Kapitel 1

Maßtheorie

1.1 Messbare Räume

Im Folgenden sei X stets eine nichtleere Menge.

Definition 1.1. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt $\mathcal{A}$ σ-Algebra über X, falls gilt:*

(1) $X \in \mathcal{A}$,

(2) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathcal{A}$,

(3) $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Dann heißt $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$.

Hierbei ist A^c das Komplement von A in X, also $A^c = X \setminus A$, und $\mathcal{P}(X)$ ist die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X.

Satz 1.2. *Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X, dann gilt*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(2) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A},\ A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$,

(3) $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Beweis. Es ist $X \in \mathcal{A}$, also auch $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$. Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, dann sind auch

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c$$

und damit

$$A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap (A_1^c)$$

Elemente von $\mathcal{A}$. Die dritte Behauptung folgt aus

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \right)^c .$$

□

Beispiel 1.3. *$\{\emptyset, X\}$ und $\mathcal{P}(X)$ sind σ-Algebren.*

Beispiel 1.4. *Seien X, Y nichtleer, $f : X \to Y$ und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Algebren über X und Y. Dann sind auch*

- *$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ (Urbild σ-Algebra),*
- *$f_*(\mathcal{A}) := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ (direktes Bild)*

σ-Algebren. Dies lässt sich elementar mit den Eigenschaften des Urbildes beweisen. Achtung: die Menge

$$\{f(A) : \ A \in \mathcal{A}\}$$

ist im Allgemeinen keine σ-Algebra.

Wir wollen nun zu einer gegebenen Menge $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ-Algebra konstruieren, die S enthält. Dazu benötigen wir das folgende Resultat.

Lemma 1.5. *Sei I nichtleer, und seien $\mathcal{A}_i$ σ-Algebren über X für jedes $i \in I$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra über X.*

Beweis. Setze $\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Dann folgt direkt $X \in \mathcal{A}$. Ist $A \in \mathcal{A}$, dann ist $A \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, damit ist $A^c \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, also auch $A^c \in \mathcal{A}$. Seien nun Mengen $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist $A_j \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Damit folgt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, also auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Und $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra. □

Satz 1.6. *Sei $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist*

$$\mathcal{A}_\sigma(S) := \bigcap \Big\{ \mathcal{A} : \ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{A} \supseteq S \Big\}$$

eine σ-Algebra. Weiter ist $\mathcal{A}_\sigma(S)$ die kleinste σ-Algebra, die S enthält: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die S enthält, dann folgt $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_\sigma(S)$.

$\mathcal{A}_\sigma(S)$ heißt die von S erzeugte σ-Algebra.

Beweis. Da $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist, wird in der Konstruktion von $\mathcal{A}_\sigma(S)$ der Durchschnitt über mindestens eine σ-Algebra gebildet. Wegen Lemma 1.5 folgt, dass $\mathcal{A}_\sigma(S)$ eine σ-Algebra ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die S enthält, dann nimmt $\mathcal{A}$ an dem Durchschnitt teil, und es folgt $\mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}$. □

Beispiel 1.7. *Sei* $A \subseteq X$ *und* $S = \{A\}$, *dann ist* $\mathcal{A}_\sigma(S) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

Bemerkung 1.8. *Die Abbildung* $S \mapsto \mathcal{A}_\sigma(S)$ *hat die folgenden Eigenschaften, die einen Hüllenoperator charakterisieren:*

(1) $S \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S)$ *für alle* $S \subseteq \mathcal{P}(X)$,

(2) aus $S \subseteq T \subseteq \mathcal{P}(X)$ *folgt* $\mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(T)$,

(3) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_\sigma(S)) = \mathcal{A}_\sigma(S)$ *für alle* $S \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Analoge Eigenschaften haben auch die Abbildungen $S \mapsto \operatorname{span}(S)$, $S \mapsto \operatorname{cl}(S)$ *(Abschluss).*

Die Konstruktion von $\mathcal{A}_\sigma$ *folgt einem allgemeinen Konstruktionsprinzip: es wird der Durchschnitt über alle Mengen gebildet, die eine gewünschte Eigenschaft haben, und die die gegebene Menge enthalten. Auf analoge Art und Weise kann man den Abschluss, die konvexe Hülle, lineare Hülle, etc, konstruieren.*

Beispiel 1.9. *Sei* $S = \{\{x\} :\ x \in X\}$ *die Menge der einelementigen Teilmengen von* X. *Dann ist*

$$\mathcal{A}_\sigma(S) = \{A \subseteq X :\ A \text{ oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

Definition 1.10. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $\mathcal{T}$ *die Menge aller offenen Teilmengen von* X. *Dann heißt*

$$\mathcal{B}(X) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T})$$

Borel σ*-Algebra auf* X, $B \in \mathcal{B}(X)$ *heißt Borelmenge.*

Weiter führen wir noch folgende Abkürzung ein:

$$\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\mathbb{R}^n$ *mit der Euklidischen Norm versehen ist.*

Satz 1.11. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $\mathcal{C}$ *die Menge aller abgeschlossenen Mengen. Dann ist* $\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C})$.
Sei $\mathcal{K}$ *die Menge der kompakten Mengen. Existiert eine Folge* (K_j) *kompakter Mengen mit* $X = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$, *dann gilt* $\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K})$.

Beweis. Eine Menge ist offen genau dann, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist. Daraus folgt dann auch die erste Behauptung. Da $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ folgt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(X)$. Sei $C \in \mathcal{C}$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist

$$C = C \cap X = C \cap \bigcup_{j=1}^\infty K_j = \bigcup_{j=1}^\infty (C \cap K_j).$$

Weiter ist $C \cap K_j \in \mathcal{K}$ und damit auch $C = \bigcup_{j=1}^{\infty}(C \cap K_j) \in A_\sigma(\mathcal{K})$. Also ist $\mathcal{C} \subseteq A_\sigma(\mathcal{K})$, und daraus folgt $A_\sigma(\mathcal{C}) \subseteq A_\sigma(A_\sigma(\mathcal{K}))$. Im Beweis haben wir die Eigenschaften aus Bemerkung 1.8 benutzt. □

Für die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ können wir ein einfaches Erzeugendensystem angeben.

Definition 1.12. *Für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Relation*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \leq b_i \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Analog definieren wir $\geq, <, >$ für Vektoren. Für $a \leq b$ ist ein offener Quader definiert durch

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a < x < b\} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) =: \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$$

Analog werden halboffene Quader $(a, b], [a, b)$ und abgeschlossene Quader $[a, b]$ definiert. Falls $a \leq b$ nicht gilt, dann definiere $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b] := \emptyset$.

Einen Quader (a, b) nennen wir Würfel, wenn alle Seiten gleich lang sind, also $|b_i - a_i| = |b_j - a_j|$ für alle $i, j = 1 \ldots n$ ist.

Bemerkung 1.13. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Durchmesser von $A \subseteq X$ ist definiert als*

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : \ x, y \in A\}.$$

Für den Quader $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ (versehen mit der Euklidischen Metrik) ist der Durchmesser gleich der Länge der Diagonalen $b - a$:

$$\operatorname{diam}((a, b)) = \|b - a\|_2.$$

Es ist leicht zu sehen, dass jede offene Menge des $\mathbb{R}^n$ eine Vereinigung solcher Quader ist. Wir beweisen nun die folgende stärkere Aussage.

Satz 1.14. *Jede offene Menge des $\mathbb{R}^n$ ist eine disjunkte abzählbare Vereinigung von halboffenen Würfeln mit rationalen Eckpunkten.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$M_k := \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{i=1}^{n} [\frac{x_i}{2^k}, \frac{x_i + 1}{2^k}) \right). \tag{1.15}$$

Dann ist M_k eine abzählbare Menge disjunkter Würfel der Kantenlänge 2^{-k}.

Sei nun O eine offene Menge. Dann definieren wir induktiv

$$W_1 := \{M \in M_1 :\ M \subseteq O\}$$

und für $k \in \mathbb{N}$

$$W_{k+1} := \{M \in M_{k+1} :\ M \subseteq O,\ M \not\subseteq M'\ \forall M' \in W_{k'},\ k' \leq k\}.$$

Wir setzen

$$U := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{M \in W_k} M.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $O = U$ ist. Per Konstruktion gilt $U \subseteq O$. Weiter ist U die gewünschte abzählbare Vereinigung disjunkter Würfel.

Sei nun $x \in O$. Dann existiert ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subseteq O$. Wir zeigen nun, dass die offene Kugel $B_\rho(x)$ einen Würfel aus W_k für hinreichend großes k enthält. Die Würfel aus M_k haben einen Durchmesser von $2^{-k}\sqrt{n}$. Sei nun k so, dass $2^{-k}\sqrt{n} < \rho$. Es ist $\bigcup_{M \in M_k} M = \mathbb{R}^n$, damit existiert ein $W \in M_k$ mit $x \in W$. Wegen der Wahl von k ist $W \subseteq B_\rho(x) \subseteq O$.

Ist $W \in W_k$, folgt $x \in U$. Gilt $W \notin W_k$, ist W Teilmenge eines Würfels aus $W_{k'}$ mit $k' < k$. Dies folgt aus der induktiven Konstruktion der W_k. Wieder ist dann $x \in U$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Damit können wir beweisen, dass die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ durch offene (halboffene, abgeschlossene) Quader erzeugt werden kann.

Satz 1.16. *Es seien*

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}(n) &:= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n\},\\
\mathbb{J}_r(n) &:= \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n\},\\
\mathbb{J}_l(n) &:= \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\},\\
\bar{\mathbb{J}}(n) &:= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}.
\end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{B}^n = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J})$ *für alle* $\mathbb{J} \in \{\mathbb{J}(n), \mathbb{J}_r(n), \mathbb{J}_l(n), \bar{\mathbb{J}}(n)\}$.

Beweis. Die Quader (a, b) und $[a, b]$ sind offen beziehungsweise abgeschlossen, damit folgt $\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)) \subseteq \mathcal{B}^n$ per Definition und $\mathcal{A}_\sigma(\bar{\mathbb{J}}(n)) \subseteq \mathcal{B}^n$ aus Satz 1.11.

Ist $a \leq b$ dann ist

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}e, b + \frac{1}{n}e) \in \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)),$$

wobei $e = (1, \ldots, 1)^T$. Damit folgt $\mathcal{A}_\sigma(\bar{\mathbb{J}}(n)) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n))$. Analoge Konstruktionen können für alle Typen von Quadern gemacht werden, und es folgt

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_r(n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_l(n)) = \mathcal{A}_\sigma(\bar{\mathbb{J}}(n)) \subseteq \mathcal{B}^n.$$

Ist $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann folgt $O \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_r(n))$ aus Satz 1.14. Dies impliziert $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_r(n))$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume. Wie erzeugt man eine σ-Algebra auf $X_1 \times X_2$ mithilfe von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$? Im Allgemeinen ist

$$\mathcal{A}_1 \boxtimes \mathcal{A}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

keine σ-Algebra. Wir benutzen stattdessen die Produkt-σ-Algebra, welche definiert ist durch

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_1 \boxtimes \mathcal{A}_2). \tag{1.17}$$

Wir zeigen nun, dass Produkt- und σ-Algebra-Bildung in gewissem Sinne kommutieren.

