Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 6

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 21, 2024)

Problem 1. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A und B mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A und B direkt mit der Leibnizformel.

(c) Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Methoden. Welche würden Sie bevorzugen? Hängt Ihre Antwort von der Struktur der Matrix ab?

Proof. (a)

$$\begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times 5} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 10 & -40 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & -9 & 60 & -180 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & -9 & 60 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Als obere Dreiecksmatrix hat die Matrix am Ende die Determinante $10(3)(-3)(3) = -270$. Weil wir im ersten Schritt durch 5 multipliziert haben, ist das genau 5 mal die gewünschte Determinante, also $\det A = -270/5 = -54$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ähnlich ist die Determinante der Matrix am Ende $1(-3)(-1)(2) = 6$. Da wir keine Operationen gemacht haben, die die Determinante verändern, ist das die gewünschte Determinante.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\det A =& A_{1,4}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,1} - A_{1,3}A_{2,4}A_{3,2}A_{4,1} \\
&- A_{1,4}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,1} + A_{1,2}A_{2,4}A_{3,3}A_{4,1} \\
&+ A_{1,3}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,1} - A_{1,2}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,1} \\
&- A_{1,4}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,2} + A_{1,3}A_{2,4}A_{3,1}A_{4,2} \\
&+ A_{1,4}A_{2,1}A_{3,3}A_{4,2} - A_{1,1}A_{2,4}A_{3,3}A_{4,2} \\
&- A_{1,3}A_{2,1}A_{3,4}A_{4,2} + A_{1,1}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,2} \\
&+ A_{1,4}A_{2,2}A_{3,1}A_{4,3} - A_{1,2}A_{2,4}A_{3,1}A_{4,3} \\
&- A_{1,4}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,3} + A_{1,1}A_{2,4}A_{3,2}A_{4,3} \\
&+ A_{1,2}A_{2,1}A_{3,4}A_{4,3} - A_{1,1}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,3} \\
&- A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}A_{4,4} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,4} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,4} \\
&- A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3}A_{4,4} + A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,4} \\
=&0 + 0 - 307440 + 0 + 302400 \\
&+ 0 + 0 + 0 + 238266 + 0 - 234360 \\
&+ 0 + 0 + 0 + 65880 + 0 + 234360 \\
&- 302400 + 0 + 0 - 64800 + 0 \\
&- 234360 + 302400 = -54
\end{aligned}$$

Ähnlich für B, aber weil in der letzten Zeile eine nicht null Zahl nur im dritten Spalte entsteht, tragt nur Permutationen σ mit $\sigma(4) = 4$ bei. Dann gibt es nur zwei Terme im Summe, die die Permutationen $(3,4)$ und $(1,2)(3,4)$ entsprechen.

$$\det B = 12 - 6 = 6.$$

(c) Für A habe ich mehr Arbeit gebraucht, durch die Leibnizformel die Determinante zu berechnen. Für B ist es anders.

Für Matrizen mit viele null Elemente würde ich daher mit der Leibnizformel die Determinante zu berechnen, sonst würde ich Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden. □

Problem 2. E sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $x \to Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ -96 & 268 & -63 \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix}$$

sowie $B := (b_1, b_2, b_3) := ((13,6,4),(10,6,10),(6,8,24))$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $C = T_B^E$, wobei E die Standardbasis ist (Notation wie in 3.5.2)

(c) Bestimmen Sie C^{-1} und berechnen Sie CAC^{-1}.

(d) Geben Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis B an.

(e) Bestimmen Sie $\det(A), \det(C), \det(C^{-1})$ und $\det(CAC^{-1})$, ohne den Determinantenmultiplikationssatz zu verwenden. Verifizieren Sie damit für diesen Spezialfall Folgerung 4.3.6 und Satz 4.3.7.

Proof. (a) Die Vektoren (b_1, b_2, b_3) sind linear unabhängig genau dann, wenn $\det B \neq 0$. Wir berechnen die Determinante

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{7}{3}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 14 & 14 & \frac{56}{3} \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times \frac{7}{2}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 14 & 35 & 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 0 & 25 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{25}{4}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 25 & \frac{475}{6} \\ 0 & 25 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 25 & \frac{475}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

deren Determinante ungleich null ist. Daher ist $\det B \neq 0$, und die Vektoren sind linear unabhängig. Da wir 3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$ haben, wobei $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, sind die Vektoren eine Basis.

