Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 12

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 25, 2024)

Problem 1. Betrachten Sie die komplexen 3×3-Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -i \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der Matrzen sind positiv, welche sogar positiv definit?

Proof. Wir berechnen das Spektrum von A_1. Es gilt für das charakteristiches Polynom

$$P(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda.$$

Die Nullstellen bzw. Eigenwerte sind $\lambda = 0$ und $\lambda = 6$. Dann ist A_1 positiv. Weil $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, ist $\det(A_1) = 0$ und A_1 ist nicht invertierbar.

A_2 ist nicht positiv, weil $A_2 \neq A_2^*$.

Wir berechnen noch einmal das Spektrum von A_3. Es gilt für das charakteristische Polynom.

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -x^3 + 8x^2 - 13x + 2.$$

Die Nullstellen sind $x = 2$ und $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$, also A_3 ist positiv. Da 0 kein Nullstelle ist, ist $\det(A_3) \neq 0$ und A_3 ist invertierbar, also A ist positiv definit. □

Problem 2. Betrachten Sie den unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ selbstadjungiert und $A = U^{-1}DU$, wobei U eine invertierbare Matrix und D eine Diagonalmatrix sind. Sei $P_i = U^{-1}M_iU$ mit Diagonalmatrix M_i, sodass

$$(M_i)_{kk} = \begin{cases} 1 & D_{kk} = \lambda_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gilt. Zeigen Sie, dass P_i eine Orthogonalprojektion auf den Eigenraum von λ_i ist.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Bestimmen Sie den Positivteil $(A_i)_+$, den Negativteil $(A_i)_-$ und den Absolutbetrag $|A_i|$ für $i = 1, 2$ der folgenden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. (a) $P_i^2 = U^{-1}M_iUU^{-1}M_iU = U^{-1}M_i^2U = U^{-1}M_iU = P_i$. Sei v ein Eigenvektor mit Eigenwert λ. D.h. $Uv = e_i$ für eine geeignete Basisvektor e_i. Dann ist $(M_j)_{kk}Uv = 0$, wenn j einen anderen Eigenwert entspricht. Dann ist im P_i der Eigenraum mit Eigenwert λ_i.

Da A selbstadjugiert und daher normal ist, sind die Eigenräume orthogonal, und P_i ist ein Orthogonalprojektor.

(b) Wir berechnen die Eigenvektoren und Eigenwerte von den Matrizen. Für A_1 sind die Eigenwerte $2, 2$ und -1. Die Eigenvektoren sind $(-1, 0, 1)$ und $(-1, 2, -1)$ bzgl. des Eigenwerts 2 und $(1, 1, 1)$ bzg. des Eigenwerts -1.

Dann diagonalisieren wir A_1:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_1 = U \operatorname{diag}(2, 2, -1) U^{-1}$$

Dann ist das Positivteil $U\operatorname{diag}(2, 2, 0)U^{-1}$, oder

$$(A_1)_+ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

und

$$(A_1)_- = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag ist

$$|A_1| = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ähnlich sind die Eigenwerte von B ± 3 und ± 2. Die Eigenvektoren sind

$$\begin{aligned} \mathrm{EW} = -3 :& (-1, 1, 0, 0)^T \\ \mathrm{EW} = 3 :& (1, 1, 0, 0)^T \\ \mathrm{EW} = -2 :& (0, 0, i, 1) \\ \mathrm{EW} = 2 :& (0, 0, -i, 1) \end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$U_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A_2 = U_2 \mathrm{diag}(-3, 3, -2, 2) U_2^{-1}$. Das Positivteil ist durch $A_2 = U_2 \mathrm{diag}(0, 3, 0, 2)$ definiert und

$$(A_2)_+ = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Negativteil ist ähnlich

$$(A_2)_- = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 0 & i & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag ist

$$|A_2| = \mathrm{diag}(3, 3, 2, 2).$$ □

Problem 3. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Eine obere Dreiecksmatrix ist nie orthogonal.

