

Captain's Log zur Vorlesung

## Analysis 2

**Stefan Waldmann\***

Julius Maximilian University of Würzburg  
Institute of Mathematics  
Chair of Mathematics X (Mathematical Physics)  
Emil-Fischer-Straße 31  
97074 Würzburg  
Germany

Wintersemester 2023/2024

### **Zusammenfassung**

In diesem Logbuch werden die Inhalte der einzelnen Vorlesungsstunden grob beschrieben und aufgelistet. Dies ist insbesondere nützlich, wenn man zu Hause lernen will oder eine Vorlesungsstunde verpasst hat.

---

\*[stefan.waldmann@mathematik.uni-wuerzburg.de](mailto:stefan.waldmann@mathematik.uni-wuerzburg.de)

## 1. Vorlesung 16.10.2023

### Organisatorisches

- Übungsbetrieb
- WueCampus und die Aufgabenblätter
- Prüfung
- Literatur und Vorlesungsskript
- Hausaufgaben

### Kapitel 5: Differenzierbarkeit und die Ableitung

- Abschnitt 5.3: Hauptsätze für differenzierbare Funktionen  
Globale und lokale Extrema, Kriterien mittels Ableitung. Satz von Rolle, Mittelwertsatz, Monotonie, Schrankensatz, Zwischenwertsatz für die Ableitung.

## 2. Vorlesung 17.10.2023

- Abschnitt 5.3: Hauptsätze für differenzierbare Funktionen  
Sinus cardinalis und Regel von l'Hospital (ohne Beweis).
- Abschnitt 5.4: Höhere Ableitungen und  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen  
Definition von  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen, Beispiele für glatte Funktionen, Rechenregeln für  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen. Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema mittels zweiter Ableitung, Beispiele.

## 3. Vorlesung 18.10.2023

- Abschnitt 5.4: Höhere Ableitungen und  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen  
Konvexe Funktionen und Charakterisierung durch zweite Ableitung. Die wichtigen Ungleichungen der Mathematik aus der Konvexität des Logarithmus.
- Abschnitt 5.5: Konvergenz von differenzierbaren Funktionen  
Gleichmäßige Approximation der Betragsfunktion durch Polynome. Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz der Ableitungen (Beweis begonnen).

## 4. Vorlesung 24.10.2023

- Abschnitt 5.5: Konvergenz von differenzierbaren Funktionen  
Differenzierbarkeit und lokal gleichmäßige Konvergenz. Konvergenz im  $\mathcal{C}^k$ -Sinne, Vollständigkeit von  $\mathcal{C}^k(X)$ . Differenzierbarkeit der  $\zeta$ -Funktion.
- Abschnitt 5.6: Potenzreihen und Taylor-Entwicklung  
Glattheit von Potenzreihen (angefangen).

## 5. Vorlesung 25.10.2023

- Abschnitt 5.6: Potenzreihen und Taylor-Entwicklung  
Glattheit von Potenzreihen, Beispiele. Formale Taylor-Reihe, Taylor-Entwicklung mit Restglied. Konvergenz der Taylor-Reihe.

## 6. Vorlesung 31.10.2023

- Abschnitt 5.6: Potenzreihen und Taylor-Entwicklung  
Konvergenz der Taylor-Reihe, Beispiele.

## Kapitel 6: Das Riemann-Integral

- Abschnitt 6.1: Definition des Riemann-Integrals  
Motivation als Flächeninhalt unter einem Graph. Zerlegungen und markierte Zerlegungen, Riemann-Summen. Verfeinerungen von Zerlegungen und Richtungen auf der Menge der (markierten) Zerlegungen. Riemann-Integral als Netz-Limes der Riemann-Summen über Verfeinerungen.

### 7. Vorlesung 7. 11. 2023

- Abschnitt 6.1: Definition des Riemann-Integrals  
Eigenschaften von Riemann-integrierbaren Funktionen und des Riemann-Integrals.
- Abschnitt 6.2: Riemann-integrierbare Funktionen  
Riemann-integrierbare Funktionen sind beschränkt. Ober- und Untersummen, Darboux-Integral, erste Eigenschaften.

### 8. Vorlesung 8. 11. 2023

- Abschnitt 6.2: Riemann-integrierbare Funktionen  
Charakterisierung Darboux-integrierbarer Funktionen, Vergleich Darboux-Integral und Riemann-Integral, monotone Funktionen, Beispiele. Integration über Teilintervalle und Konstruktion der Integrale durch Folgen von Riemann-Summen.

