht konstant und meromorph in G. Es seien $\mathscr{Z}_f = \{z_1, z_2, \ldots\}$, $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$, die Nullstellen von f mit den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}$ und $\mathscr{P}_f = \{w_1, w_2, \ldots\}$, $w_j \neq w_k$ für $j \neq k$, die Polstellen von f mit den Ordnungen $m_1, m_2, \ldots \in \mathbb{N}$ in G. Dann gilt für jeden nullhomologen Zyklus Γ in G mit $\operatorname{tr}(\Gamma) \cap (\mathscr{Z}_f \cup \mathscr{P}_f) = \emptyset$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F(\xi)\, \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi = \sum_j F(z_j)\, n_j\, n(z_j, \Gamma) - \sum_j F(w_j)\, m_j\, n(w_j, \Gamma)\,.$$

Aufgabe 14.2.
Mithilfe der vorherigen Aufgabe beweise man die sog. Formel von Bürmann–Lagrange: Es sei $f, F \in H(K_r(z_0))$, $f'(z_0) \neq 0$ und $w_0 := f(z_0)$. Dann existiert $K_\varepsilon(w_0) \subset f(K_r(z_0))$ derart, dass $F \circ f^{-1}$ holomorph in $K_\varepsilon(w_0)$ ist und

$$F(f^{-1}(w)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (w - w_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{k!} \left[F'(z) \left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^k \right]_{z=z_0}^{(k-1)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

für alle $w \in K_\varepsilon(w_0)$ glt.

Aufgabe 14.3.
Es sei f holomorph in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ mit einem Pol 1. Ordnung in $z = 0$. Weiter seien $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\varepsilon > 0$ und $\gamma_\varepsilon : [0, \alpha] \to \mathbb{C}$, $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ für $t \in [0, \alpha]$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(\xi)\, d\xi = i\alpha \operatorname{res}(0, f)\,.$$

Aufgabe 14.4.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $A \subseteq G$ eine diskrete Menge und $f \in H(G\backslash A)$. Man zeige, dass f genau dann eine holomorphe Stammfunktion auf $G\backslash A$ besitzt, wenn alle Residuen von f verschwinden.

Aufgabe 14.5.
Es seien f und g holomorph auf $K_2(0)$ und $f(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ und für jedes $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ sei $g(\zeta)/f(\zeta)$ reell und positiv. Zeigen Sie, dass f und g in $\mathbb{D}$ dieselbe Anzahl von Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) besitzen.

Aufgabe 14.6 (Staatsexamen, Herbst 2021, Thema 1, Aufgabe 3)**.**
Auf dem Gebiet $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\pi\}$ betrachten wir die meromorphe Funkion

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{\sin z}\,.$$

(a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f und deren Typ.

(b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Singularitäten.

(c) Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion auf Ω ?

(d) Bestimmen Sie $c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ so, dass

$$F(z) := f(z) + \frac{c_1}{a_1 - z} + \frac{c_2}{a_2 - z}$$

auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Kapitel 15

Anwendungen des Residuensatzes in der reellen Analysis

Le calcul des résidus constitute Ia source naturelle des integrales définies.

E. Lindelöf, *Calcul des Résidues et ses Applications à la Théorie des Fonctions*

Der Residuenkalkül stellt ein sehr effizientes Werkzeug für die Berechnung bestimmter Integrale dar. Die grundlegende Technik erlernt man erfahrungsgemäß am besten anhand typischer Beispielklassen.

Bemerkung 15.1 (Berechnung reeller Integrale der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ mithilfe des Residuensatzes).

Gegeben: *$f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ sei stetig auf $\mathbb{R}$, d.h. insbesondere ohne reelle Polstellen.*

Idee: *Wähle $R > 0$ und einen Hilfsweg Γ_R von R nach $-R$ derart, dass für den zusammengesetzten Weg $\gamma_R := [-R,R]\Gamma_R$ gilt*

$$n(z,\gamma_R) = 1 \textit{ für alle } z \in \operatorname{int}(\gamma_R) \quad \textit{sowie} \quad \operatorname{tr}(\gamma_R) \cap \mathscr{P}_f = \emptyset\ .$$

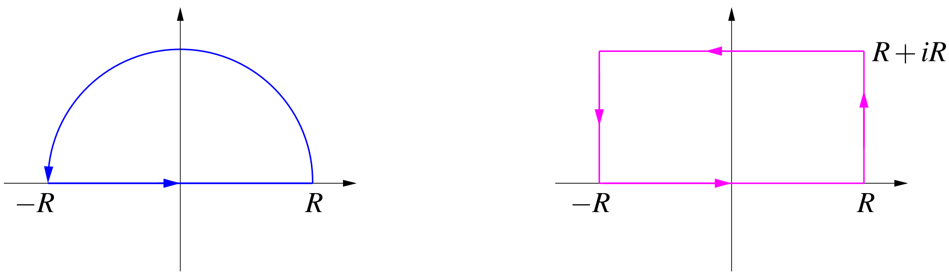


Abbildung 15.1: Typische Integrationswege

Dann folgt mit dem Residuensatz (Satz 14.4)

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = -\int\limits_{\Gamma_R} f(w)\,dw + 2\pi i \sum_{z\in\operatorname{int}(\gamma_R)} res(z,f)\,.$$

Gelingt es, den Hilfsweg Γ_R so zu wählen, dass

$$\textit{(i)} \quad \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(w)\,dw = 0 \qquad \textit{und} \qquad \textit{(ii)} \quad \textit{der Limes } \lim_{R\to\infty} \sum_{z\in\operatorname{int}(\gamma_R)} res(z,f) \textit{ existiert,}$$

so ergibt sich

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \lim_{R\to\infty} \sum_{z\in\operatorname{int}(\gamma_R)} res(z,f)\,.$$

Falls zusätzlich die Integrabilitätsbedingung

$$(I) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

gilt (dies ist z.B. der Fall, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$), so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \lim_{R\to\infty} \sum_{z\in\mathrm{int}(\gamma_R)} res(z,f)\,.$$

Satz 15.2.
Es sei $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ mit $\mathscr{P}_f \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Dann gilt (mit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} res(z,f)\,.$$

Beispiel 15.3 (Rationale Funktionen ohne reelle Pole)**.**
Sind P und Q Polynome mit $Q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{grad} P + 2 \leq \operatorname{grad} Q$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{res}(z, P/Q)\,.$$

Wegen $\operatorname{grad} P + 2 \leq \operatorname{grad} Q$ existieren $R, M > 0$ mit $|P(z)/Q(z)| \leq M/|z|^2$ für alle $|z| \geq R$, d.h. $zP(z)/Q(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$ und P/Q ist auf $\mathbb{R}$ absolut integrierbar.

Satz 15.4 ("Fourierintegrale").
Es sei $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ mit $\mathscr{P}_f \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $p > 0$. Falls $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, so gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,e^{ipx}\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} res(z, fe^{ip\cdot})$$

Für $p < 0$ gilt eine analoge Formel (welche?); der Fall $p = 0$ ist in Satz 15.2 behandelt.

Bemerkung.
Eine Funktion $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ wie in Satz 15.4 hat nur endlich viele Polstellen, d.h. die Summe auf der rechten Seite ist endlich. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so heißt

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,,\; p \mapsto \hat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ipx}\,dx$$

die Fouriertransformierte von f.

von Satz 15.2 und 15.4. Wähle $R > 0$ mit $\mathscr{P}_f \subseteq K_R(0)$ (dies ist möglich wegen $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$) und $\Gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$. Für $w = re^{it} \in \mathrm{tr}(\Gamma_R)$ gilt $|e^{ipw}| = e^{-p\operatorname{Im} w} = e^{-pR\sin(t)}$. Falls $t \in [0,\pi/2]$, so ist $\sin t \geq 2t/\pi$ (vgl. Satz A.4.1), d.h.

$$\int_0^{\pi} e^{-pR\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-pR\sin t}\,dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2pRt/\pi}\,dt \begin{cases} = \dfrac{\pi\left(1-e^{-pR}\right)}{pR} < \dfrac{\pi}{pR} & \text{falls } p > 0 \\ \pi & \text{falls } p = 0\,, \end{cases}$$

Dies impliziert

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(w)e^{ipw}\,dw\right| \leq \int_0^{\pi} |f(\Gamma_R(t))|\,Re^{-pR\sin t}\,dt \leq R||f||_{\Gamma_R} \int_0^{\pi} e^{-pR\sin t}\,dt \to 0$$

für $R \to \infty$, da $||f||_{\Gamma_R} \to 0$ falls $p > 0$ und $R||f||_{\Gamma_R} \to 0$ falls $p = 0$. Da

$$\sum_{z \in \mathrm{int}(\gamma_R)} \mathrm{res}(z, fe^{ip\cdot}) = \sum_{z \in \mathbb{H}} \mathrm{res}(z, fe^{ip\cdot}),$$

ergibt sich die Behauptung aus Bemerkung 15.1. □

Beispiel 15.5.
Man berechne $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+1}\,dx$ für $a > 0$.

Warnung: Es erscheint zunächst naheliegend, den Residuenkalkül auf die Funktion $z \mapsto z\sin(az)/(1+z^2)$ anzuwenden. Dies führt aber auf die Schwierigkeit, dass für $y = \mathrm{Im}\,z$ die Asymptotik $|\sin z| \sim e^{|y|}/2$ für große $|z|$ gilt, d.h. man wird keinen geschlossenen Weg finden für den der Anteil außerhalb der reellen Achse nur einen kleinen Beitrag zum Integral liefert. Man wendet den Residuenkalkül daher besser auf $z \mapsto ze^{iz}/(1+z^2)$ an und nimmt dann den Imaginärteil, d.h. man ist in der Situation von Satz 15.4.

Die Funktion $f(z) := \frac{z}{z^2+1}$ hat für $\mathrm{Im}\,z > 0$ nur die eine Polstelle $z = i$. Diese ist einfach, d.h.

$$\mathrm{res}(i, fe^{ia\cdot}) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z)e^{iaz} = \frac{e^{-a}}{2}.$$

Mit Satz 15.4 für $p = a$ folgt

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{1+x^2} = \pi i e^{-a} \quad \text{d.h.} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-a}.$$

Beachte, dass $x\sin(ax)/(1+x^2)$ eine gerade Funktion ist, d.h. es gilt (I), denn mittels partieller Integration sieht man, dass der Grenzert

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{R} \frac{x}{1+x^2}\sin(ax)\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{x\cos(ax)}{a(1+x^2)}\bigg|_0^R - \int\limits_0^R \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin(ax)\,dx \right)$$

existiert, da das Integral rechts $1/(1+x^2)$ als integrierbare Majorante besitzt.

Bemerkung.
In diesem Beispiel hat das Integral für $a = 0$ den Wert 0, d.h. der Wert des Integrals hängt unstetig von dem Parameter a ab. Wir verweisen u.a. auf [10] für weitere Beispiele.

Bemerkung 15.6 (Cotangens – my love).
Wir betrachten nun unendliche Reihen der Form $\sum_n f(n)$ für $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ ohne ganzzahlige Polstellen. Um den Residuensatz zur Anwendung zu bringen, benötigen wir eine Funktion $g \in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ mit $f(n) = res(n, fg)$, d.h. mit einfachen Polstellen in den ganzen Zahlen jeweils mit Residuum 1. Zur Wahl stehen u.a.

$$g(z) = \pi\cot(\pi z), \qquad g(z) = \frac{2\pi}{e^{2\pi i z} - 1}, \quad \ldots$$

Satz 15.7 (Berechnung unendlicher Reihen).
Es seien $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ mit $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N, n\notin P_f}^{N} f(n) = -\sum_{z\in P_f} res(z, fg).$$

für $g(z) = \pi\cot(\pi z)$.

