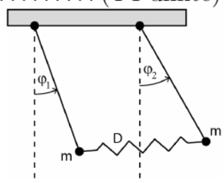
Aufgabe 9.3: *Gekoppelte Schwingungen* .... (4 Punkte)

Zwei gleichartige mathematische Pendel (Länge l, Masse m) sind entsprechend der Skizze an ihren unteren Enden durch eine Feder mit der Federkonstanten D miteinander verbunden. Der Abstand der beiden Pendel in der Ruhelage entspricht der entspannten Federlänge. Im Folgenden werden nur kleine Auslenkungen der Pendel betrachtet.

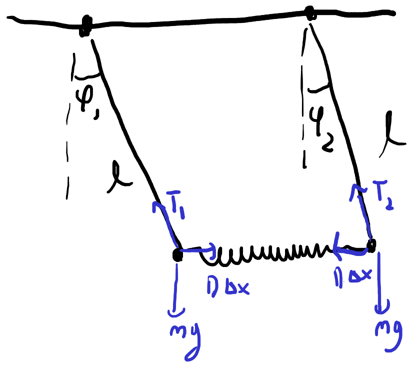


Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

(2 P) a) Stellen Sie mit Hilfe des Drehmomentansatzes die gekoppelten Bewegungsgleichungen für die beiden Pendel auf.

(2 P) b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenzen der beiden Normalschwingungen, indem Sie ausnutzen, dass für die symmetrische Schwingung gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ und für die antisymmetrische $\varphi_1 = -\varphi_2$. Verwenden Sie einen geeigneten Lösungsansatz.

a)



Weil sowohl φ_1 als auch φ_2 klein sind, nehmen wir an, dass die Feder horizontal bleibt

$$\Delta x = l \sin\varphi_2 - l \sin\varphi_1$$

Trägheitsmoment $I = ml^2$ für die beide aus der Vorlesung bekannt.

$I\ddot{\varphi}_i$ = totales Drehmoment bei i-ste Feder, $i \in \{1,2\}$

$$I\ddot{\varphi}_1 = D\Delta x\, l\cos\varphi_1 - mgl\sin\varphi_1$$

$$I\ddot{\varphi}_2 = -D\Delta x\, l\cos\varphi_2 - mgl\sin\varphi_2$$

Näherung, $\varphi_1 \ll 1$, $\varphi_2 \ll 1$

$\sin\varphi_i \approx \varphi_i$, $\quad i \in \{1,2\}$

$\cos\varphi_i \approx 1 \quad i \in \{1,2\}$

$$\Delta x = l\sin\varphi_2 - l\sin\varphi_1$$
$$= l(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$$
$$\approx l(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$I\ddot{\varphi}_1 \approx Dl^2(\varphi_2 - \varphi_1) - mgl\varphi_1$$

$$I\ddot{\varphi}_2 \approx -Dl^2(\varphi_2 - \varphi_1) - mgl\varphi_2$$

Zum ersten Ordnung

$$ml\ddot{\varphi}_1 = -(mg+Dl)\varphi_1 + Dl\varphi_2 \quad \text{------} \quad (1)$$

$$ml\ddot{\varphi}_2 = Dl\varphi_1 - (mg+Dl)\varphi_2 \quad \text{------} \quad (2)$$

b) i) $\varphi_1 = \varphi_2$ (symmetrisch)

Ansatz eingesetzt

(1): $$ml\ddot{\varphi}_1 = -(mg+Dl)\varphi_1 + Dl\varphi_1$$

$$= -mg\varphi_1$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{g}{l}\varphi_1$$

Ansatz: $$\varphi_1 = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$\dot{\varphi}_1 = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

$$-A\omega^2\sin(\omega t + \delta) = -\frac{g}{l}A\sin(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ii) Antisymmetrisch $\varphi_1 = -\varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 = -\varphi_1$

(1): $$ml\ddot{\varphi}_1 = -(mg+Dl)\varphi_1 - Dl\varphi_1$$

$$= -(mg+2Dl)\varphi_1$$

$$\varphi_1 = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}\right)\varphi_1$$

Ansatz: $$\varphi_1 = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$\dot{\varphi}_1 = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

$$-A\omega^2\sin(\omega t + \delta) = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}\right)A\sin(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}\right), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}$$