Wintersemester 2023/24 08.01.2024
Prof. Dr. Stephan Elsenhans Benedikt Wolf

Lineare Algebra: Aufgabenblatt 11

11.1 Berechnung einer Determinante /25 Punkte

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A und B mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A und B direkt mit der Leibnizformel.

(c) Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Methoden. Welche würden Sie bevorzugen? Hängt Ihre Antwort von der Struktur der Matrix ab?

11.2 Basiswechsel /30 Punkte

Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ -96 & 268 & -63 \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix}$$

sowie $B := (b_1, b_2, b_3) := ((14, 6, 4), (10, 6, 10), (6, 8, 24))$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $C = T_B^E$, wobei E die Standardbasis ist (Notation wie in 3.5.2)

(c) Bestimmen Sie C^{-1} und berechnen Sie $C^{-1}AC$.

(d) Geben Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis B an.

(e) Bestimmen Sie $\det(A), \det(C), \det(C^{-1})$ und $\det(C^{-1}AC)$, ohne den Determinantenmultiplikationssatz zu verwenden. Verifizieren Sie damit für diesen Spezialfall Folgerung 4.3.6 und Satz 4.3.7.

11.3 Abbildungen mit Eigenschaften der Determinante /30 Punkte

In dieser Aufgabe sei stets $D : Mat(n \times n, K) \to K$ eine Abbildung, die linear in jeder Spalte ist, d.h. Eigenschaft 1 von Definition 4.2.1 erfüllt.

(a) Zeigen Sie: Ist die Charakteristik von K nicht 2, dann ist D genau dann alternierend, wenn für D die Aussage 3 von Satz 4.2.2, also

„Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Spalten, so ist $D(B) = -D(A)$."

gilt. Diese Eigenschaft nennt man auch „schiefsymmetrisch".

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung $D_1 : Mat(2 \times 2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ab + cd$ ist linear in jeder Spalte und schiefsymmetrisch, aber nicht alternierend.

(c) Zeigen Sie: Für jedes $k \in K$ gibt es genau eine Abbildung $D : Mat(n \times n, K) \to K$, die linear in jeder Spalte und alternierend ist und zusätzlich $D(E_n) = k$ erfüllt. Diese ist gegeben durch die Abbildungsvorschrift $D(A) = k \det(A)$.

11.4 Determinante als orientierte Fläche **/15 Punkte**

Für den Kontext dieser Aufgabe seien b_1, b_2 stets in $\mathbb{R}^2$ und $b_1 = (a, c)$, $b_2 = (b, d)$. Wir definieren wir die Orientierung $o : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wie folgt: Ist (b_1, b_2) linear abhängig, ist $o(b_1, b_2) := 0$. Ist (b_1, b_2) linear unabhängig und ist $a > 0, c = 0$, definieren wir $o(b_1, b_2)$ als das gewöhnliche Vorzeichen von d. Andernfalls wenden wir zunächst diejenige Drehung D an, für die $D(b_1) = (x, 0)$ mit $x > 0$ gilt und definieren $o(b_1, b_2) := o((x, 0), D(b_2))$.
Wir bezeichnen $|P(b_1, b_2)|$ die elementargeometrische Fläche des Parallelogramms $P(b_1, b_2)$.

(a) Geometrisch wissen wir, dass eine Drehung D_ϕ um den Ursprung und um den Winkel ϕ die elementargeometrische Fläche und nach Konstruktion auch nicht die Orientierung ändert (das müssen Sie nicht zeigen). Zeigen Sie, dass auch

$$\det((D_\phi(b_1), D_\phi(b_2))) = \det((b_1, b_2))$$

gilt.

(b) Wir betrachten zunächst (b_1, b_2) linear unabhängig. Mit Teilaufgabe (a) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $b_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $a > 0$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe der Elementargeometrie:

$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}) = o(b_1, b_2) \cdot |P(b_1, b_2)|$.

(c) Setzen Sie die Aussagen der vorigen Teilaufgaben zu einem Beweis der folgenden Aussage zusammen:

Es gilt für alle $b_1 = (a, b), b_2 = (c, d) \in \mathbb{R}^2$:

$$\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = o((b_1, b_2))|P(b_1, b_2)|$$

Gehen Sie dabei auch *kurz* auf den Fall mit linear unabhängigen (b_1, b_2) ein.

Abgabetermin: **15.01.2024, 11:00 Uhr auf WueCampus**
Maximal 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Begründen Sie Ihre Behauptungen. Sofern nicht anders angegeben, dürfen Sie nur Aussagen verwenden, die in der Vorlesung oder in den Übungen bereits bewiesen wurden. $\sum$ **/100**

Lösungshinweise

Aufgabe 1:

(a) ...

(b) ...

Aufgabe 2:
...

Aufgabe 3:

(a) ...

(b) Welche Beweisschritte von Satz 4.3.1 ändern sich überhaupt? Welche können Sie mit dem Wissen um Satz 4.3.1 verkürzen?

Aufgabe 4:
Wir betrachten in dieser Aufgabe den Zusammenhang der Determinante von reellen 2×2 Matrizen mit der (orientierten) Fläche. In der Vorlesung wird dies bald in einen allgemeineren Kontext gestellt.
Machen Sie sich ggf. an ein paar Beispielen klar, dass die Drehung D aus der Angabe auch tatsächlich existiert eindeutig bestimmt ist. Ein sauberer Beweis dafür würde aber zu weit in die Geometrie gehen.
Man kann sich überlegen, dass die Definition von o mit der folgenden übereinstimmt: Wir nennen eine Basis (b_1, b_2) des $\mathbb{R}^2$ *positiv orientiert*, wenn der Winkel $b_1 \mathcal{O} b_2$ kleiner als 180° ist. Damit definieren wir eine Abbildung $o : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}$ durch $o(b_1, b_2) := 0$, falls (b_1, b_2) linear abhängig ist, $o(b_1, b_2) := 1$, falls (b_1, b_2) linear unabhängig und positiv orientiert ist und $o(b_1, b_2) := -1$, falls (b_1, b_2) linear unabhängig und nicht positiv orientiert ist. Wir sehen den Winkel dabei immer als orientierten Winkel in mathematisch positiver Richtung, d.h. im Standardkoordinatensystem gegen den Uhrzeigersinn. Dies ist für die Aufgabe aber nicht relevant. In der Aufgabe selbst müssen keine Winkel berechnet oder ermittelt werden. Flächenberechnung erfolgt so, wie sie das aus der Schule kennen. Lassen Sie sich vom Text nicht abschrecken, die Bearbeitung dauert weniger lang als es aussieht.

(a) ...

(b)

(c) Sie dürfen hier annehmen, dass $|P(b_1, b_2)|$ auch für linear abhängige (b_1, b_2) eine reelle Zahl ist. Der konkrete Wert spielt für die Aufgabe keine Rolle, aber per Konvention würde man ihn auf 0 setzen.