Beweis. Für $N \in \mathbb{N}$ sei Γ_N der Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm(N+1/2) \pm iN$. Für $F := fg \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ gilt mithilfe von Aufgabe 1.4, d.h. der Abschätzung $||g||_{\Gamma_N} \leq 2\pi$, dass

$$\lim_{N\to\infty} \left| \int_{\Gamma_N} F(w)\,dw \right| \leq \lim_{N\to\infty} 2\pi L(\Gamma_N)\,||f||_{\Gamma_N} = 0\,.$$

Da $F = fg$ einfache Polstellen mit Residuen $f(n)$ in den Punkten $n \in \mathbb{Z} \setminus P_f$ sowie ansonsten Polstellen in den Punkten P_f besitzt, folgt aus dem Residuensatz die Behauptung. □

Korollar 15.8 (Partialbruchzerlegung des Cotangens).
Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2}\,.$$

Insbesondere folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Beweis. Wir fixieren $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und wählen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{2ia}\frac{1}{z - ia} - \frac{1}{2ia}\frac{1}{z + ia}$$

in Satz 15.7 und erhalten

$$\frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + a^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\operatorname{res}(fg, ia) - \operatorname{res}(fg, -ia) = -\frac{\pi \cot(\pi i a)}{ia}\,.$$

Dies zeigt die zu beweisende Identität für $z = ai$, $a \in \mathbb{R}$. Da nach Beispiel 8.8 die Funktion rechts meromorph auf $\mathbb{C}$ ist, folgt die erste Behauptung aus dem Identitätsprinzip und damit

$$-\frac{\pi^2}{3} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi z \cot(\pi z) - 1}{z^2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

□

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 15.1 (Staatsexamen Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 5)**.**

Berechnen Sie unter Benutzung von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ für $\lambda > 0$ das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(\lambda x)\,dx\,.$$

Hinweis: Wenden Sie für reelles $R > 0$ den Cauchy–Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken $\pm R, \pm R + i\lambda/2$ an und betrachten Sie $R \to \infty$.

Kapitel 16

Die Sätze von Hurwitz und Montel

Wir untersuchen zunächst, wie sich die Nullstellen bzw. die Injektivität von holomorphen Funktionen unter kompakter Konvergenz auf die Grenzfunktion übertragen.

Satz 16.1 (Hurwitz).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n) \subseteq H(G)$ konvergiere kompakt in G gegen $f \in H(G)$.

(a) *Falls $0 \notin f_n(G)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist entweder $f \equiv 0$ oder $0 \notin f(G)$.*

(b) *Falls $f_n : G \to \mathbb{C}$ injektiv für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist entweder f konstant oder $f : G \to \mathbb{C}$ ist injektiv.*

Beweis. (a) Es gelte $f \not\equiv 0$ auf G, aber $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in G$. Wegen der Isoliertheit der Nullstellen von f (vgl. Satz 9.3) existiert eine Kreisscheibe $K_\varepsilon(z_0)$ mit $\overline{K_\varepsilon(z_0)} \subseteq G$, derart, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$. Wegen der Stetigkeit von f auf G und der Kompaktheit von $\partial K_\varepsilon(z_0)$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(z)| \geq \delta$ für alle $z \in \partial K_\varepsilon(z_0)$. Da (f_n) kompakt in G konvergiert, konvergiert (f_n) gleichmäßig auf der kompakten Menge $\partial K_\varepsilon(z_0)$ gegen f. Zum gewählten δ existiert daher ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|f_n(z) - f(z)| < \delta \leq |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial K_\varepsilon(z_0)\,.$$

Nach Satz 14.7 haben folglich f_n und f in $K_\varepsilon(z_0)$ gleichviele Nullstellen, also genau eine.
(b) Es sei $f \not\equiv$ konstant auf G. Um die Injektivität von f nachzuweisen, sei $w \in G$ fixiert. Betrachte $g_n(z) := f_n(z) - f_n(w)$ und $g(z) := f(z) - f(w)$ für $z \in G\backslash\{w\}$. Dann ist $g \not\equiv 0$ in $G\backslash\{w\}$, also g dort nullstellenfrei nach (a). Folglich gilt $f(z) \neq f(w)$ für alle $z \in G\backslash\{w\}$. Da $w \in G$ beliebig war, ergibt sich die Injektivität von f auf G. □

Beispiel 16.2.
Die Funktionen $f_n(z) = z/n$ sind holomorph und injektiv auf $\mathbb{C}$, nullstellenfrei in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f_n \to 0$ kompakt in $\mathbb{C}$.

Bemerkung.
Im Reellen gelten die entsprechenden Aussagen i.Allg. nicht: Betrachte etwa $f_n(x) = x/n$ für $x \in (0,1]$ und $f_n(x) := x - 1 + 1/n$ für $x \in (1,\infty)$.

Der Satz von Bolzano–Weierstraß besagt, dass für jede *beschränkte* Menge $F \subseteq \mathbb{R}$ jede Folge in F eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir suchen ein Analogon dieser Aussage für Mengen (oder Familien) $\mathscr{F}$ in $H(U)$ und setzen $C(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$.

Definition 16.3 (Normal, lokal beschränkt).
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $\mathscr{F} \subseteq C(U)$ eine Familie.

(a) *$\mathscr{F}$ heißt* ***normal*** *(oder relativ kompakt), falls jede Folge in $\mathscr{F}$ eine Teilfolge besitzt, die in U kompakt konvergiert.*

(b) *$\mathscr{F}$ heißt* ***lokal beschränkt****, falls*

$$\forall_{K \subseteq U \text{kompakt}} \quad \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \quad \forall_{f \in \mathscr{F}} \quad ||f||_K \leq M\,.$$

Beispiele 16.4. (a) $\mathscr{F} = \{z^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H(\mathbb{D})$ ist normal und lokal beschränkt.

(b) $\mathscr{F} = \{nz : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H(\mathbb{D})$ ist weder normal noch lokal beschränkt.

Es ist eine der bemerkenswerten Eigenschaften holomorpher Funktionen, dass für Familien in $H(U)$ das folgende Analogon zum Satz von Bolzano–Weierstraß gilt. Der wesentliche Kern von Satz 16.5 liegt in der Richtung "$\Longleftarrow$".

Satz 16.5 (Montel 1907, [46]).
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $\mathscr{F}$ eine Familie in $H(U)$. Dann gilt

$$\mathscr{F} \text{ normal} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F} \text{ lokal beschränkt.}$$

Wir beginnen mit dem (einfachen) Beweis von "$\Longrightarrow$" (allgemeiner für Familien $\mathscr{F}$ in $C(U)$).

von Satz 16.5 "$\Longrightarrow$". Anderenfalls gibt es eine kompakte Menge K in U, Folgen $(f_n) \subseteq \mathscr{F}$ und $(z_n) \subseteq K$ mit $|f_n(z_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$. Da K kompakt ist, können wir aufgrund des Satzes von Bolzano–Weierstraß o.E. annehmen, dass $z_n \to z_0 \in K$. Da $\mathscr{F}$ normal ist, können wir ebenfalls o.E. annehmen, dass (f_n) kompakt in U gegen eine Funktion $f \in C(U)$ konvergiert. Zu $\varepsilon = 1$ existiert daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||f_n - f||_K < 1$ für alle $n \geq N$, d.h. $\infty \leftarrow |f_n(z_n)| \leq |f(z_n) - f_n(z_n)| + |f(z_n)| < 1 + |f(z_n)| \to 1 + |f(z_0)|$. Widerspruch ! $\square$

Bemerkung.
Im Reellen folgt aus der lokalen Beschränktheit i.Allg. nicht die Normalität, betrachte etwa $\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$.

Satz 16.6.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, $A \subseteq U$ eine dichte Teilmenge und $(f_n) \subseteq H(U)$ eine lokal beschränkte Folge. Falls für jedes $z \in A$ die Folge $(f_n(z))$ in $\mathbb{C}$ konvergiert, so konvergiert (f_n) in U kompakt (gegen eine holomorphe Grenzfunktion).

Beweis. Es sei K eine kompakte Teilmenge von U. Es genügt zu zeigen, dass (f_n) eine gleichmäßige Cauchy–Folge auf K ist.

(i) Es sei $0 < r < \operatorname{dist}(K, \partial U)$. Nach Korollar 7.13 ist

$$L := \bigcup_{z \in K} \overline{K_r(z)}$$

eine kompakte Teilmenge von U und es gibt ein $C > 0$ mit $||f_n'||_L \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Wir wählen $\delta := \min\{\varepsilon/(3C), r\}$. Dann gilt

$$\forall_{z \in K, a \in U : |z-a| < \delta} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |f_n(z) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$*$}$$

Hierzu beachte man, dass $a \in K_r(z) \subseteq L$, d.h.

$$|f_n(z) - f_n(a)| = \left| \int_{[z,a]} f_n'(w)\, dw \right| \leq C|z-a| < C\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

(iii) Da K kompakt ist und A dicht in U liegt, gibt es eine endliche Teilmenge F von A mit

$$K \subseteq \bigcup_{a \in F} K_\delta(a).$$

Da F endlich ist und (f_n) in jedem Punkt von $F \subseteq A$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n,m \geq N} \quad \forall_{a \in F} \quad |f_n(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$**$}$$

(iv) Nun sei $z \in K$ fest gewählt. Dann existiert ein $a \in F$ mit $z \in K_\delta(a)$, d.h.

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$ nach $(*)$ und $(**)$. Beachte, dass N nicht von z abhängt. □

Bemerkung (Gleichgradige Stetigkeit)**.**
In den Schritten (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass eine lokal beschränkte Folge *holomorpher* Funktionen $f_n \in C(U)$ in U *lokal gleichgradig stetig* ist: Für jede kompakte Menge $K \subseteq U$ gilt

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{z \in K, a \in U : |z-a| < \delta} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |f_n(z) - f_n(a)| < \varepsilon.$$

In den Schritten (iii) und (iv) wurde gezeigt, dass jede Folge lokal gleichgradig stetiger Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, die auf einer dichten Teilmenge von U konvergiert, bereits kompakt in U konvergiert.

Beweis von Satz 16.5. Es sei $(f_n) \subseteq \mathscr{F}$. **Ziel:** Finde eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) die in U kompakt konvergiert. **Idee:** Wende Satz 16.6 an.

Es sei $A = \{z \in U : z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{Q}\}$. Dann ist $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ abzählbar und dicht in U. Wir konstruieren eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) derart, dass $(f_{n_k}(a_j))_k$ für jedes $a_j \in A$ konvergiert.

(i) Betrachte die Folge $(f_n(a_1))_n$:
Da $(f_n(a_1))_n$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(f_{1,n})$ von (f_n) derart, dass der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} f_{1,n}(a_1)$ in $\mathbb{C}$ existiert .

(ii) Betrachte die Folge $(f_{1,n}(a_2))_n$:
Da $(f_{1,n}(a_2))_n$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(f_{2,n})$ von $(f_{1,n})$ derart, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2,n}(a_2)$ in $\mathbb{C}$ existiert.

(iii) Betrachte die Folge $(f_{2,n}(a_3))_n$:
Da $(f_{2,n}(a_3))_n$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(f_{3,n})$ von $(f_{2,n})$ derart, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_{3,n}(a_3)$ in $\mathbb{C}$ existiert.

usw..

