Lehrstuhl für Mathematik VIII
Julius-Maximilians Universität Würzburg
Vorlesung Stochastik 1
Wintersemester 2024/25
Markus Bibinger / Adrian Grüber

Übungsblatt 8

Klausurübung 8.1

Definieren Sie zwei diskrete Zufallsvariablen, welche

(a) den gleichen Erwartungswert, aber verschiedene Varianzen haben,

(b) verschiedene Erwartungswerte, aber die gleiche Varianz haben,

(c) den gleichen Erwartungswert und Varianz, aber unterschiedliche Verteilungen haben.

Übung 8.2

(a) Es sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, also

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\,,\ k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X^n] = \lambda \cdot \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutzen Sie dies zur Berechnung der Varianz von X.

(b) Es sei $Z = \sum_{r=1}^{\infty} X_r$, und $X_r \sim \mathrm{Poiss}(r^{-2})$, also Poisson-verteilt mit Parameter $1/r^2$. Zeigen Sie, dass Z endlichen Erwartungswert hat und leiten Sie $\mathbb{E}[Z]$ her.

Aufgabe 8.3 (keine Abgabe)

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu\,.$$

(b) Für $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, betrachten wir $X(\omega) = \omega$ und für $\mathbb{P}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmt durch

$$\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(\{j\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha+1)} \frac{1}{j^{\alpha+1}}\,, j \in \mathbb{N}\,,$$

mit $\alpha > 1$ und der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\,, s > 1.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] = (\zeta(\alpha+1))^{-1} \zeta(\alpha)$ gilt.

Aufgabe 8.4 (keine Abgabe)
Sei X eine $\mathbb{N}$–wertige Zufallsvariable. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \mathbb{E}[X],$$

wobei die Reihe auf der linken Seite genau dann konvergiert, wenn der Erwartungswert der Zufallsvariablen auf der rechten Seite existiert.
Berechnen Sie mit Hilfe der Formel (erneut) den Erwartungswert einer geometrischen Verteilung.

Bearbeitung bis Donnerstag, den 12.12.2024.