(b) Sei V ein unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus A ist genau dann normal, wenn $\|Av\| = \|A^*v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

Proof. (a) Falsch. Die Identität $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ ist eine obere Dreiecksmatrix und jedoch orthogonal. $\square$

Problem 4. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei weiter $\mathrm{End}_{sa}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ die Teilmenge der selbstadjungierten Endomorphismen auf V. Für $A, B \in \mathrm{End}_{sa}(V)$ definieren wir $A \leq B$, falls $B - A$ ein positiver Endomorphismus ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_{sa}(V)$ ein reeller Unterraum von $\mathrm{End}(V)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $\lambda, \mu \geq 0$ und $A, B, C, D \in \mathrm{End}_{sa}(V)$ mit $A \leq B$ und $C \leq D$ folgt, dass
$$\lambda A + \mu C \leq \lambda B + \mu D$$
gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $A \leq B$
$$CAC^* \leq CBC^*$$
für alle $C \in \mathrm{End}(V)$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass für $A \geq 0$ und $\lambda > 0$ der Endomorphismus $A + \lambda$ invertierbar ist.

(e) Betrachten Sie $V = \mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt und
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass $0 \leq A \leq B$ gilt. Zeigen Sie, dass $A^2 \leq B^2$ *nicht* gilt.

Proof. (a) Linearität von die adjungierte Endomorphismus:
$$\begin{aligned}
(\lambda_1 A + \lambda_2 B)^* =& (\lambda_1 A)^* + (\lambda_2 B)^* \\
=& \lambda_1^* A^* + \lambda_2^* B^* \\
=& \lambda_1 A^* + \lambda_2 B^* && \lambda \text{ reell} \\
=& \lambda_1 A + \lambda_2 B && A, B \text{ selbstadjugiert}
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}&\lambda B + \mu D - (\lambda A + \mu C)\\ =&\lambda(B - A) + \mu(D - C)\end{aligned}$$

Da sowohl $B-A$ als auch $D-C$ positiv sind, ist die lineare Kombination auch positiv. Die Behauptung folgt.

(c) Es gilt $CBC^* - CAC^* = C(B - A)C^*$. Sei $v \in V$. Es gibt dann $w \in W$, so dass $\langle v, C(B-A)C^*v\rangle = \langle w, (B-A)w\rangle$. Dies ist definiert genau durch $w = C^*v$. Da $B-A$ positiv ist, ist das innere Produkt auch immer positiv.

(d) Ein Endomorphismus ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist. Da $A \geq 0$, besitzt A nichtnegative Eigenwerte. Wir zeigen: Sei $\lambda_1 \geq 0$ ist genau dann Eigenwert von A, wenn $\lambda_1 + \lambda$ Eigenwert von $A + \lambda$ ist.

Sei zunächst λ_1 Eigenwert von A. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A + \lambda - (\lambda_1 + \lambda)) =&\det(A - \lambda_1)\\ =&0\end{aligned}$$

Dann ist $\lambda + \lambda_1$ Eigenwert von $A + \lambda$. Sei umgekehrt $\lambda_1 + \lambda$ Eigenwert von $A + \lambda$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda_1) =&\det(A - \lambda_1 + \lambda - \lambda)\\ =&\det(A + \lambda - (\lambda_1 + \lambda))\\ =&0\end{aligned}$$

Dann ist λ_1 Eigenwert von A.

Weil $\lambda > 0$, sind die Eigenwerte alle strikt positiv. Dann ist 0 kein Eigenwert, und $A + \lambda$ ist invertierbar.

(e)

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind 2 und 0, also $B - A$ ist positiv. Es gilt

$$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $B^2 - A^2$ sind $3 \pm \sqrt{10}$. Aber $3 - \sqrt{10} < 0$, also $B^2 - A^2$ ist nicht positiv. $\square$