Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

7. Übungsblatt

Hinweis:
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Mittwoch (06.12.2023) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Beweisen oder Widerlegen Sie (7 mal 2 Pkte)**

   (a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $p \in \mathbb{K}[x]$ ein beliebiges Polynom, dann gilt: Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

   (b) Angenommen wir haben in (a) eine Konstellation in der λ ein Eigenwert von A und $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$ ist, dann stimmen jeweils auch die geometrischen Vielfachheiten überein.

   (c) Eine $n \times n$ Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten ist invertierbar.

   (d) Im Falle der Invertierbarkeit ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau dann, wenn λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

   (e) Sind zwei Matrizen A und B ähnlich, dann haben sie dieselben Eigenwert.

   (f) Sind zwei Matrizen A und B äquivalent, dann haben sie dieselben Eigenwerte.

   (g) Sind zwei Matrizen A und B ähnlich so folgt: Ist λ ein Eigenwert von A dann ist λ ein Eigenwert von $(A + B)/2$.

2. **Simultane Diagonalisierbarkeit (2 + 6 + 3 + 4)**
   Es seien $A,\ B$ in $\mathbb{K}^{n\times n}$ diagonlisierbar und D_A, D_B zugehörige Diagonalmatrizen. Zeigen Sie:

   (a) Existiert ein $U \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ mit
   $$D_A = U^{-1}AU, \quad D_B = U^{-1}BU,$$
   so gilt für den Kommutator $[A, B] = 0$.

   (b) Ist $[A, B] = 0$, dann existiert eine geordnete Basis $V = \{v_1, ..., v_n\}$ aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_r$ bezüglich derer gilt
   $${}_V[B]_V = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{pmatrix}$$
   mit $B_i \in \mathbb{K}^{d_i\times d_i}$ und d_i die geometrische Vielfachheit von λ_i für $i = 1, ..., r$.

   (c) Jedes der B_i wie in (b) ist selbst wieder diagonalisierbar für $i = 1, ..., r$.

   (d) Ist $[A, B] = 0$, so existiert ein U mit
   $$D_A = U^{-1}AU, \quad D_B = U^{-1}BU.$$

3. **Rechenbeispiel (2 + 4 + 4 Pkte)**
   Es sei
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
   eine reelle Matrix.

   (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und dazugehörige Eigenräume.

(c) Im Falle der Diagonalisierbarkeit, bestimmen Sie explizit die Projektoren $P_1, ..., P_r$ auf die r-vielen Eigenräume, sodass gilt

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i.$$