

Wintersemester 2023/24

3. Übung zur Vertiefung Analysis

1. November 2023

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 8. November 2023* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

Aufgabe 3.1 (äußeres Lebesgue-Maß, 3 Punkte) Sei λ_n^* das äußere Lebesgue-Maß und $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) A ist λ_n^* -messbar.
- (b) Es gilt $\lambda_n^*(A \cap Q) + \lambda_n^*(A^c \cap Q) = \lambda_n^*(Q)$ für alle $Q \in \mathbb{J}(n)$.

Aufgabe 3.2 (Maßerweiterung, 6 Punkte) Sei (X, \mathcal{A}, ν) ein Maßraum und μ^* das von (\mathcal{A}, ν) induzierte äußere Maß auf X , d.h. in Satz 1.37 ist $K = \mathcal{A}$ und $\nu = \nu$. Nach Satz 1.59 induziert μ^* ein Maß $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ auf der σ -Algebra $\mathcal{A}(\mu^*)$.

- (a) Zeigen Sie, dass μ eine sogenannte Erweiterung von ν ist, also dass
 - 1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mu^*)$ und
 - 2. $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.
- (b) Gilt sogar $\mu = \nu$, also $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mu^*)$?