Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

12. Übungsblatt

Hinweis:
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Donnerstag (25.01.2024) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Positiv oder Positiv Definit? (6 Punkte)**

   Betrachten Sie die komplexen 3×3-Matrizen

   $$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -i \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Welche der Matrizen sind positiv, welche sogar positiv definit?

2. **Zerlegungen selbstadjungierter Matrizen (3 + 6 Punkte)**

   Betrachten Sie den unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

   (a) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ selbstadjungiert und $A = U^{-1}DU$, wobei U eine invertierbare Matrix und D eine Diagonalmatrix sind. Sei $P_i := U^{-1}M_iU$ mit Diagonalmatrix M_i, sodass

   $$(M_i)_{kk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } D_{kk} = \lambda_i; \\ 0, & \text{sonst}; \end{cases}$$

   gilt. Zeigen Sie, dass P_i eine Orthogonalprojektion auf den Eigenraum von λ_i ist.

   (b) Bestimmen Sie den Positivteil $(A_i)_+$, den Negativteil $(A_i)_-$ und den Absolutbetrag $|A_i|$ für $i = 1, 2$ der folgenden Matrizen:

   $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **Beweise oder Widerlege (2 + 4 Punkte)**

   Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) Eine obere Dreiecksmatrix ist nie orthogonal.

   (b) Sei V ein unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus A ist genau dann normal, wenn $\|Av\| = \|A^*v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

4. **A kleiner gleich B (2 + 2 + 2 + 2 + 3 Bonuspunkte)**

   Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei weiter $\mathrm{End}_{\mathrm{sa}}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ die Teilmenge der selbstadjungierten Endomorphismen auf V. Für $A, B \in \mathrm{End}_{\mathrm{sa}}(V)$ definieren wir $A \leq B$, falls $B - A$ ein positiver Endomorphismus ist.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_{\mathrm{sa}}(V)$ ein reeller Unterraum von $\mathrm{End}(V)$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass für $\lambda, \mu \geq 0$ und $A, B, C, D \in \mathrm{End}_{\mathrm{sa}}(V)$ mit $A \leq B$ und $C \leq D$ folgt, dass

   $$\lambda A + \mu C \leq \lambda B + \mu D$$

   gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $A \leq B$

$$CAC^* \leq CBC^*$$

für alle $C \in \mathrm{End}(V)$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass für $A \geq 0$ und $\lambda > 0$ der Endomorphismus $A + \lambda \mathbb{1}$ invertierbar ist.

(e) Betrachten Sie $V = \mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $0 \leq A \leq B$ gilt. Zeigen Sie, dass $A^2 \leq B^2$ *nicht* gilt.