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots & \lim\limits_{n\to\infty} f_{1,n}(a_1) \text{ ex.} \\
\hookrightarrow & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots & \lim\limits_{n\to\infty} f_{2,n}(a_2) \text{ und } \lim\limits_{n\to\infty} f_{2,n}(a_1) \text{ ex.} \\
\hookrightarrow & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots & \lim\limits_{n\to\infty} f_{3,n}(a_3),\ \lim\limits_{n\to\infty} f_{3,n}(a_2) \text{ und } \lim\limits_{n\to\infty} f_{3,n}(a_1) \text{ ex.} \\
\hookrightarrow & \cdots & & & & & \cdots
\end{array}$$

Betrachte die Diagonalfolge $(f_{n,n})_n$:

Die Folge $(f_{n,n})_n$ konvergiert in jedem Punkt a_j, denn die Folge $(f_{j,n}(a_j))_n$ konvergiert und die Folgenelemente $f_{l,l}$ sind für alle $l \geq j$ in der Folge $(f_{j,n})_n$ enthalten, also ist $(f_{ll})_{l \geq j}$ eine Teilfolge von $(f_{j,n})_n$. Mit Satz 16.6 folgt dann die Behauptung. ■

Bemerkung (Der Satz von Arzelà–Ascoli)**.**
Wir haben gezeigt, dass jede *punktweise* beschränkte Folge von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Teilfolge enthält, die auf einer dichten Teilmenge von U punktweise konvergiert. Im Hinblick auf die Bemerkung vor dem Beweis von Satz 16.5 haben wir damit den folgenden Satz von Arzelà–Ascoli "mit"bewiesen: *Es sei (f_n) eine Folge punktweise beschränkter lokal gleichgradig stetiger Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$. Dann konvergiert eine Teilfolge von (f_n) kompakt in U gegen eine (dann stetige) Grenzfunktion $f : U \to \mathbb{C}$.* Die "sperrige" Bedingung "punktweise beschränkt und lokal gleichgradig stetig" lässt sich im Falle *holomorpher* Funktionen durch die einfache Bedingung "lokal beschränkt" ersetzen. Wunderwelten !

Satz 16.7 (Vitali).
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_* \in G$, $(z_j) \subseteq G\backslash\{z_*\}$ eine Folge mit $\lim_{j\to\infty} z_j = z_*$ und $(f_n) \subseteq H(G)$ eine lokal beschränkte Folge. Falls für jedes z_j die Folge $(f_n(z_j))_n$ konvergiert, so konvergiert $(f_n)_n$ in G kompakt (gegen eine holomorphe Grenzfunktion).

Beweis. Wir zeigen (f_n) konvergiert punktweise in G. Dann folgt die Behauptung aus Satz 16.6.
Annahme: es existiert ein $z_0 \in G$, derart, dass $(f_n(z_0))_n$ nicht konvergiert. Da $(f_n(z_0))_n$ beschränkt ist, hat die Folge $(f_n(z_0))_n$ mindestens zwei Häufungspunkte $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ mit $w_1 \neq w_2$. Es existieren daher Teilfolgen (f_{n_k}) und (f_{m_l}) mit

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = w_1 \quad \text{und} \quad \lim_{l\to\infty} f_{m_l}(z_0) = w_2\,.$$

Der Satz von Montel (Satz 16.5) impliziert nun, dass Teilfolgen $(\tilde{f}_{n_k})$ von (f_{n_k}) und $(\hat{f}_{m_l})$ von (f_{m_l}) existieren, die kompakt gleichmäßig in G gegen holomorphe Grenzfunktionen $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ und $\hat{f} : G \to \mathbb{C}$ konvergieren. Da $(\tilde{f}_{n_k})$ und $(\hat{f}_{m_l})$ Teilfolgen der Folge (f_n) sind, gilt

$$\hat{f}(z_j) = \lim_{l\to\infty} \hat{f}_{m_l}(z_j) = \lim_{k\to\infty} \tilde{f}_{n_k}(z_j) = \tilde{f}(z_j) \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}\,.$$

Mit dem Identitätsprinzip (Satz 9.5) folgt nun $\hat{f} \equiv \tilde{f}$ auf G. Das ist ein Widerspruch, denn

$$\hat{f}(z_0) = \lim_{l\to\infty} \hat{f}_{m_l}(z_0) = w_2 \neq w_1 = \lim_{k\to\infty} \tilde{f}_{n_k}(z_0) = \tilde{f}(z_0)\,.$$

□

Satz 16.8 (Satz von Osgood).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n) \subset H(U)$ konvergiere punktweise auf U gegen $f : U \to \mathbb{C}$. Dann gibt es eine offene und dichte Teilmenge V von U, so dass (f_n) auf V kompakt konvergiert.

Beweis. Nach dem Satz von Vitali genügt es zu zeigen, dass es eine offene und dichte Teilmenge V von U gibt, so dass (f_n) auf V lokal beschränkt ist. Wir zeigen, dass jede nicht–leere offene Menge $U' \subseteq U$ eine nicht-leere offene Kreisscheibe $D(U')$ enthält, so dass (f_n) auf $D(U')$ beschränkt ist. Wäre dem nicht so, so fänden wir induktiv $g_k \in \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ und nicht–leere offene Kreisscheiben $D_{k+1} \subseteq \overline{D_k} \subseteq U'$ mit $|g_k(z)| > k$ für alle $z \in D_{k+1}$. Für jeden Punkt z aus der aufgrund von Satz 0.48 nicht–leeren Menge $\cap\overline{D_k}$ wäre dann $\{g_k(z) : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{f_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt, im Widerspruch zur Konvergenz von $(f_n(z))$. Die Menge

$$V := \bigcup_{\emptyset \neq U' \text{ offen mit } U' \subseteq U} D(U')$$

ist dann offen und dicht in U. Jede kompakte Menge K in V wird von endlich vielen der Kreisscheiben $D(U')$ überdeckt, d.h. (f_n) ist auf K beschränkt. □

Ergänzungen und Ausblicke

Die kompakte Konvergenz von Funktionenfolgen lässt sich als Konvergenz bzgl. einer geeigneten Metrik beschreiben. Hierzu ist es zweckmäßig den (komplexen) Vektorraum $C(U)$ aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ zu betrachten.

Lemma 16.9 (Kompakte Ausschöpfungen).
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $K_m := \{z \in U : \operatorname{dist}(z, \partial U) \geq 1/m \wedge |z| \leq m\}$. Dann ist (K_m) eine kompakte Ausschöpfung von U, d.h. jedes K_m ist eine kompakte Menge in U und es gilt

$$K_m \subseteq \overset{\circ}{K}_{m+1} \quad \textit{für alle } m \in \mathbb{N} \quad \textit{sowie} \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = U\,.$$

Für $U = \mathbb{C}$ gilt beispielsweise $\partial U = \emptyset$, also $\operatorname{dist}(z, \partial U) = +\infty$ für alle $z \in U$, d.h. $K_m = \overline{K_m(0)}$.

Beweis. K_m ist eine beschänkte (in $\overline{K_m(0)}$ enthaltene) Teilmenge von U und auch abgeschlossen, denn aus $(z_j) \in K_m$ mit $z_j \to z \in \mathbb{C}$ folgt $|z_j - u| \geq 1/m$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $u \in \partial U$ sofort $|z-u| \geq 1/m$ für alle $u \in \partial U$. Ist $z \in K_m$, so gilt $K_{1/m-1/(m+1)}(z) \subseteq K_{m+1}$, wie leicht mithilfe der Dreiecksungleichung oder einer Zeichung folgt), d.h. $K_m \subseteq K^\circ_{m+1}$. Ist $z \in U$, so gibt es wegen der Offenheit von U ein $K_\varepsilon(z) \subseteq U$, d.h. $\operatorname{dist}(z, \partial U) \geq \varepsilon$, also $z \in K_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1/\varepsilon$ und $m \geq |z|$. □

Lemma 16.10.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und (K_m) wie in Lemma 16.9. Dann ist durch

$$d(f,g) := \sum_{m=1}^{\infty} \min\left\{||f-g||_{K_m}, 2^{-m}\right\}$$

eine Metrik auf $C(U)$ definiert. Für $f_1, f_2, \ldots, f \in C(U)$ gilt:

$$(f_n) \textit{ konvergiert kompakt in } U \textit{ gegen } f \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0\,.$$

Beweis. Man überprüft leicht, dass d alle Eigenschaften einer Metrik besitzt. "$\Longrightarrow$": Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-m_1} < \varepsilon/2$. Da $f_n \to f$ gleichmäßig auf der kompakten Menge K_{m_1} existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||f_n - f||_{K_{m_1}} < \varepsilon/(2m_1)$ für alle $n > N$, d.h.

$$d(f_n, f) \leq \sum_{m=1}^{m_1} ||f-g||_{K_m} + \sum_{m=m_1+1}^{\infty} 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2m_1}, m_1 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

"$\Longleftarrow$": Es sei K eine kompakte Menge in U. Zu jedem Punkt $z \in K$ existiert ein $m(z) \in \mathbb{N}$ mit $z \in K_{m(z)}$, d.h.$\cup_{z\in K} K^\circ_{m(z)+1}$ ist eine offene Überdeckung von K, besitzt also eine endliche Teilüberdeckung. Dies zeigt, dass $K \subseteq K_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Aus $d(f_n, f) \to 0$ folgt insbesondere $||f_n - g||_{K_m} \to 0$, also $f_n \to f$ gleichmäßig auf $K_m \supseteq K$. □

Dies bedeutet, dass zwar die Metrik d selbst, jedoch nicht die Konvergenz im metrischen Raum $(C(U), d)$ von der Wahl der kompakten Ausschöpfung von U abhängt.

Satz 16.11.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Dann ist der metrische Raum $(C(U), d)$ vollständig.

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchyfolge in $(C(U), d)$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n, f_j) < \varepsilon$ für alle $n, j \geq N$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ folgt $|f_n(z) - f_j(z)| \leq ||f_n - f_j||_{K_m} \leq d(f_n, f_j) < \varepsilon$ für alle $z \in K_m$ und alle $n, j \geq N$. Also ist $(f_n(z))$ eine Cauchyfolge im vollständigen Körper $\mathbb{C}$ für jedes $z \in K_m$ mit Limes $f(z) \in \mathbb{C}$ und (f_n) konvergiert gleichmässig auf K_m. Damit konvergiert (f_n) kompakt in U gegen die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, die nach Satz 0.23 stetig auf U ist. Lemma 16.10 impliziert $d(f_n, f) \to 0$, d.h. $(C(U), d)$ ist vollständig. □

Die Konvergenzsätze von Weierstraß lassen sich nun wie folgt formulieren:

Satz 16.12.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Dann ist $H(U)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $(C(U),d)$. Insbesondere ist $(H(U),d)$ ein vollständiger metrischer Raum und die Abbildung $(H(U),d) \to (H(U),d)$, $f \mapsto f'$, ist stetig.

Bemerkung.
$(C(U),d)$ und $(H(U),d)$ sind damit Beispiele von *Frécheträumen*, einer Klasse vollständiger metrischer Vektorräume, die in vielen Bereichen der Analysis eine wichtige Rolle spielen.

Beweis. Es sei (f_n) eine Folge in $H(U)$ mit $d(f_n,f) \to 0$ für ein $f \in C(U)$. Nach Lemma 16.10 konvergiert (f_n) kompakt in U gegen $f : U \to \mathbb{C}$, d.h. $f \in H(U)$ aufgrund von Satz 8.7. Nun sei (f_n) eine Cauchyfolge in $(H(U),d)$. Dann ist (f_n) eine Cauchyfolge im vollständigen Raum $(C(U),d)$, also $d(f_n,f) \to 0$ für ein $f \in C(U))$. Da $(f_n) \subseteq H(U)$ und $H(U)$ abgeschlosssen ist, folgt $f \in H(U)$. Sind $f_1, f_2, \ldots, f \in H(U)$ mit $d(f_n,f) \to 0$, so konvergiert (f_n) nach Lemma 16.10 kompakt gegen f, d.h. (f_n') konvergiert wegen Satz 8.7 kompakt gegen $f' \in H(U)$, also $d(f_n', f') \to 0$ wieder im Hinblick auf Lemma 16.10. Dies zeigt, dass die Abbildung $(H(U),d) \to (H(U),d)$, $f \mapsto f'$, stetig ist. $\square$

Bemerkung.
Die Menge bestehend aus allen konstanten und aus allen nullstellenfreien Funktionen in $H(U)$ ist daher eine *abgeschlossene* Teilmenge des metrischen Raums $(H(U),d)$.

Bemerkung.
Die Menge bestehend aus allen konstanten und aus allen injektiven Funktionen in $H(U)$ ist daher eine *abgeschlossene* Teilmenge des metrischen Raums $(H(U),d)$.

Satz A 16.1.
Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $\mathscr{F} \subseteq C(U)$. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathscr{F}$ ist beschränkt.

(b) Für jede offene Menge V in $(C(U),d)$ gibt es ein $r > 0$ mit $\mathscr{F} \subseteq rV$.

