Aufgabe 1 *Kreisprozesse* **8 P.**

Betrachten Sie einen thermodynamischen Kreisprozess, bei dem ein ideales Gas, ausgehend von einem Gleichgewichtszustand mit Druck p_1 und Volumen V_1, folgende Schritte quasistatisch und reversibel mit konstanter Teilchenzahl durchläuft:

(i) Isobare Expansion
(ii) Adiabatische Expansion
(iii) Isochore Dekompression
(iv) Adiabatische Kompression

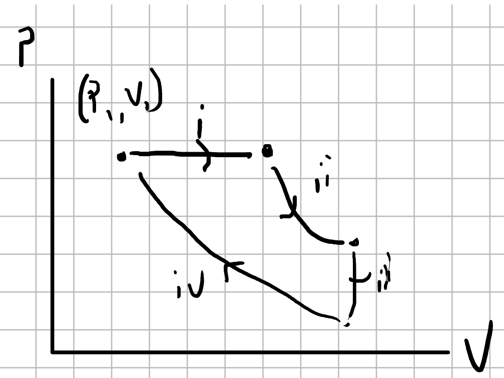
a) Skizzieren Sie den Kreisprozess im $p-V$ und $T-S$ Diagramm. *2 P.*

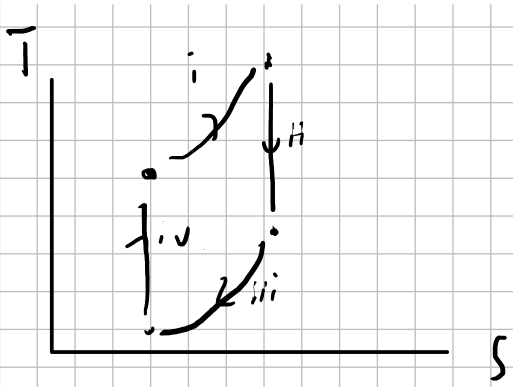
b) Berechnen Sie für jeden Schritt $j = i, ii, iii, iv$ die vom System geleistete Arbeit ΔW_j und die vom System aufgenommene Wärme ΔQ_j, als Funktionen der jeweiligen Drücke p_j und Volumina V_j. Geben Sie jeweils explizit die Vorzeichen von ΔW_j und ΔQ_j an. *2 P.*

c) Geben Sie den Wirkungsgrad η einer auf diesem Kreisprozess beruhenden Wärmemaschine als Funktion der ΔW_j und ΔQ_j an. Eine explizite Darstellung des Wirkungsgrades als Funktion der p_j und V_j ist nicht nötig. *2 P.*

d) Geben Sie die Variation ΔS und ΔE der Entropie und inneren Energie des Systems, sowie des Universums (d.h. System + Umgebung) an, die vom Kreisprozess verursacht wurden. Wie würden sich diese Werte ändern, wenn der entsprechende Kreisprozess durch nicht reversible Transformationen realisiert werden würde? *2 P.*

a)





b) $$W = \int P\,dV$$

i) $$\Delta W_i = P_2 V_2 - P_1 V_1$$

$$\Delta U_i = C_V\left(\frac{P_2V_2}{nR} - \frac{P_1V_1}{nR}\right)$$

$$= \frac{\nu}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right)$$

wobei ν die Anzahl der Freiheitsgrade ist

$$\Delta Q_i = \Delta U_i + \Delta W_i$$

$$= \frac{\nu+2}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) = C_p\left(P_2V_2 - P_1V_1\right)$$

Bemerkung: $P_2 = P_1$

ii) $pV^{\gamma} = \text{const.} = p_2 V_2^{\gamma}, \quad p = p_2 V_2^{\gamma} V^{-\gamma}$

$$\gamma = \frac{k+2}{k}$$

$$\Delta W_{ii} = \int p \, dV$$

$$= p_2 V_2^{\gamma} \int_{V_2}^{V_3} V^{-\gamma} dV$$

$$= p_2 V_2^{\gamma} \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_2}^{V_3}$$

$$= \frac{p_2 V_2^{\gamma}}{\gamma - 1} \left(V_2^{1-\gamma} - V_3^{1-\gamma} \right)$$

$$= \frac{1}{\gamma-1} \left(p_2 V_2 - p_2 V_2^{\gamma} V_3^{1-\gamma} \right)$$

$$= \frac{1}{\gamma-1} \left(p_2 V_2 - p_3 V_3 \right)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} = \frac{1}{\frac{\nu+2}{\nu}-1} = \frac{1}{\frac{2}{\nu}} = \frac{\nu}{2}$$

$$\Delta W_{ii} = \frac{\nu}{2} \left(p_2 V_2 - p_3 V_3 \right) = -\Delta U_{ii}$$

