TAN
NAME (in DRUCKSCHRIFT)

JUN WEI
VORNAME

AUSWERTUNG VON MESSUNGEN UND FEHLERRECHNUNG WS2021/2022 PROBEKLAUSUR

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte				
Bewertung	Punkte gesamt: / 45		das wäre:	

BEACHTEN SIE DIE RÜCKSEITE DIESER ANGABE! BEARBEITUNGSZEIT: 45 Minuten.

1. Berechnung des Mittelwertes, der Stichprobenstandardabweichung und des Standardfehlers

Im Praktikum bestimmen Sie im Versuch ***Messung der Zähigkeit nach Stokes*** den Durchmesser d der genutzten Glaskugeln durch wiederholte Messung mit einer Mikrometerschraube. Folgende Werte d_i werden für eine Kugel erhalten:

i-Messung	1	2	3	4	5
Durchmesser d_i / mm	1,255	1,246	1,261	1,251	1,249

a.) Bestimmen Sie (in hinreichend großer Stellenzahl und SI-Einheiten) mit Angabe des Rechenweges den **Mittelwert** des Durchmessers der Kugel! (3 Punkte)

$$\frac{1}{5}(1{,}255+1{,}246+1{,}261+1{,}251+1{,}249)\,mm \approx 1{,}2524\,mm$$
$$= (1{,}2524\times10^{-3})\,m$$

b.) Bestimmen Sie (in hinreichend großer Stellenzahl und SI-Einheiten) mit Angabe des Rechenweges die **Stichprobenstandardabweichnung** des Durchmessers der Kugel! (3 Punkte)

$$\sigma^2 = \frac{1}{5-1}\left[(1{,}255-1{,}2524)^2+(1{,}246-1{,}2524)^2+(1{,}261-1{,}2524)^2+(1{,}251-1{,}2524)^2+(1{,}249-1{,}2524)^2\right]mm^2$$
$$\approx 3{,}3800\times10^{-5}\,mm^2$$
$$\sigma \approx 5{,}8138\times10^{-3}\,mm = (5{,}8138\times10^{-6})\,m$$

c.) Bestimmen Sie (in hinreichend großer Stellenzahl und SI-Einheiten) mit Angabe des Rechenweges die **Standardfehler** des Durchmessers der Kugel! (2 Punkte)

$$\text{Standardfehler} = \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \approx (2{,}6000\times10^{-3})\,mm$$
$$= (2{,}6000\times10^{-6})\,m$$

d.) Geben Sie den **Durchmesser mit Fehler** in SI-Einheiten an! (2 Punkte)

$$(1{,}2524 \pm 0{,}0026)\times10^{-6}\,mm$$

e.) Begründen Sie in **kurzer Form**, weshalb Sie für die Bestimmung Ihres Ergebnisses die Stichprobenstandardabweichung statt der Standardabweichung nutzen müssen! (2 Punkte)

Die Standardabweichung ist nicht erwartungstreu.

2. Graphische Darstellungen

Im Praktikum ermitteln Sie die Richtkraft D (Federkonstante) einer Schraubenfeder nach der statischen Methode. Dazu belasten Sie die Feder mit kalibrierten Gewichten der Masse m_i und ermitteln die jeweils resultierende Auslenkung x_i. Im elastischen Bereich ist die Richtkraft durch folgenden Zusammenhang gegeben:

$$D = \frac{mg}{x}$$

Sie erhalten folgende Werte:

m / g	50	100	150	200	250
x / cm	4,1	8,2	12,3	16,4	20,4

a.) Fertigen Sie eine vollständige graphische Darstellung Ihrer Messung an. Tragen Sie dazu die Messergebnisse in das Millimeterpapier ein, zeichnen Sie eine sinnvolle ausgleichende Kurve durch die Messpunkte und achten Sie auf die Einhaltung formaler Kriterien bei der Erstellung graphischer Darstellungen! (11 Punkte)

b.) Begründen Sie anhand Ihrer graphischen Darstellung **kurz**, ob der angegebene theoretische Zusammenhang **qualitativ** richtig ist! (3 Punkte)

Ja, es ist richtig. Der theoretische Zusammenhang ist linear und eine Gerade beschreibt die Abhängigkeit sehr gut, also der Zusammenhang ist wahrscheinlich linear.