Man beachte, dass Bedingung (b) für jeden metrischen Vektorraum (X,d) anstelle von $(C(U),d)$ sinnvoll bleibt und eine “natürliche” Festlegung der “Beschränktheit” einer Teilmenge eines metrischen Vektorraums darstellt.
Der folgende Satz liefert weitere Beispiele lokal beschränkter Folgen holomorpher Funktionen.

Satz A 16.2.
Es sei p ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die n–te Iterierte von p definiert durch

$$p^{[n]} := \underbrace{p \circ \cdots \circ p}_{n\text{–mal}}.$$

Dann ist

$$E_p(\infty) := \{z \in \mathbb{C} : |p^{[n]}(z)| \to \infty\}$$

ein Gebiet mit $\Delta_R(0) \subseteq E_p(\infty) \neq \mathbb{C}$ für ein $R > 0$. Die Familie $\{p^{[n]} : n \in \mathbb{N}\}$ ist lokal beschränkt auf der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus \overline{E_p(\infty)}$.

Wir nennen $E_p(\infty)$ *den Einzugsbereich von* ∞ und die kompakte Menge $\mathscr{K}_p := \mathbb{C} \setminus E_p(\infty)$ die *ausgefüllte Julia–Menge von* p. Ihr Rand $\mathscr{J}_p := \partial \mathscr{K}_p = \partial E_p(\infty)$ heißt *Julia–Menge von* p. Das Innere von $\mathscr{K}_p$ ist die größte offene Menge auf der die Iteriertenfolge lokal beschränkt ist.

Beweis. Wegen $d \geq 2$ gibt es ein $R \geq 1$ mit $|p(z)| \geq 2|z|$ für alle $|z| \geq R$. Dies bedeutet, dass $|p^{[n]}(z)| \to \infty$ für alle $|z| \geq R$, d.h. $\Delta_R(0) \subseteq E_p(\infty)$. Wegen

$$E_p(\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p^{-n}(\Delta_R(0))$$

ist $E_p(\infty)$ offen und $p(E_p(\infty)) \subseteq E_p(\infty)$ sowie $p^{-1}(E_p(\infty)) \subseteq E_p(\infty)$. Es folgt $p(\partial E_p(\infty)) \subseteq \partial E_p(\infty)$ und somit $p^{[n]}(\partial E_p(\infty)) \subseteq \partial E_p(\infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $E_p(\infty) \neq \mathbb{C}$ (jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = z$ liegt außerhalb von $E_p(\infty)$) ist die kompakte Menge $\partial E_p(\infty)$ nicht–leer und es existiert ein $M > 0$ mit $|p^{[n]}(z)| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \partial E_p(\infty) = \mathscr{J}_p$. Das Maximumprinzip impliziert, dass $\{p^{[n]} : n \in \mathbb{N}\}$ auf den beschränkten Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \mathscr{J}_p$ (lokal) beschränkt ist. Die unbeschränkte Komponente U von $\mathbb{C} \setminus \mathscr{J}_p$ enthält das Gebiet $\Delta_R(0)$ und daher auch jede der Mengen $p^{-n}(\Delta_R(0))$, also $E_p(\infty)$. Es folgt $U = E_p(\infty)$, d.h. $E_p(\infty)$ ist ein Gebiet. $\square$

Beispiele A 16.3.
Es sei $c \in \mathbb{C}$ und $p(z) = z^2 + c$. Dann gilt $|p(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq 2|z|$ für alle $|z| \geq R := \max\{3, |c|\}$, d.h. $\Delta_R(0) \subseteq E_p(\infty)$.

(a) Für $p(z) = z^2$, gilt $E_p(\infty) = \Delta_1(0)$, $\mathscr{J}_p = \partial\mathbb{D}$.

(b) Für $p(z) = z^2 + c$ mit $c = -0.12256 + 0.74486i$ ergibt sich $\mathscr{J}_p$ experimentell wie in Abbildung 16.3.

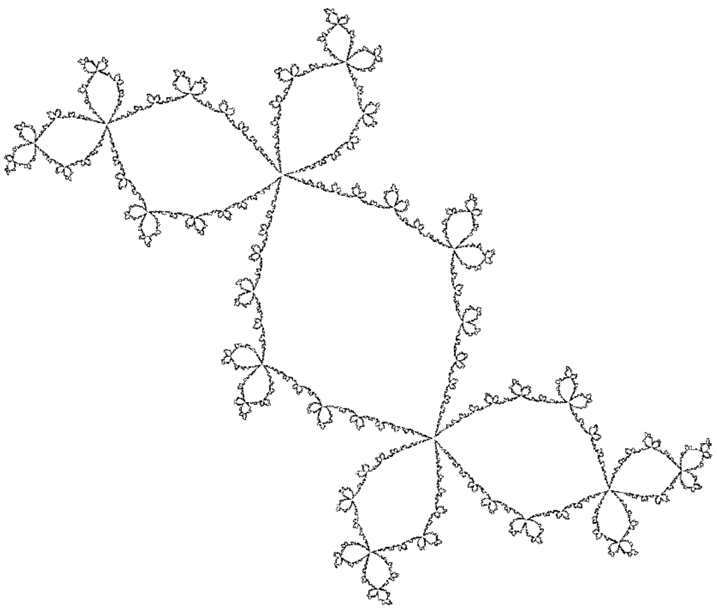


Abbildung 16.1: The Douady Rabbit

Bemerkung A 16.4 (Julia–Mengen und sensitive Abhängigkeit, ein bißchen Chaostheorie).
Es sei p ein Polynom vom Grad $d \geq 2$. Wir untersuchen, wie das "Langzeitverhalten" von $p^{[n]}(z_0)$ von der Wahl des Anfangspunktes $z_0 \in \mathbb{C}$ abhängt. Es sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{J}_p$. Falls $z_0 \in E_p(\infty)$, so gilt $|p^{[n]}(z_0)| \to \infty$, d.h. das Langzeitverhalten hängt nicht von der Wahl von z_0 ab (solange man in $E_p(\infty)$ verbleibt). Falls $z_0 \notin E_p(\infty)$, so ist $p^{[n]}$ in einer offenen Umgebung von z_0 lokal beschränkt und dort somit gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{z \in U: |z-z_0|<\delta} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |p^{[n]}(z) - p^{[n]}(z_0)| < \varepsilon \,.$$

D.h. $(p^{[n]}(z))$ verhält sich für alle z hinreichend nahe z_0 "so wie" $(p^{[n]}(z_0))$. Zusammenfassen lässt sich sagen, dass auf $\mathbb{C} \setminus \mathscr{J}_p$ die Iteriertenfolge das starke Kausalitätsgesetz befolgt: "Ähnliche Ursachen haben ähnliche Langzeitwirkungen". Auf $\mathscr{J}_p$ hingegen ist das starke Kausalitätsgeset verletzt *und es herrscht "sensitive Abhängigkeit" von der Anfangsbedingung, ein wesentliches Versatzstück chaostischen Verhaltens eines dynamischen Systems.*

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 16.1.
Die Folge $(f_n) \subseteq H(\mathbb{D})$ konvergiere kompakt in $\mathbb{D}$ gegen eine injektive Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es für jedes $r \in (0,1)$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für jedes $n \geq N$ die Funktion f_n auf $K_r(0)$ injektiv ist.

Aufgabe 16.2.
(Julia–Mengen und konforme Abbildungen)
Es sei $\Psi(w) := w + 1/w$ für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $p(z) = z^2 - 2$.

(a) Zeigen Sie, dass Ψ eine konforme Abbildung von $\Delta_1(0) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ auf $\mathbb{C} \setminus [-2,2]$ darstellt.

(b) Bestimmen Sie die Julia–Menge von p.

Aufgabe 16.3.
Es sei
$$\mathscr{F} := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) \, : \, f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \, , \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leq 1 \right\} .$$
Ist $\mathscr{F}$ normal ?

Aufgabe 16.4.
Es sei
$$\mathscr{F} := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) \, : \, \iint\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dxdy := \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 r \, dt \leq 1 \right\} .$$
Ist $\mathscr{F}$ normal ?

Aufgabe 16.5.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathscr{F} \subseteq H(G)$, derart, dass $\{f' \, : \, f \in \mathscr{F}\} \subseteq H(G)$ eine normale Familie ist. Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}$ i.Allg. nicht normal ist.

Aufgabe 16.6.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathscr{F} \subseteq H(G)$, derart, dass es zu jeder kompakten Menge $K \subseteq G$ eine Konstante gibt, derart, dass $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ für alle $z \in K$ und alle $f \in \mathscr{F}$. Ist $\mathscr{F}$ normal ?

Aufgabe 16.7.
Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen und $f : U \times V \to \mathbb{C}$ sei lokal beschränkt, d.h. für jede kompakte Menge $M \subseteq U \times V$ gelte $||f||_M < \infty$. Ferner sei für alle $(z_0, x_0) \in U \times V$:

i) $x \mapsto f(z_0, x)$ stetig auf V und

ii) $z \mapsto f(z, x_0)$ holomorph in U.

Zeigen Sie, dass $f : U \times V \to \mathbb{C}$ stetig ist.

Kapitel 17

Der Riemannsche Abbildungssatz

Definition 17.1 (Konforme Äquivalenz).
Zwei Gebiete G und Ω heißen ***konform äquivalent****, falls es eine konforme Abbildung $f : G \to \Omega$ gibt.*

Beispielsweise zeigt die Cayley–Abbildung (Beispiel 3.9), dass die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ und die obere Halbebene $\mathbb{H}$ konform äquivalent sind.

Bemerkung 17.2.
Es seien G und Ω Gebiete und f eine konforme Abbildung von G auf Ω. Dann gilt:

$$G \text{ einfach zusammenhängend} \iff \Omega \text{ einfach zusammenhängend.}$$

Die Eigenschaft eines Gebietes einfach zusammenhängend zu sein ist daher invariant unter konformen Abbildungen. Kurz: „Einfacher Zusammenhang ist eine konforme Invariante“.

Beweis. Siehe Aufgabe H9.2 (ii) □

In diesem Abschnitt beweisen wir den „Fundamentalsatz für konforme Abbildungen“:

Satz 17.3 (Riemannscher Abbildungssatz 1851, [62]).
Es sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in G$. Dann gibt es genau eine konforme Abbildung $F : G \to \mathbb{D}$ mit $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) > 0$.

Bemerkung.
Nach dem Satz von Liouville ist jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ konstant, d.h. es gibt keine konforme Abbildung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$. Daher muss der Fall $G = \mathbb{C}$ in Satz 17.3 ausgenommen werden. Satz 17.3 zeigt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ konform äquivalent zu $\mathbb{D}$ ist.

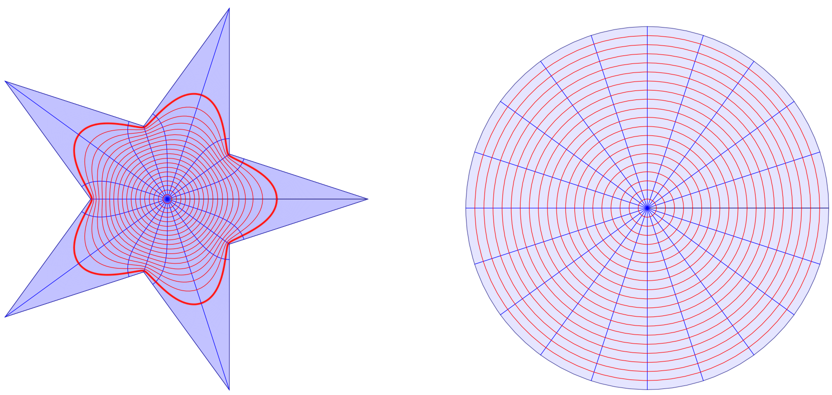


Abbildung 17.1: Konforme Abbildung eines Pentagramms auf die Einheitskreisscheibe

Bemerkung 17.4 (Beweisidee für die Existenzaussage sowie Beweis der Eindeutigkeit).
Ist $z_0 \in G$ fixiert und gibt es eine konforme Abbildung F von G auf $\mathbb{D}$ mit $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) > 0$, so zeichnet sich F durch folgende Extremaleigenschaft aus. Ist $g : G \to \mathbb{D}$ eine injektive holomorphe Funktion mit $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) > 0$, so ist $f := g \circ F^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = g'(z_0)/F'(z_0)$. Das Lemma von Schwarz (Satz 11.1) impliziert, dass

$$g'(z_0)/F'(z_0) = f'(0) = |f'(0)| \leq 1\,, d.h. \quad F'(z_0) \geq g'(z_0)\,.$$

Ist $g : G \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung mit $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) > 0$, so ist $f = g \circ F^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, also $f(z) = z$ nach Korollar 11.2. Es folgt $g = F$.

