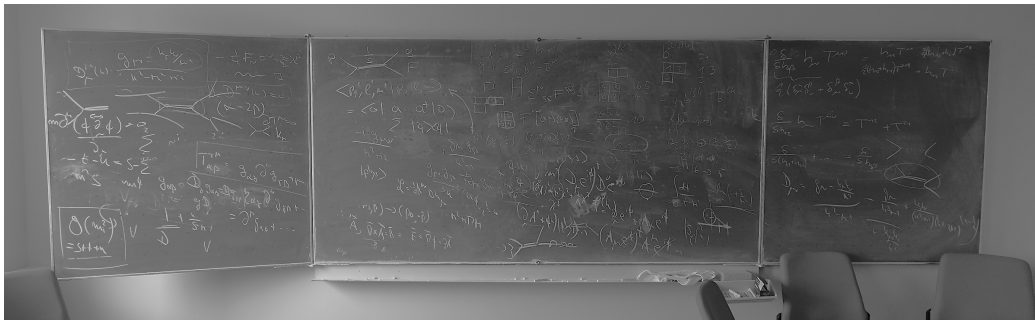


# Theoretische Physik I:

## Klassische Mechanik

(Wintersemester 2023/24)

Thorsten Ohl  
Institut für Theoretische Physik und Astrophysik  
Universität Würzburg  
D-97070 Würzburg



commit 085ab17bd63eafc48df25758c651c1b80025421e

Author: Thorsten Ohl <ohl@physik.uni-wuerzburg.de>

Date: Mon Jan 29 11:20:06 2024 +0100

## Zusammenfassung

Inhalt der Vorlesung (nicht notwendig chronologisch, weil die Anwendungen auch als erläuternde Beispiele für die Formalismen dienen sollen):

### 1. Newton'sche Formulierung

- (a) Inertialsysteme, Newton'sche Gesetze, Bewegungsgleichungen
- (b) Eindimensionale Bewegung, Energieerhaltung
- (c) Harmonischer Oszillator
- (d) Bewegung im Anschauungsraum, konservative Kräfte

### 2. Lagrange'sche Formulierung

- (a) Variationsprinzipien, Euler-Lagrange-Gleichungen
- (b) Nebenbedingungen
- (c) Koordinatentransformationen, Mechanische Eichtransformationen
- (d) Symmetrien, Noether'sches Theorem, Zyklische Koordinaten
- (e) Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte

### 3. Hamilton'sche Formulierung

- (a) Legendre-Transformation, Phasenraum
- (b) Hamiltonfunktion, kanonische Gleichungen
- (c) Poissonklammern, kanonische Transformationen
- (d) Erzeugende von Symmetrien, Erhaltungssätze
- (e) minimale Kopplung
- (f) Liouville Theorem
- (g) \**Hamilton-Jacobi'sche Formulierung*

### 4. Anwendungen

- (a) Zentralkraftprobleme
- (b) Mechanische Ähnlichkeit, Virialsatz
- (c) Kleine Schwingungen
- (d) Teilchen im elektromagnetischen Feld

- (e) Starre Körper
  - i. Drehmoment, Trägheitstensor
  - ii. \**Kreisel*, \**Euler'sche Gleichungen*
- (f) Streuung, \**Wirkungsquerschnitt*

## 5. Relativistische Dynamik

- (a) Lorentz-Transformationen
- (b) Minkowski-Raum
- (c) Bewegungsgleichungen

## 6. Nichtlineare Dynamik

- (a) Stabilitätstheorie
- (b) \**KAM-Theorie*
- (c) \**Deterministisches Chaos*

Die mit \* gekennzeichneten Themen können nur bei optimalem Verlauf in einer einsemestrigen Vorlesung in hinreichender Tiefe behandelt werden und sind daher als optional anzusehen.

# INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	1
1.1	Was heißt und zu welchem Ende studiert man „Klassische Mechanik“?	1
	Vorlesung 01: Mo, 16. 10. 2023	
1.2	Idealisierungen	2
1.3	Formalismen	3
1.3.1	Newton	3
1.3.2	Lagrange	3
1.3.3	Hamilton	3
1.4	Literatur	4
1.4.1	Standardwerke	4
1.4.2	Moderne Vorlesungsskripte	4
1.4.3	Für Fortgeschrittene	4
1.4.4	Spezielles	4
2	NEWTON’SCHES FORMULIERUNG	5
2.1	Bewegung eines Massenpunkts im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$	5
2.1.1	Trajektorien, Koordinatensysteme, Bezugssysteme	5
2.1.2	Inertialsysteme, Newton’sche Gesetze	7
2.1.3	Erhaltungsgrößen	8
2.1.4	Arbeit	9
	Vorlesung 02: Fr, 20. 10. 2023	
2.1.5	Konservative Kräfte	11
2.2	Eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts	14
2.2.1	Energieerhaltung	15
2.2.2	Integration der Bewegungsgleichung	15
	Vorlesung 03: Mo, 23. 10. 2023	
2.2.3	Phasenraum, Phasenfluß	20
3	LAGRANGE’SCHES FORMULIERUNG	22
3.1	Variationsprinzipien	22

3.1.1	$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$	23
3.1.2	$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{3n}$	26
	Vorlesung 04: Fr, 29. 10. 2021	
3.2	Hamilton'sches Prinzip und Euler-Lagrange Gleichungen	26
3.2.1	Beispiele	28
3.3	Koordinatentransformation	29
	Vorlesung 05: Mo, 30. 10. 2023	
3.4	Nebenbedingungen	33
3.4.1	Klassifikation	33
3.4.2	Zwangskräfte	38
	Vorlesung 06: Fr, 03. 11. 2023	
3.5	Variation mit Zwangsbedingungen	40
3.5.1	Lagrangemultiplikatoren	41
3.5.2	Zwangskräfte	41
3.6	Zyklische Koordinaten	43
3.6.1	Beispiele	44
3.7	Mechanische Eichtransformationen	46
	Vorlesung 07: Mo, 06. 11. 2023	
3.7.1	Alternative Herleitung	47
3.8	Noether'sches Theorem	48
3.8.1	Symmetrien	48
3.8.2	Rotationen	52
	Vorlesung 08: Fr, 10. 11. 2023	
3.8.3	Erhaltungssätze	55
3.8.4	Zeittranslationen und Energieerhaltung	58
	Vorlesung 09: Mo, 13. 11. 2023	
3.8.5	Galilei-Gruppe	60
3.8.6	Translationen und Impulserhaltung	64
3.8.7	Rotationen und Drehimpulserhaltung	66
3.8.8	Galilei-Boosts und Schwerpunktsbewegung	67
	Vorlesung 10: Fr, 17. 11. 2021	
3.9	Galilei-Invarianz und Newton'sche Gesetze für nicht konser-	
	vative Kräfte	69
3.9.1	Gesamtimpuls und Schwerpunktsbewegung	69
3.9.2	Gesamtdrehimpuls	70
4	ANWENDUNGEN	71
4.1	Zweikörperprobleme	71
4.1.1	Schwerpunkts- und Relativkoordinaten	72
4.2	Zentralkraftprobleme	73
	Vorlesung 11: Mo, 20. 11. 2023	

4.2.1	<i>Drehimpuls</i>	74
4.2.2	<i>Isotroper Harmonischer Oszillator</i>	75
4.2.3	<i>Kepler Problem</i>	80
	Vorlesung 12: Fr, 24. 11. 2023	
4.2.4	<i>Existenz von geschlossenen Bahnen</i>	86
4.2.5	<i>Geometrische Lösung für den harmonischen Oszillator und das Keplerproblem</i>	86
	Vorlesung 13: Mo, 27. 11. 2023	
4.3	<i>Planeten und Monde</i>	93
4.3.1	<i>Ausgedehnte Körper</i>	93
4.3.2	<i>Zweizentrenproblem</i>	94
4.3.3	<i>Restringiertes Dreikörperproblem</i>	94
	Vorlesung 14: Fr, 01. 12. 2023	
4.4	<i>Streuung</i>	95
4.4.1	<i>Potentialstreuung</i>	95
4.4.2	<i>Labor- vs. Schwerpunktssystem</i>	96
	Vorlesung 15: Mo, 04. 12. 2023	
4.4.3	<i>Wirkungsquerschnitt</i>	102
4.4.4	<i>Beispiel: Rutherford vs. Hard Core</i>	104
	Vorlesung 16: Fr, 08. 12. 2023	
4.5	<i>Teilchen im elektromagnetischen Feld</i>	106
4.5.1	<i>Eichtransformationen</i>	108
4.5.2	<i>Galilei-Symmetrien</i>	109
4.6	<i>Kleine Schwingungen</i>	112
	Vorlesung 17: Mo, 11. 12. 2023	
4.6.1	<i>Hauptachsentransformation</i>	115
4.6.2	<i>Eigenschwingungen</i>	118
	Vorlesung 18: Fr, 15. 12. 2023	
4.6.3	<i>Eigenschwingungen Redux</i>	122
4.7	<i>Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte</i>	123
4.7.1	<i>Beschleunigte Bezugssysteme</i>	123
4.7.2	<i>Kreuzprodukt und <math>\epsilon</math>-Tensor Redux</i>	124
	Vorlesung 19: Mo, 18. 12. 2023	
4.7.3	<i>Winkelgeschwindigkeit</i>	127
4.7.4	<i>Kinetische Energie</i>	128
4.8	<i>Starrer Körper</i>	130
4.8.1	<i>Trägheitstensor</i>	131
	Vorlesung 20: Fr, 22. 12. 2023	

4.8.2	<i>Drehimpuls</i>	133
4.8.3	<i>Euler'sche Gleichungen</i>	134
4.8.4	<i>Eulerwinkel</i>	137
	<i>Vorlesung 21: Mo, 08. 01. 2024</i>	
4.8.5	<i>Winkelgeschwindigkeit</i>	140
4.8.6	<i>Euler-Lagrange Gleichungen</i>	141
4.8.7	<i>Schwerer Kreisel</i>	142
	<i>Vorlesung 22: Fr, 12. 01. 2024</i>	
5	<b>HAMILTON'SCHE FORMULIERUNG</b>	149
5.1	<i>Legendre Transformation</i>	150
5.1.1	$\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$	150
	<i>Vorlesung 23: Mo, 15. 01. 2024</i>	
5.1.2	$TQ \rightarrow \mathbf{R}$ und $T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$	155
5.2	<i>Kanonische Gleichungen</i>	158
5.3	<i>Poissonklammern</i>	160
	<i>Vorlesung 24: Fr, 19. 01. 2024</i>	
5.4	<i>Kanonische Transformationen</i>	162
5.4.1	<i>Punkttransformationen</i>	167
	<i>Vorlesung 25: Mo, 22. 01. 2024</i>	
5.4.2	<i>Flüsse</i>	168
5.4.3	<i>Liouville Theorem</i>	171
5.5	<i>Symmetrien</i>	172
5.5.1	<i>Translationen</i>	173
5.5.2	<i>Rotationen</i>	173
5.5.3	<i>Runge-Lenz Vektor</i>	174
5.5.4	<i>Erzeugende Funktionen</i>	175
	<i>Vorlesung 26: Fr, 26. 01. 2024</i>	
5.6	<i>Hamilton-Jacobi-Gleichung</i>	178
5.7	<i>Quantenmechanik</i>	183
6	<b>NICHTLINEARE DYNAMIK</b>	185
	<i>Vorlesung 27: Mo, 29. 01. 2024</i>	
6.1	<i>Virialsatz</i>	185
6.2	<i>Stabilitätstheorie</i>	187
6.2.1	<i>Fixpunkte</i>	188
6.2.2	<i>Grenzzyklen</i>	189
6.3	<i>Integrabilität</i>	190
	<i>Vorlesung 28: Fr, 02. 02. 2024</i>	

6.3.1	<i>Beispiele</i>	193
6.4	<i>KAM-Theorie</i>	195
6.5	<i>Deterministisches Chaos</i>	197
7	RELATIVISTISCHE DYNAMIK	199
7.1	<i>Konstanz der Lichtgeschwindigkeit</i>	200
A	NOTATION	202
B	MATHEMATISCHER WERKZEUGKASTEN	204
B.1	<i>Funktionen</i>	204
B.2	<i>Lineare Algebra</i>	205
B.2.1	<i>Rechnen mit Indices</i>	205
B.3	<i>Ableitungen</i>	206
B.3.1	<i>Kettenregel</i>	208
B.3.2	<i>Produktregel</i>	208
B.3.3	<i>„Vektoranalysis“</i>	210
C	ABKÜRZUNGEN	212



## *Vorbemerkung*

Dieses Manuskript ist mein persönliches Vorlesungsmanuskript, an vielen Stellen nicht ausformuliert und kann jede Menge Fehler enthalten. Es handelt sich hoffentlich um weniger Denk- als Tippfehler, trotzdem kann ich deshalb ich keine Verantwortung für Fehler übernehmen. Zeittranslationsinvarianz ist natürlich auch nicht gegeben ...

Dennoch, oder gerade deshalb, bin ich für alle Korrekturen und Vorschläge dankbar!

## *Organisatorisches*

### *Kontakt*

- Büro: 22.02.009 (Hubland Nord, Emil-Hilb-Weg 22, 2. Stock)
- Sprechstunde: nach Vereinbarung
- Mail: [ohl@physik.uni-wuerzburg.de](mailto:ohl@physik.uni-wuerzburg.de)
- URL: <http://physik.uni-wuerzburg.de/ohl/>

### *Aktuelle Informationen*

<https://wuecampus2.uni-wuerzburg.de/moodle/course/view.php?id=61560>

### *Übungsgruppen*

- #01: Mo, 10-12, SE 4, *Christopher Schwan*
- #02: Mo, 14-16, SE 22.00.017, *Christopher Schwan*
- #03: Mi, 10-12, SE 31.00.017, *Manuel Kunkel*

### *Übungszettel*

- Montags online, Besprechung ab Montag der folgenden Woche.

# —1— EINLEITUNG

## 1.1 Was heißt und zu welchem Ende studiert man „Klassische Mechanik“?

Vorlesung 01: Mo, 16.10.2023
------------------------------

Theoretische Physik hat

- **Ziel:** Beschreibung eines *Systems*, so daß Kenntnis seines *Zustands* zu einem Zeitpunkt  $t_0$ , die Vorhersage des Zustands zu einem Zeitpunkt  $t > t_0$  erlaubt.
- **Zweck:**
  - Anwendungen: Militär, Sport, etc.
  - Wissenschaft: Verifikation, bzw. Falsifikation, einer Beschreibung des Systems

Klassische Mechanik ist

- Fundament und ältester Teil des Gebäudes der Theoretischen Physik (*Isaac Newton: Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 1687*)  
— älter als die Würzburger Residenz.
- am nächsten an der Alltagserfahrung und Intuition
- Modell für modernere Theorien, die im ganz Großen (allgemeine Relativitätstheorie, Kosmologie) und im ganz Kleinen (Quantentheorie) weiter reichen

Abgrenzung zur

- *Quantenmechanik*: Bewegungen mit typischer *Wirkung*

$$S \lesssim \hbar \approx 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}. \quad (1.1)$$

Wirkung wird bald präzise definiert — anschaulich

$$\text{Wirkung} \approx \begin{cases} \text{typische Ausdehnung} \times \text{typischer Impuls} \\ \text{typische Energie} \times \text{typische Dauer} \\ \text{typischer Drehimpuls} \end{cases}, \quad (1.2)$$

- *Statistischen Physik (Thermodynamik)*: Systeme mit vielen Freiheitsgraden, die nicht *individuell* sondern mit Mittelungen beschrieben werden müssen,
- *Feldtheorie (Elektrodynamik)*: nicht nur das Verhalten von Körpern unter dem Einfluß von Fernwirkungen entsprechend gegebener Gesetze (Schwerkraft, Elektromagnetismus), sondern die Dynamik der entsprechenden Felder selbst.

Meistens werden wir nur Systeme betrachten, deren typischer Geschwindigkeiten sehr klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit

$$v \ll c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.3)$$

sind. In Kapitel 7 werden wir kurz auf die Beschreibung (*speziell*) *relativistischer* Bewegung  $v \rightarrow c$  eingehen.

## 1.2 Idealisierungen

Klassische Mechanik betrachtet Systeme mit wenigen Freiheitsgraden, insbesondere

- Massenpunkte (in ART unmöglich, weil sonst schwarzes Loch)
- starre Körper (in spezieller Relativität unmöglich wegen Kausalität)

als *effektive Theorie*, wenn die anderen Freiheitsgrade eines realen Körpers vernachlässigt werden können. Zweck ist

- Gleichungen mit verstehbarer Struktur
- Lösung durch Symmetrien
- robuste Vorhersagen

zu erhalten.

## 1.3 *Formalismen*

Zunehmende Abstraktion nicht als Selbstzweck, sondern zur Problemlösung.

### 1.3.1 *Newton*

Kapitel 2

- + allgemeinste Formulierung, erlaubt auch nicht abgeschlossene Systeme, Reibung etc.
- Symmetrien nicht manifest (kovariant, nicht invariant)
- Erhaltungsgrößen nicht systematisch
- Gleichungen schwer aufzustellen, kaum Hilfe bei der Lösung
- kein Weg zur Quantenmechanik

### 1.3.2 *Lagrange*

Kapitel 3

- + Mächtigstes Werkzeug zum Problemlösen (z. B. in der Klausur)
- + Symmetrien manifest
- + Erhaltungsgrößen systematisch aus Noether Theorem
- + Weg zur Quantenmechanik („Pfadintegral“)
- Nachteil: Reibung etc. nicht natürlich

### 1.3.3 *Hamilton*

Kapitel 5

- + Noch reichhaltigere Symmetrien
- + mathematisch robuster Weg zur Quantenmechanik

## Bemerkung

In Anhang A sind die verwendeten Notationen zusammengefasst. Zwar ist Physik und Mathematik „invariant unter (konsistentem) Austausch von Notationen“, aber es hilft doch, Notationen nicht immer wieder neu definieren zu müssen.

## 1.4 Literatur

### 1.4.1 Standardwerke

- Herbert Goldstein: *Classical Mechanics* [1]
- Landau-Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik 1: Mechanik* [2]

### 1.4.2 Moderne Vorlesungsskripte

- David Tong: *Lectures on Dynamics and Relativity* [3]
- David Tong: *Lectures on Classical Dynamics* [4]

NB: alle Vorlesungsskripte zu Teilgebieten der theoretischen Physik von David Tong sind hervorragend: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/teaching.html>.

### 1.4.3 Für Fortgeschrittene

- Florian Scheck: *Mechanik* [5]

### 1.4.4 Spezielles

#### Mathematisch

- V. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics* [6]
- Walter Thirring: *Lehrbuch der Mathematischen Physik 1: Klassische Dynamische Systeme* [7]

#### Computerorientiert

- Gerald Jay Sussman, Jack Wisdom: *Structure and Interpretation of Classical Mechanics* [8]

## —2—

## NEWTON'SCHE FORMULIERUNG

2.1 *Bewegung eines Massenpunkts im  
Anschauungsraum  $\mathbf{R}^3$* 2.1.1 *Trajektorien, Koordinatensysteme, Bezugssysteme*

Ein Massenpunkt ist das einfachste Beispiel, weil eine vollständige Beschreibung aller Beobachtungen zu verschiedenen Zeiten  $t$  durch eine parametrisierte Kurve, eine *Trajektorie*, im Raum erfolgt, vgl. Abbildung 2.1.

$$\begin{aligned} \gamma : [t_0, t_1] &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{x}(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ziel ist die Vorhersage von  $\gamma$  aus der Kenntnis eines Teils davon.

*Bemerkung 2.1.* Hierbei spielt es keine Rolle, welche Koordinaten benutzt werden, um die Punkte  $\vec{x}(t)$  auszudrücken. Z. B. beschreiben

$$t \mapsto \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (vt/\sqrt{2}, vt/\sqrt{2}, 0) \quad (2.2a)$$

$$t \mapsto \vec{x}(t) = (r(t), \theta(t), \phi(t)) = (vt, \pi/2, \pi/4) \quad (2.2b)$$

die gleiche Trajektorie, einmal in kartesischen und einmal in sphärischen Polarkoordinaten, vgl. Abb. 2.2. Umgekehrt bezeichnet das gleiche Tripel von reellen Zahlen  $(a, b, c)$  im Allgemeinen unterschiedliche Punkte  $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ , wenn es als die Koordinaten in verschiedenen Koordinatensystemen interpretiert wird:

$$\vec{x} = (a, b, c) \quad (2.3a)$$

$$\vec{x} = (a \sin b \cos c, a \sin b \sin c, a \cos c). \quad (2.3b)$$

Glücklicherweise ist meistens aus dem Kontext offensichtlich, welches Koordinatensystem gemeint ist:  $(x, y, z)$  oder  $(x_1, x_2, x_3)$  für kartesische Koordinaten,  $(r, \theta, \phi)$  für Kugelkoordinaten, usw. Im Fall von nicht-kartesischen Koordinaten kommt hinzu, daß sie nicht alle reellen Werte annehmen,

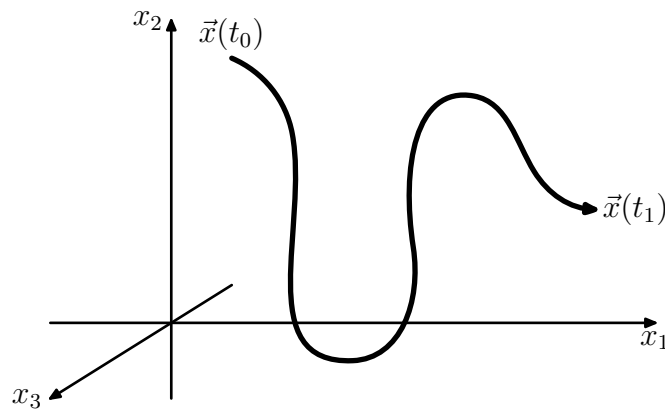
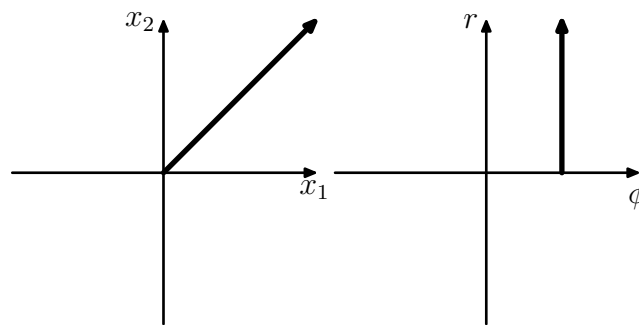
Abbildung 2.1: Trajektorie  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ 

Abbildung 2.2: Die gleiche Trajektorie aus (2.2) in verschiedenen Koordinatensystemen.

z. B.  $(r, \theta, \phi) \in \mathbf{R} \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$ . Wenn das lateinische und griechische Alphabet nicht zur intuitiven Unterscheidung genügen, muß man natürlich das verwendete Koordinatensystem explizit angeben.

Fast immer gibt es ausgezeichnete Koordinatensysteme, in denen bestimmte Aspekte eines physikalischen Systems besonders einfach beschrieben werden können. Diese Koordinatensysteme werden wir meistens durch Symmetrieüberlegungen finden können. Allerdings sind die Koordinatensysteme, in denen sich verschiedene Aspekte eines Systems einfach beschrieben werden können im Allgemeinen unterschiedlich. Im Abschnitt 4.2 werden wir uns z. B. ausführlich mit Systemen befassen, deren Wechselwirkung besonders einfach in Kugelkoordinaten beschrieben werden kann, während ihre kinetische Energie in kartesischen Koordinaten die einfachste Form annimmt.

Ein zentraler Teil in der Lösung physikalischer Problem ist deshalb das Finden von geeigneten Koordinatensystem und die Umrechnung zwischen diesen Koordinatensystem. In den Abschnitten 4.7 und 4.8 werden wir sogar zeitabhängige Koordinatensysteme nutzen, um physikalische Probleme elegant zu lösen.

*Bemerkung 2.2.* Verschiedene Beobachter haben im Allgemeinen verschiedene *Bezugssysteme*, die relativ zueinander translatiert, gedreht oder bewegt sein können. Dabei spielt es keine Rolle, welche *Koordinatensysteme* verwendet werden.

### 2.1.2 Inertialsysteme, Newton'sche Gesetze

Empirische Beobachtung (Galileo Galilei et al.): es gibt spezielle Bezugssysteme, sogenannte *Inertialsysteme*, in denen die *Newton'schen Gesetze* gelten

**Definition 2.3** (Newton'sche Gesetze). Es gibt Inertialsysteme und in jedem Inertialsystem ...

1. ... sind die Geschwindigkeiten von allen Körpern, auf die keine Kräfte ausgeübt werden, konstant,
2. ... ist die Änderung der Geschwindigkeiten proportional und parallel zur auf den Körper ausgeübten *Kraft*, d. h.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{x}}) . \quad (2.4)$$

Die Proportionalitätskonstante  $m$  ist die *träge Masse* des Körpers (die hier als konstant angenommen wird),

3. ... sind die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte antiparallel und von gleichem Betrag, d. h.

$$actio = reactio . \quad (2.5)$$

*Bemerkung:* dies stellte eine dramatische Abkehr von Aristoteles dar, bei dem Körper immer zur Ruhe streben, wenn sie keiner Kraft unterliegen.

**Theorem 2.4** (Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung). *Unter hinreichenden Regularitätsbedingungen an die Funktion  $\vec{f}$  hat das Anfangswertproblem*

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \quad (2.6a)$$



$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (2.6b)$$

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{v}_0 \quad (2.6c)$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung  $U \ni t_0$  eine eindeutige Lösung  $U \ni t \mapsto \vec{x}$ .

Daraus folgt, daß die Trajektorie eines Massenpunkts bei bekannter Kraft  $\vec{F}$  durch Anfangswerte für Ort und Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt durch die Newton'schen Gesetze festgelegt sind.

Der *Zustand* des Systems entspricht also einem Punkt

$$(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \in TQ = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \quad (2.7)$$

im *Geschwindigkeits-Phasenraum*  $TQ$ , der später komplizierter sein wird als  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ .

### 2.1.3 Erhaltungsgrößen

Weil (2.6) numerisch in hoher Präzision gelöst werden kann, könnte man meinen, daß die Aufgabe der theoretischen Physik nur noch in der Bestimmung der Kräfte  $\vec{F}$  bestünde. Dies ist *falsch*:

- Differentialgleichungen sind im Allgemeinen nichtlinear und das Verhalten für längere Zeiten kann numerisch nicht beliebig genau bestimmt werden.
- Prinzipielle Fragen, wie die nach der Stabilität des Sonnensystems, bleiben offen.

Es ist vielmehr aus (mindestens) zwei Gründen wichtig, *Erhaltungsgrößen*  $I$  (oft auch als *Integrale* bezeichnet)

$$\frac{d}{dt} I(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = 0 \quad (2.8)$$

zu identifizieren:

1. (2.8) ist eine überprüfbare Voraussage,
2. (2.8) kann bei der Lösung der Bewegungsgleichung helfen.

## 2.1.4 Arbeit

Vorlesung 02: Fr, 20.10.2023

Sei im Folgenden

$$\begin{aligned}\vec{F} : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \vec{x} &\mapsto \vec{F}(\vec{x})\end{aligned}\tag{2.9}$$

und nicht

$$\begin{aligned}\vec{F} : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &\mapsto \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t),\end{aligned}\tag{2.10}$$

d. h. die Kraft hänge nur vom Ort ab.

**Definition 2.5** (Arbeit entlang eines Weges). Das Funktional auf der Menge  $\Gamma$  aller Trajektorien

$$\begin{aligned}W : \Gamma &\rightarrow \mathbf{R} \\ \gamma &\mapsto W(\gamma) = - \int_{\gamma} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x})\end{aligned}\tag{2.11}$$

heißt Arbeit.

Konkreter

$$W(\gamma) = - \int_{\gamma} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = - \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\vec{x}}{dt}(t) \cdot \vec{F}(\vec{x}(t))\tag{2.12}$$

wobei  $W(\gamma)$  wegen der Kettenregel

$$\begin{aligned}\int_{s_0}^{s_1} ds \frac{d\vec{x}}{ds}(t(s)) \cdot \vec{F}(\vec{x}(t(s))) &= \\ \int_{s_0}^{s_1} ds \frac{dt}{ds}(s) \frac{d\vec{x}}{dt}(t(s)) \cdot \vec{F}(\vec{x}(t(s))) &= \int_{t(s_0)}^{t(s_1)} dt \frac{d\vec{x}}{dt}(t) \cdot \vec{F}(\vec{x}(t))\end{aligned}\tag{2.13}$$

unabhängig von der für  $\gamma$  gewählten Parametrisierung ist.

Wenn man für eine gegebene Trajektorie  $\gamma$  nur bis zu einem Zeitpunkt  $t$  integriert, erhält man eine Funktion

$$\begin{aligned}W_{\gamma} : [t_0, t_1] &\rightarrow \mathbf{R} \\ t &\mapsto W_{\gamma}(t) = - \int_{t_0}^t dt' \frac{d\vec{x}}{dt'}(t') \cdot \vec{F}(\vec{x}(t'))\end{aligned}\tag{2.14}$$

die von der Parametrisierung *abhängt* und die man differenzieren kann

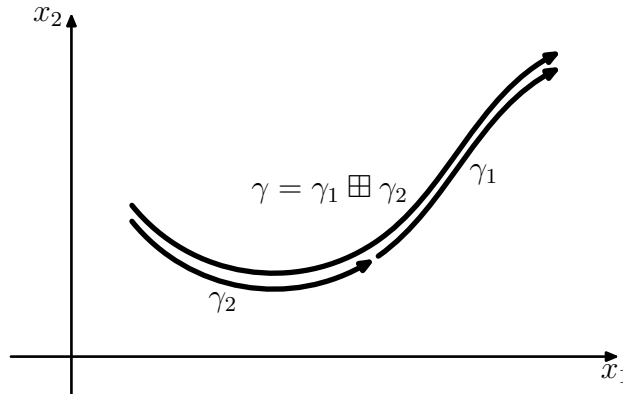


Abbildung 2.3: Additivität der Arbeit.

$$\begin{aligned} \frac{dW_\gamma}{dt}(t) &= -\frac{d\vec{x}}{dt}(t) \cdot \vec{F}(\vec{x}(t)) \\ &= -\frac{d\vec{x}}{dt}(t) \cdot m\ddot{\vec{x}}(t) = -\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{x}}(t) \right)^2 =: -\frac{d}{dt} T(\dot{\vec{x}}(t)), \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei  $T$  nur von der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}$  abhängt. Mit der

**Definition 2.6** (Kinetische Energie).

$$\begin{aligned} T : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R} \\ \vec{v} &\mapsto T(\vec{v}) = \frac{m}{2} \vec{v}^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

finden wir, daß die Energie

$$E_\gamma(\dot{\vec{x}}(t), t) = T(\dot{\vec{x}}(t)) + W_\gamma(t) \quad (2.17)$$

entlang der Trajektorie  $\gamma$  erhalten ist:

$$\frac{dE_\gamma}{dt}(\dot{\vec{x}}(t), t) = 0. \quad (2.18)$$

Diese Definition ist noch nicht sehr hilfreich, weil  $E_\gamma$  im Prinzip von der ganzen Historie  $\gamma$  abhängen kann, *nicht* nur vom aktuellen Zustand  $(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \in TQ$ .

### 2.1.5 Konservative Kräfte

Wenn  $W(\gamma)$  für *alle* geschlossenen Wege  $\gamma \in \Gamma_c$ , mit

$$\Gamma_c = \{\gamma \in \Gamma : \vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_0)\} \quad (2.19)$$

verschwindet

$$\forall \gamma \in \Gamma_c : W(\gamma) = - \int_{\gamma} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = 0, \quad (2.20)$$

hängt  $W(\gamma)$  wegen

$$W(\gamma_1) + W(\gamma_2) = W(\gamma_1 \boxplus \gamma_2) \quad (2.21)$$

(vgl. Abbildung 2.3) *nicht* vom Weg ab, sondern nur vom Endpunkt  $\vec{x}(t_1)$  und Anfangspunkt  $\vec{x}(t_0)$ . Daher kann man mit Hilfe eines passenden  $\gamma$  eine Funktion  $V : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  definieren

$$V(\vec{x}(t)) = W_{\gamma}(t), \quad (2.22)$$

die *Potential* oder *potentielle Energie* heißt und

$$\frac{dV}{dt}(\vec{x}(t)) = \frac{dW_{\gamma}}{dt}(t) = - \frac{d}{dt} T(\dot{\vec{x}}(t)) \quad (2.23)$$

erfüllt, sowie eine entlang der Trajektorie *erhaltene Energie*

$$\begin{aligned} E : TQ &\rightarrow \mathbf{R} \\ (\vec{x}, \dot{\vec{x}}) &\mapsto E(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = T(\dot{\vec{x}}) + V(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit

$$\frac{dE}{dt}(x(t), \dot{x}(t)) = 0. \quad (2.25)$$

**Definition 2.7** (Konservatives Vektorfeld). Ein Vektorfeld, dessen Wegintegral für alle geschlossenen Wege verschwindet, heißt *konservativ*.

Ein einfaches Kriterium dafür, ob ein Vektorfeld konservativ ist, liefert das

**Theorem 2.8** (Satz von Stokes in  $\mathbf{R}^3$ ).

$$\int_D d\vec{\sigma}(\vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = \int_{\partial D} d\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \quad (2.26)$$

Bemerkungen:

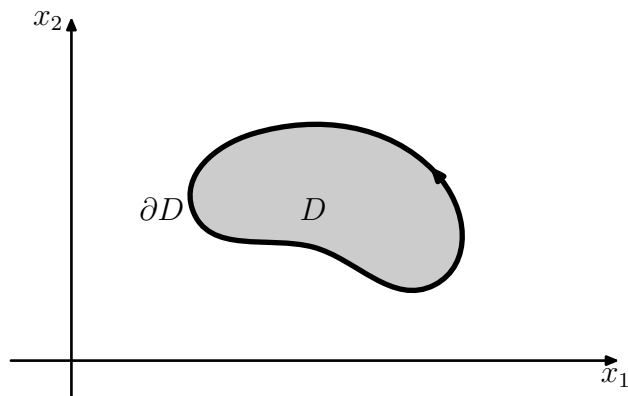


Abbildung 2.4: Satz von Stokes 2.8.

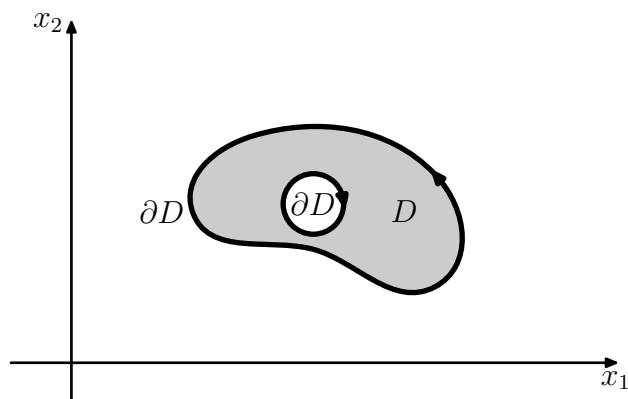


Abbildung 2.5: Nicht einfach zusammenhängendes Gebiet.

- Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung in einer Dimension

$$\int_a^b dx \frac{d\phi}{dx}(x) = \phi(b) - \phi(a) \quad (2.27)$$

- Das Integral über die Ableitung ist durch die Werte am Rand festgelegt.
- Vorsicht bei mehrfach zusammenhängenden („topologisch nichttrivialen“) Gebieten: innere Ränder nicht vergessen (vgl. Abbildung 2.5)

Daraus ergibt sich das einfache

**Korollar 2.9.** *Ein Kraftfeld  $\vec{F}$  mit auf einem einfach zusammenhängendem Gebiet  $D \subseteq \mathbf{R}^3$  verschwindender Rotation*

$$\forall \vec{x} \in D : \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = 0 \quad (2.28)$$

*ist auf  $D$  konservativ.*

Noch besser mit dem

**Lemma 2.10** (Poincaré Lemma für  $\mathbf{R}^3$ ). *Sei  $D \subseteq \mathbf{R}^3$  ein sternförmiges Gebiet und  $\vec{A} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  ein darauf rotationsfreies Vektorfeld, d. h.*

$$\forall x \in D : \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = 0. \quad (2.29)$$

*Dann gibt es ein, bis auf eine additive Konstante eindeutiges, Potential  $\Phi : D \rightarrow \mathbf{R}$  mit*

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}). \quad (2.30)$$

*Beweisskizze.*

$$\Phi_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{\xi} \cdot \vec{A}(\vec{\xi}) \quad (2.31)$$

ist wegen des Satzes von Stokes (Satz 2.8) wegunabhängig<sup>1</sup> und damit

$$\frac{\partial \Phi_{\vec{x}_0}(\vec{x})}{\partial x_i} = A_i(\vec{x}), \quad (2.32)$$

bzw.  $\vec{\nabla} \Phi = \vec{A}$ .

□

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} \Phi_{\vec{x}_0}(\vec{\xi}) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\vec{\xi}}{dt}(t) \cdot \vec{\nabla} \Phi_{\vec{x}_0}(\vec{\xi}(t)) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^3 \frac{d\xi_i}{dt}(t) \frac{\partial \Phi_{\vec{x}_0}}{\partial \xi_i}(\vec{\xi}(t)) = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\Phi_{\vec{x}_0}}{dt}(\vec{\xi}(t)) \\ &= \Phi_{\vec{x}_0}(\vec{\xi}(t_1)) - \Phi_{\vec{x}_0}(\vec{\xi}(t_0)) = \Phi_{\vec{x}_0}(\vec{x}) - \underbrace{\Phi_{\vec{x}_0}(\vec{x}_0)}_{=0} = \Phi_{\vec{x}_0}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

und wir erhalten das Ergebnis: aus

$$\forall \vec{x} \in D : \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = 0 \quad (2.34)$$

<sup>1</sup>Hier ist es wichtig, daß  $S$  nicht mehrfach zusammenhängend ist, weil man sich sonst in (2.31) eine Wegabhängigkeit durch die geschlossenen Wege, die „Löcher“ umlaufen, einhandelt.

auf einem sternförmigen, einfach zusammenhängenden Gebiet  $D \subset \mathbf{R}^3$  folgt

$$\exists V \in (D \rightarrow \mathbf{R}) : \vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad (2.35)$$

und die Energieerhaltung

$$E = T + V = \text{const.} \quad (2.36)$$

*Beispiel 2.11* (Schwerefeld auf der Erdoberfläche). Aus der Konstanz des Kraftfeldes

$$\vec{F}(\vec{x}) = -mg\vec{e}_3 \quad (2.37a)$$

folgt trivial

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \quad (2.37b)$$

auf ganz  $\mathbf{R}^3$ . Und offensichtlich ist

$$V(\vec{x}) = mgx_3 \quad (2.37c)$$

ein geeignetes Potential und damit

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + mgx_3 \quad (2.37d)$$

eine erhaltene Energie.

## 2.2 Eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts

Sei die Bewegung in eine Richtung (o. B. d. A. entlang einer Koordinatenachse) eingeschränkt:

$$\begin{aligned} \gamma : [t_0, t_1] &\rightarrow \mathbf{R} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Newton'sche Bewegungsgleichung  $F = ma$ , bzw. für geschwindigkeitsunabhängige Kräfte

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F(x(t)). \quad (2.39)$$

### 2.2.1 Energieerhaltung

In einer Dimension sind alle Kräfte konservativ, die nur vom Ort abhängen: man kann immer die Kraft aufintegrieren, um ein Potential zu definieren

$$V(x) = - \int_{x_0}^x d\xi F(\xi) + V(x_0), \quad (2.40)$$

das

$$\frac{dV}{dx}(x) = -F(x) \quad (2.41)$$

erfüllt. Mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^2 \quad (2.42)$$

gilt aufgrund der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + V) &= m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx}(x) \frac{dx}{dt} \\ &= m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} - F(x) \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \left( m \frac{d^2x}{dt^2} - F(x) \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

also Energieerhaltung

$$E = T + V = E_0 = \text{const.} \quad (2.44)$$

### 2.2.2 Integration der Bewegungsgleichung

In einer Dimension genügt die Energieerhaltung immer zur Lösung („*Integration*“) der Bewegungsgleichung. Aus

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^2 + V(x(t)) = E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + V(x_0) = \text{const.}, \quad (2.45)$$

folgt

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_0 - V(x)} \quad (2.46)$$

bzw.

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E_0 - V(x)}} = dt. \quad (2.47)$$

Wenn  $V(x) < E_0$  gilt, ist wegen  $|\vec{v}| > 0$  das Vorzeichen durch die Richtung der Bewegung zum Zeitpunkt  $t_0$  eindeutig festgelegt. Wenn die Trajektorie



durch Punkte  $x$  mit  $V(x) = E_0$  läuft, entsprechen diese Umkehrpunkten und Äste mit verschiedenen Vorzeichen müssen zusammengeklebt werden.

Damit folgt

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E_0 - V(x)}} = \int_{t_0}^t d\tau = t - t_0 \quad (2.48)$$

und mit

$$\begin{aligned} \Phi_{x_0, E, \pm} : U \subseteq \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \Phi_{x_0, E, \pm}(x) &= \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{E - V(\xi)}} \end{aligned} \quad (2.49)$$

können wir

$$\Phi_{x_0, \frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0), \pm}(x(t)) = t - t_0 \quad (2.50)$$

schreiben.

**Theorem 2.12** (Satz über implizite Funktionen). *Sei*

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto u(x, y) \end{aligned} \quad (2.51)$$

*hinreichend regulär mit*

$$u(x, y) \Big|_{x=x_0, y=y_0} = 0 \quad (2.52a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \Big|_{x=x_0, y=y_0} \neq 0 \quad (2.52b)$$

*dann existiert genau eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  wobei*

$$x_0 \in U \subseteq \mathbf{R} \quad (2.53)$$

*mit*

$$\forall x \in U : u(x, f(x)) = 0 \quad (2.54a)$$

*und der Ableitung*

$$(Df)(x) = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = - \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x)). \quad (2.54b)$$

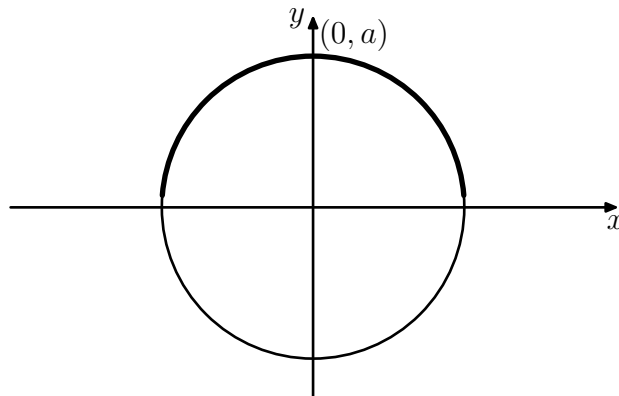


Abbildung 2.6: Implizite Funktion.

