Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lukas Then

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 2, 2023)

Problem 1. (a) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x)\cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius $R = +\infty$ dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht durch ihre Taylorreihe um x = 0 dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9?

Problem 2. Es sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Geben Sie das Taylorpolynom P_2 von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an und schätzen Sie den maximalen Fehler von $|f(x) - P_2(x)|$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ab.

Problem 3. Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in x_0.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ im Punkt $x_0 = 2$.

(b) $g(x) = \sin^2(\pi x)$ in $x_0 = 3$.

(c) $h(x) = \sin^{-1}(x)$ in $x_0 = 0$.

Problem 4. Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von $\exp : [0,1] \to \mathbb{R}$ für die markierten Zerlegungen (J_n, Ξ_n) mit der Auswahl $\Xi_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Proof. (a)

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \exp\left(\frac{k+1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k+1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{(e-1)e^{1/n}}{e^{1/n}-1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{e-1}{1-e^{-1/n}}\end{aligned}$$

(b)

$$\mathfrak{U}_{\Xi_n}(f)$$

□