Wintersemester 2024/2025 — 19.12.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

10. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 23.12.2024 und 07.01.2024 gelöst.

Aufgabe P10.1

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen des linearen Systems $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

Aufgabe P10.2

a) Untersuchen Sie das folgende Differentialgleichungssystem auf Ruhelagen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - \sin(x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die ω-Grenzemenge der Lösung $\varphi(t)$ für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x(x-1)(1+\sin^2(x)), \quad x(0) = -1.$$

Aufgabe P10.3

Wir betrachten die skalare Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = 2(1+\tan^2(t))x(t) \tag{1}$$

für $t \in I := \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(t) = \tan(t)$ eine Lösung von (1) ist. Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen von (1).

(*Hinweis: Eine Stammfunktion von* $f : I \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\tan^2(t)}$ *ist* $F(t) = -t - \frac{1}{\tan(t)}$.)

Aufgabe P10.4

Seien $a, b : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die skalare Differentialgleichung

$$\dddot{x}(t) + a(t)\,\dot{x}(t) + b(t)\,x(t) \;= 0. \tag{2}$$

Seien $\varphi_1, \varphi_2 : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$ linear unabhängige Lösungen von (2) definiert durch $\varphi_1(t) = t^3 + 2t - 2$ und $\varphi_2(t) = 1 + \tan 2t$.

a) Bestimmen Sie mindestens eine Lösung $\varphi : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$ von (2), für die $\varphi(0) = 2$ und $\dot{\varphi}(0) = -1$ gilt.

b) Gibt es eine solche Lösung $\varphi_3 : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$ von (2) und ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dass für die Wronski-Determinante $\det W(t) = c$ für alle $t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ gilt? Hierbei sei $W : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$W(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) & \dot{\varphi}_3(t) \\ \ddot{\varphi}_1(t) & \ddot{\varphi}_2(t) & \ddot{\varphi}_3(t) \end{pmatrix}$$

definiert.

Aufgabe P10.5

Sei D ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Sei

$$\dot{x} = f(x),$$

eine skalare autonome Differentialgleichung.

(*Hinweis: Aus einem Übungsblatt wissen wir bereits, dass alle Lösungen dieser Differentialgleichung konstant oder streng monoton sind.*)

a) Geben Sie ein Beispiel für eine solche Gleichung an, die sowohl streng monoton wachsende als auch streng monoton fallende Lösungen besitzt. Führen Sie den entsprechenden Nachweis.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass es im Fall höherdimensionaler autonomer Systeme möglich ist, dass sämtliche Komponenten einer Lösung nicht-monoton sind.

Wintersemester 2023/2024 — 19.12.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

10. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 09.01.2024 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 4 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H10.1 **(3 + 6 = 9 Punkte)**

Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

a) $x(1+t^2)\dot{x} - t(1+x^2) = 0 \quad \text{mit} \quad x(0) = 1,$

b) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t \quad \text{mit} \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$

Aufgabe H10.2 **(8 Punkte)**

Wir betrachten die skalare Differentialgleichung

$$\ddot{x} = \frac{2-4t}{t^2-t}\, x + \frac{2t^2-1}{t^2-t}\, \dot{x} \tag{3}$$

für $t \in I := (2, \infty)$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\varphi_1 \colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(t) = e^{2t}$ eine Lösung von (3) ist. Bestimmen Sie die Menge aller maximalen Lösungen von (3).

Hinweis: Eine mögliche Stammfunktion von $f \colon I \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-2t}(t^2 - t)$ *ist* $F(t) = -\frac{1}{2}t^2 e^{-2t}$.

Aufgabe H10.3 **(4 + 4 = 8 Punkte)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,(1-x)\, e^{\sin(x)}, \quad x(0) = 0. \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass die maximale Lösung $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ von (4) von oben beschränkt und streng monoton steigend ist, wobei $I = (t^-, t^+)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $t^+ = \infty$ gilt. Weisen Sie anschließend rechnerisch nach, dass $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$ gilt.

