Wintersemester 2023/24 | 20.11.2023
Prof. Dr. Stephan Elsenhans | Benedikt Wolf

# Lineare Algebra: Aufgabenblatt 06

## 6.1 Untervektorräume /25 Punkte

Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum des jeweils angegebenen Vektorraums sind.

(a) $\{p \in \mathbb{R}[t] | \deg(p) \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}[t]$

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum

(c) $B = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(d) $\{p \in \mathbb{Q}[t] | \forall a \in \mathbb{Q} : \tilde{p}(-a) = \tilde{p}(a)\}$, wobei $\tilde{p}$ die zu $p$ gehörige Polynomfunktion bezeichnet, als Teilmenge von $\mathbb{Q}[t]$

(e) $\{(1,2,3) + t \cdot (4,5,6) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

## 6.2 Linear unabhängig /25 Punkte

Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien im jeweiligen Vektorraum linear unabhängig sind.

(a) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(b) $((1,i),(i,-1))$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$

(c) $((1,i),(i,-1))$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$

(d) $(1, 1+t, 1+t+t^2)$ im $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$

(e) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum

## 6.3 Erzeugendensystem /25 Punkte

Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums sind.

(a) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(b) $(\exp it)_{t \in \mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(c) $(1+t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(d) $(\tilde{p})_{p \in \mathbb{R}[t]}$ für den Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(e) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum

## 6.4 Basis

**/25 Punkte**

(a) Zeigen Sie: Ist $(b_i)_{i\in B}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $V$ und $i_0 \in B$, dann ist auch $(b_i - 2b_{i_0})_{i\in B}$ eine Basis von $V$.

(b) Zeigen Sie: Ist $K$ ein unendlicher Körper und sind $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ Elemente von $K$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, so ist $(b_k)_{k\in\{0,1,2,3,\ldots,n\}}$ mit

$$b_k = \frac{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(t-x_i)\right)\cdot\left(\prod_{i=k+1}^{n}(t-x_i)\right)}{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k-x_i)\right)\cdot\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k-x_i)\right)}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $K_{\leq n}[t] := \{p(t) \in K[t] |\deg(p) \leq n\}$.

(c) Geben Sie mit Hilfe der Basis aus der vorigen Teilaufgabe ein rationales Polynom vom Grad höchstens 4 an, dessen Polynomfunktion die Funktionswerte $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 17$, $f(5) = 6000$ hat.

Abgabetermin: **27.11.2023, 11:00 Uhr auf WueCampus**
Maximal 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Begründen Sie Ihre Behauptungen. Sofern nicht anders angegeben, dürfen Sie nur Aussagen verwenden, die in der Vorlesung oder in den Übungen bereits bewiesen wurden. $\sum$ **/100**

## Lösungshinweise

**Aufgabe 1:**
...

**Aufgabe 2:**
...

**Aufgabe 3:**
$\tilde{p}$ steht hier für die zu $p$ gehörende Polynomfunktion

**Aufgabe 4:**
Erinnerung: Der Wert des leeren Produktes ist als 1 definiert.