

Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 26, 2023)

Problem 1. Gegeben sei die Relation $\sim \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn es eine Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, die $0, x$ und y enthält.

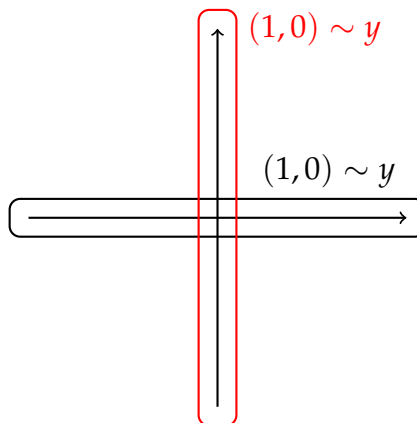
- (a) Bestimmen Sie alle $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $(0,1) \sim y$ bzw. $(1,0) \sim y$ und skizzieren Sie die beiden Mengen in einem geeigneten Koordinatensystem.
- (b) Begründen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.
- (c) Bleibt \sim auch dann eine Äquivalenzrelation, wenn man sie als Relation in \mathbb{R}^2 betrachtet?

Proof. (a) Eine Gerade hat den Form

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}.$$

Weil $(0,0)$ in der Gerade ist, gilt $b = 0$. Für die zwei Fälle:

- (i) $(0,1)$ ist in der Gerade. Es gilt dann $a_2 = 0, a_1 \in \mathbb{R}$. Die Gleichung der Gerade ist dann $x_1 = 0$, oder alle Punkte des Forms $(0, y), y \in \mathbb{R}$.
- (ii) $(1,0)$ ist in der Gerade. Es gilt dann $a_1 = 0, a_2 \in \mathbb{R}$. Die Gerade enthält ähnlich alle Punkte des Forms $(x, 0), x \in \mathbb{R}$.



* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) (i) $x \sim x$ (Reflexivität)

Es gibt immer eine Gerade zwischen 0 und x . Eine solche Gerade enthält x per Definition.

(ii) $x \sim y \iff y \sim x$ (Symmetrie)

Es gibt eine Gerade, die 0, x und y enthält. Deswegen gilt die beide Richtung der Implikationen.

(iii) $x \sim y$ und $y \sim z \implies x \sim z$ (Transitivität)

Es gibt eine Gerade zwischen 0, x und y , und eine Gerade zwischen 0, y und z . Weil die beide Geraden zwischen y geht, sind die Geraden gleich, und enthält x und z , daher $x \sim z$.

(c) Nein. $(1,0) \sim (0,0)$, $(0,1) \sim (0,0)$, aber $(1,0) \sim (0,1)$ stimmt nicht.

□

Problem 2. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$, s die Spiegelung in \mathbb{R}^2 , $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Translation um $(1,0)$ und $em : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Einbettung.

(a) Bilden Sie die Verkettungen $f \circ em, em \circ f, s \circ f, T \circ s, s \circ T$ und $em \circ s$. Geben Sie dabei jeweils Argumentmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift an.

(b) Untersuchen Sie die Funktionen aus der vorherigen Teilaufgabe auf Surjektivität, Injektivität bzw. Bijektivität.

(c) Sei $F = em \circ T \circ s \circ f$. Bestimmen und skizzieren Sie das Bild bzw. Urbild von $[0,1] \times [-1,1] \times [0,2]$ unter F .

Proof. (a) (i) $f \circ em$

Argumentmenge: \mathbb{R}^2

Zielmenge: \mathbb{R}^2

Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2) = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$

(ii) $em \cdot f$

Argumentmenge + Zielmenge: \mathbb{R}^3

Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, 0)$

(iii) $s \cdot f$ Argumentmenge: \mathbb{R}^3 Zielfmenge: \mathbb{R}^2 Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1)$ (iv) $em \circ s$ Argumentmenge: \mathbb{R}^2 Zielfmenge: \mathbb{R}^3 Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1, 0)$ (b) (i) $f \circ em$

Surjektive, injektive und auch bijektive

(ii) $em \circ f$

Injektiv, aber nicht surjektiv (und deswegen nicht Bijektiv)

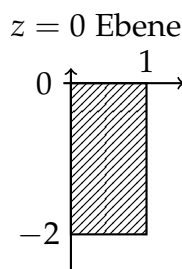
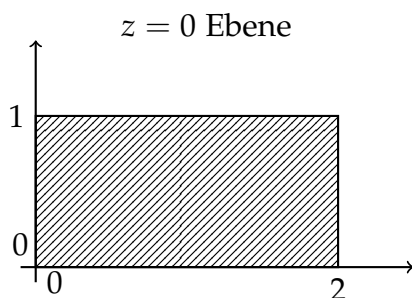
(iii) $s \circ f$

Surjektive, aber nicht injektiv

(iv) $em \circ s$

Injektiv, aber nicht surjektiv

(c)

Bild: $[0, 2] \times [0, 1] \times \{0\}$ Urbild: $[0, 1] \times [-2, 0] \times \mathbb{R}$ 

□

Problem 3. Es sei M eine beliebige, nichtleere Menge und $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung. Wir definieren induktiv $f^0 := id$ und für $k \in \mathbb{N}$ $f^k := f \circ f^{k-1}$.

(a) Zeigen Sie: $f^{k+l} = f^k \circ f^l$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$

- (b) Zeigen Sie: Gibt es $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $f^{k_0+l} = f^{k_0}$, dann gilt $f^{k+l} = f^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq k_0$.
- (c) Geben Sie eine Funktion $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an, für die $f^1 \neq f^3$, aber $f^{k+2} = f^k$ für alle $k \geq 2$ gilt. Begründen Sie, dass Ihre Funktion diese Eigenschaft hat.

Proof. (a) Wir beweisen es per Induktion auf k . Für $k = 1$ gilt es per Definition (es wird in der Frage gegeben). Jetzt nehme an, dass es für ein beliebige $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)+l} &= f \circ f^k \circ f^l \\ &= f^{k+1} \circ f^l \end{aligned}$$

Deswegen gilt es auch für $k + 1$, und daher für alle $k \in \mathbb{N}$.

- (b) Sei $k = k_0 + k'$. Es gilt

$$f^{k+l} = f^{k_0+k'+l} = f^{k_0} = f^{k_0+k'} = f^k.$$

- (c) Sei f definiert durch

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 2$$

$$f(4) = 1$$

$$f(5) = 4$$

Es gilt dann

x	$f^1(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$f^5(x)$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	4	1	1	1	1

$f^1 \neq f^3$, weil $f^1(3) \neq f^3(3)$. Aber $f^k(x) = 1 \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, k \geq 2$. Daher ist $f^{k+2} = f^k, k \geq 2$. \square

Problem 4. Es seien M, N Mengen, m, n natürliche Zahlen und die Abbildungen $f : M \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}, g : N \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ bijektiv. Finden Sie eine natürliche Zahl k und eine bijektive Abbildung $F : M \times N \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Proof. $k = nm$, und

$$F(a, b) = a + (b - 1)m.$$

Das ist bijektiv. F ist maximal, wenn $a = m, b = n$. Dann ist $F = m + (n - 1)m = nm$.

Sei $x \in \{1, 2, 3, \dots, nm - 1\}$ gegeben. Es gibt eindeutige Zahlen $a, b - 1$, so dass

$$x = (b - 1)m + a, a < m$$

gilt (Division mit Rest). Weil es solche Zahlen für alle x gibt, ist F surjektiv. Weil sie eindeutig sind, ist F injektiv. F ist dann bijektiv. \square