Lemma 1.18. *Seien X_1, X_2 nichtleer, $S_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ für $i = 1, 2$. Dann gilt*

$$\mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S_1) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S_2).$$

Angenommen es existieren Folgen $(A_{1,j})$ und $(A_{2,j})$ mit $A_{i,j} \in S_i$ für alle $i = 1, 2$ und $j \in \mathbb{N}$, so dass $X_i = \bigcup_{j=1}^\infty A_{i,j}$ für alle $i = 1, 2$. Dann gilt

$$\mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2) = \mathcal{A}_\sigma(S_1) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S_2).$$

Beweis. "$\subseteq$": Sei $A \in S_1 \boxtimes S_2$, dann ist $A = A_1 \times A_2$ mit $A_i \in S_i$, $i = 1, 2$. Damit folgt $A_i \in \mathcal{A}_\sigma(S_i)$, $i = 1, 2$, und $A \in \mathcal{A}_\sigma(S_1) \boxtimes \mathcal{A}_\sigma(S_2) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S_1) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S_2)$. Und es gilt $\mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S_1) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S_2)$.

"$\supseteq$": **[Komplett überarbeitet]** Sei $A_1 \in S_1$, dann folgt aus der Voraussetzung für den zweiten Teil der Behauptung

$$A_1 \times X_2 = A_1 \times \left(\bigcup_{j=1}^\infty A_{2,j} \right) = \bigcup_{j=1}^\infty \underbrace{(A_1 \times A_{2,j})}_{\in S_1 \boxtimes S_2} \in \mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2).$$

Wir zeigen nun, dass die Menge

$$\mathcal{B}_1 = \{A_1 \subseteq X_1 : \; A_1 \times X_2 \in \mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2)\}$$

eine σ-Algebra ist. Definiere dazu die Projektionen

$$p_i : X_1 \times X_2 \to X_i,\ p_i(x_1, x_2) = x_i,\ i = 1, 2.$$

Dann ist $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$ und es gilt

$$\mathcal{B}_1 = (p_1)_*(\mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2)),$$

was wegen Beispiel 1.4 eine σ-Algebra ist. Wir haben schon gezeigt, dass $S_1 \subseteq \mathcal{B}_1$. Dann folgt direkt $\mathcal{A}_\sigma(S_1) \subseteq \mathcal{B}_1$. Analog beweist man die Inklusion

$$\mathcal{A}_\sigma(S_2) \subseteq \mathcal{B}_2 := \{A_2 \in X_2 :\ X_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2)\}.$$

Sei nun $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_\sigma(S_1) \boxtimes \mathcal{A}_\sigma(S_2)$. Dann ist $A_1 \in \mathcal{B}_1$ und $A_2 \in \mathcal{B}_2$, und es folgt

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) \in \mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2),$$

was die zweite Inklusion beweist. □

Satz 1.19. *Es gilt $\mathcal{B}^{m+n} = \mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n$.*

Beweis. Jeder Quader aus $\mathbb{J}(m + n)$ ist das Produkt zweier Quader aus $\mathbb{J}(m)$ und $\mathbb{J}(n)$, so dass $\mathbb{J}(m + n) = \mathbb{J}(m) \boxtimes \mathbb{J}(n)$ gilt. Weiter ist $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(-j, j)^n$. Mit dem obigen Hilfsresultat Lemma 1.18 und Satz 1.16 folgt

$$\mathcal{B}^{m+n} = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(m+n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(m) \boxtimes \mathbb{J}(n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(m)) \otimes \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)) = \mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n.$$

□

Bemerkung. *Ohne die Bedingung, dass X_i abzählbare Vereinigung von Elementen aus S_i ist, gilt Gleichheit in Lemma 1.18 im Allgemeinen nicht: Sei $S := \{\{x\} :\ x \in \mathbb{R}\}$. Dann enthält $\mathcal{A}_\sigma(S \boxtimes S)$ alle Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, die abzählbar sind, oder deren Komplement abzählbar ist, siehe Beispiel 1.9. Das Produkt $\mathcal{A}_\sigma(S) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S)$ enthält zum Beispiel die Menge $\{0\} \times \mathbb{R} \notin \mathcal{A}_\sigma(S \boxtimes S)$.*

1.2 Maße

Als Wertebereich für Maße verwenden wir die erweiterten reellen Zahlen, definiert durch

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

mit folgenden intuitiven Rechenregeln

$$a \pm \infty = \pm\infty \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty \cdot \operatorname{sgn}(a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Weiter ist es noch zweckmäßig

$$0 \cdot (\pm\infty) := 0$$

zu definieren. Dieser Ausdruck entsteht bei Integralen vom Typ

$$\int_{\mathbb{R}} 0 \,\mathrm{d}x = 0 \cdot \int_{\mathbb{R}} 1 \,\mathrm{d}x = 0 \cdot \infty = 0.$$

Nicht definiert sind die unbestimmten Ausdrücke $\infty - \infty$ und $-\infty + \infty$. Solange keine unbestimmten Ausdrücke entstehen, erfüllen Addition und Multiplikation auf $\bar{\mathbb{R}}$ die üblichen Rechenregeln (Assoziativität, Kommutativität, Distributivgesetze). Allerdings gilt die Implikation $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ nur falls $c \in \mathbb{R}$ ist.

Auf $\bar{\mathbb{R}}$ kann man die Ordnungstopologie definieren, als die kleinste Topologie, die die Mengen

$$[-\infty, a), (a, +\infty]$$

enthält, wobei $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Konvergenz einer Zahlenfolge in dieser Topologie entspricht der üblichen Konvergenz (falls der Grenzwert endlich ist) beziehungsweise der uneigentlichen Konvergenz gegen $\pm\infty$.

Definition 1.20. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{A}$. Dann heißt $\varphi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$ Mengenfunktion.*

(1) φ heißt σ-subadditiv, wenn für alle Folgen (A_j) mit $A_j \in \mathcal{A}$ und $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}$ gilt

$$\varphi\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) \le \sum_{j=1}^\infty \varphi(A_j)$$

(φ heißt subadditiv, wenn die Eigenschaft für endlich viele $A_1, \ldots, A_n$ gilt.)

(2) φ heißt σ-additiv wenn für alle Folgen (A_j) paarweise disjunkter Menge $A_j \in \mathcal{A}$ und $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}$ gilt

$$\varphi\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) = \sum_{j=1}^\infty \varphi(A_j)$$

(φ heißt additiv, wenn die Eigenschaft für endlich viele $A_1, \ldots, A_n$ gilt.)

(3) φ heißt σ-endlich, falls es eine Folge (A_j) mit $A_j \in \mathcal{A}$ gibt mit $\varphi(A_j) < +\infty$ für alle j und $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = X$.

(φ heißt endlich, falls $\varphi(X) < +\infty$.)

In obiger Definition wird nicht vorausgesetzt, dass die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$ in $\mathbb{R}$ konvergieren. Hier ist ausdrücklich $+\infty$ als Grenzwert oder Summe zugelassen.

Beispiel 1.21. *Sei*

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty], \quad \varphi(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Dann ist φ eine σ-subadditive und endliche Mengenfunktion. Enthält X mehr als ein Element, dann ist φ nicht σ-additiv.

Definition 1.22. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ eine σ-additive Mengenfunktion. Dann heißt μ Maß (über $\mathcal{A}$) und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Ist zusätzlich $\mu(X) = 1$, dann heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Wahrscheinlichkeitsraum.*

In der Literatur wird solche ein Maß manchmal auch positive Maß genannt.

Beispiel 1.23. *Sei $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum. Sei $a \in X$. Dann ist*

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

ein Maß, das Dirac-Maß.

Beispiel 1.24. *Für $A \subseteq X$ definiere $\mathcal{H}^0(A) := \#A =$Anzahl der Elemente von A. Dabei ist $\mathcal{H}^0(A) = +\infty$ wenn A unendlich viele Elemente enthält. Dann ist $\mathcal{H}^0$ ein Maß, das Zählmaß. Das Maß $\mathcal{H}^0$ ist endlich genau dann, wenn X endlich viele Elemente hat, und σ-endlich, genau dann wenn X höchstens abzählbar viele Elemente hat.*

Satz 1.25. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A, B \in \mathcal{A}$, sowie (A_j) eine Folge in $\mathcal{A}$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1.26) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(1.27) *Falls $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$, so ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(1.28) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. *(Monotonie)*

(1.29) $\mu(A_k) \nearrow \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big)$, *falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \cdots$.*

(1.30) $\mu(A_k) \searrow \mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big)$, *falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \cdots$ und $\mu(A_1) < \infty$.*

(1.31) $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. *($\sigma$-Subadditivität)*

Beweis. (1.26): Wir schreiben $A \cup B$ und B als Vereinigung disjunkter Mengen wie folgt: $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Aus der Additivität bekommen wir $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ und $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$. Aus der Assoziativität der Addition auf $\bar{\mathbb{R}}$ erhalten wir

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(1.27) und (1.28) folgen direkt aus $B = A \cup (B \setminus A)$ für $A \subseteq B$. Aus der Additivität folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.

(1.29): Die Monotonie der Folge $(\mu(A_k))$ folgt aus (1.28). Wir setzen $B_1 = A_1$ und $B_{j+1} = A_{j+1} \setminus A_j$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$, und die (B_j) sind paarweise disjunkt. Dann folgt mit der σ-Additivität

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m \mu(B_j) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m). \end{aligned}$$

(1.30): Wenden (1.29) auf die Folge $B_k := A_1 \setminus A_k$ an. Dann folgt

$$\lim_{m\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_m) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_1 \setminus A_j)\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^\infty A_j\right).$$

Ausnutzen von (1.27) und Subtrahieren von $\mu(A_1)$ auf beiden Seiten beweist (1.30).

(1.31): Definiere $B_j := A_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \subseteq A_j$. Dann sind die B_j paarweise disjunkt. Weiterhin ist $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$, woraus mit der σ-Additivität und (1.28) folgt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

□

Die Konstruktion der Folge disjunkter Mengen aus dem vorherigen Beweis halten wir noch als eigenes Resultat fest.

Lemma 1.32. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (A_j) eine Folge in $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine Folge (B_j) paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ mit $B_j \subseteq A_j$ und $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$.*

Definition 1.33. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt μ-Nullmenge. Man sagt Nullmenge, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welches Maß gemeint ist, Der Maßraum heißt vollständig, wenn gilt: $M \subseteq N$, N Nullmenge impliziert $M \in \mathcal{A}$.*

Folgerung 1.34. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge.*

Beweis. Folgt aus Satz 1.25 (1.31). □

Ein gegebener Maßraum kann mit einer einfachen Konstruktion vervollständigt werden.