Für den Nachweis der Existenz beweisen wir vorbereitend:

Satz 17.5.
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $\mathscr{F} := \{g \in H(G) \text{ injektiv} : g(G) \subseteq \mathbb{D}, g(z_0) = 0\}$. Falls $\mathscr{F} \neq \emptyset$, dann existiert ein $h \in \mathscr{F}$ mit

$$|h'(z_0)| = \sup\{|g'(z_0)| : g \in \mathscr{F}\} > 0\,.$$

Beweis. Es sei $\eta := \sup\{|g'(z_0)| : g \in \mathscr{F}\}$. Da $\mathscr{F} \neq \emptyset$, folgt $\eta > 0$. Es existiert eine Folge (g_n) in $\mathscr{F}$ mit $|g_n'(z_0)| \to \eta$. Da $\mathscr{F}$ eine beschränkte Familie ist, besitzt (g_n) nachdem Satz von Montel (Satz 16.5) eine Teilfolge (g_{n_j}), die in G kompakt gegen eine holomorphe Grenzfunktion $h : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Es gilt:

* $h(z_0) = \lim\limits_{j\to\infty} g_{n_j}(z_0) = 0$.
* $|h'(z_0)| = \lim\limits_{j\to\infty} |g_{n_j}'(z_0)| = \eta > 0$, vgl. Satz von Weierstraß (Satz 8.7).
* h ist injektiv auf G, da $\eta > 0$ ist, aufgrund des Satzes von Hurwitz (siehe Satz16.1).
* $h(G) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$; Satz 10.3 impliziert $h(G) \subseteq \mathbb{D}$.

von Satz 17.3. **Schritt 1:** $\mathscr{F} := \{g \in H(G) \text{ injektiv} : g(G) \subseteq \mathbb{D}, g(z_0) = 0\} \neq \emptyset$. □
Da $G \neq \mathbb{C}$ existiert ein $w_0 \in \mathbb{C} \backslash G$. d.h. $w : G \to \mathbb{C}$, $w(z) = z - w_0$, ist nullstellenfrei. Auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G gibt es nach Korollar 12.12 ein $\varphi \in H(G)$ mit $\varphi^2 = w$.

* φ ist injektiv auf G, denn für $z_1, z_2 \in G$ mit $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ gilt $\varphi(z_1)^2 = \varphi(z_2)^2$ und daher folgt $z_1 = z_2$.
* $\varphi(z_1) \neq -\varphi(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in G$ mit $z_1 \neq z_2$.

Setze nun $G' := \varphi(G)$ und wähle $z_* \in G'$. Wegen Satz 10.3 ist G' offen und es existiert eine Kreisscheibe $K_r(z_*) \subseteq G'$ mit $0 < r < |z_*|$. Die Funktion

$$\Phi : G \to \mathbb{C}, \quad \Phi(z) = \frac{r}{\varphi(z) + z_*}\,,$$

ist holomorph, injektiv und nach Konstruktion gilt $\Phi(G) \subseteq \mathbb{D}$. Setzt man $a = \Phi(z_0)$ und $T_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $T_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, so ist $g = T_a \circ \Phi \in \mathscr{F}$.

Schritt 2: Nach Satz 17.5 gibt es ein $h \in \mathscr{F}$ mit $|h'(z_0)| = \sup\left\{|g'(z_0)| : g \in \mathscr{F}\right\}$. Zeige: $h : G \to \mathbb{D}$ ist surjektiv:

Annahme: Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{D} \backslash h(G)$. Es sei $T_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $T_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\bar{\alpha}z}$. Dann ist $T_\alpha \circ h : G \to \mathbb{D}$ holomorph, injektiv und nullstellenfrei. Korollar 12.12 impliziert, dass es eine Funktion $s \in H(G)$ gibt mit $s^2 = T_\alpha \circ h$. Es sei $\beta := s(z_0)$ und $T_\beta : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $T_\beta(z) = \frac{\beta - z}{1-\overline{\beta} z}$. Dann ist $\Lambda : G \to \mathbb{D}$, $\Lambda(z) = T_\beta \circ s(z)$ holomorph und injektiv mit $\Lambda(z_0) = 0$. Dies zeigt $\Lambda \in \mathscr{F}$. Andererseits gilt mit $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = z^2$,

$$h(z) = T_\alpha \circ p \circ T_\beta \circ \Lambda(z)\,, \quad z \in G\,.$$

Setzt man $f := T_\alpha \circ p \circ T_\beta$, so ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Da jedoch f nicht injektiv ist, folgt $|f'(0)| < 1$ wegen des Lemmas von Schwarz (Satz 11.1). Da $|h'(z_0)| = |f'(0)|\,|\Lambda'(z_0)|$ gilt, folgt $|\Lambda'(z_0)| > |h'(z_0)|$ im Widerspruch zu $|h'(z_0)| = \sup\{\,|\psi'(z_0)| : \psi \in \mathscr{F}\}$. $\square$

Der Riemannsche Abbildungssatz garantiert für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ die *Existenz* (und im wesentlichen auch Eindeutigkeit) einer konformen Abbildung von G auf $\mathbb{D}$. Die explizite Bestimmung der konformen Abbildung in geschlossener Form ist allerdings ein i.Allg. schwieriges Problem, so dass in der Praxis oft eines der zahlreichen numerischen Verfahren für die Berechnung konformer Abbildungen herangezogen werden muss.

Beispiele 17.6 (Koebefunktion, Joukowski Abbildung)**.**
Die Koebefunktion

$$f(z) := \frac{z}{(1+z)^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

bildet $\mathbb{D}$ konform auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus [1/4, +\infty)$ ab. Sie spielt eine zentrale Rolle in der geometrischen Funktionentheorie (u.a. im Hinblick auf die sog. Bieberbachsche Vermutung). Die Joukowski Abbildung

$$\Psi(z) := \frac{1}{2f(z)} - 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

bildet daher $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ konform auf $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ ab. Die Joukowski Abbildung und Variationen hiervon finden Verwendung im Design von Tragflügeln. Ihre Umkehrabbildung

$$\varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

ist eine konforme Abbildung von $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ auf $\mathbb{D}$. Sie spielt eine wichtige Rolle für die Theorie orthogonaler Polynome auf dem Intervall $[-1,1]$

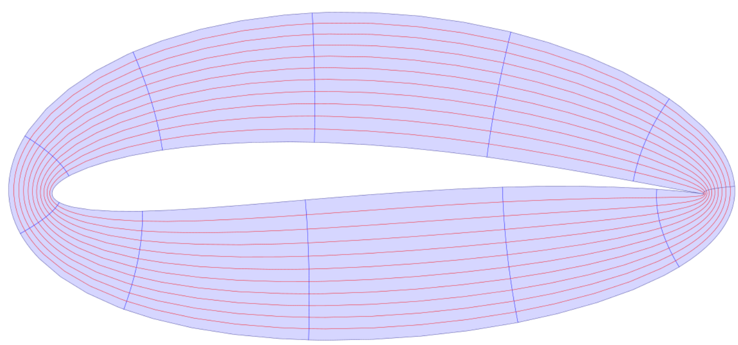


Abbildung 17.2: Illustration der Joukowski Abbildung

Dieses Beispiel zeigt, dass eine konforme Abbildung $F : G \to \Omega$ i.Allg. keine stetige Fortsetzung auf $\overline{G}$ haben muss.

Definition 17.7 (Randfolge).
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Eine Folge (z_n) in G heißt ***Randfolge*** *für G, es zu jeder kompakten Menge K in G ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $z_n \notin K$ für alle $n \geq N$.*

Randfolgen eines Gebietes sind also Folgen, die jede kompakte Teilmenge verlassen. Ist G ein beschränktes Gebiet, so liegen alle Häufungspunkte einer Randfolge auf dem Rand ∂G.

Lemma 17.8 (Randverhalten konformer Abbildungen).
Es seien G und Ω zwei Gebiete in $\mathbb{C}$, $F : G \to \Omega$ eine konforme Abbildung und (z_n) eine Randfolge in G. Dann ist die Folge der Bildpunkte $F(z_n)$ eine Randfolge in Ω.

Beweis. Angenommen eine Teilfolge $(F(z_{n_k}))$ verbliebe in einer kompakten Teilmenge K von Ω, so verbliebe z_{n_k} in der Menge $F^{-1}(K)$. Diese wäre dann aufgrund der Stetigkeit von F^{-1} eine kompakte Teilmenge von G, d.h. (z_n) wäre keine Randfolge in G. □

Satz 17.9.
Es sei G ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Es gibt eine konforme Abbildung $F : G \to \mathbb{D}$.

(b) Für jeden Punkt $z_0 \in G$ gibt es eine in G harmonische Funktion $u(\cdot, z_0) : G \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{z\to w} u(z,z_0) = \log|w - z_0| \quad \textit{für jedes } w \in \partial\Omega\,.$$

Beweis. (a) ⇒ (b): Es sei $z_0 \in G$. Dann ist $F(z,z_0) := \frac{F(z_0)-F(z)}{1-\overline{F(z_0)}F(z)}$ eine konforme Abbildung von G auf $\mathbb{D}$ mit $F(z_0,z_0) = 0$ und

$$u(z,z_0) := -\log\left|\frac{F(z,z_0)}{z-z_0}\right|$$

hat die gewünschten Eigenschaften.
(b) ⇒ (a): Für jeden Punkt $z_0 \in G$ gibt es eine holomorphe Funktion $h(\cdot,z_0) : G \to \mathbb{C}$ mit $u(\cdot,z_0) = \operatorname{Re} h(\cdot,z_0)$, d.h. $F(\cdot,z_0) : G \to \mathbb{C}$, $F(z,z_0) := (z-z_0)e^{-h(z,z_0)}$ ist holomorph auf G mit $F(z,z_0) = 0$ genau dann, wenn $z = z_0$. Ferner gilt

$$\lim_{z\to w} |F(z,z_0)| = \lim_{z\to w} |z-z_0| e^{-u(\cdot,z_0)} = 1 \qquad \text{für alle } w \in \partial G\,,$$

d.h. $F : G \to \mathbb{D}$ aufgrund des Maximumprinzips. Wir betrachten für $z_1 \in G\setminus\{z_0\}$ die in G holomorphe Funktion

$$z \mapsto s(z) := \frac{1}{F(z,z_1)}\,\frac{F(z,z_0)-F(z_1,z_0)}{1-\overline{F(z_1,z_0)}F(z,z_0)}\,.$$

Da $|s(z)| \to 1$ für $z \to \partial G$, folgt mit dem Maximumprinzip zunächst $|s(z_0)| \leq 1$, also $|F(z_1,z_0)| \leq |F(z_0,z_1)|$ und folglich aus Symmetriegründen $|s(z_0)| = 1$. Das Maximumprinzip zeigt nun $|s(z)| = 1$ für alle $z \in G$, d.h. $F(\cdot,z_0) : G \to \mathbb{D}$ ist injektiv. Ist $w \in \mathbb{D}$ fixiert, so folgt für

$$\tilde{F}(z) := \frac{F(z,z_0)-w}{1-\overline{w}F(z,z_0)}\,,$$

dass $|\tilde{F}(z)| \to 1$ für $z \to \partial G$. Da $\tilde{F}(G) \subseteq \mathbb{D}$ zeigt das Minimumprinzip, dass $\tilde{F}$ eine Nullstelle in G besitzt, d.h. $F(\cdot,z_0) : G \to \mathbb{D}$ ist surjektiv. □

Ergänzungen und Ausblicke

Bemerkung A 17.1.
Der Riemannsche Abbildungssatz hat eine reichhaltige und komplizierte Geschichte, siehe [13] und [61]. Der Satz geht zurück auf Riemann's Dissertation [62], "The most astonishing feature in Riemann's paper is the breathtaking generality with which he attacks the problem of conformal mapping. He has no thought of illustrating his methods by simple examples which to lesser mathematicians would have seemed such an excellent preparation and undoubtedly would have helped his paper to

much earlier recognition. On the contrary, Riemann's writings are full of almost cryptic messages to the future. For instance, Riemann's mapping theorem is ultimately formulated in terms which would defy any attempt of proof, even with modern methods.", [2]. Riemann formuliert den Abbildungssatz wie folgt: "Zwei gegebene einfach zusammenhängende ebene Flächen können stets so auf einander bezogen werden, dass jedem Punkte der einen Ein mit ihm stetig fortrückender Punkt der anderen entspricht und ihre entsprechenden kleinsten Theile ähnlich sind."

