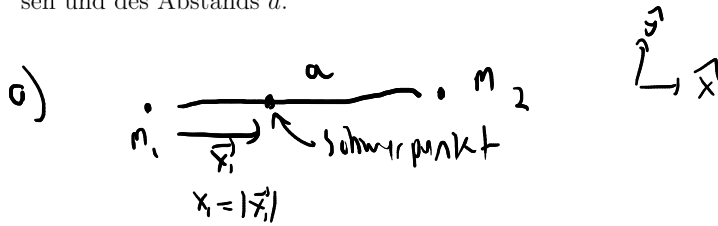


**Aufgabe 5.2: Doppelstern** ..... (3 Punkte)

Gegeben ist ein Doppelsternsystem mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Der konstante Abstand zwischen den beiden Sternen ist  $a$ . Betrachten Sie die beiden Sterne als Punktmassen.

Jun Wei Tan  
Cyprian Long  
Nicolas Braun

- (1 P) a) Bestimmen Sie den Abstand  $x_1$  des Schwerpunkts vom Mittelpunkt des Sterns  $m_1$ . Skizze!
- (1 P) b) Bestimmen Sie die Umlaufdauer  $T$ , mit der die beiden Sterne um Ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, als Funktion der Massen und des Abstands  $a$  der beiden Körper.
- (1 P) c) Bestimmen Sie den Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem in Abhängigkeit der Massen und des Abstands  $a$ .



$$\vec{x}_1 := \vec{r}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (\text{Vorlesung 2.4})$$

$$= \frac{m_1 \vec{0} + m_2 a \hat{x}}{m_1 + m_2} \quad (\text{Aufgabenstellung})$$

$$= \frac{m_2 a \hat{x}}{m_1 + m_2} \quad (\vec{0}_{m_1} = \vec{0})$$

$$|\vec{x}_1| = \left| \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} \right| |\hat{x}|$$

$$= \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} \quad (1) \quad \begin{array}{l} m_1 > 0, m_2 > 0 \text{ aus} \\ \text{physikalische Gründe} \\ a > 0 \text{ (Aufgabenstellung)} \end{array}$$

$$x_1 = \frac{m_2 a}{m_1 + m_2}$$

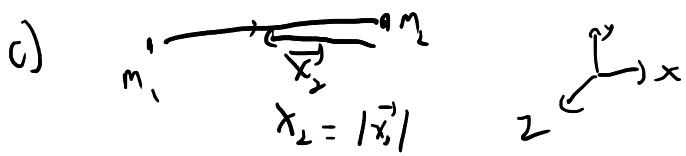
b) Zentripetalkraft:  $\frac{G m_1 m_2}{a^2} = m_1 x_1 \omega^2$  (Gravitationskraft = Zentripetalkraft  
ähnlich wie Vorlesung 3.4)

$$\omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{a^2 x_1} = \frac{G m_2}{a^2} \frac{m_1 + m_2}{m_2 a}$$

$$= \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

c) 

$$x_2 = |\vec{x}|$$

Schritt 1:  $x_2 = \frac{m_1 a}{m_1 + m_2}$

$$\vec{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (\text{Vorlesung 2.4})$$

$$= \frac{-m_1 a \hat{x} + m_2 \vec{0}}{m_1 + m_2} \quad (\text{Aufgabenstellung})$$

$$= \frac{-m_1 a \hat{x}}{m_1 + m_2} \quad (\vec{0}_{m_i} = \vec{0})$$

$$|\vec{x}_2| = \left| \frac{-m_1 a}{m_1 + m_2} \right| |\hat{x}|$$

$$= \left| \frac{m_1 a}{m_1 + m_2} \right| |\hat{x}|$$

$$= \frac{m_1 a}{m_1 + m_2} = x_2$$

Schritt 2:  $\vec{L}_i = m_i [r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}]$ ,  $i=1,2$  (Vorlesung 5.1)

Aber  $\vec{\omega}$  ist out  $\neq$  senkrecht! (Vorlesung 3.1)

$$\vec{L}_i = m_i r^2 \vec{\omega} = m_i r^2 \omega \hat{z}$$

Impuls  $\vec{L} = (m_1 x_1^2 \omega + m_2 x_2^2 \omega) \hat{z}$

$$= \left( m_1 x_1^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3} + m_2 x_2^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3} \right) \hat{z}$$

$$= \left[ m_1 \frac{m_1^2 a^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3} + m_2 \frac{m_2^2 a^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3} \right] \hat{z}$$

$$= \left( \frac{G m_1^3}{(m_1 + m_2) a} + \frac{G m_2^3}{(m_1 + m_2) a} \right) \hat{z}$$

$$= \frac{G(m_1^3 + m_2^3)}{a(m_1 + m_2)} \hat{z}$$