Satz 1.35. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Definiere*

$$\bar{\mathcal{A}} := \{A \cup M : \ A \in \mathcal{A},\ M \subseteq N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0\}$$

und

$$\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, +\infty], \quad \bar{\mu}(A \cup M) := \mu(A).$$

Dann ist $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Beweis. Sei $B = A \cup M \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $A \in \mathcal{A}$, $M \subseteq N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} B^c = (A \cup M)^c = A^c \cap M^c &= A^c \cap (N^c \cap M^c) \cup (N \cap M^c)) \\ &= (A^c \cap N^c) \cup (A^c \cap N \cap M^c). \end{aligned}$$

Hier ist $A^c \cap N^c \in \mathcal{A}$, $A^c \cap N \cap M^c$ Teilmenge einer Nullmenge, und $B^c \in \bar{\mathcal{A}}$. Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, ist $\bar{\mathcal{A}}$ abgeschlossen bezüglich abzählbaren Vereinigungen, und $\bar{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra.

Sei (B_j) eine Folge von paarweise disjunkten Mengen mit $B_j = A_j \cup M_j$, $A_j \in \mathcal{A}$, $M_j \subseteq N_j \in \mathcal{A}$, $\mu(N_j) = 0$. Dann ist $N := \bigcup_{j=1}^\infty N_j$ eine Nullmenge, und $\bigcup_{j=1}^\infty M_j \subseteq N$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j \cup \bigcup_{j=1}^\infty M_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \\ = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \bar{\mu}(A_j \cup M_j) = \sum_{j=1}^\infty \bar{\mu}(B_j), \end{aligned}$$

und $\bar{\mu}$ ist σ-additiv. □

1.3 Äußere Maße

Das große Ziel dieses Kapitels ist die Konstruktion eines Maßes auf dem $\mathbb{R}^n$, das für Quader im $\mathbb{R}^3$ (Rechtecke im $\mathbb{R}^2$, Strecken im $\mathbb{R}^1$) mit dem Volumen (Fläche, Länge) übereinstimmt. Zuerst konstruieren wir äußere Maße: eine gegebene Menge wird von Quadern überdeckt. Dann ergibt die Summe der Volumina dieser Quader eine obere Schranke an das "Maß" der Menge. Nun können wir die kleinste obere Schranke nehmen. Leider erhalten wir kein Maß, sondern ein äußeres Maß.

Wir werden nun nebeneinander abstrakte Begriffe einführen und deren Eigenschaften untersuchen und dann diese auf die Situation $\mathbb{R}^n$ anwenden.

Definition 1.36. *Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ heißt äußeres Maß, falls gilt:*

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(2) μ^* ist monoton, d.h., $A \subseteq B$ impliziert $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$,

(3) μ^* ist σ-subadditiv.

Wir abstrahieren die oben motivierte Konstruktion wie folgt.

Satz 1.37. *Es sei $K \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in K$. Weiter sei $\nu : K \to [0, \infty]$ gegeben mit $\nu(\emptyset) = 0$. Für $A \subseteq X$ definiere*

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \nu(K_j) : \; K_j \in K, \; \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supseteq A \right\}.$$

Dann ist μ^* ein äußeres Maß.

Hier wird $\inf \emptyset = +\infty$ verwendet, so dass $\mu^*(A) = +\infty$, falls es keine abzählbare Überdeckung von A mit Mengen aus K gibt.

Beweis. Da $\emptyset \in K$ ist $\mu^*(\emptyset) = 0$. Sei $A \subseteq B$ gegeben. Ist (K_j) eine Folge mit $K_j \in K$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supseteq B$, dann gilt auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supseteq A$, und es folgt $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. Existiert keine solche Folge (K_j), dann ist $\mu^*(B) = +\infty \ge \mu^*(A)$.

Es bleibt, die Subadditivität von μ^* zu beweisen. Sei nun (A_i) eine Folge mit $A_i \subseteq X$. Ist $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = +\infty$, dann ist nichts zu zeigen. Wir müssen nur noch den Fall $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) < +\infty$ betrachten. Dann ist $\mu^*(A_i) < +\infty$ für alle i. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert zu jedem i eine Folge $(K_{i,j})$ in K mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j} \supseteq A$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu(K_{i,j}) \le \mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Weiter folgt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j},$$

so dass die $(K_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ eine abzählbare Überdeckung von $\bigcup_{j=1}^\infty A_j$ sind. Aus der Definition von μ^* (und dem Doppelreihensatz Satz 1.38) folgt nun

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \nu(K_{i,j}).$$

Die Doppelsumme auf der rechten Seite können wir abschätzen durch

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \nu(K_{i,j}) \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}\right) = \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i).$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\epsilon > 0$, daraus folgt $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$, und μ^* ist σ-subadditiv. □

Dieser Beweis ist noch nicht komplett: die Aussage "$(K_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ ist eine abzählbare Überdeckung von $\bigcup_{j=1}^\infty A_j$" bedeutet, dass für eine bijektive Funktion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ gilt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\tau(n)},$$

so dass aus der Definition von μ^* folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} K_{\tau(n)}.$$

Dass die Reihe auf der rechten Seite konvergiert, und ihre Summe gleich der Doppelsumme $\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty \nu(K_{i,j})$ ist, beweisen wir jetzt noch. Insbesondere ist $\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty \nu(K_{i,j})$ keine Umordnung von $\sum_{n=1}^\infty K_{\tau(n)}$.

1.3.1 Doppelreihensatz

Satz 1.38. *Für $i, j \in \mathbb{N}$ seien reelle Zahlen $a_{ij} \ge 0$ gegeben. Weiter setzen wir voraus:*

- *Die Reihen $\sum_{j=1}^\infty a_{ij}$ sind konvergent in $\mathbb{R}$ für alle i.*
- *Die Reihe $\sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij}\right) =: s \in \mathbb{R}$ ist konvergent in $\mathbb{R}$.*

Dann gelten folgende Aussagen:

(1.39) *Für alle bijektiven Funktionen $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_{\tau(n)}$ in $\mathbb{R}$ und es gilt $\sum_{n=1}^\infty a_{\tau(n)} = s$.*

(1.40) *Die Reihen* $\sum_{i=1}^\infty a_{ij}$ *sind konvergent in* $\mathbb{R}$ *für alle* j.

(1.41) *Es gilt* $\sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{ij} = s$.

Beweis. (1.39): Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ bijektiv. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $\tau(\{1 \dots N\})$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^2$, und es existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\tau(\{1 \dots N\}) \subseteq \{1 \dots M\}^2$. Es folgt

$$\sum_{n=1}^N a_{\tau(n)} \le \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{i,j} \le s, \tag{1.42}$$

und wir bekommen die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty a_{\tau(n)}$ sowie $\sum_{n=1}^\infty a_{\tau(n)} \le s$.

Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $I > 0$ mit $\sum_{i=I+1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij}\right) \le \frac{\epsilon}{2}$. Für $i = 1 \dots I$ sind die Reihen $\sum_{j=1}^\infty a_{ij}$ konvergent. Darum existiert ein $J > 0$, so dass $\sum_{j=J+1}^\infty a_{ij} \le \frac{\epsilon}{2I}$ für alle $i = 1 \dots I$. Dann bekommen wir

$$s = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} \le \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^\infty a_{ij} \le \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^I \left(\frac{\epsilon}{2I} + \sum_{j=1}^J a_{ij} \right) = \epsilon + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \tag{1.43}$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\tau(\{1 \dots N\}) \supseteq \{1 \dots I\} \times \{1 \dots J\}$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \le \sum_{n=1}^N a_{\tau(n)} \le \sum_{n=1}^\infty a_{\tau(n)}.$$

Und wir bekommen die Ungleichung

$$s \le \epsilon + \sum_{n=1}^\infty a_{\tau(n)}.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung $s = \sum_{n=1}^\infty a_{\tau(n)}$.

(1.40) und (1.41) folgen aus (1.42) und (1.43) durch Vertauschung der Summationsreihenfolge $i \leftrightarrow j$ auf der rechten Seite der jeweiligen Ungleichungen. □

1.3.2 Das Lebesguessche äußere Maß

Für einen Quader definiert durch zwei Punkte a, b im $\mathbb{R}^n$ definieren wir sein Volumen als

$$\mathrm{vol}_n(a,b) := \begin{cases} \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) & \text{falls } a \le b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist also $I = (a,b)$ (oder $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$), dann setzen wir $\mathrm{vol}_n(I) := \mathrm{vol}_n(a,b)$.

Damit können wir ein äußeres Maß definieren.

Satz 1.44. *Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiere*

$$\lambda_n^*(A) := \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) : \ I_j \in \mathbb{J}(n), \ \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supseteq A \right\}.$$

Dann ist $\lambda_n^*(A)$ ein äußeres Maß - das Lebesguessche äußere Maß. Weiter gilt

$$\lambda_n^*(A) = \mathrm{vol}_n(a,b) \quad \forall a \le b, \ (a,b) \subseteq A \subseteq [a,b].$$

Beweis. Wegen Satz 1.37 ist λ_n^* ein äußeres Maß. Sei nun $a \le b$. Da λ_n^* monoton ist, gilt $\lambda_n^*((a,b)) \le \lambda_n^*(A) \le \lambda_n^*([a,b])$ für alle A mit $(a,b) \subseteq A \subseteq [a,b]$.

Schritt 1: $\lambda_n^*((a,b)) = \lambda_n^*([a,b])$. Es gilt

$$[a,b] = (a,b) \cup \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

wobei die B_j jeweils zwei gegenüberliegende Seitenflächen von (a,b) sind, also Mengen der Bauart

$$B_j = \left(\prod_{i=1}^{j-1} (a_i, b_i) \right) \times \{a_j, b_j\} \times \left(\prod_{i=j+1}^{n} (a_i, b_i) \right).$$

Die Menge B_j kann für $\epsilon > 0$ überdeckt werden durch

$$\begin{aligned} J_1 \cup J_2 := & \left(\prod_{i=1}^{j-1} (a_i, b_i) \right) \times (a_j - \epsilon, a_j + \epsilon) \times \left(\prod_{i=j+1}^{n} (a_i, b_i) \right) \\ & \cup \left(\prod_{i=1}^{j-1} (a_i, b_i) \right) \times (b_j - \epsilon, b_j + \epsilon) \times \left(\prod_{i=j+1}^{n} (a_i, b_i) \right), \end{aligned}$$

so dass

$$\lambda^*(B_j) \le \mathrm{vol}_n(J_1) + \mathrm{vol}_n(J_2) = 4\epsilon \cdot \prod_{i \ne j} |b_i - a_i|.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lambda_n^*(B_j) = 0$ und $\lambda_n^*([a,b]) \le \lambda_n^*((a,b))$.

Schritt 2: $\lambda_n^*([a,b]) = \mathrm{vol}_n(a,b)$. Mit der Überdeckung $I_1 := [a,b]$, $I_j = \emptyset$ für $j \ge 2$, folgt $\lambda_n^*([a,b]) \le \mathrm{vol}_n(a,b)$. Sei (I_j) eine Überdeckung von $[a,b]$ mit Quadern aus $\mathbb{J}(n)$. Da $[a,b]$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, also $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^m I_j$. Mit dem noch zu beweisenden Satz 1.45 folgt $\mathrm{vol}_n(a,b) \le \sum_{j=1}^m \mathrm{vol}_n(I_j) \le \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(I_j)$. Das äußere Maß λ_n^* ist das Infimum über solche Summen, also folgt $\mathrm{vol}_n(a,b) \le \lambda_n^*([a,b])$. □

Satz 1.45. *Seien $I, I_1, \dots, I_m \in \mathbb{J}(n)$ gegeben mit $I \subseteq \bigcup_{j=1}^m I_j$. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}_n(I) \le \sum_{j=1}^m \mathrm{vol}_n(I_j).$$

Das heißt, vol_n *ist subadditiv auf* $\mathbb{J}(n)$.