Riemann's Beweis beruhte auf dem sog. Dirichletsche Prinzip und war zunächst lückenhaft (wie Weierstraß 1870 bemerkte). 1904 zeigte Hilbert [33], dass das Dirichletsche Prinzip in dem für den Abbildungssatz für den Fall eines „glatten" Randes nötigen Umfang gültig ist. Vorher hatte Osgood [52] mit einer anderen Methode den ersten vollständigen Beweis des Abbildungssatzes gegeben. Der obige Beweis basiert auf einer Idee von Féjer und Riesz (siehe Radó 1925, [59]) und einer Modifikation von Ostrowski [54]. Die Konstruktion in Schritt 2 geht auf Koebe [37] zurück.

Die Riemannsche Abbildungsfunktion maximiert $|g'(z_0)|$ für alle *injektiven* holomorphen Funktionen $g : G \to \mathbb{D}$ mit $g(z_0) = 0$. Tatsächlich gilt diese Extremaleigenschaft sogar für die Menge *aller* holomorphen Funktionen von G nach $\mathbb{D}$:

Satz A 17.2 (Extremalproblem I).
Es sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$ und

$$\mathscr{G}(G) := \{g : G \to \mathbb{D} \text{ holomorph } : g(z_0) = 0\}.$$

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $h \in \mathscr{G}(G)$ mit $h'(z_0) = \sup\{|g'(z_0)| : g \in \mathscr{G}(G)\}$ und h bildet G konform auf $\mathbb{D}$.

Es wäre wünschenswert, einen direkten Beweis für die Injektivität der Extremalfunktion zu geben, der ohne Rückgriff auf den Riemannschen Abbildungssatz auskommt.

Bemerkung A 17.3 (Ahlfors' Abbildung, Painlevé Problem).
Die Familie $\mathscr{G}(G)$ aus Satz 17.2 lässt sich für beliebige Gebiete G in $\mathbb{C}$ betrachten.

(a) Der Satz von Liouville besagt, dass $\mathscr{G}(\mathbb{C})$ nur aus der Nullfunktion 0 besteht. Für welche Gebiete $G \subseteq \mathbb{C}$ gilt $\mathscr{G}(G) \neq \{0\}$? Das Painlevé Problem (siehe Painlevé [55], 1888) besteht darin eine geometrische Charakterisierung aller Gebiete G mit $\mathscr{G}(G) \neq \{0\}$ zu geben. Tolsa [68] hat 2003 eine Lösung des Painlevé Problems gegeben.

(b) Falls $\mathscr{G}(G) \neq \{0\}$ so gibt es genau eine holomorphe Funktion $h \in \mathscr{G}(G)$ mit $h'(z_0) = \sup\{|g'(z_0)| : g \in \mathscr{G}(G)\}$, die sog. Ahlfors Abbildung von G.

Der folgende Satz zeigt, dass die Riemannsche Abbildungsfunktion ein weiteres Extremalproblem löst.

Satz A 17.4.
Es sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$ und

$$\mathscr{F} := \{g : G \to \mathbb{D} \text{ holomorph und injektiv mit } g(z_0) = 0\}.$$

Dann gibt es zu jedem $z_1 \in G \backslash \{z_0\}$ ein $F \in \mathscr{F}$ gibt mit

$$|F(z_1)| = \sup\{|g(z_1)| : g \in \mathscr{F}\}$$

und F ist eine konforme Abbildung von G auf $\mathbb{D}$.

Satz 17.4 lässt sich direkt (wie oben mit dem Quadratwurzeltrick von Koebe) und stellt einen "ableitungsfreien" Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes dar (Carathéodory [18]). Dieser Zugang spielt für sog. Riemann–Hilbert Probleme eine wichtige Rolle, siehe [72].

Bemerkung A 17.5 (Bergman Räume).
Es sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhägendes Gebiet, $z_0 \in G$ und

$$\mathscr{R} := \{f \in H(G) \,:\, f(z_0) = 0, f'(z_0) = 1\}\,.$$

Ist $F : G \to \mathbb{D}$ die konforme Abbildung mit $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) > 0$, so minimiert die Funktion $F/F'(z_0) \in \mathscr{R}$ den Flächeninhalt

$$\iint\limits_G |f'(z)|^2 \, dxdy\,. \tag{B}$$

der Bildmengen $f(G)$ der Funktionen in $f \in \mathscr{R}$, siehe Bieberbach [8]. Dies ermöglicht einen weiteren alternativen Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes [43] und stellt darüber hinaus einen direkten Zusammenhang mit der Hilbertraumtheorie da. Die Theorie der Bergman Räume [7] wird u.a. in [32, 23, 38] detailiert dargestellt.

— Übungsaufgaben —

Aufgabe 17.1 (Staatsexamen Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 5)**.**
Entscheiden Sie bei welchen der drei Paare von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ es eine biholomorphe Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt:

(a) $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

(b) $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ und $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$;

(c) $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ und $\mathbb{C}$.

Aufgabe 17.2 (Staatsexamen Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 2)**.**
Es sei $Q := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ der offene zweite Quadrant der komplexen Zahlenebene. Bestimmen Sie mit Begründung alle Abbildungen $f : Q \to \mathbb{C}$, die Q biholomorph auf $\mathbb{D}$ abbilden mit $f(-1+i) = 0$.

Appendix: Grundlagen aus Analysis 1 & 2

In diesem Kapitel sind die wichtigsten Konzepte, Definitionen und Sätze aus den Analysis–Vorlesungen des 1. Studienjahres, die für die Vorlesung *Einführung in die Funktionentheorie* relevant sind, zusammengestellt. Die Inhalte dieses Kapitels sind kanonischer Gegenstand der Vorlesungen Analysis 1 und Analysis 2 und werden dementsprechend als bekannt vorausgesetzt. Die Formulierungen der Begriffe und Aussagen sind bereits an die für die Funktionentheorie relevanten Situationen angepasst, d.h. die Konvergenz von Folgen wird beispielsweise nicht im allgemeinen Setting metrischer Räume, sondern „nur" für den metrischen Raum $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (also dem $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der euklidischen Norm) behandelt. Dies reduziert den Grad der Abstraktheit auf das Nötigste und erlaubt zudem den direkten Bezug zum Anschauungsraum $\mathbb{R}^2$ herzustellen: komplexe Zahlen sind Punkte im $\mathbb{R}^2$; man kann sie sehen.

Komplexe Zahlen

Es sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Wir definieren zwei Verknüpfungen $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &:= (a+c, b+d) \\ (a,b)\cdot(c,d) &:= (ac-bd, bc+ad)\,. \end{aligned}$$

Dann bildet $\mathbb{R}^2$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einen Körper mit der „Null" $0 := (0,0) \in \mathbb{R}^2$ und der „Eins" $1 := (1,0) \in \mathbb{R}^2$.

Insbesondere gilt $(0,1)^2 + 1 = (0,1)\cdot(0,1) + 1 = (-1,0) + (1,0) = (0,0) = 0$. Das Element $i := (0,1) \in \mathbb{R}^2$ hat also die Eigenschaft $i^2 = -1$. Wir nennen i die imaginäre Einheit.

Es gilt $(a,0) + i\,(b,0) = (a,0) + (0,1)(b,0) = (a,b)$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$. Identifiziert man also $(a,0) \in \mathbb{R}^2$ jeweils mit $a \in \mathbb{R}$, so lassen sich die Elemente $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ in der „komplexen" Form $a+ib$ schreiben.

Definition 0.10 (Körper der kompexen Zahlen).
Es sei $\mathbb{C} := \{a+ib \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}$. Wir nennen $(\mathbb{C},+,\cdot)$ mit der Addition

$$(a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(b+d)$$

und der Multiplikation

$$(a+ib)\cdot(c+id) := (ac-bd)+i(bc+ad)$$

den Körper der komplexen Zahlen.

Für eine komplexe Zahl $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ heißt x der Realteil von z und wird mit $\operatorname{Re} z$ abgekürzt; die Zahl y heißt Imaginärteil von z und wird mit $\operatorname{Im} z$ abgekürzt.

Die komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt rein imaginär, wenn $\operatorname{Re} z = 0$. Sie heißt reell, wenn $\operatorname{Im} z = 0$. Wir schreiben dann $z \in \mathbb{R}$.

Für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ heißt $\overline{z} := x-iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ heißt $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ der Betrag der komplexen Zahl.

Bemerkungen.

(a) *Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ lässt sich mit dem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren. Die Addition der beiden komplexen Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ entspricht dann gerade der Vektoraddition von $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ und $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.*

(b) *Identifiziert man $\mathbb{R}$ mit $\{x + i0 : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$, so enthält der Körper der komplexen Zahlen den Körper der reellen Zahlen. Man nennt $\{x + i0 : x \in \mathbb{R}\}$ deshalb auch die reelle Achse. Die Menge $\{iy : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ heißt imaginäre Achse.*

(c) *Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entspricht der euklidischen Länge des Vektors $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Bemerkung 0.11.
Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden.

Lemma 0.12 (Wichtige Rechenregeln für komplexe Zahlen).
Es gelten die Rechenregeln:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *und* $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$ *und* $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(d) *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt:* $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

(e) $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ *für alle* $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(f) *Für* $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *gilt* $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.

(g) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(h) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *und* $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Für eine komplexe Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnet

$$K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius r.

Folgen und Reihen

Definition 0.13 (Grenzwert, Cauchy–Folge).

(a) *Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{C}$ existiert derart, dass*

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geq N} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und nenny a den Limes oder Grenzwert der Folge.

(b) *Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ heißt Cauchy–Folge, falls*

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n,m\geq N} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Satz 0.14 ($\mathbb{C}$ ist vollständig).
Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy–Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert in $\mathbb{C}$.

Korollar 0.15.
Es sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Dann sind folgende Aussagen paarweise äquivalent.

(a) (a_n) *konvergiert in* $\mathbb{C}$.

(b) (a_n) *ist eine Cauchy–Folge.*

(c) Die reellen Folgen $(\mathrm{Re}(a_n))$ *und* $(\mathrm{Im}(a_n))$ *konvergieren in* $\mathbb{R}$.

In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n)$.

Definition 0.16 (Häufungspunkt).
Es sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Ein Punkt $a_* \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n), falls eine Teilfolge (a_{n_k}) der Folge (a_n) existiert, die gegen a_* konvergiert.

Definition 0.17.
Es sei $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, falls die Folge (s_n) der Partialsummen $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert.

Bemerkung 0.18 (Quotienten– und Wurzelkriterium).
Es sei $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Falls $a_k \neq 0$ für fast alle k und $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

(b) Falls $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Stetige Funktionen

Definition 0.19 (Stetigkeit komplexer Funktionen).
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt stetig in $z_0 \in D$, falls eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt.