Vorlesung 03: Mo, 23.10.2023

Beispiel 2.13. Sei

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 - a^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

mit  $a \neq 0$ , dann

$$u(0, a) = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, a) = 2a \neq 0 \quad (2.57)$$

und wir können für  $-a < x < a$  nach  $y$  auflösen

$$y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.58)$$

Damit finden wir die inverse Funktion  $\Phi_{x_0, E_0, \pm}^{-1}$  als Lösung

$$x(t) = \Phi_{x_0, \frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0), \pm}^{-1}(t - t_0). \quad (2.59)$$

### Bemerkungen zu inversen Funktionen

Für invertierbare Abbildungen

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned} \quad (2.60)$$

gilt

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\rightarrow A \\ b &\mapsto f^{-1}(b) \end{aligned} \quad (2.61)$$

mit

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A \quad (2.62a)$$

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_B \quad (2.62b)$$

bzw.

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad (2.63a)$$

$$f(f^{-1}(b)) = b \quad (2.63b)$$

oder

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & f^{-1} & \end{array}, \quad (2.64)$$

aber  $f^{-1}(x)$  hat *nichts* mit  $\frac{1}{f(x)}$  zu tun<sup>2</sup>: selbst wenn  $\frac{1}{f(x)}$  existiert, haben die Funktionen im Allgemeinen nicht einmal den gleichen Definitionsbereich! Es gilt nur für die Ableitungen der Funktionen, d. h. die linearen Approximationen an die Funktionen,

$$D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$$

als Matrizen.

*Beispiel 2.14* (Schwerefeld auf der Erdoberfläche).

$$V(z) = mgz \quad (2.65a)$$

also

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{E_0 - mg\zeta}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{m}{2}v_0^2 + mg(z_0 - \zeta)}}$$

---

<sup>2</sup>Ein Falle sind die Notationen

$$\sin^2 x = (\sin x)^2$$

$$\sin^{-1} x = \arcsin x \neq (\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$$

die eigentlich inkonsistent, aber trotzdem weit verbreitet sind. Aus dem Kontext ergibt sich glücklicherweise meistens leicht, was gemeint ist.

$$= \mp \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} \left[ \sqrt{\frac{m}{2} v_0^2 + mg(z_0 - \zeta)} \right] \Big|_{z_0}^z = \mp \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\frac{m}{2} v_0^2 + mg(z_0 - z)} \pm \frac{v_0}{g} \quad (2.65b)$$

daraus

$$\left( t - t_0 \mp \frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{2}{mg^2} \left( \frac{m}{2} v_0^2 + mg(z_0 - z) \right) = \left( \frac{v_0}{g} \right)^2 + 2 \frac{z_0 - z}{g} \quad (2.65c)$$

sowie

$$(t - t_0)^2 \mp 2 \frac{v_0}{g} (t - t_0) = 2 \frac{z_0 - z}{g} \quad (2.65d)$$

und schließlich

$$z = z_0 \pm v_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \quad (2.65e)$$

wobei offensichtlich das positive Vorzeichen für eine anfängliche Aufwärtsbewegung zu wählen ist.

*Beispiel 2.15* (Harmonischer Oszillator).

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (2.66a)$$

also

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{E_0 - \frac{m\omega^2}{2} \xi^2}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2/a^2}} \\ &= \pm \frac{1}{\omega} \int_{x_0/a}^{x/a} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \pm \frac{1}{\omega} \left[ \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) - \arcsin \left( \frac{x_0}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.66b)$$

mit der Amplitude

$$a = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} = x_0 \sqrt{1 + \left( \frac{v_0}{x_0 \omega} \right)^2} \quad (2.66c)$$

bzw.

$$x(t) = a \sin \left( \pm \omega(t - t_0) + \arcsin \frac{x_0}{a} \right) \quad (2.66d)$$

und das Vorzeichen wird wieder durch die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = dx/dt(t_0)$  festgelegt.

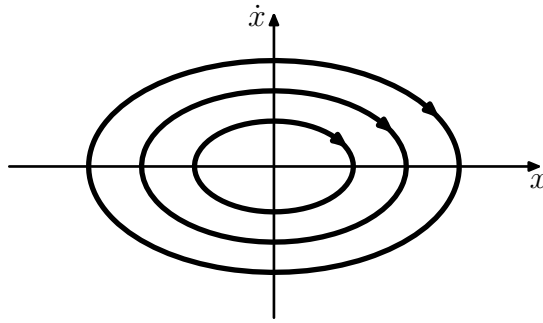


Abbildung 2.7: ...

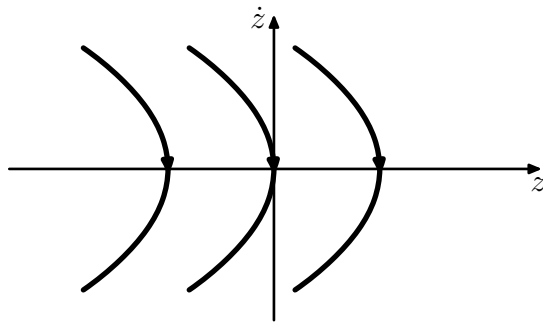


Abbildung 2.8: ...

### 2.2.3 Phasenraum, Phasenfluß

Die Kurven konstanter Energie  $E(x, \dot{x})$  definieren „Höhenlinien“ im Geschwindigkeits-Phasenraum  $TQ = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , entlang derer sich das System bewegt. Z. B. Ellipsen für den harmonischen Oszillator mit

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (2.67)$$

in Abb 2.7 oder Parabeln für ein Teilchen im Schwerfeld

$$E = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mgz \quad (2.68)$$

in Abb 2.8.

Jeder Punkt  $(x, \dot{x}) \in TQ$  definiert einen Zustand des Systems, der die weitere Entwicklung, den *Phasenfluß*, entlang der Linien gleicher Energie

eindeutig festlegt. Verlässliche qualitative Aussagen (gebundene Bahnen, Entweichbahnen, etc.) sind möglich, ohne DGL zu lösen!

Das Konzept des Phasenflusses verallgemeinert sich zu komplizierteren Phasenräumen, z. B.  $TQ = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ , aber dort genügt die Energieerhaltung nicht zur Festlegung der Lösung, dafür werden insgesamt  $2 \cdot 3 - 1 = 5$  „Integrale“ gebraucht.

# —3—

## LAGRANGE'SCHE FORMULIERUNG

Die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \quad (3.1)$$

hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab. Z.B. dreidimensionaler harmonischer Oszillator in kartesischen Koordinaten

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0 \quad (3.2a)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 0 \quad (3.2b)$$

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = 0 \quad (3.2c)$$

und in sphärischen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)

$$\ddot{r} + \omega^2 r - r \left( \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \right) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \right) = 0 \quad (3.3b)$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\theta} \right) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.3c)$$

Es ist nicht leicht zu erkennen, daß es sich in beiden Fällen um das gleiche System handelt.

Im eindimensionalen Fall bieten die Linien konstanter Energie eine geometrische, d.h. koordinatenunabhängige, Beschreibung, die leider noch nicht zur Beschreibung komplizierterer Probleme genügt.

### 3.1 Variationsprinzipien

Es ist möglich, die Newton'schen Bewegungsgleichungen aus einem *Variationsprinzip* herzuleiten, d.h. aus der Forderung, daß die Trajektorie des

Systems ein bestimmtes Funktional, die Wirkung

$$S : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\gamma \mapsto S(\gamma) = \int dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t), \quad (3.4)$$

extremal macht (minimiert, maximiert, Sattelpunkt), wenn wir  $L$  geeignet wählen.

Für Funktionen  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  finden wir die extremalen Stellen  $x^0$  durch

$$\frac{df}{dx}(x^0) = 0 \quad (3.5)$$

und für Funktionen  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  durch

$$\forall i : \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0. \quad (3.6)$$

Äquivalent zu (3.6) ist die Forderung, daß *alle* Richtungsableitungen verschwinden

$$\forall v \in \mathbf{R}^n : \left. \frac{df}{ds}(x^0 + sv) \right|_{s=0} = 0. \quad (3.7)$$

Dies lässt sich auf Funktionale verallgemeinern.

### 3.1.1 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

Die Menge aller (hinreichend oft stetig differenzierbaren) Kurven mit festen Randpunkten

$$\Gamma_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} = \left\{ \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R} \atop t \mapsto x(t) \middle| x(t_0) = x_0 \wedge x(t_1) = x_1 \right\}. \quad (3.8)$$

Jede (hinreichend oft stetig differenzierbare) Funktion dreier Veränderlicher  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definiert eine Funktion von der Menge aller Kurven in die reellen Zahlen

$$F : \Gamma_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\gamma \mapsto F(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} dt f(x(t), \dot{x}(t), t). \quad (3.9)$$

NB: höhere Ableitungen,  $\ddot{x}$  etc., könnten im Prinzip auch vorkommen, werden aber in unserer Anwendung nicht gebraucht und deshalb hier nicht betrachtet.



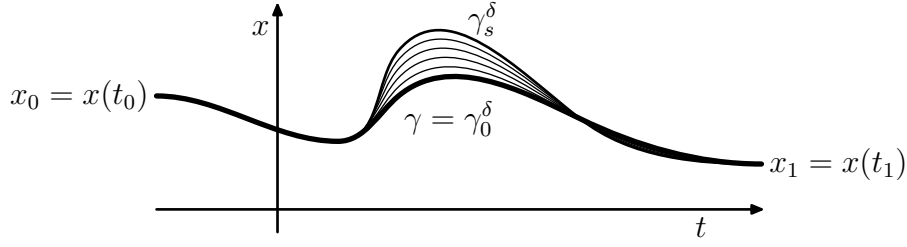


Abbildung 3.1: Eine einparametrische Familie von Kurven  $\{\gamma_s^\delta\}_{s \in [0,1]}$  mit festgehaltenen Endpunkten.

Einparametrische Familien von Variationen mit festgehaltenen Endpunkten (vgl. Abb. 3.1)

$$\begin{aligned} \delta : \mathbf{R} \times \Gamma_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} &\rightarrow \Gamma_{t_0, x_0}^{t_1, x_1} \\ (s, \gamma) &\mapsto \gamma_s^\delta : t \mapsto x_s^\delta(t) = x(t) + s\delta x(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

damit

$$\left. \frac{d}{ds} x_s^\delta(t) \right|_{s=0} = \delta x(t) \quad (3.11)$$

und

$$\left. \frac{d}{ds} \dot{x}_s^\delta(t) \right|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left. \frac{d}{dt} x_s^\delta(t) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} x_s^\delta(t) \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} \delta x(t). \quad (3.12)$$

Betrachten wir nun die Variation des Werts eines Funktionals  $F$  bei der Variation seines Arguments, der Trajektorie  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \delta F(\gamma) &:= \left. \frac{dF}{ds}(\gamma_s^\delta) \right|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left. \frac{df}{ds}(x_s^\delta(t), \dot{x}_s^\delta(t), t) \right|_{s=0} = \\ &\int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \left. \frac{d}{ds} x_s^\delta(t) \right|_{s=0} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \left. \frac{d}{ds} \dot{x}_s^\delta(t) \right|_{s=0} \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \frac{d}{dt} \delta x(t) \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right) \delta x(t) \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t_1), \dot{x}(t_1), t_1) \delta x(t_1)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t_1), \dot{x}(t_0), t_0) \delta x(t_0)}_{=0} \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right) \delta x(t) \quad (3.13)$$

mit partieller Integration

$$\int_a^b dx f(x) g'(x) = - \int_a^b dx f'(x) g(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (3.14)$$

im vorletzten Schritt.

**Lemma 3.1.** Sei  $f \in C^\infty([\xi_0, \xi_1])$  und

$$\forall g \in C^\infty([\xi_0, \xi_1]) : \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi f(\xi) g(\xi) = 0. \quad (3.15)$$

Dann verschwindet  $f$ , d. h.  $f = 0$ .

*Beweis.* Wähle  $g = f$ , dann

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi f(\xi) g(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi |f(\xi)|^2 \geq 0 \quad (3.16)$$

und das Integral verschwindet dann und nur dann, wenn  $f = 0$ .  $\square$

Aus (3.13) folgt mit diesem Lemma das

**Theorem 3.2.**

$$\forall \delta : \delta F(\gamma) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \quad (3.17)$$

NB: für die partiellen Ableitungen wurde die übliche Kurzschreibweise gewählt: gemeint ist die partielle Ableitung nach dem ersten oder zweiten Argument

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \eta, t) \Big|_{\xi=x(t), \eta=\frac{dx}{dt}(t)} \quad (3.18a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi, \eta, t) \Big|_{\xi=x(t), \eta=\frac{dx}{dt}(t)}. \quad (3.18b)$$

Die totale Ableitung wird mit der Kettenregel ausgewertet und entspricht der Änderung der Funktion entlang der Kurve

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(x(t), \dot{x}(t), t) = \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t), \dot{x}(t), t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.1.2  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{3n}$ 

Vorlesung 04: Fr, 29.10.2021

Wir können (3.13) sofort verallgemeinern zu Kurven im Anschauungsraum  $\mathbf{R}^3$  oder auch für mehrere Teilchen, d. h. für Kurven

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \dots \times \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^{3n} \quad (3.20)$$

durch

$$\begin{aligned} \delta F(\gamma) &= \left. \frac{dF}{ds}(\gamma_s^\delta) \right|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left. \frac{df}{ds}(\vec{x}_s^\delta(t), \dot{\vec{x}}_s^\delta(t), t) \right|_{s=0} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \left. \frac{d}{ds} x_{s,i}^\delta(t) \right|_{s=0} + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \left. \frac{d}{ds} \dot{x}_{s,i}^\delta(t) \right|_{s=0} \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \delta x_i(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \frac{d}{dt} \delta x_i(t) \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \right) \delta x_i(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}(t_1), \dot{\vec{x}}(t_1), t_1) \underbrace{\delta x_i(t_1)}_{=0} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}(t_0), \dot{\vec{x}}(t_0), t_0) \underbrace{\delta x_i(t_0)}_{=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \right) \delta x_i(t) \quad (3.21) \end{aligned}$$

Wir erhalten damit, weil die  $\delta x_i$  unabhängig sind,

**Theorem 3.3.**

$$\forall \delta : \delta F(\gamma) = 0 \iff \forall i : \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = 0 \quad (3.22)$$

## 3.2 Hamilton'sches Prinzip und Euler-Lagrange Gleichungen

Betrachte nun das *Wirkungsfunktional*

$$\begin{aligned} S : \Gamma &\rightarrow \mathbf{R} \\ \gamma &\mapsto S(\gamma) = \int dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit der evtl. explizit zeitabhängigen *Lagrangefunktion* auf dem Geschwindigkeits-Phasenraum

$$L : TQ \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \mapsto L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}) - V(\vec{x}, t). \quad (3.24)$$

Dann folgen aus dem *Hamilton'schen Prinzip* (1834), daß die Wirkung unter Variationen mit *festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten* stationär sein soll

$$\delta S(\gamma) = 0 \quad (3.25)$$

die

**Definition 3.4** (Euler-Lagrange Gleichungen).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = 0. \quad (3.26)$$

Mit der kinetischen Energie in kartesischen Koordinaten

$$T(\dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 \quad (3.27)$$

folgen die Bewegungsgleichungen

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}(\dot{\vec{x}}(t)) + \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t), t) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i(t)) + \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t), t). \quad (3.28)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\vec{x}}(t)) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}(t), t) \quad (3.29)$$

oder

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t). \quad (3.30)$$

Also:

- das Hamilton'sche Prinzip (3.25) und die Euler-Lagrange Gleichung (ELG) sind also zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen für konservative Systeme *äquivalent* und
- jedes *konservative* System kann durch die Angabe einer Lagrangefunktion eindeutig bestimmt werden.

### 3.2.1 Beispiele

*Beispiel 3.5.* Zwei Massenpunkte, die über eine harmonische Feder mit Gleichgewichtslänge  $l$  verbunden sind.

- in einer Dimension

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 \quad (3.31a)$$

$$V = \frac{k}{2} (x_1 - x_2 - l)^2 \quad (3.31b)$$

daraus mit  $L = T - V$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2 - l) \quad (3.32a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = k(x_1 - x_2 - l) \quad (3.32b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{d}{dt} m_1 \dot{x}_1 = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.32c)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{d}{dt} m_2 \dot{x}_2 = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.32d)$$

also

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 - l) \quad (3.33a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2 - l) \quad (3.33b)$$

und damit auch *actio = reactio*.

- in drei Dimensionen

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 \quad (3.34a)$$

$$V = \frac{k}{2} (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| - l)^2 \quad (3.34b)$$

mit  $L = T - V$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{1,i}} = -k (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| - l) \frac{x_{1,i} - x_{2,i}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (3.35a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{2,i}} = -k (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| - l) \frac{x_{2,i} - x_{1,i}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (3.35b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{1,i}} = \frac{d}{dt} m_1 \dot{x}_{1,i} = m_1 \ddot{x}_{1,i} \quad (3.35c)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{2,i}} = \frac{d}{dt} m_2 \dot{x}_{2,i} = m_2 \ddot{x}_{2,i} \quad (3.35d)$$

also

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = -k (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| - l) \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (3.36a)$$

$$m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = -k (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| - l) \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (3.36b)$$

### 3.3 Koordinatentransformation

NB: ab jetzt werden die Vektorpfeile für allgemeine Koordinaten  $x \in \mathbf{R}^n$  weggelassen werden. Nur noch dann, wenn betont werden soll, daß es sich um kartesische Koordinaten  $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$  im Anschauungsraum handelt, werden sie wieder auftauchen.

Gegeben sei ein mechanisches System mit einer Lagrangefunktion

$$L : \overbrace{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n}^{TQ} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad (3.37)$$

$$(x, \dot{x}, t) \mapsto L(x, \dot{x}, t).$$

Dann induziert eine, im Allgemeinen nichtlineare und zeitabhängige, Koordinatentransformation

$$\phi : U \times I \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (3.38)$$

$$(q, t) \mapsto x = x(q, t)$$

mit regulärer Jacobi-Matrix

$$\forall q \in U, t \in I : \det J(q, t) \neq 0, \text{ für } J_{ij}(q, t) = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}(q, t) \quad (3.39)$$

eine Lagrangefunktion  $L^\phi = L \circ \phi$  in den neuen Koordinaten

$$L^\phi : \overbrace{U \times \mathbf{R}^n}^{TQ'} \times I \rightarrow \mathbf{R} \quad (3.40)$$

$$(q, \dot{q}, t) \mapsto L^\phi(q, \dot{q}, t) = L(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t).$$

wobei die neuen Geschwindigkeiten durch

$$\dot{x}_i(q, \dot{q}, t) = \frac{dx_i}{dt}(q, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}(q, t) + \frac{\partial x_i}{\partial t}(q, t) \quad (3.41)$$

festgelegt sind. Aus (3.41) ergibt sich die Jacobi-Matrix der Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}(q, t) = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}(q, t) \quad (3.42)$$

als unabhängig von  $\dot{q}$ .

*Beispiel 3.6* (Zeitunabhängige Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten)).

$$\begin{aligned} \phi : Q = [0, \infty[ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[ &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.43a)$$

Jacobi-Matrix

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.43b)$$

mit Determinante

$$\begin{aligned} \det J(r, \phi, \theta) &= \cos \theta (r^2 \cos^2 \phi \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin^2 \phi \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + r \sin \theta (r \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r \sin^2 \phi \sin^2 \theta) \\ &= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \sin^3 \theta = r^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (3.44)$$

also außerhalb der  $x_3$ -Achse nichtsingulär

$$\forall r > 0, 0 < \theta < \pi : \det J(r, \theta, \phi) > 0. \quad (3.45)$$

Außerdem

$$\dot{x}_1 = \dot{r} \cos \phi \sin \theta - r \sin \phi \dot{\phi} \sin \theta + r \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \quad (3.46a)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r} \sin \phi \sin \theta + r \cos \phi \dot{\phi} \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta \dot{\theta} \quad (3.46b)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \quad (3.46c)$$

bzw.

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^3 J_{ij} \dot{q}_j, \quad (3.47)$$

wegen der Zeitunabhängigkeit der betrachteten Koordinatentransformation, also

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 &= \left( \dot{r} \cos \phi \sin \theta - r \sin \phi \dot{\phi} \sin \theta + r \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \right)^2 \\
&\quad + \left( \dot{r} \sin \phi \sin \theta + r \cos \phi \dot{\phi} \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta \dot{\theta} \right)^2 + \left( \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \right)^2 \\
&= \dot{r}^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2r\dot{r} \cos^2 \phi \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \\
&\quad + \dot{r}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2r\dot{r} \sin^2 \phi \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \\
&\quad + \dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 - 2r\dot{r} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \\
&= \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \\
&= \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) \quad (3.48)
\end{aligned}$$

deshalb

$$\begin{aligned}
T^\phi(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) &= T(\dot{\vec{x}}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})) \\
&= \frac{m}{2} \left( \dot{\vec{x}}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \right)^2 = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right) \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Wichtige Konsequenz: *nur* in kartesischen Koordinaten hat die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2, \quad (3.50)$$

in anderen Koordinaten hat sie eine andere Form und ist im Allgemeinen *nicht nur* eine Funktion der Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$ .

Vorlesung 05: Mo, 30. 10. 2023

Also gilt

$$\begin{aligned}
L : TQ \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\
(x, \dot{x}, t) &\mapsto L(x, \dot{x}, t) = T(x, \dot{x}, t) - V(x, \dot{x}, t). \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von  $L^\phi$  können mit der Kettenregel durch die partiellen Ableitungen von  $L$  ausgedrückt werden. Zunächst die Ableitungen nach den Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^\phi}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \quad (3.52)
\end{aligned}$$

deren totale Zeitableitung sich anschließend mit der Produktregel ergibt<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Die Identität

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \quad (3.53)$$



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\phi}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \overbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) \right)}^{\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t)} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t). \quad (3.56a)
\end{aligned}$$

Die Ableitungen nach den Koordinaten ergeben sich ebenfalls aus der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^\phi}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) \frac{\partial L}{\partial x_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \quad (3.56b)
\end{aligned}$$

und wir erhalten daraus die Transformation der **ELG**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\phi}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial L^\phi}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial L}{\partial x_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) \right). \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Weil wir vorausgesetzt hatten, daß die Jacobi-Matrix  $J_{ji} = \partial x_j / \partial q_i$  *nicht* singulär ist, folgt daraus

ist plausibel, aber nicht völlig trivial, weil totale und partielle Ableitungen vertauscht werden. Man kann sie aber leicht aus der Unabhängigkeit von Koordinaten und Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = 0 \quad (3.54)$$

mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) &= \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dx_j}{dt}(q, t) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k}(q, t) + \frac{\partial x_j}{\partial t}(q, t) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k}(q, t) + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t}(q, t) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}(q, t) \quad (3.55)
\end{aligned}$$

aus der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen folgern.

**Theorem 3.7.**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^\phi}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial L^\phi}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) &= 0 \\ \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) - \frac{\partial L}{\partial x_j}(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

d. h. die Abbildung  $\phi$  transformiert Lösungen der zur Lagrangefunktion  $L^\phi$  gehörenden **ELG** in Lösungen der zur Lagrangefunktion  $L$  gehörenden **ELG**.

Dies ist nicht verwunderlich, weil die Wirkung einer Trajektorie in  $TQ$  als Kurvenintegral nicht davon abhängig, in welchem Koordinatensystem die Kurve ausgedrückt wird.

In diesem Sinne ist der Lagrangeformalismus *unabhängig* vom Koordinatensystem und wir dürfen *immer* die Koordinaten wählen, in denen die Lagrangefunktion und damit die **ELG** am einfachsten werden. Diese Koordinaten, werden oft *verallgemeinerte Koordinaten* genannt und mit

$$(q, \dot{q}) = (q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \in TQ \quad (3.59)$$

bezeichnet.

*Beispiel 3.8* (Kugelkoordinaten redux).

$$L(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right) - V(r, \theta, \phi) \quad (3.60)$$

Damit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (3.61a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\theta} \right) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (3.61b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = m \frac{d}{dt} \left( r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \right) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (3.61c)$$

## 3.4 Nebenbedingungen

### 3.4.1 Klassifikation

#### *Holonom*

Zwangsbedingungen heissen *holonom*, wenn sie vollständig durch einen Satz von Gleichungen in den Koordinaten bestimmt werden können

$$\forall k = 1, 2, \dots, m : \chi_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0. \quad (3.62)$$

Solche Zwangsbedingungen können lokal mit dem Satz über implizite Funktionen aufgelöst werden. Wenn alle  $\chi_k$  unabhängig sind, bleiben von den  $n$  Freiheitsgraden  $n - m$  Freiheitsgrade übrig. Diesen Fall werden wir vorwiegend studieren. Wenn wir die Zwangsbedingungen vollständig auflösen können, können wir die verbleibenden Koordinaten direkt in der Lagrange-funktion verwenden.

*Beispiel 3.9* (Massenpunkt auf Kreis mit Radius  $R$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene). In kartesischen Koordinaten

$$\chi_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0 \quad (3.63a)$$

$$\chi_2(\vec{x}) = x_3 = 0 \quad (3.63b)$$

oder äquivalent

$$\chi_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0 \quad (3.64a)$$

$$\chi_2(\vec{x}) = x_3 = 0. \quad (3.64b)$$

In Kugelkoordinaten

$$\chi_1(r, \theta, \phi) = r - R = 0 \quad (3.65a)$$

$$\chi_2(r, \theta, \phi) = \theta - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (3.65b)$$

können wir  $r$  und  $\theta$  eliminieren und nur  $\phi$  bleibt übrig. Mit  $\dot{r} = 0$  und  $\dot{\theta} = 0$  folgen

$$T(\dot{\phi}) = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2 \quad (3.66a)$$

$$V(\phi) = V_{\text{kartesisch}}(R \cos \phi, R \sin \phi, 0) \quad (3.66b)$$

und

$$\begin{aligned} mR^2 \ddot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} &= \frac{\partial V_{\text{kartesisch}}}{\partial x_1}(R \cos \phi, R \sin \phi, 0) R \sin \phi \\ &\quad - \frac{\partial V_{\text{kartesisch}}}{\partial x_2}(R \cos \phi, R \sin \phi, 0) R \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Alternativ kann man  $\vec{x}$  direkt durch einen Winkel  $\phi$  parametrisieren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.68a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \dot{\phi} \\ R \cos \phi \dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.68b)$$

also

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = R^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 + R^2 \cos^2 \phi \dot{\phi}^2 + 0 = R^2 \dot{\phi}^2. \quad (3.69)$$

Als Spezialfall ergibt sich das mathematische Pendel mit Länge  $l$  in der  $x$ - $z$ -Ebene

$$\chi(x, z) = x^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (3.70)$$

bzw. in ebenen Polarkoordinaten

$$\chi(r, \phi) = r - l = 0. \quad (3.71)$$

Wieder bleibt nur  $\phi$  als unabhängige Koordinate übrig und

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2 + \underbrace{mgl \cos \phi}_{-z} \quad (3.72)$$

sowie

$$ml^2 \ddot{\phi} + mgl \sin \phi = 0 \quad (3.73)$$

bzw.

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0. \quad (3.74)$$

*Beispiel 3.10* (Massenpunkt auf schiefer Ebene mit Winkel  $\alpha$ ).

$$\chi(\vec{x}) = x_1 \tan \alpha - x_3 = 0 \quad (3.75)$$

zwei Freiheitsgrade  $q_{1,2}$  bleiben übrig:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_1 \tan \alpha \end{pmatrix} \quad (3.76a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \tan \alpha \end{pmatrix} \quad (3.76b)$$

und

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2} ((1 + \tan^2 \alpha) \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2). \quad (3.77)$$

*Beispiel 3.11* (Hantel, d.h. zwei Massenpunkte, durch starre Stange der Länge  $l$  verbunden).

$$\chi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - l^2 = 0. \quad (3.78)$$

Hier bleiben fünf Freiheitsgrade übrig: drei Translationen des Schwerpunkts  $\vec{X}$  und zwei Rotationswinkel  $\theta, \phi$ :

$$\vec{x}_{1/2} = \vec{X} \pm \frac{l}{2} \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

### Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):

*Beispiel 3.12* (Zylinder). Betrachte einen homogenen Zylinder der Masse  $m$ , Länge  $l$  und Radius  $r$ , der um seine Symmetrieachse rotieren kann. Verallgemeinerte Koordinaten sind

- der Ort  $\vec{X}$  des Mittelpunkts
- der Drehwinkel  $\phi$ .

Geeignete Koordinaten im Zylinder sind  $\rho, \theta, z$

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{\xi} \quad (3.80a)$$

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{X}} + \dot{\vec{\xi}} \quad (3.80b)$$

mit

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\phi + \theta) \\ \rho \sin(\phi + \theta) \\ z \end{pmatrix} \quad (3.81a)$$

$$\dot{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} -\rho \sin(\phi + \theta) \dot{\phi} \\ \rho \cos(\phi + \theta) \dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.81b)$$

also

$$\dot{\vec{x}}^2 = \dot{\vec{X}}^2 + 2\dot{\vec{X}}\dot{\vec{\xi}} + \dot{\vec{\xi}}^2 \quad (3.82)$$

mit

$$\dot{\vec{\xi}}^2 = \rho^2 \dot{\phi}^2. \quad (3.83)$$

Homogene Massenverteilung  $\rho = m/V = m/(lr^2\pi)$

$$\begin{aligned} T &= \int_Z d^3\xi \frac{1}{2} \frac{m}{lr^2\pi} \dot{\vec{x}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m}{lr^2\pi} \dot{\vec{X}}^2 \int_Z d^3\xi + \frac{1}{2} \frac{m}{lr^2\pi} \dot{\vec{X}} \underbrace{\int_Z d^3\xi \dot{\vec{\xi}}}_{=0 \text{ Symmetrie!}} + \frac{1}{2} \frac{m}{lr^2\pi} \int_Z d^3\xi \dot{\vec{\xi}}^2 \\ &= \frac{m}{2} \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{lr^2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \rho d\rho \rho^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{m}{2} \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{lr^2\pi} l 2\pi \frac{r^4}{4} \dot{\phi}^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{X}}^2 + \frac{mr^2}{4} \dot{\phi}^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{X}}^2 + \frac{J}{2} \dot{\phi}^2 \quad (3.84)$$

mit dem *Trägheitsmoment* des Zylinders bzgl. seiner Symmetrieachse

$$J = \frac{1}{2} mr^2. \quad (3.85)$$

Die kinetische Energie läßt sich also in Schwerpunktsbewegung und Rotation

$$T(\dot{\vec{X}}, \dot{\phi}) = T_{\text{Translation}}(\dot{\vec{X}}) + T_{\text{Rotation}}(\dot{\phi}) \quad (3.86)$$

trennen und die potentielle Energie hängt oft (homogene Körper) nur vom Schwerpunkt ab (z. B. homogenes Schwerefeld)

$$L(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, \dot{\phi}) = L_{\text{Translation}}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}) + T_{\text{Rotation}}(\dot{\phi}) \quad (3.87)$$

und die Freiheitsgrade werden nur über Zwangsbedingungen gekoppelt. Dies wird in Kapitel 4.8 „Starrer Körper“ verallgemeinert werden.

### Anholonom

*Anholonome* oder auch *nicht-holonome* Zwangsbedingungen enthalten die Geschwindigkeiten

$$\forall k : \sum_i \chi_{k,i}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \dot{q}_i = \tilde{\chi}_k(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0 \quad (3.88)$$

(zum Beispiel als Abrollbedingungen) und lassen sich nicht immer in der Form (3.62) aufintegrieren, weil Wegabhängigkeiten auftreten. NB: aus (3.62) kann man durch Ableiten immer Bedingungen der Form (3.88) erhalten, aber die Umkehrung gilt nicht.

Beispiele für anholonome Zwangsbedingungen:

- Kugel auf Ebene abrollend
- Rad (Fahreug) auf Ebene abrollend

NB: beim Zylinder ist die Abrollbedingung integrierbar, weil die Richtung festliegt.

### Skleronom

*Skleronome* Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig.

### Rheonom

*Rheonome* Zwangsbedingungen sind zeitabhängig.

### Ungleichungen

Neben Gleichungen können auch Ungleichungen auftreten, in der die Bewegung in einem Bereich eingeschränkt ist, z. B. in einem Würfel in einer Kugel oder Kugelschale. Diesen Fall werden wir nur im Zusammenhang mit elastischen Stößen im Abschnitt ?? behandeln.

### 3.4.2 Zwangskräfte

Die Bewegung *ohne* Zwangsbedingungen erfüllt **ELG**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x, \dot{x}, t) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (3.89)$$

mit der Lagrangefunktion

$$L = T - V, \quad (3.90)$$

die die konservativen *externen* Kräfte beschreibt. Wenn die Bewegung unter Zwangsbedingungen davon abweicht, sind *Zwangskräfte*  $X_i$  am Werk

$$X_i(x, \dot{x}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x, \dot{x}, t) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \dot{x}, t) \quad (3.91)$$

die durch Einsetzen der Lösung *mit* Zwangsbedingungen in die rechte Seite berechnet werden können.

Vorlesung 06: Fr, 03.11.2023

*Beispiel 3.13* (Massenpunkt auf Kreis (vgl. Bsp. 3.9)). Kartesische Koordinaten  $x_1, x_2$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - V(x_1, x_2) \quad (3.92a)$$

$$\chi = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0 \quad (3.92b)$$

und als **ELG** ergeben sich

$$m\ddot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} = X_1 \quad (3.93a)$$

$$m\ddot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} = X_2 \quad (3.93b)$$

wobei das Potential  $V$  eine konservative Kraft

$$F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad (3.94a)$$

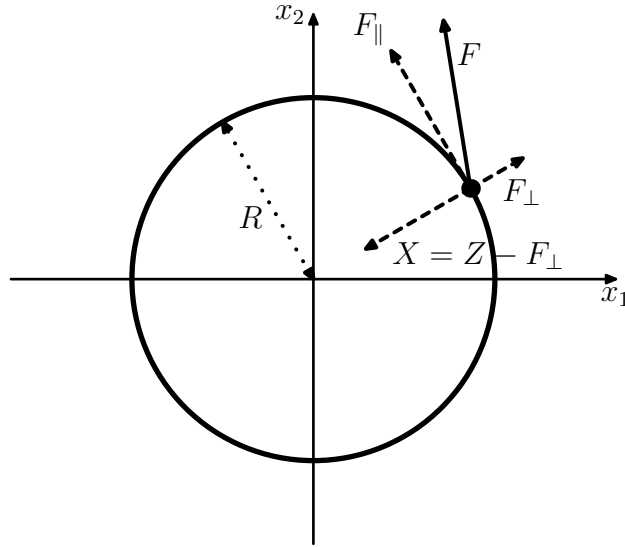


Abbildung 3.2: Massenpunkt auf Kreis.

$$F_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \quad (3.94b)$$

beschreibt. Aus den **ELG** für  $\phi$  (vgl. (3.67))

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{\phi} &= -\frac{d}{d\phi}V(R\cos\phi, R\sin\phi) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(R\cos\phi, R\sin\phi)R\sin\phi - \frac{\partial V}{\partial x_2}(R\cos\phi, R\sin\phi)R\cos\phi \\ &= -F_1(\phi)x_2 + F_2(\phi)x_1 \quad (3.95) \end{aligned}$$

(wobei  $F_i = -\partial V/\partial x_i$ ) finden wir mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad (3.96a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \dot{\phi} \quad (3.96b)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -\cos\phi\dot{\phi}^2 - \sin\phi\ddot{\phi} \\ -\sin\phi\dot{\phi}^2 + \cos\phi\ddot{\phi} \end{pmatrix} \quad (3.96c)$$

und

$$\cos\phi = \frac{x_1}{R} \quad (3.97a)$$



$$\sin \phi = \frac{x_2}{R} \quad (3.97b)$$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{R^2} \quad (3.97c)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{x_1 F_2 - x_2 F_1}{m R^2} \quad (3.97d)$$

zunächst

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{R^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{m R^2} \begin{pmatrix} x_2(x_2 F_1 - x_1 F_2) \\ x_1(x_1 F_2 - x_2 F_1) \end{pmatrix}. \quad (3.98)$$

Und mit  $x_1^2 + x_2^2 = R^2$

$$\frac{x_2^2 F_1 - x_1 x_2 F_2}{m R^2} = \frac{F_1}{m} - \frac{x_1^2 F_1 + x_1 x_2 F_2}{m R^2} = \frac{F_1}{m} - \frac{x_1}{m R^2} (x_1 F_1 + x_2 F_2) \quad (3.99a)$$

$$\frac{x_1^2 F_2 - x_2 x_1 F_1}{m R^2} = \frac{F_2}{m} - \frac{x_2^2 F_2 + x_2 x_1 F_1}{m R^2} = \frac{F_2}{m} - \frac{x_2}{m R^2} (x_1 F_1 + x_2 F_2) \quad (3.99b)$$

ergeben sich schließlich die Zwangskräfte

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \underbrace{-m \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{R^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_Z - \underbrace{\frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{R^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{F_\perp}, \quad (3.100)$$

womit  $X$  als die Differenz von *Zentripetalkraft*  $Z$  und radialem Anteil  $F_\perp$  der konservativen Kraft  $F = -\nabla V$  entlarvt wurde (vgl. Abb. 3.2).

### 3.5 Variation mit Zwangsbedingungen

Wenn wir keine Koordinaten benutzen, in denen die Zwangsbedingungen trivial sind, z. B. weil sie nicht global definierbar sind oder weil die Zwangsbedingungen anholonom sind, können die korrekten Bewegungsgleichungen mit einer Erweiterung des Lagrangeformalismus ermittelt werden.

Im folgenden werden wir nur holonome Zwangsbedingungen betrachten<sup>2</sup>, also  $\chi_k(q, t) = 0$ , weil die Diskussion von anholonomen Zwangsbedingungen voller Fallstricke ist (siehe z. B. [9, 10, 11]).

<sup>2</sup>Herzlichen Dank an Jun Wei Tan, der mich darauf hingewiesen hat, daß im Skript in Abschnitt 3.5.1  $\chi_k(q, \dot{q}, t)$  stand, wo nur  $\chi_k(q, t)$  stehen darf!

### 3.5.1 Lagrangemultiplikatoren

Addiere eine Linearkombination der holonomen Zwangsbedingungen  $\chi_k(q, t)$  zur Lagrangefunktion und behandle die Koeffizienten  $\lambda_k \in \mathbf{R}$  wie neue Freiheitsgrade:

$$L_\chi(q, \dot{q}, t; \lambda) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_k \lambda_k \chi_k(q, t). \quad (3.101)$$

Daraus folgen, weil die  $\dot{\lambda}_k$  nirgendwo vorkommen, die **ELG**

$$\frac{\partial L_\chi}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t; \lambda) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_\chi}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t; \lambda) = 0 \quad (3.102a)$$

$$\frac{\partial L_\chi}{\partial \lambda_k}(q, \dot{q}, t; \lambda) = \chi_k(q, \dot{q}, t) = 0. \quad (3.102b)$$

### 3.5.2 Zwangskräfte

Für holonome Zwangsbedingungen, also  $\chi_k(q, t) = 0$  können die **ELG** (3.102) mit

$$\frac{\partial L_\chi}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t; \lambda) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \quad (3.103a)$$

$$\frac{\partial L_\chi}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t; \lambda) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \chi_k}{\partial q_i}(q, t) \quad (3.103b)$$

auch wie in (3.91) als

$$X_i(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) = \sum_k \lambda_k \frac{\partial \chi_k}{\partial q_i}(q, t) \quad (3.104a)$$

$$\chi_k(q, t) = 0 \quad (3.104b)$$

geschrieben werden, wobei in (3.104a) links die Definition der *Zwangskräfte*  $X_i$  über die **ELG** mit den konservativen Kräften steht und rechts ein Ausdruck, der nur von Lagrangemultiplikatoren und Nebenbedingungen abhängt. Dieser kann implizit (durch Nachdifferenzieren) von  $\dot{q}$  abhängen, nachdem die  $\lambda_k$  mit Hilfe von

$$\forall j \in \mathbf{N} : \frac{d^j \chi_k}{dt^j}(q, t) = 0 \quad (3.105)$$

eliminiert werden, weil  $\chi_k(q, t) = 0$  für *alle* Zeiten gelten muß.

Für skleronome Zwangsbedingungen folgt aus

$$\frac{d\chi_k}{dt}(q) = 0 \quad (3.106)$$

daß die von den Zwangskräften geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{q}_i(t) X_i(q, \dot{q}, t) &= \sum_i \dot{q}_i(t) \sum_k \lambda_k \frac{\partial \chi_k}{\partial q_i}(q) \\ &= \sum_{k,i} \lambda_k \frac{dq_i}{dt}(t) \frac{\partial \chi_k}{\partial q_i}(q) = \sum_k \lambda_k \frac{d\chi_k}{dt}(q) = 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

verschwindet.

*Beispiel 3.14* (Massenpunkt auf Kreis redux (vgl. Bsp. 3.9)). Kartesische Koordinaten  $x_1, x_2$ :

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - V(x_1, x_2) \quad (3.108a)$$

$$\chi = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 - R^2) \quad (3.108b)$$

(der Faktor  $1/2$  ist eine für die Zwischenschritte geschickte Normierung und kommt im Endergebnis nicht mehr vor). Als **ELG** ergeben sich aus

$$L_\chi = L + \lambda \chi = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - V(x_1, x_2) + \frac{\lambda}{2} (x_1^2 + x_2^2 - R^2) \quad (3.109)$$

die drei Gleichungen

$$m\ddot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} = \lambda x_1 = X_1 \quad (3.110a)$$

$$m\ddot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} = \lambda x_2 = X_2 \quad (3.110b)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \quad (3.110c)$$

wobei aus dem Potential  $V$  eine konservative Kraft

$$F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad (3.111a)$$

$$F_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \quad (3.111b)$$

folgt. Weil die Nebenbedingung für alle Zeiten gelten muß, kann man mit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{dt^2} \chi = \frac{d}{dt} (x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2) = x_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_1^2 + x_2 \ddot{x}_2 + \dot{x}_2^2 \\ &\stackrel{(3.110a), (3.110b)}{=} \frac{\lambda}{m} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{m} (x_1 F_1 + x_2 F_2) + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(3.110c)}{=} \frac{\lambda R^2}{m} + \frac{1}{m} (x_1 F_1 + x_2 F_2) + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \quad (3.112)$$

den Lagrangemultiplikator  $\lambda$  ermitteln, also

$$\lambda = -\frac{m}{R^2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{R^2} (x_1 F_1 + x_2 F_2) \quad (3.113)$$

und in den **ELG**

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} - F = -\frac{m}{R^2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{R^2} (x_1 F_1 + x_2 F_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X \quad (3.114a)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \quad (3.114b)$$

ebenso wie (3.100).

