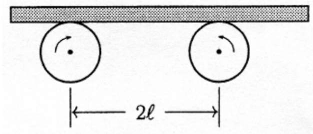
Aufgabe 9.2: *Gleitreibung* .... (6 Punkte)

Zwei parallele Zylinder von gleichen Abmessungen und gleicher Oberflächenbeschaffenheit drehen sich mit genau entgegen gesetzten Winkelgeschwindigkeiten in der in der Abbildung bezeichneten Art und Weise.



Auf die rotierenden Zylinder wird horizontal ein homogenes Brett (Masse m) so aufgelegt, dass sein Mittelpunkt S um s_0 zu einem Zylinder hin verschoben ist. Der Abstand der Zylinderachsen beträgt $2l$. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen den Zylindern und dem Brett sei $\mu_G =$ konst., d.h. wir gehen davon aus, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit der Zylinder groß genug ist, so dass kein Stick-Slip bemerkbar ist. Wie verhält sich das System? Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

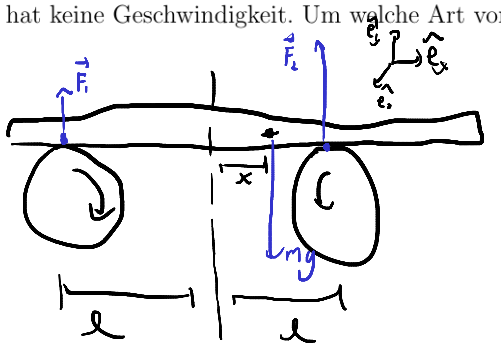
(2 P) a) Mit welchen (Halte-)Kräften F_1 und F_2 drücken die Walzen 1 (links) und 2 (rechts) gegen das Brett, wenn dessen Schwerpunkt S um die Auslenkung x aus der Mitte verschoben ist? Zeichnung und Berechnung! (Hinweis: Das Brett ist ein ausgedehnter starrer Körper, der sich vertikal nicht bewegt und insgesamt auch nicht rotiert!)

(1 P) b) Welche Reibungskräfte wirken deshalb zwischen den Walzen und dem Brett?

(1 P) c) Welche resultierende Kraft wirkt auf das Brett? Geben Sie die Bewegungsgleichung an.

(2 P) d) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes die Lösung der Bewegungsgleichung an! Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Mittelpunkt um s_0 zum rechten Zylinder hin verschoben und hat keine Geschwindigkeit. Um welche Art von Bewegung handelt es sich?

a)



Keine Rotation $\Leftrightarrow$ kein totales Drehmoment

Drehmoment bzgl. Mittelpunkt des Bretts $= (\ell - x) F_2 \hat{e}_z - (\ell + x) F_1 \hat{e}_z = \vec{0}$

insbesondere ist $0=0$, und auch

$$(\ell - x) F_2 - (\ell + x) F_1 = 0 \quad \text{------} \quad (1)$$

Keine vertikale Bewegung

$$\hat{e}_y (F_1 + F_2) = mg\, \hat{e}_y$$

$$F_1 + F_2 = mg \quad \text{----------} \quad (2)$$

$(1) + (\ell + x)(2)$: $(\ell - x) F_2 \cancel{- (\ell + x) F_1}$
$\cancel{+ (\ell + x) F_1} + (\ell + x) F_2 = (\ell + x) mg$

$$2 \ell F_2 = (\ell + x) mg$$

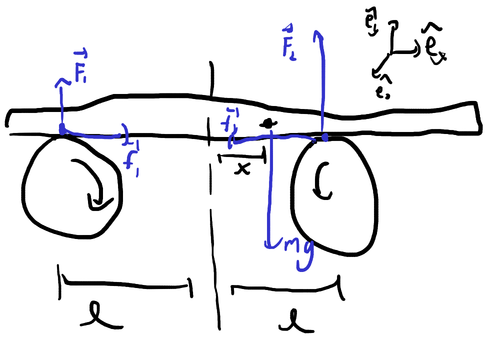
$$F_2 = \frac{\ell + x}{2\ell} mg$$

(2): $\frac{l+x}{2l} mg + F_1 = mg$

$$F_1 = mg - \left(\frac{l+x}{2l}\right) mg$$
$$= mg\left(\frac{2l-(l+x)}{2l}\right)$$
$$= mg\,\frac{l-x}{2l}$$

b) Betrag $\quad f_i = \mu_G F_i \qquad i = 1,2$

Da die Umdrehungsgeschwindigkeit sehr schnell ist, verweist die Reibungskraft immer in der Richtung der Geschwindigkeit des Zylinders.



Resultierende Kraft $= -(f_2 - f_1)\,\hat{e}_x$

$$= -\left(\frac{l+x}{2l}\mu mg - \mu mg\frac{l-x}{2l}\right)\hat{e}_x$$
$$= -\frac{\mu mg}{2l}\left(l+x-(l-x)\right)\hat{e}_x$$
$$= -\mu mg\frac{x}{l}\,\hat{e}_x$$
$$= -\mu mg\frac{x}{l}\,\hat{e}_x + 0\,\hat{e}_y + 0\,\hat{e}_z$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\mu \cancel{m} g\frac{x}{l}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\mu g}{l}x$$

Ansatz: $x = A\cos(\omega t + \delta)$

$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$

$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$

Eingesetzt

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\frac{\mu g}{l} A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = \frac{\mu g}{l}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$$

$$x(0) = A\cos(\delta) = s_0 \neq 0$$

insbesondere ist $A \neq 0$

$$x'(0) = -A\omega \sin(\delta) = 0$$

Da $A \neq 0 \neq \omega$, ist $\sin\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$

$$s_0 = A\cos(0) = A$$

Lösung: $x = s_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\, t\right)$

harmonische Schwingung