Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 10, 2024)

Problem 1. Definieren Sie zwei diskrete Zufallsvariablen, welche

(a) den gleichen Erwartungswert, aber verschiedene Varianzen haben,

(b) verschiedene Erwartungswerte, aber die gleiche Varianz haben,

(c) den gleichen Erwartungswert und Varianz, aber unterschiedliche Verteilungen haben.

Proof. (a) Sei $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$, $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \mathbb{P}(\varnothing) = 0, \mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0.5$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist damit ein Wahrscheinlichkeitsraum. Definiere

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, X(0) = -1, X(1) = 1$$
$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, Y(0) = -2, Y(1) = 2$$

Damit ist $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, aber die Varianzen unterschiedlich.

(b) Sei Ω wie vorher, und

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, X(0) = -1, X(1) = 1$$
$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, Y(0) = -2, Y(1) = 0$$

damit ist $\mathbb{E}[X] = 0 \neq -1 = \mathbb{E}[Y]$, aber die Varianzen gleich.

□

Problem 2. (a) Es sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, also

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X^n] = \lambda \cdot \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutzen Sie dies zur Berechnung der Varianz von X.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Es sei $Z = \sum_{r=1}^{\infty} X_r$, und $X_r \sim \text{Poiss}(r^{-2})$, also Poisson-verteilt mit Parameter $1/r^2$. Zeigen Sie, dass Z endlichen Erwartungswert hat und leiten Sie $\mathbb{E}[Z]$ her.

Proof. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^n] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^n \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k+1)!} \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}].
\end{aligned}$$

Die Varianz ist

$$\begin{aligned}
\text{var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \lambda \mathbb{E}[X+1] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \lambda \mathbb{E}[X] + \lambda - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \lambda + \mathbb{E}[X](\lambda - \mathbb{E}[X]) \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

(b) Der Erwartungswert ist linear. Nach dem Satz von monotonen Konvergenz (die Verteilugsfunktionen sind alle positiv) können wir $\mathbb{E}$ und die Summe vertauschen:

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_r] = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□