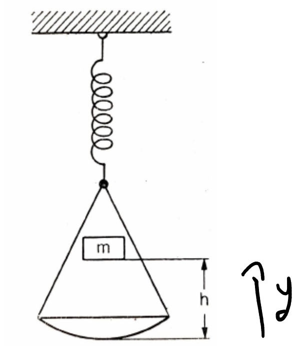
Aufgabe 9.1: *Mit Schwung in die Schale* .... (4 Punkte)

Eine Knetmasse m fällt aus der Höhe h in eine Schale (Masse m_S), die an einer Hookeschen Feder (Federkonstante D) hängt. Sie bleibt in der Schale liegen. Die Schale beginnt zu schwingen.

(1 P) a) Setzen Sie den Nullpunkt der Vertikalkoordinate y in die neue Gleichgewichtslage des Systems und bestimmen Sie die Bewegungs(differential)gleichung für die Schale mit der Masse.

(1 P) b) Bestimmen Sie mit dem Lösungsansatz $y = A \cdot \sin(\omega_0 t + \delta)$ die Frequenz f_0 der Schwingung.

(2 P) c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ stößt die Masse mit der Schale. Bestimmen Sie den Ort des Stoßes y_0 und die Geschwindigkeit v_0 der Massen nach dem Stoß. Nutzen Sie diese Ergebnisse um mit $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = v_0$ die Parameter A und δ des Lösungsansatzes zu bestimmen.



Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

a) Koordinate ξ mit Nullpunkt in Ruhelage

Kraftediagramm

Newtonsche Gesetz: $-(m_s+m)g - D\xi = (m_s+m)\ddot{\xi}$

Gleichgewichtslage: $-(m_s+m)g - D\xi_0 = 0$

$$\xi_0 = -\frac{(m_s+m)}{D}g$$

Translation um y zu bekommen: $y = \xi - \xi_0$

$$\ddot{y} = \ddot{\xi}$$

$$-(m_s+m)g - D(y+\xi_0) = (m_s+m)\ddot{y}$$

$$-Dy = (m_s+m)\ddot{y}$$

b) Lösungansatz: $y = A\sin(\omega_0 t + \delta)$

$$\dot{y} = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$\ddot{y} = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \delta)$$

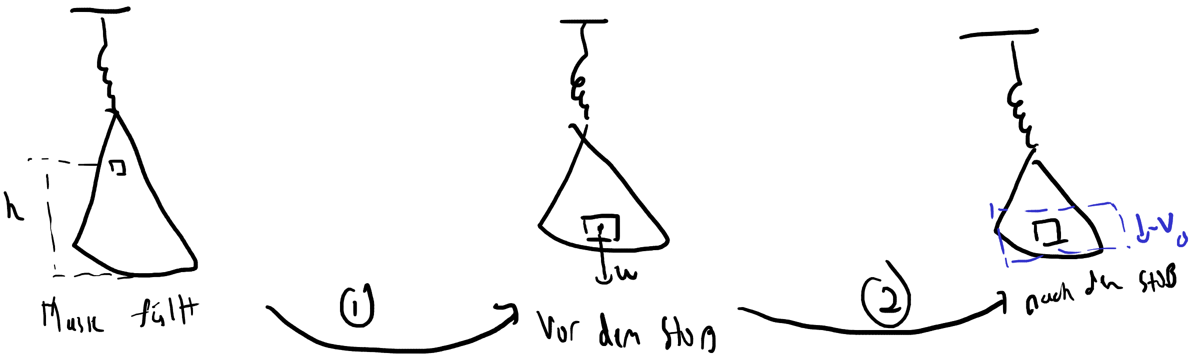
$$-D\cancel{A\sin(\omega_0 t + \delta)} = -(m_s+m)\cancel{A}\omega_0^2\cancel{\sin(\omega_0 t + \delta)}$$

$$-D = -(m_s+m)\omega_0^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m_s+m}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m_s+m}}$$

c)



(1) Erhaltung von totale Energie der Masse m

$$mgh = \frac{1}{2}mu^2$$

$$u = \sqrt{2gh}$$

(2) Erhaltung von totaler Impuls

$$mu = (m+m_s)(-v_0)$$

$$v_0 = -\frac{mu}{m+m_s}$$

Um y_0 zu finden: ξ wie in (a) definiert

Die Schale ist im Gleichgewicht

$$m_s g + D\xi = 0$$

$$\xi = -\frac{m_s g}{D}$$

$$y_0 = -\frac{m_s g}{D} - \xi_0 = -\frac{m_s g}{D} + \frac{(m+m_s)g}{D}$$

$$= \frac{mg}{D}$$

$$y = A\sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$y(0) = A\sin(\delta) = y_0 \quad ------ (1)$$

$$y'(0) = A\omega_0 \cos(\delta) = v_0 \quad ---- (2)$$

$(1)^2 + \left(\frac{(2)}{\omega_0}\right)^2$: $\quad A^2\sin^2\delta + A^2\cos^2\delta = y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$

$$A^2 = y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$$

$(1)/(2)$: $\quad \frac{1}{\omega_0}\tan\delta = \frac{y_0}{v_0}$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0\omega_0}{v_0}\right)$$

Einsetzen:

$$A^2 = \left(\frac{mg}{D}\right)^2 + \left(\frac{mu}{m_s+m}\right)^2 \frac{m_s+m}{D}$$

$$= \frac{m^2g^2}{D^2} + \frac{m^2u^2}{m_s+m}\frac{1}{D}$$

$$= \frac{m^2g^2}{D^2} + \frac{m^2(2gh)}{m_s+m}\frac{1}{D}$$

$$= \frac{m^2g}{D}\left(\frac{g}{D} + \frac{2h}{m_s+m}\right)$$

$$A = \sqrt{\frac{m^2g}{D}}\sqrt{\frac{g}{D} + \frac{2h}{m_s+m}}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{mg}{D}\sqrt{\frac{D}{m_s+m}}\left(-\frac{m\sqrt{2gh}}{m_s+m}\right)\right)$$

$$= -\tan^{-1}\left(\frac{m^2\sqrt{2h}\,g^{3/2}}{\sqrt{D}\,(m_s+m)^{3/2}}\right)$$