

11. Übung zur Einführung in die Algebra

Abgabe online in WueCampus bis zum 29.01.2024, 12 Uhr

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Seien p, q zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Primzahlen und G eine Gruppe der Ordnung pq . Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede Gruppe G der Ordnung 12 auflösbar ist.

Aufgabe 11.3 (1+1+3 Punkte)

Sei R ein Ring, und seien $a, b \in R$. Es gelte $ab = 1$ und $ba \neq 1$. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $x^s = 0$ gibt. Ein Element $x \in R$ heißt *idempotent*, falls $x^2 = x$ gilt.

- (a) Zeigen Sie, dass das Element $1 - ba$ idempotent ist.
- (b) Zeigen Sie, dass das Element $b^n(1 - ba)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ nilpotent ist.
- (c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele nilpotente Elemente in R gibt.

Aufgabe 11.4 (2+2 Punkte)

- (a) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
 - (1) Für alle $r, s \in R$ gilt $(r + s)^4 = r^4 + s^4$.
 - (2) In R gilt $2 = 0$.
- (b) Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring an, der den Bedingungen aus (a) genügt, aber kein Körper ist.

Hinweis: Es wird insgesamt 12 Übungszettel geben, wobei der 12. Übungszettel zwar in den Präsenzübungen behandelt, jedoch nicht mehr korrigiert wird. Der 12. Übungszettel liefert daher keine Übungspunkte mehr. Dies ist der letzte bewertete Übungszettel.

Die Präsenzübungen in der letzten Vorlesungswoche finden statt. Sie können diese Übungen als allgemeine Fragestunden zum Stoff nutzen.

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.