Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 19, 2023)

Problem 1. Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}, \mathcal{S}$ σ-Algebren über X sowie B eine σ-Algebra über Y. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(c) $\mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(d) $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{B}\}$ ist eine σ-Algebra über X.

(e) $f(\mathcal{A}) = \{f(A) \subseteq Y | A \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Proof. (a) Falsch. Sei

$$
\begin{aligned}
X &= \{a, b, c\} \\
\mathcal{A} &= \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, X\} \\
\mathcal{S} &= \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\}
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$A \cup S = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}.$$

keine σ-Algebra, weil

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{S}.$$

(b) Richtig.

(1) $X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(2) Sei $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann $A \in \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{S}$.

Daraus folgt: $A^c \in \mathcal{A}$ und $A^c \in \mathcal{S}$. Deswegen ist $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$.

(3) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$$

Daraus folgt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}.$$

(c) Falsch. $X \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{S} \implies X \notin \mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$

(d) Richtig.

(1) $f^{-1}(Y) = X \in f^{-1}\mathcal{B}$

(2) Sei $A = f^{-1}(B)$

$$X - A = f^{-1}(\underbrace{Y - B}_{\in \mathcal{B}}) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

(3) Es folgt aus

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right).$$

(e) Falsch. Sei $a \in Y$ und f die konstante Abbildung $f(x) = a \forall x \in X$. Dann gilt

$$f(\mathcal{A}) = \{\varnothing, \{a\}\}$$

was keine σ-Algebra ist

$\square$