

Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 5

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 21, 2023)

Problem 1. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-negativ und messbar. Es existiere eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie, dass ein $\epsilon > 0$ und eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) > 0$ existieren, sodass $f(x) > \epsilon$ für alle $x \in B$ gilt.

Proof. Wir beweisen es per Widerspruch. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Dann für jedes $\epsilon > 0$ ist $\{f > \epsilon\}$ eine Nullmenge. (Wir wissen, dass die Menge messbar ist, weil f messbar ist.)

Insbesondere gilt es für alle $\mathbb{Q} \ni \epsilon > 0$. Wir bezeichnen $\mathbb{Q}^+ := \{x | x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$. Es gilt

$$A \subseteq \{f > 0\} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^+} \{f > x\},$$

also

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu(\{f > 0\}) \\ &\leq \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} \mu(\{f > x\}) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

also A ist eine Nullmenge, ein Widerspruch zu die Annahme, dass $\mu(A) > 0$. □

Problem 2. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein vollständiger Maßraum und $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei (f_n) punktweise μ -fast überall konvergent, d.h. es existiert ein μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ und eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ gilt. Zeigen Sie, dass f messbar ist.

Proof. Wie in der Vorlesung betrachten wir $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. □

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 3. Sei $A \subsetneq \mathbb{R}$ nichtleer. Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche bezüglich der σ -Algebra $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^c, \mathbb{R}\}$ messbar sind.

Proof. Es gilt immer $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Außerdem wissen wir aus der Mengentheorie, dass $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A^c) = \emptyset$, und das Urbild von einer nichtleeren Menge ist immer nichtleer. Die unterschiedlichen Funktionen sind

$$\begin{array}{lll} f(A) = A & f(A^c) = A^c & f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \\ f(A) = A^c & f(A^c) = A & f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \end{array} \quad \square$$

Problem 4. Der Beweis von Lemma 1.83 funktioniert anstelle von $[0, 1]$ auch analog für jede beliebige Lebesgue-messbare Menge in \mathbb{R} , die keine Nullmenge ist. Das heißt für jede solche Menge existiert eine Teilmenge, die nicht Lebesgue-messbar ist. Sei nun f die Cantor-Funktion aus Präsenzübung 3 und definiere $g : [0, 1] \rightarrow [0, 2], x \rightarrow x + f(x)$.

Wir definieren die Funktionenfolge (f_n) durch $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x$ und

$$f_{n+1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, & \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x - 2) & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}.$$

Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f .

- (a) Zeigen Sie, dass g bijektiv und die Umkehrfunktion g^{-1} messbar ist.
- (b) Zeigen Sie nun, dass der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda_1|_{\mathcal{B}^1})$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Nutzen Sie eine geeignete nicht Lebesgue-messbare Menge.

Proof. (a) Wir wissen, dass f stetig und monoton wachsend ist. Daraus folgt, dass $x + f(x)$ stetig und *streng* monoton wachsend ist. Es gilt auch $g(0) = 0$ und $g(1) = 2$. Das g surjektiv ist folgt aus dem Zwischenwertsatz. g ist auch injektiv. Sei $x > y$. Dann gilt $g(x) > g(y)$, insbesondere $g(x) \neq g(y)$.

Es gilt $(g^{-1})^{-1} = g$, also wir betrachten eine messbare Teilmenge von $[0, 1]$.

□