### 9. Vorlesung 14. 11. 2023

- Abschnitt 6.3: Riemann-Integrale stetiger Funktionen  
 $\mathcal{C} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$  und  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$  mit einigen Folgerungen.
- Abschnitt 6.4: Der Hauptsatz und Stammfunktionen  
Integration bei variabler oberer Grenze. Stammfunktionen mit vielen Rechenregeln. Hauptsatz, Beispiele, partielle Integration und Substitutionsregel. Explizite Berechnung von Integralen.

### 10. Vorlesung 15. 11. 2023

Termin ausgefallen.

### 11. Vorlesung 21. 11. 2023

- Abschnitt 6.4: Der Hauptsatz und Stammfunktionen  
Beispiele für partielle Integration und Substitutionsregel. Fläche des Halbkreises. Taylor-Entwicklung mit Integraldarstellung des Restglieds.
- Abschnitt 6.5: Ungleichungen und Mittelwertsätze für Riemann-Integrale  
Hölder-Ungleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Minkowski-Ungleichung und Jensen-Ungleichung. Mittelwertsatz.
- Abschnitt 6.6: Uneigentliche Riemann-Integrale  
Definition von uneigentlichen Riemann-Integralen.

## 12. Vorlesung 28. 11. 2023

- Abschnitt 6.6: Uneigentliche Riemann-Integrale  
Eigenschaften und Beispiele für uneigentliche Riemann-Integrale. Majorantenkriterium, Cauchy-Kriterium und absolute Konvergenz. Reihen und uneigentliche Riemann-Integrale, Euler-Mascheroni-Konstante. Definition und erste Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion.

## 13. Vorlesung 29. 11. 2023

- Abschnitt 6.6: Uneigentliche Riemann-Integrale  
Funktionalgleichung der  $\Gamma$ -Funktion. Gleichmäßige Konvergenz und Riemann-Integrale. Riemann-Integrale von Potenzreihen, Taylor-Entwicklung von  $\arctan$ .

## Kapitel 7: Normierte, metrische und topologische Räume

- Abschnitt 7.1: Normierte Vektorräume und metrische Räume  
Definition normierter Vektorraum, Beispiele, Unterräume.

## 14. Vorlesung 5. 12. 2023

- Abschnitt 7.1: Normierte Vektorräume und metrische Räume  
Konstruktionen von Normen, Operatornorm. Definition metrischer Raum, erste Beispiele.
- Abschnitt 7.2: Konvergenz in metrischen Räumen  
Definition von Folgenkonvergenz und Häufungspunkten, Eigenschaften übertragen sich. Definition von offenen und abgeschlossenen Mengen und Umgebungen in metrischen Räumen, viele Eigenschaften übertragen sich.
- Abschnitt 7.3: Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit  
Äquivalente Formulierungen von Stetigkeit an einem Punkt.

## 15. Vorlesung 6. 12. 2023

- Abschnitt 7.3: Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit  
Stetigkeit und Stetigkeit an einem Punkt. Lipschitz-Stetigkeit und lokale Lipschitz-Stetigkeit, Beispiele. Stetigkeit linearer Abbildungen und Operatornorm, Beispiele.

## 16. Vorlesung 11. 12. 2023

- Abschnitt 7.3: Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit  
Weitere Beispiele zu stetigen linearen Abbildungen. Gleichmäßige Stetigkeit.
- Abschnitt 7.4: Vollständigkeit und der Banachsche Fixpunktsatz  
Vollständige metrische Räume, Eigenschaften und Beispiele. Banachscher Fixpunktsatz.
- Abschnitt 7.5: Topologische Räume und Stetigkeit  
Definition topologischer Raum und viele Beispiele.

## 17. Vorlesung 12. 12. 2023

- Abschnitt 7.5: Topologische Räume und Stetigkeit  
Umgebungen, Berührungspunkte, Abschluss. Unterraumtopologie und Produkttopologie, Spezialfall metrischer Produkte. Stetigkeit und einige Eigenschaften. Hausdorff-Eigenschaft.

- Abschnitt 7.6: Kompaktheit und Zusammenhang in topologischen Räumen  
Definition Kompaktheit als Überdeckungskompaktheit.

## 18. Vorlesung 13. 12. 2023

- Abschnitt 7.6: Kompaktheit und Zusammenhang in topologischen Räumen  
Eigenschaften kompakter Teilmengen. Stetige Bilder kompakter Teilmengen. Satz von Tikhonov für endliche Produkte. Zusammenhang und Wegzusammenhang, Eigenschaften und Sinuskurve des Topologen.
- Abschnitt 7.7: Die Standardtopologie auf  $\mathbb{R}^n$   
Erste Eigenschaften der Standardtopologie auf  $\mathbb{R}^n$ .

