Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 3, 2023)

Problem 1. Entscheiden Sie zu jedem der folgenden Objekte, welche der Bezeichnungen aus Definition 2.3.3 darauf zutreffen

(a) $(\mathbb{R}, *, -2)$, wobei $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $a * b := a + b + 2$ definiert ist.

(b) $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$

(c) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, -, 0)$, wobei $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + (-\overline{b})$

(d) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, *, 4)$ mit $* : \mathbb{Z}\setminus\{0\} \times \mathbb{Z}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}, (a, b) \to ab^{-1}$

Proof. (a) Eine abelsche Gruppe. Es ist assoziativ:

$$\begin{aligned} a * (b * c) =& a + (b + c + 2) + 2 \\ =& (a + b + 2) + c + 2 \\ =& (a * b) * c \end{aligned}$$

Es gilt auch $(-2) * x = (-2) + x + 2 = x$ und auch $x * (-2) = x$ für alle x, also $e = -2$ ist ein neutrales Element. Für jeder x gibt es auch $y = -(x + 4) \in \mathbb{R}$, damit

$$y * x = -(x + 4) + x + 2 = -2 = e.$$

(b) Kommutatives Monoid. Per Definition ist 1 das neutrale Element, und für jeder $0 \neq x \in \mathbb{R}$ gibt es $1/x \in \mathbb{R}$, und $x(1/x) = 1$. Aber es existiert keine $x \in \mathbb{R}$, so dass $x0 = 1$.

(c) Magma. Es gilt

$$\overline{a} - (\overline{b} - \overline{c}) = \overline{a} + \left[- \left(\overline{b} - \overline{c} \right) \right]$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{aligned}
&= \overline{a} + (-\overline{b}) + \overline{c} \\
(\overline{a} - \overline{b}) - \overline{c} &= \overline{a} + (-\overline{b}) + (-\overline{c}) \\
&\neq \overline{a} - (\overline{b} - \overline{c})
\end{aligned}
$$

Deswegen ist $-$ nicht assoziativ.

(d) Nichts. $*$ ist keine Verknüpfung.

$\square$

Problem 2. Es sei $(M, \cdot)$ ein Magma, $(H, \odot)$ eine Halbgruppe und $\alpha : H \to M$ eine surjektive Abbildung, die die Bedingung $\alpha(a \odot b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b)$ für alle $a, b \in H$ erfüllt.

Zeigen Sie

(a) Dann ist auch M eine Halbgruppe.

(b) Ist H ein Monoid mit neutralem Element e, dann ist M ein Monoid mit neutralem Element $\alpha(e)$.

(c) Ist $(H, \odot, e)$ sogar eine Gruppe, dann ist $(M, \cdot, \alpha(e))$ eine Gruppe.

Proof. (a) Sei $\beta, \gamma, \delta \in M$. Weil α surjektiv ist, gilt $\beta = \alpha(a), \gamma = \alpha(b), \delta = \alpha(c), a, b, c \in H$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\beta \cdot (\gamma \cdot \delta) &= \alpha(a) \cdot (\alpha(b) \cdot \alpha(c)) \\
&= \alpha(a) \cdot (\alpha(b \odot c)) \\
&= \alpha(a \odot (b \odot c)) \\
&= \alpha((a \odot b) \odot c) \\
&= \alpha(a \odot b) \cdot \alpha(c) \\
&= (\alpha(a) \cdot \alpha(b)) \cdot \alpha(c) \\
&= (\beta \cdot \gamma) \cdot \delta
\end{aligned}
$$

(b) Sei $\beta \in M$. Noch einmal haben wir $\beta = \alpha(b), b \in H$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\beta \cdot \alpha(e) &= \alpha(b) \cdot \alpha(e) \\
&= \alpha(b \odot e)
\end{aligned}
$$

$$=\alpha(b)$$
$$=\beta$$

und ähnlich auch für $\alpha(e) \cdot \beta = \beta$.

