# Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 7

Jun Wei Tan*

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: December 20, 2023)

**Problem 1.** (a) Eine Gruppe $G$ der Ordnung 21 operiere auf einer Menge $M$ mit 11 Elementen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Bahn der Länge 1 besitzt.

(Ist $\{m\} \subseteq M$ eine solche einelementige Bahn, dann gilt $g.m = m$ für alle $g \in G$. Jedes $g \in G$ fixiert also $m$. Man nennt $m$ daher auch einen Fixpunkt der Operation.)

(b) Sei $G := \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen $(2 \times 2)$-Matrizen und $M$ die Menge aller komplexen $(2 \times 2)$-Matrizen, die nur reelle Eigenwerte besitzen. Dann operiert $G$ per Konjukation auf $M$. (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation an)

*Proof.* (a) Wir schreiben die Klassengleichung

$$|M| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_m].$$

Jeder Term im Summe ist eine Teiler von 21, also $1, 3, 7$ oder 21. Die Operation besitzt eine Bahn der Länge 1 genau dann, wenn 1 zumindest einmal vorkommt. Wir schreiben die mögliche Summen:

$$\begin{aligned}
11 &= 1 \times 11 \\
11 &= 3 + 1 \times 8 \\
11 &= 3 \times 2 + 1 \times 5 \\
11 &= 3 \times 3 + 1 \times 2 \\
11 &= 7 + 1 \times 4 \\
11 &= 7 + 3 + 1
\end{aligned}$$

Weil 1 immer vorkommt, gibt es immer eine Bahn der Länge 1.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Konjukation ist genau eine Ähnlichkeitstransformation. Trotz der Aufgabenstellung brauchen wir noch die Eigenschaften.

**Lemma 1.** *Sind zwei Matrizen $A$ und $B$ ähnlich, dann haben sie dieselben Eigenwert.*

*Proof.* Sei $A = Q^{-1}BQ$. Sei außerdem $v$ ein Eigenvektor von $A$ mit Eigenwert $\lambda$. Es gilt $QA = BQ$ und

$$\begin{aligned} QAv =& Q\lambda v = \lambda(Qv) \\ =& BQv = B(Qv) \end{aligned}$$

also $Qv$ ist ein Eigenvektor von $B$ mit Eigenwert $\lambda$. Wir können die Rollen von $A$ und $B$ vertauschen, um die andere Richtung zu zeigen. □

**Remark 2.** *Die Umkehrrichtung gilt nicht immer. Es gilt wenn die Matrizen diagonalisierbar sind.*

Es folgt sofort: Wenn zwei Matrizen in der gleichen Bahn liegen, haben die die gleichen Eigenwerte. Wenn die Matrizen nicht diagonaliserbarsind, schreiben wir die in Jordan-Normalform. Daraus ergibt sich ein Repräsentantensystem der Bahnen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

**Problem 2.** Von der endlichen Gruppe $G$ sei bekannt, dass sie nicht abelsch ist und zu jedem positiven Teiler $t$ von $|G|$ mindestens eine Untergruppe der Ordnung $t$ besitzt. Zeigen Sie, dass $G$ nicht einfach ist. (Hinweis: Sei $p$ die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt, und $U$ eine Untergruppe von $G$ vom Index $p$. Lassen Sie $G$ auf den Nebenklassen von $U$ operieren und betrachten Sie den Kern des zugehörigen Homomorphismus.)

**Problem 3.** Benutzen Sie die Beweisidee aus Korollar 2.79, um folgende Aussage zu zeigen: Seien $p$ eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}^*$, $G$ eine Gruppe der Ordnung $p^n$ und $\{e\} < N \trianglelefteq G$ ein nicht-trivialer Normalteiler von G. Dann gilt $|Z(G) \cap N| > 1$.

**Problem 4.** Die Gruppe $G$ operiere auf einer Menge $M$. Sei $\Phi : G \to \mathrm{Sym}(M)$ der zugehörige Homomorphismus und $K$ sein Kern. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$G/K \times M \to M, \qquad gK.m := g.m$$

eine treue Operation von $G/K$ auf $M$ gegeben ist.

*Proof.* Wir schreiben noch einmal die Klassengleichung:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : C_G(x_i)].$$

Als Normalteiler ist $N$ eine Vereinigung von Konjugationsklassen. Wir nehmen die solchen Konjugationsklassen raus, und schreibe stattdessen

$$|G| = |Z(G)| + [G : N] + \sum_{i=1}^{r'} [G : C_G(x_i)].$$

$\square$

*Proof.* Wir zeigen zuerst, dass es wohldefiniert ist. Sei $k_1, k_2 \in K$ und $m \in M$. Es gilt

$$\begin{aligned} gk_1.m &= \Phi(gk_1)(m) \\ &= \Phi(g)(\Phi(k_1)(m)) \\ &= \Phi(g)(e(m)) \\ &= \Phi(g)(m) \\ &= g.m \end{aligned}$$

und ähnlich für $gk_2.m = g.m$. Sei jetzt $g_1, g_2 \in G$, so dass $g_1K.m = g_2K.m$ für alle $m \in M$. Dann ist

$$g_2^{-1} g_1.m = m$$

für alle $m \in M$ oder $g_2^{-1} g_1 \in K$. Daraus folgt: $g_1$ und $g_2$ liegen in der gleichen Nebenklasse. $\square$