### 3.6 Zyklische Koordinaten

**Definition 3.15** (Zyklische Koordinaten). Falls die Lagrangefunktion  $L$  von einer Koordinate  $q_i$  *nicht* abhängt

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) = 0, \quad (3.115)$$

dann heißt  $q_i$  *zyklisch*.

Diese haben eine besondere Bedeutung, weil dann die **ELG**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) = 0, \quad (3.116)$$

zu einem Erhaltungssatz führt. Der *konjugierte Impuls*  $p_i$  ist erhalten

$$p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) = \text{const.} \quad (3.117)$$

Im Kapitel 5 „Hamilton’sche Formulierung“ werden wir sogar überall  $\dot{q}$  durch  $p$  ersetzen, um zyklische Koordinaten optimal zu nutzen.

### 3.6.1 Beispiele

*Beispiel 3.16* (Freies Teilchen). Die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \quad (3.118)$$

hängt nicht von  $\vec{x}$  ab, deshalb sind die Impulse

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i \quad (3.119)$$

erhalten:

$$\vec{p} = m \dot{\vec{x}} = \text{const.} \quad (3.120)$$

*Beispiel 3.17* (Teilchen in der Ebene). Die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - V \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \quad (3.121)$$

lässt sich in Polarkoordinaten einfacher schreiben

$$L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\phi}^2 - V(r) \quad (3.122)$$

Offensichtlich

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (3.123)$$

und damit

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} = \text{const.} \quad (3.124)$$

$p_\phi$  ist natürlich nichts anderes als der *Drehimpuls*, bzw. dessen aus der Ebene herauszeigende Komponente

$$p_\phi = \left[ \vec{x} \times m \dot{\vec{x}} \right]_3 \quad (3.125)$$

In der **ELG** für  $r$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m \ddot{r} - m \dot{\phi}^2 r + \frac{dV}{dr}(r) = 0 \quad (3.126)$$

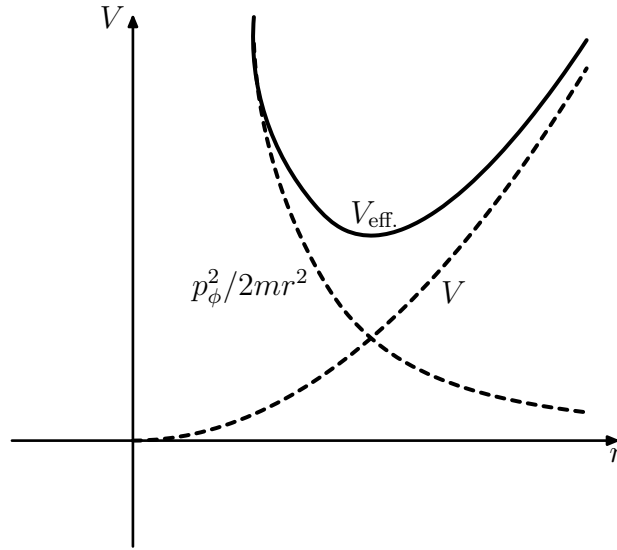
kann  $\dot{\phi}$  durch  $p_\phi$  und  $r$  ausgedrückt werden<sup>3</sup>

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m r^2} \quad (3.127)$$

---

<sup>3</sup>Es wäre übrigens *nicht* korrekt,  $p_\phi$  bereits in (3.122) zu ersetzen

$$„L“ = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\phi^2}{2 m r^2} - V(r)$$

Abbildung 3.3: *Effektives Potential*.

und man erhält zu jedem vorgegebenen  $p_\phi$  ein eindimensionales Problem

$$m\ddot{r} - \frac{p_\phi^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr}(r) = 0. \quad (3.128)$$

Für das *effektive Potential*

$$V_{\text{eff.}, p_\phi}(r) = V(r) + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \quad (3.129)$$

(vgl. Abb. 3.3) findet man

$$\frac{dV_{\text{eff.}, p_\phi}}{dr}(r) = \frac{dV}{dr}(r) - \frac{p_\phi^2}{mr^3}, \quad (3.130)$$

---

weil man damit zu jedem vorgegebenen  $p_\phi$  ein eindimensionales Problem mit dem *falschen* effektiven Potential

$$„V_{\text{eff.}, p_\phi}“ = V(r) - \frac{p_\phi^2}{2mr^2}.$$

erhielte. Der Grund hierfür ist, daß der Lagrangeformalismus darauf beruht, daß die Wege *frei* variiert werden können solange alle Nebenbedingungen erfüllt sind. Man sieht auch sofort, daß das Vorzeichen des Zentrifugalterms falsch ist, was daran liegt, daß in  $L = T - V$  ein Term aus der kinetischen Energie  $T$  als Teil des Potentials  $V$  uminterpretiert würde. Im Hamiltonformalismus (Kapitel 5) funktioniert das entsprechende Argument und ist korrekt!

also

$$m\ddot{r} + \frac{dV_{\text{eff},p_\phi}}{dr}(r) = 0, \quad (3.131)$$

was mittels Energieerhaltung

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff},p_\phi}(r) = \text{const.} \quad (3.132)$$

integriert werden kann. Die Bahnen sind durch  $r_0$ ,  $\phi_0$ ,  $p_\phi = mr_0^2\dot{\phi}_0$  und  $E$  im vierdimensionalen Phasenraum eindeutig bestimmt.

Diese Beispiele motivieren eine systematische Suche nach zyklischen Koordinaten, sowohl Existenzfragen

- existieren genügend zyklische Koordinaten, um das System vollständig zu integrieren?

als auch Konstruktionsfragen

- kann man die zyklischen Koordinaten explizit hinschreiben?

Es wird sich herausstellen, daß es kein Zufall ist, daß die Erhaltungsgröße  $p_\phi$  im Beispiel mit einer *Symmetrie* in Verbindung steht: der Unabhängigkeit der Lagrangefunktion vom Winkel  $\phi$ .

### 3.7 Mechanische Eichtransformationen

Vorlesung 07: Mo, 06. 11. 2023

Zunächst jedoch eine Komplikation: Lagrangefunktionen sind *nicht* eindeutig: verschiedene Lagrangefunktionen können zu den gleichen **ELG** führen.

Gegeben sei eine Lagrangefunktion  $L : TQ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , dann definiert eine, evtl. zeitabhängige, reellwertige Funktion der Koordinaten  $\Phi : Q \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  eine transformierte Lagrangefunktion  $L_\Phi : TQ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} L_\Phi(q, \dot{q}, t) &= L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\Phi(q, t) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(q, t). \end{aligned} \quad (3.133)$$

Diese Transformation nennt man *mechanische Eichtransformation*  $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : (Q \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}) \times (TQ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}) &\rightarrow (TQ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}) \\ (\Phi, L) &\mapsto L_\Phi. \end{aligned} \quad (3.134)$$

NB:  $\Phi$  darf explizit nur von  $q$  und  $t$  abhängen, nicht von  $\dot{q}$ , weil sonst  $L_\Phi$  von  $\ddot{q}$  abhinge und keine Funktion auf  $TQ \times \mathbf{R}$  wäre.

Jede Bahnkurve  $\gamma_0 : [t_0, t_1] \rightarrow Q$  im Konfigurationsraum definiert eine Bahnkurve

$$\begin{aligned} \gamma : [t_0, t_1] &\rightarrow TQ \\ t &\mapsto (q(t), \dot{q}(t)) = \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) \end{aligned} \quad (3.135a)$$

im Geschwindigkeits-Phasenraum. Dafür gilt

$$\begin{aligned} S_\Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} dt L_\Phi(q(t), \dot{q}(t), t) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) + \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \Phi(q(t), t) \\ &= S(\gamma) + \Phi(q(t_1), t_1) - \Phi(q(t_0), t_0). \end{aligned} \quad (3.135b)$$

Hieraus folgt für Variationen, die die Endpunkte  $q(t_0)$  und  $q(t_1)$  festhalten

$$\delta S_\Phi = \delta S, \quad (3.136)$$

und damit das

**Theorem 3.18.** Die *ELG*, die aus  $L_\Phi$  folgen sind identisch zu den *ELG*, die aus  $L$  folgen.

NB: Wenn  $\Phi$  nicht-trivial von  $\dot{q}$  abhinge, würden die Randterme

$$\Phi(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) - \Phi(q(t_0), \dot{q}(t_0), t_0)$$

zu den Variationen und damit zu den *ELG* beitragen.

### 3.7.1 Alternative Herleitung

Aus

$$\frac{d\Phi}{dt}(q, t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(q, t) \quad (3.137)$$

folgt durch Ableiten

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\Phi}{dt}(q, t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial q_j}(q, t) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial q_i}(q, t) \quad (3.138a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Phi}{dt}(q, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q, t) \quad (3.138b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Phi}{dt}(q, t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial q_j}(q, t) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial q_i}(q, t) = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\Phi}{dt}(q, t) \quad (3.138c)$$



also

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\Phi}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (3.139)$$

und die Addition von  $\frac{d\Phi}{dt}(q, t)$  trägt nicht zu den **ELG** bei. Dafür muß *nicht* von den **ELG** Gebrauch gemacht werden.

*Beispiel 3.19* (Harmonischer Oszillator).

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (3.140)$$

Mit

$$\Phi = \frac{m\omega}{2} x^2 \quad (3.141)$$

folgt

$$\frac{d\Phi}{dt} = m\omega x \dot{x} \quad (3.142)$$

und

$$L_\Phi = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 + m\omega x \dot{x} = \frac{m}{2} (\dot{x} + \omega x)^2 - m\omega^2 x^2. \quad (3.143)$$

Kontrolle:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_\Phi}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_\Phi}{\partial x} \\ = m(\ddot{x} + \omega \dot{x}) - m(\dot{x} + \omega x)\omega + 2m\omega^2 x = m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0. \end{aligned} \quad (3.144)$$

## 3.8 Noether'sches Theorem

### 3.8.1 Symmetrien

In der Mathematik und Physik wird ein viel allgemeinerer Begriff der *Symmetrie* verwendet als der umgangssprachliche, der oft auf Spiegelungen um eine Achse in der Ebene reduziert ist.

Symmetrien in der Physik sind Transformationen von Objekten und Mengen von Objekten, insbesondere Transformationen des Konfigurationsraums  $Q$  und des Geschwindigkeits-Phasenraums  $TQ$ . Prominente Beispiele sind Translationen, Rotationen und Permutationen. Von besonderem Interesse werden solche Transformationen sein, die Strukturen und Objekte invariant lassen. Wenn sich z. B. die Lagrangefunktion eines Systems unter einer Transformation nicht ändert<sup>4</sup>, sagen wir, daß das System die entsprechende Symmetrie habe.

---

<sup>4</sup>Oder nur eine totale Zeitableitung hinzukommt.

Die mathematische Struktur zur Beschreibung von Symmetrien in der Physik bieten *Gruppen* (vgl. Definition 3.20), insbesondere *Lie-Gruppen* (vgl. Definition 3.21) und ihre assoziierte *Lie-Algebren* (vgl. Definition 3.22).

### Gruppen

Eine weitreichenden Eigenschaft von Symmetrien ist, daß man sie verknüpfen und invertieren kann:

- eine Rotation um eine Achse um den Winkel  $\alpha$  gefolgt um eine Rotation um die gleiche Achse um den Winkel  $\beta$  entspricht eine Rotation um die gleiche Achse um den Winkel  $\alpha + \beta$ ,
- eine Verschiebung um den Vektor  $\vec{x}$  gefolgt von einer Verschiebung um den Vektor  $\vec{y}$  entspricht einer Verschiebung um den Vektor  $\vec{x} + \vec{y}$ ,
- die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen an der gleichen Ebene ergibt die Identität, die sicher eine Symmetrie ist.

Dies motiviert die folgende

**Definition 3.20** (Gruppe). Eine Gruppe  $(G, \circ)$  ist ein Paar aus einer Menge  $G$  und einer inneren Verknüpfung  $\circ$

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x \circ y \end{aligned} \tag{3.145}$$

die den folgenden Axiomen genügt

1. Abgeschlossenheit:  $\forall x, y \in G : x \circ y \in G$ ,
2. Assoziativität:  $\forall x, y, z \in G : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ ,
3. Existenz einer eindeutigen Einheit:  $\exists_1 e \in G : \forall x \in G : e \circ x = x \circ e = x$ ,
4. Existenz von eindeutigen Inversen:  $\forall x \in G : \exists_1 x^{-1} \in G : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ .

Beispiele aus der Mathematik:

- $(\mathbf{Z}, +)$ ,  $(\mathbf{R}, +)$ ,  $(\mathbf{C}, +)$ ,
- $(\mathbf{R}_+, \times)$ ,

NB:  $(\mathbf{Z}_+, \times)$  ist keine Gruppe, weil nur 1 ein Inverses hat und  $(\mathbf{R}, \times)$ , sowie  $(\mathbf{C}, \times)$  sind *keine* Gruppen, weil die jeweiligen 0 kein Inverses haben,

- $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ ,  $\text{SL}(n, \mathbf{C})$ , d. h. reelle und komplexe  $n \times n$  Matrixen mit Determinante +1 unter Matrixmultiplikation.

Die Symmetrien eines physikalischen Systems werden mathematisch durch eine Gruppe beschrieben, wobei die Symmetrietransformationen die Elemente der Gruppe sind und die Verknüpfung der Hintereinanderausführung dieser Transformationen entspricht.

Beispiele aus der Physik. Betrachte zwei Massenpunkte (Teilchen) mit gleicher Masse (gleichen Eigenschaften), die über ein Potential wechselwirken, das nur vom Abstand der beiden abhängt:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\vec{x}}_1^2 + \dot{\vec{x}}_2^2) - V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|). \quad (3.146)$$

Wie finden u. a. folgende Symmetrien

- Permutationen:  $L$  ändert sich nicht unter dem Austausch  $1 \leftrightarrow 2$ , bzw.

$$(\vec{x}_1, \dot{\vec{x}}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_2) \mapsto (\vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_2, \vec{x}_1, \dot{\vec{x}}_1) : L \mapsto L, \quad (3.147)$$

- Translationen:  $L$  ändert sich nicht unter

$$\forall i = 1, 2 : (\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i) \mapsto (\vec{x}_i + \vec{a}, \dot{\vec{x}}_i) : L \mapsto L, \quad (3.148)$$

- Rotationen:  $L$  ändert sich nicht unter

$$\forall i = 1, 2 : (\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i) \mapsto (R \vec{x}_i, R \dot{\vec{x}}_i) : L \mapsto L \quad (3.149)$$

wenn  $R$  eine orthogonale  $3 \times 3$ -Matrix ist:

$$R^T R = R R^T = \mathbf{1}_{3 \times 3}. \quad (3.150)$$

Diese Symmetrien müssen die *Mengen aller Lösungen* der **ELG** respektieren, allerdings werden sie für *einzelne Lösungen* durch die Wahl der Anfangsbedingungen gebrochen.

### Lie-Gruppen

Symmetrien, die von kontinuierlichen Parametern abhängen, sind für uns besonders wichtig und motivieren die

**Definition 3.21** (Lie-Gruppe). Eine Lie-Gruppe  $(G, \circ)$  ist eine Gruppe (Definition 3.20) deren Elemente eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bilden<sup>5</sup> und für die die innere Verknüpfung  $\circ$  in beiden Argumenten beliebig oft stetig differenzierbar ist.

<sup>5</sup>d. h. jede offene Teilmenge kann durch Koordinaten aus  $\mathbf{R}^n$  für festes  $n$  parametrisiert werden. Z. B.  $\mathbf{R}^n$ , Kreis, glatte Kurve, Kugeloberfläche, Torus, etc.

Wichtigste Beispiele aus der Physik

- Translationen:  $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$ ,
- $SO(3)$ , Rotationen:  $\vec{x} \mapsto R(\vec{\theta}) \vec{x}$ ,
- Wechsel des Inertialsystems (spezielle Galilei-Transformationen, Kapitel 3.8.5)  $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{v}t$ ,
- Lorentz-Transformationen (Kapitel 7).

NB: nicht alle Systeme weisen diese Symmetrien auf. Wenn ein System eine oder mehrere dieser Symmetrien aufweist, hat dies nicht-triviale Konsequenzen, z. B. Erhaltungssätze.

### *Lie-Algebren*

„Kleine“ Transformationen in der Nähe der Identität einer Lie-Gruppe können durch *infinitesimale Erzeugende* beschrieben werden, die die Struktur einer *Lie-Algebra* tragen.

**Definition 3.22** (Lie-Algebra). Eine Lie-Algebra  $(A, [\cdot, \cdot])$  ist ein Vektorraum  $A$  über einem Körper  $K$  mit einer nicht-assoziativen, antisymmetrischen und bilinearen inneren Verknüpfung  $[\cdot, \cdot]$

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto [a, b] \end{aligned} \tag{3.151}$$

die den folgenden Axiomen genügt:

1. Abgeschlossenheit:  $\forall a, b \in A : [a, b] \in A$ ,
2. Antisymmetrie:  $\forall a, b \in A : [a, b] = -[b, a]$
3. Bilinearität:  $\forall \alpha, \beta \in K : \forall a, b, c \in A : [\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c]$
4. Jacobi-Identität:  $\forall a, b, c \in A : [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

Für unsere Anwendungen werden wir nur reelle Lie-Algebren verwenden, d. h.  $K = \mathbf{R}$ . Später in der Quantenmechanik wird  $K = \mathbf{C}$  wichtig werden.

### 3.8.2 Rotationen

#### Drehmatrizen

Drehungen sind lineare Transformationen, die längenerhaltend sind, d. h.

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R\vec{x} \quad (3.152)$$

mit

$$\vec{x}^2 = \vec{x}'^2. \quad (3.153)$$

Im Anschauungsraum  $\mathbf{R}^3$

$$x_i \mapsto x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \quad (3.154)$$

und aus

$$\forall \vec{x}, \vec{y} : \vec{x}' \cdot \vec{y}' = \frac{1}{2} \left( (\vec{x}' + \vec{y}')^2 - \vec{x}'^2 - \vec{y}'^2 \right) = \frac{1}{2} ((\vec{x} + \vec{y})^2 - \vec{x}^2 - \vec{y}^2) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (3.155)$$

folgt für beliebige  $x_j$  und  $y_k$

$$\sum_{j,k=1}^3 \delta_{jk} x_j y_k = \sum_{i=1}^3 x_i y_i = \vec{x} \cdot \vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{x}' \cdot \vec{y}' = \sum_{i=1}^3 x'_i y'_i = \sum_{i,j,k=1}^3 R_{ij} R_{ik} x_j y_k \quad (3.156)$$

also nach Koeffizientenvergleich

$$\sum_{i=1}^3 R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk} \quad (3.157)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$R^T R = \mathbf{1} \quad (3.158)$$

und wir finden, daß die  $R$  *orthogonale* Matrizen sind, die die Gruppe  $O(3)$  bilden. Deshalb

$$\det R = \pm 1 \quad (3.159)$$

und nur die Matrizen mit  $\det R = +1$  sind Rotationen, die die Orientierung erhalten. Sie bilden die Gruppe der speziellen orthogonalen Matrizen  $SO(3)$ . Die Matrizen mit  $\det R = -1$  können als Hintereinanderausführung einer orientierungserhaltenden Rotation und einer Spiegelung  $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$  aufgefasst werden, bilden aber *keine* Gruppe.

Im folgenden schreiben wir zunächst alle Gleichungen für orthogonale  $N \times N$ -Matrizen aus  $O(N)$  und spezialisieren uns erst am Ende auf  $N = 3$ .

Von den  $N^2 = 9$  Gleichungen (3.158) für die  $N^2 = 9$  reellen Matrixelemente von  $R$ , sind nur  $N(N+1)/2 = 6$  unabhängig, weil  $R^T R$  symmetrisch ist:

$$(R^T R)^T = R^T (R^T)^T = R^T R. \quad (3.160)$$

Also gibt es  $N^2 - N(N+1)/2 = N(N-1)/2 = 3$  *unabhängige reelle* Parameter.

Erzeugende

Vorlesung 08: Fr, 10. 11. 2023

Alternativ kann man auch

$$R = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \mathbf{1} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots \quad (3.161)$$

schreiben, dann gilt wegen  $(A^n)^T = (A^T)^n$

$$R^T = (e^A)^T = e^{(A^T)} \quad (3.162)$$

und die Bedingungsgleichung

$$R^T R = e^{(A^T)} e^A = \mathbf{1} \quad (3.163)$$

wird von

$$A^T = -A \quad (3.164)$$

gelöst, weil

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} : e^{\alpha A} e^{\beta A} = e^{(\alpha+\beta)A}. \quad (3.165)$$

obwohl im Allgemeinen  $e^A e^B \neq e^{A+B}$  gilt. Und es gibt wieder  $N(N-1)/2 = 3$  *unabhängige reelle* Parameter in antisymmetrischen Matrizen. Weil die Bedingungsgleichungen (3.164) für die Antisymmetrie *linear* sind, im Gegensatz zu (3.158) für die Orthogonalität, sind sie viel leichter zu lösen.

Als Beispiele die drei Drehungen um die Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = e^{\theta \tau_1} = \mathbf{1} + \theta \tau_1 + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.166a)$$

$$\vec{e}_2 : \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = e^{\theta \tau_2} = \mathbf{1} + \theta \tau_2 + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.166b)$$

$$\vec{e}_3 : \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\theta \tau_3} = \mathbf{1} + \theta \tau_3 + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.166c)$$

mit

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.167a)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.167b)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.167c)$$

Später werden wir noch benötigen, daß die Anwendung der Matrizen  $\tau_i$  auf die Einheitsvektoren<sup>6</sup>  $\vec{e}_i$

$$\tau_i \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad (3.168)$$

ergibt, wobei  $\epsilon$  der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe ist (Levi-Civita Symbol), d. h.

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321} \quad (3.169)$$

und alle anderen Komponenten verschwinden. Aus (3.168) folgt

$$(\vec{\theta} \vec{\tau}) \vec{x} = \sum_{i,j=1}^3 \theta_i x_j \tau_i \vec{e}_j = \sum_{i,j,k=1}^3 \theta_i x_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k = \sum_{k=1}^3 \left[ \vec{\theta} \times \vec{x} \right]_k \vec{e}_k = \vec{\theta} \times \vec{x} \quad (3.170)$$

durch direkte Rechnung.

In der Tat sind die  $\tau_i$  antisymmetrisch

$$\forall i : \tau_i = -\tau_i^T \quad (3.171)$$

und jede antisymmetrische Matrix kann

$$A = \sum_{i=1}^3 \theta_i \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.172)$$

geschrieben werden.

---

<sup>6</sup> $\vec{e}_i$  ist der Einheitsvektor in  $i$ -Richtung, nicht die  $i$ te Komponente!

Die  $\tau_i$  schließen *nicht* unter Matrixmultiplikation

$$\tau_1 \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.173a)$$

$$\tau_2 \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.173b)$$

aber mit dem *Kommutator*

$$[A, B] = AB - BA \quad (3.174)$$

bilden sie eine Lie-Algebra

$$[\tau_1, \tau_2] = \tau_3 \quad (3.175)$$

wie man leicht auch für die anderen Generatoren überprüfen kann:

$$[\tau_i, \tau_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \tau_k. \quad (3.176)$$

Alternativ kann man

$$[\vec{\theta}_1 \vec{\tau}, \vec{\theta}_2 \vec{\tau}] = (\vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2) \vec{\tau} \quad (3.177)$$

schreiben.

*Bemerkung 3.23.* Der Kommutator zweier antisymmetrischer Matrizen ist antisymmetrisch

$$\begin{aligned} [A, A']^T &= (AA')^T - (A'A)^T = (A')^T A^T - A^T (A')^T \\ &= A'A - AA' = -[A, A'], \end{aligned} \quad (3.178)$$

also *muß* die Lie-Algebra der antisymmetrischen Matrizen abschließen.

### 3.8.3 Erhaltungssätze

Sei  $\phi$  eine differenzierbare einparametrische Familie von möglicherweise zeit- und geschwindigkeitsabhängigen Koordinatentransformationen

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{R} \times TQ \times \mathbf{R} &\rightarrow Q \\ (s, q, \dot{q}, t) &\mapsto \phi_s(q, \dot{q}, t) = q + s \delta_\phi q(q, \dot{q}, t) + \mathcal{O}(s^2), \end{aligned} \quad (3.179)$$

wobei die infinitesimale Transformation  $\delta_\phi q$ , bzw. die Erzeugende der Familie  $\phi$ , über

$$\delta_\phi q(q, \dot{q}, t) = \left. \frac{d}{ds} \phi_s(q, \dot{q}, t) \right|_{s=0} \quad (3.180)$$



definiert ist. Diese induziert, ebenso wie in Abschnitt 3.3, eine einparametrische Familie von Transformationen von beliebigen Funktionen

$$\begin{aligned} f : TQ \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\mapsto f(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \quad (3.181)$$

auf dem Geschwindigkeits-Phasenraum  $TQ \cong Q \times \mathbf{R}^n$  in Funktionen

$$\begin{aligned} f' : T^2Q \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, \dot{q}, \ddot{q}, t) &\mapsto f'(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \end{aligned} \quad (3.182)$$

auf dem Raum  $T^2Q \cong Q \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  der Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen mittels

$$\begin{aligned} f^\phi : \mathbf{R} \times T^2Q \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (s, q, \dot{q}, \ddot{q}, t) &\mapsto f^{\phi_s}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = f(\phi_s(q, \dot{q}, t), \dot{\phi}_s(q, \dot{q}, \ddot{q}, t), t) \\ &= f(q, \dot{q}, t) + s\delta_\phi f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + \mathcal{O}(s^2), \end{aligned} \quad (3.183)$$

wobei in

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_s(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) &= \frac{d\phi_s}{dt}(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \phi_s}{\partial q_j}(q, \dot{q}, t) + \sum_j \ddot{q}_j \frac{\partial \phi_s}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial \phi_s}{\partial t}(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \quad (3.184)$$

die Abhängigkeit von den Beschleunigungen  $\ddot{q}_j$  nur bei geschwindigkeits-abhängigen Transformationen entsteht und ansonsten ignoriert werden kann. Die infinitesimale Transformation der Funktion  $f$  ist somit

$$\begin{aligned} \delta_\phi f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) &= \left. \frac{d}{ds} f^{\phi_s}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \right|_{s=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \left. \frac{d}{ds} \phi_{s,i}(q, \dot{q}, t) \right|_{s=0} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \left. \frac{d}{ds} \dot{\phi}_{s,i}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \right|_{s=0}, \end{aligned} \quad (3.185)$$

wobei es keinen Beitrag von  $\partial f / \partial t$  gibt, weil  $t$  nicht transformiert wird. Wenn wir als Spezialfall für die Funktion  $f$  die  $i$ -te Komponente der Geschwindigkeit  $f : (q, \dot{q}, t) \mapsto \dot{q}_i$  wählen, finden wir

$$\delta_\phi \dot{q}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \left. \frac{d}{ds} \dot{\phi}_{s,i}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \right|_{s=0} \quad (3.186)$$

(vgl. (3.180)). Wir können also auch

$$\delta_\phi f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \delta_\phi \dot{q}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t), \quad (3.187)$$

schreiben.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) &= \left. \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \phi_{s,i}(q, \dot{q}, t) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \phi_{s,i}(q, \dot{q}, t) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \dot{\phi}_{s,i}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \right|_{s=0} = \delta_\phi \dot{q}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t), \end{aligned} \quad (3.188)$$

weil  $s$  und  $t$  *unabhängig* voneinander variieren. Nun haben wir alle Bausteine für das

**Theorem 3.24** (Emmy Noether, 1915). *Wenn sich eine Lagrangefunktion  $L$  unter einer Erzeugenden  $\delta_\phi$  einer Familie  $\phi$  von möglicherweise zeit- und geschwindigkeitsabhängigen Koordinatentransformation in eine totale Zeitableitung transformiert*

$$\delta_\phi L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \frac{d}{dt} \Lambda_\phi(q, \dot{q}, t) \quad (3.189)$$

dann ist das Integral

$$\begin{aligned} I_\phi(q, \dot{q}, t) &= \sum_i p_i(q, \dot{q}, t) \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) - \Lambda_\phi(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) - \Lambda_\phi(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \quad (3.190)$$

entlang der Lösungen der *ELG* erhalten

$$\frac{d}{dt} I_\phi(q(t), \dot{q}(t), t) = 0. \quad (3.191)$$

NB: im Gegensatz zu den Eichtransformationen (3.133) in Abschnitt 3.7 darf  $\Lambda_\phi$  von  $\dot{q}$  abhängen!

NB: für die rechte Seite von (3.189) ist es wichtig, daß es sich um die totale Zeitableitung einer auf dem Phasenraum wohldefinierten Funktion

$$\Lambda_\phi : TQ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad (3.192)$$

handelt

$$\frac{d\Lambda_\phi}{dt} = \sum_i \frac{\partial \Lambda_\phi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \Lambda_\phi}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \Lambda_\phi}{\partial t}. \quad (3.193)$$

Der Versuch, einfach die linke Seite von (3.189) entlang einer beliebigen Lösung der ELG aufzuintegrieren

$$\tilde{\Lambda}_\phi(t) = \int^t dt' \delta_\phi L(q(t'), \dot{q}(t'), \ddot{q}(t'), t')$$

definiert eben *nicht* eine solche Funktion, sondern hängt von der gewählten Lösung ab.

*Beweis durch Nachrechnen.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i(q, \dot{q}, t) \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) \right) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) \right) \\ &= \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \right) \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) \\ &\stackrel{ELG}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \delta_\phi q_i(q, \dot{q}, t) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \delta_\phi \dot{q}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \\ &\stackrel{(3.187)}{=} \delta_\phi L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \stackrel{(3.189)}{=} \frac{d\Lambda_\phi}{dt}(q, \dot{q}, t). \quad \square \quad (3.194) \end{aligned}$$

### 3.8.4 Zeittranslationen und Energieerhaltung

Statt  $t \mapsto t' = t + s$  können wir auch

$$q_k(t) \mapsto q_k(t - s) = q_k(t) \underbrace{- s \dot{q}_k(t)}_{s \delta_\eta q_k(t)} + \mathcal{O}(s^2) \quad (3.195a)$$

schreiben (vgl. Abb. 3.4) und damit

$$\dot{q}_k(t) \mapsto \dot{q}_k(t - s) = \dot{q}_k(t) \underbrace{- s \ddot{q}_k(t)}_{s \delta_\eta \dot{q}_k(t)} + \mathcal{O}(s^2), \quad (3.195b)$$

also

$$\delta_\eta q_k = -\dot{q}_k \quad (3.196a)$$

$$\delta_\eta \dot{q}_k = -\ddot{q}_k. \quad (3.196b)$$

Damit

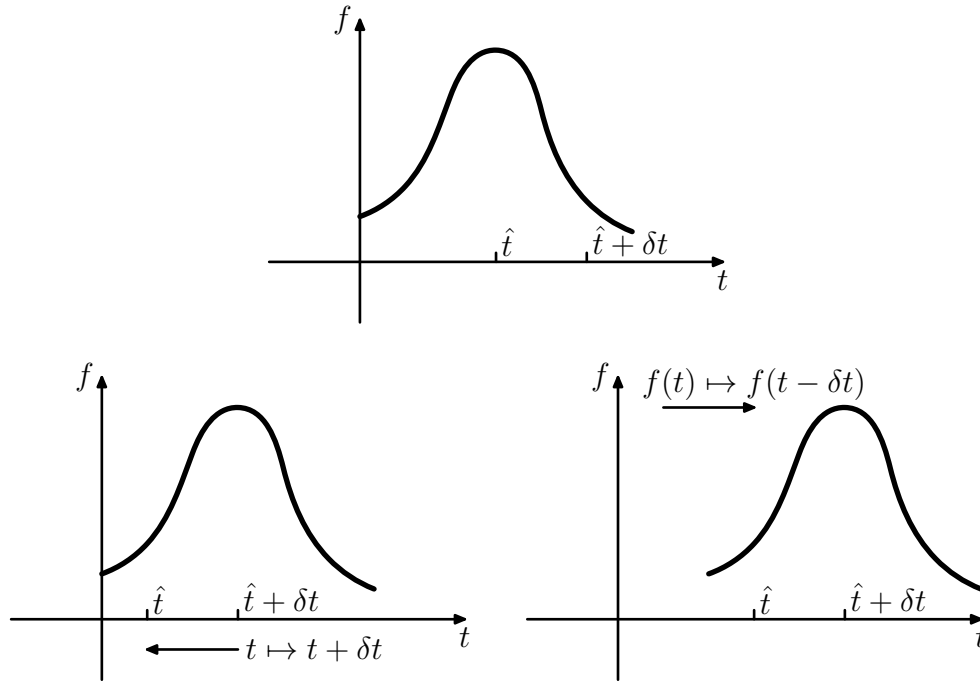


Abbildung 3.4: Veranschaulichung von (3.195a): eine Verschiebung der Zeitkoordinate  $t \mapsto t + \delta t$  (links unten) ist äquivalent zu einer Verschiebung der Funktionsargumente  $f(t) \mapsto f(t - \delta t)$  (rechts unten).

$$\begin{aligned} \delta_\eta L &= \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta_\eta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta_\eta \dot{q}_k \\ &= - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{dL}{dt}. \end{aligned} \quad (3.197)$$

Wenn  $L(q, \dot{q})$  nicht *explizit* von  $t$  abhängt, ist in der Voraussetzung in (3.190) für das Noether-Theorem  $\Lambda_\eta = -L$  und folglich ist

$$I_\eta(q, \dot{q}) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}) \delta_\eta q_k - \Lambda_\eta(q, \dot{q}) = - \sum_k p_k(q, \dot{q}) \dot{q}_k + L(q, \dot{q}) = \text{const.} \quad (3.198)$$

ein Integral der Bewegung. Weil es eine so zentrale Rolle spielt, wird sein Negatives als *Hamiltonfunktion* bezeichnet

$$H(q, \dot{q}) = -I_\eta(q, \dot{q}) = \sum_k p_k(q, \dot{q}) \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) = \text{const.} \quad (3.199)$$

Falls

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) = \sum_k f_k(q) \dot{q}_k^2 - V(q), \quad (3.200)$$

dann

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}) = 2f_k(q) \dot{q}_k \quad (3.201)$$

und die Hamiltonfunktion ist gleich der Gesamtenergie

$$\begin{aligned} H(q, \dot{q}) &= \sum_k 2f_k(q) \dot{q}_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) \\ &= \sum_k f_k(q) \dot{q}_k^2 + V(q) = T(q, \dot{q}) + V(q) = E. \end{aligned} \quad (3.202)$$

Vorlesung 09: Mo, 13.11.2023

Ein Nachweis ohne das Noether-Theorem ist auch möglich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(q, \dot{q}, t) &= \sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t) \ddot{q}_k \right) \\ &\quad - \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k}(q, \dot{q}, t) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t) \ddot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t}(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_k \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial L}{\partial q_k}(q, \dot{q}, t) \right)}_{\stackrel{ELG}{=} 0} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(q, \dot{q}, t). \end{aligned} \quad (3.203)$$

### 3.8.5 Galilei-Gruppe

Die Galilei-Gruppe ist die Invarianzgruppe der nichtrelativistischen Physik abgeschlossener Systeme. Jedes Element  $G[R, \vec{a}, \vec{v}, \eta, \lambda]$  der Galilei-Gruppe entspricht einer affinen Transformation des Produkts von Anschauungsraum und Zeitstrahl, sodaß Inertialsysteme auf Inertialsysteme abgebildet werden:

$$\begin{aligned} G[R, \vec{a}, \vec{v}, \eta, \lambda] : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \\ (t, \vec{x}) &\mapsto G[R, \vec{a}, \vec{v}, \eta, \lambda](t, \vec{x}) = (\lambda t + \eta, R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}). \end{aligned} \quad (3.204)$$

Die einzelnen Transformationen sind

1. Rotation und Raumspiegelung  $R \in O(3)$ :

- (a) Rotation  $R \in \text{SO}(3)$ :  $G[R, \vec{0}, \vec{0}, 0, +1](t, \vec{x}) = (t, R\vec{x})$   
 (b) Raumspiegelung  $R = -\mathbf{1}$ :  $G[-\mathbf{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0, +1](t, \vec{x}) = (t, -\vec{x})$

Raumspiegelung- oder Paritätsinvarianz wird von der schwachen Wechselwirkung verletzt (Wu, 1957). Dieser Effekt ist aber zu klein, um in der klassischen Physik wichtig zu sein.

2. Translation  $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$ :  $G[\mathbf{1}, \vec{a}, \vec{0}, 0, +1](t, \vec{x}) = (t, \vec{x} + \vec{a})$   
 3. Galilei-Boost  $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ :  $G[\mathbf{1}, \vec{0}, \vec{v}, 0, +1](t, \vec{x}) = (t, \vec{x} + \vec{v}t)$  d. h. Wechsel in ein neues, mit der Relativgeschwindigkeit  $-\vec{v}$  bewegtes, Inertialsystem.

Galilei-Boosts müssen für  $|\vec{v}| \lesssim c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$  durch Lorentz-Boosts (siehe Kapitel 7) ersetzt werden.

4. Zeitumkehr  $\lambda \in \{-1, +1\}$ :  $G[\mathbf{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0, -1](t, \vec{x}) = (-t, \vec{x})$

Es gibt zwei Arten der Verletzung der Zeitumkehrinvarianz in der Physik

- mikroskopisch durch die  $CP$ -Verletzung (Cronin und Fitch, 1964): winziger Effekt, der in der klassischen Physik nicht merkbar ist,
- makroskopisch durch Dissipation oder andere thermodynamische Effekte (2. Hauptsatz, Zunahme der Entropie). Als Dämpfungseffekt spielen sie in der Anwendung der klassischen Mechanik auf die reale Welt eine Rolle, weil selten *alle* Freiheitsgrade beschrieben werden können. Die Beschreibung verwendet die Newton'schen Gesetze.

5. Zeittranslation  $\eta \in \mathbf{R}$ :  $G[\mathbf{1}, \vec{0}, \vec{0}, \eta, +1](t, \vec{x}) = (t + \eta, \vec{x})$

und diejenigen, die miteinander nicht vertauschen, werden in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5 angewandt.

### *Lie-Gruppe*

Durch explizite Berechnung der Hintereinanderausführung

$$\begin{aligned}
 (G[R_1, \vec{a}_1, \vec{v}_1, \eta_1, \lambda_1] \circ G[R_2, \vec{a}_2, \vec{v}_2, \eta_2, \lambda_2])(t, \vec{x}) &= \\
 G[R_1, \vec{a}_1, \vec{v}_1, \eta_1, \lambda_1] (G[R_2, \vec{a}_2, \vec{v}_2, \eta_2, \lambda_2](t, \vec{x})) &= \\
 G[R_1, \vec{a}_1, \vec{v}_1, \eta_1, \lambda_1](\lambda_2 t + \eta_2, R_2 \vec{x} + \vec{v}_2 t + \vec{a}_2) &= \\
 (\lambda_1(\lambda_2 t + \eta_2) + \eta_1, R_1(R_2 \vec{x} + \vec{v}_2 t + \vec{a}_2) + \vec{v}_1(\lambda_2 t + \eta_2) + \vec{a}_1) &=
 \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 \lambda_2 t + \eta_1 + \lambda_1 \eta_2, R_1 R_2 \vec{x} + (R_1 \vec{v}_2 + \lambda_2 \vec{v}_1)t + R_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_1 + \eta_2 \vec{v}_1) = \\ G[R_1 R_2, R_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_1 + \eta_2 \vec{v}_1, R_1 \vec{v}_2 + \lambda_2 \vec{v}_1, \lambda_1 \eta_2 + \eta_1, \lambda_1 \lambda_2](t, \vec{x}) \quad (3.205)$$

finden wir als Verknüpfung

$$G[R_1, \vec{a}_1, \vec{v}_1, \eta_1, \lambda_1] \circ G[R_2, \vec{a}_2, \vec{v}_2, \eta_2, \lambda_2] \\ = G[R_1 R_2, R_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_1 + \eta_2 \vec{v}_1, R_1 \vec{v}_2 + \lambda_2 \vec{v}_1, \lambda_1 \eta_2 + \eta_1, \lambda_1 \lambda_2]. \quad (3.206)$$

Daraus ergeben sich Einheit

$$e = G[\mathbf{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0, +1] \quad (3.207)$$

und das Inverse

$$(G[R, \vec{a}, \vec{v}, \eta, \lambda])^{-1} = G[R^T, \lambda \eta R^T \vec{v} - R^T \vec{a}, -\lambda R^T \vec{v}, -\lambda \eta, \lambda]. \quad (3.208)$$

Die Assoziativität folgt aus der Assoziativität

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \\ = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x) \quad (3.209)$$

der Hintereinanderausführung

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (3.210)$$

von beliebigen Abbildungen  $f : C \rightarrow D$ ,  $g : B \rightarrow C$  und  $h : A \rightarrow B$ .

