Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 6

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 29, 2023)

Problem 1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\alpha > 0$ und $f : X \to \overline{R}$ messbar. Zeigen Sie:

(a) Ist f nichtnegativ so gilt

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

(b) Ist f integrierbar, so haben $\{f \geq \alpha\}$ und $\{f \leq -\alpha\}$ endliches Maß.

Proof. (a) Sei $A = \{f \geq \alpha\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int f \, \mathrm{d}\mu &= \int (f\chi_A + f\chi_{A^c}) \\
&= \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f \, \mathrm{d}\mu \\
&\geq \int_A f \, \mathrm{d}\mu && \int_{A^c} f \, \mathrm{d}\mu \geq 0, \text{ weil } f \text{ nichtnegativ ist.} \\
&\geq \int_A \alpha \, \mathrm{d}\mu && f(x) \geq \alpha \; \forall x \in A \\
&= \alpha\mu(A)
\end{aligned}$$

Also

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

(b) Wir beweisen es per Kontraposition, also wir nehmen an, dass $\{f \geq \alpha\}$ oder $\{f \leq -\alpha\}$ unendliches Maß hat. (Der Fall, in dem die beide unendliches Maß haben ist nicht ausgeschlossen.)

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Wir nehmen an, dass $\{f \geq \alpha\}$ unendliches Maß hat. Sei $A = \{f \geq \alpha\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int f^+ \, \mathrm{d}\mu &= \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f^+ \, \mathrm{d}\mu \\ &\geq \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu \\ &\geq \int_A \alpha \, \mathrm{d}\mu \\ &= \alpha\mu(A) \\ &= \infty\end{aligned}$$

Dann ist $\int f^+ \, \mathrm{d}\mu = \infty$, also f ist nicht integrierbar. Sei jetzt ähnlich $A = \{f \leq -\alpha\}$. Wenn A unendliches Maß hat, ist

$$\begin{aligned}\int f^- \, \mathrm{d}\mu &= \int_A f^- \, \mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f^- \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_A f^- \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_A (-\alpha) \, \mathrm{d}\mu \\ &= (-\alpha)\mu(A) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Also $\int f^- \, \mathrm{d}\mu = -\infty$, und f ist noch einmal nicht integrierbar. $\square$

Problem 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $N, A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0 = \mu(A \cap B)$ und $f : X \to \overline{R}$ integrierbar. Sei außerdem (f_j) eine Folge integrierbarer Funktionen von X nach $\overline{R}$ mit $f_j \geq 0$ μ-fast überall und $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ integrierbar. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Integrals:

(a) $\int_N f \, \mathrm{d}\mu = 0$

(b) $\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu$.

(c) $\int \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j \, \mathrm{d}\mu$.

Proof. (a) Es gilt $\left|\int f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu$. Sei dann $g : X \to \overline{R}$ die konstante Funktion mit $g(x) = \infty \ \forall x \in X$. Weil es konstant ist, ist g messbar. Es ist klar, dass $|f(x)| \leq g(x) \ \forall x \in X$, insbesondere für alle $x \in N$. Dann ist

$$\left|\int_N f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_N |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_N g \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Wir müssen nur zeigen, dass $\int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0$. Sei g_j eine Folge einfache Funktionen, mit

$$g_j(x) = j \;\forall x \in X.$$

Dann konvergiert g_j gegen g, und für alle j gilt

$$\int_N g_j \,\mathrm{d}\mu = j\mu(N) = j(0) = 0.$$

Per Definition gilt dann

$$\int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

und die Behauptung folgt.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu &= \int \chi_{A\cup B} d \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}) f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu - \int_{A\cap B} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu && \text{(a)}
\end{aligned}$$

(c) Für endliche Summe wissen wir schon

$$\int \sum_{j=1}^{n} f_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \int f_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Sei $p_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$. p_n konvergiert gegen eine Funktion p, weil f_i nichtnegativ sind, also die Reihe $\sum_{i=1}^{n} f(x)$ ist für alle x monoton wachsend und in $\overline{R}$ konvergent. Dann gilt

$$\int p_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int p \,\mathrm{d}\mu\,,$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu\,.$$

□

Problem 3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ integrierbar. Definiere die Abbildung

$$\nu : \mathcal{A} \to \overline{R}, \qquad \nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ist ein endlicher Maßraum.

(b) Jede μ-Nullmenge ist auch eine ν-Nullmenge.

(c) Gilt $f > 0$ μ-fast überall, so ist jede ν-Nullmenge auch eine μ-Nullmenge.

(d) Sei $f > 0$ μ-fast überall. Dann ist eine messbare Funktion $g : X \to \overline{R}$ genau dann bezüglich ν integrierbar, wenn gf bezüglich μ integrierbar ist und in diesem Fall gilt $\int gf \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\nu$.

Proof. (a) (i) Alle μ-messbare Mengen sind auch ν-messbar.

Hier müssen wir nur beobachten, dass das Integral über alle μ-messbare Mengen definiert ist, also ν ist zumindest wohldefiniert.

$\nu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$, weil $f \geq 0$ und daher ist

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \geq 0.$$

(ii) σ-Additivität

Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int \chi_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \left[\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \right] f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \chi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} f \, \mathrm{d}\mu \\
&=\nu \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \right).
\end{aligned}$$

Also ν ist σ-additiv.

(iii) Endlich

Es gilt

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty} < \infty,$$

also $\nu(X)$ ist endlich, und ν ist ein endlicher Maßraum.

(b) Sei N eine μ-Nullmenge. Es gilt (mit Hilfe von 2(a))

$$\nu(N) = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

(c) Sei N eine ν-Nullmenge, also

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Jetzt nehmen wir an, dass $\mu(N) > 0$. Wir betrachten $g = \chi_N f$. In der letzten Übungsblatt haben wir schon bewiesen, dass es $\epsilon > 0$ und eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) > 0$ gibt, sodass $g(x) > 0\ \forall x \in B$. Es ist klar, dass $B \subseteq N$, weil g außerhalb N null ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_N f \,\mathrm{d}\mu \geq& \int_B f \,\mathrm{d}\mu \\ \geq& \int_B \epsilon \,\mathrm{d}\mu \\ =&\epsilon\mu(B) \\ >&0\end{aligned}$$

was ein Widerspruch zu die Anname ist. Also wenn $\nu(N) = 0$ ist auch $\mu(N) = 0$.

(d) Sei s eine einfache Funktion mit Darstellung $s = \sum x_i A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int s \,\mathrm{d}\nu &= \sum x_i \nu(A_i) \\ &= \sum x_i \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int \sum x_i \chi_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int sf \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Sei (g_j^+) eine Folge einfache Funktionen, die gegen g^+ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}\int g^+ \,\mathrm{d}\nu &= \lim_{j\to\infty} \int g_j^+ \,\mathrm{d}\nu \\ &= \lim_{j\to\infty} \int g_j^+ f \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Ähnlich gilt, für $g_j^- \searrow g^-$, dass

$$\int g^- \,\mathrm{d}\nu = \lim_{j\to\infty} \int g_j^- f \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Also ist $\int g^+ \,\mathrm{d}\nu$ bzw. $\int g^- \,\mathrm{d}\nu$ endlich genau dann, wenn $\int g^+ f \,\mathrm{d}\mu$ bzw. $\int g^- f \,\mathrm{d}\nu$ endlich ist. Dann ist g bzgl. ν integrierbar genau dann, wenn gf bzgl. μ integrierbar ist und in diesem Fall ist das Integral

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \int gf \,\mathrm{d}\mu \,. \qquad \square$$