Beweis. Wir folgen [Fre04, 115B Lemma]. Der Beweis ist per Induktion nach n. Der Beweis des Induktionsanfangs $n = 1$ ist analog zum Induktionsschritt.

Induktionsschritt $n \to n+1$. Sei die Behauptung des Satzes für ein $n \ge 1$ bewiesen. Seien $I, I_1, \dots I_m \in \mathbb{J}(n+1)$ gegeben mit $I \subseteq \bigcup_{j=1}^m I_j$.

Wir führen folgende Notationen ein: $I = (a, b)$, $I_j = (a_j, b_j)$. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ schreiben wir $x = (x', x_{n+1})$ mit $x' \in \mathbb{R}^n$. Weiter setzen wir $I' := (a', b')$, $I'_j := (a'_j, b'_j)$. Hinzufügen des Apostrophs ($'$) streicht also die letzte Koordinate.

Für $t \in \mathbb{R}$ sei H_t der offene Halbraum

$$H_t := \{x \in \mathbb{R} : \ x_{n+1} < t\}.$$

Sind $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \le y$ dann ist

$$(x, y) \cap H_t = (x', y') \times (\min(x_{n+1}, t), \min(y_{n+1}, t))$$

und

$$\mathrm{vol}_{n+1}((x, y) \cap H_t) = \mathrm{vol}_n((x', y')) \cdot (\min(y_{n+1}, t) - \min(x_{n+1}, t)). \tag{1.46}$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass $t \mapsto \mathrm{vol}_{n+1}((x, y) \cap H_t)$ stetig und monoton wachsend ist. Weiter definieren wir die 'gute' Menge

$$G := \left\{ t \in [a_{n+1}, b_{n+1}] : \ \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_t) \le \sum_{j=1}^m \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) \right\}. \tag{1.47}$$

Wir zeigen nun, dass $b_{n+1} \in G$. Daraus folgt dann die Induktionsbehauptung, da $I \cap H_{b_{n+1}} = I$ und $\mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) \le \mathrm{vol}_{n+1}(I_j)$ für alle t. Wir beweisen nun der Reihe nach, dass G nicht leer, abgeschlossen und in einem gewissen Sinne offen ist. Offensichtlich ist $a_{n+1} \in G$, da dann wegen $I \cap H_{a_{n+1}} = \emptyset$ die linke Seite der Ungleichung gleich Null ist.

G ist abgeschlossen. Wegen (1.46) sind die Funktionen $t \mapsto \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_t)$ und $t \mapsto \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t)$ stetig. Damit ist G das Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung. (Langfassung: Ist (t_k) eine Folge mit $t_k \in G$ und $t_k \to t$ dann können wir in der Ungleichung in (1.47) zur Grenze

gehen, und $t \in G$.)

G hat folgende Eigenschaft: ist $s \in G$ mit $s < b_{n+1}$, dann existiert $\epsilon > 0$, so dass $(s, s+\epsilon) \subseteq G$. Sei $s \in G$ mit $s < b_{n+1}$. Für $t \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_t) &= \mathrm{vol}_n(I') \cdot (t - a_{n+1}) \\ &= \mathrm{vol}_n(I') \cdot (t - s + s - a_{n+1}) \\ &= \mathrm{vol}_n(I') \cdot (t - s) + \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_s). \end{aligned} \tag{1.48}$$

Eine analoge Umformung wollen wir auch für die Ausdrücke $\mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t)$ machen. Hier betrachten wir nur die Quader, die tatsächlich von H_s geschnitten werden.

Setze $J := \{j : \ s \in (a_{j,n+1}, b_{j,n+1})\}$. Da die I_j den Quader I überdecken folgt $I' \times \{s\} \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j$. Dann ist auch $I' \subseteq \bigcup_{j \in J} I'_j$, woraus per Induktionsvoraussetzung folgt

$$\mathrm{vol}_n(I') \le \sum_{j \in J} \mathrm{vol}_n(I'_j). \tag{1.49}$$

Setze

$$\epsilon := \max\left(\{b_{n+1} - s\} \cup \{b_{j,n+1} - s : \ j \in J\}\right) > 0.$$

Dann folgt $(s, s+\epsilon) \subseteq (a_{n+1}, b_{n+1})$ und $(s, s+\epsilon) \subseteq (a_{j,n+1}, b_{j,n+1})$ für alle $j \in J$.

Sei nun $j \in J$ und $t \in [s, s+\epsilon)$. Dann vereinfacht sich die Berechnung von $\mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t)$ (vergleiche (1.48)) zu

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) &= \mathrm{vol}_n(I'_j) \cdot (t - a_{j,n+1}) \\ &= \mathrm{vol}_n(I'_j) \cdot (t - s) + \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_s). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Weiter ist für $t \ge s$ und $j \notin J$ wegen (1.46)

$$\mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) \ge \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_s). \tag{1.51}$$

Jetzt kombinieren wir (1.48), (1.49), $s \in G$ und (1.47), (1.50) und (1.51) und erhalten

$$\mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_t) = \mathrm{vol}_n(I') \cdot (t - s) + \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_s)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j\in J} \mathrm{vol}_n(I'_j)\right)\cdot(t-s) + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j\cap H_s)\\
&= \sum_{j\in J}\big(\mathrm{vol}_n(I'_j)\cdot(t-s) + \mathrm{vol}_{n+1}(I_j\cap H_s)\big) + \sum_{j\notin J} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j\cap H_s)\\
&\leq \sum_{j\in J} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j\cap H_t) + \sum_{j\notin J} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j\cap H_t)\\
&= \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j\cap H_t),
\end{aligned}$$

so dass $[s, s+\epsilon) \subseteq G$.

Ende des Induktionsschrittes. Sei $s := \sup G$. Dann ist $s \in G$, weil G abgeschlossen ist. Ist $s < b_{n+1}$, dann wäre $[s, s+\epsilon) \subseteq G$, ein Widerspruch zu $s = \sup G$. Also ist $s = b_{n+1}$, und der Induktionsschritt ist vollständig bewiesen.

Induktionsanfang. Der Beweis für den Fall $n = 0$ kann aus dem Beweis für $n \geq 1$ wie folgt erhalten werden: Wir setzen $\mathrm{vol}_0(\{0\}) = 1$ und $\mathrm{vol}_0(\emptyset) = 0$ (andere Teilmengen hat der $\mathbb{R}^0$ nicht). Dann gelten alle oben entwickelten Formeln auch für $n = 0$, denn (1.48), (1.50), (1.51) sind Längenberechnungen der Intervalle $I \cap H_t$ und $I_j \cap H_t$. □

Bemerkung 1.52. *[Fre04] beweist diesen Satz sogar für eine abzählbare Überdeckung, dadurch kann im Beweis von Satz 1.44 auf das Kompaktheitsargument verzichtet werden.*

Bemerkung 1.53. *Im obigen Beweis haben wir Induktion über reelle Zahlen durchgeführt, um zu zeigen, dass $G = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, siehe dazu auch [Cla12]. Das dahinterliegende Grundprinzip ist: ist $G \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer, offen und abgeschlossen, dann ist $G = \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist. (Eine Menge ist zusammenhängend, wenn sie nicht die disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer, offener Menge ist.)*

Bemerkung 1.54. *Mit mehr oder weniger großen Veränderungen im Beweis von Satz 1.45 kann man die Subadditivität von vol_n auf $\mathbb{J}_l(n)$, $\mathbb{J}_r(n)$, $\bar{\mathbb{J}}(n)$ beweisen. Mit der gleichen Beweisidee kann auch die Additivität von vol_n auf $\mathbb{J}(n)$ beweisen: Es muss noch argumentiert werden, warum die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist. Weiter muss die Wahl von ϵ angepasst werden, so dass in (1.51) Gleichheit für $t \in [s, s+\epsilon)$ gilt.*

Das Lebesguessche äußere Maß kann auch durch Überdeckungen mit halboffenen oder abgeschlossenen Quadern erzeugt werden.

Satz 1.55. *Sei* $\mathbb{J} \in \{\mathbb{J}(n), \mathbb{J}_l(n), \mathbb{J}_r(n), \bar{\mathbb{J}}(n)\}$. *Für* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist*

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) : \ I_j \in \mathbb{J}, \ \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supseteq A \right\}.$$

Beweis. Es seien λ_l^*, λ_r^*, λ_a^* die durch Überdeckungen aus $\mathbb{J}_l(n)$, $\mathbb{J}_r(n)$, $\bar{\mathbb{J}}(n)$ erzeugten äußeren Maße. Wir beweisen nur $\lambda_n^*(A) \le \lambda_a^*(A)$. Mit offensichtlichen Vereinfachungen beweist man die Ungleichungen $\lambda_a^*(A) \le \lambda_l^*(A) \le \lambda_n^*(A)$ und $\lambda_a^*(A) \le \lambda_l^*(A) \le \lambda_n^*(A)$.

Sei nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung von A mit abgeschlossenen Quadern $I_j = [a_j, b_j]$, so dass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(a_j, b_j) \le \lambda_a^*(A) + \epsilon.$$

Diese abgeschlossenen Quader überdecken wir mit offenen Quadern

$$(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) := \big(a_j - \epsilon(b_j - a_j), \ b_j + \epsilon(b_j - a_j)\big) \supseteq [a_j, b_j],$$

woraus folgt

$$\mathrm{vol}_n(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) = (1 + 2\epsilon)^n \, \mathrm{vol}_n(a_j, b_j).$$

Dann ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} (\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ eine Überdeckung von A mit offenen Quadern, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\lambda_n^*(A) &\le \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) \\
&= (1 + 2\epsilon)^n \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(a_j, b_j) \\
&\le (1 + 2\epsilon)^n (\lambda_a^*(A) + \epsilon).
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $\epsilon > 0$, so dass $\lambda_n^*(A) \le \lambda_a^*(A)$ folgt. □

Aufgabe 1.56. *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass* $\lambda_n^*(A) = 0$.

1.4 Messbare Mengen

Es sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Wir werden daraus einen Maß konstruieren. Die auf Caratheodory zurückgehende Idee ist, eine geschickte Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zu betrachten, so dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ ein Maß wird.

Für eine Motivation der folgenden Definition siehe [AE01, Abschnitt IX.4].

Definition 1.57. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt μ^*-messbar, falls gilt*

$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \qquad \forall D \subseteq X.$$

Es sei $\mathcal{A}(\mu^*)$ die Menge der μ^*-messbaren Mengen. Ist $\mu^*(N) = 0$, dann heißt N μ^*-Nullmenge.

