Wintersemester 2023/24 18.12.2023
Prof. Dr. Stephan Elsenhans Benedikt Wolf

Lineare Algebra: Aufgabenblatt 10

10.1 Fibonacci-Folge /10 Punkte

Die Fibonacci-Folge ist definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

10.2 Eine Summenformel /5 Punkte

Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit $A^m = 0$. Zeigen Sie: Dann gilt $(E_n - A)(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) = E_n$.

10.3 Geometrische Abbildungen /25 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob es eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, die die gegebenen Eigenschaften erfüllt. Entscheiden Sie zudem, ob diese eindeutig ist. Falls es genau eine solche Abbildung gibt, skizzieren Sie das Bild des Quadrates mit den Eckpunkten $P = (0,0), Q = (1,0), R = (1,1), S = (0,1)$ unter dieser Abbildung in einem geeigneten Koordinatensystem. Sie müssen Ihre Skizze nicht begründen.

(a) fro mit $fro((1,0)) = (1,0)$ und $fro((0,1)) = (1,1)$.

(b) pa mit $pa((3,6)) = (1,1)$, $pa((4,7)) = (3,4)$ und $pa((7,13)) = (9,3/4)$

(c) $hewe$ mit $hewe((1,3)) = (2,6)$, $hewe((2,3)) = (8,12)$ und $hewe((3,6)) = (10,18)$

(d) ihn mit $ihn((2,4)) = ((6,16))$ und $ihn((-1,2)) = ((-3,4))$

(e) un mit $un((2,3)) = (3,4)$ und $un((4,6)) = (6,8)$

(f) ach mit $ach((1,0)) = (1,0)$ und $ach(3/5, -1/5) = (12/25, -4/25)$

(g) ten mit $ten((2,4)) = (1,2)$ und $ten((1,1)) = (2,4)$

10.4 Kommutator /20 Punkte

Für einen Körper K und zwei quadratische, gleich große Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ definieren wir den *Kommutator* $[A,B]$ von A und B als $[A,B] := AB - BA \in K^{n\times n}$.

(a) Berechnen sie $[A,B]$ für $K = \mathbb{R}$, $n = 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Finden sie ein Beispiel für $A \neq B$ mit $[A,B] = 0$, wobei A und B keine skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix sein sollen.

Es definiert also $[\cdot,\cdot] : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K^{n\times n}$ eine Verknüpfung auf $K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(c) Die Verknüpfung $[\cdot,\cdot]$ hat für kein $n \in \mathbb{N}$ ein Linksneutrales, d.h. es existiert kein $E \in K^{n\times n}$ mit $[E,A] = A$ für alle $A \in K^{n\times n}$.

(d) Zeigen Sie für die Matrizen A, B aus Teilaufgabe (a) $[[A,B],B] \neq 0$ und folgern Sie: Die Verknüpfung $[\cdot,\cdot]$ ist für $n = 3$ nicht assoziativ.

10.5 Parallelotope **/15 Punkte**

Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^m$, dann nennen wir

$$P(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n | \forall i \in \{1, \dots, n\} : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

das von $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte n-Parallelotop.

(a) Zeigen Sie: Jedes Rechteck $[0, a] \times [0, b] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ ist ein 2-Parallelotop und jeder Quader $[0, a] \times [0, b] \times [0, c] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ ist ein 3-Parallelotop.

(b) Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie $L([0, 2] \times [0, 3] \times [0, 1])$ in einem geeigneten Koordinatensystem. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

(c) Zeigen Sie: Ist $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine bijektive lineare Abbildung und $P(v_1, \dots, v_n)$ ein n-Parallelotop, dann ist $\phi(P(v_1, \dots, v_n)) = P(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))$ und dies ist ein n-Parallelotop.

(d) Es sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $p(x, y, z) = (x, y)$. Bestimmen und skizzieren Sie $p(P((1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 2, 1)))$. Begründen Sie, dass dies *kein* Parallelotop ist.

10.6 Dualraum **/25 Punkte**

Es sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Wir betrachten den Vektorraum $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$.

(a) Zeigen Sie: Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V, dann wird für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ durch $b_i^*(b_j) := \delta_{ij}$ für $j = 1, \dots, n$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung festgelegt.

(b) Zeigen Sie: $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ ist ein Erzeugendensystem von V^*

(c) Zeigen Sie: $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ ist linear unabhängig.

Sei W ein weiterer endlich dimensionaler Vektoraum mit Basis $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ und $L : V \to W$ linear.

(d) Zeigen Sie: Die Abbildung $L^* : W^* \to V^*$ mit $\omega \mapsto \omega \circ L$ ist linear.

(e) Die Abbildung L habe bezüglich der Basen $(b_1, \dots, b_n)$ und $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ die Darstellungsmatrix A. Zeigen Sie, dass L^* bezüglich der Basen $(\beta_1^*, \dots, \beta_m^*)$ und $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ die Darstellungsmatrix A^T hat.

10.7 Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr

Wir wünschen Ihnen allen frohe Festtage, gute Erholung in den zwei vorlesungsfreien Wochen und einen guten Start ins Jahr 2024.

Abgabetermin: **08.01.2024, 11:00 Uhr auf WueCampus**
Maximal 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Begründen Sie Ihre Behauptungen. Sofern nicht anders angegeben, dürfen Sie nur Aussagen verwenden, die in der Vorlesung oder in den Übungen bereits bewiesen wurden. $\sum$ **/100**

Lösungshinweise

Aufgabe 1:
...

Aufgabe 2:
Eine Matrix mit dieser Eigenschaft nennt man auch nilpotent. Ohne Wertung: Können Sie eine Matrix A mit $A^3 = 0$, aber $A^2 \neq 0$ angeben?

Aufgabe 3:
...

Aufgabe 4:
Was „bedeutet“ die Eigenschaft $[A, B] = 0$ für die Matrizen A und B?

Aufgabe 5:
Streng genommen betrachten wir hier nur n-Parallelotope, bei denen eine Ecke die 0 ist.
Die 2-Parallelotope sind genau die Parallelogramme, die 1-Parallelotope entsprechen Strecken (das dürfen Sie ohne Beweis verwenden). Ein 3-Parallelotop nennt man auch Parallelepiped.

Aufgabe 6:
Der Vektorraum V^* wird auch als *Dualraum* bezeichnet, seine Elemente heißen *lineare Funktionale*. Die Basis $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ nennt man auch duale Basis.
Was passiert, wenn Sie $\omega \in V^*$ an der Stelle b_i auswerten?
Achtung: Die Abbildungen $W \to V$, $x \mapsto A^T x$ und die Abbildung L^* sind voneinander verschieden, sie haben nur nach entsprechender Wahl der Basen die gleiche Darstellungsmatrix. Die Abbildung L^* nennt man auch die zu L duale Abbildung.

Aufgabe 7:
...

weiterführende Zusatzaufgaben (Bonuspunkte oder unbewertet, nicht klausurrelevant)

10.8 Lie-Algebra **/10 Punkte**

Ein Vektorraum V, der zusätzlich mit einer Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : V \times V \to V$ ausgestattet ist, heißt **Lie-Algebra**, falls die folgenden Bedingungen für alle $x, y, z \in V$ erfüllt sind:

(LA1) $[x, z] = -[z, x]$.

(LA2) $[\lambda x + y, z] = \lambda[x, z] + [y, z]$ für alle $\lambda \in K$.

(LA3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $K^{n \times n}$ mit dem Kommutator eine Lie-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass in jeder Lie-Algebra auch die Gleichung $[x, \lambda y + z] = \lambda[x, y] + [x, z]$ gilt.