Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 19, 2023)

Problem 1. Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}, \mathcal{S}$ σ-Algebren über X sowie B eine σ-Algebra über Y. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(c) $\mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(d) $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{B}\}$ ist eine σ-Algebra über X.

(e) $f(\mathcal{A}) = \{f(A) \subseteq Y | A \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Proof. (a) Falsch. Sei

$$\begin{aligned} X &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{A} &= \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, X\} \\ \mathcal{S} &= \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$A \cup S = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}.$$

keine σ-Algebra, weil

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{S}.$$

(b) Richtig.

(1) $X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(2) Sei $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann $A \in \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{S}$.

Daraus folgt: $A^c \in \mathcal{A}$ und $A^c \in \mathcal{S}$. Deswegen ist $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$.

(3) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$$

Daraus folgt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}.$$

(c) Falsch. $X \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{S} \implies X \notin \mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$

(d) Richtig.

(1) $f^{-1}(Y) = X \in f^{-1}\mathcal{B}$

(2) Sei $A = f^{-1}(B)$

$$X - A = f^{-1}(\underbrace{Y - B}_{\in \mathcal{B}}) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

(3) Es folgt aus

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right).$$

(e) Falsch. Sei $a \in Y$ und f die konstante Abbildung $f(x) = a \forall x \in X$. Dann gilt

$$f(\mathcal{A}) = \{\varnothing, \{a\}\}$$

was keine σ-Algebra ist, solange $Y \neq \{a\}$.

$\square$

Problem 2. (a) Sei $X := \mathbb{Q}$ und $\mathcal{A}_\sigma(M)$ die von $M := \{(a, b] \cap Q | a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_\sigma(M) = P(\mathbb{Q})$ gilt.

(b) Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ gilt

$$f^{-1}\left(A_\sigma(\mathcal{M})\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right).$$

Das Urbild von $\mathcal{M}$ ist hierbei analog zum Urbild einer σ-Algebra definiert durch

$$f^{-1}(\mathcal{M}) := \left\{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{M}\right\}.$$

Proof. (a) $\{q\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) \forall q \in \mathbb{Q}$, weil

$$\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(q - \frac{1}{n}, q\right] \in \mathcal{A}_\sigma(M).$$

Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, sind alle Teilmenge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ abzählbar, daher

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma\left(\{\{q\} \,|q \in \mathbb{Q}\}\right) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(M)$$

Es ist klar, dass

$$\mathcal{A}_\sigma(M) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}).$$

(b) Sei $P = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}\}$. Per Definition ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}$. Dann ist der zu bewiesene Satz

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}\right) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right).$$

Jeder σ-Algebra $f^{-1}\left(\mathcal{A}\right)$ entschließt $f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)$. Daraus folgt, dass

$$\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right) \subseteq \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

□

Problem 3. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik, also ausgestattet mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Für $re > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| < r\}$. Definiere außerdem $B_{\mathbb{Q}} := \{B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n | \mathbb{Q} \ni r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$ und $B_{\mathbb{R}} := \{B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n | r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$

(a) Zeigen Sie: Für jeder offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $A = \cup_{B_r(q) \in M} B_r(q)$ mit

$$M := \{B_r(q) \in B_{\mathbb{Q}} | B_r(q) \subseteq A\}.$$

(b) Folgern Sie nun $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$

Proof. (a) Es genügt zu beweisen, dass jeder offene Ball eine Vereinigung von $\mathbb{Q}$-Balle sind.

Sei $B_p(x), p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Ball. Sei auch $(a_i), a_i \in \mathbb{Q}^n$ eine Folge, wofür gilt

$$\|x - a_i\| < r \forall i$$

$$\lim_{i \to \infty} a_i = x$$

Sei dann

$$M_i = B_{r-\|x-a_i\|}(a_i) \in B_{\mathbb{Q}}.$$

Es ist klar, dass jeder $M_i \subseteq B_r(x)$ ist. Wir beweisen auch, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = B_r(x)$.

Sei $y \in B_r(x)$. Es gilt $\|y - x\| = r_0 < r$. Sei $\xi = r - r_0$. Weil $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, gibt es ein Zahl a_k, wofür gilt

$$\|a_k - x\| < \frac{\xi}{2}.$$

(Eigentlich existiert unendlich viel, aber die brauchen wir nicht). Es gilt dann

$$\|y - a_k\| \leq \|y - x\| + \|x - a_k\| \leq r_0 + \frac{\xi}{2} < r - \frac{\xi}{2} < r - \|x - a_i\|,$$

also $y \in B_{r-\|x-a_k\|}(a_k)$. Jetzt ist die Ergebnis klar: Weil jeder offene Menge eine Vereinigung von offene Bälle ist, gilt

$$A = \bigcup B_p(x) = \bigcup\bigcup B_r(q),$$

wobei $p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}^n$

(b) $\mathcal{A}_\sigma\left(B_{\mathbb{R}}\right) = \mathcal{B}^n$ per Definition.

Aus $B_{\mathbb{Q}} \subseteq B_{\mathbb{R}}$ folgt $\mathcal{A}_\sigma\left(B_{\mathbb{Q}}\right) \subseteq \mathcal{A}_\sigma\left(B_{\mathbb{R}}\right)$

Aus

$\square$

Problem 4. Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $\mu : A \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion.

(a) Sei μ σ-subadditiv, $B \in \mathcal{A}$ und definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty], \mu_B(A) := \mu(A \cap B)$. Zeigen Sie, dass μ_B wohldefiniert und eine σ-subadditive Mengenfunktion ist.

(b) μ erfülle die beiden Eigenschaften

(1) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \varnothing$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ für alle $(A_n) \subseteq A$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$.

Zeigen Sie, dass μ σ-additiv ist.

Proof. (a) Weil $B \in \mathcal{A}$, ist $B \cap A \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A}$. μ_B ist daher wohldefiniert.

Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Sei auch $B_j = A_j \cap B \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu_B\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B \cap A_j)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

(b) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkter Menge. Dann definiere $B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_j$. Für k endlich ist es klar,

$$\mu(B_k) = \sum_{i=1}^{k} A_i.$$

Weil $B_i \subseteq B_{i+1}$, (2) gilt auch:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

$\square$