Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Wachsmuth
Bastian Dittrich

Wintersemester 2023/24

# 12. Übung zur Vertiefung Analysis

17. Januar 2024

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 24. Januar 2024* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

**Aufgabe 12.1 (Untermannigfaltigkeiten, 11 Punkte)** Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse $C^\alpha$ sowie $P \subseteq \mathbb{R}^m$ eine $l$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$. Zeigen Sie:

(a) $M \times P \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$.

(b) Gilt $M \cap \overline{N} = \emptyset = \overline{M} \cap N$, so ist $M \cup N$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$.

(c) Die Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1,1),\, y = x^2\right\}, \\ B &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1,0) \cup (0,1),\, y = -|x|\right\}, \end{aligned}$$

sind jeweils 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse $C^1$.

(d) Die Aussage aus (b) ist unter der schwächeren Voraussetzung $M \cap N = \emptyset$ im Allgemeinen nicht richtig.

**Aufgabe 12.2 (Rotationskörper, 6 Punkte)** Sei $a < b$, $\alpha \in \mathbb{N}$ und $r : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei $\alpha$-mal stetig differenzierbar mit $r(z) > 0$ für alle $z \in (a,b)$. Definiere

$$R := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b),\, \sqrt{x^2+y^2} = r(z)\right\}.$$

Dann ist $R$ durch die Abbildung

$$\varphi : (a,b) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(z,\alpha) := \begin{pmatrix} r(z)\cos\alpha \\ r(z)\sin\alpha \\ z \end{pmatrix}$$

parametrisiert.

(a) Zeigen Sie, dass $R$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\alpha$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $R$ eine $\lambda_3$-Nullmenge ist.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$I := \int_{(a,b)\times(0,2\pi)} \sqrt{\det\left(\varphi'^T \varphi'\right)}\, \mathrm{d}\lambda_2(z,\alpha).$$

in Abhängigkeit der Funktion $r$.

(d) Bestimmen Sie das Integral $I$ in (c) für den Fall $r(z) := \cosh(z)$ und $(a,b) := (0,1)$.