

## 8. Übung zur Einführung in die Algebra

Abgabe online in WueCampus bis zum 08.01.2024, 12 Uhr

### Aufgabe 8.1 (2+2 Punkte)

- (a) Eine Gruppe  $G$  der Ordnung 21 operiere auf einer Menge  $M$  mit 11 Elementen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Bahn der Länge 1 besitzt.  
(Ist  $\{m\} \subseteq M$  eine solche einelementige Bahn, dann gilt  $g.m = m$  für alle  $g \in G$ . Jedes  $g \in G$  fixiert also  $m$ . Man nennt  $m$  daher auch einen *Fixpunkt der Operation*.)
- (b) Sei  $G := \text{GL}(2, \mathbb{C})$  die Gruppe der invertierbaren komplexen  $(2 \times 2)$ -Matrizen und  $M$  die Menge aller komplexen  $(2 \times 2)$ -Matrizen, die nur reelle Eigenwerte besitzen. Dann operiert  $G$  per Konjugation auf  $M$ . (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation an.

### Aufgabe 8.2 (4 Punkte; Staatsexamen Herbst 2023)

Von der endlichen Gruppe  $G$  sei bekannt, dass sie nicht abelsch ist und zu jedem positiven Teiler  $t$  von  $|G|$  mindestens eine Untergruppe der Ordnung  $t$  besitzt. Zeigen Sie, dass  $G$  nicht einfach ist. (Hinweis: Sei  $p$  die kleinste Primzahl, die  $|G|$  teilt, und  $U$  eine Untergruppe von  $G$  vom Index  $p$ . Lassen Sie  $G$  auf den Nebenklassen von  $U$  operieren und betrachten Sie den Kern des zugehörigen Homomorphismus.)

### Aufgabe 8.3 (4 Punkte)

Benutzen Sie die Beweisidee aus Korollar 2.79, um folgende Aussage zu zeigen:  
Seien  $p$  eine Primzahl,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p^n$  und  $\{e\} < N \trianglelefteq G$  ein nicht-trivialer Normalteiler von  $G$ . Dann gilt  $|Z(G) \cap N| > 1$ .

### Aufgabe 8.4 (4 Punkte)

Die Gruppe  $G$  operiere auf einer Menge  $M$ . Sei  $\Phi : G \rightarrow \text{Sym}(M)$  der zugehörige Homomorphismus und  $K$  sein Kern. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$G/K \times M \rightarrow M, \quad gK.m := g.m$$

eine treue Operation von  $G/K$  auf  $M$  gegeben ist.

Das Algebra-Team wünscht Ihnen ein frohes Weihnachtsfest  
und ein erfolgreiches Jahr 2024!

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.  
Beachten Sie, dass Sie die Lösungen zu diesem Übungszettel erst im Januar abgeben müssen. Es wird keinen weiteren Algebra-Übungszettel über die Weihnachtsferien geben.