(a) $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{z\in K_\delta(z_0)\cap D} \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,.$

(b) Für jede Folge $(z_n) \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Bemerkung 0.20.
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$. f ist genau dann stetig in $z_0 \in D$, falls $\mathrm{Re}(f) : D \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(f) : D \to \mathbb{R}$ stetig in z_0 sind.

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Definition 0.21 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen).
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Funktionenfolge (f_n) heißt punktweise konvergent in D (gegen die Grenzfunktion f), falls für jedes $z \in D$ die Folge $(f_n(z))$ gegen $f(z)$ konvergiert, d.h.

$$\forall_{z\in D} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geq N} \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

(b) (f_n) heißt gleichmäßig konvergent in D (gegen die Grenzfunktion f), falls

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geq N} \quad \forall_{z\in D} \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Definition 0.22 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen).
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ heißt punktweise konvergent in D, falls für jedes $z \in D$ die Folge (s_k) der Partialsummen $s_k(z) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(z)$ punktweise konvergiert.

(b) Die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ heißt gleichmäßig konvergent in D, falls die Folge (s_k) der Partialsummen $s_k(z) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(z)$ gleichmäßig konvergiert.

Satz 0.23 (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit der Grenzfunktion).
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ sei stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(a) Konvergiert (f_n) gleichmäßig in D gegen $f : D \to \mathbb{C}$, so ist f stetig in D.

(b) Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig in D, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ stetig auf D.

Satz 0.24 (Majorantenkriterium).
Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$, derart, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert. Falls $|f_n(z)| \leq c_n$ für alle $z \in D$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig in D.

Definition 0.25 (Potenzreihen).
Es sei $a_k \in \mathbb{C}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0. Die Zahl

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, +\infty]$$

wird Konvergenzradius der Potenzreihe genannt. Falls $R > 0$, so heißt die offene Kreisscheibe $K_R(z_0)$ die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe

Satz 0.26.
Eine Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiert in jeder kompakten Menge $K \subseteq K_R(z_0)$ ihrer Konvergenzkreisscheibe $K_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig und stellt daher eine in $K_R(z_0)$ stetige Funktion dar. Sie divergiert in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$.

Man beachte, dass die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ nicht ausgeschlossen sind. Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe auf dem Rand ihrer Konvergenzkreisscheibe ist subtil und es kann keine allgemeine Aussage in Analogie zu Satz 0.26 gemacht werden: es findet eine Art „Phasenübergang“ statt, und wie bei anderen Phasenübergängen in der Physik, ist auch dieser Phasenübergang in besonderem Maße facetten– und anwendungsreich, insbesondere auf konkreten Probleme der harmonischen Analysis, Funktionalanalysis und Mathematischen Physik, und wird in den Mastervorlesungen zur Funktionentheorie besprochen.

Die wichtigste Potenzreihe (und Reihe überhaupt) in der Mathematik ist die geometrische Reihe. Aus ihren Konvergenz– und Divergenzeigenschaften ergeben sich u.a. das Wurzel– und Quotientenkriterium.

Beispiel 0.27.
Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

hat (für den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$) den Konvergenzradius 1. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad \text{für alle } |z| < 1\,.$$

Tatsächlich ist die geometrische Reihe die „Mutter“ *aller* Potenzreihen. Sie ist in gewissem Sinn die einzige Potenzreihe, die man verstehen muss. Wie genau dies gemeint ist, werden wir im Laufe der Vorlesung kennenlernen.

Beispiele 0.28 (Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus im Komplexen)**.**
Die folgenden Potenzreihen haben $\mathbb{C}$ als Konvergenzkreisscheibe und definieren daher auf ganz $\mathbb{C}$ stetige Funk-

tionen

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{(2k+1)}$$

$$\cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} z^{(2k)} .$$

Die Exponentialfunktion im Komplexen und Polarkoordinaten

Satz 0.29.
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

(b) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.

(c) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ *und* $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$.

(d) *Für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(t) > 0$ *und* $|\exp(it)| = 1$.

(e) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$. *Inbesondere gilt* $\exp(it) = \cos t + i \sin t$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

(f) *Es gilt* $\exp(i\pi/2) = i$. *Dies impliziert* $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(g) $\exp(z) = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2\pi i k$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung
Anstelle von $\exp(z)$ schreibt man auch kurz e^z.

Korollar 0.30 (Polarkoordinaten).
Jede komplexe Zahl z lässt sich schreiben als

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z|$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Die Zahl φ ist ein Maß für den Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von $z = x + iy$. Man nennt φ Argument der komplexen Zahl $z \neq 0$. Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen lässt sich mit Polarkoordinaten visualisieren. Sind $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, so gilt $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. Man multipliziert also die Beträge und addiert die Argumente.

Beweis von Korollar 0.30
Für $z = 0$ ist $z = 0 \cdot e^{i\varphi}$ für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$. Für $z \neq 0$ setzen wir $\eta := z/|z|$. Dann ist $|\eta| = 1$ und für $a =: \mathrm{Re}\,\eta$ und $b := \mathrm{Im}\,\eta$ gilt $a^2 + b^2 = 1$. Speziell ist $a \in [-1, 1]$. Die Funktion $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend mit $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$. Es gibt also (genau) ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos \alpha = a$. Es gilt dann $\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - a^2} = \pm b$. Wir setzen $\varphi := \alpha$, falls $\sin \alpha = b$ und $\varphi := -\alpha$, falls $\sin \alpha = -b$. Es gilt dann $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = a + ib = \eta = z/|z|$, d.h. $z = |z|e^{i\varphi}$. Ist $z = |z|e^{i\psi}$ für ein $\psi \in \mathbb{R}$, so ist $e^{i(\varphi - \psi)} = 1$, also $\varphi = \psi + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Differentation und Integration

Definition 0.31 (Ableitung komplexwertiger Funktionen).
Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt in $t_0 \in (a,b)$ differenzierbar, falls die reellwertigen Funktionen $\mathrm{Re}(f) : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(f) : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind. Man definiert

$$\begin{aligned} f'(t_0) &:= \lim_{t\to t_0} \frac{\mathrm{Re}(f(t)) - \mathrm{Re}(f(t_0))}{t - t_0} + i \lim_{t\to t_0} \frac{\mathrm{Im}(f(t)) - \mathrm{Im}(f(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \end{aligned}$$

Man mache sich klar, dass für eine differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} (\mathrm{Re}\, f)'(t) &= \mathrm{Re}(f')(t) \quad \text{für alle } t \in (a,b)\,, \\ (\mathrm{Im}\, f)'(t) &= \mathrm{Im}(f')(t) \quad \text{für alle } t \in (a,b)\,. \end{aligned}$$

Definition 0.32 (Riemann Integral komplexwertiger Funktionen).
Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt integrierbar auf $[a,b]$ falls die reellwertigen Funktionen $\mathrm{Re}(f) : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(f) : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Man definiert

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt\,.$$

Beachte, dass für eine integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt\,.$$

Satz 0.33 (Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung).
Es seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)\,.$$

Satz 0.34 (Substitutionsregel).
Es seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Es seien $f : [c,d] \to \mathbb{C}$ stetig und $g : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(\tau)\,d\tau\,.$$

Satz 0.35 (Partielle Integration).
Es seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt = g(b)\,f(b) - g(a)\,f(a) - \int_a^b g'(t)\,f(t)\,dt\,.$$

Satz 0.36 (Gleichmäßige Konvergenz und Integrierbarkeit).
Es seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, stetig.

(a) *Falls die Folge (f_n) gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt\,.$$

(b) *Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergiert, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt\,.$$

Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

Definition 0.37 (Offene und abgeschlosssene Mengen komplexer Zahlen).
Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt offen (oder offen in $\mathbb{C}$), wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine Kreisscheibe $K_r(z_0)$ existiert, derart, dass $K_r(z_0) \subseteq U$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \backslash A$ offen ist.

Bemerkung 0.38 (Vereinigung/Durchschnitt offener/abgeschlossener Mengen).
Es sei J eine Indexmenge. Dann gilt:

(a) *Ist $U_j \subseteq \mathbb{C}$ für jedes $j \in J$ offen, so ist $\bigcup_{j\in J} U_j$ offen.*

(b) *Ist $A_j \subseteq \mathbb{C}$ für jedes $j \in J$ abgeschlossen, so ist $\bigcap_{j\in J} A_j$ abgeschlossen.*

Definition 0.39 (Inneres, Abschluss, Rand einer Menge komplexer Zahlen).
Es sei $B \subseteq \mathbb{C}$. Dann heißt

$\overset{\circ}{B} := \{z \in B :$ *es existiert eine Kreisscheibe* $K_r(z) \subseteq B\}$ *das Innere von* B,

$\overline{B} := \{z \in \mathbb{C} :$ *in jeder Kreisscheibe* $K_r(z)$ *liegt ein Punkt* $z_* \in B\}$ *der Abschluss von* B.

$\partial B := \{z \in \mathbb{C} :$ *in jeder Kreisscheibe* $K_r(z)$ *liegt ein Punkt* $z_* \in B$ *und ein Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}\backslash B\}$ *der Rand von* B.

Beachte, $\overset{\circ}{B}$ ist offen, $\overline{B}$ ist abgeschlossen und $\partial B = \overline{B} \backslash \overset{\circ}{B}$.

Definition 0.40 (Relativ offene bzw. abgeschlossene Mengen).
Es sei $T \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Eine Teilmenge $U \subseteq T$ heißt offen in T, *falls eine offene Menge $\tilde{U}$ in $\mathbb{C}$ mit $U = \tilde{U} \cap T$ existiert.*

(b) Eine Teilmenge $A \subseteq T$ heißt abgeschlossen in T, *falls eine abgeschlossene Menge $\tilde{A}$ in $\mathbb{C}$ mit $A = \tilde{A} \cap T$ existiert.*

Bemerkung 0.41.
Es sei $T \subseteq \mathbb{C}$ und $A \subseteq T$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist abgeschlossen in T.

(b) $T \backslash A$ ist offen in T.

Bemerkung 0.42.
Es sei $T \subseteq \mathbb{C}$ offen *und $U \subseteq T$. Dann sind äquivalent:*

(a) U ist offen in T.

(b) U ist offen in $\mathbb{C}$.

Bemerkung 0.43.
Es sei $T \subseteq \mathbb{C}$ offen *und $A \subseteq T$. Dann sind äquivalent:*

(a) A ist abgeschlossen in T.

(b) Jeder Häufungspunkt von A in T liegt bereits in A, d.h.

$$\text{Ist } (z_n) \text{ eine Folge in } A \text{ mit } \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \text{ und } z_0 \in T, \text{ so folgt } z_0 \in A.$$

Beweis.
(a) ⇒ (b): Beachte, da T offen ist und A abgeschlossen in T, ist $T \backslash A$ offen (in $\mathbb{C}$), siehe Bemerkung 0.41 und Bemerkung 0.42.

Es sei $(z_n) \subseteq A$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $z_0 \in T$. Annahme: $z_0 \notin A \Longrightarrow z_0 \in T \backslash A$. Da $T \backslash A$ offen in $\mathbb{C}$ ist, existiert $K_r(z_0) \subseteq T \backslash A$.

(b) ⇒ (a): Definiere $\tilde{A} = \overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{C}$). Dann ist $\tilde{A} \cap T = (A \cap T) \cup (\partial A \cap T)$. Es sei $z_0 \in (\partial A \cap T)$. Da $z_0 \in \partial A$, existiert $(z_n) \subseteq A$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Da $z_0 \in T$ folgt $z_0 \in A$. Somit ist $A = (\tilde{A} \cap T)$. ■

Satz 0.44 (Stetigkeit und offene bzw. abgeschlossene Mengen).
Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(a) $f : X \to Y$ ist stetig.

(b) Ist U offen in Y, so ist $f^{-1}(U)$ offen in X.

(c) Ist A abgeschlossen in Y, so ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.