Aufgabe H10.4 **(2 + 5 + 1 = 8 Punkte)**

Wir betrachten die chemische Reaktion zweier Stoffe A und B. Mit $x_A(t)$ bzw. $x_B(t)$ bezeichnen wir die jeweilige Konzentration zum Zeitpunkt t. Bei der chemischen Reaktion wird Stoff B durch Anwesenheit des Stoffes A zu selbigem umgewandelt. Damit erhalten wir die drei Gleichungen

$$x_A + x_B = 1, \quad \dot{x}_A = c x_A x_B, \quad \dot{x}_B = -c x_A x_B$$

mit einer Konstanten $c > 0$.
(*Bemerkung 1: Abbildung 1 gibt ein Beispiel für die Konzentrationsverläufe* $x_A(t)$ *und* $x_B(t)$.)
(*Bemerkung 2: Das Produkt* $x_A x_B$ *kommt daher, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül des Stoffes* A *auf ein Molekül des Stoffes* B *trifft, proportional zu* $x_A x_B$ *ist.*)

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems $\begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c x_A x_B \\ -c x_A x_B \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie jeweils die Funktion für die Berechnung der Konzentrationen von $x_A(t)$ und $x_B(t)$, wobei $x_A(0) = K_A$ und $x_B(0) = K_B$.
(*Hinweis: Partialbruchzerlegung.*)

c) Geben Sie die ω-Grenzmenge von $x_A(t)$ und $x_B(t)$ an.

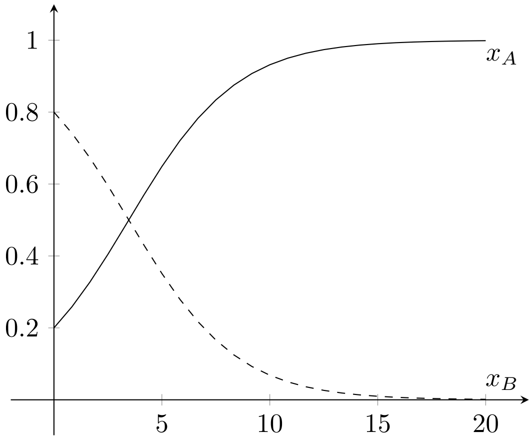

Abbildung 1: Konzentrationsverläufe für $c = 0,4$ und $x_A(0) = 0,2$

Aufgabe H10.5 **(Multiple Choice)**

Beurteilen Sie, ob die folgenden 7 Behauptungen wahr oder falsch sind.
Sie müssen bei dieser Aufgabe **keine** Begründungen angeben.

Für jede richtig beantwortete Frage gibt es einen Punkt.
Für jede falsch beantwortete Frage wird ein Punkt abgezogen.
Für jede nicht beantwortete Frage gibt es keine Punkte.
Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

	wahr	falsch
Sei $\dot{x} = t^2x + \cos(t)x$. Dann ist $\varphi(t) = e^{\frac{1}{3}t^3+\cos(t)}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.		
Gegeben sei die skalare Differentialgleichung $3t - x + 4 - (t + 2x + 1)\dot{x} = 0$ auf einem offenen Rechteck D. Dann ist diese Differentialgleichung exakt.		
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\varphi\colon (t_1, t_2) \to R^n$ eine Lösung von $\dot{x} = f(t, x)$, wobei der Abschluss des Graphen von φ eine beschränkte Teilmenge von D ist. Dann ist φ auf $[t_1, t_2]$ fortsetzbar.		
Sei $\dot{x} = (x - 2)(x - 4)$, $x(0) = 3$ und $\varphi(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung dieser Differentialgleichung. Dann ist die ω-Grenzmenge $\Omega(\varphi) = \{4\}$.		
Gegeben sei die skalare Differentialgleichung $\dot{x} = -3\sqrt[3]{x} + \sin(1 - e^{-x})$. Dann gilt, dass keine Lösung dieser Differentialgleichung das Vorzeichen wechseln kann.		
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\dot{x} = Ax$ eine Differentialgleichung. Dann gilt für alle Lösungen $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$ oder $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$.		
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\dot{x} = Ax$ eine Differentialgleichung. Dann gibt es eine nicht-konstante Lösung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$.		

Wir wünschen Ihnen allen eine friedliche Weihnachtszeit und ein frohes neues Jahr!
We wish you all a $\pi\pi\pi$-ful christmas time and a hap-π new year!