(b) Es gilt

$$C^{-1} := T_E^B = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix}.$$

Da $T_B^E = (T_E^B)^{-1}$, berechnen wir die inverse Matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \times \frac{1}{14}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 6R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{156}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times \frac{25}{6}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{156}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-\frac{1}{10}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times\frac{7}{50}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\times -3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-\frac{19}{6}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+\frac{11}{6}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right)$$

also

$$C = \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

(c) C^{-1} wurde schon in (b) gegeben. Durch direkte Rechnung erhalten wir

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Darstellungsmatrix ist genau CAC^{-1}.

(e) A:

$$\begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ -96 & 268 & -63 \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+\frac{96}{7}R_1} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+\frac{400}{7}R_1} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ 0 & \frac{1770}{7} & \frac{159}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{885}{218}R_2} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ 0 & 0 & \frac{21}{218} \end{pmatrix}$$

also $\det(A) = 7(436/7)(21/218) = 42$. Für C gilt:

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times 3} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 7}$$

$$\begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 42 & 42 & 56 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times \frac{21}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 42 & 105 & 252 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 0 & 75 & 234 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times 4}$$

$$\begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 0 & 300 & 936 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 25} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 300 & 950 \\ 0 & 300 & 936 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 300 & 950 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

also $\det(C) = -8$. Für C^{-1}:

$$\begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{7}{4} R_1} \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{9}{16} R_1}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{5}{32} & \frac{3}{32} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \frac{5}{12} R_2} \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

also $\det(C^{-1}) = -1/8$. Zuletzt ist $\det(CAC^{-1}) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. □

Problem 3. In dieser Aufgabe sei stets $D : \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K$ eine Abbildung, die linear in jeder Spalte ist, d.h. Eigenschaft 1 von Definition 4.2.1 erfüllt.

(a) Zeigen Sie: Ist die Charakteristik von K nicht 2, dann ist D genau dann alternierend, wenn für D die Aussage 3 von Satz 4.2.2, also

“Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Spalten, so ist $D(B) = -D(A)$.”

gilt. Diese Eigenschaft nennt man auch “schiefsymmetrisch”

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung $D_1 : \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to ab + cd$ ist linear in jeder Spalte und schiefsymmetrisch, aber nicht alternierend.

(c) Zeigen Sie: Für jedes $k \in K$ gibt es genau eine Abbildung $D : \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K$, die linear in jeder Spalte und alternierend ist und zusätzlich $D(E_n) = k$ erfüllt. Diese ist gegeben durch die Abbildungsvorschrift $D(A) = k\det(A)$.

Proof. (a) Die Rückrichtung ist trivial. Angenommen A hat zwei gleiche Spalten. B entstehe aus A durch die Vertauschung diese Spalten. Deswegen gilt $B = A$. Aber $D(B) = D(A) = -D(A)$, oder $2D(A) = 0$. Da die Charakteristik nicht 2 ist, impliziert dies $D(A) = 0$.

Sei jetzt D alternierend. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. B entstehe aus A durch die Vertauschung zwei Spalten. Sei die Spalten v_1, v_2. Da die andere Spalten fest sind, bezeichnen wir $f(v_1, v_2) := D((\dots, v_1, v_2, \dots))$. f ist auch linear in v_1 und v_2. Außerdem ist $D(A) = f(v_1, v_2)$ und $D(B) = f(v_2, v_1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(v_1+v_2, v_1+v_2) =& 0 && D \text{ ist alternierend} \\ =& f(v_1,v_1) + f(v_1,v_2) + f(v_2,v_1) + f(v_2,v_2) && \text{Linearität} \\ =& f(v_1,v_2) + f(v_2,v_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$D(A) = f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1) = -D(B).$$

(b) Linearität: Es gilt

$$D_1\left(\begin{pmatrix} ka & b \\ kc & d \end{pmatrix}\right) = k(ab+cd) = D_1\left(\begin{pmatrix} a & kb \\ c & kd \end{pmatrix}\right).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & D_1\left(\begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix}\right) \\ =& (a+a')b + (c+c')d \\ =& (ab+cd) + (a'b+c'd) \end{aligned}$$

$$=D_1\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + D_1\left(\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}\right)$$

und

$$\begin{aligned}
&D_1\left(\begin{pmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{pmatrix}\right)\\
=&a(b+b')+c(d+d')\\
=&(ab+cd)+(ab'+cd')\\
=&D_1\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + D_1\left(\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

also D_1 ist linear. D_1 ist auch schiefsymmetrisch, da

$$D\left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right) = ab - cd.$$

Aber $ab - cd = -(ab - cd)$, weil es nur 2 Elemente in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt, und für alle Elemente $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt $x + x = 0$. Dann ist D_1 schiefsymmetrisch. D_1 ist jedoch nicht alternierend.

$$D_1\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

$\square$