Beweis.
(a) ⇒ (b) Es sei $V \subseteq Y$ offen in Y, $U := f^{-1}(V)$ und $z \in U$. Dann ist $w = f(z) \in V$. Da V offen in Y

ist, existiert ein $\tilde{V}$ offen (in $\mathbb{C}$) mit $V = \tilde{V} \cap Y$. Wähle $K_\varepsilon(w) \subseteq \tilde{V}$. Da f stetig ist, existiert ein $\delta_z > 0$ mit $f(K_{\delta_z}(z) \cap X) \subseteq K_\varepsilon(w) \cap Y \subseteq V$. Es folgt $K_{\delta_z}(z) \cap X \subseteq f^{-1}(V) = U$. Da

$$U = \bigcup_{z \in U} (K_{\delta_z}(z) \cap X) = \left(\bigcup_{z \in U} K_{\delta_z}(z) \right) \bigcap X \,,$$

ist U offen in X.

(b) $\Rightarrow$ (a) Es sei $z \in X$. Wähle $\varepsilon > 0$ und setze $V := K_\varepsilon(f(z)) \cap Y$. Dann ist V offen in Y. Nach Voraussetzung ist $U := f^{-1}(V)$ offen in X, also existiert $\tilde{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $U = \tilde{U} \cap X$. Wähle $\delta > 0$, derart, dass $K_\delta(z) \subseteq \tilde{U}$. Dann folgt

$$f(K_\delta(z) \cap X) \subseteq f(U) \subseteq V \,.$$

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Es sei T abgeschlossen (offen) in Y. Dann ist $Y \setminus T$ offen (abgeschlossen) in Y. Also ist $f^{-1}(Y \setminus T) = X \setminus f^{-1}(T)$ offen (abgeschlossen) in X. Somit folgt $f^{-1}(T)$ abgeschlossen (offen) in X. ■

Definition 0.45 (Beschränkte Mengen komplexer Zahlen).
Eine Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt beschränkt, falls ein $R > 0$ existiert, derart, dass $X \subseteq K_R(0)$.

Definition 0.46 (Kompakte Mengen komplexer Zahlen).
Eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 0.47 (Bolzano–Weierstraß im Komplexen).
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine in $\mathbb{C}$ konvergente Teilfolge.

Satz 0.48.
Es sei $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ eine Folge nichtleerer kompakter Mengen in $\mathbb{C}$. Dann ist

$$K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

kompakt und nichtleer.

Beweis. K ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Wähle $z_n \in K_n$. Dann ist $(z_n) \subseteq K_1$ und besitzt daher einen Häufungspunkt $z_0 \in K_1$. Wir behaupten $z_0 \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Annahme: Es existiert ein n_0 mit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K_{n_0}$. Da $\mathbb{C} \setminus K_{n_0}$ offen ist, existiert $K_r(z_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus K_{n_0}$. Da $z_n \in K_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$, kann z_0 kein Häufungspunkt von (z_n) sein. ■

Satz 0.49 (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt).
Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(K)$ eine kompakte Menge in $\mathbb{C}$.

Satz 0.50 (Satz vom Maximum und Minimum).
Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Maximum und Minimum in K an.

Literaturverzeichnis

[1] Jim Agler, John Edward McCarthy, and Nicholas John Young. *Operator Analysis: Hilbert Space Methods in Complex Analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, April 2020.

[2] Lars V. Ahlfors. Development of the theory of conformal mapping and Riemann surfaces through a century. *Ann. Math. Stud.*, 30:3–13, 1953.

[3] Lars V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2nd enlarged and revised ed. edition, 2006.

[4] Kari Astala, Tadeusz Iwaniec, and Gaven Martin. *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.

[5] Farit G. Avkhadiev and Karl-Joachim Wirths. *Schwarz-Pick type inequalities.* Basel: Birkhäuser, 2009.

[6] A.F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. 3Island Press, 1983.

[7] Stefan Bergman. The kernel function and conformal mapping. Mathematical Surveys. 5. New York: American Mathematical Society (AMS). vii, 161 pp. $ 4.00 (1950)., 1950.

[8] L. Bieberbach. Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 38:98–112, 1914.

[9] D.E. Blair. *Inversion Theory and Conformal Mapping*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2000.

[10] H. P. Boas. Cauchy's residue sore thumb. *Am. Math. Mon.*, 125(1):16–28, 2018.

[11] Harold P. Boas. Julius and Julia: mastering the art of the Schwarz Lemma. *Am. Math. Mon.*, 117(9):770–785, 2010.

[12] Harald Bohr. A theorem concerning power series. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 13:1–5, 1914.

[13] Umberto Bottazzini and Jeremy Gray. *Hidden harmony – geometric fantasies. The rise of complex function theory.* New York, NY: Springer, 2013.

[14] Jean Bourgain and Gady Kozma. One cannot hear the winding number. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 9(4):637–658, 2007.

[15] Robert B. Burckel. *Classical Analysis in the Complex Plane*. Springer US, 2021.

[16] C. Carathéodory. Sur quelques applications du théorème de Landau-Picard. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 144:1203–1206, 1907.

[17] C. Carathéodory. Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. *Math. Ann.*, 72:107–144, 1912.

[18] C. Carathéodory. Bemerkungen zu den Existenztheoremen der konformen Abbildung. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 20:125–134, 1930.

[19] Constantin Carathéodory. The most general transformations of plane regions which transform circles into circles. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 43(8):573–579, 08 1937.

[20] Constantin Carathéodory. Gesammelte mathematische Schriften. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung. I: XII, 426 S. (1954); II: XI, 456 S. (1955); III: IX, 464 S. (1955); IV: IX, 494 S. (1956); V: XV, 447 S. (1957)., 1957.

[21] Seán Dineen. *The Schwarz lemma.* Oxford: Clarendon Press, 1989.

[22] J.D. Dixon. A brief proof of Cauchy's integral theorem. *Proc. Am. Math. Soc.*, 29:625–626, 1971.

[23] Peter Duren and Alexander Schuster. *Bergman spaces.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2004.

[24] L. Fejér and F. Riesz. Über einige funktionentheoretische Ungleichungen. *Math. Z.*, 11:305–314, 1921.

[25] Emmanuel Fricain and Javad Mashreghi. *The theory of $\mathscr{H}(b)$ spaces. Vol. 1*, volume 20 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[26] Emmanuel Fricain and Javad Mashreghi. *The theory of $\mathscr{H}(b)$ spaces. Vol. 2*, volume 21 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[27] Ferdinand Georg Frobenius. *Gesammelte Abhandlungen. Bände I, II, III.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968. Herausgegeben von J.-P. Serre.

[28] Stephan Ramon Garcia, Javad Mashreghi, and William T. Ross. *Introduction to model spaces and their operators*, volume 148 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[29] Andrew M. Gleason. A characterization of maximal ideals. *J. Anal. Math.*, 19:171–172, 1967.

[30] G.H. Hardy. *A mathematician's apology. With a foreword by C. P. Snow.* Cambridge, UK etc.: Cambridge University Press, 1992.

[31] Fritz Hartogs. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. *Mathematische Annalen*, 62(1):1–88, 1906.

[32] Haakan Hedenmalm, Boris Korenblum, and Kehe Zhu. *Theory of Bergman spaces.* New York, NY: Springer, 2000.

[33] D. Hilbert. Über das Dirichletsche Prinzip. *Math. Ann.*, 59:161–186, 1904.

[34] T. Iwaniec and G. Martin. *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis*. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 2001.

[35] Gareth A. Jones and Jürgen Wolfart. *Dessins d'enfants on Riemann surfaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2016.

[36] J.P. Kahane and W. Zelazko. A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras. *Stud. Math.*, 29:339–343, 1968.

[37] P. Koebe. Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. *J. Reine Angew. Math.*, 145:177–225, 1915.

[38] Steven G. Krantz. *Geometric function theory. Explorations in complex analysis.* Boston, MA: Birkhäuser, 2006.

[39] Leopold Kronecker. *Vorlesungen über Mathematik: Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale*, volume 1. BG Teubner, 1894.

[40] Peter D. Lax. *Functional analysis.* Wiley, 2002.

[41] Peter D. Lax and Lawrence Zalcman. *Complex proofs of real theorems.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2012.

[42] O. Lehto and K.I. Virtanen. *Quasikonforme Abbildungen.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1965.

[43] Olli Lehto. Anwendung orthogonaler Systeme auf gewisse funktionentheoretische Extremal- und Abbildungsprobleme. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I*, 59:51, 1949.

[44] E. Lindelöf. Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. *Acta Soc. Sc. Fennicae*, 35(7), 1909.

[45] Donald E. Marshall. *Complex analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

[46] P. Montel. Sur les suites infinies de fonctions. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3)*, 24:233–334, 1907.

[47] Raghavan Narasimhan and Yves Nievergelt. *Complex analysis in one variable. 2nd ed.* Boston, MA: Birkhäuser, 2nd ed. edition, 2001.

[48] I. Newton and W. Whiston. *Arithmetica universalis*.

[49] Nikolai K. Nikolski. *Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1*, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by Andreas Hartmann.

[50] Nikolai K. Nikolski. *Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 2*, volume 93 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Model operators and systems, Translated from the French by Andreas Hartmann and revised by the author.

[51] N. K. Nikol'skij. *Treatise on the shift operator. Spectral function theory.*, volume 273. Springer, Berlin, 1986.

[52] W. F. Osgood. On the existence of the Green's function for the most general simply connected plane region. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1:310–314, 1900.

[53] Robert Osserman. A sharp Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Am. Math. Soc.*, 128(12):3513–3517, 2000.

[54] A. Ostrowski. Mathematische Miszellen. XV: Zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 38:168–182, 1929.

[55] P. Painlevé. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. *Toulouse Ann.*, 2:b1–b130, 1888.

[56] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1987.

[57] H. Poincaré. Mémoire sur les groupes kleinéens. *Acta Math.*, 3:49–92, 1883.

[58] George Pólya and Gábor Szegö. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. 2. Bände*. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1964.

[59] T. Radó. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 2:101–121, 1925.

[60] Reinhold Remmert and Georg Schumacher. *Funktionentheorie 1.* Berlin: Springer, 2002.

[61] Reinhold Remmert and Georg Schumacher. *Funktionentheorie. 2.* Berlin: Springer, 3rd new revised ed. edition, 2007.

[62] B. Riemann. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen komplexen Grösse*. PhD thesis, Inaugural Dissertation, Göttingen, 1851. Available online at http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Grund/.

[63] L.A. Rubel. A complex-variables proof of Hölder's inequality. *Proc. Am. Math. Soc.*, 15:999, 1964.

[64] Stanisław Saks and Antoni Zygmund. Analytic functions. (Monografie Matematyczne. Tom XXVIII). Warszawa-Wrocław: Polskie Towarzystwo Matematyczne 451 p. (1952)., 1952.

[65] H. A. Schwarz. Gesammelte mathematische Abhandlungen. 2 Bände. Berlin. Springer. Bd. I. XI u. 338 S., Bd. II. VII u. 370 S. gr 8° (1890)., 1890.

[66] W.T. Shaw. *Complex Analysis with MATHEMATICA®*. Complex Analysis with Mathematica. Cambridge University Press, 2006.

[67] W.P. Thurston and S. Levy. *Three-dimensional Geometry and Topology*. Number Bd. 1 in Luis A.Caffarelli. Princeton University Press, 1997.

[68] Xavier Tolsa. Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity. *Acta Math.*, 190(1):105–149, 2003.

[69] Helmut Unkelbach. Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung. *Math. Z.*, 43:739–742, 1938.

[70] K. Vladimir. *Geometry Of Möbius Transformations: Elliptic, Parabolic And Hyperbolic Actions Of Sl2(r) (With Dvd-rom)*. World Scientific Publishing Company, 2012.

[71] J. von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. *Math. Ann.*, 102:49–131, 1929.

[72] Elias Wegert. *Nonlinear boundary value problems for holomorphic functions and singular integral equations.* Berlin: Akademie Verlag, 1992.

[73] Hermann Weyl. *Einführung in die Funktionentheorie*. Springer-Verlag, 2008.

[74] Lawrence Zalcman. Analyticity and the Pompeiu problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 47:237–254, 1972.

[75] Lawrence Zalcman. Real proofs of complex theorems (and vice versa). *Am. Math. Mon.*, 81:115–137, 1974.

Index