

## Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan\*

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: November 3, 2023)

**Problem 1.** (a) Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte der folgenden Matrizen.

Was muss jeweils für die Dimensionen erfüllt sein?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Eine Blockmatrix ist eine Matrix von der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$$

mit Matrizen  $A_1 \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ,  $A_2 \in \mathbb{K}^{n' \times m}$ ,  $A_3 \in \mathbb{K}^{n \times m'}$ ,  $A_4 \in \mathbb{K}^{n' \times m'}$ . Sei weiterhin

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$$

mit ebenso Einträgen aus  $\mathbb{K}$ . Wer nun meint, die Multiplikation von A und B sei so simpel wie

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_3 B_2 & A_1 B_3 + A_3 B_4 \\ A_2 B_1 + A_4 B_2 & A_2 B_3 + A_4 B_4 \end{pmatrix}$$

hat tatsächlich recht. Beweisen Sie diese Formel und geben Sie gleichzeitig die  $B'_i$ s für die benötigten Matrizenräume an, sodass die Rechnung wohldefiniert ist.

---

\* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

*Proof.* (a) Für  $A$  eine  $n \times m$  Matrize, und  $B$  eine  $p \times q$  Matrize, ist  $AB$  wohldefiniert, nur wenn  $m = p$

Die Matrizprodukte sind

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ 6 & 8 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AE = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ 43 & 100 \end{pmatrix}$$

$$FA = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ -7 & 14 & 0 & 56 \end{pmatrix}$$

$$DC = (55)$$

$$CF = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 \\ -7 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$FE = \begin{pmatrix} -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(b) Wir brauchen  $B_1 \in \mathbb{K}^{m \times p}, B_2 \in \mathbb{K}^{m' \times p}, B_3 \in \mathbb{K}^{m \times q}, B_4 \in \mathbb{K}^{m' \times q}$  für  $p, q \in \mathbb{N}$ . Wir bezeichnen, für  $v_1 \in \mathbb{K}^p, v_2 \in \mathbb{K}^q$ , das Vektor  $(v_1, v_2) \in \mathbb{K}^{p+q}$ .

□

**Problem 2.** Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ , nicht notwendigerweise endlich-dimensional und

$$\Phi : V \rightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Beweisen Sie:

- (a) Die duale Abbildung  $\Phi^*$  ist injektiv genau dann, wenn  $\Phi$  surjektiv ist. Hinweis: Die Richtung  $\implies$  beweisen Sie am einfachsten als eine Kontraposition.
- (b) Die duale Abbildung  $\Phi$  ist surjektiv genau dann, wenn  $\Phi$  injektiv ist. Hinweis: Die Rückrichtung lässt sich am einfachsten direkt beweisen. Nutzen Sie in dem Fall die Injektivität von  $\Phi$  aus, um für ein beliebiges  $v^* \in V^*$  eine lineare Abbildung im Bild von  $\Phi^*$  zu konstruieren, die die gleichen Werte wie Abbildung  $v^*$  liefert.
- (c) Im Falle der Invertierbarkeit gilt

$$(\Phi^{-1})^* = (\Phi^*)^{-1}.$$

*Proof.* (a) Sei  $\Phi$  surjektiv, und  $w_1^*, w_2^* \in W^*$ . Es gilt  $\Phi w_1^* = w_1^* \circ \Phi$ ,  $\Phi w_2^* = w_2^* \circ \Phi$ . Die zwei Abbildungen  $w_1^* \circ \Phi$  und  $w_2^* \circ \Phi$  sind unterschiedliche, solange es mindestens ein  $v \in V$  gibt, sodass  $(w_1^* \circ \Phi)(v) \neq (w_2^* \circ \Phi)(v)$ . Wir haben aber ausgenommen, dass  $w_1^* \neq w_2^*$ . Das bedeutet, dass es  $w \in W$  gibt, so dass  $w_1^*(w) \neq w_2^*(w)$ . Weil  $\Phi$  surjektiv ist, ist  $w = \Phi(v)$  für eine  $v$ . Dann ist  $(w_1^* \circ \Phi)(v) \neq (w_2^* \circ \Phi)(v)$ , also  $\Phi^*$  ist surjektiv. Jetzt nehmen wir an, dass  $\Phi$  nicht surjektiv ist. Wir definieren zwei lineare Funktionale  $w_1^*$  und  $w_2^*$ , sodass  $w_1^* \neq w_2^*$ . Sei  $w_1^*(w) = w_2^*(w) \forall w \in \text{im}(\Phi)$

□