3. Verteilungsfunktionen

a.) Berechnen Sie folgende **Binomialkoeffizienten**: (2 Punkte)

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\,(10-6)!} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 10\times3\times7 = 210$$

b.) Was beschreibt eine **Binomialverteilung**, wodurch ist Sie eindeutig festgelegt und welche Eigenschaften hat diese Verteilung? (6 Punkte)

Die Verteilung beschreibt die Verteilung der Zahl von erfolgreiche Versuche, wenn wir n Versuche durchführen und jede Versuch die Wahrscheinlichkeit p hat, um erfolgreich zu sein. Sie ist also durch n und p eindeutig festgelegt

Der Erwartungswert ist np

c.) Die Mechanikwerkstatt des Physikalischen Instituts bestellt eine große Stückzahl von Vakuumdichtringen. Laut Herstellerangaben darf der Anteil an fehlerhaften Dichtungen dabei nicht größer als 1% sein. Unsere Mechaniker möchten nun eine Stichprobe auswerten, anhand derer Sie entscheiden, ob die Herstellerangaben eingehalten wurden. Ihren Überlegungen legen Sie eine Binomialverteilung zu Grunde. **Begründen Sie kurz** ob diese Wahl sinnvoll ist! (3 Punkte)

Die Wahl ist sinnvoll, weil die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeine Vakuumdichtring kaputt ist, unabhängig von dem Zustand andere Vakuumdichtringen sein soll.

Für große n ist die Binomialverteilung gut approximiert durch eine Normalverteilung $B(n,p) \longrightarrow N(np, np(1-p))$ im Sinne des zentralen Grenzwertsatzes.

In diesem Fall ist $p=\frac{1}{100}$ behauptet. Ich würde deswegen empfehlen, n so wählen, dass

$$1 \le \sqrt{np(1-p)}$$

damit wir sinnvoll Messunterschiede nicht als Fehler interpretieren können.

4. Fehlerrechnung nach Gauß

a.) Welche **Annahmen** macht man in der Gauß'schen Fehlerrechnung? (2 Punkte)

Verteilung gut approximiert durch eine Normalverteilung wegen einer hohen Anzahl von Versuche.

b.) Im Praktikum bestimmen Sie den elektrischen Widerstand von Widerstandsnetzwerken. Der Ersatzwiderstand R_E für zwei parallel geschaltete Widerstände R_1 und R_2 ist gegeben durch:

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Stellen Sie mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerrechnung die mathematische Beziehung für den **Fehler σ_E von R_E** auf, wenn σ_1 bzw. σ_2 die Fehler von R_1 bzw. R_2 sind. Vereinfachen Sie den gefundenen Ausdruck so weit wie möglich! (6 Punkte)

$$\frac{\partial}{\partial R_1}\frac{1}{R_E} = \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$-\frac{1}{R_E^2}\frac{\partial R_E}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2}$$

$$\frac{\partial R_E}{\partial R_1} = \frac{R_E^2}{R_1^2}$$

$$= \frac{1}{R_1^2}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]^{-2}$$

$$= \frac{1}{R_1^2}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)^{-2}$$

$$= \frac{1}{R_1^2}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^{2}$$

$$= \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}$$

Aus der Symmetrie ist

$$\frac{\partial R_E}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$$

$$\sigma_E^2 = \left(\frac{\partial R_E}{\partial R_1}\right)^2\sigma_1^2 + \left(\frac{\partial R_E}{\partial R_2}\right)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_E = \left[\frac{R_2^2\sigma_1^2}{(R_1+R_2)^2} + \frac{R_1^2\sigma_2^2}{(R_1+R_2)^2}\right]^{1/2}$$