Hätte ich ohne das Integral schreiben können...

$$\Delta U_{ii} = \frac{\nu}{2} \left(p_3 V_3 - p_2 V_2 \right)$$

$$\Delta Q_{ii} = 0 \quad \text{(adiabatisch)}$$

iii) $\Delta U_{iii} = \frac{\omega}{nR} \left(p_3 V_3 - p_2 V_2 \right) = \frac{\nu}{2} \left(p_3 V_3 - p_2 V_2 \right)$

Bemerkung: $V_3 = V_2$

$$\Delta W_{iii} = 0$$

$$\Delta Q_{iii} = \Delta U_{iii} = \frac{\nu}{2}(p_3 V_3 - p_2 V_2)$$

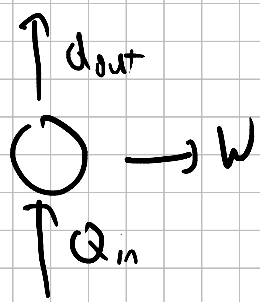
iv) $\Delta U_{iv} = \frac{\nu}{2}(p_1 V_1 - p_3 V_3)$

$\Delta Q_{iv} = 0$ (adiabatisch)

$\Delta W_{iv} = -\Delta U_{iv}$

c) Zusammenfassung

	i	ii	iii	iv
ΔQ	+	0	−	0
ΔW	+	+	0	−



$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{W_i + W_{ii} + W_{iv}}{Q_i}$$
$$= 1 - \left|\frac{Q_{out}}{Q_{in}}\right| = 1 + \frac{Q_3}{Q_1}$$

d) $\Delta E_{system} = \Delta S_{system} = 0$

(Entropie und Energie sind Zustandsfunktionen)

$\Delta E_{Universum} = 0$ (Energieerhaltung)

$\Delta S_{Universum} \geq 0$

Keine Änderung, wenn das Prozess durch irreversible Prozesse realisiert wird.

Aufgabe 2 *Relationen partieller Differentiale* **4 P.**

Es seien vier Zustandsvariablen x, y, z, w gegeben, so dass $F(x, y, z) = 0$ gilt. w sei eine Funktion von zwei der drei Variablen x, y und z.

a) Zeigen Sie, dass *2 P.*

$$\frac{\partial x}{\partial y}|_z \frac{\partial y}{\partial z}|_x \frac{\partial z}{\partial x}|_y = -1\,,$$

gilt

b) Zeigen Sie, dass *2 P.*

$$\frac{\partial x}{\partial y}|_z = \frac{\partial x}{\partial y}|_w + \frac{\partial x}{\partial w}|_y \frac{\partial w}{\partial y}|_z\,,$$

gilt

a)

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x,y} dz = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 0$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y,z} \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x,y}$$

Ähnlich gilt

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x,y} \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,z}$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,z} \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y,z}$$

Das Produkt der Gleichungen liefert das gewünschte Resultat

b)

Angenommen w hängt von z ab,
also wir könnn (zumindest lokal) z eliminieren

$$x = x(y, z) = x(y, w(z, \cdot))$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z = \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_w + \frac{\partial x}{\partial w}\Big|_y \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_z$$

Aufgabe 3 *Jacobi Determinantenregel* **3 P.**

Beweisen Sie die "*Erweiterungsregel*" für Jacobi-Determinanten:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

wenn $f(x,y), g(x,y), x(u,v), y(u,v)$ jeweils differenzierbare Funktionen von zwei Veränderlichen sind, so dass über $f\left(x(u,v), y(u,v)\right), g(x(u,v), y(u,v))$ auch f und g als Funktionen von u, v aufgefasst werden können. Dabei sind die Jacobi-Determinanten definiert durch:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$- \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$- \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$