Da μ^* monoton ist, ist die Messbarkeit von A ($A \in \mathcal{A}(\mu^*)$) äquivalent zu

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \qquad \forall D: \ \mu^*(D) < +\infty.$$

Lemma 1.58. *Jede μ^*-Nullmenge ist μ^*-messbar.*

Beweis. Sei $N \subseteq X$ mit $\mu^*(N) = 0$. Sei $D \subseteq X$ mit $\mu^*(D) < +\infty$. Wegen der Subadditiviät von μ^* folgt

$$\mu^*(N \cap D) + \mu^*(N^c \cap D) \leq \mu^*(N) + \mu^*(D) = \mu^*(D),$$

und N ist messbar. □

Satz 1.59. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Dann ist $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ-Algebra, und $\mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ ist ein vollständiges Maß.*

Beweis. Offensichtlich ist $X \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Sei nun $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Da $(A^c)^c = A$ folgt sofort $A^c \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

Schritt 1: endliche Vereinigungen. Wir zeigen erst, dass endliche Vereinigungen μ^*-messbarer Mengen wieder μ^*-messbar sind. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Sei $D \subseteq X$ mit $\mu^*(D) < +\infty$. Wir müssen die Ungleichung

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap D) \leq \mu^*(D)$$

beweisen. Für den zweiten Summanden bekommen wir aus der Messbarkeit von A_1 (mit Testmenge $A_2^c \cap D$)

$$\begin{aligned} \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap D) &= \mu^*(A_1^c \cap (A_2^c \cap D)) \\ &= \mu^*(A_2^c \cap D) - \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap D), \end{aligned} \tag{1.60}$$

wobei $\mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap D) \leq \mu^*(D) < +\infty$ ist. Nun ist es zweckmäßig folgenden Fakt

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2^c) \cup A_2$$

zu benutzen, so dass aus der Subadditivität von μ^* folgt

$$\begin{aligned}\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) &= \mu^*((A_1 \cap A_2^c \cap D) \,\cup\, (A_2 \cap D)) \\ &\le \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap D) + \mu^*(A_2 \cap D).\end{aligned} \tag{1.61}$$

Addieren von (1.60) und (1.61) sowie das Ausnutzen der Messbarkeit von A_2 ergibt die Behauptung:

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap D) \le \mu^*(A_2^c \cap D) + \mu^*(A_2 \cap D)) \le \mu^*(D).$$

Hier war $\mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap D) \le \mu^*(D) < \infty$ wichtig. Es folgt $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Per Induktion zeigt man, dass die Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathcal{A}(\mu^*)$ wieder in $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist.

Schritt 2: abzählbare, disjunkte Vereinigungen; σ-Additivität von μ^*. Sei (A_j) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}(\mu^*)$. Sei $D \subseteq X$. Da A_1 messbar ist erhalten wir (Achtung: hier wird als Testmenge $(A_1 \cup A_2) \cap D$ verwendet!)

$$\begin{aligned}\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) &= \mu^*(A_1 \cap (A_1 \cup A_2) \cap D) + \mu^*(A_1^c \cap (A_1 \cup A_2) \cap D) \\ &= \mu^*(A_1 \cap D) + \mu^*(A_2 \cap D).\end{aligned}$$

Per Induktion folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^m (A_j \cap D)\right) = \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j \cap D) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Setze $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Wegen der Monotonie von μ^* folgt

$$\mu^*(A \cap D) \ge \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^m (A_j \cap D)\right) = \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j \cap D) \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.62}$$

Grenzübergang $m \to \infty$ liefert

$$\mu^*(A \cap D) \ge \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j \cap D).$$

Aus der σ-Subadditivität von μ^* folgt

$$\mu^*(A \cap D) \ge \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j \cap D) \ge \mu^*(A \cap D), \tag{1.63}$$

also sind alle Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt. Für $D := X$ bekommen wir hieraus die σ-Additiviät von μ^* auf $\mathcal{A}(\mu^*)$. Wir müssen noch $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$ zeigen.

Nach dem in Schritt 1 bewiesenen gilt für alle m

$$\mu^*(D) \geq \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \cap D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right)^c \cap D\right).$$

Ausnutzen von (1.62) und $(\bigcup_{j=1}^m A_j)^c \supseteq A^c$ ergibt

$$\mu^*(D) \geq \left[\sum_{j=1}^{m} \mu^*(A_j \cap D)\right] + \mu^*(A^c \cap D).$$

Grenzübergang $m \to \infty$ ergibt die gewünschte Ungleichung, wobei (1.63) benutzt wurde, und A ist messbar.

Schritt 3: abzählbare (beliebige) Vereinigungen. Sei (A_j) eine Folge aus $\mathcal{A}(\mu^*)$. Wir benutzen die Konstruktion aus der Beweis von (1.31). Definiere $B_j := A_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \subseteq A_j$. Dann sind die B_j paarweise disjunkt, und es gilt $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$. Wegen

$$B_{j+1} = A_{j+1} \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) = A_{j+1} \cap \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i^c = (A_{j+1}^c \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i)^c$$

kann man per Induktion mithilfe von Schritt 1 zeigen, dass $B_j \in \mathcal{A}(\mu^*)$ für alle j. Aus Schritt 2 folgt $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{A}(\mu^*)$ und damit $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

Damit ist $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ-Algebra, und $\mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ ist ein Maß. Die Vollständigkeit folgt aus Lemma 1.58. □

Allerdings ist hier nicht klar, dass $\mathcal{A}(\mu^*)$ auch nicht-triviale Mengen enthält, also ob $\mathcal{A}(\mu^*) \neq \{\emptyset, X\}$.

Bemerkung 1.64. *Es gibt tatsächlich Beispiele für äußere Maße, für die nur $\emptyset$ und X messbar sind. Das folgende Beispiel ist aus [DT15, Example 2]. Sei $X = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, die obere, offene Halbebene. Für $x \in \mathbb{R}$, $s > 0$, definiere die offenen Mengen*

$$T(x,s) = \{(y,t) \in X : \ t < s, \ |x-y| < s-t\},$$

diese Mengen sind "Zelte" (englisch: tents) mit Eckpunkten $(x-s,0)$, $(x+s,0)$, (x,s). Weiter wird $\nu(T(x,s)) := s$ und $K := \{T(x,s) : \ x \in \mathbb{R}, s > 0\} \cup \{\emptyset\}$ gesetzt. Für das per Satz 1.37 konstruierte Maß ist $\mathcal{A}(\mu^*) = \{\emptyset, X\}$.

Zuerst geben wir eine untere Schranke von μ^* an. Sei $E \subseteq X$ mit $(y,t) \in E$. Dann muss jede Überdeckung von E ein Zelt $T(x,s)$ mit $s > t$ enthalten, also ist $\mu^*(E) \geq t$. Daraus folgt auch $\mu^*(T(x,s)) = s$.

Sei $E \subsetneq X$ nicht leer. Dann hat E einen Randpunkt (x_0, s_0). Sei $T(x,s)$ so, dass $(x_0, s_0) \in T(x,s)$ und $s < 2s_0$. Dann gibt es Punkte $(y,t) \in E \cap T(x,s)$ und $(y',t') \in E^c \cap T(x,s)$ in der Umgebung von (x_0,s_0) mit $t + t' > s$. Damit ist $\mu^*(E \cap T(x,s)) \geq t$ und $\mu^*(E^c \cap T(x,s)) \geq t'$, woraus

$$\mu^*(T(x,s)) = s < t + t' \leq \mu^*(E \cap T(x,s)) + \mu^*(E^c \cap T(x,s))$$

folgt, und E ist nicht μ^*-messbar.

Für das Lebesguessche äußere Maß sind allerdings genug Mengen messbar.

Lemma 1.65. *Sei λ_n^* das Lebesguessche äußere Maß. Für $k \in \{1 \dots n\}$ und $t \in \mathbb{R}$ definiere den offenen Halbraum $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_k < t\}$. Dann ist H λ_n^*-messbar.*

Beweis. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n^*(D) < \infty$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung von D mit offenen Quadern (I_j), so dass $\sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(D) + \epsilon$.

Die Mengen $I_j \cap H$ sind offene Quader, $\bar{I}_j \cap H^c$ abgeschlossene Quader. Weiter ist

$$\operatorname{vol}_n(I_j) = \operatorname{vol}_n(I_j \cap H) + \operatorname{vol}_n(\bar{I}_j \cap H^c).$$

Dann ist $(I_j \cap H)$ eine Überdeckung von $D \cap H$ mit offenen Quadern, während $(\bar{I}_j \cap H^c)$ eine Überdeckung von $D \cap H^c$ mit abgeschlossenen Quadern ist. Wegen Satz 1.55 bekommen wir

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(D \cap H) + \lambda_n^*(D \cap H^c) &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol}_n(I_j \cap H) \right) + \left(\sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol}_n(\bar{I}_j \cap H^c) \right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(D) + \epsilon. \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Messbarkeit von H. □

Satz 1.66. *Sei λ_n^* das Lebesguessche äußere Maß. Dann gilt $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{A}(\lambda_n^*)$.*

Beweis. Sei $a \leq b$. Dann ist

$$[a,b) = \bigcap_{k=1}^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_k < a_k\}^c \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_k < b_k\} \right).$$

Nach Lemma 1.65 sind alle beteiligten Mengen λ_n^*-messbar, also ist auch $[a,b)$ λ_n^*-messbar. Es folgt $\mathbb{J}_r(n) \subseteq \mathcal{A}(\lambda_n^*)$. Da $\mathcal{B}^n$ von den halboffenen Quadern erzeugt wird nach Satz 1.16 gilt $\mathcal{B}^n = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_r(n)) \subseteq \mathcal{A}(\lambda_n^*)$. □

1.5 Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Wir vereinbaren folgende Abkürzungen.

Definition 1.67. *Die Menge*

$$\mathcal{L}(n) := \mathcal{A}(\lambda_n^*)$$

heißt Menge der Lebesgue-messbaren Mengen. Das dazugehörige Maß

$$\lambda_n := \lambda_n^*|_{\mathcal{L}(n)}$$

heißt Lebesgue-Maß.

Wir wissen bereits folgende Eigenschaften:

(1) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ ist ein vollständiger Maßraum (Satz 1.59),

(2) alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar, $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{L}(n)$, (Satz 1.66)

(3) damit ist auch $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda_n|_{\mathcal{B}^n})$ ein Maßraum, $\lambda_n|_{\mathcal{B}^n}$ heißt Borel-Lebesgue-Maß,

(4) $\lambda_n(A) = \mathrm{vol}_n(a, b)$ für alle A mit $(a, b) \subseteq A \subseteq [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ (Satz 1.44),

(5) ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und Lebesgue-messbar, dann ist $\lambda_n(A) < \infty$,

(6) λ_n ist σ-endlich: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} [-j, +j]^n$.

Satz 1.68. *Das Lebesgue-Maß λ_n ist regulär in folgendem Sinne. Für $A \in \mathcal{L}(n)$ gilt*

$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(O) : \ O \supseteq A, \ O \text{ offen}\},$$

$$\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : \ K \subseteq A, \ K \text{ kompakt}\}.$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(n)$. Ist $K \subseteq A \subseteq O$, dann folgt $\lambda_n(K) \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_n(O)$ aus der Monotonie von Maßen (1.28).

