Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Institute of MATHEMATICS

Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

Analysis 2

Stefan Waldmann

Wintersemester 2023/2024

Hausaufgabenblatt Nr. 5

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)
Git revision of ana2-ws2324: `(None)` (None)

22. 11. 2023

(25 Punkte. Abzugeben am 29. 11. 2023)

Hausaufgabe 5-1: Stückweise Integrierbarkeit

Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$ für ein $c \in (a, b)$, so auch auf $[a, b]$. **(3 Punkte)**

Hausaufgabe 5-2: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale: **(8 Punkte)**

(a) $\displaystyle\int_1^4 \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$,

Hausaufgabe 5-3: Der Hauptsatz

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i.) Eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion. **(1 Punkt)**

ii.) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion. **(1 Punkt)**

iii.) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, welche eine Stammfunktion auf $[a, b]$ besitzt, ist integrierbar.
Hinweis: $F(x) = \sqrt{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *für* $x \neq 0$. **(2 Punkte)**

Hausaufgabe 5-4: Riemann-Lemma

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0 \tag{5.1}$$

gilt. Verifizieren Sie dazu:

i.) Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stückweise konstante Funktion $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert mit **(2 Punkte)**

$$\int_a^b |f(x) - T(x)|\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

ii.) Zeigen Sie (5.1) für beliebige, stückweise konstante Funktionen. **(2 Punkte)**

iii.) Folgern Sie die Behauptung. **(2 Punkte)**

Hausaufgabe 5-5: Umfang des Einheitskreises

Für eine gegebene Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann unter bestimmten Voraussetzungen (z.B. $f \in C^1([a, b])$, wir kommen in der Vorlesung darauf zurück) die Länge des Funktionsgraphen durch

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\mathrm{d}x$$

bestimmt werden.

i.) Begründen Sie kurz anschaulich, warum diese Formel wahr sein kann. *Hinweis: Pythagoras.* **(2 Punkte)**

ii.) Bestimmen Sie über obige Identität den Umfang eines Einheitskreises. **(2 Punkte)**