### Lineare Realisierung

#### Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):

Weil es sich um affine Transformationen handelt, können wir die Galilei-Gruppe *nicht* durch lineare Operationen, d. h. Matrizen, realisieren, die auf  $(t, \vec{x}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  wirken. Es hilft ein Trick. Durch Hinzufügen einer weiteren Dimension  $(t, \vec{x}) \rightarrow (1, t, \vec{x}) \in \mathbf{R}^5$ , können wir die Verschiebungen als  $5 \times 5$ -Matrix schreiben, die die erste Komponente auf 1 festhalten:

$$G[R, \vec{a}, \vec{v}, \eta, \lambda] \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & v_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ a_2 & v_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ a_3 & v_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.211)$$

In der Tat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & v_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ a_2 & v_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ a_3 & v_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda t + \eta \\ (Rx)_1 + v_1 t + a_1 \\ (Rx)_2 + v_2 t + a_2 \\ (Rx)_3 + v_3 t + a_3 \end{pmatrix}. \quad (3.212)$$

## Lie-Algebra

**Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):**

Die Entwicklung der Matrix-Realisierung für  $\det R = 1$  und  $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & v_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ a_2 & v_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ a_3 & v_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{5 \times 5} + g[\vec{\theta}, \vec{a}, \vec{v}, \eta] + \mathcal{O}(\theta^2, \theta v, \theta a, \theta \eta)$$

$$= \mathbf{1}_{5 \times 5} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & v_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ a_2 & v_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ a_3 & v_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2, \theta v, \theta a, \theta \eta)$$
(3.213)

legt die infinitesimalen Erzeugenden

$$g[\vec{\theta}, \vec{a}, \vec{v}, \eta] = \vec{\theta} \vec{L} + \vec{a} \vec{P} + \vec{v} \vec{C} + \eta H$$
(3.214)

mit den 10 Generatoren

1. 3 Rotationen  $\vec{L}$ :  $L_i(u, t, \vec{x}) = (0, 0, \tau_i \vec{x})$
2. 3 Translationen  $\vec{P}$ :  $P_i(u, t, \vec{x}) = (0, 0, \vec{e}_i u)$
3. 3 Galilei-Boosts  $\vec{C}$ :  $C_i(u, t, \vec{x}) = (0, 0, \vec{e}_i t)$
4. 1 Zeittranslation  $H$ :  $H(u, t, \vec{x}) = (0, u, \vec{0})$

nahe.

Die allgemeine Linearkombination kann

$$g[\vec{\theta}, \vec{a}, \vec{v}, \eta](u, t, \vec{x}) = (0, \eta u, \vec{\theta} \times \vec{x} + \vec{v} t + \vec{a})$$
(3.215)

geschrieben werden, wobei wir für die Rotationen

$$(\vec{\theta} \vec{\tau}) \vec{x} = \sum_{k,l=1}^3 \theta_k x_l \tau_k \vec{e}_l = \sum_{k,l,m=1}^3 \theta_k x_l \epsilon_{klm} \vec{e}_m = \vec{\theta} \times \vec{x}$$
(3.216)

ausgenutzt haben. Die Matrixrealisierung der Generatoren erhält man durch Koeffizientenvergleich<sup>7</sup> aus (3.213) und (3.214). NB: für die diskreten Transformationen Raumspiegelung und Zeitumkehr gibt es keine Erzeugenden.

Vertauschungsrelationen für Rotationen

$$\begin{aligned} [L_i, L_j](1, t, \vec{x}) &= L_i L_j(1, t, \vec{x}) - L_j L_i(1, t, \vec{x}) \\ &= L_i(0, 0, \tau_j \vec{x}) - L_j(0, 0, \tau_i \vec{x}) = (0, 0, \tau_i \tau_j \vec{x}) - (0, 0, \tau_j \tau_i \vec{x}) \\ &= (0, 0, [\tau_i, \tau_j] \vec{x}) = \sum_k \epsilon_{ijk} (0, 0, \tau_k \vec{x}) = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k(1, t, \vec{x}) \end{aligned}$$
(3.217a)



und Rotationen mit Galilei-Boost

$$\begin{aligned}
 [L_i, C_j](1, t, \vec{x}) &= L_i C_j(1, t, \vec{x}) - C_j L_i(1, t, \vec{x}) \\
 &= L_i(0, 0, \vec{e}_j t) - C_j(0, 0, \tau_i \vec{x}) = (0, 0, \tau_i \vec{e}_j t) - (0, 0, \vec{0}) \\
 &= \sum_k \epsilon_{ijk} (0, 0, \vec{e}_k t) = \sum_k \epsilon_{ijk} C_k(1, t, \vec{x}). \quad (3.217b)
 \end{aligned}$$

Die Rechnung für  $[L_i, P_j]$  ist identisch<sup>8</sup>. Galilei-Boosts und Zeittranslationen vertauschen ebenfalls nicht

$$\begin{aligned}
 [C_i, H](1, t, \vec{x}) &= C_i H(1, t, \vec{x}) - H C_i(1, t, \vec{x}) = C_i(0, 1, \vec{0}) - H(0, 0, \vec{e}_i t) \\
 &= (0, 0, \vec{e}_i) - (0, 0, \vec{0}) = P_i(1, t, \vec{x}). \quad (3.217d)
 \end{aligned}$$

Alle anderen vertauschen<sup>9</sup>.

Insgesamt erhalten wir die Lie-Algebra der Galilei-Gruppe

$$[L_i, L_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad (3.218a)$$

$$[L_i, C_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} C_k \quad (3.218b)$$

$$[L_i, P_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} P_k \quad (3.218c)$$

$$[L_i, H] = 0 \quad (3.218d)$$

$$[C_i, P_j] = 0 \quad (3.218e)$$

$$[C_i, H] = P_i \quad (3.218f)$$

$$[P_i, H] = 0 \quad (3.218g)$$

### 3.8.6 Translationen und Impulserhaltung

Zeitlich konstante Verschiebungen des Systems (aktive Transformation) oder des Koordinatensystems (passive Transformation)

$$\forall n : \vec{x}_n \mapsto \vec{x}'_n = \vec{x}_n + s \vec{a}, \quad (3.219)$$

bzw.

$$\delta_{\vec{a}} \vec{x}_n = \vec{a} \quad (3.220a)$$

$$\delta_{\vec{a}} \dot{\vec{x}}_n = \vec{0} \quad (3.220b)$$

Mit der Notation

$$\vec{x}_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}) \quad (3.221)$$

finden wir

$$\begin{aligned}\delta_{\vec{a}}L(x, \dot{x}, t) &= \sum_{k,i} \frac{\partial L}{\partial x_{k,i}}(x, \dot{x}, t) \delta_{\vec{a}} x_{k,i} + \sum_{k,i} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{k,i}}(x, \dot{x}, t) \delta_{\vec{a}} \dot{x}_{k,i} \\ &= \sum_i a_i \sum_k \frac{\partial L}{\partial x_{k,i}}(x, \dot{x}, t) \quad (3.222)\end{aligned}$$

die Terme  $\sum_k \frac{\partial L}{\partial x_{k,i}}(x, \dot{x}, t)$  verschwinden unter folgenden Bedingungen

- $L$  hängt garnicht von  $\vec{x}_k$  ab (trivial)
- $L$  hängt nur von Differenzen  $\vec{x}_k - \vec{x}_l$  ab, weil nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_{l,i}} f(\vec{x}_k - \vec{x}_l) = -\frac{\partial}{\partial x_{k,i}} f(\vec{x}_k - \vec{x}_l) \quad (3.223)$$

gilt. Eine alternative Begründung ist

$$\forall n : \vec{x}_n \mapsto \vec{x}_n + \vec{a} \Rightarrow f(\vec{x}_k - \vec{x}_l) \mapsto f(\vec{x}_k + \vec{a} - \vec{x}_l - \vec{a}) = f(\vec{x}_k - \vec{x}_l). \quad (3.224)$$

In einem *abgeschlossenen System* sollte  $L$  in der Tat nur von den Differenzen abhängen, weil alle Kräfte von Wechselwirkungen von Teilen des Systems untereinander herrühren.

In diesem Fall folgt mit dem Noether-Theorem für  $\Lambda = 0$ , daß

$$\begin{aligned}I_{\vec{a}}(x, \dot{x}, t) &= \sum_{k,i} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{k,i}}(x, \dot{x}, t) \delta_{\vec{a}} x_{k,i} \\ &= \sum_{k,i} p_{k,i}(x, \dot{x}, t) a_i = \vec{a} \sum_k \vec{p}_k(x, \dot{x}, t) = \vec{a} \vec{P}(x, \dot{x}, t) \quad (3.225)\end{aligned}$$

erhalten ist, mit dem Impuls des  $k$ -ten Teilchens

$$p_{k,i}(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{k,i}}(x, \dot{x}, t) \quad (3.226)$$

bzw. dem erhaltenen *Gesamtimpuls*

$$\vec{P}(x, \dot{x}, t) = \sum_k \vec{p}_k(x, \dot{x}, t) = \text{const.} \quad (3.227)$$

### 3.8.7 Rotationen und Drehimpulserhaltung

Zeitlich konstante Rotation des Systems

$$\forall n : \vec{x}_n \mapsto \vec{x}'_n = R\vec{x}_n = \vec{x}_n + \underbrace{s(\vec{\theta}\vec{\tau})\vec{x}_n}_{\stackrel{(3.170)}{=} s\vec{\theta} \times \vec{x}_n} + \mathcal{O}(s^2) \quad (3.228)$$

also

$$\delta_{\vec{\theta}}\vec{x}_n = \vec{\theta} \times \vec{x}_n \quad (3.229a)$$

$$\delta_{\vec{\theta}}\dot{\vec{x}}_n = \vec{\theta} \times \dot{\vec{x}}_n \quad (3.229b)$$

oder in Komponenten

$$\delta_{\vec{\theta}}x_{n,i} = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \theta_j x_{n,k} \quad (3.230a)$$

$$\delta_{\vec{\theta}}\dot{x}_{n,i} = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \theta_j \dot{x}_{n,k} . \quad (3.230b)$$

Wenn die Lagrangefunktion von den Orten  $\vec{x}_n$  und Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{x}}_n$  nur über Skalarprodukte

$$X_{nm}(x, \dot{x}) = \vec{x}_n \cdot \vec{x}_m \quad (3.231a)$$

$$Y_{nm}(x, \dot{x}) = \vec{x}_n \cdot \dot{\vec{x}}_m \quad (3.231b)$$

$$Z_{nm}(x, \dot{x}) = \dot{\vec{x}}_n \cdot \dot{\vec{x}}_m , \quad (3.231c)$$

abhängt, d. h.

$$L(x, \dot{x}, t) = \tilde{L}(X(x, \dot{x}), Y(x, \dot{x}), Z(x, \dot{x}), t) , \quad (3.232)$$

dann gilt wegen

$$\begin{aligned} \delta_{\vec{\theta}}X_{nm}(x, \dot{x}) &= \delta_{\vec{\theta}}\vec{x}_n \cdot \vec{x}_m + \vec{x}_n \cdot \delta_{\vec{\theta}}\vec{x}_m = (\vec{\theta} \times \vec{x}_n) \cdot \vec{x}_m + \vec{x}_n \cdot (\vec{\theta} \times \vec{x}_m) \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \theta_i x_{n,j} x_{m,k} + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} x_{n,i} \theta_j x_{m,k} = 0 \end{aligned} \quad (3.233a)$$

$$\delta_{\vec{\theta}}Y_{nm}(x, \dot{x}) = \dots = 0 \quad (3.233b)$$

$$\delta_{\vec{\theta}}Z_{nm}(x, \dot{x}) = \dots = 0 \quad (3.233c)$$

auch

$$\delta_{\vec{\theta}}L = \sum_{nm} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial X_{nm}} \delta_{\vec{\theta}}X_{nm} + \sum_{nm} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Y_{nm}} \delta_{\vec{\theta}}Y_{nm} + \sum_{nm} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Z_{nm}} \delta_{\vec{\theta}}Z_{nm} = 0 . \quad (3.234)$$

Damit liefert das Noether-Theorem die Integrale

$$\begin{aligned} I_{\vec{\theta}} &= \sum_{n,i} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n,i}} \delta_{\vec{\theta}} x_{n,i} = \sum_{n,i} p_{n,i} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \theta_j x_{n,k} \\ &= \sum_j \theta_j \sum_n \sum_{i,k} \epsilon_{jki} x_{n,k} p_{n,i} = \vec{\theta} \sum_n \vec{L}_n = \vec{\theta} \vec{L} \end{aligned} \quad (3.235)$$

mit dem *Drehimpuls* des  $n$ -ten Teilchens

$$\vec{L}_n = \vec{x}_n \times \vec{p}_n \quad (3.236)$$

und dem *erhaltenen* Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_n \vec{x}_n \times \vec{p}_n = \text{const.} \quad (3.237)$$

### 3.8.8 Galilei-Boosts und Schwerpunktsbewegung

Vorlesung 10: Fr, 17. 11. 2021

$$\forall n : \vec{x}_n \mapsto \vec{x}'_n = \vec{x}_n + s\vec{v}t, \quad (3.238)$$

bzw.

$$\delta_{\vec{v}} \vec{x}_n = \vec{v}t \quad (3.239a)$$

$$\delta_{\vec{v}} \dot{\vec{x}}_n = \vec{v} \quad (3.239b)$$

Unter der Annahme, daß die Orte  $\vec{x}_n$  wieder *nur als Differenzen* vorkommen finden wir

$$\begin{aligned} \delta_{\vec{v}} L &= \sum_{n,i} \frac{\partial L}{\partial x_{n,i}} \delta_{\vec{v}} x_{n,i} + \sum_{n,i} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n,i}} \delta_{\vec{v}} \dot{x}_{n,i} \\ &= \sum_i v_i t \underbrace{\sum_n \frac{\partial L}{\partial x_{n,i}}}_{=0} + \sum_i v_i \sum_n p_{n,i} = \vec{v} \sum_n \vec{p}_n. \end{aligned} \quad (3.240)$$

Wenn wir eine „normale“ kinetische Energie in kartesischen Koordinaten

$$T(\dot{\vec{x}}) = \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{\vec{x}}_n^2 \quad (3.241)$$

haben, gilt

$$\vec{p}_n = m_n \dot{\vec{x}}_n \quad (3.242)$$

und damit

$$\delta_{\vec{v}} L = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \sum_n m_n \vec{x}_n \right), \quad (3.243)$$

also

$$\Lambda_{\vec{v}} = \vec{v} \sum_n m_n \vec{x}_n \quad (3.244)$$

in der Voraussetzung (3.190) für das Noether-Theorem. Für andere Formen der kinetischen Energie oder für geschwindigkeitsabhängige Potentiale ist diese Voraussetzung *nicht* gegeben. Die resultierenden Integrale sind

$$\begin{aligned} I_{\vec{v}} &= \sum_{n,i} p_{n,i} \delta_{\vec{v}} x_{n,i} - \Lambda_{\vec{v}} = \sum_{n,i} p_{n,i} v_i t - \vec{v} \sum_n m_n \vec{x}_n \\ &= \vec{v} \left( t \sum_n \vec{p}_n - \sum_n m_n \vec{x}_n \right) = \vec{v} (t \vec{P} - M \vec{X}) = \vec{v} \vec{C} \end{aligned} \quad (3.245)$$

mit dem Gesamtimpuls  $\vec{P}$ , der Gesamtmasse

$$M = \sum_n m_n \quad (3.246)$$

und der Lage des Schwerpunkts

$$\vec{X} = \frac{1}{M} \sum_n m_n \vec{x}_n. \quad (3.247)$$

Wir finden also eine „explizit zeitabhängige Erhaltungsgröße“

$$\vec{C} = t \vec{P} - M \vec{X} = \text{const.} \quad (3.248)$$

bzw. die lineare Bewegung des Schwerpunkts

$$\vec{X} = \vec{X} \Big|_{t=0} + t \frac{1}{M} \vec{P} \quad (3.249)$$

als Konsequenz der Invarianz unter Galilei-Boosts.

Im Lehrbuch von Landau und Lifshitz [2] wird übrigens in umgekehrter Richtung argumentiert: damit sich der Schwerpunkt linear bewegt, muß die kinetische Energie in kartesischen Koordinaten die Form (3.241) haben.

### 3.9 Galilei-Invarianz und Newton'sche Gesetze für nicht konservative Kräfte

System von  $N$  wechselwirkenden Massenpunkten

$$\forall n = 1, \dots, N : m_n \ddot{\vec{x}}_n = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t) + \vec{F}_{\text{ext.},n}(\vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_n, t) \quad (3.250)$$

mit inneren Kräften  $\vec{F}_{nm}$  zwischen den Massenpunkten, die dem 3. Newton'schen Gesetz („actio = reactio“) genügen

$$\forall n, m = 1, \dots, N : \vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t) = -\vec{F}_{mn}(\vec{x}_m - \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_m - \dot{\vec{x}}_n, t) \quad (3.251)$$

und äußeren Kräften  $\vec{F}_{\text{ext.},n}$  auf die Massenpunkte.

Energieerhaltung können wir nur für konservative Kräfte erwarten, die wir im Lagrangeformalismus erschöpfend behandeln können. Für Impuls und Drehimpuls finden wir aber verallgemeinerte Ergebnisse und damit ebenso für die Schwerpunktsbewegung.

#### 3.9.1 Gesamtimpuls und Schwerpunktsbewegung

Dann

$$\begin{aligned} M \ddot{\vec{X}} &= \sum_{n=1}^N m_n \ddot{\vec{x}}_n = \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n}}^N \vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t) + \sum_{n=1}^N \vec{F}_{\text{ext.},n}(\vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_n, t) \\ &= \sum_{\substack{n,m=1 \\ m > n}}^N \vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t) + \underbrace{\sum_{\substack{n,m=1 \\ m < n}}^N \vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t)}_{\sum_{\substack{n,m=1 \\ m > n}}^N \underbrace{\vec{F}_{mn}(\vec{x}_m - \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_m - \dot{\vec{x}}_n, t)}_{-\vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t)}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \vec{F}_{\text{ext.},n}(\vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_n, t) = \sum_{n=1}^N \vec{F}_{\text{ext.},n}(\vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_n, t) = \vec{F}_{\text{ext.}}. \quad (3.252) \end{aligned}$$

Damit ist die Änderung des Gesamtimpulses durch die Summe der *äußeren* Kräfte gegeben

$$M \ddot{\vec{X}} = \frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}_{\text{ext.}}. \quad (3.253)$$

### 3.9.2 Gesamtdrehimpuls

Für Zentralkräfte

$$\vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t) \propto \vec{x}_n - \vec{x}_m \quad (3.254)$$

finden wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N m_n \vec{x}_n \times \dot{\vec{x}}_n = \sum_{n=1}^N m_n \underbrace{\dot{\vec{x}}_n \times \dot{\vec{x}}_n}_{=0} + \sum_{n=1}^N m_n \vec{x}_n \times \ddot{\vec{x}}_n \\ &= \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n}}^N \vec{x}_n \times \vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t) + \sum_{n=1}^N \vec{x}_n \times \vec{F}_{\text{ext},n}(\vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_n, t) \\ &= \sum_{\substack{n,m=1 \\ m > n}}^N \underbrace{\left( \vec{x}_n \times \vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t) + \vec{x}_m \times \vec{F}_{mn}(\vec{x}_m - \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_m - \dot{\vec{x}}_n, t) \right)}_{(\vec{x}_n - \vec{x}_m) \times \vec{F}_{nm}(\vec{x}_n - \vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m, t) = 0} \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \vec{x}_n \times \vec{F}_{\text{ext},n}(\vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_n, t) = \sum_{n=1}^N \vec{x}_n \times \vec{F}_{\text{ext},n}(\vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_n, t) = \vec{M}_{\text{ext.}}. \quad (3.255) \end{aligned}$$

Und die Änderung des Gesamtdrehimpulses ist durch die Summe der äußeren Drehmomente  $\vec{x}_n \times \vec{F}_{\text{ext},n}$  gegeben

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}_{\text{ext.}}. \quad (3.256)$$

NB: geschwindigkeitsunabhängige *innere* Kräfte müssen aus Symmetriegründen Zentralkräfte sein, weil  $\vec{x}_n - \vec{x}_m$  die einzige ausgezeichnete Richtung ist. Dies gilt *nicht* für geschwindigkeitsabhängige Kräfte, weil auch  $\dot{\vec{x}}_n - \dot{\vec{x}}_m$  als Vektor zur Verfügung steht.

# —4—

## ANWENDUNGEN

### 4.1 Zweikörperprobleme

Zwei Teilchen  $m_1$  und  $m_2$  unter dem Einfluß eines Potentials, das nur vom Abstandsvektor  $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$  abhängt:

$$L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, t) = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 - V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t) \quad (4.1)$$

Die Galilei-Symmetrien des Problems sind

- die Translationsinvarianz von  $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$  liefert Gesamtimpulserhaltung

$$\vec{P} = m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2 = \text{const.}, \quad (4.2)$$

- die Galilei-Invarianz der kinetischen Energie und des Potentials liefert

$$\vec{C} = t\vec{P} - M\vec{X} = \text{const.} \quad (4.3)$$

mit

$$M = m_1 + m_2 \quad (4.4a)$$

$$\vec{X} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.4b)$$

- falls zusätzlich Rotationsinvarianz vorliegt

$$V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t) = \tilde{V}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|, t), \quad (4.5)$$

dann Gesamtdrehimpulserhaltung

$$\vec{L} = m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2 = \text{const.} \quad (4.6)$$

(siehe Abschnitt 4.2), und

- falls  $\partial V / \partial t = 0$ , dann

$$H = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \text{const.} \quad (4.7)$$



#### 4.1.1 Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

Deshalb bietet sich an, neue Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = A_x \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} \quad (4.8a)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} = A_x^{-1} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -\frac{m_1}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mu}{m_1} \\ 1 & -\frac{\mu}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} \quad (4.8b)$$

mit der *reduzierten Masse*

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{M}{m_1 m_2} \quad (4.9)$$

einzuführen. Damit

$$m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 = m_1 \left( \dot{\vec{X}} + \frac{\mu}{m_1} \dot{\vec{\xi}} \right)^2 + m_2 \left( \dot{\vec{X}} - \frac{\mu}{m_2} \dot{\vec{\xi}} \right)^2 = M \dot{\vec{X}}^2 + \mu \dot{\vec{\xi}}^2 \quad (4.10)$$

also

$$L'(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}, \dot{\vec{X}}, t) = L(x(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}, \dot{\vec{X}}), \dot{x}(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}, \dot{\vec{X}}), t) = \frac{M}{2} \dot{\vec{X}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{\xi}}^2 - V(\vec{\xi}, t). \quad (4.11)$$

Daraus

$$P_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{X}_i} = M \dot{X}_i = m_1 \dot{x}_{1,i} + m_2 \dot{x}_{2,i} = p_{1,i} + p_{2,i} = P_i = \text{const.} \quad (4.12a)$$

$$\pi_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_i} = \mu \dot{\xi}_i = \mu \dot{x}_{1,i} - \mu \dot{x}_{2,i} = \frac{\mu}{m_1} p_{1,i} - \frac{\mu}{m_2} p_{2,i}, \quad (4.12b)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} = A_p \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\mu}{m_1} & -\frac{\mu}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{m_2}{M} & -\frac{m_1}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} \quad (4.13a)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = A_p^{-1} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & 1 \\ \frac{m_2}{M} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{\pi} \end{pmatrix}. \quad (4.13b)$$

Es ist kein Zufall, daß

$$A_p^T = A_x^{-1} \quad (4.14)$$

gilt, wie im Abschnitt (5.4.1) gezeigt werden wird.

Es ergeben sich entkoppelte Bewegungsgleichungen für Schwerpunkts- und Relativbewegung

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \ddot{\vec{X}} = 0 \quad (4.15a)$$

$$\mu \ddot{\vec{\xi}} + \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} V(\vec{\xi}, t) = 0 \quad (4.15b)$$

und eine effektive Lagrangefunktion für die Relativbewegung allein:

$$L_{\text{rel.}}(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}, t) = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{\xi}}^2 - V(\vec{\xi}, t). \quad (4.16)$$

## 4.2 Zentralkraftprobleme

Vorlesung 11: Mo, 20.11.2023

$$F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} F(|\vec{x}|) \quad (4.17)$$

Mit

$$\begin{aligned} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) \right]_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_k}{|\vec{x}|} F(|\vec{x}|) \right) \\ &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k}{|\vec{x}|} \right) F(|\vec{x}|) + \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{x_k}{|\vec{x}|} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} F(|\vec{x}|) \right) \\ &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left( \frac{\delta_{jk}}{|\vec{x}|} - \frac{x_j x_k}{|\vec{x}|^3} \right) F(|\vec{x}|) + \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{x_j x_k}{|\vec{x}|^2} F'(|\vec{x}|) = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

wegen der Antisymmetrie von  $\epsilon$ , sehen wir, daß *jedes* geschwindigkeitsunabhängige Zentralkraftfeld  $F$  konservativ ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0. \quad (4.19)$$

Ein geeignetes Potential ist

$$V(\vec{x}) = \tilde{V}(|\vec{x}|) = - \int^{|\vec{x}|} d\xi F(\xi) \quad (4.20)$$

weil

$$-\vec{\nabla} V(\vec{x}) = F(|\vec{x}|) \vec{\nabla} |\vec{x}| = F(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (4.21)$$

auch dann, wenn  $\vec{F}$  am Ursprung eine Singularität hat. Wir können also o. B. d. A. den Lagrangeformalismus benutzen.

### 4.2.1 Drehimpuls

Aus der Rotationsinvarianz der Lagrangefunktion wissen wir, daß der Drehimpuls

$$\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \text{const.} \quad (4.22)$$

erhalten ist. Außerdem folgt aus der Antisymmetrie des Vektorprodukts

$$\vec{x}\vec{L} = 0 \quad (4.23a)$$

$$\dot{\vec{x}}\vec{L} = 0 \quad (4.23b)$$

und wir sehen, daß die Bewegung in der *konstanten* Ebene senkrecht zu  $\vec{L}$  verläuft. Wir dürfen also o. B. d. A. ein Koordinatensystem mit

$$\vec{L} = |\vec{L}|\vec{e}_3 \quad (4.24)$$

und  $\vec{x}, \dot{\vec{x}}$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene wählen, für die wir wegen der Symmetrie Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  benutzen

$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r). \quad (4.25)$$

Daraus ergeben sich wie auf Seite 44 in Abschnitt 3.6.1 die ELG

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{dV}{dr}(r) = 0 \quad (4.26a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = 0. \quad (4.26b)$$

Wir sehen wieder die Konstanz des Betrages des Drehimpulses

$$|\vec{L}| = p_\phi = mr^2 \dot{\phi} \quad (4.27)$$

und erhalten zu jedem vorgegebenen  $p_\phi$  ein eindimensionales Problem

$$m\ddot{r} - \frac{p_\phi^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr}(r) = 0. \quad (4.28)$$

Mit effektivem Potential

$$V_{\text{eff.}, p_\phi}(r) = V(r) + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \quad (4.29)$$

(vgl. Abb. 3.3), also

$$m\ddot{r} + \frac{dV_{\text{eff.}, p_\phi}}{dr}(r) = 0, \quad (4.30)$$

was mittels Energieerhaltung

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff.},p_\phi}(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r) = \text{const.} \quad (4.31)$$

integriert werden kann.

Aus

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V(r) - \frac{p_\phi^2}{2mr^2}} \quad (4.32)$$

folgt durch Trennung der Veränderlichen

$$\int_{t_0}^{t_1} dt = \pm \int_{r(t_0)}^{r(t_1)} \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - p_\phi^2/r^2}}. \quad (4.33)$$

Wenn man zunächst nur an der Form der Bahn interessiert ist, kann man  $t$  durch  $\phi$  ersetzen

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \quad (4.34)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\phi} = \frac{mr^2}{p_\phi} \frac{dr}{dt} &= \pm \frac{mr^2}{p_\phi} \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V(r) - \frac{p_\phi^2}{2mr^2}} \\ &= \pm r \sqrt{2mr^2(E - V(r))/p_\phi^2 - 1}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Je nach Form von  $V$ , bzw.  $V_{\text{eff.}}$  gibt es, in Abhängigkeit von  $p_\phi$ , gebundene Bahnen vs. Entweichbahnen:

- $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff.}}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = +\infty$ : es gibt keine Trajektorie, die ins Unendliche entweichen kann,
- $V_{\text{eff.}}$  hat Extrema: es gibt Kreisbahnen,
- $V_{\text{eff.}}$  hat lokale Minima: es gibt für geeignete Energien und Drehimpulse periodische Bahnen zwischen  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$  mit  $V_{\text{eff.}}(r_{\min/\max}) = E$ , die nicht notwendig geschlossen sind (vgl. Abbildung 4.3),
- $\lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{eff.},p_\phi}(r) < +\infty$ : es gibt Bahnen, die das Zentrum erreichen.

#### 4.2.2 Isotroper Harmonischer Oszillator

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - \frac{k}{2}\vec{x}^2 = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - \frac{m}{2}\omega^2\vec{x}^2 \quad (4.36)$$

ELG

$$\ddot{\vec{x}} + \omega^2\vec{x} = 0 \quad (4.37)$$

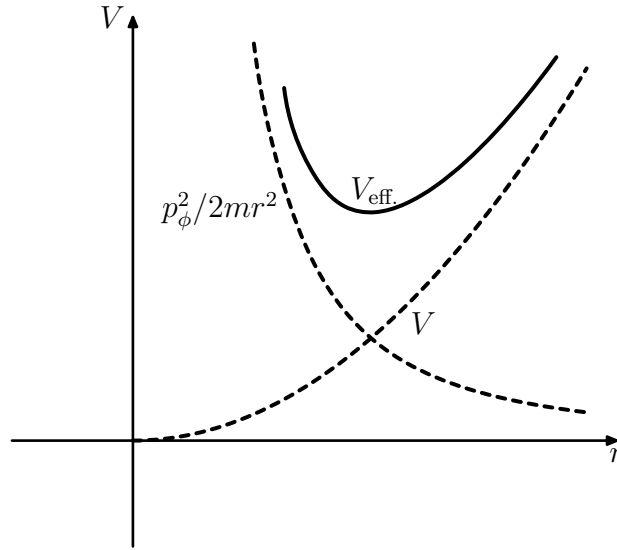


Abbildung 4.1: *Effektives Potential für  $V(r) = m\omega^2 r^2/2$ .*

### *Entkoppelte kartesische Koordinaten*

Weil

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x_2^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x_2^2 \quad (4.38)$$

sind the **ELG** entkoppelt

$$\forall i = 1, 2, 3 : \ddot{x}_i + \omega^2 x_i = 0 \quad (4.39)$$

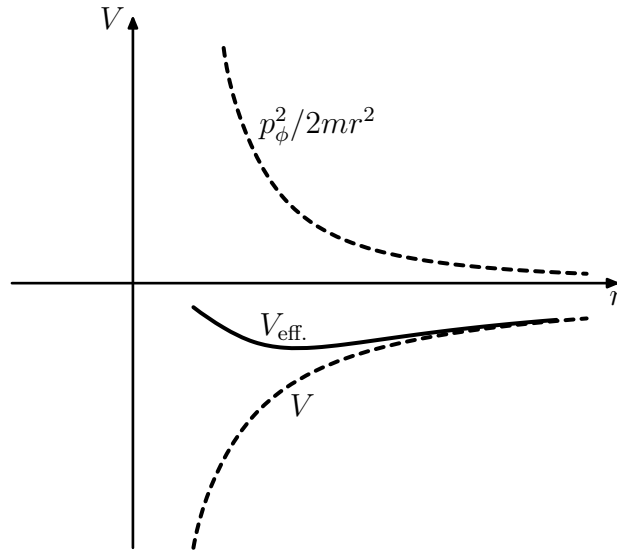
und wir finden unabhängige Lösungen durch Exponentialansatz

$$x_i(t) = x_i(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_i(0)}{\omega} \sin(\omega t) \quad (4.40)$$

oder durch Integration mittels Energieerhaltung für jede Richtung unabhängig von den anderen

$$\forall i = 1, 2, 3 : H_i = \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x_i^2 = \text{const.} \quad (4.41)$$

wie in (2.66).

Abbildung 4.2: Effektives Potential für  $V(r) = -\alpha/r$ .

### Sphärische Polarkoordinaten

Wegen der Rotationsinvarianz von

$$V(r) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2 \quad (4.42)$$

haben wir Drehimpulserhaltung und wir können Polarkoordinaten in der Ebene orthogonal zu  $\vec{L}$  wählen. (4.42) in die Gleichung für die Bahnkurve (4.35) eingesetzt ergibt

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm r \sqrt{2mr^2(E - m\omega^2 r^2/2)/p_\phi^2 - 1} \quad (4.43)$$

und nach Trennung der Variablen

$$\int d\phi = \pm \int \frac{dr/r}{\sqrt{2mr^2(E - m\omega^2 r^2/2)/p_\phi^2 - 1}} \quad (4.44)$$

und Substitution  $u = 1/r^2$ ,  $dr/r = -1/2 \cdot du/u$

$$\int d\phi = \mp \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{m(2Eu - m\omega^2)/p_\phi^2 - u^2}} \quad (4.45)$$

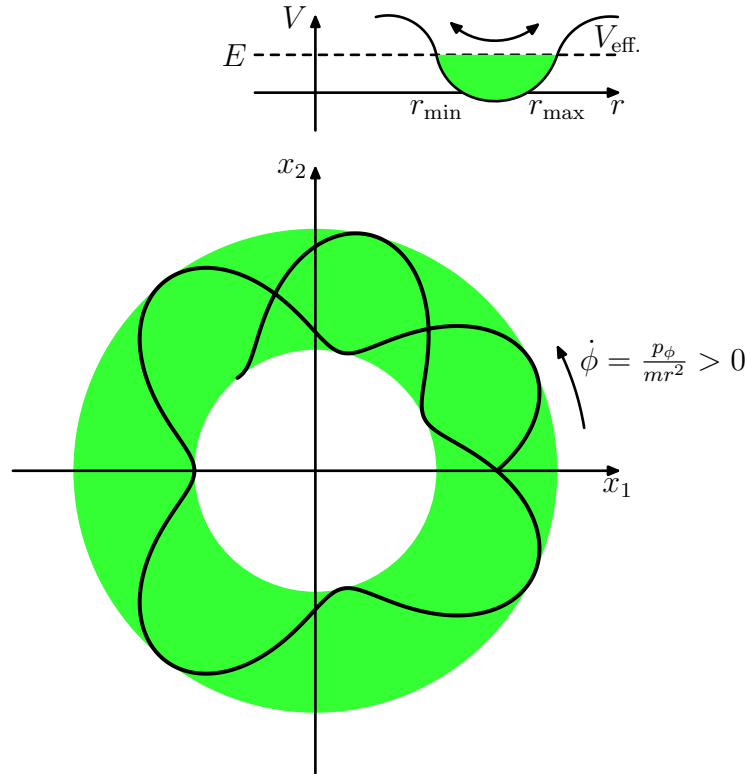


Abbildung 4.3: Periodische Bahn, die nicht geschlossen ist.

kann man die Integralformel

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2au + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \text{für } a < 0, b^2 > 4ac \quad (4.46)$$

mit

$$a = -1 \quad (4.47a)$$

$$b = \frac{2mE}{p_\phi^2} \quad (4.47b)$$

$$c = -\frac{m^2\omega^2}{p_\phi^2} \quad (4.47c)$$

$$b^2 - 4ac = \frac{4m^2E^2}{p_\phi^4} - \frac{4m^2\omega^2}{p_\phi^2} = \frac{4m^2}{p_\phi^4} (E^2 - \omega^2 p_\phi^2) > 0 \quad (4.47d)$$

verwenden:

$$\tilde{\phi}(u) = \phi_0 \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{-2u + 2mE/p_\phi^2}{\frac{2m}{p_\phi^2} \sqrt{E^2 - \omega^2 p_\phi^2}}. \quad (4.48)$$

**Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):**

Die Gesamtenergie ist nach unten durch das Minimum des effektiven Potentials beschränkt

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff.}, p_\phi}(r) \geq V_{\text{eff.}, p_\phi}(r_{\min}) = \frac{p_\phi^2}{2mr_{\min}^2} + V(r_{\min}), \quad (4.49)$$

wobei  $r_{\min}$  durch

$$0 = \left. \frac{dV_{\text{eff.}, p_\phi}(r)}{dr} \right|_{r=r_{\min}} = -\frac{p_\phi^2}{mr_{\min}^3} + m\omega^2 r_{\min} \quad (4.50)$$

festgelegt ist. Also

$$r_{\min}^2 = \frac{p_\phi}{m\omega} \quad (4.51)$$

und damit

$$V_{\text{eff.}, p_\phi}(r_{\min}) = \omega p_\phi, \quad (4.52)$$

also

$$E \geq \omega p_\phi. \quad (4.53)$$

Anschließende Rücksubstitution

$$\phi(r) = \tilde{\phi}(u(r)) = \phi_0 \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{1 - p_\phi^2/(mEr^2)}{\sqrt{1 - \omega^2 p_\phi^2/E^2}} \quad (4.54)$$

und Umkehrung

$$\pm \sqrt{1 - \omega^2 p_\phi^2/E^2} \sin(2(\phi - \phi_0)) = 1 - \frac{p_\phi^2}{mEr^2} \quad (4.55)$$

ergibt

$$r(\phi) = \frac{p_\phi}{\sqrt{mE}} \frac{1}{\sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \omega^2 p_\phi^2/E^2} \sin(2(\phi - \phi_0))}}, \quad (4.56)$$

also eine Ellipse mit Exzentrizität  $\sqrt{1 - \omega^2 p_\phi^2/E^2}$ !

**Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):**

Die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (4.57)$$



liefert in Polarkoordinaten

$$\left(\frac{r \cos \phi}{a}\right)^2 + \left(\frac{r \sin \phi}{b}\right)^2 = 1, \quad (4.58)$$

bzw.

$$r^2 b^2 \cos^2 \phi + r^2 a^2 \sin^2 \phi = a^2 b^2 \quad (4.59)$$

oder

$$r(\phi) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}}. \quad (4.60)$$

Mit

$$\begin{aligned} b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi &= b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \phi \\ &= b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2} (1 - \cos 2\phi) = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2} \cos 2\phi \end{aligned} \quad (4.61)$$

folgt dann die Form (4.56)

$$r(\phi) = \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos 2\phi}} \quad (4.62)$$

mit geeigneten  $a$  und  $b$ .

### 4.2.3 Kepler Problem

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (4.63)$$

Die Wechselwirkung ist anziehend für  $\alpha > 0$  und abstoßend für  $\alpha < 0$  (siehe Abbildung 4.4). Wichtige Beispiele:

- gravitative Anziehung zwischen Punktmassen (Planeten, Monde, etc.):

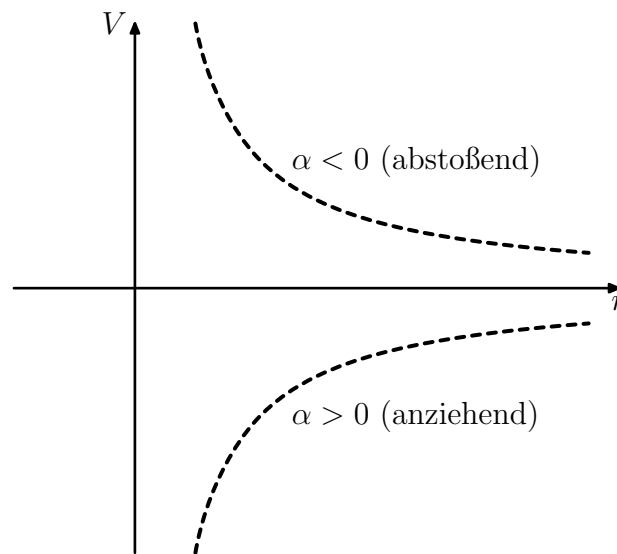
$$\alpha = Gm_1 m_2, \quad (4.64)$$

- elektrostatische Anziehung oder Abstoßung von Punktladungen  $Q_{1/2}$ :  
In geeigneten Einheiten gilt

$$\alpha = -Q_1 Q_2. \quad (4.65)$$

Die zugehörigen ELG in kartesischen Koordinaten sind

$$m\ddot{\vec{x}} + \alpha \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = 0. \quad (4.66)$$

Abbildung 4.4: Anziehende und abstoßende  $1/r$ -Wechselwirkungen.

## Kepler-Gesetze

Vorlesung 12: Fr, 24. 11. 2023

Johannes Kepler fand rein *empirisch* (1609, 1619), ohne Betrachtung der Dynamik:

1. die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht,
2. ein von der Sonne zum Planeten gezogener „Fahrstrahl“ überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen,
3. die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen (Kuben) der großen Bahnhalbachsen.

Das 2. Gesetz ist die Drehimpulserhaltung und gilt für *alle* Zentralkräfte. Die Fläche zwischen  $\phi_0$  und  $\phi(t)$  ist

$$A(t) = \int_{\phi_0}^{\phi(t)} d\phi' \int_0^{r(\phi')} \rho d\rho = \int_{\phi_0}^{\phi(t)} d\phi' \frac{r^2(\phi')}{2} \quad (4.67)$$

also ist die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{r^2(\phi(t))}{2} \frac{d\phi}{dt}(t) = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const.} \quad (4.68)$$

### Sphärische Polarkoordinaten

Wegen der Rotationsinvarianz von (4.63) haben wir Drehimpulserhaltung und können wieder Polarkoordinaten in der Ebene orthogonal zu  $\vec{L}$  wählen. (4.63) in die Gleichung für die Bahnkurve (4.35) eingesetzt ergibt

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm r \sqrt{2mr^2(E + \alpha/r)/p_\phi^2 - 1}. \quad (4.69)$$

Nach Trennung der Variablen

$$\int d\phi = \pm \int \frac{dr/r}{\sqrt{2mr^2(E + \alpha/r)/p_\phi^2 - 1}} \quad (4.70)$$

und Substitution  $u = 1/r$ ,  $dr/r = -du/u$

$$\begin{aligned} \int d\phi &= \mp \int \frac{du/u}{\sqrt{2m/u^2(E + \alpha u)/p_\phi^2 - 1}} \\ &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{2m(E + \alpha u)/p_\phi^2 - u^2}} \end{aligned} \quad (4.71)$$

kann man wieder die Integralformel

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2au + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \text{für } a < 0, b^2 > 4ac \quad (4.72)$$

diesmal mit

$$a = -1 \quad (4.73a)$$

$$b = \frac{2m\alpha}{p_\phi^2} \quad (4.73b)$$

$$c = \frac{2mE}{p_\phi^2} \quad (4.73c)$$

$$b^2 - 4ac = \frac{4m^2\alpha^2}{p_\phi^4} + \frac{8mE}{p_\phi^2} = \frac{4m^2\alpha^2}{p_\phi^4} \left(1 + \frac{2Ep_\phi^2}{m\alpha^2}\right) = \frac{4m^2\alpha^2}{p_\phi^4} e^2 > 0 \quad (4.73d)$$

und der Exzentrizität

$$e = +\sqrt{1 + \frac{2Ep_\phi^2}{m\alpha^2}} \quad (4.74)$$

verwenden:

$$\tilde{\phi}(u) = \phi_0 \mp \arcsin \frac{-2u + 2m\alpha/p_\phi^2}{\frac{2m|\alpha|}{p_\phi^2} e}. \quad (4.75)$$

**Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):**

Die Gesamtenergie ist nach unten wieder durch das Minimum des effektiven Potentials beschränkt

$$E \geq V_{\text{eff.},p_\phi}(r_{\min}), \quad (4.76)$$

wobei  $r_{\min}$  für  $\alpha > 0$  durch

$$0 = \left. \frac{dV_{\text{eff.},p_\phi}}{dr}(r) \right|_{r=r_{\min}} = -\frac{p_\phi^2}{mr_{\min}^3} + \frac{\alpha}{r_{\min}^2} \quad (4.77)$$

festgelegt ist. Also

$$r_{\min} = \frac{p_\phi^2}{m\alpha} \quad (4.78)$$

und damit

$$V_{\text{eff.},p_\phi}(r_{\min}) = -\frac{m\alpha^2}{2p_\phi^2}, \quad (4.79)$$

also

$$E \geq -\frac{m\alpha^2}{2p_\phi^2}. \quad (4.80)$$

Im Fall  $\alpha \leq 0$  gilt natürlich  $E \geq 0$ .

