

# Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 1

Jun Wei Tan\*

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: October 19, 2024)

**Problem 1.** Sei  $f(t, x(t), \dot{x}(t)) := 3t - 4 + 4\dot{x}(t) - 3x(t)$ . Zeigen Sie, dass  $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t$  für  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$  ist. Bestimmen Sie anschließend  $C_1$  und  $C_2$  so, dass  $x(0) = x(1) = 1$  gilt.

*Proof.* Mit

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t$$

ist

$$\dot{x}(t) = C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} + 1$$

$$\ddot{x}(t) = C_1 e^t + 9C_2 e^{3t}$$

Eingesetzt ist

$$\begin{aligned} & 3t - 4 + 4\dot{x}(t) - 3x(t) \\ &= 3t - 4 + 4(C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} + 1) - 3(C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t) \\ &= C_1 e^t + 9C_2 e^{3t} = \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

Dann setzen wir  $t = 0$  und  $t = 1$  ein:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$x(1) = C_1 e + C_2 e^2 + 1 = 1$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit Unbekannten  $C_1$  und  $C_2$ . Die Lösung ist einfach

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{e}{e-1}, \\ C_2 &= \frac{1}{1-e}. \end{aligned}$$

□

**Problem 2.** Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

---

\* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(a)  $\dot{x}(t) = tx^2(t), \quad x(1) = 1.$

(b)  $\dot{x}(t) = t(1 + x^2(t)), \quad x(0) = 1.$

(c)  $\dot{x} = \frac{\sin(t)}{x+1}, \quad x(0) = 1.$

*Proof.* Wir benutzen die Schreibweise aus Abschnitt 2.1 des Skripts: Die DGL

$$\dot{x} = g(x)h(t), \quad x(t_0) = x_0$$

hat Lösung

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dr}{h(r)} = \int_{t_0}^t g(s) ds. \quad (1)$$

(a)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, h = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ . Gl. (1) ergibt

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

und

$$x(t) = \frac{2}{3 - t^2}.$$

Der Definitionsbereich ist  $t \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

(b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 + x^2, h = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ . Gl. (1) liefert

$$\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(1) = \frac{t^2}{2}$$

und

$$x(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Da  $g(x) \neq 0$ , muss  $-1 < x < 1$  und der Definitionsbereich ist dadurch beschränkt.

(c)  $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}, h = \sin$ . Gl. (1) liefert

$$\frac{r^2}{2} + r \Big|_{r=x_0}^{r=x(t)} = -\cos(s) \Big|_0^t.$$

Damit ist

$$\frac{x(t)^2}{2} + x(t) - \frac{3}{2} = -\cos t + 1.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit Lösung

$$x(t) = -1 \pm \sqrt{1 - 2\left(\cos t - \frac{5}{2}\right)}$$

$$= -1 \pm \sqrt{6 - 2 \cos t}$$

Da  $x(0) = 1$ , ist die Lösung die + Lösung der quadratischen Gleichung, und

$$x(t) = -1 + \sqrt{6 - 2 \cos t}. \quad \square$$

**Problem 3.** Untersuchen Sie, für welchen Anfangswert  $x(1) = C$  die Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = e^t(x(t))^2$  eine Lösung hat und berechnen Sie diese.

*Proof.* Wie in Aufgabe 2 verwenden wir Gl. (1) mit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t^2$ .

Die (formelle) Lösung ist

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{C} = e^t - e$$

und

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{C} + e - e^t}.$$

Offensichtlich brauchen wir  $C \neq 0$  für diese Lösung. Falls  $C = 0$ , ist  $x(t) = 0$  die Lösung.  $\square$

**Problem 4.** Die Abnahme der Lichtintensität  $I$  mit zunehmender Meerestiefe erfolgt nach dem Gesetz

$$I'(x) = -\mu I(x),$$

wobei  $x$  die Meerestiefe in Meter angibt. Berechnen Sie, in welcher Tiefe die Oberflächenintensität auf

(a) 50%

(b) 20%

gefallen ist, wenn der Absorptionskoeffizient  $\mu = 2,5 \text{ m}^{-1}$  beträgt.

*Proof.* Die Lösung ergibt sich analog wie Aufgabe 2 und lautet

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x},$$

wobei  $I_0$  die Oberflächenintensität ist. Wir suchen  $x$ , sodass  $I(x) = \eta I_0$ . Das heißt:

$$\eta I_0 = I_0 e^{-\mu x}$$

$$\ln \eta = -\mu x$$

$$x = -\frac{1}{\mu} \ln \eta$$

Dann setzen wir  $\eta = 0.5$  und  $\eta = 0.2$  ein und erhalten

(a)  $x \approx 0.277 \text{ m}$

(b)  $x \approx 0.161 \text{ m}$ . □

**Problem 5.** Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\ddot{x} - 4\ddot{x} - \dot{x} - 3x - 9\ddot{y} - 5\dot{y} - y = 0$$

$$\ddot{y} - 8\ddot{y} - \ddot{x} - 8\dot{x} + 6\dot{y} + 7\ddot{x} + 8\ddot{y} + 9y - 9x = 0$$

*Proof.* Wir formen die Gleichungen um

$$\ddot{x} = 4\ddot{x} + 9\ddot{y} + \dot{x} + 5\dot{y} + 3x + y$$

$$\ddot{y} = -6\ddot{x} - 8\ddot{y} + 8\dot{x} - 6\dot{y} + 9x - 9y$$

und definieren  $z = (\ddot{x}, \ddot{y}, \dot{x}, \dot{y}, x, y)^T$ . Damit ist  $\dot{z} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \dot{x}, \dot{y}, x, y)^T$  und

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ -6 & -8 & 8 & -6 & 9 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

□