(c) Wir müssen nur zeigen, dass es ein Inverse gibt. Sei $M \ni \beta = \alpha(a), a \in H$. Weil H eine Gruppe ist, existiert $a^{-1} \in H$, so dass $a \odot a^{-1} = e$. Es gilt

$$\begin{aligned}\beta \cdot \alpha\left(a^{-1}\right) =& \alpha(a) \cdot \alpha\left(a^{-1}\right)\\ =& \alpha\left(a \odot a^{-1}\right)\\ =& \alpha(e)\end{aligned}$$

□

Problem 3. Wir wollen die folgende Verknüpfungstabelle so vervollständigen, dass $(\{\partial, \eta, L\}, \odot, \eta)$ zu einer Gruppe wird.

$\odot$	∂	η	L
∂			
η			
L			

(a) Begründen Sie, dass es nur höchstens eine solche Verknüpfungstafel geben kann.

(b) Füllen Sie die Tafel so, dass eine Gruppe entsteht und begründen Sie, dass Sie die Verknüpfungs-tafel einer Gruppe gefunden haben.

Proof. Notation: Ich schreibe ab statt $a \odot b$, für $a, b \in \{\partial, \eta, L\}$. Weil η das neutrale Element ist, muss die Verknüpfungstabelle so aussehen:

$\odot$	∂	η	L
∂		∂	
η	∂	η	L
L		L	

Wir brauchen Bedingungen, die mögliche Gruppe einzuschränken.

Lemma 1. *Sei G eine Gruppe, $x, y, z \in G$, und*

$$zx = zy.$$

Es gilt dann $x = y$

Proof.

$$x = z^{-1}zx = z^{-1}zy = y.$$

$\square$

Corollary 2. *In jeder Zeile und Spalte kommt jedes Element nur einmal vor.*

Leider ist es noch nicht genug, die Verknüpfungstabelle einzuschränken. Wir fangen deswegen an, und nehme an, dass $\partial^2 = L$ ist. Wir betrachten die erste Spalte und Zeile, und kommen zu die Schlussfolgerung, dass $\partial L = L\partial = \eta$.

$\odot$	∂	η	L
∂	η	∂	L
η	∂	η	L
L	L	L	

Hier gibt es ein Problem: $L\partial = L$, und auch $L\eta = L$. Daraus folgt $\partial = \eta$, ein Widerspruch. Wir nehmen jetzt an, $\partial^2 = L$. Man kann die Verknüpfungstabelle ausfüllen.

$\odot$	∂	η	L
∂	L	∂	η
η	∂	η	L
L	η	L	∂

Das ist die einzige Lösung (es gibt keine Möglichkeiten mehr). Die Gruppe ist $\cong C_3$. Man kann beachten, dass $\partial^2 = L, L^2 = \partial$. Per Definition ist es abgeschlossen. Es gilt auch

$$\begin{aligned} \partial^{-1} &= \partial^2 = L \\ L^{-1} &= L^2 = \partial \end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir Assoziativität. Wir betrachten

$$a(bc) \stackrel{?}{=} (ab)c, \qquad a, b, c \in \{\partial, \eta, L\}.$$

Im Fall, worin a, b oder c das neutrale Element η ist, folgt die Gleichung. Im Fall, worin nichts η ist, können wir $L = \partial^2$ einsetzen. Jetzt ist die Gleichung

$$\partial^x (\partial^y \partial^z) = (\partial^x \partial^y)\partial^z, \qquad x, y, z \in \{1, 2\},$$

was immer gilt, weil die beide Seite gleich ∂^{x+y+z} sind. Deswegen ist $\odot$ assoziativ. □

Problem 4. Wir definieren die drei Abbildungen $c_1, c_2, c_3 : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ durch die Abbildungsvorschriften

$$\begin{array}{llll} c_1(1) = 2 & c_1(2) = 1 & c_1(3) = 4 & c_1(4) = 3 \\ c_2(1) = 3 & c_2(2) = 4 & c_2(3) = 1 & c_2(4) = 2 \\ c_3(1) = 4 & c_3(2) = 3 & c_3(3) = 2 & c_3(4) = 1 \end{array}$$

Zeigen Sie: $U := \{\mathrm{id}, c_1, c_2, c_3\}$ ist eine Untergruppe von $S(\{1, 2, 3, 4\})$.