Schritt 1: äußere Regularität. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach Konstruktion von λ_n (Satz 1.44) eine Folge (I_j) offener Quader mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n(A) + \epsilon$$

Setze $O := \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, dann ist wegen $\mathrm{vol}_n(I_j) = \lambda_n(I_j)$

$$\lambda_n(O) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(I_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n(A) + \epsilon.$$

Und die erste Behauptung folgt.

Schritt 2: innere Regularität für beschränktes A. Zunächst nehmen wir an, dass A beschränkt ist, dann ist $\lambda_n(A) < \infty$. Dann existiert eine kompakte Menge C mit $C \supseteq A$. Aufgrund des ersten Teils existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Menge $O \supseteq C \setminus A$, so dass

$$\lambda_n(O) \leq \lambda_n(C \setminus A) + \epsilon = \lambda_n(C) - \lambda_n(A) + \epsilon.$$

Dann ist $K := C \setminus O$ kompakt. Weiter ist

$$\lambda_n(C) \leq \lambda_n(K) + \lambda_n(O) \leq \lambda_n(K) + \lambda_n(C) - \lambda_n(A) + \epsilon.$$

Da $\lambda_n(C) < \infty$ folgt Es folgt, $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(K) + \epsilon$. Und die zweite Behauptung ist für beschränktes A bewiesen.

Schritt 3: innere Regularität. Sei nun $A \in \mathcal{L}(n)$ beliebig. Ist $\lambda(A) = 0$ dann folgt die Behauptung mit $K = \emptyset$. Sei also nun $\lambda(A) > 0$. Sei $\alpha \in (0, \lambda(A))$. Definiere die Funktion

$$t \mapsto \lambda_n(A \cap [-t,t]^n).$$

Wegen der Monotonie von Maßen (1.28),(1.29) ist diese Funktion für $t > 0$ monoton wachsend und stetig. Das heißt, es gibt ein $t > 0$, so dass $\lambda_n(A \cap [-t,t]^n) > \alpha$. Wegen Schritt 2 existiert eine kompakte Menge $K \subseteq A \cap [-t,t]^n$ mit $\lambda_n(K) > \alpha$. Da $\alpha < \lambda_n(A)$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Lebesgue messbare Mengen lassen sich wie folgt charakterisieren.

Satz 1.69. *Sei $A \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $A \in \mathcal{L}(n)$ genau dann, wenn eine Folge kompakter Mengen (K_j) und eine Nullmenge N existieren, so dass $A = N \cup \bigcup_{j=1}^\infty K_j$.*

Beweis. Die Richtung "$\Leftarrow$" folgt sofort aus den Maßraumeigenschaften. Wir beweisen "$\Rightarrow$". Sei $A \in \mathcal{L}(n)$ mit $\lambda_n(A) < \infty$. Wegen der inneren Regularität von λ_n (Satz 1.68), existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine kompakte Menge $K_j \subseteq A$, so dass $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(K_j) + \frac{1}{j}$ ist. Dann ist $\bigcup_{j=1}^\infty K_j \subseteq A$, und es folgt $\lambda_n(\bigcup_{j=1}^\infty K_j) < \infty$. Wir setzen $N := A \setminus \bigcup_{j=1}^\infty K_j$. Dann ist $N \subseteq \lambda_n(A \setminus K_j)$, woraus $\lambda_n(N) = \lambda_n(A) - \lambda_n(K_j) \leq \frac{1}{j}$ folgt. Dies gilt für alle j, also ist $\lambda_n(N) = 0$.

Sei nun $A \in \mathcal{L}(A)$. Dann hat $A_i := A \cap B_i(0)$ endliches Maß für alle i, und wegen des ersten Teils ist $A_i = N_i \cup \bigcup_{j=1}^\infty K_{i,j}$ mit kompakten Mengen $K_{i,j}$ und Nullmengen N_i. Es folgt

$$A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^\infty \left(N_i \cup \bigcup_{j=1}^\infty K_{i,j} \right) = \left(\bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty K_{i,j} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^\infty N_i \right).$$

Da $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ wieder eine Nullmenge ist, hat A die gewünschte Darstellung. $\square$

Bemerkung 1.70. *Mit Satz 1.69 und Lemma 1.18 kann man zeigen, dass gilt $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n) \subsetneq \mathcal{L}(m+n)$. Gleichheit gilt hier nicht! Ist $x \in \mathbb{R}^m$, dann ist $\{x\} \in \mathcal{L}(n)$ eine Nullmenge. Weiter sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig, dann ist $\{x\} \times B \in \mathcal{L}(m+n)$, da es eine Nullmenge ist. Man kann zeigen, dass $\{x\} \times B$ nicht in $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n)$ ist, wenn $B \notin \mathcal{L}(n)$.*

Eine Nullmenge lässt sich auch wie folgt charakterisieren.

Folgerung 1.71. *Sei A eine λ_n-Nullmenge. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ abzählbar viele kompakte Würfel (I_j) mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(I_n) < \epsilon$.*

Beweis. Aus der Definition des äußeren Maßes λ_n^* bekommen wir eine Zerlegung mit offenen Quadern (I_j). Jeder dieser Quader ist eine abzählbare Vereinigung von halboffenen Würfeln (Satz 1.14). Nehmen wir den Abschluss aller dieser Würfel, erhalten wir eine abzählbare Vereinigung mit kompakten Würfeln. $\square$

Satz 1.72. *Der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ ist die Vervollständigung des Maßraums $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda_n|_{\mathcal{B}^n})$.*

Beweis. Wir benutzen die Konstruktion aus Satz 1.35. Ist M eine Teilmenge einer $\lambda_n|_{\mathcal{B}^n}$-Nullmenge, dann folgt $M \in \mathcal{L}(n)$, und wir bekommen $\overline{\mathcal{B}^n} \subseteq \mathcal{L}(n)$. Die Rückrichtung beweisen wir mit Satz 1.69 und Folgerung 1.71. (Ist $N \in \mathcal{L}(n)$ eine λ_n-Nullmenge, dann zeigt man mit Folgerung 1.71, dass N Teilmenge einer $\lambda_n|_{\mathcal{B}^n}$-Nullmenge ist.) $\square$

Wir beweisen nun, dass Bilder von Nullmengen unter gewissen Umständen wieder Nullmengen sind.

Satz 1.73. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, Lipschitz stetig, d.h. $\exists L > 0$:*

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty \ \forall x, y \in U.$$

Sei $A \subseteq U$ eine λ_n-Nullmenge. Dann ist $f(A)$ eine λ_m-Nullmenge.

Beweis. Sei $A \subseteq U$ eine λ_n-Nullmenge. Sei $\epsilon \in (0, 1)$ und (I_j) die Überdeckung von A durch kompakte Würfel mit $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(I_j) < \epsilon$ aus Folgerung 1.71.

Sei $I_j = [a, b]$, dann ist $x_j := \frac{1}{2}(a + b)$ der Mittelpunkt von I_j, und I_j ist eine 'Kugel' um x_j in der ∞-Norm: $I_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_j\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|b - a\|_\infty\}$. Sei nun $x \in I_j \cap U$. Dann können wir abschätzen

$$\|f(x) - f(x_j)\|_\infty \leq L\|x - x_j\|_\infty \leq \frac{L}{2}\|b - a\|_\infty.$$

Das heißt, $f(I_j \cap U)$ ist in einem Würfel $\tilde{I}_j$ enthalten, der um den Faktor L größer ist als I_j:

$$f(I_j \cap U) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^m : \ \|y - f(x_j)\|_\infty \leq \frac{L}{2}\|b-a\|_\infty\} =: \tilde{I}_j.$$

Die Kantenlänge $\tilde{s}$ von $\tilde{I}_j \subseteq \mathbb{R}^m$ ist das L-fache der Kantenlänge s von $I_j \subseteq \mathbb{R}^n$. Das heißt,

$$\operatorname{vol}_m(\tilde{I}_j) = \tilde{s}^m = (Ls)^m = L^m \operatorname{vol}_n(I_j)^{m/n}.$$

Dann folgt

$$f(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty f(I_j \cap U) \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty \tilde{I}_j$$

und

$$\lambda_m^*(f(A)) \leq \sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol}_m(\tilde{I}_j) = \sum_{j=1}^\infty L^m \operatorname{vol}_n(I_j)^{m/n}.$$

Da $\operatorname{vol}_n(I_j) < \epsilon < 1$ folgt

$$\lambda_m^*(f(A)) \leq L^m \sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol}_n(I_j) \leq L^m \epsilon.$$

Da $\epsilon \in (0,1)$ beliebig war, folgt $\lambda_m^*(f(A)) = 0$, und $f(A)$ ist eine λ_m-Nullmenge. Insbesondere ist $f(A)$ λ_m-messbar. □

Bemerkung 1.74. *Die Aussage ist nur richtig für $m \geq n$. Für $m < n$ ist sie im Allgemeinen falsch: Seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ beliebig, $B \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ eine Nullmenge. Dann ist $A \times B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Definiere $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$. Dann ist f linear und Lipschitz stetig mit $L = 1$ auf $\mathbb{R}^n$, aber $f(A \times B) = A$ muss keine Nullmenge, ja nicht einmal messbar sein.*

Bemerkung 1.75. *Die Aussage ist nicht richtig, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird. Die Peano-Kurve p ist eine stetige und surjektive Abbildung von $[0,1]$ nach $[0,1]^2$. Definiert man $f(x_1, x_2) = p(x_1)$, dann ist f stetig und $f([0,1] \times \{0\}) = [0,1]^2$, wobei $[0,1] \times \{0\}$ eine Nullmenge ist.*

1.6 Translations- und Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes

Für $a \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$\tau_a(x) := x + a, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildung $x \mapsto \tau_a(x)$ realisiert eine Verschiebung von x (Translation) um den Vektor a. Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass das Lebesgue-Maß (bis auf eine multiplikative Konstante) durch die Invarianz gegenüber Translationen eindeutig bestimmt ist.

Satz 1.76. *$\mathcal{L}(n)$ und λ_n sind translationsinvariant: Für alle $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(n)$ gilt $\tau_a(A) \in \mathcal{L}(n)$ und $\lambda_n(A) = \lambda_n(\tau_a(A))$.*

Beweis. $\mathbb{J}(n)$ und vol_n sind translationsinvariant: $I \in \mathbb{J}(n)$ impliziert $\tau_a(I) \in \mathbb{J}(n)$ und $\mathrm{vol}_n(I) = \mathrm{vol}_n(\tau_a(I))$. Damit sind λ_n^* und $\mathcal{L}(n)$ translationsinvariant, also auch λ_n. $\square$

Wir beweisen nun, dass ein translationsinvariantes Maß ein Vielfaches von λ_n ist.