Anschließende Rücksubstitution

$$\phi(r) = \tilde{\phi}(u(r)) = \phi_0 \mp \arcsin \frac{\text{sgn } \alpha - p_\phi^2/(m|\alpha|r)}{e} \quad (4.81)$$

mit der Vorzeichenfunktion

$$\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (4.82)$$

und Umkehrung

$$\pm e \sin(\phi - \phi_0) = -e \cos \phi = \text{sgn } \alpha - \frac{p_\phi^2}{m|\alpha|r}, \quad (4.83)$$

mit  $\phi_0 = \pm\pi/2$ , ergibt

$$r(\phi) = \frac{p_\phi^2}{m|\alpha|} \frac{1}{\text{sgn } \alpha + e \cos \phi}. \quad (4.84)$$

*Kegelschnitte*

Gleichung (4.84) beschreibt Kegelschnitte in Polarkoordinaten, wie in Abbildung 4.5 dargestellt.

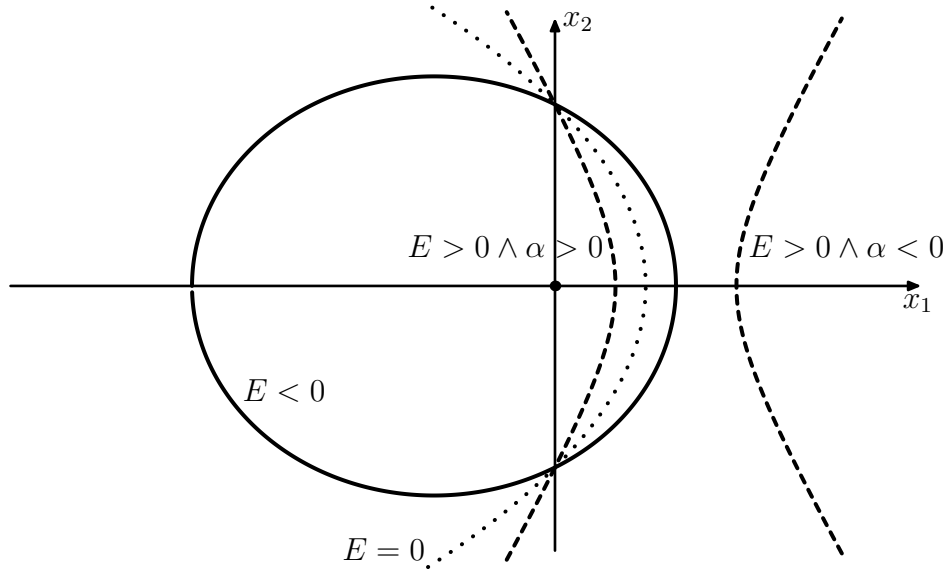


Abbildung 4.5: Kegelschnitte.

Mit dem *semi-latus rectum*

$$l = \frac{p_\phi^2}{m|\alpha|} \quad (4.85)$$

können wir

$$r = \frac{l}{\operatorname{sgn} \alpha + e \cos \phi} \quad (4.86)$$

oder

$$r \operatorname{sgn} \alpha = l - er \cos \phi \quad (4.87)$$

schreiben und in kartesischen Koordinaten

$$\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sgn} \alpha = l - ex, \quad (4.88)$$

bzw.

$$(1 - e^2) x^2 + y^2 = l^2 - 2lex. \quad (4.89)$$

Für  $e = 1$  finden wir daraus eine Parabel

$$y^2 = l^2 - 2lx. \quad (4.90)$$

Mit den Definitionen

$$a = \frac{l}{1 - e^2} \quad (4.91a)$$

$$b^2 = \frac{l^2}{1 - e^2} \quad (4.91b)$$

$$c = ea \quad (4.91c)$$

finden wir für  $e \neq 1$  mit  $b^2 > 0$  eine Ellipse (bzw. Kreis) oder mit  $b^2 < 0$  eine Hyperbel

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(1-e^2)^2}{l^2} (x+ea)^2 + \frac{1-e^2}{l^2} y^2. \quad (4.92)$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{1-e^2} &\stackrel{!}{=} (1-e^2) (x+ea)^2 + y^2 \\ &\stackrel{(4.89)}{=} (1-e^2) (x^2 + 2eax + e^2a^2) - (1-e^2) x^2 + l^2 - 2lex \\ &\stackrel{(4.91a)}{=} (2lex + le^2a) + l^2 - 2lex = le^2a + l^2 \stackrel{(4.91a)}{=} l^2 \frac{e^2}{1-e^2} + l^2 = \frac{l^2}{1-e^2}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Die Form der Kegelschnitte hängt also von der konstanten Gesamtenergie  $E$  ab (vgl. (4.74)):

- $E < 0 \Rightarrow e < 1$ : Ellipse, also gebundene periodische Bahn, nur für Anziehung  $\alpha > 0$  möglich, weil sonst  $E > 0$ ,
- $E = 0 \Rightarrow e = 1$ : Parabel, also ungebundene Bahn, ebenfalls nur für Anziehung  $\alpha > 0$  möglich, weil sonst  $E > 0$ ,
- $E > 0 \Rightarrow e > 1$ : Hyperbel, ebenfalls ungebunden, für *beide Vorzeichen* von  $\alpha$ , also anziehendes und abstoßendes Potential.

Wir finden das 1. Kepler'sche Gesetz, weil die einzigen gebundenen Bahnen Ellipsen sind.

Deren Fläche ist

$$A = \pi ab = \pi \sqrt{a^3 l} = a^{\frac{3}{2}} \frac{\pi p_\phi}{\sqrt{m|\alpha|}} \quad (4.94)$$

und aufgrund der konstanten Flächengeschwindigkeit (4.68) gilt für die Umlaufzeit

$$T = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = a^{\frac{3}{2}} \frac{\pi p_\phi}{\sqrt{m|\alpha|}} \frac{2m}{p_\phi} = a^{\frac{3}{2}} 2\pi \sqrt{\frac{m}{|\alpha|}}. \quad (4.95)$$

also das 3. Kepler'sche Gesetz

$$T^2 \propto a^3. \quad (4.96)$$

*Bemerkung 4.1.* Im Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$  findet man

$$r(\phi) = \frac{p_\phi}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{\cos \phi}, \quad (4.97)$$

was natürlich eine Gerade mit  $x = r \cos \phi = \text{const.}$  beschreibt. Diese hat den Abstand

$$r(0) = \frac{p_\phi}{\sqrt{2mE}} = \frac{|\vec{L}|}{|\vec{p}|} = r_{\min} \quad (4.98)$$

vom Zentrum.

#### 4.2.4 Existenz von geschlossenen Bahnen

Für *alle* anziehenden Zentralpotentiale, die für  $r \rightarrow 0$  nicht schneller als  $-1/r^2$  abfallen, kann  $p_\phi = |\vec{L}|$  so eingestellt werden, daß wegen

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}, p_\phi}}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (4.99)$$

Kreisbahnen mit Radius  $r_0$  eine Lösung sind. Unter kleinen Störungen der Anfangsbedingungen entstehen periodische Bewegungen in  $r$ , die im allgemeinen *nicht* zu geschlossenen Bahnen führen, weil die Perioden in  $r$  und  $\phi$  nicht zueinander passen.

**Theorem 4.2** (Bertrand, 1873). *Das Kepler-Problem und der harmonische Oszillator sind die beiden einzigen Zentralpotentiale im  $\mathbf{R}^3$  für die alle beschränkten Bahnen geschlossen sind.*

#### 4.2.5 Geometrische Lösung für den harmonischen Oszillator und das Keplerproblem

##### Fradkin-Tensor

Der Phasenraum des isotropen harmonischen Oszillators  $TQ = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  hat 6 Dimensionen und mit 4 Erhaltungsgrößen aus der Galilei-Gruppe

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 \vec{x}^2 = \text{const.} \quad (4.100a)$$

$$\delta_{\vec{p}} L = 0 \Rightarrow \vec{L} = m \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \text{const.} \quad (4.100b)$$

Es gibt aber weitere Noether-Symmetrien, die durch einen konstanten und symmetrischen Tensor  $\phi_{ij} = \phi_{ji}$  parameterisiert sind

$$\delta_\varphi \vec{x} = \varphi \dot{\vec{x}} \quad (4.101a)$$

und damit

$$\delta_\varphi \dot{\vec{x}} = \varphi \ddot{\vec{x}}, \quad (4.101b)$$

bzw. komponentenweise

$$\delta_\varphi x_i = \sum_{j=1}^3 \varphi_{ij} \dot{x}_j \quad (4.102a)$$

$$\delta_\varphi \dot{x}_i = \sum_{j=1}^3 \varphi_{ij} \ddot{x}_j. \quad (4.102b)$$

**In den Übungsgruppen, nicht in der Vorlesung besprochen:**

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \delta_\varphi L &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta_\varphi x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_\varphi \dot{x}_i = - \sum_{ij} m \omega^2 x_i \varphi_{ij} \dot{x}_j + \sum_{ij} m \dot{x}_i \varphi_{ij} \ddot{x}_j \\ &= \sum_{ij} \varphi_{ij} m (\dot{x}_i \ddot{x}_j - \omega^2 x_i \dot{x}_j) = \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_{ij} \varphi_{ij} \frac{m}{2} (\dot{x}_i \dot{x}_j - \omega^2 x_i x_j)}_{\Lambda_\varphi(\vec{x}, \dot{\vec{x}})} \quad (4.103) \end{aligned}$$

und die zugehörigen Integrale<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} I_\varphi &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_\varphi x_i - \Lambda_\varphi(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_{ij} m \dot{x}_i \varphi_{ij} \dot{x}_j - \sum_{ij} \varphi_{ij} \frac{m}{2} (\dot{x}_i \dot{x}_j - \omega^2 x_i x_j) \\ &= \sum_{ij} \varphi_{ij} \frac{m}{2} (\dot{x}_i \dot{x}_j + \omega^2 x_i x_j) = \sum_{ij} \varphi_{ij} F_{ij} \quad (4.104) \end{aligned}$$

mit den

Komponenten des *Fradkin-Tensor*

$$F_{ij} = \frac{m}{2} (\dot{x}_i \dot{x}_j + \omega^2 x_i x_j) = F_{ji}, \quad (4.105)$$

Vorlesung 13: Mo, 27. 11. 2023

deren Konstanz entlang von Lösungen auch direkt nachgewiesen werden kann

$$\begin{aligned} \frac{dF_{ij}}{dt} &= \frac{m}{2} (\ddot{x}_i \dot{x}_j + \dot{x}_i \ddot{x}_j + \omega^2 \dot{x}_i x_j + \omega^2 x_i \dot{x}_j) \\ &= \frac{m}{2} (\ddot{x}_i + \omega^2 x_i) \dot{x}_j + \frac{m}{2} \dot{x}_i (\ddot{x}_j + \omega^2 x_j) = 0. \quad (4.106) \end{aligned}$$



Allerdings sind höchstens 5 der 6 unabhängigen Komponenten neu

$$H = \text{tr } F = F_{11} + F_{22} + F_{33}. \quad (4.107)$$

Man kann nun zeigen, daß  $F$  die zugehörige Bahn vollständig festlegt. Mit

$$\sum_{ij} x_i F_{ij} x_j = \frac{m}{2} \left( (\vec{x} \dot{\vec{x}})^2 + \omega^2 (\vec{x}^2)^2 \right) \quad (4.108)$$

und

$$\sum_i x_i H x_i = \frac{m}{2} \left( \vec{x}^2 \dot{\vec{x}}^2 + \omega^2 (\vec{x}^2)^2 \right) \quad (4.109)$$

sowie

$$\vec{L}^2 = \sum_i L_i L_i = m^2 \sum_{jkj'k'} \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{ij'k'}}_{\delta_{jj'} \delta_{kk'} - \delta_{jk'} \delta_{kj'}} x_j \dot{x}_k x_{j'} \dot{x}_{k'} = m^2 \vec{x}^2 \dot{\vec{x}}^2 - m^2 (\vec{x} \dot{\vec{x}})^2 \quad (4.110)$$

folgt

$$\sum_{ij} x_i (H \delta_{ij} - F_{ij}) x_j = \frac{1}{2m} \vec{L}^2 > 0. \quad (4.111)$$

Dies bedeutet, daß die Matrix

$$E = H \mathbf{1} - F \quad (4.112)$$

positiv ist, was man alternativ auch aus der Dreiecksungleichung  $\vec{a} \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$  folgern könnte. Den entarteten Grenzfall  $\vec{L} = 0$  werden wir unten diskutieren. Deshalb ist (4.111) die Gleichung für ein Ellipsoid mit den Halbachsen

$$a_i = \sqrt{\frac{\vec{L}^2}{2m\kappa_i}}, \quad (4.113)$$

wobei  $\kappa_{1,2,3}$  die Eigenwerte von  $E$  bezeichnen.

Sowohl  $F$  als auch  $E$  sind symmetrische Matrizen und haben einen vollständigen Satz von orthogonalen Eigenvektoren. Wegen

$$\sum_j F_{ij} L_j = 0 \quad (4.114)$$

ist  $\vec{L}$  Eigenvektor zum Eigenwert 0. Wir wählen nun o. B. d. A. ein Koordinatensystem mit

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (4.115a)$$

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.115b)$$

und finden die verbleibenden Eigenwerte mit

$$\det(f - \lambda \mathbf{1}) = (f_{11} - \lambda)(f_{22} - \lambda) - f_{12}^2 = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} f + \det f \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.116)$$

wobei

$$f = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.117)$$

Das Ergebnis ist

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} f \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\operatorname{tr} f)^2 - 4 \det f} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} f \pm \frac{1}{2} \Delta \quad (4.118a)$$

$$\lambda_3 = 0. \quad (4.118b)$$

Daraus erhalten wir die Eigenwerte von  $E$  als  $\kappa_{1,2,3} = H - \lambda_{1,2,3}$ , bzw.

$$\kappa_{1/2} = \frac{1}{2} H \mp \frac{1}{2} \Delta \quad (4.119a)$$

$$\kappa_3 = H. \quad (4.119b)$$

Hieraus kann man nicht direkt ablesen, ob alle  $\kappa_i$  positiv sind. Aber aus

$$F_{12}^2 = \frac{m^2}{4} (\dot{x}_1^2 \dot{x}_2^2 + 2\omega^2 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \omega^4 x_1^2 x_2^2) \quad (4.120a)$$

$$F_{11} F_{22} = \frac{m^2}{4} (\dot{x}_1^2 \dot{x}_2^2 + \omega^2 x_1^2 \dot{x}_2^2 + \omega^2 x_2^2 \dot{x}_1^2 + \omega^4 x_1^2 x_2^2) \quad (4.120b)$$

folgt

$$\begin{aligned} \det f = F_{11} F_{22} - F_{12}^2 &= \frac{m^2 \omega^2}{4} (x_1^2 \dot{x}_2^2 + x_2^2 \dot{x}_1^2 - 2x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2) \\ &= \frac{m^2 \omega^2}{4} (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1)^2 = \frac{\omega^2}{4} L_3^2 \end{aligned} \quad (4.121)$$

und damit

$$\Delta^2 = (\operatorname{tr} f)^2 - 4 \det f = H^2 - \omega^2 L_3^2. \quad (4.122)$$

Unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems gilt somit

$$\Delta^2 = H^2 - \omega^2 \vec{L}^2 \quad (4.123)$$

weil wir ein System mit  $F_{33} = 0$  und  $L_1 = L_2 = 0$  ausgewählt haben, die Eigenwerte aber unabhängig vom Koordinatensystem sein müssen. Damit finden wir

$$\kappa_{1/2} = \frac{1}{2} (H \mp \Delta) = \frac{H}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \vec{L}^2}{H^2}} \right) \geq 0 \quad (4.124a)$$

$$\kappa_3 = H > 0. \quad (4.124b)$$

Außerdem können wir

$$\omega^2 \vec{L}^2 \leq H^2 \quad (4.125)$$

schließen, vgl. (4.53), weil es sonst imaginäre Eigenwerte gäbe.

Die Bahnen sind also Ellipsen, die sich aus dem Schnitt des Ellipsoids (4.111) mit der zu  $\vec{L}$  orthogonalen Ebene mit den Halbachsen

$$a_{1,2}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m \left( H \mp \sqrt{H^2 - \omega^2 \vec{L}^2} \right)} \quad (4.126)$$

ergeben. Extremfälle:

- $\omega^2 \vec{L}^2 = H^2$ : Kreis mit  $\kappa_1 = \kappa_2 = H/2$  und  $a_1^2 = a_2^2 = \vec{L}^2/(mH)$ ,
- $\omega^2 \vec{L}^2 \rightarrow 0$ : entartete Ellipse mit  $\kappa_1 \rightarrow 0$ ,  $\kappa_2 \rightarrow H$  und  $a_1^2 \rightarrow 2H/(m\omega^2)$ ,  $a_2^2 \rightarrow \vec{L}^2/(2mH) \rightarrow 0$

Die Geschwindigkeiten  $\dot{x}_i$  sind komponentenweise durch die Konstanz der Diagonalelemente

$$F_{ii} = \frac{m}{2} (\dot{x}_i^2 + \omega^2 x_i^2) \quad (4.127)$$

aus den Orten  $x_i$  festgelegt.

### Runge-Lenz-Vektor

Der Phasenraum des Keplerproblems  $TQ = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  hat wieder 6 Dimensionen und 4 Erhaltungsgrößen aus der Galilei-Gruppe

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - \frac{\alpha}{|\vec{x}|} = \text{const.} \quad (4.128a)$$

$$\delta_{\vec{\theta}} L = 0 \Rightarrow \vec{L} = m \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \text{const.} \quad (4.128b)$$

Es gibt wieder weitere Noether-Symmetrien, die in diesem Fall durch einen dreikomponentigen Vektor  $\vec{\rho}$  parametrisiert sind

$$\delta_{\rho} \vec{x} = 2(\vec{\rho} \vec{x}) \dot{\vec{x}} - (\vec{\rho} \dot{\vec{x}}) \vec{x} - (\vec{x} \dot{\vec{x}}) \vec{\rho} \quad (4.129a)$$

und damit

$$\begin{aligned}\delta_\rho \dot{\vec{x}} &= 2(\vec{\rho}\vec{x})\ddot{\vec{x}} + 2(\vec{\rho}\dot{\vec{x}})\dot{\vec{x}} - (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})\dot{\vec{x}} - (\vec{\rho}\ddot{\vec{x}})\vec{x} - \dot{\vec{x}}^2 \vec{\rho} - (\vec{x}\ddot{\vec{x}})\vec{\rho} \\ &= 2(\vec{\rho}\vec{x})\ddot{\vec{x}} - (\vec{\rho}\ddot{\vec{x}})\vec{x} + (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}}^2 \vec{\rho} - (\vec{x}\ddot{\vec{x}})\vec{\rho}. \quad (4.129b)\end{aligned}$$

**In den Übungsgruppen, nicht in der Vorlesung besprochen:**

Daraus

$$\begin{aligned}\delta_\rho L &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta_\rho x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_\rho \dot{x}_i \\ &= - \sum_i \alpha \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \left( 2(\vec{\rho}\vec{x})\dot{x}_i - (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})x_i - (\vec{x}\dot{\vec{x}})\rho_i \right) \\ &\quad + \sum_i m \dot{x}_i \left( 2(\vec{\rho}\vec{x})\ddot{x}_i - (\vec{\rho}\ddot{\vec{x}})x_i + (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})\dot{x}_i - \dot{\vec{x}}^2 \rho_i - (\vec{x}\ddot{\vec{x}})\rho_i \right) \\ &= -\alpha \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \left( 2(\vec{\rho}\vec{x})\dot{\vec{x}} - (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})\vec{x} - (\vec{x}\dot{\vec{x}})\vec{\rho} \right) \\ &\quad + m \dot{\vec{x}} \left( 2(\vec{\rho}\vec{x})\ddot{\vec{x}} - (\vec{\rho}\ddot{\vec{x}})\vec{x} + (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}}^2 \vec{\rho} - (\vec{x}\ddot{\vec{x}})\vec{\rho} \right) \\ &= -\alpha \frac{(\vec{x}\dot{\vec{x}})(\vec{\rho}\vec{x}) - \vec{x}^2(\vec{\rho}\dot{\vec{x}})}{|\vec{x}|^3} + m \left( 2(\vec{\rho}\vec{x})(\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}}) - (\vec{\rho}\ddot{\vec{x}})(\vec{x}\dot{\vec{x}}) - (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})(\vec{x}\ddot{\vec{x}}) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \alpha \frac{\vec{\rho}\vec{x}}{|\vec{x}|} + m \dot{\vec{x}}^2(\vec{\rho}\vec{x}) - m(\vec{x}\dot{\vec{x}})(\vec{\rho}\dot{\vec{x}}) \right)}_{\Lambda_\rho(\vec{x}, \dot{\vec{x}})} \quad (4.130)\end{aligned}$$

und den zugehörigen Integralen

$$\begin{aligned}I_\rho^{RL} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_\rho x_i - \Lambda_\rho(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \\ &= \sum_i m \dot{x}_i \left( 2(\vec{\rho}\vec{x})\dot{x}_i - (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})x_i - (\vec{x}\dot{\vec{x}})\rho_i \right) - \alpha \frac{\vec{\rho}\vec{x}}{|\vec{x}|} - m \dot{\vec{x}}^2(\vec{\rho}\vec{x}) + m(\vec{x}\dot{\vec{x}})(\vec{\rho}\dot{\vec{x}}) \\ &= 2m \left( \dot{\vec{x}}^2(\vec{\rho}\vec{x}) - (\vec{x}\dot{\vec{x}})(\vec{\rho}\dot{\vec{x}}) \right) - \alpha \frac{\vec{\rho}\vec{x}}{|\vec{x}|} - m \dot{\vec{x}}^2(\vec{\rho}\vec{x}) + m(\vec{x}\dot{\vec{x}})(\vec{\rho}\dot{\vec{x}}) \\ &= m \left( \dot{\vec{x}}^2(\vec{\rho}\vec{x}) - (\vec{x}\dot{\vec{x}})(\vec{\rho}\dot{\vec{x}}) \right) - \alpha \frac{\vec{\rho}\vec{x}}{|\vec{x}|} = \vec{\rho}\vec{R}. \quad (4.131)\end{aligned}$$

Also ist der *Runge-Lenz-Vektor*

$$\begin{aligned}\vec{R} &= m \left( \dot{\vec{x}}^2 \vec{x} - (\vec{x}\dot{\vec{x}})\dot{\vec{x}} \right) - \alpha \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = m \dot{\vec{x}} \times \left( \vec{x} \times \dot{\vec{x}} \right) - \alpha \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \\ &= \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m} - \alpha \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \text{const.} \quad (4.132)\end{aligned}$$

im Keplerproblem erhalten, was man auch durch explizite Rechnung mit den **ELG** (4.66) überprüfen kann.

Der gleichzeitige Erhaltung der Energie, des Drehimpulses und des Runge-Lenz-Vektors genügen, um die Bahnen eindeutig festzulegen. Offensichtlich steht  $\vec{R}$  orthogonal auf  $\vec{L}$

$$\vec{L}\vec{R} = 0, \quad (4.133a)$$

liegt also in der Bahnebene. Außerdem hängt das Skalarprodukt von  $\vec{x}$  und  $\vec{R}$  nur vom Betrag des Drehimpulses und vom Betrag von  $\vec{x}$  ab

$$\vec{x}\vec{R} = \frac{\vec{x}(\vec{p} \times \vec{L})}{m} - \alpha|\vec{x}| = \frac{\vec{L}^2}{m} - \alpha|\vec{x}|. \quad (4.133b)$$

Schließlich hängt die Länge von  $\vec{R}$  nur von der Energie  $H$  und vom Betrag des Drehimpulses ab

$$\begin{aligned} \vec{R}^2 &= \frac{(\vec{p} \times \vec{L})^2}{m^2} - \frac{2\alpha\vec{L}^2}{m|\vec{x}|} + \alpha^2 = \frac{\vec{p}^2\vec{L}^2 - (\vec{p}\vec{L})^2}{m^2} - \frac{2\alpha\vec{L}^2}{m|\vec{x}|} + \alpha^2 \\ &= \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{|\vec{x}|} \right) \frac{2\vec{L}^2}{m} + \alpha^2 = \frac{2H\vec{L}^2}{m} + \alpha^2. \end{aligned} \quad (4.133c)$$

Mit  $\vec{x}\vec{R} = r|\vec{R}|\cos\phi$  in Polarkoordinaten folgt aus (4.133b)

$$r|\vec{R}|\cos\phi = \frac{1}{m}\vec{L}^2 - \alpha r \quad (4.134)$$

oder

$$r = \frac{\vec{L}^2}{\alpha m} \frac{1}{1 + \frac{|\vec{R}|}{\alpha} \cos\phi} = \frac{\vec{L}^2}{|\alpha|m} \frac{1}{\operatorname{sgn}\alpha + \frac{|\vec{R}|}{|\alpha|} \cos\phi}, \quad (4.135)$$

wobei

$$\frac{|\vec{R}|}{|\alpha|} = \sqrt{1 + \frac{2H\vec{L}^2}{m\alpha^2}} = e. \quad (4.136)$$

Gleichung (4.135) beschreibt wieder Kegelschnitte in Polarkoordinaten, wie in Abbildung 4.5 dargestellt.

Der Runge-Lenz-Vektor liegt in der Symmetrieachse der Kegelschnitte, die einen Brennpunkt mit dem Punkt nächster Annäherung verbindet.

### 4.3 Planeten und Monde

Im allgemeinen hat man es nicht nur mit zwei Körpern zu tun, die miteinander wechselwirken. Leider werden die Gleichungen sehr schnell unlösbar und das Verhalten des Systems chaotisch. Der Grund hierfür ist, daß die Anzahl der Freiheitsgrade wächst und die Anzahl der Symmetrien nicht mehr ausreicht, genügend viele Erhaltungsgrößen zu bewirken.

#### 4.3.1 Ausgedehnte Körper

Bislang wurden nur Punktmassen betrachtet. Realistische Körper sind aber ausgedehnt und ihr Potential ist eine mit der Dichte  $\rho$  gewichtete Superposition

$$V_\rho(\vec{x}) = \int d^3y \rho(\vec{y}) V(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.137)$$

mit

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) = 1 \quad (4.138a)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad (\text{für } |\vec{x}| > R). \quad (4.138b)$$

Annahme: Kugelsymmetrische Massenverteilung und  $1/r$ -Potential

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0(|\vec{x}|) \quad (4.139a)$$

$$V(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|}. \quad (4.139b)$$

Wenn man die  $y_3$ -Achse der Kugelkoordinaten für  $\vec{y}$  in  $\vec{x}$ -Richtung legt

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\vec{x}\vec{y}} = \sqrt{|\vec{x}|^2 + r^2 - 2|\vec{x}|r \cos \theta} \quad (4.140)$$

und (mit  $z = \cos \theta$ )

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{|\vec{x}|^2 + r^2 - 2|\vec{x}|rz}} &= -\frac{\sqrt{|\vec{x}|^2 + r^2 - 2|\vec{x}|rz}}{|\vec{x}|r} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{\sqrt{|\vec{x}|^2 + r^2 + 2|\vec{x}|r} - \sqrt{|\vec{x}|^2 + r^2 - 2|\vec{x}|r}}{|\vec{x}|r} \\ &= \frac{||\vec{x}| + r| - ||\vec{x}| - r||}{|\vec{x}|r} = \begin{cases} \frac{|\vec{x}| + r - (|\vec{x}| - r)}{|\vec{x}|r} = \frac{2}{|\vec{x}|} & \text{für } |\vec{x}| > r \\ \frac{|\vec{x}| + r + (|\vec{x}| - r)}{|\vec{x}|r} = \frac{2}{r} & \text{für } |\vec{x}| < r \end{cases} \\ &= \Theta(|\vec{x}| - r) \frac{2}{|\vec{x}|} + \Theta(r - |\vec{x}|) \frac{2}{r} \quad (4.141) \end{aligned}$$

mit der Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}. \quad (4.142)$$

Damit

$$\begin{aligned} V_\rho(\vec{x}) &= - \int_0^R dr \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \rho_0(r) \frac{\alpha}{\sqrt{|\vec{x}|^2 + r^2 - 2|\vec{x}|r \cos \theta}} \\ &= -2\pi \int_0^R dr r^2 \rho_0(r) \left( \Theta(|\vec{x}| - r) \frac{2\alpha}{|\vec{x}|} + \Theta(r - |\vec{x}|) \frac{2\alpha}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.143)$$

und außerhalb der Massenverteilung ist  $|\vec{x}| > r$

$$V_\rho(\vec{x}) \Big|_{|\vec{x}| > R} = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|} \underbrace{4\pi \int_0^R dr r^2 \rho_0(r)}_{=\int d^3x \rho(\vec{x})=1} = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|}. \quad (4.144)$$

Kugelsymmetrische Massenverteilungen können *außerhalb* ihrer Grenze also durch eine Punktmasse beschrieben werden.

### 4.3.2 Zweizentrenproblem

Die Bewegungsgleichungen für eine Masse  $m$  im Schwerfeld zweier fester Massen  $M_1$  und  $M_2$

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + \frac{\alpha_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} + \frac{\alpha_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \quad (4.145)$$

können durch die Wahl geeigneter krummliniger Koordinaten noch exakt gelöst werden.

### 4.3.3 Restringsiertes Dreikörperproblem

Vorlesung 14: Fr, 01.12.2023

Die Bewegungsgleichungen für eine Masse  $m$  im Schwerfeld zweier Massen  $M_1 \gg m$  und  $M_2 \gg m$ , die einander anziehen, aber die kleine Masse  $m$  nicht spüren

$$L_2 = \frac{M_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{M_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 + \frac{\alpha}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (4.146a)$$

$$L_3(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + \frac{\alpha_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|} + \frac{\alpha_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2(t)|} \quad (4.146b)$$

können schon nicht mehr allgemein gelöst werden.

### Lagrangepunkte

Es gibt im restringierten Zweikörperproblem allerdings 5 Gleichgewichtspunkte

- 2 gleichseitige Dreiecke  $L_4$  und  $L_5$ : lokale Maxima des effektiven Potentials, aber für  $M_1/M_2 > (25 + 3\sqrt{69})/2 \approx 24.96$  durch Corioliskraft stabilisiert; im Sonnensystem annähernd durch Sonne, Jupiter und eine Gruppe von Asterioden, die „Trojaner“, realisiert,
- 3 kollineare Punkte  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$ . Diese sind instabil, aber trotzdem nützlich als Parkposition für Satelliten, weil vergleichsweise wenig Kurskorrekturen nötig. Aktuelle Missionen zu  $L_2$  sind das JWST (<https://webbtelescope.org/>) und Euclid (<https://www.euclid-ec.org/>).

Details zur Stabilität von  $L_4$  und  $L_5$  finden sich auf der Webseite der inzwischen beendeten WMAP Mission: <http://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>. Auf Wikipedia findet man eine Liste von künstlichen Satelliten und natürlichen Objekten an Lagrangepunkten im Sonnensystem: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_objects\\_at\\_Lagrange\\_points](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_objects_at_Lagrange_points).

## 4.4 Streuung

Sofern die Kräfte oder Potentiale für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  hinreichend schnell abfallen, werden sich Teilchen mit  $E > 0$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  geradlinig bewegen. Es macht daher Sinn zu fragen, wie sie gestreut werden, d. h. welcher einlaufende Impuls führt zu welchem auslaufenden Impuls.

### 4.4.1 Potentialstreuung

Konservative Kräfte können wir wieder durch Potentiale beschreiben und ein sogenanntes *Hard Core Potential* als eine unendliche Schwelle

$$V_{\text{hc}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0 \\ +\infty & \text{für } x < 0 \end{cases}, \quad (4.147)$$

die, wie in Abbildung 4.6, als Grenzfall glatter Potentiale angesehen werden kann:

$$V_{\text{hc}}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} V_0 e^{-\alpha x}. \quad (4.148)$$



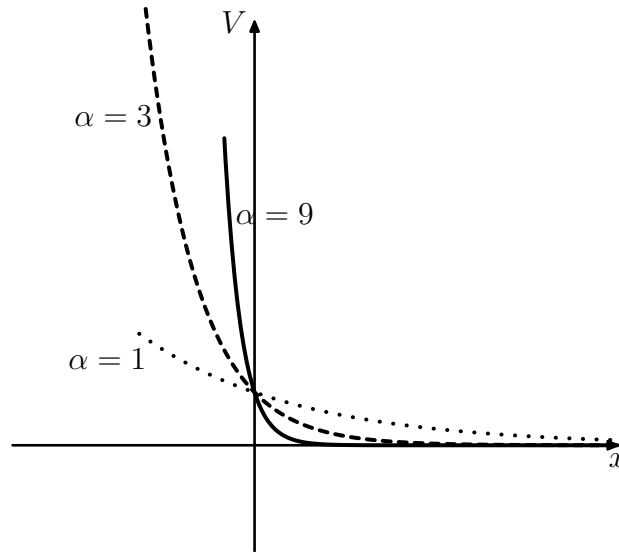


Abbildung 4.6: *Hard Core als Grenzfall glatter Potentiale:  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} V_0 e^{-\alpha x}$ .*

Konsequenz eines Potentials wie in Abbildung 4.6 ist, daß *jedes* Teilchen reflektiert wird und aufgrund der Energieerhaltung

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} T(\dot{\vec{x}}(t)) = E \quad (4.149)$$

gilt, also

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\dot{\vec{x}}(t)| = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (4.150)$$

oder

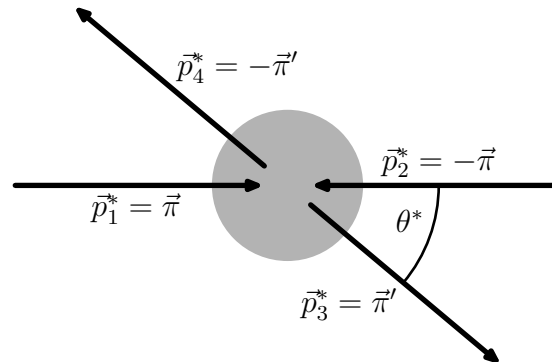
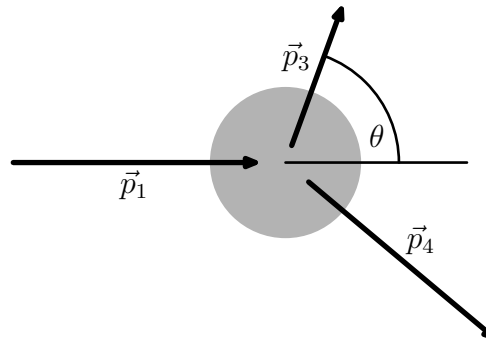
$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\vec{p}(t)| = \sqrt{2mE}. \quad (4.151)$$

Damit folgt aus der Impulserhaltung *parallel* zu einer Wand die Impulsumkehr *senkrecht* zu einer Wand. Als Konsequenz haben wir „Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“.

Diese Überlegungen bleiben richtig für eine weiche Wand, d. h.  $\alpha < \infty$  in Abbildung 4.6, es wird sich nur die Verweildauer des Teilchen erhöhen.

#### 4.4.2 Labor- vs. Schwerpunktsystem

Aufgrund der Galilei-Symmetrien und der daraus folgenden Erhaltung von Gesamtimpuls und Schwerpunktsbewegung können wir allgemeine Aussagen über die Kinematik von Streuprozessen machen, auch wenn wir *nichts* über

Abbildung 4.7: *Streuung im Schwerpunktssystem.*Abbildung 4.8: *Streuung im Laborsystem  $\vec{p}_2 = 0$ .*

die zugrundeliegende Dynamik wissen. Insbesondere können wir zulassen, daß die Teilchen in andere Teilchen umgewandelt werden und dabei ihre Masse ändern und/oder daß im Streuprozeß Energie erzeugt oder abgegeben wird. Solche Prozesse, werden als *inelastische Streuung* bezeichnet.

NB: für Streuprozeesse mit Umwandlung von Teilchen muß im Experiment meistens so viel kinetische Energie aufgebracht werden, daß die Galilei-Gruppe durch die Lorentz-Gruppe der speziellen Relativitätstheorie ersetzt werden muß.

Im Folgenden werden wir allgemein die Kinematik für die Streuung eines Teilchens der Masse  $m_1$  (*Projektil*) an einem Teilchen der Masse  $m_2$  (*Target*) in zwei Teilchen der Massen  $m_3$  und  $m_4$  untersuchen und dabei zulassen, daß sich die Gesamtenergie um  $\Delta E$  ändert, z.B. durch Anregung innerer Freiheitsgrade.

Im Abschnitt 4.1.1 wurde ein Koordinatentransformation auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten und -impulse, (4.8) und (4.13) durchgeführt

$$\vec{X} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.152a)$$

$$\vec{\xi} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (4.152b)$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (4.152c)$$

$$\vec{\pi} = \frac{\mu_{12}}{m_1} \vec{p}_1 - \frac{\mu_{12}}{m_2} \vec{p}_2 \quad (4.152d)$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.153)$$

um den Erhaltungssatz für die Schwerpunktsbewegung auszunutzen.

Die Relativimpulse können aber auch als das Resultat einer Galilei-Transformation  $G$

$$G : \vec{x} \mapsto \vec{x}^* = \vec{x} + \vec{v}t \quad (4.154a)$$

$$G : \vec{p} \mapsto \vec{p}^* = \vec{p} + m\vec{v}, \quad (4.154b)$$

mit der umgekehrten Geschwindigkeit der Schwerpunktsbewegung

$$\vec{v} = -\frac{1}{m_1 + m_2} \vec{P} = -\frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.155)$$

verstanden werden

$$G : \vec{p}_1 \mapsto \vec{p}_1 - m_1 \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mu_{12}}{m_1} \vec{p}_1 - \frac{\mu_{12}}{m_2} \vec{p}_2 = \vec{\pi} \quad (4.156a)$$

$$G : \vec{p}_2 \mapsto \vec{p}_2 - m_2 \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{p}_2 - m_2 \vec{p}_1}{m_1 + m_2} = -\vec{\pi}. \quad (4.156b)$$

$G$  transformiert offensichtlich ins Ruhesystem des Schwerpunkts (vgl. Abbildung 4.7)

$$G : \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \mapsto 0. \quad (4.157)$$

Der Relativimpuls nach der Streuung ist

$$\vec{\pi}' = \frac{\mu_{34}}{m_3} \vec{p}_3 - \frac{\mu_{34}}{m_4} \vec{p}_4. \quad (4.158)$$

Aus der Gesamtimpulserhaltung

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{P}, \quad (4.159)$$

bzw.  $\vec{p}_4 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3$ , folgt

$$\vec{\pi}' = \left( \frac{\mu_{34}}{m_3} + \frac{\mu_{34}}{m_4} \right) \vec{p}_3 - \frac{\mu_{34}}{m_4} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{p}_3 - \frac{\mu_{34}}{m_4} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2). \quad (4.160)$$

## Vorlesung 15: Mo, 04.12.2023

Das Laborsystem (Abbildung 4.8) ist durch

$$\vec{p}_2 = 0 \quad (4.161)$$

definiert, also

$$\vec{\pi} = \frac{\mu_{12}}{m_1} \vec{p}_1 \quad (4.162)$$

und damit

$$\vec{\pi}' = \vec{p}_3 - \frac{m_1}{\mu_{12}} \frac{\mu_{34}}{m_4} \vec{\pi} = \vec{p}_3 - R \vec{\pi} \quad (4.163)$$

mit

$$R = \frac{m_1}{m_4} \frac{\mu_{34}}{\mu_{12}} \quad (4.164)$$

oder

$$\vec{p}_3 = \vec{\pi}' + R \vec{\pi}. \quad (4.165)$$

Für elastische Streuung

$$m_1 = m_3 \quad (4.166a)$$

$$m_2 = m_4 \quad (4.166b)$$

weil die Teilchen ihre Natur nicht ändern, also mit anderen Worten

$$R = \frac{m_1}{m_2}. \quad (4.167)$$

Weil Labor- und Schwerpunktssystem durch eine Galilei-Transformation verknüpft sind, macht es Sinn, die Streuwinkel zu vergleichen

$$\cos \theta = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_3}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_3|} \quad (4.168a)$$

$$\cos \theta^* = \frac{\vec{\pi} \vec{\pi}'}{|\vec{\pi}| |\vec{\pi}'|}. \quad (4.168b)$$

Einerseits gilt

$$\vec{p}_1 \vec{p}_3 = \frac{m_1}{\mu_{12}} \vec{\pi} (R \vec{\pi} + \vec{\pi}') = \frac{m_1}{\mu_{12}} |\vec{\pi}|^2 (R + r \cos \theta^*) \quad (4.169)$$

mit

$$r = \frac{|\vec{\pi}'|}{|\vec{\pi}|}. \quad (4.170)$$

Für elastische Streuung

$$|\vec{\pi}'| = |\vec{\pi}|, \quad (4.171)$$

wegen Energieerhaltung im Schwerpunktssystem und  $\mu_{12} = \mu_{34}$  weil die Teilchen ihre Natur nicht ändern, also

$$r = 1. \quad (4.172)$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 \vec{p}_3 &= |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta = \frac{m_1}{\mu_{12}} |\vec{\pi}| |R\vec{\pi} + \vec{\pi}'| \cos \theta \\ &= \frac{m_1}{\mu_{12}} |\vec{\pi}|^2 \sqrt{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (4.173)$$

also

$$R + r \cos \theta^* = \sqrt{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2} \cos \theta \quad (4.174)$$

bzw.

$$\cos \theta = \frac{R + r \cos \theta^*}{\sqrt{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2}}. \quad (4.175)$$

Daraus folgt

$$\cos^2 \theta = \frac{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2 \cos^2 \theta^*}{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2} \quad (4.176)$$

und

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 \theta &= \frac{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2 - r^2 \sin^2 \theta^*}{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2} \\ &= 1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta^*}{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2}. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Weil  $\sin \theta > 0$  und  $\sin \theta^* > 0$  folgt daraus

$$\sin \theta = \frac{r \sin \theta^*}{\sqrt{R^2 + 2rR \cos \theta^* + r^2}} \quad (4.178)$$

und schließlich

$$\tan \theta = \frac{r \sin \theta^*}{R + r \cos \theta^*} = \frac{\sin \theta^*}{R/r + \cos \theta^*}. \quad (4.179)$$

Die Funktion

$$\theta^* \mapsto \theta = \operatorname{atan} \frac{\sin \theta^*}{R/r + \cos \theta^*} \quad (4.180)$$

hängt, wie in Abbildung 4.9 zu sehen, empfindlich vom Parameter  $R/r$  ab:

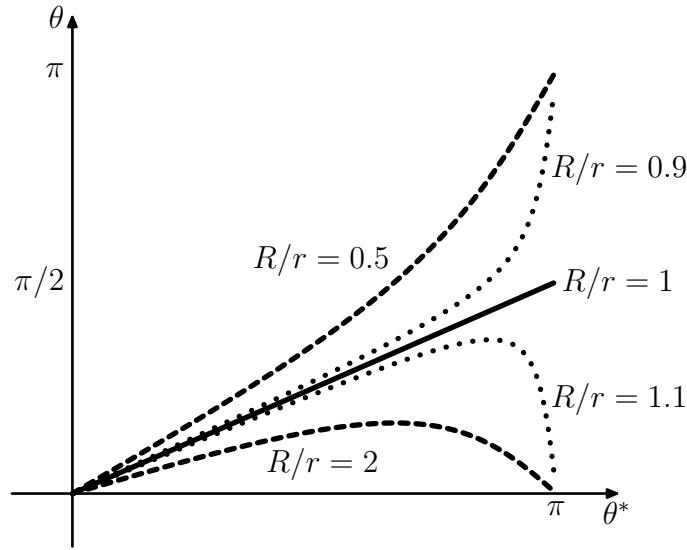


Abbildung 4.9: Streuwinkel  $\theta = \text{atan}(\sin \theta^* / (R/r + \cos \theta^*))$  im Laborsystem  $\vec{p}_2$  als Funktion des Streuwinkels  $\theta^*$  im Schwerpunktsystem für verschiedene  $R/r$ . Für elastische Streuung gilt  $R/r = m_{\text{Projektil}}/m_{\text{Target}}$ .

