Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Institute of
MATHEMATICS

Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

Analysis 2

Stefan Waldmann

Wintersemester 2023/2024

Hausaufgabenblatt Nr. 6

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)
Git revision of ana2-ws2324: `(None)` (None)

29. 11. 2023
(24 Punkte. Abzugeben am 06. 12. 2023)

Hausaufgabe 6-1: Uneigentliche Integrale und Operatoren

Im Folgenden ist $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

i.) Sind $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, so auch $f + g$. **(1 Punkt)**

ii.) Sind $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, so auch $f \cdot g$. **(2 Punkte)**

iii.) Sind $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so auch $g \circ f$. **(2 Punkte)**

iv.) Es sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, nicht-negativ und uneigentlich integrierbar. Dann konvergiert **(2 Punkte)**

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Hausaufgabe 6-2: Konvergenz uneigentlicher Integrale

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Riemannintegrale auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

i.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$ **(3 Punkte)**

ii.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$ **(3 Punkte)**

iii.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$ **(3 Punkte)**

Hausaufgabe 6-3: Ein Grenzwert

Beweisen Sie **(3 Punkte)**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

Hausaufgabe 6-4: Irrationalität von π

Wir zeigen die Irrationalität von π durch einen Widerspruch. Angenommen, es gälte $\pi=\frac{a}{b}$ für $a,b\in\mathbb{N}$. Außerdem seien $f,F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n\frac{(a-bx)^n}{n!}, \\ F(x) &= f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-...+(-1)^n f^{(2n)}(x). \end{aligned}$$

für $n\in\mathbb{N}$.

i.) Zeigen Sie, dass $f^{(k)}(0), f^{(k)}(\pi)\in\mathbb{N}$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt. **(2 Punkte)**

ii.) Zeigen Sie

$$f(x)\sin(x)=\big(F'(x)\sin x-F(x)\cos x\big)'.$$

Folgern sie anschließend, dass $F(\pi)+F(0)$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist, was allerdings nicht mit den Eigenschaften von $x\mapsto f(x)\sin x$ für hinreichend großes $n\in\mathbb{N}$ vereinbar ist. **(3 Punkte)**