Proof. Die folgende Aussagen können durch direkte Verkettung bewiesen werden:

$$\begin{aligned} c_1 \circ c_2 &= c_3 \\ c_2 \circ c_3 &= c_1 \\ c_3 \circ c_1 &= c_2 \\ c_1 \circ c_1 &= \mathrm{id} \\ c_2 \circ c_2 &= \mathrm{id} \\ c_3 \circ c_3 &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

Deswegen ist jede Elemente invertierbar. Es folgt daraus auch, dass U abgeschlossen ist. id ist natürlich das neutrale Element. □

Problem 5. Es sei

$$\mathcal{L} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \text{ ex existieren } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \text{ sodass für alle } x \in \mathbb{R} f(x) = ax + b\}.$$

(a) Zeigen Sie: $(\mathcal{L}, \circ, \mathrm{id})$ ist eine Gruppe, aber nicht abelsch.

(b) Wir definieren die Relation $\sim \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ durch die Festlegung $f \sim g$ genau dann, wenn $f(x) - f(0) = g(x) - g(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$.

Proof. (a) Sei $f, g \in \mathcal{L}$, $f = ax + b, g = cx + d, a \neq 0 \neq c$. Es gilt

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) =& a(cx + d) + b \\ =& acx + ad + b\end{aligned}$$

Weil $a \neq 0 \neq 0$, gilt $ac \neq 0$. Deswegen gilt, für

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = acx + ad + b$$

$h \in \mathcal{L}$. $(\mathcal{L}, \circ, \mathrm{id})$ ist dann unter $\circ$ abgeschlossen. Die Verkettung von Abbildungen ist immer assoziativ. Sei jetzt $e \in \mathcal{L}$, $e(x) = 1x + 0 = x$. Es gilt dann

$$e \circ f = f \circ e = f,$$

also e ist ein neutrales Element. Sei $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. Weil $a \neq 0$, sind $1/a$ und b/a wohldefiniert, und $1/a \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) =& a\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) + b \\ =& x - b + b \\ =& x \\ \left(f^{-1} \circ f\right) =& \frac{1}{a}(ax + b) - \frac{b}{a} \\ =& x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \\ =& x\end{aligned}$$

Deswegen gilt $f \circ f^{-1} = e = f^{-1} \circ f$, also f^{-1} ist die Inverse von f. $\mathcal{L}$ ist dann eine Gruppe.

(b) (i) (Reflexivität) Es gilt

$$f(x) - f(0) = f(x) - f(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) (Symmetrie) Falls gilt

$$f(x) - f(0) = g(x) - g(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt auch

$$g(x) - g(0) - f(x) - f(0), x \in \mathbb{R}.$$

(iii) (Transitivität) Sei $f, g, h \in \mathcal{L}$, für die gilt

$$f \sim g \iff f(x) - f(0) = g(x) - g(0), x \in \mathbb{R}$$
$$g \sim h \iff g(x) - g(0) = h(x) - h(0), x \in \mathbb{R}$$

Es gilt, von die Transitivät der $= \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass

$$f(x) - f(0) = h(x) - h(0), x \in \mathbb{R},$$

also $f \sim h$

Ich vermute, dass die Äquivalenzklasse sind $f, g \in \mathcal{L}, f(x) = ax + b, g(x) = cx + d, a \neq 0 \neq c$, so dass

$$f \sim g \iff a = c.$$

Wir beweisen es: $f(0) = b, g(0) = d$, und daher $f(x) - f(0) - ax, g(x) - g(0) = cx$. Falls

$$ax = cx \forall x \in \mathbb{R},$$

muss $a = c$. Für $a \neq c$ gilt es, dass es mindestens ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, worauf $ax_0 \neq cx_0$. Deswegen sind die Äquivalenzklassen, für $f, g \in \mathcal{L}$, $f = ax + b, g = cx + d$

$$f \sim g \iff a = c. \qquad \square$$