Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Wachsmuth
Bastian Dittrich

Wintersemester 2023/24

2. Übung zur Vertiefung Analysis

25. Oktober 2023

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 1. November 2023* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

Aufgabe 2.1 (Maß über $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, 5 Punkte) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere

$$\mu_\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \mu_\lambda(A) := \sum_{k\in A} \exp(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bestimmen Sie jeweils alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_\lambda)$ ein Maßraum ist.

(b) μ_λ ein endliches Maß ist.

(c) μ_λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 2.2 (vollständiger Maßraum, 4 Punkte) Sei X eine nichtleere Menge, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\mu_B(A) := \mu(A \cap B)$.

(a) Zeigen Sie, dass μ_B ein Maß über $\mathcal{A}$ ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ ein vollständiger Maßraum, dann auch $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, dann auch $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$.

Aufgabe 2.3 (Konstruktion äußeres Lebesgue-Maß, 4 Punkte)

(a) Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\emptyset \in K_i$ für $i = 1, 2$ und $\nu_i : K_i \to [0, \infty]$ mit $\nu_i(\emptyset) = 0$ für $i = 1, 2$. Bezeichne nun mit μ_i^* die analog zu Satz 1.37 von ν_i induzierten äußeren Maße. Es existiere ein $\alpha > 0$, so dass

$$\forall I_1 \in K_1 \; \exists I_2 \in K_2 : \; I_1 \subseteq I_2 \text{ und } \alpha\nu_2(I_2) \leq \nu_1(I_1).$$

Zeigen Sie: Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\alpha\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$.

(b) Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 1.55: Zeigen Sie, dass

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \quad \text{und} \quad \lambda_a^*(A) \leq \lambda_r^*(A) \leq \lambda_n^*(A)$$

für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 2.4 (äußeres Lebesgue-Maß, 7 Punkte) Zeigen Sie folgende Aussagen über das äußere Lebesgue-Maß:

(a) Es gilt $\lambda_n^*(A) = 0$ für alle abzählbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n^*(B) = 0$. Dann gilt $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A)$.

(c) Es ist $\lambda_1^*([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$.

(d) Es ist $\lambda_2^*(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$.

Die Fachschaft lädt ein zum **Studikolloq in der Mathematik**.

Das Studikolloq ist eine Vortragsreihe zu verschiedenen mathematischen Themen, für die es keines besonderen Vorwissens bedarf. Die Vorträge finden immer um **18:15 Uhr im Turing-Hörsaal** statt, dauern ca. eine Stunde und werden von Studenten und Doktoranden gehalten.

Mo 30.10.2023 Patrick Uftring: Ordinalzahlen und ihre Verbindung zur Logik
Mo 13.11.2023 Jakob Hecker: Mathematik zur Blütezeit des Islam
Mo 27.11.2023 Linus Mußmächer: Achtung Diskretion! – Die Mathematik der Wahlsysteme