- für  $R/r = 1$  folgt mit der Halbwinkelformel

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (4.181)$$

die Relation

$$\tan \theta = \tan \frac{\theta^*}{2}, \quad (4.182)$$

also

$$\theta = \frac{\theta^*}{2}. \quad (4.183)$$

Dieser Fall ist bei der elastischen Streuung von Teilchen gleicher Masse realisiert. Für  $\theta^* = \pi$  erhalten wir formal  $\theta = \pi/2$ , aber das Projektil bleibt liegen und die ganze Energie wird auf das Target übertragen;

- für  $R/r \rightarrow 0$  folgt offensichtlich

$$\theta = \theta^*. \quad (4.184)$$

Dies entspricht wegen

$$\frac{R}{r} = \frac{m_3}{m_4} \frac{1 + m_1/m_2}{1 + m_3/m_4} \quad (4.185)$$

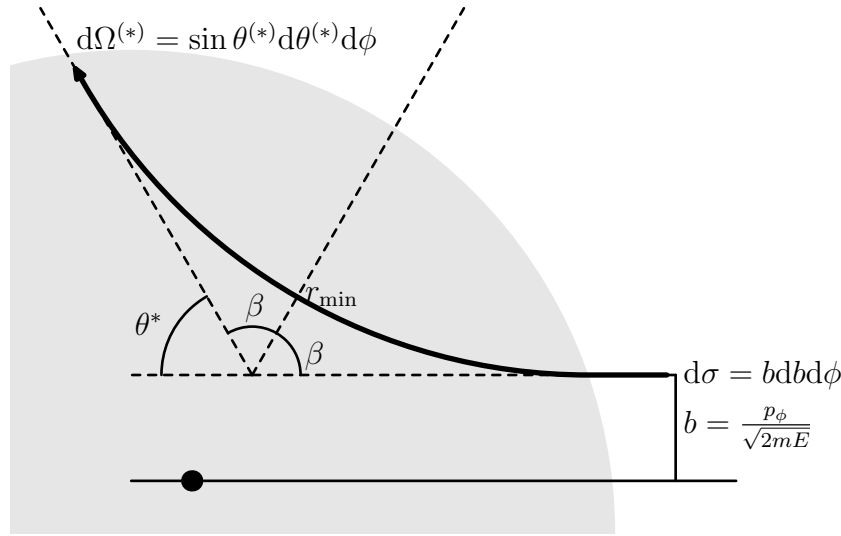


Abbildung 4.10: Wirkungsquerschnitt.

auch intuitiv dem Grenzfall  $m_1 \ll m_2 \wedge m_3 \ll m_4$  der Streuung einer sehr leichten an einer sehr schweren Masse, in dem Schwerpunkts- und Laborsystem zusammenfallen;

- $R/r \in ]0, 1[$  interpoliert zwischen  $R/r = 1$  und  $R/r = 0$ , allerdings springt der Endpunkt sofort von  $\pi \mapsto \pi/2$  auf  $\pi \mapsto \pi$ , weil das Projektil tatsächlich zurückgestreut werden kann.
- für  $R/r \in ]1, \infty[$  ist die Funktion *nicht* monoton wachsend, weil das Projektil *nie* zurückgestreut werden kann, also für große  $\theta^*$  trotzdem kleine  $\theta$  folgen. Mit wachsendem  $R/r$  wird das maximale  $\theta$  immer kleiner.

#### 4.4.3 Wirkungsquerschnitt

Wegen der Zeitumkehrinvarianz sind die Trajektorien spiegelsymmetrisch um den halben von den Asymptoten eingeschlossenen Winkel  $\beta$ . Der Streuwinkel im Schwerpunktssystem ist dann

$$\theta^* = \pi - 2\beta. \quad (4.186)$$

Für Zentralkräfte ergibt sich der halbe eingeschlossene Winkel  $\beta$  aus der Gleichung (4.35) für die Bahnkurve

$$\beta = \int_0^\beta d\varphi = \int_{r_{\min}}^\infty \frac{dr/r}{\sqrt{2mr^2(E - V(r))/p_\varphi^2 - 1}} \quad (4.187)$$

wobei der minimale Abstand vom Target  $r_{\min}$  durch

$$r_{\min} = \max \{r : V_{\text{eff}}(r) = E\} \quad (4.188)$$

definiert ist. Die Bahnen sind eindeutig durch die Gesamtenergie  $E$  und über den Drehimpuls bzgl. des Targets

$$p_\varphi = |\vec{L}| = b|\vec{p}_\infty| = b\sqrt{2m(E - V_\infty)} \quad (4.189)$$

durch den Stoßparameter  $b$  festgelegt. Hier haben wir

$$\vec{p}_\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{p}(t) \quad (4.190a)$$

$$V_\infty = \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} V(\vec{x}) < \infty \quad (4.190b)$$

für den einfallenden Impuls des Projektils und für den Grenzwert des Potentials im unendlichen Abstand geschrieben. Der Grenzwert muß existieren und endlich sein, damit wir von Streuung sprechen können. Potentials im Mit  $V_\infty = 0$  gilt

$$b = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2mE}}. \quad (4.191)$$

Ein infinitesimales Ringsegment  $d\sigma$ , in einer Ebene senkrecht zu einfallendem Strahl und zentriert um das Target entspricht der Fläche, die in einen Raumwinkel  $d\Omega^*$  streut

$$d\sigma = b db d\phi = b(\theta^*) \left| \frac{db}{d \cos \theta^*} \right| d \cos \theta^* d\phi^* = b(\theta^*) \left| \frac{db}{d \cos \theta^*} \right| d\Omega^*, \quad (4.192)$$

wie in Abbildung 4.10 dargestellt. Weil der Galilei-Boost zwischen Labor- und Schwerpunktsystem parallel zu  $\vec{p}_\infty$  ist, ändert er den der Azimuthalwinkel nicht:  $\phi^* = \phi$ . Dies definiert den *differentiellen Wirkungsquerschnitt*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = b(\theta^*) \left| \frac{db}{d \cos \theta^*} \right| = \frac{b(\theta^*)}{\sin \theta^*} \left| \frac{db}{d\theta^*} \right| \quad (4.193)$$

und daraus den *totalen Wirkungsquerschnitt*

$$\sigma = \int d\Omega^* \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \quad (4.194)$$

der die „effektive Fläche“ des Streutargets darstellt. Die analogen Formeln im Laborsystem liefern  $d\sigma/d\Omega$ .



#### 4.4.4 Beispiel: Rutherford vs. Hard Core

##### 1/r-Potential

Die Winkel der Asymptoten im  $-\alpha/r$ -Potential ergeben sich aus der Formel (4.84) für die Bahnkurve

$$e \cos \varphi(r) = \operatorname{sgn} \alpha - \frac{p_\varphi^2}{m|\alpha|r} \quad (4.195)$$

als

$$\cos \varphi_\pm = \lim_{r \rightarrow \infty} \cos \varphi(r) = \frac{\operatorname{sgn} \alpha}{e} = \frac{\operatorname{sgn} \alpha}{\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}}}. \quad (4.196)$$

und der eingeschlossene Winkel  $\psi = \pi - \theta^* = 2\beta$

$$\psi = \varphi_+ - \varphi_- = 2 \arccos \frac{1}{e} \quad (4.197)$$

also

$$\theta^* = \pi - 2 \arccos \frac{1}{e} = 2 \arcsin \frac{1}{e}. \quad (4.198)$$

Damit

$$\sin \frac{\theta^*}{2} = \frac{1}{e} \quad (4.199)$$

oder

$$\cot^2 \frac{\theta^*}{2} = \frac{1 - \sin^2 \frac{\theta^*}{2}}{\sin^2 \frac{\theta^*}{2}} = e^2 \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right) = e^2 - 1 = \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = \frac{4E^2 b^2}{\alpha^2}, \quad (4.200)$$

bzw.

$$\cot \frac{\theta^*}{2} = \frac{2Eb}{|\alpha|}. \quad (4.201)$$

In der allgemeinen Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{b(\theta^*)}{\sin \theta^*} \left| \frac{db}{d\theta^*} \right| \quad (4.193)$$

benötigen wir

$$\frac{db}{d\theta^*} = -\frac{|\alpha|}{2E} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta^*}{2}}, \quad (4.202)$$

was aus

$$\frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (4.203)$$

folgt. Außerdem folgt

$$b \frac{2E}{|\alpha|} = \cot \frac{\theta^*}{2} = \frac{\cos \frac{\theta^*}{2}}{\sin \frac{\theta^*}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta^*}{2} \cos \frac{\theta^*}{2}}{\sin^2 \frac{\theta^*}{2}} = \frac{\sin \theta^*}{2 \sin^2 \frac{\theta^*}{2}} \quad (4.204)$$

aus

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x. \quad (4.205)$$

Schließlich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}} \quad (4.206)$$

und der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int d\Omega^* \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \quad (4.207)$$

divergiert für kleine Winkel  $\theta^* = \epsilon \rightarrow 0$  wie

$$\int_{\epsilon} \frac{\sin \theta^* d\theta^*}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}} \approx 16 \int_{\epsilon} \frac{dx}{x^3} = \frac{8}{\epsilon^2}. \quad (4.208)$$

Der Grund hierfür ist, daß das Potential unendliche Reichweite hat und auch Projektile mit beliebig großem Streuparameter gestreut werden.

### Harte Kugel

Vorlesung 16: Fr, 08.12.2023

Der Streuwinkel im Schwerpunktssystem  $\theta^*$  folgt aus

$$\text{Einfallswinkel} = \text{Ausfallswinkel} \quad (4.209)$$

wie in Abbildung 4.11

$$\theta^* = \pi - 2\beta. \quad (4.210)$$

Der Stoßparameter  $b$  hängt mit dem Streuwinkel und dem Radius  $r = r_1 + r_2$  der Kugeln über

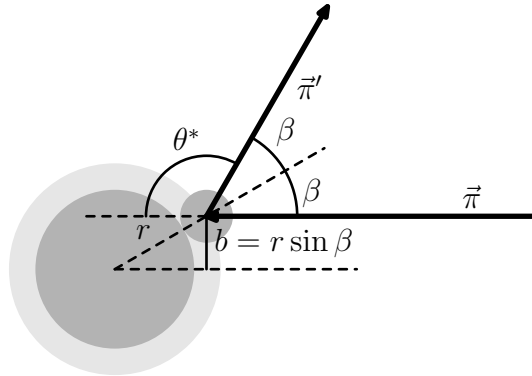
$$r \sin \beta = b \quad (4.211)$$

zusammen, also

$$\cos \frac{\theta^*}{2} = \sin \frac{\pi - \theta^*}{2} = \sin \beta = \frac{b}{r} \quad (4.212)$$

und damit

$$\frac{db}{r} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta^*}{2} d\theta^*, \quad (4.213)$$

Abbildung 4.11: *Streuung an harter Kugel.*

bzw.

$$\left| \frac{db}{d\theta^*} \right| = \frac{r}{2} \sin \frac{\theta^*}{2}. \quad (4.214)$$

Aus der allgemeinen Formel (4.193) für den differentiellen Wirkungsquerschnitt erhalten wir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{r \cos \frac{\theta^*}{2}}{\sin \theta^*} \frac{r \sin \frac{\theta^*}{2}}{2} = \frac{r^2 \sin \frac{\theta^*}{2} \cos \frac{\theta^*}{2}}{2 \sin \theta^*} = \frac{r^2}{4} \quad (4.215)$$

und

$$\sigma = \int d\Omega^* \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \pi r^2 \quad (4.216)$$

für den totalen Wirkungsquerschnitt, also die Querschnittsfläche der Kugel. Der maximale Stoßparameter  $b_{\max} = r$  ist hierbei implizit durch den minimalen Streuwinkel  $\theta_{\min}^* = 0$  festgelegt.

## 4.5 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Ein Teilchen mit der Ladung  $e$  in einem elektromagnetischen Feld  $(\vec{E}, \vec{B})$  erfährt die geschwindigkeitsabhängige *Lorentz-Kraft*<sup>2</sup>

$$m\ddot{\vec{x}} = e \left( \vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right). \quad (4.217)$$

<sup>2</sup>Seit dem WS 2021/22 benutze ich auch in dieser Vorlesung das SI-Einheitensystem, um mit meiner Elektrodynamik-Vorlesung und den Vorlesungen der Experimentalphysik kompatibel zu sein. In früheren Version hatte ich das Einheitensystem von Heaviside-Lorentz benutzt, das in der Quantenfeldtheorie praktischer ist.

Im Lagrangeformalismus müssen wir die Felder  $(\vec{E}, \vec{B})$  durch Potentiale ersetzen. Dies gilt auch für den Hamiltonformalismus und die Quantentheorie.

Die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.218a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.218b)$$

werden durch Potentiale  $(\phi, \vec{A})$  mit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.219a)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.219b)$$

gelöst. Die Lagrangefunktion für ein Teilchen der Ladung  $e$  im elektromagnetischen Feld  $(\phi, \vec{A})$

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - e\phi(\vec{x}, t) + e\dot{\vec{x}}\vec{A}(\vec{x}, t), \quad (4.220)$$

wobei  $\vec{x}$  und  $\dot{\vec{x}}$  als Ort und Geschwindigkeit des Teilchens verstanden wird, reproduziert die Lorentz-Kraft, weil

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -e \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\vec{x}, t) + e \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(\vec{x}, t) \quad (4.221a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i + eA_i(\vec{x}, t)) \\ &= m\ddot{x}_i + e \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\vec{x}, t) + e \frac{\partial A_i}{\partial t}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (4.221b)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= m\ddot{x}_i + e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \\ &\stackrel{(4.223)}{=} m\ddot{x}_i - eE_i - e \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k. \end{aligned} \quad (4.222)$$

NB: in der letzten Gleichung wurde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} &= \sum_{k,l=1}^3 (\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik}) \frac{\partial A_l}{\partial x_k} = \sum_{k,l,m=1}^3 \epsilon_{jim}\epsilon_{klm} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \\
&= - \sum_{m=1}^3 \epsilon_{ijm} \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{mkl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} = - \sum_{m=1}^3 \epsilon_{ijm} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{A} \right]_m = - \sum_{m=1}^3 \epsilon_{ijm} B_m \quad (4.223)
\end{aligned}$$

benutzt. Wir finden also in der Tat

$$m\ddot{\vec{x}} = e \left( \vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right). \quad (4.224)$$

Für den Spezialfall von *konstantem* und *homogenen* elektrischen Feld  $\vec{E}$  und Magnetfeld  $\vec{B}$  ist

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \quad (4.225a)$$

$$\phi = -\vec{E}\vec{x} \quad (4.225b)$$

eine Möglichkeit, weil

$$-\vec{\nabla} \left( -\vec{E}\vec{x} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad (4.226a)$$

und

$$\begin{aligned}
[\vec{\nabla} \times \vec{A}]_i &= \frac{1}{2} \sum_{jklm} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} B_l x_m = \frac{1}{2} \sum_{jklm} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} B_l \delta_{jm} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{jkl} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klj} B_l = \frac{1}{2} \sum_{jkl} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} B_l = \frac{1}{2} \sum_l 2\delta_{il} B_l = B_i. \quad (4.226b)
\end{aligned}$$

#### 4.5.1 Eichtransformationen

Die folgenden *Eichtransformationen* der Potentiale

$$\begin{pmatrix} \phi(\vec{x}, t) \\ \vec{A}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \phi'(\vec{x}, t) \\ \vec{A}'(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(\vec{x}, t) \\ \vec{A}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial \omega}{\partial t}(\vec{x}, t) \\ \vec{\nabla} \omega(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (4.227)$$

bzw.

$$\delta_\omega \phi = -\frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (4.228a)$$

$$\delta_\omega \vec{A} = \vec{\nabla} \omega \quad (4.228b)$$

lassen das elektrische Feld und das Magnetfeld invariant

$$\delta_\omega \vec{E} = -\nabla \delta_\omega \phi - \frac{\partial}{\partial t} \delta_\omega \vec{A} = \nabla \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \omega = 0 \quad (4.229a)$$

$$\delta_\omega \vec{B} = \vec{\nabla} \times \delta_\omega \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \omega = 0. \quad (4.229b)$$

Außerdem handelt es sich wegen

$$\begin{aligned} \delta_\omega L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= -e \delta_\omega \phi(\vec{x}, t) + e \dot{\vec{x}} \delta_\omega \vec{A}(\vec{x}, t) \\ &= e \frac{\partial \omega}{\partial t}(\vec{x}, t) + e \dot{\vec{x}} \vec{\nabla} \omega(\vec{x}, t) = \frac{d}{dt} (e \omega(\vec{x}, t)) = \frac{d\Lambda_\omega}{dt}(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (4.230)$$

um eine mechanische Eichtransformation, die die **ELG** nicht ändert. Das ist natürlich nicht verwunderlich, weil in den **ELG** nur  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vorkommen.

Aber die Eichtransformationen sind *keine* Transformation des Phasenraums

$$\delta_\omega(x, \dot{x})$$

und deshalb gibt es in der klassischen Mechanik *keine* sinnvollen zugehörigen Integrale.

*Bemerkung 4.3.* Eichinvarianz liefert das Konstruktionsprinzip für *alle* bekannten fundamentalen Wechselwirkungen, mit Ausnahme der Gravitation: Elektromagnetismus, schwache und starke Kernkraft.

### Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):

#### 4.5.2 Galilei-Symmetrien

##### Translationen

Infinitesimale Translation

$$\delta_{\vec{a}} \vec{x} = \vec{a}. \quad (4.231)$$

Daraus

$$\delta_{\vec{a}} \dot{\vec{x}} = 0 \quad (4.232)$$

und

$$\delta_{\vec{a}} L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta_{\vec{a}} x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_{\vec{a}} \dot{x}_i = \sum_i a_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = -e \vec{a} \vec{\nabla} \phi + e \dot{\vec{x}} (\vec{a} \vec{\nabla}) \vec{A}. \quad (4.233)$$

Die Forderung, daß die Variation eine totale Zeitableitung ist

$$\delta_{\vec{a}} L \stackrel{!}{=} \frac{d\Lambda_{\vec{a}}}{dt} = \frac{\partial \Lambda_{\vec{a}}}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \vec{\nabla} \Lambda_{\vec{a}}. \quad (4.234)$$

liefert nach Koeffizientenvergleich in  $\dot{\vec{x}}$

$$e(\vec{a} \vec{\nabla}) \vec{A} = \vec{\nabla} \Lambda_{\vec{a}} \quad (4.235a)$$

$$-e\vec{a}\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\Lambda_{\vec{a}}}{\partial t}. \quad (4.235b)$$

Damit

$$e(\vec{a}\vec{\nabla})\vec{B} = e(\vec{a}\vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = e\vec{\nabla} \times (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Lambda_{\vec{a}} = 0 \quad (4.236a)$$

und

$$\begin{aligned} e(\vec{a}\vec{\nabla})\vec{E} &= -e(\vec{a}\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi - e(\vec{a}\vec{\nabla})\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ &= -e\vec{\nabla}(\vec{a}\vec{\nabla})\phi - e\frac{\partial}{\partial t}(\vec{a}\vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}\frac{\partial\Lambda_{\vec{a}}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda_{\vec{a}} = 0, \end{aligned} \quad (4.236b)$$

also verschwinden die Richtungsableitungen  $\vec{a}\vec{\nabla}$  in allen Richtungen  $\vec{a}$  und die beiden physikalischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind räumlich homogen, können aber von der Zeit abhängen. Für nichtverschwindendes Magnetfeld ist das unphysikalische  $(\phi, \vec{A})$  immer ortsabhängig.

Im Spezialfall konstanten und homogenen  $(\vec{E}, \vec{B})$  in der Eichung

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x} \quad (4.237a)$$

$$\phi = -\vec{E}\vec{x} \quad (4.237b)$$

finden wir

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_{\vec{a}}}{dt} &= \frac{\partial\Lambda_{\vec{a}}}{\partial t} + \dot{\vec{x}}\vec{\nabla}\Lambda_{\vec{a}} = -e(\vec{a}\vec{\nabla})\phi + e\dot{\vec{x}}(\vec{a}\vec{\nabla})\vec{A} \\ &= e(\vec{a}\vec{\nabla})(\vec{E}\vec{x}) + \frac{e}{2}\dot{\vec{x}}(\vec{a}\vec{\nabla})(\vec{B} \times \vec{x}) = e\vec{a}\vec{E} + \frac{e}{2}\dot{\vec{x}}(\vec{B} \times \vec{a}) \\ &= e\vec{a}\vec{E} + \frac{e}{2}\vec{a}(\dot{\vec{x}} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (4.238)$$

also

$$\Lambda_{\vec{a}} = e\vec{a}\vec{E}t + \frac{e}{2}\vec{a}(\vec{x} \times \vec{B}). \quad (4.239)$$

Damit

$$\begin{aligned} I_{\vec{a}} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_{\vec{a}} x_i - \Lambda_{\vec{a}} = \vec{a} \left( m\dot{\vec{x}} + e\vec{A} \right) - e\vec{a}\vec{E}t + \frac{e}{2}\vec{a}(\vec{x} \times \vec{B}) \\ &= \vec{a}m\dot{\vec{x}} - e\vec{a}\vec{E}t - e\vec{a}(\vec{x} \times \vec{B}) = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.240)$$

bzw.

$$m\dot{\vec{x}} - e\vec{E}t - e(\vec{x} \times \vec{B}) = \text{const.} \quad (4.241)$$

oder

$$m\ddot{\vec{x}} - e\vec{E} - e(\dot{\vec{x}} \times \vec{B}) = 0. \quad (4.242)$$

In einer anderen Eichung

$$\vec{A} = -c\vec{E}t + \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x} \quad (4.243a)$$

$$\phi = 0 \quad (4.243b)$$

finden wir

$$L' = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - e \dot{\vec{x}} \vec{E} t + \frac{e}{2} \dot{\vec{x}} (\vec{B} \times \vec{x}) \quad (4.244)$$

mit gleicher **ELG**

$$m \ddot{\vec{x}} = e \left( \vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right), \quad (4.245)$$

aber anderer Transformation

$$\delta_{\vec{a}} L' = \frac{e}{2} \dot{\vec{x}} (\vec{B} \times \vec{a}) = \frac{e}{2} \vec{a} (\dot{\vec{x}} \times \vec{B}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{e}{2} \vec{a} (\vec{x} \times \vec{B}) \right) = \frac{d\Lambda'_{\vec{a}}}{dt} \quad (4.246)$$

diesmal mit

$$\Lambda'_{\vec{a}} = \frac{e}{2} \vec{a} (\vec{x} \times \vec{B}) \quad (4.247)$$

und wieder

$$\begin{aligned} I'_{\vec{a}} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_{\vec{a}} x_i - \Lambda'_{\vec{a}} = \vec{a} \left( m \dot{\vec{x}} - e \vec{E} t - \frac{e}{2} \vec{x} \times \vec{B} \right) - \frac{e}{2} \vec{a} (\vec{x} \times \vec{B}) \\ &= \vec{a} \left( m \dot{\vec{x}} - e \vec{E} t - e \vec{x} \times \vec{B} \right) = I_{\vec{a}} = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.248)$$

### Zeittranslationen

Wie in Abschnitt 3.8.4 können wir wieder<sup>3</sup> statt  $t \mapsto t' = t - s$

$$\vec{x}(t) \mapsto \vec{x}(t+s) = \vec{x}(t) + \underbrace{\dot{\vec{x}}(t)}_{s \delta_{\eta} \vec{x}(t)} + \mathcal{O}(s^2) \quad (4.249)$$

schreiben, also

$$\delta_{\eta} \vec{x} = \dot{\vec{x}} \quad (4.250a)$$

$$\delta_{\eta} \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}, \quad (4.250b)$$

und

$$\delta_{\eta} L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta_{\eta} x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_{\eta} \dot{x}_i = -e \dot{\vec{x}} \vec{\nabla} \phi + e \dot{\vec{x}} (\dot{\vec{x}} \vec{\nabla}) \vec{A} + \ddot{\vec{x}} m \dot{\vec{x}} + e \ddot{\vec{x}} \vec{A}. \quad (4.251)$$

Die Forderung, daß es sich um eine totale Zeitableitung handelt

$$\delta_{\eta} L \stackrel{!}{=} \frac{d\Lambda_{\eta}}{dt} = \frac{\partial \Lambda_{\eta}}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \vec{\nabla} \Lambda_{\eta} + \ddot{\vec{x}} \vec{\nabla}_{\dot{x}} \Lambda_{\eta} \quad (4.252)$$

liefert nach Koeffizientenvergleich

$$0 = \frac{\partial \Lambda_{\eta}}{\partial t} \quad (4.253a)$$

$$\sum_{ij} \left( -\dot{x}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e \dot{x}_i \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial \Lambda_{\eta}}{\partial x_i} \quad (4.253b)$$

$$\sum_{ij} (\ddot{x}_i m \dot{x}_i + e \ddot{x}_i A_i) = \sum_i \ddot{x}_i \frac{\partial \Lambda_{\eta}}{\partial \dot{x}_i}. \quad (4.253c)$$



Der Ansatz

$$\Lambda_\eta = L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - e\phi + e\dot{\vec{x}}\vec{A} \quad (4.254)$$

funktioniert in einer Eichung mit zeitunabhängigen  $(\phi, \vec{A})$

$$\frac{\partial \Lambda_\eta}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = -e \frac{\partial \phi}{\partial t} + e\dot{\vec{x}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad (4.255a)$$

$$\frac{\partial \Lambda_\eta}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = -e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e\dot{\vec{x}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} \quad (4.255b)$$

$$\frac{\partial \Lambda_\eta}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + eA_i. \quad (4.255c)$$

Das zugehörige Integral

$$\begin{aligned} I_\eta = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta_\eta x_i - \Lambda_\eta &= \dot{\vec{x}} \left( m\dot{\vec{x}} + e\vec{A} \right) - \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + e\phi - e\dot{\vec{x}}\vec{A} \\ &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + e\phi = H = E = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.256)$$

ist wieder die Energie und wir sehen, daß das Magnetfeld keine Arbeit leistet. Letzteres ist nicht verwunderlich, weil

$$\dot{\vec{x}} \perp e\dot{\vec{x}} \times \vec{B}. \quad (4.257)$$

Umgekehrt kann man die Erhaltung für Eichungen mit zeitunabhängigen  $(\phi, \vec{A})$  auch leicht nachrechnen

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= m\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}} + e\dot{\vec{x}}\vec{\nabla}\phi + e \frac{\partial \phi}{\partial t} = e\dot{\vec{x}}\vec{E} + e\dot{\vec{x}} \left( \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right) + e\dot{\vec{x}}\vec{\nabla}\phi + e \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= e\dot{\vec{x}} \left( \vec{E} + \vec{\nabla}\phi \right) + e \frac{\partial \phi}{\partial t} = -e\dot{\vec{x}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (4.258)$$

## 4.6 Kleine Schwingungen

Das von  $L$  beschriebene autonome System habe bei  $q = q_0$  eine Gleichgewichtslage

$$\forall i : \left. \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}) \right|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=0}} = 0. \quad (4.259)$$

Für konstantes  $q$ , also

$$q(t) = q_0 = \text{const.}, \quad (4.260)$$

gilt dann, weil  $L$  nicht *explizit* von der Zeit abhängt, auch

$$\forall i : \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) \right|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=0}} = \text{const.} \quad (4.261)$$

Deshalb ist  $q(t) = q_0$  eine Lösung der **ELG**

$$\forall i : \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) - \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}) = 0. \quad (4.262)$$

Im folgenden sei o.B.d.A.  $q_0 = 0$ , was jederzeit durch eine Koordinatentransformation  $q \mapsto q - q_0$  realisiert werden kann. Für kleine Auslenkungen kann man  $L$  in den Komponenten von  $q$  und  $\dot{q}$  entwickeln:

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_{ij} q_i q_j \quad (4.263)$$

mit den symmetrischen Matrizen

$$T_{ij} = \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}) \right|_{\substack{q=0 \\ \dot{q}=0}} = T_{ji} \quad (4.264a)$$

$$V_{ij} = - \left. \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}(q, \dot{q}) \right|_{\substack{q=0 \\ \dot{q}=0}} = V_{ji}. \quad (4.264b)$$

NB: Terme bilinear in  $q$  und  $\dot{q}$  können bei Zeitumkehrinvarianz (d.h. keine Reibung, kein konstantes Magnetfeld) nicht auftreten.

Im allgemeinen sind weder  $T$  noch  $V$  diagonal und die **ELG**

$$\forall i : \sum_{j=1}^N T_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N V_{ij} q_j = 0 \quad (4.265)$$

oder

$$\forall i : \ddot{q}_i + \sum_{j,k=1}^N T_{ij}^{-1} V_{jk} q_k = 0 \quad (4.266)$$

sind gekoppelt. In (4.266) haben wir benutzt, daß  $T$  aus physikalischen Gründen immer invertierbar sein muß, weil es sonst Richtungen gäbe, in denen die Geschwindigkeit nicht zur kinematischen Energie beitrüge.

Vorlesung 17: Mo, 11. 12. 2023

Außerdem ist die Matrix

$$T^{-1}V \quad (4.267)$$

im Allgemeinen *nicht* symmetrisch, sondern wegen

$$(T^{-1}V)^T = V^T (T^{-1})^T = VT^{-1} \quad (4.268)$$

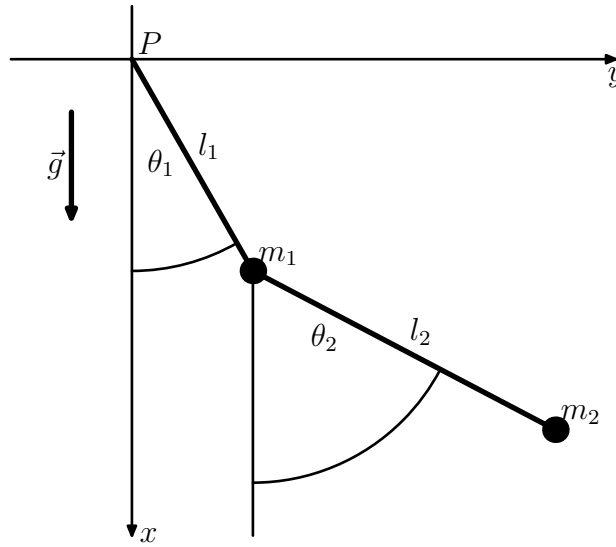


Abbildung 4.12: Doppelpendel.

nur, wenn

$$[T^{-1}, V] = T^{-1}V - VT^{-1} = 0. \quad (4.269)$$

Deshalb kann  $T^{-1}V$  nicht unbedingt durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert, bzw. (4.266) entkoppelt werden.

*Beispiel 4.4* (Doppelpendel). Mit Koordinaten wie in Abbildung 4.12

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.270)$$

und nach Entwicklung um  $\theta_1 = \theta_2 = 0$

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \theta_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \theta_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}}_T \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix}}_V \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.271)$$

NB: weiter unten, in (4.312) und (4.313) werden wir sehen, daß alle Eigenwerte von  $T$ , wie erwartet, positiv sind.

### 4.6.1 Hauptachsentransformation

Betrachte einen reellen Vektorraum  $V$  mit symmetrischem inneren Produkt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R} \quad (4.272)$$

d. h.  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ . Ein Beispiel ist  $\mathbf{R}^N$  mit

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^N v_i w_i \quad (4.273)$$

und für endliches  $N$  sind alle anderen Beispiele isomorph. Für eine beliebige Orthonormalbasis  $\{u^{(n)}\}_{n \in I}$  gilt

$$\forall v \in V : \sum_n \langle u^{(n)}, v \rangle u^{(n)} = \sum_n v_n u^{(n)} = v \quad (4.274a)$$

$$\langle u^{(n)}, u^{(m)} \rangle = \delta_{nm} \quad (4.274b)$$

und die  $v_n = \langle u^{(n)}, v \rangle \in \mathbf{R}$  sind die Komponenten des Vektors  $v$  bzgl. der Basis  $\{u^{(n)}\}_{n \in I}$ . In der natürlichen Basis von  $\mathbf{R}^N$  ist

$$u_k^{(n)} = \delta_{kn} \quad (4.275)$$

bzw.

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.276)$$

Allgemein folgt für lineare Transformationen

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto Av \end{aligned} \quad (4.277)$$

die Zerlegung

$$Av = \sum_n \langle u^{(n)}, Av \rangle u^{(n)} = \sum_{nm} \langle u^{(n)}, Au^{(m)} \rangle \langle u^{(m)}, v \rangle u^{(n)} = \sum_{nm} A_{nm} v_m u^{(n)} \quad (4.278)$$

mit den *Matrixelementen*

$$A_{nm} = \langle u^{(n)}, Au^{(m)} \rangle. \quad (4.279)$$

In Komponenten erhält man also

$$\langle v, Aw \rangle = \sum_{nm} v_n A_{nm} w_m. \quad (4.280)$$

Für symmetrische  $A$ , d. h.

$$\forall v, w \in V : \langle v, Aw \rangle = \langle w, Av \rangle \quad (4.281)$$

und daraus

$$A_{nm} = A_{mn} \quad (4.282)$$

kann man zeigen, daß es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren  $\{e_A^{(n)}\}_{n \in I}$  (Eigenbasis) mit reellen Eigenwerten  $\{a_n\}_{n \in I}$  gibt

$$Ae_A^{(n)} = a_n e_A^{(n)} \quad (4.283a)$$

$$\langle e_A^{(n)}, e_A^{(m)} \rangle = \delta_{nm} \quad (4.283b)$$

$$\sum_n \langle e_A^{(n)}, v \rangle e_A^{(n)} = v \quad (4.283c)$$

$$\begin{aligned} Av &= \sum_n \langle e_A^{(n)}, Av \rangle e_A^{(n)} = \sum_{nm} \langle e_A^{(n)}, Ae_A^{(m)} \rangle \langle e_A^{(m)}, v \rangle e_A^{(n)} \\ &= \sum_{nm} \hat{A}_{nm} \hat{v}_m e_A^{(n)} \end{aligned} \quad (4.283d)$$

mit den Matrixelementen und Komponenten in der Eigenbasis

$$\hat{A}_{nm} = \langle e_A^{(n)}, Ae_A^{(m)} \rangle = a_n \delta_{nm} \quad (4.284a)$$

$$\hat{v}_n = \langle e_A^{(n)}, v \rangle. \quad (4.284b)$$

Zerlegungen bzgl. der Eigenbasis von  $A$

$$\begin{aligned} \delta_{nm} = \langle u^{(n)}, u^{(m)} \rangle &= \left\langle u^{(n)}, \sum_k \langle e_A^{(k)}, u^{(m)} \rangle e_A^{(k)} \right\rangle \\ &= \sum_k \langle u^{(n)}, e_A^{(k)} \rangle \langle e_A^{(k)}, u^{(m)} \rangle \end{aligned} \quad (4.285a)$$

und einer beliebigen Basis

$$\begin{aligned} \delta_{nm} = \langle e_A^{(n)}, e_A^{(m)} \rangle &= \left\langle e_A^{(n)}, \sum_k \langle u^{(k)}, e_A^{(m)} \rangle u^{(k)} \right\rangle \\ &= \sum_k \langle e_A^{(n)}, u^{(k)} \rangle \langle u^{(k)}, e_A^{(m)} \rangle. \end{aligned} \quad (4.285b)$$

Die Matrix

$$O_{nm} = \langle u^{(n)}, e_A^{(m)} \rangle \quad (4.286a)$$

$$O_{nm}^T = \langle e_A^{(n)}, u^{(m)} \rangle = \langle u^{(m)}, e_A^{(n)} \rangle = O_{mn} \quad (4.286b)$$

ist deshalb orthogonal

$$\sum_k O_{nk}^T O_{km} = \sum_k \langle e_A^{(n)}, u^{(k)} \rangle \langle u^{(k)}, e_A^{(m)} \rangle = \delta_{nm} \quad (4.287a)$$

$$\sum_k O_{nk} O_{km}^T = \sum_k \langle u^{(n)}, e_A^{(k)} \rangle \langle e_A^{(k)}, u^{(m)} \rangle = \delta_{nm} \quad (4.287b)$$

und transformiert  $A_{mn}$  auf Diagonalgestalt  $\hat{A}_{nm}$ :

$$\begin{aligned} a_k \delta_{kl} &= \hat{A}_{kl} = \langle e_A^{(k)}, A e_A^{(l)} \rangle = \sum_n \langle e_A^{(k)}, u^{(n)} \rangle \langle u^{(n)}, A e_A^{(l)} \rangle \\ &= \sum_{nm} \langle e_A^{(k)}, u^{(n)} \rangle \langle u^{(n)}, A u^{(m)} \rangle \langle u^{(m)}, e_A^{(l)} \rangle = \sum_{nm} O_{kn}^T A_{nm} O_{ml} \end{aligned} \quad (4.288a)$$

und

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \sum_{nm} \langle u^{(k)}, e_A^{(n)} \rangle \langle e_A^{(n)}, A e_A^{(m)} \rangle \langle e_A^{(m)}, u^{(l)} \rangle \\ &= \sum_{nm} O_{kn} \hat{A}_{nm} O_{ml}^T = \sum_n O_{kn} a_n O_{nl}^T, \end{aligned} \quad (4.288b)$$

bzw.

$$\hat{A} = O^T A O \quad (4.289a)$$

$$A = O \hat{A} O^T \quad (4.289b)$$

als Matrixmultiplikation, mit  $\hat{A}$  diagonal. Als Matrix kann man  $O$  wie

$$O_{nm} = \langle u^{(n)}, e_A^{(m)} \rangle = e_{A,n}^{(m)} \quad (4.290)$$

schreiben, bzw.

$$O = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1N} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{N1} & O_{N2} & \dots & O_{NN} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e_{A,1}^{(1)} & e_{A,1}^{(2)} & \cdots & e_{A,1}^{(N)} \\ e_{A,2}^{(1)} & e_{A,2}^{(2)} & \cdots & e_{A,2}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{A,N}^{(1)} & e_{A,N}^{(2)} & \cdots & e_{A,N}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_A^{(1)} & e_A^{(2)} & \cdots & e_A^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (4.291)$$

Tatsächlich ergibt sich

$$O^T A O = \begin{pmatrix} e_A^{(1)T} \\ e_A^{(2)T} \\ \vdots \\ e_A^{(N)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 e_A^{(1)} & a_2 e_A^{(2)} & \cdots & a_N e_A^{(N)} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N) \quad (4.292)$$

weil  $\langle e_A^{(n)}, e_A^{(m)} \rangle = \delta_{nm}$ .

Im allgemeinen sind die Eigenbasen  $\{e_A^{(n)}\}_{n \in I}$  und  $\{e_B^{(n)}\}_{n \in I}$  zweier Matrizen (linearer Transformationen, linearer Operatoren)  $A$  und  $B$  unterschiedlich. Nur wenn die beiden Matrizen miteinander vertauschen

$$[A, B] = AB - BA = 0, \quad (4.293)$$

können sie *gleichzeitig* diagonalisiert werden.

#### 4.6.2 Eigenschwingungen

Die Lagrangefunktion für kleine Schwingungen kann auch

$$L = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, T \dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, V q \rangle \quad (4.294)$$

geschrieben werden, wobei  $T$  eine positive, reelle symmetrische Matrix und  $V$  eine reelle symmetrische Matrix ist.

