

Theoretische Mechanik Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 23, 2023)

Problem 1. (a) Bestimmen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung

$$x^2 = u + iv,$$

in Abhängigkeit von $u, v \in \mathbb{R}$

(b) Führen Sie das Nullstellenproblem

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus 0, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ auf den Fall in (a) zurück. Geben Sie weiterhin eine geschlossene Darstellung aller Lösungen für den Fall $a = 1$ an.

Hat alles geklappt, sollte bei Ihnen speziell für den Fall $a = 1$ und $\operatorname{Im}(b) = \operatorname{Im}(c) = 0$ die entsprechende Mitternachtsformel dastehen.

Proof. (a) $|x^2| = |x|^2 = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}$

Daraus folgt:

$$|x| = (u^2 + v^2)^{1/4},$$

$$x = (u^2 + v^2)^{1/4} e^{i\theta}.$$

Setze es in $x^2 = u + iv$ ein und löse die Gleichungen für θ . Sei $\varphi = \operatorname{atan}_2(u, v)$ Dann ist:

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \text{ oder } \theta = \frac{\varphi + 2\pi}{2}.$$

(b)

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

d.h.

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ x &= -\frac{b}{2a} + p \end{aligned}$$

wobei p die Lösung zu $p^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ ist.

□

Problem 2. Finden Sie für die Polynome $p, d \in \mathbb{C}[x]$ jeweils solche $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r) < \deg(d)$, dass $p = qd + r$ gilt.

(a) $p = x^7 + x^5 + x^3 + 1, d = x^2 + x + 1$

(b) $p = x^5 + (3 - i)x^3 - x^2 + (1 - 3i)x + 1 + i, d = x^2 + i$

(c) Wie sehen s, r aus, wenn man in (a) und (b) jeweils die Rollen von p und d vertauscht?

D.h. bestimmen Sie $s, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg r < \deg p$, sodass $d = sp + r$ gilt.

Proof. (a)

$$\begin{array}{r} x^5 - x^4 + x^3 \\ \hline x^2 + x + 1 \quad x^7 \quad + x^5 \quad + x^3 + 1 \\ - x^7 - x^6 - x^5 \\ \hline - x^6 \\ x^6 + x^5 + x^4 \\ \hline x^5 + x^4 + x^3 \\ - x^5 - x^4 - x^3 \\ \hline 1 \end{array}$$

Daher

$$q = x^5 - x^4 + x^3, r = 1.$$

(b) $q = x^3 + (3 - 2i)x - x, r = -(1 + 6i)x + (1 + 2i)$

(c) $r = d, s = 0$

□

Problem 3. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -38 \\ -46 \\ -18 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\text{Im}(A)$ und $\ker(A)$

(b) Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$ und $\text{Lös}(A, c)$.

Proof. (a)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei dann $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Wenn $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \ker(A)$, gilt

$$t_3 := x_3$$

$$t_4 := x_4$$

$$x_1 = x_3 - x_4 = t_3 - t_4$$

$$x_2 = -x_3 - 2x_4 = -t_3 - 2t_4$$

Daraus folgt:

$$\ker(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -46 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_1} \\
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = -18$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 = -10$$

Deswegen ist $\text{Lös}(A, b)$

$$\begin{pmatrix} -18 + x_3 - x_4 \\ -10 - x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Es gibt keine Lösungen, weil $0 \neq 1$, also $\text{Lös}(A, c) = \emptyset$

□

Problem 4. Gegeben seien die \mathbb{R} -Vektorräume V mit Basis $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ und Basis $B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Wir definieren einen linearen Operator $T : V \rightarrow W$ wie folgt:

$$T(v_1) = w_1 + w_3 \quad T(v_2) = w_1 + w_2, T(v_3) = -w_1 - w_2 - w_3.$$

(a) $w_1, w_2, w_3 \in \text{span} \{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$, weil

$$w_1 = T(v_1) + T(v_2) + T(v_3)$$

$$w_2 = (-1)(T(v_3) + T(v_1))$$

$$w_3 = (-1)(T(v_2) + T(v_3))$$

Daraus folgt:

$$W = \text{span}(w_1, w_2, w_3) = \text{span}(T(v_1), T(v_2), T(v_3)).$$

Daraus folgt:

$$\text{im}(T) = \mathbb{R}^3, \quad \ker(T) = \{0\}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$B_W^* = \{w_1 + w_3, w_1 + w_2, -w_1 - w_2 - w_3\}.$$

(d)

$$B_V^* = \{v_1 + v_2 + v_3, -(v_1 + v_3), -(v_2 + v_3)\}.$$