Satz 1.77. *Es sei $\mathcal{M}$ eine translationsinvariante σ-Algebra mit $\mathbb{J}_r(n) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(n)$ und μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{M}$. Es sei $\alpha := \mu([0,1)^n) < \infty$. Dann gilt*

$$\mu(A) := \alpha\lambda_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

Beweis. Schritt 1: Quader mit ganzzahligen Eckpunkten. Sei $e := (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen zuerst die Behauptung für Quader $[0,b)$ mit $b \in \mathbb{N}^n$. Diesen Quader können wir durch $\prod_{i=1}^n b_i$ verschobene Einheitsquader überdecken:

$$[0,b) = \bigcup_{a\in[0,b)\cap\mathbb{Z}^n} \tau_a([0,e).$$

Da μ und λ_n translationsinvariante Maße sind folgt

$$\begin{aligned}\mu([0,b)) &= \sum_{a\in[0,b)\cap\mathbb{Z}^n} \mu(\tau_a([0,e))) = \sum_{a\in[0,b)\cap\mathbb{Z}^n} \mu([0,e)) \\ &= \alpha \sum_{a\in[0,b)\cap\mathbb{Z}^n} \lambda_n([0,e)) = \alpha \sum_{a\in[0,b)\cap\mathbb{Z}^n} \lambda_n(\tau_a([0,e))) = \alpha\lambda_n([0,b)).\end{aligned}$$

Schritt 2: Quader mit rationalen Eckpunkten. Sei nun $b \in \mathbb{Q}^n$ mit $b \geq 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $kb \in \mathbb{N}^n$. Den Quader $[0,kb)$ können wir durch k^n Kopien von $[0,b)$ überdecken. Auf den Quader $[0,kb)$ können wir das Resultat von Schritt 1 anwenden. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}k^n\mu([0,b)) &= \sum_{a\in\{0\dots k-1\}^n} \mu(\tau_{ab}([0,b))) = \mu([0,kb)) \\ &= \alpha\lambda_n([0,kb)) = \dots = \alpha k^n \lambda_n([0,b)).\end{aligned}$$

Hier haben wir verkürzt $ab := (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$ geschrieben. Da μ und λ translationsinvariant sind, folgt die Behauptung für alle Quader $[a, b)$ mit rationalen Eckpunkten $a, b \in \mathbb{Q}^n$.

Schritt 3: Offene Mengen. Sei O offen. Nach Satz 1.14 ist O eine disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Quader (I_j) mit rationalen Eckpunkten, $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, $I_j \in \mathbb{J}_r(n)$, und die (I_j) sind paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\mu(O) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(I_j) = \alpha \lambda_n(O).$$

Schritt 4: Beschränkte Mengen. Sei $A \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(n)$ beschränkt. Sei U eine offene und beschränkte Menge mit $A \subseteq U$. Damit ist $\lambda_n(U) < \infty$ und wegen Schritt 4 auch $\mu(U) < \infty$. Sei $\epsilon > 0$. Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes Satz 1.68 existiert eine offene Menge $O \supseteq A$ und eine kompakte Menge $K \subseteq A$, so dass

$$\lambda_n(O) - \epsilon \le \lambda_n(A) \le \lambda_n(K) + \epsilon.$$

Wegen Schritt 3 ist

$$\mu(K) = \mu(U) - \mu(U \setminus K) = \alpha(\lambda_n(U) - \lambda_n(U \setminus K)) = \alpha \lambda_n(K),$$

so dass

$$\mu(A) \le \mu(O) = \alpha \lambda_n(O) \le \alpha \lambda_n(A) + \alpha \epsilon$$

und

$$\mu(A) \ge \mu(K) = \alpha \lambda_n(K) \ge \alpha \lambda_n(A) - \alpha \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu(A) = \alpha \lambda_n(A)$. (Hier haben wir $\alpha < +\infty$ benötigt.)

Schritt 5: Beliebige Mengen. Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann gilt $\mu(A \cap B_k(0)) = \alpha \lambda_n(A \cap B_k(0))$ für alle k. Grenzübergang $k \to \infty$ mithilfe von (1.29) beweist die Behauptung. □

Lemma 1.78. *Es seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$ für alle $B \in \mathcal{B}(Y)$.*

Beweis. Wir betrachten $f_*(\mathcal{B}(X)) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)\}$, was nach Beispiel 1.4 eine σ-Algebra ist. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(X)$ für alle offenen Mengen $O \subseteq Y$, und damit $O \in f_*(\mathcal{B}(X))$. Also ist $f_*(\mathcal{B}(X))$ eine σ-Algebra, die alle offenen Mengen aus Y enthält, damit ist $\mathcal{B}(Y) \subseteq f_*(\mathcal{B}(X))$, was die Behauptung ist. □

Satz 1.79. *Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt $\lambda_n(A) = \lambda_n(QA)$ für alle $A \in \mathcal{B}^n$, wobei $QA := \{Qx : x \in A\}$.*

Beweis. Die Abbildung $x \mapsto Q^{-1}x$ ist stetig, und $QA \in \mathcal{B}^n$ für alle $A \in \mathcal{B}^n$ nach Lemma 1.78. Definiere $\mu(A) := \lambda_n(QA)$. Dann ist μ ein Maß auf $\mathcal{B}^n$. Weiter ist μ translationsinvariant: $\mu(\tau_a(A)) = \lambda_n(Q(A+a)) = \lambda_n(QA+Qa) = \lambda_n(QA) = \mu(A)$. Sei $A := [0,1)^n$. Dann ist QA in einer Kugel vom Radius $\operatorname{diam}(A) = \sqrt{n}$ enthalten. Damit ist $\mu(A) < \infty$. Nach Satz 1.77 ist $\mu(A) = \alpha\lambda_n(A)$. Wir zeigen nun $\alpha = 1$: Sei $B = B_1(0)$ die offene Einheitskugel. Dann ist $QB = B$ und $\alpha = 1$ folgt (denn $\lambda_n(B) < \infty$). □

Satz 1.80. *Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt $\lambda_n(SA) = |\det(S)|\lambda_n(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}^n$.*

Beweis. Der Beweis folgt dem von Satz 1.79. Definiere $\mu(A) := \lambda_n(SA)$. Dann ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^n$. Für $A := [0,1)^n$ ist SA in einer Kugel vom Radius $\sqrt{n}\|S\|_2$ enthalten. Damit ist $\mu(SA) < \infty$. Nach Satz 1.77 ist $\mu(A) = \alpha\lambda_n(A)$.

Wir benutzen nun die Singulärwertzerlegung von S: Die Matrix S^TS ist symmetrisch, also diagonalisierbar. Dann existiert eine orthogonale Matrix Q mit $Q^TS^TSQ = D$, wobei D diagonal mit positiven Diagonaleinträgen d_{ii} ist. Sei Σ die Matrix mit Diagonaleinträgen $d_{ii}^{1/2}$. Dann gilt $D = \Sigma^2$ und $\Sigma^{-1}Q^TS^TSQ\Sigma^{-1} = I_n$, also ist $P := \Sigma^{-1}Q^TS^T$ orthogonal, und es gilt $PSQ = \Sigma$. Dann bekommen wir für $A := [0,1)^n$

$$\mu(QA) = \lambda_n(SQA) = \lambda_n(P^T\Sigma A) = \lambda_n(\Sigma A),$$

wobei wir Satz 1.79 benutzt haben. Nun ist $\Sigma A = [0, \Sigma e)$ mit $e = (1,\dots,1)^T$, so dass $\lambda_n(\Sigma A) = \operatorname{vol}_n([0,\Sigma e)) = \prod_{i=1}^n d_{ii}^{1/2} = \det\Sigma$. Es gilt $\det\Sigma = (\det D)^{1/2} = |\det S|$. Damit ist

$$\mu(QA) = |\det S|\lambda_n(A) = |\det S|\lambda_n(QA),$$

und es folgt $\alpha = |\det S|$, was die Behauptung war. □

1.7 Existenz nicht Lebesgue-messbarer Mengen

Definition 1.81. *Das Auswahlaxiom der Mengenlehre ist: Es sei $(F_i)_{i\in I}$ ein System nicht-leerer Mengen. Dann existiert eine Abbildung f auf I mit $f(i) \in F_i$ für alle $i \in I$.*

Nimmt man $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ als System nicht-leerer Mengen, dann ist es schwierig (unmöglich?) eine Auswahlfunktion f anzugeben. Das Auswahlaxiom ist auch nötig, um zu beweisen, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist: die Existenz einer Abzählfunktion für jede der abzählbar vielen Mengen ist nicht klar ohne Auswahlaxiom. Als weitere Illustration des Auswahlaxioms soll folgendes auf Russell zurückgehendes Beispiel dienen: “Um aus unendlich vielen Paaren Socken jeweils eine Socke auszuwählen brauchen wir das Auswahlaxiom, für Schuhe wird es nicht benötigt: wir können jeweils den linken Schuh auswählen.”

Satz 1.82. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu jeder der folgenden Aussagen:*

(1) Jeder Vektorraum hat eine Basis.

(2) Jede surjektive Funktion $f : X \to Y$ hat eine Rechtsinverse, d.h., es existiert $g : Y \to X$ mit $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

Lemma 1.83. *Gilt das Auswahlaxiom, dann existiert eine nicht λ^1-messbare Teilmenge A von $[0, 1]$, d.h., $A \notin \mathcal{L}(1)$.*

Beweis. Wir betrachten auf $[0, 1]$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Sei $K := [0, 1]/\sim$ die Menge der dazugehörigen Äquivalenzklassen. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Abbildung $f : K \to [0, 1]$ mit $f(\hat{x}) \in \hat{x}$, also eine Funktion, die jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten zuordnet (beziehungsweise aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten auswählt). Setze $V := f(K)$, was eine Auswahl von je einem Repräsentanten je Äquivalenzklasse ist. Wir zeigen nun, dass V nicht messbar ist.

Dazu zeigen wir, dass wir das Intervall $[0, 1]$ mit abzählbar vielen disjunkten Kopien von V überdecken können. Es gilt: $[0, 1] \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(q + V)$. Sei $r \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\hat{x} \in K$ mit $v \in \hat{x}$, $v \in V \cap \hat{x}$ und eine $q \in \mathbb{Q}$ mit $r = v + q$. Da $r, v \in [0, 1]$ ist $q = r - v \in [-1, 1]$. Offenbar gilt $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(q+V) \subseteq [-1, 2]$. Weiter bekommen wir: sind $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq q'$. Dann gilt $q + V \neq q' + V$.

Angenommen, V wäre messbar. Dann wäre auch $q + V$ messbar, und es würde folgen

$$1 = \lambda_1([0, 1]) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda_1(q + V) \leq \lambda_1([-1, 2]) = 3.$$

Nun ist aber $\lambda_1(q+V) = \lambda_1(V)$. Wegen der linken Ungleichung folgt $\lambda_1(V) > 0$, wegen der rechten Ungleichung aber $\lambda_1(V) \leq 0$. Ein Widerspruch. Also ist V nicht messbar. □

1.8 Metrische Maße

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, μ^* ein äußeres Maß auf X.

Definition 1.84. *μ^* heißt metrisches äußeres Maß, falls gilt:*

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n,\ d(A, B) > 0 \ \Rightarrow\ \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Dabei ist

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

Satz 1.85. *Sei μ^* ein metrisches äußeres Maß auf X. Dann gilt $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}(\mu^*)$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass offene Mengen in X μ^*-messbar sind. Dann enthält $\mathcal{A}(\mu^*)$ alle offenen Mengen, und ist damit eine Obermenge von $\mathcal{B}(X)$.