Im allgemeinen vertauschen  $T$  und  $V$  nicht

$$VT \neq TV, \quad (4.295)$$

also können wir sie nicht durch eine *gemeinsame* orthogonale Transformation diagonalisieren. Man kann  $L$  aber trotzdem auf Diagonalgestalt bringen. Nach der Diagonalisierung von  $T$

$$\hat{T} = O^T T O = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) \quad (4.296)$$

bzw.

$$T = O \hat{T} O^T \quad (4.297)$$

mit einer orthogonalen Matrix  $O$  finden wir, weil die kinetische Energie  $T$  positiv sein muß, nur positive Eigenwerte  $\tau_i > 0$ . Diese können mit

$$\sqrt{\hat{T}} = \text{diag}(\sqrt{\tau_1}, \sqrt{\tau_2}, \dots, \sqrt{\tau_N}) \quad (4.298)$$

in die Koordinaten absorbiert werden

$$T = O\hat{T}O^T = O\sqrt{\hat{T}}\sqrt{\hat{T}}O^T = P^T P \quad (4.299)$$

wobei

$$P = \sqrt{\hat{T}}O^T. \quad (4.300)$$

Weil

$$\det P = \det(\sqrt{\hat{T}}) \det(O^T) = \pm \sqrt{\det T} \neq 0 \quad (4.301)$$

ist  $P$  invertierbar. Das Vorzeichen in (4.301) hängt von der Reihenfolge der Eigenvektoren ab und kann deshalb durch eine Permutation der Eigenvektoren beliebig gewählt werden. Damit

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \langle \dot{q}, P^T P \dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, V q \rangle = \frac{1}{2} \langle P \dot{q}, P \dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle P q, (P^{-1})^T V P^{-1} P q \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \dot{q}', \dot{q}' \rangle - \frac{1}{2} \langle q', V' q' \rangle \end{aligned} \quad (4.302)$$

mit den neuen Koordinaten  $q'$  und dem entsprechenden Potential

$$q' = P q \quad (4.303a)$$

$$\dot{q}' = P \dot{q} \quad (4.303b)$$

$$V' = (P^{-1})^T V P^{-1} \quad (4.303c)$$

$V'$  ist per Konstruktion ebenfalls reell symmetrisch

$$(V')^T = (P^{-1})^T V \left( (P^{-1})^T \right)^T = (P^{-1})^T V P^{-1} = V' \quad (4.304)$$

und kann deshalb mit einer weiteren orthogonalen Matrix  $O'$  diagonalisiert werden

$$\hat{V}' = (O')^T V' O' = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2), \quad (4.305)$$

wobei *nicht* impliziert ist, daß immer  $\omega_i^2 > 0$  gelten soll.



Die Transformation auf die neuen Koordinaten  $Q$  mit

$$Q = (O')^T q' = (O')^T \sqrt{\hat{T}} O^T q \quad (4.306a)$$

$$q = O \left( \hat{T} \right)^{-\frac{1}{2}} O' Q \quad (4.306b)$$

diagonalisiert das Potential und ändert den kinetischen Term nicht, weil dieser nicht nur diagonal, sondern sogar proportional zur Einheitsmatrix ist

$$L = \frac{1}{2} \langle \dot{q}', \dot{q}' \rangle - \frac{1}{2} \langle q', V' q' \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle - \frac{1}{2} \langle Q, \hat{V}' Q \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2 \right). \quad (4.307)$$

Allerdings ist die Transformationsmatrix

$$O \left( \hat{T} \right)^{-\frac{1}{2}} O' \quad (4.308)$$

im Allgemeinen *nicht* orthogonal und die Eigenmoden bilden *kein* Orthonormalsystem.

Als allgemeine Lösung der entkoppelten **ELG**

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0 \quad (4.309)$$

finden wir

$$Q_i(t) = \begin{cases} a_i \sin(\omega_i t + \delta_i) & \text{für } \omega_i^2 > 0, \text{ d. h. harmonische Schwingungen} \\ b_i + v_i t & \text{für } \omega_i^2 = 0, \text{ d. h. lineare Bewegung} \\ c_i e^{\lambda_i t} + d_i e^{-\lambda_i t} & \text{für } \omega_i^2 = -\lambda_i^2 < 0, \text{ d. h. instabile Bewegung.} \end{cases} \quad (4.310)$$

*Beispiel 4.5* (Doppelpendel (Fortsetzung)).

$$T = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.311a)$$

$$V = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2 gl_2 \end{pmatrix} \quad (4.311b)$$

Spezialfall<sup>4</sup>  $m_1 = 3m$ ,  $m_2 = 2m$  und  $l_1 = l_2 = l$

$$T = ml^2 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.314a)$$

---

<sup>4</sup>Der allgemeine Fall ist wegen

$$\tau_{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} T \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\operatorname{tr} T)^2 - 4 \det T} \quad (4.312)$$

$$V = mgl \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.314b)$$

Die allgemeine Formel

$$\tau_{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} T \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\operatorname{tr} T)^2 - 4 \det T} \quad (4.315)$$

mit

$$\operatorname{tr} T = 7ml^2 \quad (4.316a)$$

$$\det T = 6m^2l^4 \quad (4.316b)$$

$$(\operatorname{tr} T)^2 - 4 \det T = (5ml^2)^2 \quad (4.316c)$$

liefert die Eigenwerte

$$\tau_{1/2} = \frac{ml^2}{2} (7 \pm 5) > 0 \quad (4.317)$$

und die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (4.318a)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.318b)$$

Sie sind orthonormal

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (4.319)$$

und liefern die orthogonale Transformationsmatrix

$$O = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.320)$$

Die diagonale Form der kinetischen Energie ist

$$\hat{T} = ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (4.321)$$

---

mit

$$\operatorname{tr} T = m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 \quad (4.313a)$$

$$\det T = m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 \quad (4.313b)$$

$$(\operatorname{tr} T)^2 - 4 \det T = ((m_1 + m_2) l_1^2 - m_2 l_2^2)^2 + 4 m_2^2 l_1^2 l_2^2 \quad (4.313c)$$

zu umständlich für die Vorlesung.

und

$$P = \sqrt{\hat{T}} O^T = \sqrt{\frac{ml^2}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix} \quad (4.322)$$

macht eine Einheitsmatrix daraus. Mit der Inversen

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{30ml^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2 \\ -2\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.323)$$

finden wir die zugehörige potentielle Energie

$$V' = (P^{-1})^T V P^{-1} = \frac{g}{15l} \begin{pmatrix} 39 & 3\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} & 11 \end{pmatrix}. \quad (4.324)$$

Die Invarianten

$$\text{tr } V' = \frac{10g}{3l} \quad (4.325a)$$

$$\det V' = \frac{5g^2}{3l^2} \quad (4.325b)$$

$$(\text{tr } V')^2 - 4 \det V' = \frac{40g^2}{9l^2} \quad (4.325c)$$

liefern die Eigenfrequenzen

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{\text{tr } V'}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\text{tr } V')^2 - 4 \det V'} = \frac{g}{6l} (10 \pm \sqrt{40}) > 0, \quad (4.326)$$

also Schwingungen und keine instabilen Bahnen. Auf die Berechnung der Eigenvektoren sei hier verzichtet.

### 4.6.3 Eigenschwingungen Redux

Die beschriebene Methode der sukzessiven Diagonalisierung und Reskalierung liefert einen eleganten Beweis, daß die reell symmetrische Matrix  $V$  und die zusätzlich positive Matrix  $T$  immer durch eine im Allgemeinen nicht orthogonale Transformation diagonalisiert werden können. Außerdem hat dieses Verfahren den Vorteil, daß es als Transformation der Lagrangefunktion (bzw. später der Hamiltonfunktion) in der Quantenmechanik angewandt werden kann.

Das Beispiel hat aber auch gezeigt, daß das Verfahren rechnerisch aufwendig ist. In der praktischen Anwendung in der klassischen Physik ist es deshalb oft einfacher, direkt die Eigenwerte  $\omega_i^2$  und nicht orthogonalen Eigenvektoren  $u_i$  der *nicht*symmetrischen Matrix  $T^{-1}V$  in den **ELG**

$$\ddot{q} + T^{-1}Vq = 0 \quad (4.327)$$

aufzusuchen

$$T^{-1}Vu_i = \omega_i^2 u_i \quad (4.328)$$

und damit die **ELG** zu lösen. Das vorher beschriebene Verfahren beweist, daß dies *immer* möglich ist.

Der Ansatz

$$q(t) = \sum_i f_i(t)u_i \quad (4.329)$$

mit

$$f_i(t) = \begin{cases} a_i \sin(\omega_i t + \delta_i) & \text{für } \omega_i^2 > 0 \\ b_i + v_i t & \text{für } \omega_i^2 = 0 \\ c_i e^{\lambda_i t} + d_i e^{-\lambda_i t} & \text{für } \omega_i^2 = -\lambda_i^2 < 0 \end{cases} \quad (4.330)$$

liefert die Lösung, weil

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} f_i(t)u_i + T^{-1}Vf_i(t)u_i &= u_i \frac{d^2 f_i}{dt^2}(t) + f_i(t)T^{-1}Vu_i \\ &= u_i (-\omega_i^2 f_i(t)) + f_i(t)\omega_i^2 u_i = 0. \end{aligned} \quad (4.331)$$

*Beispiel 4.6* (Doppelpendel (2. Fortsetzung)). In der Tat hat

$$T^{-1}V = \frac{g}{3l} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \quad (4.332)$$

die gleichen Invarianten wie  $V'$

$$\text{tr}(T^{-1}V) = \frac{10g}{3l} = \text{tr} V' \quad (4.333a)$$

$$\det(T^{-1}V) = \frac{5g^2}{3l^2} = \det V' \quad (4.333b)$$

und die Eigenfrequenzen stimmen überein.

## 4.7 Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte

### 4.7.1 Beschleunigte Bezugssysteme

Eine *zeitabhängige* Transformation des Koordinatensystems

$$\begin{aligned} (a, R) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (t, \vec{x}) &\mapsto R(t)\vec{x} + \vec{a}(t) \end{aligned} \quad (4.334)$$

mit  $R(t) \in \text{SO}(3)$ , d. h.

$$R(t)R^T(t) = R^T(t)R(t) = \mathbf{1} \quad (4.335a)$$

$$\det R(t) = 1, \quad (4.335b)$$

ist im Allgemeinen *keine* Galilei-Transformation, sondern nur dann, wenn  $\dot{R} = 0$  und  $\ddot{a} = 0$ .

Wenn  $(a, R)$  den Übergang von einem bewegten, d. h. um  $\vec{a}(t)$  verschoben und um  $R(t)$  gedrehten, Koordinatensystem in ein Inertialsystem beschreibt, können wir die Koordinaten im Inertialsystem  $\vec{x}_I$  durch die Koordinaten im bewegten Koordinatensystem  $\vec{x}$  und  $(a, R)$  ausdrücken

$$\vec{x}_I = R\vec{x} + \vec{a}. \quad (4.336)$$

Damit

$$\dot{\vec{x}}_I = \dot{R}\vec{x} + R\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{a}} = \dot{R}R^T R\vec{x} + R\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{a}} \quad (4.337)$$

und wir müssen  $\dot{R}R^T$  besser verstehen.

#### 4.7.2 Kreuzprodukt und $\epsilon$ -Tensor Redux

Für beliebige  $3 \times 3$ -Matrizen  $A$  gilt

$$\sum_{l,n,m=1}^3 A_{il}A_{jn}A_{km}\epsilon_{lnm} = \tilde{\epsilon}_{ijk}^A \quad (4.338)$$

wobei  $\tilde{\epsilon}^A$  wegen

$$\tilde{\epsilon}_{ijk}^A = -\tilde{\epsilon}_{jik}^A, \text{ usw.} \quad (4.339)$$

ebenso wie  $\epsilon$  *total antisymmetrisch* unter dem Austausch der Indizes ist. Andererseits ist jeder total antisymmetrische Tensor dritter Stufe proportional zu  $\epsilon$ , also

$$\tilde{\epsilon}_{ijk}^A = c_A \epsilon_{ijk}. \quad (4.340)$$

Schließlich gilt

$$\tilde{\epsilon}_{123}^A = \sum_{l,n,m=1}^3 A_{1l}A_{2n}A_{3m}\epsilon_{lnm} = \det A = \det A \epsilon_{123} \quad (4.341)$$

und damit  $c_A = \det A$  oder

$$\sum_{l,n,m=1}^3 A_{il}A_{jn}A_{km}\epsilon_{lnm} = \det A \epsilon_{ijk}. \quad (4.342)$$

Für Rotationen mit  $\det R = 1$  erhalten wir somit

$$\sum_{l,n,m=1}^3 R_{il}R_{jn}R_{km}\epsilon_{lnm} = \epsilon_{ijk}, \quad (4.343)$$

also ist  $\epsilon$  ein *invarianter Tensor* bzgl. der Drehgruppe<sup>5</sup>. Wegen

$$\sum_{k,l=1}^3 R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} = \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} \delta_{kl} R_{lj}^T = \delta_{ij} \quad (4.344)$$

ist  $\delta$  ebenfalls ein invarianter Tensor.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist bekanntermaßen wieder ein Vektor

$$(R\vec{a}) \times (R\vec{b}) = R(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (4.345)$$

Diese Aussage ist äquivalent zur Invarianz des  $\epsilon$ -Tensors. Dies sieht man am besten mit der äquivalenten Version

$$\vec{a} \times \vec{b} = R \left( (R^{-1}\vec{a}) \times (R^{-1}\vec{b}) \right) = R \left( (R^T\vec{a}) \times (R^T\vec{b}) \right), \quad (4.346)$$

weil in Komponenten

$$\sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{lnm} R_{il} \epsilon_{lnm} (R^T\vec{a})_n (R^T\vec{b})_m = \sum_{lnmjk} R_{il} \epsilon_{lnm} R_{jn} a_j R_{km} b_k \quad (4.347)$$

und nach Koeffizientenvergleich in  $a_j$  und  $b_k$

$$\epsilon_{ijk} = \sum_{lnm} R_{il} \epsilon_{lnm} R_{jn} R_{km}. \quad (4.348)$$

Wir werden gleich sehen, daß  $\dot{R}R^T$  antisymmetrisch ist. Jeder antisymmetrische Tensor zweiter Stufe  $A$  im  $\mathbf{R}^3$ , d. h.

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad (4.349a)$$

und

$$R : A_{ij} \mapsto \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} R_{jl} A_{kl} = \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} A_{kl} R_{lj}^T \quad (4.349b)$$

oder in Matrixschreibweise

$$A = -A^T \quad (4.350a)$$

und

$$R : A \mapsto RAR^T \quad (4.350b)$$

---

<sup>5</sup>Für Raumspiegelungen  $P$  mit  $\det P = -1$  gilt  $\epsilon_{ijk} \mapsto \tilde{\epsilon}_{ijk}^P = -\epsilon_{ijk}$ .

kann auch durch einen Vektor  $\vec{\alpha}$  ausgedrückt werden

$$A_{ij} = - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \alpha_k \quad (4.351a)$$

$$\alpha_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_{jk}, \quad (4.351b)$$

wobei das Minuszeichen nur Konvention ist, bzw.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.352)$$

Dann gilt wegen  $\sum_n R_{nm} R_{np} = [R^T R]_{mp} = \delta_{mp}$  konsistent

$$\begin{aligned} R : A_{ij} \mapsto A'_{ij} &= \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} R_{jl} A_{kl} = - \sum_{k,l,m=1}^3 R_{ik} R_{jl} \epsilon_{klm} \alpha_m \\ &= - \sum_{k,l,m,n,p=1}^3 R_{ik} R_{jl} \epsilon_{klm} R_{nm} R_{np} \alpha_p = - \sum_{n=1}^3 \epsilon_{ijn} \alpha'_n \end{aligned} \quad (4.353)$$

mit

$$R : \vec{\alpha} \mapsto \vec{\alpha}' = R \vec{\alpha}. \quad (4.354)$$

$A$  transformiert also sich wie ein Tensor 2. Stufe, wenn sich  $\vec{\alpha}$  wie ein Vektor mit der gleichen Drehmatrix transformiert. Außerdem

$$A \vec{x} = \vec{\alpha} \times \vec{x}, \quad (4.355)$$

weil

$$[A \vec{x}]_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} x_j = - \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \alpha_k x_j = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ikj} \alpha_k x_j = [\vec{\alpha} \times \vec{x}]_i. \quad (4.356)$$

### 4.7.3 Winkelgeschwindigkeit

Sei zunächst  $\vec{a} = 0$ , dann bewegt sich ein im rotierenden Koordinatensystem *konstanter* Vektor  $\vec{x}$  im Inertialsystem wie

$$\vec{x}_I(t) = R(t)\vec{x} \quad (4.357)$$

und seine Ableitung ist

$$\dot{\vec{x}}_I = \dot{R}\vec{x} = \dot{R}R^T R\vec{x} = \omega_I \vec{x}_I \quad (4.358)$$

mit der *Winkelgeschwindigkeit* im Inertialsystem

$$\omega_I = \dot{R}R^T. \quad (4.359)$$

Diese ist wegen

$$0 = \frac{d}{dt}\mathbf{1} = \frac{d}{dt}RR^T = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T \quad (4.360)$$

eine antisymmetrische Matrix

$$\omega_I^T = \left(\dot{R}R^T\right)^T = R\dot{R}^T = -\dot{R}R^T = -\omega_I \quad (4.361)$$

und kann wieder durch einen Vektor  $\vec{\omega}_I$  ausgedrückt werden

$$\omega_{I,ij} = -\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_{I,k} \quad (4.362a)$$

$$\omega_{I,i} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_{I,jk}. \quad (4.362b)$$

Dann gilt

$$\omega_I \vec{x}_I = \vec{\omega}_I \times \vec{x}_I, \quad (4.363)$$

also

$$\dot{\vec{x}}_I = \vec{\omega}_I \times \vec{x}_I. \quad (4.364)$$

Für *konstante* Winkelgeschwindigkeit  $\omega_I$  können wir  $R(t)$  durch  $\omega_I$  explizit ausdrücken

$$R(t) = e^{\omega_I t} \quad (4.365)$$

wobei die Exponentialfunktion der Matrix  $\omega_I t$  wieder wie in (3.161) über die Potenzreihe definiert ist. Dann gilt

$$\dot{R}(t) = \omega_I e^{\omega_I t} = e^{\omega_I t} \omega_I \quad (4.366)$$



weil die Matrix  $\omega_I t$  mit sich selbst vertauscht und wie eine Zahl behandelt werden kann. Mit

$$R^T(t) = e^{\omega_I^T t} = e^{-\omega_I t} \quad (4.367)$$

ergibt sich in der Tat

$$\dot{R}(t)R^T(t) = \omega_I e^{\omega_I t} e^{-\omega_I t} = \omega_I. \quad (4.368)$$

Für zeitabhängige Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_I(t)$  gibt es keinen geschlossenen Ausdruck

### Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):

Man kann aber

$$R(t) = \text{T exp} \left( \int_0^t d\tau \omega_I(\tau) \right) \quad (4.369)$$

schreiben, wobei der *Zeitordnungsoperator* als

$$\begin{aligned} \text{T}\omega_I(t)\omega_I(t') &= \Theta(t-t')\omega_I(t)\omega_I(t') + \Theta(t'-t)\omega_I(t')\omega_I(t) \\ &= \begin{cases} \omega_I(t)\omega_I(t') & \text{für } t > t' \\ \omega_I(t')\omega_I(t) & \text{für } t < t' \end{cases} \end{aligned} \quad (4.370)$$

definiert ist und gliedweise auf die Potenzreihe angewandt werden soll.

Die Winkelgeschwindigkeit im Inertialsystem  $\vec{\omega}_I$  hängt mit der Winkelgeschwindigkeit im bewegten System  $\vec{\omega}$  über

$$\vec{\omega}_I = R\vec{\omega} \quad (4.371a)$$

$$\vec{\omega} = R^T\vec{\omega}_I \quad (4.371b)$$

zusammen.

Im allgemeinen Fall, mit  $\vec{a} \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_I &= \dot{R}\vec{x} + R\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{a}} = \dot{R}R^T R\vec{x} + R\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{a}} = \omega_I R\vec{x} + R\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{a}} \\ &= \vec{\omega}_I \times R\vec{x} + R\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{a}} = (R\vec{\omega}) \times (R\vec{x}) + R\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{a}} = R(\vec{\omega} \times \vec{x} + \dot{\vec{x}}) + \dot{\vec{a}}. \end{aligned} \quad (4.372)$$

### 4.7.4 Kinetische Energie

Damit erhalten wir die kinetische Energie durch die Geschwindigkeit im Inertialsystem, ausgedrückt durch die Koordinaten und Geschwindigkeiten im bewegten System, sowie die Translation und Rotation

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}_I^2 = \frac{m}{2} \left( R(\vec{\omega} \times \vec{x} + \dot{\vec{x}}) + \dot{\vec{a}} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x} + \dot{\vec{x}})^2 + m\dot{\vec{a}}R(\vec{\omega} \times \vec{x}) + m\dot{\vec{a}}R\dot{\vec{x}} + \frac{m}{2}\dot{\vec{a}}^2 \\
&= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + m\dot{\vec{x}}(\vec{\omega} \times \vec{x}) + \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{x})^2 + m\dot{\vec{a}}R(\vec{\omega} \times \vec{x}) + m\dot{\vec{a}}R\dot{\vec{x}} + \frac{m}{2}\dot{\vec{a}}^2 \\
&= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + m\vec{\omega}(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) + \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{x})^2 + m\vec{x}(R^T\dot{\vec{a}} \times \vec{\omega}) + m\dot{\vec{x}}R^T\dot{\vec{a}} + \frac{m}{2}\dot{\vec{a}}^2.
\end{aligned} \tag{4.373}$$

Mit

$$(\vec{\omega} \times \vec{x})^2 = (\vec{\omega} \times \vec{x})(\vec{\omega} \times \vec{x}) = \vec{x}((\vec{\omega} \times \vec{x}) \times \vec{\omega}) = -\vec{x}(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})) \tag{4.374}$$

und mit  $\dot{R}^T = -R^T\dot{R}R^T$  wegen  $R\dot{R}^T + \dot{R}R^T = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{R}^T\dot{\vec{a}} &= -R^T\dot{R}R^T\dot{\vec{a}} = -R^T\omega_1\dot{\vec{a}} = -R^T(\vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{a}}) \\
&= -(R^T\vec{\omega}_1) \times (R^T\dot{\vec{a}}) = -\vec{\omega} \times (R^T\dot{\vec{a}}) = (R^T\dot{\vec{a}}) \times \vec{\omega}
\end{aligned} \tag{4.375}$$

folgen

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + m[\vec{\omega} \times \vec{x}]_i + m[R^T\dot{\vec{a}}]_i \tag{4.376a}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + m[\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}]_i + m[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}]_i + m[R^T\ddot{\vec{a}}]_i + m[\dot{R}^T\dot{\vec{a}}]_i \tag{4.376b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x_i} &\stackrel{(4.374)}{=} m[\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}]_i - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})]_i + m[R^T\dot{\vec{a}} \times \vec{\omega}]_i \\
&\stackrel{(4.375)}{=} m[\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}]_i - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})]_i + m[\dot{R}^T\dot{\vec{a}}]_i
\end{aligned} \tag{4.376c}$$

und die **ELG** ohne Wechselwirkung sind

$$\begin{aligned}
0 &= m\ddot{\vec{x}} + m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} + mR^T\ddot{\vec{a}} - m\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) \\
&= m\ddot{\vec{x}} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} + mR^T\ddot{\vec{a}}
\end{aligned} \tag{4.377}$$

oder

$$m\ddot{\vec{x}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} - mR^T\ddot{\vec{a}} \tag{4.378}$$

mit den bekannten Scheinkräften

$$\text{Zentrifugalkraft : } \vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) \tag{4.379a}$$

$$\text{Corioliskraft : } \vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \tag{4.379b}$$

und den weiteren Scheinkräften

$$\text{nicht konstantes } \vec{\omega} : \vec{F}_{\vec{\omega}} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} \tag{4.379c}$$

$$\text{Beschleunigung : } \vec{F}_a = -mR^T\ddot{\vec{a}}. \tag{4.379d}$$

## 4.8 Starrer Körper

Ein *starrer Körper* ist eine diskrete oder kontinuierliche Massenverteilung, deren *relative* Abstände unveränderlich sind. D.h. es gibt ein *körperfestes* Koordinatensystem  $\vec{x}$ , in dem der Körper durch

$$\{(m_n, \vec{x}_n)\}_{n \in I} \quad (4.380a)$$

oder

$$\rho(\vec{x}) \quad (4.380b)$$

beschrieben wird, wobei  $\dot{\vec{x}} = 0$  und die  $\vec{x}$  also keine dynamischen Freiheitsgrade sind. Die Freiheitsgrade sind vielmehr  $(a, R)$ , also die Translation und Rotation des körperfesten Koordinatensystems relativ zu einem Inertialsystem, das auch *raumfestes* Koordinatensystem genannt wird.

Deshalb andere Sichtweise: setze  $\dot{\vec{x}} = 0$  in (4.372) und betrachte  $R$  und  $a$  als Freiheitsgrade

$$\begin{aligned} T &= \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{\vec{x}}_{n,I}^2 = \sum_n \frac{m_n}{2} \left( R(\vec{\omega} \times \vec{x}_n) + \dot{\vec{a}} \right)^2 = \sum_n \frac{m_n}{2} \left( \vec{\omega} \times \vec{x}_n + R^T \dot{\vec{a}} \right)^2 \\ &= \sum_n \frac{m_n}{2} (\vec{\omega} \times \vec{x}_n)^2 + \underbrace{\sum_n m_n \vec{x}_n}_{M\vec{X}} \left( R^T \dot{\vec{a}} \times \vec{\omega} \right) + \underbrace{\sum_n \frac{m_n}{2}}_{\frac{M}{2}} \dot{\vec{a}}^2 \\ &= \frac{M}{2} \dot{\vec{a}}^2 + \frac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{\omega} \times \vec{x}_n)^2 + M \dot{\vec{a}} R \left( \vec{\omega} \times \vec{X} \right) \quad (4.381) \end{aligned}$$

mit Gesamtmasse und Schwerpunkt

$$M = \sum_n m_n \quad (4.382a)$$

$$\vec{X}_I = \frac{1}{M} \sum_n m_n \vec{x}_{n,I} = R\vec{X} + \vec{a} \quad (4.382b)$$

$$\vec{X} = \frac{1}{M} \sum_n m_n \vec{x}_n. \quad (4.382c)$$

Lege den Ursprung des körperfesten Koordinatensystems zur Vereinfachung in den Schwerpunkt des Körpers, dann gilt

$$\vec{X} = 0 \quad (4.383)$$

und Translationsbewegung und Rotationsbewegung entkoppeln

$$T = T_{\text{Trans.}} + T_{\text{Rot.}} \quad (4.384)$$

mit

$$T_{\text{Trans.}} = \frac{M}{2} \dot{\vec{a}}^2 \quad (4.385a)$$

$$T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{\omega} \times \vec{x}_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{\omega}_I \times R\vec{x}_n)^2, \quad (4.385b)$$

weil  $(\vec{\omega}_I \times R\vec{x})^2 = (R\vec{\omega} \times R\vec{x})^2 = (R(\vec{\omega} \times \vec{x}))^2 = (\vec{\omega} \times \vec{x})^2$ , bzw.

$$T_{\text{Trans.}} = \frac{M}{2} \dot{\vec{a}}^2 \quad (4.386a)$$

$$T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{\omega}_I \times R\vec{x})^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{\omega} \times \vec{x})^2 \quad (4.386b)$$

für kontinuierliche Massenverteilungen.

#### 4.8.1 Trägheitstensor

Mit

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{x})^2 &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{mik} \omega_i x_k \epsilon_{mjl} \omega_j x_l \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{kj}) \omega_i x_k \omega_j x_l \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \sum_{k,l=1}^3 (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{kj}) x_k x_l = \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j (\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \end{aligned} \quad (4.387)$$

Vorlesung 20: Fr, 22. 12. 2023

kann man die kinetische Energie der Rotationsbewegung

$$T_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \sum_n m_n (\vec{x}_n^2 \delta_{ij} - x_{n,i} x_{n,j}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \theta_{ij} = \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, \theta \vec{\omega} \rangle \quad (4.388)$$

durch den *Trägheitstensor* im körperfesten System

$$\theta_{ij} = \sum_n m_n (\vec{x}_n^2 \delta_{ij} - x_{n,i} x_{n,j}) = \theta_{ji} \quad (4.389)$$

ausdrücken, bzw. für kontinuierliche Systeme

$$\theta_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j) = \theta_{ji}. \quad (4.390)$$

Der Trägheitstensor ist symmetrisch, kann also durch eine orthogonale Transformation  $O$ , d. h. eine Rotation, diagonalisiert werden

$$\hat{\theta} = O^T \theta O \quad (4.391a)$$

$$\hat{\vec{x}} = O^T \vec{x} \quad (4.391b)$$

Im so gedrehten System liegen die Koordinaten entlang der sogenannten *Hauptträgheitsachsen*. Die nichtverschwindenden Komponenten heißen *Hauptträgheitsmomente* und sind die Eigenwerte von  $\theta$

$$\hat{\theta}_{11} = I_1 = \sum_n m_n (\hat{x}_{n,2}^2 + \hat{x}_{n,3}^2) \geq 0 \quad (4.392a)$$

$$\hat{\theta}_{22} = I_2 = \sum_n m_n (\hat{x}_{n,3}^2 + \hat{x}_{n,1}^2) \geq 0 \quad (4.392b)$$

$$\hat{\theta}_{33} = I_3 = \sum_n m_n (\hat{x}_{n,1}^2 + \hat{x}_{n,2}^2) \geq 0. \quad (4.392c)$$

Diese können *nur* verschwinden, wenn der Körper in mehr als einer Richtung unendlich dünn ist, z. B. ein idealisierter Stab.

*Beispiel 4.7* (Homogene Kugel).

$$\rho(\vec{x}) = \frac{3M}{4\pi R^3} \Theta(R - |\vec{x}|) \quad (4.393)$$

und damit

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}^2 = \frac{3M}{R^3} \int_0^R r^2 dr r^2 = \frac{3M}{R^3} \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} M R^2 \quad (4.394a)$$

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) x_i x_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \frac{3M}{2R^3} \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\cos\theta \cos^2\theta r^2 & \text{für } i = j, \end{cases} \quad (4.394b)$$

$$= \frac{3M}{2R^3} \int_0^R r^2 dr \frac{2}{3} r^2 = \frac{1}{5} M R^2$$

also

$$\theta_{ij} = \frac{2}{5} M R^2 \delta_{ij}. \quad (4.395)$$

Dieses Ergebnis kann man bis auf einen dimensionslosen Normierungsfaktor  $c$  schneller aus einer Dimensionsbetrachtung und der Kugelsymmetrie

$$\theta_{ij} = c M R^2 \delta_{ij} \quad (4.396a)$$

herleiten, weil  $\delta$  der einzige symmetrische invariante Tensor zweiter Stufe ist. Den Faktor  $c$  erhält man dann mit einem einzigen Integral (4.394a)

$$3cMR^2 = \sum_{i=1}^3 \theta_{ii} = 2 \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}^2 = 2 \frac{3}{5} MR^2. \quad (4.396b)$$

### Satz von Steiner

Verschiebung des Bezugspunkts des Trägheitstensors aus dem Schwerpunkt um  $\vec{b}$

$$\vec{x}_n \mapsto \vec{x}_n + \vec{b}:$$

$$\begin{aligned} \theta_{ij}^{\text{Schwerpunkt}} &\mapsto \sum_n m_n \left( \left( \vec{x}_n + \vec{b} \right)^2 \delta_{ij} - (x_{n,i} + b_i)(x_{n,j} + b_j) \right) \\ &= \sum_n m_n (\vec{x}_n^2 \delta_{ij} - x_{n,i} x_{n,j}) + \sum_n m_n (\vec{b}^2 \delta_{ij} - b_i b_j) \\ &\quad + \sum_n m_n (2\vec{x}_n \vec{b} \delta_{ij} - x_{n,i} b_j - x_{n,j} b_i) \\ &= \theta_{ij}^{\text{Schwerpunkt}} + M (\vec{b}^2 \delta_{ij} - b_i b_j) + 2M \vec{X} \vec{b} \delta_{ij} - M X_i b_j - M X_j b_i \\ &= \theta_{ij}^{\text{Schwerpunkt}} + M (\vec{b}^2 \delta_{ij} - b_i b_j). \quad (4.397) \end{aligned}$$

### 4.8.2 Drehimpuls

Gesamtdrehimpuls im Inertialsystem mit Ursprung des körperfesten Systems im Schwerpunkt, d. h.  $\vec{X} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{L}_I &= \sum_n m_n \vec{x}_{n,I} \times \dot{\vec{x}}_{n,I} = \sum_n m_n (R\vec{x}_n + \vec{a}) \times (R(\vec{\omega} \times \vec{x}_n) + \dot{\vec{a}}) \\ &= \sum_n m_n (R\vec{x}_n) \times R(\vec{\omega} \times \vec{x}_n) + \sum_n m_n (R\vec{x}_n) \times \dot{\vec{a}} \\ &\quad + \sum_n m_n \vec{a} \times R(\vec{\omega} \times \vec{x}_n) + \sum_n m_n \vec{a} \times \dot{\vec{a}} \\ &= R \sum_n m_n \vec{x}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_n) + \underbrace{M(R\vec{X}) \times \dot{\vec{a}}}_{=0, \text{ weil } \vec{X} = 0} + \underbrace{M\vec{a} \times R(\vec{\omega} \times \vec{X})}_{=0, \text{ weil } \vec{X} = 0} + M\vec{a} \times \dot{\vec{a}} \\ &= R\vec{L} + M\vec{a} \times \dot{\vec{a}} \quad (4.398) \end{aligned}$$

Dabei ist der Drehimpuls im körperfesten System

$$\begin{aligned}
L_i &= \sum_n m_n \sum_{j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} x_{n,j} \epsilon_{klm} \omega_l x_{n,m} \\
&= \sum_{j,l,m=1}^3 \sum_n m_n (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_{n,j} \omega_l x_{n,m} \\
&= \sum_{j=1}^3 \sum_n m_n (\vec{x}_n^2 \delta_{ij} - x_{n,i} x_{n,j}) \omega_j = \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} \omega_j, \quad (4.399)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{L} = \theta \vec{\omega}, \quad (4.400)$$

und der Anteil der Schwerpunktsbewegung am Drehimpuls ist

$$\vec{L}_{\text{Trans.,I}} = M \vec{a} \times \dot{\vec{a}}. \quad (4.401)$$

Insgesamt also

$$\vec{L}_I = R \vec{L} + \vec{L}_{\text{Trans.,I}} = R \theta \vec{\omega} + \vec{L}_{\text{Trans.,I}}. \quad (4.402)$$

Der Drehimpuls im körperfesten System  $\vec{L}$  und die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System  $\omega$  sind also dann und nur dann parallel, wenn  $\theta$  proportional zur Einheitsmatrix ist,  $\vec{\omega}$  entlang einer Hauptträgheitsachse zeigt oder in der Ebene liegt, die von zwei Hauptträgheitsachsen mit dem gleichen Hauptträgheitsmoment aufgespannt wird.

### 4.8.3 Euler'sche Gleichungen

Wenn keine Kräfte wirken, ist der Drehimpuls im Inertialsystem erhalten und wir können außerdem ein Inertialsystem wählen, in dem der Schwerpunkt ruht, also  $\dot{\vec{a}} = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d\vec{L}_I}{dt} = \dot{R} \vec{L} + R \dot{\vec{L}} = \dot{R} R^T R \vec{L} + R \dot{\vec{L}} \\
&= \vec{\omega}_I \times R \vec{L} + R \dot{\vec{L}} = R \vec{\omega} \times R \vec{L} + R \dot{\vec{L}} = R (\vec{\omega} \times \vec{L} + \dot{\vec{L}}), \quad (4.403)
\end{aligned}$$

also im körperfesten System, weil  $\det R \neq 0$ ,

$$\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = 0 \quad (4.404)$$

und mit

$$\vec{L} = \theta \vec{\omega} \quad (4.405)$$

folgen schließlich die *Euler-Gleichungen* (nicht **ELG**)

$$\theta \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \theta \vec{\omega} = 0. \quad (4.406)$$

*Bemerkung 4.8.* Wenn die äußeren Kräfte nur auf den Schwerpunkt des starren Körpers wirken, z. B. ein homogener Körper im Schwerfeld, dann gelten die Eulergleichungen wegen der Entkopplung von Translation und Rotation ebenfalls.

Im System, in dem  $\theta$  diagonal ist,

$$\theta_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad (4.407)$$

ist (4.406) in Komponenten

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (4.408a)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = 0 \quad (4.408b)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0. \quad (4.408c)$$

Es gibt zwei Erhaltungsgrößen

$$E = T = \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, \theta \vec{\omega} \rangle = \text{const.} \quad (4.409a)$$

$$\vec{L}_1^2 = \vec{L}^2 = \langle \theta \vec{\omega}, \theta \vec{\omega} \rangle = \langle \vec{\omega}, \theta^T \theta \vec{\omega} \rangle = \langle \vec{\omega}, \theta^2 \vec{\omega} \rangle = \text{const.} \quad (4.409b)$$

die voneinander unabhängig sind, wenn

$$\theta^2 \not\propto \theta. \quad (4.410)$$

Dann kann man z. B.  $\omega_2$  und  $\omega_3$  als Funktion von  $\omega_1$  schreiben und man erhält eine eindimensionale Differentialgleichung für  $\omega_1$ , die man durch Separation der Variablen lösen kann. Diese führt leider wie das Pendel mit großem Ausschlag auf elliptische Integrale.

### *Kugelsymmetrie*

Mit

$$\theta = I \mathbf{1} \quad (4.411)$$

folgt

$$\vec{\omega} \parallel \theta \vec{\omega}, \text{ bzw. } \vec{\omega} \times \theta \vec{\omega} = 0 \quad (4.412)$$

und

$$\dot{\vec{\omega}} = 0 \quad (4.413)$$

also konstante Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ .



### *Symmetrischer Kreisel*

Mit den Hauptträgheitsmomenten

$$0 < I_3 \neq I_1 = I_2 = I > 0 \quad (4.414)$$

ergeben sich die Euler-Gleichungen

$$\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \omega_2 = 0 \quad (4.415a)$$

$$\dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \omega_1 = 0 \quad (4.415b)$$

$$\dot{\omega}_3 = 0. \quad (4.415c)$$

Weil die Winkelgeschwindigkeit um die *Figurenachse*  $\omega_3$  konstant ist, finden wir mit

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 = \text{const.} \quad (4.416)$$

die Gleichungen

$$\dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0 \quad (4.417a)$$

$$\dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 \quad (4.417b)$$

mit den offensichtlichen Lösungen

$$\omega_1 = \cos(\Omega t + \delta) \quad (4.418a)$$

$$\omega_2 = \sin(\Omega t + \delta). \quad (4.418b)$$

Im körperfesten System präzediert die Winkelgeschwindigkeit also um die Figurenachse. Die Richtung und Frequenz der Rotation wird von  $\Omega$  bestimmt.

### *Stabilität des asymmetrischen Kreisels*

Wenn  $I_i \neq I_j$  für  $i \neq j$ , dann sind die Lösungen der Eulergleichungen sehr kompliziert, aber wir können trotzdem mit wenig Aufwand etwas über Fixpunkte und über Stabilität unter kleinen Störungen aussagen.

Offensichtlich werden (4.408) von den Winkelgeschwindigkeiten

$$\vec{\omega}_i = \omega_0 \vec{e}_i, \text{ für } i = 1, 2, 3 \quad (4.419)$$

gelöst. Rotationen um jede der Hauptträgheitsachsen sind also Fix„punkte“ der Bewegung.

Betrachten wir nun, o. B. d. A., kleine Störungen der Rotation um die erste Hauptträgheitsachse

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\eta} = \omega_0 \vec{e}_1 + \vec{\eta} = (\omega_0 + \eta_1, \eta_2, \eta_3) \quad (4.420)$$

und vernachlässigen wir quadratische Terme in  $\vec{\eta}$

$$I_1 \dot{\eta}_1 = 0 \quad (4.421a)$$

$$I_2 \dot{\eta}_2 + (I_1 - I_3) \omega_0 \eta_3 = 0 \quad (4.421b)$$

$$I_3 \dot{\eta}_3 + (I_2 - I_1) \omega_0 \eta_2 = 0. \quad (4.421c)$$

Offensichtlich ist  $\eta_1 = \text{const.}$  und durch Differenzieren und Einsetzen

$$\ddot{\eta}_2 - \frac{(I_2 - I_1)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3} \omega_0^2 \eta_2 = 0, \quad (4.422)$$

analog für  $\eta_3$ . Die Bewegung ist also

$$\begin{aligned} &\text{stabil und periodisch für } (I_2 - I_1)(I_1 - I_3) < 0 \\ &\text{instabil für } (I_2 - I_1)(I_1 - I_3) > 0. \end{aligned} \quad (4.423)$$

Daraus ergibt sich, daß die Bewegung um das größte und kleinste Hauptträgheitsmoment stabil ist, aber die Bewegung um das mittlere instabil.

Dieses Verhalten lässt sich in Schwerelosigkeit sehr schön demonstrieren, weshalb es auch als *Dschanibekow Effekt* genannt wird<sup>6</sup> nach dem russischen Kosmonauten Wladimir Alexandrowitsch Dschanibekow. Es existieren eindrucksvolle Demonstrationsvideos aus den Raumstationen Mir und ISS, z. B.

- <https://www.youtube.com/watch?v=1n-HMSCDYtM>: kurze Demonstration (auf der ISS gefilmt),
- [https://www.youtube.com/watch?v=89D\\_WzYVWxk](https://www.youtube.com/watch?v=89D_WzYVWxk): Demonstration auf der chinesischen Raumstation (englische Untertitel).

#### 4.8.4 Eulerwinkel

---

<sup>6</sup>Im englischen Sprachraum auch als *Tennis Racket Theorem* oder *Intermediate Axis Theorem* bekannt.

