Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

Analysis 2

Stefan Waldmann

Wintersemester 2023/2024

Hausaufgabenblatt Nr. 12

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)
Git revision of ana2-ws2324: `(None)` (None)

24. 01. 2024
(22 Punkte. Abzugeben am 01. 02. 2024)

Hausaufgabe 12-1: Ableitung der Determinante

Begründen Sie, warum die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung im Punkt $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche besondere Form nimmt $D\det(\mathrm{Id})$ an?

(5 Punkte)

Hausaufgabe 12-2: Hesse-Matrix und Extremwerte

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so kann die zweite Ableitung $D^2 f$ in jedem Punkt $x \in U$ durch eine bilineare Abbildung $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ darstellen. Für eine gegebene Basis auf dem $\mathbb{R}^n$ - wir wählen die kanonische Basis hier - lassen sich bilineare Abbildungen durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ darstellen, die sog. Hesse-Matrix Hf mit

$$Hf(x,y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{i,j=1,\ldots,n} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die partiellen Ableitungen nach dem Satz von Schwarz vertauschen, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch.
Es sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

i.) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt genau dann besitzt, wenn die Hesse-Matrix von f (in $(0,0)$) positiv semi-, negativ semi- bzw. indefinit ist. **(3 Punkte)**

ii.) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für allgemeine Funktionen mit positiv (bzw. negativ) semidefiniter Hesse-Matrix im kritischen Punkt kein lokales Minimum (bzw. Maximum) vorliegen muss. **(2 Punkte)**

Hausaufgabe 12-3: Beispiel zur lokalen Umkehrbarkeit

Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)^\top.$$

i.) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F. **(1 Punkt)**

ii.) In welchem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ existiert die Inverse von $JF(p)$? **(1 Punkt)**

iii.) Finden Sie eine lokale inverse Abbildung F^{-1} von F in einer Umgebung von $p = (1,0) = F(1,0)$ und berechnen Sie die Ableitung von F^{-1} in p. **(3 Punkte)**

iv.) Ist F auf dem ganzen Gebiet $\{p \in \mathbb{R}^2 |\ JF(p) \text{ invertierbar}\}$ global invertierbar? **(1 Punkt)**

Hausaufgabe 12-4: Glattheit der Inversen

Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen wir die Glattheit der Inversen-Abbildung $\mathrm{inv} : GL(n) \to GL(n)$. Gehen Sie wie folgt vor:

i.) Begründen Sie, dass die Abbildung $A \cdot B \mapsto AB$ auf $\mathbb{R}^{n \times n^2}$ unendlich oft differenzierbar ist. **(2 Punkte)**

ii.) Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um $\mathrm{inv} \in \mathcal{C}^\infty(GL(n), GL(n))$ zu beweisen. **(4 Punkte)**

Hinweis: Betrachten Sie $A \cdot B = \mathrm{Id}$.