Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 20, 2023)

Problem 1. Berechnen Sie die JNF und die jeweiligen Basisvektoren für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 22 & 7 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proof. Das charakteristische Polynom von A ist $-(x-1)^3$, also der einzige Eigenwert ist 1. Wir schreiben

$$A - 1I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 22 & 7 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$(A - 1I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -6 \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass $(\lambda - 1)^2$ kein Minimalpolynom ist. Da das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilen muss, ist das Minimalpolynom $(\lambda - 1)^3$. Wir berechnen den Kern von $(A - I_3)^2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -15 & -6 \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

also der Kern ist

$$\ker(A - I_3)^2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Wir suchen einen Vektor, der nicht im Kern liegt, aber im Kern von $(A - I_3)^3$ liegt. Ein solcher Vektor ist $(0, 1, 1)^T$. Dann wählen wir als Basis

$$\begin{aligned} b_1 &= (0, 1, 1)^T \\ b_2 &= (A - I_3)(0, 1, 1) = (29, 5, 2)^T \\ b_3 &= (A - I_3)b_2 = (-21, -7, 7) \end{aligned}$$

Bzgl. diese Basis $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ ist

$$_B[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$