Sei nun $O \subsetneq X$ offen. Wir benutzen eine Streifentechnik. Für $j \in \mathbb{N}$ definiere

$$O_j := \left\{ x : \ d(x, O^c) > \frac{1}{j} \right\},$$

dann ist $d(O_j, O^c) \geq \frac{1}{j}$.

Sei nun $D \subseteq X$ mit $\mu^*(D) < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu^*(O \cap D) + \mu^*(O^c \cap D) &\leq \mu^*(O_j \cap D) + \mu^*((O \setminus O_j) \cap D) + \mu^*(O^c \cap D) \\ &= \mu^*((O_j \cup O^c) \cap D) + \mu^*((O \setminus O_j) \cap D) \\ &\leq \mu^*(D) + \mu^*((O \setminus O_j) \cap D), \end{aligned} \tag{1.86}$$

wobei wir benutzt haben, dass μ^* subadditiv und metrisch ist, und $d(O_j, O^c) > 0$ aufgrund der Konstruktion. Es bleibt zu zeigen, dass $\mu^*((O \setminus O_j) \cap D) \to 0$.

Wir zerlegen O weiter in Streifen

$$A_i := \left\{ x : \ \frac{1}{i+1} \leq d(x, O^c) \leq \frac{1}{i} \right\} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Damit bekommen wir

$$O \setminus O_j = \bigcup_{i=j}^{\infty} A_i$$

Die Mengen A_i und A_{i+1} haben keinen positiven Abstand, allerdings die Mengen A_i und A_{i+2}. Wir zeigen sogar, dass $d(A_i, A_{i+k}) > 0$ für $i, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$: Seien $x \in A_i$, $y \in A_{i+k}$, $z \in O^c$. Dann ist

$$d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z) \geq \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+k} = \frac{k-1}{(i+1)(i+k)} \geq \frac{1}{(i+1)(i+k)},$$

woraus $d(A_i, A_{i+k}) > 0$ folgt für $k \geq 2$. Dann haben alle an der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$ beteiligten Mengen positiven Abstand. Weil μ^* metrisch ist, kann per Induktion beweisen, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \mu^*(A_{2i} \cap D) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{m} A_{2i} \cap D) \leq \mu^*(D).$$

Analog bekommen wir

$$\sum_{i=1}^m \mu^*(A_{2i+1} \cap D) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^m A_{2i+1} \cap D) \leq \mu^*(D).$$

Addieren dieser beiden Ungleichungen ergibt

$$\sum_{i=1}^{2m+1} \mu^*(A_i \cap D) \leq 2\mu^*(D) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

so dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap D) \leq 2\mu^*(D) < \infty. \tag{1.87}$$

Aus der Konstruktion der O_j und A_i (und Subadditivität) folgt

$$\mu^*((O \setminus O_j) \cap D) = \mu^* \left(\bigcup_{i=j}^{\infty} (A_i \cap D) \right) \leq \sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(A_i \cap D).$$

Wegen (1.87) folgt $\lim_{j\to\infty} \mu^*((O \setminus O_j) \cap D) = 0$, und mit (1.86) folgt die Behauptung: O ist μ^*-messbar. □

Satz 1.88. *λ_n^* ist ein metrisches äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $d(A, B) =: \delta > 0$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es wegen Satz 1.55 eine Überdeckung von $A \cup B$ mit halboffenen Quadern $I_j \in \mathbb{J}_r(n)$ mit $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \epsilon.$$

Jeder Quader I_j kann wegen des noch zu beweisenden (offensichtlichen?) Resultats von Lemma 1.89 in eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Quader mit Durchmesser $\leq \delta/2$ zerlegt werden. Dabei ist die Summe der Volumina dieser Quader gleich $\mathrm{vol}_n(I_j)$. In der Zerlegung ersetzen wir I_j durch die endlich vielen kleinen Quader.

Daher können wir annehmen, dass wir eine Überdeckung von $A \cup B$ mit halboffenen Quadern $I_j \in \mathbb{J}_r(n)$, $\mathrm{diam}(I_j) < \delta$ für alle j, mit $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \epsilon$$

haben. Wir definieren jetzt zwei Indexmengen

$$J_A := \{j : \ I_j \cap A \neq \emptyset\}, \quad J_B := \{j : \ I_j \cap B \neq \emptyset\}.$$

Da $d(A,B) = \delta$ größer ist als der Durchmesser der I_j, ist $I_A \cap I_J = \emptyset$. Weiter gilt

$$\bigcup_{j \in J_A} I_j \supseteq A, \quad \bigcup_{j \in J_A} I_j \supseteq B.$$

Daraus folgt

$$\lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) \leq \sum_{j \in J_A} \operatorname{vol}_n(I_j) + \sum_{j \in J_B} \operatorname{vol}_n(I_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Lemma 1.89. *Sei $I \in \mathbb{J}_r(n)$. Dann gilt: für jedes $\epsilon > 0$ gibt es endlich viele, paarweise disjunkte $I_1 \dots I_m \in \mathbb{J}_r(n)$ mit den Eigenschaften*

(1) $I = \bigcup_{j=1}^m I_j$,

(2) $\operatorname{diam}(I_j) \leq \epsilon$ *für alle* j,

(3) $\operatorname{vol}_n(I) = \sum_{j=1}^m I_j$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass es ein $\rho \in (0,1)$ gibt, so dass wir für $\epsilon := \rho \operatorname{diam}(I)$ die Menge I wie gewünscht in zwei Quader zerlegen können.

Sie also $I = [a,b) \in \mathbb{J}_r(n)$ gegeben. Die längste Kante von I sei entlang der Koordinatenrichtung k, also $|b_k - a_k| \geq |b_i - a_i|$ für alle $i = 1 \dots n$. Definiere $m := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ und

$$\begin{aligned} I_1 &:= [a_1, b_1) \times [a_{k-1}, b_{k-1}) \times [a_k, m) \times [a_{k+1}, b_{k+1}) \times [a_n, b_n), \\ I_2 &:= [a_1, b_1) \times [a_{k-1}, b_{k-1}) \times [m, b_k) \times [a_{k+1}, b_{k+1}) \times [a_n, b_n). \end{aligned}$$

Dann gilt $I = I_1 \cup I_2$ und $\operatorname{vol}_n(I) = \operatorname{vol}_n(I_1) + \operatorname{vol}_n(I_2)$. Weiter ist $\operatorname{diam}(I) = \|b - a\|_2$ und

$$\operatorname{diam}(I_1)^2 = \operatorname{diam}(I_2)^2 = \frac{1}{4}(b_k - a_k)^2 + \sum_{i \neq k} (b_i - a_i)^2.$$

Damit folgt

$$\frac{\operatorname{diam}(I_1)^2}{\operatorname{diam}(I)^2} = \frac{\frac{1}{4}(b_k - a_k)^2 + \sum_{i \neq k}(b_i - a_i)^2}{(b_k - a_k)^2 + \sum_{i \neq k}(b_i - a_i)^2}.$$

Für $c_2 > c_1 > 0$ ist $x \mapsto \frac{c_1 + x}{c_2 + x} = 1 - \frac{c_2 - c_1}{c_2 + x}$ monoton wachsend für $x > 0$. Da $(b_i - a_i)^2 \leq (b_k - a_k)^2$ nach Definition von k, bekommen wir

$$\frac{\operatorname{diam}(I_1)^2}{\operatorname{diam}(I)^2} \leq \frac{\frac{1}{4} + (n-1)}{1 + (n-1)} = \frac{n - \frac{3}{4}}{n} =: \rho^2 \in (0,1).$$

Und wir haben die gewünschte Zerlegung in zwei Quader bekommen, so dass sich der Durchmesser um den Faktor ρ reduziert. Ist $\epsilon > 0$ gegeben, wenden wir diese Zerlegung rekursiv an, und bekommen nach endlich vielen Schritten die gewünschte Zerlegung. □

Bemerkung 1.90. *In der Konstruktion im Beweis war es wichtig, die längste Kante von I zu halbieren. Warum?*

1.9 Hausdorff-Maße

Wir betrachten nun eine weitere Möglichkeit, äußere Maße zu konstruieren. Sei (X, d) separabler metrischer Raum.

Seien $s > 0$ und $\epsilon > 0$. Für $A \subseteq X$ definiere

$$\mathcal{H}^s_\epsilon(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam}(O_j)^s : \ O_j \text{ offen}, \ \operatorname{diam}(O_j) < \epsilon \ \forall j, \ \bigcup_{j=1}^\infty O_j \supseteq A \right\}.$$

Dies ist ein äußeres Maß wegen Satz 1.37. Weiter ist $\epsilon \mapsto \mathcal{H}^s_\epsilon(A)$ monoton fallend, deshalb existiert

$$\mathcal{H}^s_*(A) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \mathcal{H}^s_\epsilon(A) = \sup_{\epsilon > 0} \mathcal{H}^s_\epsilon(A) \in [0, +\infty].$$

Satz 1.91. *Für $s > 0$ ist $\mathcal{H}^s_*$ ein äußeres Maß - das s-dimensionale Hausdorff-sche äußere Maß.*

Beweis. Die entsprechenden Eigenschaften bekommen wir direkt aus denen von $\mathcal{H}^s_\epsilon$. □

Satz 1.92. *$\mathcal{H}^s_*$ ist ein metrisches äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ für alle $s > 0$.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ mit $d(A, B) =: \delta > 0$. Sei $\epsilon \in (0, \delta)$. Sei $\eta > 0$. Dann gibt es offene Mengen (O_j) mit $\operatorname{diam}(O_j) < \epsilon$, $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty O_j$, und

$$\sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam}(O_j)^s \le \eta + \mathcal{H}^s_\epsilon(A \cup B).$$

Da $\operatorname{diam}(O_j) < \epsilon$, ist für alle j: $A \cap O_j = \emptyset$ oder $B \cap O_j = \emptyset$. Es sei $J := \{j : A \cap O_j \neq \emptyset\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_\epsilon(A) + \mathcal{H}^s_\epsilon(B) &\le \sum_{j \in J} \operatorname{diam}(O_j)^s + \sum_{j \notin J} \operatorname{diam}(O_j)^s \\ &= \sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam}(O_j)^s \le \eta + \mathcal{H}^s_\epsilon(A \cup B). \end{aligned}$$

Das gilt für alle $\eta > 0$, so dass $\mathcal{H}^s_\epsilon(A)+\mathcal{H}^s_\epsilon(B) \leq \mathcal{H}^s_\epsilon(A\cup B)$ folgt. Dies wiederum gilt für alle $\epsilon \in (0, \delta)$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Das aus dem äußeren Maß $\mathcal{H}^s_*$ enstehende Maß (vergleiche Satz 1.59) nennen wir das Hausdorff-Maß

$$\mathcal{H}^s := \mathcal{H}^s_*|_{\mathcal{A}(\mathcal{H}^s_*)}.$$

Per Konstruktion ist das Hausdorff-Maß translationsinvariant. Das Maß $\mathcal{H}^s$ ist nicht σ-endlich falls $s < n$. Man kann zeigen, dass jede λ_n-messbare Menge $\mathcal{H}^n$-messbar ist, [AE01, Korollar 5.22].