Parametrisierung der allgemeinen Drehmatrix durch drei sukzessive Rotationen um zwei raumfeste Achsen  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_3$

$$R : [0, 2\pi[ \times [0, \pi[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \text{SO}(3)$$

$$(\phi, \theta, \psi) \mapsto R(\phi, \theta, \psi) = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi) \quad (4.424)$$

mit  $R_i$  Drehung um die  $i$ -te Achse wie in (3.166)

$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.425a)$$

$$R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.425b)$$

Dann

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} c_\phi c_\psi - s_\phi c_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi - s_\phi c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\psi + c_\phi c_\theta s_\psi & -s_\phi s_\psi + c_\phi c_\theta c_\psi & -c_\phi s_\theta \\ s_\theta s_\psi & s_\theta c_\psi & c_\theta \end{pmatrix} \quad (4.426)$$

mit der Kurzschreibweise

$$s_\alpha = \sin \alpha \quad (4.427a)$$

$$c_\alpha = \cos \alpha. \quad (4.427b)$$

Es ist nichttrivial, daß man die komplette Rotation auch, wie in Abbildung 4.13, als Drehung um drei mitgedrehte Achsen in umgekehrter Reihenfolge

$$R = R(\phi, \theta, \psi) = R_{R\vec{e}_3}(\psi)R_{R_3(\phi)\vec{e}_1}(\theta)R_3(\phi) \quad (4.428)$$

schreiben kann. In der Gleichung wurde ausgenutzt, daß die letzte Rotation das transformierte  $\vec{e}_3$  nicht mehr ändert, also

$$R\vec{e}_3 = R_{R_3(\phi)\vec{e}_1}(\theta)R_3(\phi)\vec{e}_3. \quad (4.429)$$

Um die Äquivalenz von (4.424) und (4.428) zu zeigen, überzeugen wir uns zunächst, daß die Drehung um eine gedrehte Achse als das Produkt von inverser Drehung, Drehung um ungedrehte Achse und Drehung geschrieben werden

$$R_{R'\vec{v}}(\alpha) = R'R_{\vec{v}}(\alpha)(R')^T \quad (4.430)$$

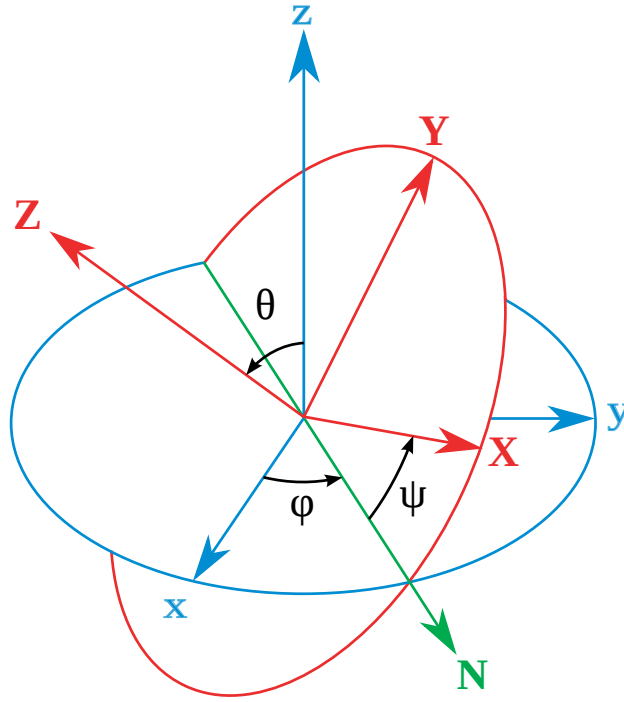


Abbildung 4.13: *Definition der Eulerwinkel:  $R(\phi, \theta, \psi) : (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ . NB: die Abbildung suggeriert eine Drehung der Basisvektoren („passive Drehung“), während wir eine aktive Drehung der Koordinaten betrachten.*

kann. Insbesondere gilt also

$$R_{R\vec{e}_3}(\psi) = R R_3(\psi) R^T \quad (4.431a)$$

$$R_{R_3(\phi)\vec{e}_1}(\theta) R_3(\phi) = R_3(\phi) R_1(\theta) R_3^T(\phi) R_3(\phi) = R_3(\phi) R_1(\theta) \quad (4.431b)$$

und damit wird aus (4.428)

$$R = \underbrace{R R_3(\psi) R^T}_{R_{R\vec{e}_3}(\psi)} \underbrace{R_3(\phi) R_1(\theta)}_{R_{R_3(\phi)\vec{e}_1}(\theta) R_3(\phi)} \quad (4.432)$$

oder mit  $\det R \neq 0$

$$\mathbf{1} = R_3(\psi) R^T R_3(\phi) R_1(\theta), \quad (4.433)$$

bzw.

$$R^T = R_3^T(\psi) R_1^T(\theta) R_3^T(\phi) \quad (4.434)$$

und schließlich

$$R = R_3(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi). \quad (4.435)$$

### 4.8.5 Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit im Inertialsystem und im körperfesten System sind

$$\omega_I = \dot{R}R^T \quad (4.436a)$$

$$\omega = R^T \omega_I R = R^T \dot{R}. \quad (4.436b)$$

Mit

$$\begin{aligned} R_3^T(\alpha) \dot{R}_3(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\alpha} \quad (4.437) \end{aligned}$$

kann man sie leicht in Eulerwinkeln ausdrücken, ohne die explizite Form (4.426) von  $R(\phi, \theta, \psi)$  ausschreiben zu müssen

$$\begin{aligned} \omega &= R^T(\phi, \theta, \psi) \dot{R}(\phi, \theta, \psi) = R_3^T(\psi) R_1^T(\theta) R_3^T(\phi) \frac{d}{dt} (R_3(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi)) \\ &= R_3^T(\psi) R_1^T(\theta) R_3^T(\phi) \cdot \\ &\quad \left( \dot{R}_3(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi) + R_3(\phi) \dot{R}_1(\theta) R_3(\psi) + R_3(\phi) R_1(\theta) \dot{R}_3(\psi) \right) \\ &= R_3^T(\psi) R_1^T(\theta) \left( R_3^T(\phi) \dot{R}_3(\phi) \right) R_1(\theta) R_3(\psi) \\ &\quad + R_3^T(\psi) \left( R_1^T(\theta) \dot{R}_1(\theta) \right) R_3(\psi) + R_3^T(\psi) \dot{R}_3(\psi) \\ &= R_3^T(\psi) R_1^T(\theta) \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_1(\theta) R_3(\psi) \\ &\quad + R_3^T(\psi) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix} R_3(\psi) + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.438) \end{aligned}$$

Die entsprechenden Gleichungen für die äquivalenten Vektoren sind

$$\vec{\omega} = R_3^T(\psi) R_1^T(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + R_3^T(\psi) \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
R_3^T(\psi) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \dot{\phi} \\ \cos \theta \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\theta} \\ -\sin \psi \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \cos \psi \sin \theta \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und zusammengefasst

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \cos \psi \sin \theta \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (4.439)$$

#### 4.8.6 Euler-Lagrange Gleichungen

Wenn das körperfeste System entlang der Hauptträgheitsachsen ausgerichtet ist, ist  $\theta$  diagonal

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2. \quad (4.440)$$

Mit

$$\omega_1^2 = \sin^2 \psi \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \cos^2 \psi \dot{\theta}^2 + 2 \sin \psi \cos \psi \sin \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \quad (4.441a)$$

$$\omega_2^2 = \cos^2 \psi \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \sin^2 \psi \dot{\theta}^2 - 2 \sin \psi \cos \psi \sin \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \quad (4.441b)$$

$$\omega_3^2 = (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 \quad (4.441c)$$

folgt

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2. \quad (4.442)$$

und

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2 \cos \theta \dot{\phi} \dot{\psi}. \quad (4.443)$$

Deshalb ist die kinetische Energie für einen kugelsymmetrischen Körper mit  $I_i = I$

$$T = \frac{I}{2} (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2 \cos \theta \dot{\phi} \dot{\psi}) \quad (4.444)$$

und für einen symmetrischen Kreisel mit  $I_1 = I_2 = I$

$$T = \frac{I}{2} (\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2. \quad (4.445)$$

### 4.8.7 Schwerer Kreisel

Sei ein symmetrischer Kreisel mit der Gesamtmasse  $M$  im Abstand  $l$  vom Schwerpunkt im Schwerfeld aufgehängt. Dann hängt die potentielle Energie nur von  $\theta$  ab

$$V(\theta) = Mgl \cos \theta \quad (4.446)$$

und die Lagrangefunktion ist mit  $I_1 = I_2 = I$

$$L = \frac{I}{2} (\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta. \quad (4.447)$$

Offensichtlich

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (4.448a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad (4.448b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (4.448c)$$

und deshalb finden wir drei Integrale

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) = \text{const.} \quad (4.449a)$$

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \cos \theta (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \\ &= I \sin^2 \theta \dot{\phi} + p_\psi \cos \theta = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.449b)$$

sowie

$$\begin{aligned} E = H &= \frac{I}{2} (\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{I}{2} (\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff.}, p_\phi, p_\psi}(\theta) + \frac{p_\psi^2}{2I_3} = E_{p_\phi, p_\psi}(\dot{\theta}, \theta) = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.449c)$$

mit

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sin^2 \theta}. \quad (4.449d)$$

Wir finden damit ein effektives Potential

$$V_{\text{eff.}, p_\phi, p_\psi}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta \quad (4.450)$$

für  $\theta$ .

Wir haben also wieder ein eindimensionales Problem mit Energieerhaltung gefunden, das *immer* durch Trennung der Veränderlichen und Integration gelöst werden kann. Wobei natürlich im Allgemeinen, die Integrale und ihre Umkehrfunktionen nicht durch „Schulfunktionen“ dargestellt werden können. Sobald wir  $\theta : \mathbf{R} \rightarrow [0, \pi[$  kennen, können wir daraus mit den anderen Integralen durch Integration zunächst  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow [0, 2\pi[$  und schließlich  $\psi : \mathbf{R} \rightarrow [0, 2\pi[$  berechnen.

### Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):

Die geschickte Substitution

$$u = \cos \theta \in [-1, 1] \quad (4.451a)$$

$$\dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta} = -\sqrt{1-u^2} \dot{\theta} \quad (4.451b)$$

führt auf

$$E'(u, \dot{u}) = \frac{I}{2} \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{2I(1-u^2)} + Mglu = \text{const.}, \quad (4.452)$$

bzw.

$$\dot{u}^2 = \frac{2(1-u^2)}{I} (E' - Mglu) - \frac{(p_\phi - p_\psi u)^2}{I^2} = f(u, p_\phi, p_\psi) \quad (4.453)$$

und die erlaubte Bewegung ist für  $f(u, p_\phi, p_\psi) \geq 0$ .

Beobachtungen

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u, p_\phi, p_\psi) = \pm\infty \quad (4.454a)$$

$$f(\pm 1, p_\phi, p_\psi) = -\frac{(p_\phi \mp p_\psi)^2}{I^2} \leq 0, \quad (4.454b)$$

also gibt es nur ein Teilintervall von  $[-1, 1]$  in dem die Bewegung in  $\theta$ , die sogenannte *Nutation*, erlaubt ist.

### Stehaufkreisel

Im folgenden bezeichnet, wie in Abb. 4.14,  $\vec{e}_3$  den Einheitsvektor entlang der Symmetrieachse im körperfesten System und  $\vec{e}_z$  die Senkrechte im Inertialsystem (d. h.  $\vec{g} = -|\vec{g}|\vec{e}_z$ ).

Für einen symmetrischen Kreisel mit

$$\theta = \text{diag}(I, I, I_3) \quad (4.455)$$



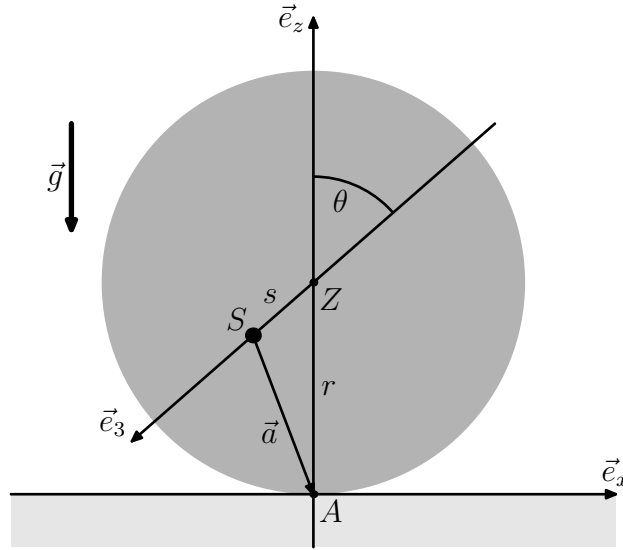


Abbildung 4.14: Vereinfachtes Modell eines Stehaufkreisel: Kugel mit Radius  $r$ , Massenverteilung rotationssymmetrisch um  $\vec{e}_3$  und inhomogen entlang  $\vec{e}_3$ . Schwerpunkt  $S$ , Mittelpunkt  $Z$ , Auflagepunkt  $A$  und  $\vec{a} = \overline{SA} = \overline{SZ} + \overline{ZA} = -r\vec{e}_z - s\vec{e}_3$ .

liegt wegen

$$\vec{L} = \theta \vec{\omega} = (I\omega_1, I\omega_2, I_3\omega_3) \quad (4.456)$$

der Drehimpuls immer in der von der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und der Symmetrieachse  $\vec{e}_3$  aufgespannten Ebene

$$\vec{L}(\vec{\omega} \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3(\vec{L} \times \vec{\omega}) = L_1\omega_2 - L_2\omega_1 = I\omega_1\omega_2 - I\omega_2\omega_1 = 0. \quad (4.457)$$

Daraus folgt für beliebige Linearkombinationen

$$\vec{b} = \alpha \vec{e}_3 + \beta \vec{e}_z \quad (4.458)$$

von  $\vec{e}_z$  und  $\vec{e}_3$  mit konstanten Koeffizienten wegen

$$\dot{\vec{b}} = \alpha \dot{\vec{e}}_3 = \alpha \vec{\omega} \times \vec{e}_3 \quad (4.459)$$

eine einfache Form der Zeitableitung der Projektion des Drehimpulses

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}\vec{b}) = \dot{\vec{L}}\vec{b} + \vec{L}\dot{\vec{b}} = \dot{\vec{L}}\vec{b} + \alpha \vec{L}(\vec{\omega} \times \vec{e}_3) = \dot{\vec{L}}\vec{b}. \quad (4.460)$$

Für das Drehmoment  $\vec{M}$  bzgl. des Schwerpunkts  $S$  einer *beliebigen* Kraft  $\vec{F}$ , die am Auflagepunkt  $\vec{a} = -s\vec{e}_3 - r\vec{e}_z$  (siehe Abb. 4.14) wirkt, gilt

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}. \quad (4.461)$$

Für  $\vec{b} = \vec{a}$  in (4.460) folgt damit

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}\vec{a}) = \dot{\vec{L}}\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{F})\vec{a} = 0. \quad (4.462)$$

Es gibt also unabhängig von den Details der Kraft  $\vec{F}$  eine Erhaltungsgröße, *Jellets Integral* [12],

$$J = \vec{L}\vec{a} = -\vec{L}(s\vec{e}_3 + r\vec{e}_z). \quad (4.463)$$

Diese ist konstant, auch wenn *am Auflagepunkt* eine *beliebige* Kraft  $\vec{F}$  wirkt. Dies schließt insbesondere Gleitreibungskräfte ein!

Geometrisch ist Jellets Integral die mit dem zeitabhängigen Betrag  $|\vec{a}|$  multiplizierte Projektion des Drehimpulses auf die Verbindung  $\vec{a}$  vom Schwerpunkt zum Auflagepunkt.

Vorlesung 22: Fr, 12. 01. 2024

Die Skalarprodukte von  $\vec{L}$  mit den Einheitsvektoren sind gerade die zu den Eulerwinkeln konjugierten kanonischen Impulse

$$\vec{L}\vec{e}_3 = I_3\omega_3 = p_\psi \quad (4.464a)$$

$$\vec{L}\vec{e}_z = -p_\phi. \quad (4.464b)$$

In (4.464b) wurde benutzt, daß die bewegte körperfeste Symmetrieachse  $\vec{e}_3$  durch die Rotation  $R$  aus dem festen Vektor  $-\vec{e}_z$  entsteht. Deshalb kann man  $\vec{e}_z$  durch  $R^T$  im körperfesten System ausdrücken

$$-\vec{e}_z = R^T \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.465)$$

und erhält damit

$$\begin{aligned} -\vec{L}\vec{e}_z &= I\omega_1 \sin \theta \sin \psi + I\omega_2 \sin \theta \cos \psi + I_3\omega_3 \cos \theta \\ &= I \sin \psi \sin \theta \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + I \cos \psi \sin \theta \sin \psi \dot{\theta} \\ &\quad + I \cos \psi \sin \theta \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - I \sin \psi \sin \theta \cos \psi \dot{\theta} + p_\psi \cos \theta \\ &= I \sin^2 \psi \sin^2 \theta \dot{\phi} + I \cos^2 \psi \sin^2 \theta \dot{\phi} + p_\psi \cos \theta \end{aligned}$$

$$= I \sin^2 \theta \dot{\phi} + p_\psi \cos \theta = p_\phi. \quad (4.466)$$

Jellets Integral ist also keine neue Erhaltungsgröße, sondern eine Linearkombination der konjugierten Impulse

$$J = rp_\phi - sp_\psi = \text{const.} \quad (4.467)$$

Im Gegensatz zu  $p_\psi$  und  $p_\phi$  ist Jellets Integral aber auch dann erhalten wenn am Auflagepunkt  $A$  Gleitreibungskräfte wirken.

Wenn unser System durch Reibung Energie verliert, können wir erwarten, daß es versuchen wird, den Zustand niedrigster Energie einzunehmen, der mit den Zwangsbedingungen und Erhaltungssätzen verträglich ist. Weil die kinetische Energie quadratisch in den Geschwindigkeiten ist, ist die Gesamtenergie gleich der Summe von kinetischer Energie der Translation und Rotation, sowie der potentiellen Energie

$$E = T + V = \frac{M}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + s^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) + \frac{I}{2} (\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - Mgs \cos \theta \quad (4.468)$$

wobei  $x_3 = r - s \cos \theta$ , also  $\dot{x}_3 = s \sin \theta \dot{\theta}$ , bereits eingesetzt wurde. Das Vorzeichen des Potentials erklärt sich aus unserer Wahl des Winkels  $\theta$ : für  $\theta = 0$  liegt der Schwerpunkt  $S$  unter dem Mittelpunkt  $Z$ . Die Geschwindigkeiten  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$  and  $\dot{\theta}$  tragen unabhängig von den anderen Variablen immer positiv bei, also muß das Minimum der Energie bei  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{\theta} = 0$  liegen

$$E \geq \hat{E} = \frac{I}{2} \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \frac{I_3}{2} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - Mgs \cos \theta. \quad (4.469)$$

Die kanonischen Impulse in Jellets Integral sind wieder

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \quad (4.470a)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \cos \theta (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) = I \sin^2 \theta \dot{\phi} + p_\psi \cos \theta \quad (4.470b)$$

mit den Umkehrfunktionen

$$\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} \quad (4.471a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - \cos \theta p_\psi}{I \sin^2 \theta}. \quad (4.471b)$$

Mit  $j = J/r = \text{const.}$  und  $\epsilon = s/r$  können wir

$$j + \epsilon p_\psi = p_\phi = I \sin^2 \theta \dot{\phi} + \cos \theta p_\psi \quad (4.472)$$

schreiben, bzw.

$$\dot{\phi} = \frac{j + (\epsilon - \cos \theta) p_\psi}{I \sin^2 \theta} \quad (4.473)$$

und die Energie als Funktion von  $\theta$  und  $p_\psi$  ausdrücken

$$\hat{E} = \frac{(j + (\epsilon - \cos \theta) p_\psi)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} - Mgs \cos \theta. \quad (4.474)$$

Für festgehaltenes  $\theta$  liegen die Extrema bei

$$0 = \frac{\partial \hat{E}}{\partial p_\psi} = \frac{(\epsilon - \cos \theta)(j + (\epsilon - \cos \theta) p_\psi)}{I \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi}{I_3}, \quad (4.475)$$

woraus sich die Terme im Zähler der Energie

$$j + (\epsilon - \cos \theta) p_\psi = \frac{I \sin^2 \theta p_\psi}{I_3 (\cos \theta - \epsilon)} \quad (4.476a)$$

$$p_\psi = \frac{j I_3 (\cos \theta - \epsilon)}{I_3 (\cos \theta - \epsilon)^2 + I \sin^2 \theta} \quad (4.476b)$$

ergeben. Schließlich ergibt sich das Minimum der Energie für festgehaltenes  $\theta$  zu

$$\begin{aligned} \hat{E} \Big|_{\min} &= \frac{I \sin^2 \theta p_\psi^2}{2I_3^2 (\cos \theta - \epsilon)^2} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} - Mgs \cos \theta \\ &= \frac{I \sin^2 \theta + I_3 (\cos \theta - \epsilon)^2}{2I_3^2 (\cos \theta - \epsilon)^2} p_\psi^2 - Mgs \cos \theta \\ &= \frac{j^2}{2I \sin^2 \theta + 2I_3 (\cos \theta - \epsilon)^2} - Mgs \cos \theta = \frac{j^2}{2I_{\text{eff.}} (\cos \theta)} - Mgs \cos \theta \end{aligned} \quad (4.477)$$

mit einem effektiven Trägheitsmoment

$$I_{\text{eff.}}(x) = I(1 - x^2) + I_3(x - \epsilon)^2. \quad (4.478)$$

Für geeignete Werte von  $I$  und  $I_3$  und hinreichend großen erhaltenen Drehimpuls  $J = rj$  findet man ein Maximum von  $I_{\text{eff.}}(\cos \theta)$ , d. h. ein Minimum

der kinetischen Energie, bei  $\theta = \pi$ , also bei aufgestelltem Kreisel, mit dem Schwerpunkt  $S$  über dem Zentrum der Kugel  $Z$ . In der Tat

$$0 > \frac{dI_{\text{eff.}}}{dx}(x) = -2Ix + 2I_3(x - \epsilon) = 2(I_3 - I)x - 2I_3\epsilon \quad (4.479)$$

für alle  $|x| < 1$  sofern

$$I_3\epsilon > |I_3 - I| \quad (4.480)$$

und  $I_{\text{eff.}}$  steigt monoton für  $x$  von  $+1$  bis  $-1$ , bzw. für  $\theta$  von  $0$  bis  $\pi$ . Solange die kinetische Energie bei hinreichend großen  $j$  über die potentielle Energie dominiert, wird sich der Kreisel aufgrund der Reibung am Auflagepunkt aufstellen.

Diese qualitative Überlegung garantiert noch nicht, daß es eine Lösung der Bewegungsgleichungen gibt, die den Anfangszustand mit dem gefundenen Minimum verbindet: es könnte ein Potentialberg im Weg sein. Numerische Lösungen der ungenäherten Bewegungsgleichungen bestätigen unsere Beschreibung jedoch.

Auf einen realen Stehaufkreisel wirken weitere Kräfte, die nicht nur am Auflagepunkt ansetzen (die Spitze ist nie ganz punktförmig und es gibt Luftwiderstand). Deshalb ist Jellets Integral  $J$  über längere Zeiten nicht konstant. Weil  $J$  eine Kombination von Drehimpulsen ist, wird es in jedem Fall irgendwann abnehmen und der Kreisel wird die aufgerichtete Lage wieder verlassen.

## —5—

## HAMILTON'SCHE FORMULIERUNG

Im Lagrangeformalismus spielen die konjugierten Impulse

$$p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \quad (5.1)$$

eine wichtige Rolle:

- als Erhaltungsgröße, wenn die zugehörige Koordinate zyklisch ist

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \implies p_i = \text{const.} \quad (5.2)$$

und allgemeiner

- als Baustein in den Integralen die aus dem Noether-Theorem folgen

$$I_\phi = \sum_i p_i \delta_\phi q_i - \Lambda_\phi. \quad (5.3)$$

Die Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  spielen keine solche ausgezeichnete Rolle. Deshalb erscheint es sinnvoll, einen Formalismus zu suchen, der den Geschwindigkeits-Phasenraum  $TQ$ , der von  $(q, \dot{q})$  aufgespannt wird, durch den *Phasenraum*  $T^*Q$  zu ersetzen, der von Koordinaten und Impulsen  $(q, p)$  aufgespannt wird. Es wird sich zeigen, daß dieser Raum eine besondere Struktur trägt, die eine sehr symmetrische Formulierung der klassischen Mechanik erlaubt und die darüberhinaus einen natürlichen Übergang zur Quantenmechanik ermöglicht.

## 5.1 Legendre Transformation

### 5.1.1 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

Betrachte eine reellwertige Funktion<sup>1</sup> auf  $T \subseteq \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} f : T &\rightarrow \mathbf{R} \\ v &\mapsto f(v), \end{aligned} \quad (5.4)$$

die mindestens zweimal stetig differenzierbar sei. Dann existiert eine zugehörige Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla f : T &\rightarrow T^* \subseteq \mathbf{R}^n \\ v &\mapsto p = \nabla f(v) \end{aligned} \quad (5.5)$$

d. h.

$$p_i(v) = \frac{\partial f}{\partial v_i}(v). \quad (5.6)$$

Hier ist  $T^*$  eine Teilmenge<sup>2</sup> des zu  $\mathbf{R}^n$  dualen Vektorraums, d. h. des Raums aller *linearen* Funktionen  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . Im endlichdimensionalen Fall gilt zwar immer  $T^* \cong \mathbf{R}^n$ , aber es lohnt sich, die Räume trotzdem zu unterscheiden, weil

- man so Funktionen  $T \rightarrow \mathbf{R}$  und  $T^* \rightarrow \mathbf{R}$ , die unterschiedliche physikalische Bedeutung haben, weniger leicht verwechseln kann und
- der Isomorphismus  $T^* \leftrightarrow \mathbf{R}^n$  nicht eindeutig ist.

#### Bemerkungen für fortgeschrittene Studierende (nicht in der Vorlesung besprochen):

Der Versuchung,  $\nabla f$  durch

$$\begin{aligned} df : T &\rightarrow T^*(T) \\ v &\mapsto df(v) \end{aligned} \quad (5.7)$$

zu ersetzen, muß man widerstehen. Wenn, wie hier,  $T$  ein Vektorraum ist, gilt zwar  $T^*(T) \cong T^*$ , aber es sind trotzdem im Allgemeinen unterschiedliche Räume, deren Koordinaten ohne eine weitere Struktur nicht miteinander in Beziehung stehen. Vielmehr handelt es sich bei um eine Faserableitung  $\nabla = \mathbb{F}$ , wobei

$$\begin{aligned} \mathbb{F} : C^\infty(T) &= C^\infty(T, \mathbf{R}) \rightarrow C^\infty(T, T^*) \\ f &\mapsto \mathbb{F}f. \end{aligned} \quad (5.8a)$$

<sup>1</sup>Wir werden die Legendre Transformation auf Funktionen anwenden, die auf dem  $n$ -dimensionalen *linearen* Raum der *Geschwindigkeiten* definiert sind. Deshalb müssen wir krummlinige Koordinaten nicht berücksichtigen.

<sup>2</sup>Für unsere physikalischen Anwendungen wird immer  $T = \mathbf{R}^n$  und  $T^* \cong \mathbf{R}^n$  gelten. Im allgemeinen Fall kann es aber vorkommen, daß man für  $T$  oder  $T^*$  eine echte Teilmenge von  $\mathbf{R}^n$  wählen muß, weil sonst die notwendige Invertierbarkeit (5.11) nicht überall gewährleistet ist.

Dabei ist  $\mathbb{F}f$  eine (im allgemeinen nicht lineare) Abbildung des Vektorraums  $T$  in seinen Dualraum  $T^*$

$$\begin{aligned}\mathbb{F}f : T &\rightarrow T^* \\ v &\mapsto \mathbb{F}f(v)\end{aligned}\quad (5.8b)$$

die über

$$\begin{aligned}\mathbb{F}f(v) : T &\rightarrow \mathbf{R} \\ w &\mapsto \left. \frac{d}{ds} f(v + sw) \right|_{s=0}\end{aligned}\quad (5.8c)$$

*koordinatenunabhängig* definiert werden kann. Mit der Kettenregel findet man in Komponenten

$$\langle \mathbb{F}f(v), w \rangle = \mathbb{F}f(v)(w) = \left. \frac{d}{ds} f(v + sw) \right|_{s=0} = \sum_i w_i \frac{\partial f}{\partial v_i}(v) = \sum_i w_i (\mathbb{F}f)_i(v) \quad (5.9)$$

also in der Tat

$$(\mathbb{F}f)_i = \frac{\partial f}{\partial v_i} = (\nabla f)_i. \quad (5.10)$$

Falls außerdem

$$\forall v \in T : \det H(v) \neq 0 \text{ mit } H_{ij}(v) = \frac{\partial p_j}{\partial v_i}(v) = \frac{\partial^2 f}{\partial v_i \partial v_j}(v) \quad (5.11)$$

gilt, dann existiert auch die inverse Abbildung

$$\begin{aligned}(\nabla f)^{-1} : T^* &\rightarrow T \\ p &\mapsto v = (\nabla f)^{-1}(p).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Wenn  $(\nabla f)^{-1}$  existiert, kann man dann jeder Funktion  $f : T \rightarrow \mathbf{R}$  *kanonisch*, d. h. ohne eine weitere Struktur einführen zu müssen, eine Funktion  $f' : T^* \rightarrow \mathbf{R}$

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ & \uparrow & \searrow f \\ (\nabla f)^{-1} & & \mathbf{R} \\ & \uparrow & \nearrow f' = f \circ (\nabla f)^{-1} \\ & T^* & \end{array}\quad (5.13)$$

zuordnen. Leider ist die zugehörige Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi : C^\infty(T) &\rightarrow C^\infty(T^*) \\ f &\mapsto f \circ (\nabla f)^{-1}\end{aligned}\quad (5.14)$$

*nicht* injektiv. Ihre Anwendung führt also zu *Informationsverlust*! Dies sieht man besonders leicht mit einem



*Beispiel 5.1.* Sei  $M : T \rightarrow T$  eine beliebige invertierbare lineare Abbildung mit einer symmetrischen Matrixdarstellung  $M_{ij} = M_{ji}$  und  $a \in T$  ein beliebiger Vektor, dann kann man eine Familie von Funktionen

$$\begin{aligned} f_a : T &\rightarrow \mathbf{R} \\ v &\mapsto f_a(v) = \frac{1}{2} \langle v + a, M(v + a) \rangle \end{aligned} \quad (5.15)$$

definieren, für die wegen

$$(\nabla f_a)(v) = M(v + a) \quad (5.16a)$$

$$(\nabla f_a)^{-1}(p) = M^{-1}p - a \quad (5.16b)$$

die Funktionen  $f'_a$  mit

$$\begin{aligned} f'_a : T^* &\rightarrow \mathbf{R} \\ p &\mapsto f'_a(p) = (f_a \circ (\nabla f_a)^{-1})(p) = f_a((\nabla f_a)^{-1}(p)) \end{aligned} \quad (5.17)$$

wohldefiniert sind. Allerdings gilt

$$\begin{aligned} f'_a(p) &= f_a((\nabla f_a)^{-1}(p)) = f_a(M^{-1}p - a) \\ &= \frac{1}{2} \langle M^{-1}p, M(M^{-1}p) \rangle = \frac{1}{2} \langle M^{-1}p, p \rangle = \frac{1}{2} \langle p, M^{-1}p \rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

und  $\Phi$  bildet alle  $f_a$  auf die gleiche Funktion ab

$$\Phi(f_a) = f'_a = f_0 \circ (\nabla f_0)^{-1} = f'_0 = \Phi(f_0), \quad (5.19)$$

unabhängig von  $a \in T$ .

Ohne Informationsverlust kann man aber die sogenannte *Legendre-Transformation*  $f \mapsto f^* : T^* \rightarrow \mathbf{R}$  mit

$$\begin{aligned} f^* : T^* &\rightarrow \mathbf{R} \\ p &\mapsto f^*(p) = \langle p, (\nabla f)^{-1}(p) \rangle - (f \circ (\nabla f)^{-1})(p) \end{aligned} \quad (5.20)$$

anwenden. Zur Verdeutlichung von Bild und Urbild der Abbildungen diene wieder das zu (5.13) analoge Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ & \uparrow & \\ (\nabla f)^{-1} & & \\ & T^* & \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow f \\ \searrow f^* \end{array} \quad \mathbf{R} \quad (5.21)$$

das aber im Gegensatz zu (5.13) *kein* sogenanntes *kommutatives Diagramm* ist, weil  $f^* \neq f \circ (\nabla f)^{-1}$

Um zu sehen, daß die Legendre-Transformation wirklich keine Information vernichtet, berechnen wir zunächst in Komponenten

$$f^*(p) = \sum_i p_i [(\nabla f)^{-1}(p)]_i - f((\nabla f)^{-1}(p)) = \sum_i p_i v_i(p) - f(v(p)) \quad (5.22)$$

und daraus mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} (\nabla f^*(p))_i &= \frac{\partial f^*}{\partial p_i}(p) = \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \sum_j p_j v_j(p) - f(v(p)) \right) \\ &= v_i(p) + \sum_j p_j \frac{\partial v_j}{\partial p_i}(p) - \sum_j \frac{\partial f}{\partial v_j}(v(p)) \frac{\partial v_j}{\partial p_i}(p) \\ &= v_i(p) + \sum_j \left( p_j - \frac{\partial f}{\partial v_j}(v(p)) \right) \frac{\partial v_j}{\partial p_i}(p) \\ &= v_i(p) + \sum_j \underbrace{\left( p_j - ((\nabla f)(v(p)))_j \right)}_{=0} \frac{\partial v_j}{\partial p_i}(p) = v_i(p) = ((\nabla f)^{-1}(p))_i \end{aligned} \quad (5.23)$$

weil  $p(v) = \nabla f(v)$  und  $\nabla f$  invertierbar. Deshalb gilt

$$\nabla f^* = (\nabla f)^{-1} \quad (5.24a)$$

$$\nabla f = (\nabla f^*)^{-1} \quad (5.24b)$$

und wir können das Diagramm (5.21) vervollständigen

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ & \uparrow & \searrow f \\ (\nabla f^*)^{-1} = \nabla f & \left( \nabla f^* = (\nabla f)^{-1} \right) & \mathbf{R} \\ & \downarrow & \nearrow f^* \\ & T^* & \end{array} \quad (5.25)$$

Die zweifache Anwendung der Legendre-Transformation führt für alle invertierbaren  $\nabla f$  auf eine Funktion  $(f^*)^* : T \rightarrow \mathbf{R}$ , die man berechnen kann

$$\begin{aligned}
(f^*)^*(v) &= \left[ \langle w, (\nabla f^*)^{-1}(w) \rangle - (f^* \circ (\nabla f^*)^{-1})(w) \right]_{w=(\nabla f^*)(p), p=(\nabla f)(v)} \\
&= \left[ \langle (\nabla f^*)(p), ((\nabla f^*)^{-1} \circ \nabla f^*)(p) \rangle - (f^* \circ (\nabla f^*)^{-1} \circ \nabla f^*)(p) \right]_{p=(\nabla f)(v)} \\
&= \left[ \langle (\nabla f^*)(p), p \rangle - f^*(p) \right]_{p=(\nabla f)(v)} \\
&= \left[ \underbrace{\langle p, (\nabla f^*)(p) \rangle}_{\langle p, (\nabla f)^{-1}(p) \rangle} - \underbrace{f^*(p)}_{\langle p, (\nabla f)^{-1}(p) \rangle - f(v)} \right]_{p=(\nabla f)(v)} \\
&= \left[ \langle p, (\nabla f)^{-1}(p) \rangle - \langle p, (\nabla f)^{-1}(p) \rangle + f(v) \right]_{p=(\nabla f)(v)} = f(v) \quad (5.26)
\end{aligned}$$

und damit führt die doppelte Anwendung der Legendre-Transformation für invertierbare  $\nabla f$  in *jedem* Fall zur Ursprungsfunktion zurück

$$\begin{aligned}
(f^*)^* &= f : T \rightarrow \mathbf{R} \\
v &\mapsto f(v), \quad (5.27)
\end{aligned}$$

also  $(f^*)^* = f$ , was die Symmetrie des Diagramms (5.25) erklärt. Deshalb kann die ein- und mehrmalige Anwendung der Legendre-Transformation keine Information verlieren.

### Beispiele

*Beispiel 5.2* (Quadratische Form). Sei

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle \quad (5.28)$$

mit  $A = A^T$ , dann

$$\nabla f(x) = Ax + b \quad (5.29a)$$

$$(\nabla f)^{-1}(y) = A^{-1}(y - b) \quad (5.29b)$$

und damit

$$\begin{aligned}
f^*(y) &= \langle y, A^{-1}(y - b) \rangle - \frac{1}{2} \langle A^{-1}(y - b), AA^{-1}(y - b) \rangle - \langle b, A^{-1}(y - b) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle (y - b), A^{-1}(y - b) \rangle. \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Weiter

$$\nabla f^*(y) = A^{-1}(y - b) = (\nabla f)^{-1}(y) \quad (5.31a)$$

$$(\nabla f^*)^{-1}(x) = Ax + b = \nabla f(x) \quad (5.31b)$$

wie erwartet, sowie

$$\begin{aligned} (f^*)^*(x) &= \langle x, \underbrace{Ax + b}_{=y} \rangle - \frac{1}{2} \langle \underbrace{Ax + b - b}_{=y}, A^{-1}(\underbrace{Ax + b - b}_{=y}) \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle + \langle x, b \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle x, b \rangle = f(x). \end{aligned} \quad (5.32)$$

NB: in Beispiel 5.1 ging die Abhängigkeit von  $b$  verloren.

Beispiel 5.3 (Exponentialfunktion). Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\mapsto f(x) = e^{ax} \end{aligned} \quad (5.33)$$

dann ist  $\nabla f$  auf dem Bild  $\mathbf{R}_+$  von  $f$  invertierbar

$$\nabla f(x) = ae^{ax} \quad (5.34a)$$

$$(\nabla f)^{-1}(y) = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{a} \quad (5.34b)$$

und damit

$$\begin{aligned} f^* : \mathbf{R}_+ &\rightarrow \mathbf{R} \\ y &\mapsto f^*(y) = y \frac{1}{a} \ln \frac{y}{a} - e^{a \frac{1}{a} \ln \frac{y}{a}} = \frac{y}{a} \left( \ln \frac{y}{a} - 1 \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

mit

$$\nabla f^*(y) = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{a} = (\nabla f)^{-1}(y). \quad (5.36)$$

### 5.1.2 $TQ \rightarrow \mathbf{R}$ und $T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$

Lagrangefunktion auf dem Geschwindigkeits-Phasenraum  $TQ$  (Orte und Geschwindigkeiten)

$$\begin{aligned} L : TQ \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\mapsto L(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \quad (5.37)$$

wobei  $q$  und  $\dot{q}$  natürlich wieder als unabhängig betrachtet werden. Der konjugierte Impuls, auch als kanonischer Impuls bezeichnet, definiert an jedem

Punkt  $q$  des Konfigurationsraums eine Abbildung vom zugehörigen Tangentialvektorraum  $T_q Q$  zum Kotangentialvektorraum  $T_q^* Q$

$$\begin{aligned}\phi_L^{q,t} : T_q Q &\rightarrow T_q^* Q \\ \dot{q} &\mapsto p = \phi_L^{q,t}(\dot{q})\end{aligned}\quad (5.38)$$

mit

$$p_j(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t). \quad (5.39)$$

Als Vektorraum gilt  $T_q^* Q \cong T_q Q$ , aber wir wollen zur Klarheit wieder die Unterscheidung machen. Dies induziert eine zeitabhängige Abbildung vom Tangentialvektorraum  $TQ$  in das Kotangentialvektorraum  $T^*Q$ , das von Paaren von Koordinaten  $q$  und kanonischen Impulsen  $p$  gebildet wird

$$\begin{aligned}\phi_L : TQ \times \mathbf{R} &\rightarrow T^*Q \times \mathbf{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\mapsto (q, p, t) = (q, \phi_L^{q,t}(\dot{q}), t).\end{aligned}\quad (5.40)$$

Wenn

$$\begin{aligned}\forall (q, \dot{q}, t) \in TQ \times \mathbf{R} : \det M(q, \dot{q}, t) &\neq 0 \\ \text{mit } M_{ij}(q, \dot{q}, t) &= \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t)\end{aligned}\quad (5.41)$$

dann sind alle  $\phi_L^{q,t}$  und damit  $\phi_L$  invertierbar

$$\begin{aligned}(\phi_L^{q,t})^{-1} : T_q^* Q &\rightarrow T_q Q \\ p &\mapsto \dot{q} = (\phi_L^{q,t})^{-1}(p),\end{aligned}\quad (5.42)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\phi_H = \phi_L^{-1} : T^*Q \times \mathbf{R} &\rightarrow TQ \times \mathbf{R} \\ (q, p, t) &\mapsto (q, \dot{q}, t) = (q, (\phi_L^{q,t})^{-1}(p), t),\end{aligned}\quad (5.43)$$

und wir können mit einer Legendre-Transformation eine *Hamiltonfunktion* auf dem Phasenraum  $T^*Q$  der Orte und Impulse

$$\begin{aligned}H : T^*Q \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, p, t) &\mapsto H(q, p, t)\end{aligned}\quad (5.44a)$$

definieren

$$\begin{aligned}H(q, p, t) &= \langle p, (\phi_L^{q,t})^{-1}(p) \rangle - L(q, (\phi_L^{q,t})^{-1}(p), t) \\ &= \langle p, \dot{q}(q, p, t) \rangle - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)\end{aligned}$$

$$= \sum_i p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t). \quad (5.44b)$$

Die Bilder und Urbilder der Abbildungen können wir wieder mit einem (nicht kommutativen) Diagramm veranschaulichen

$$\begin{array}{ccc}
 TQ \times \mathbf{R} & & \\
 \phi_L \updownarrow & \searrow L & \\
 T^*Q \times \mathbf{R} & \nearrow H & \mathbf{R}
 \end{array} \quad (5.45)$$

Beachten Sie, daß die in (3.199) als Erhaltungsgröße aus dem Noethertheorem gewonnene Hamiltonfunktion eine Abbildung  $TQ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ist und mit (5.44) als  $H \circ \Phi_L$  geschrieben werden kann. Die Funktionswerte stimmen überein, aber die Abbildungen sind auf verschiedenen Räumen definiert.

*Beispiel 5.4* (Typische Lagrangefunktion). Kinetische Energie quadratisch in den Geschwindigkeiten und Potential geschwindigkeitsunabhängig

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, T(q) \dot{q} \rangle - V(q, t) = \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q, t) \quad (5.46)$$

führt auf einfache Relationen zwischen Geschwindigkeiten und Impulsen

$$p = T(q) \dot{q} \quad (5.47a)$$

$$\dot{q} = T^{-1}(q) p. \quad (5.47b)$$

Die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}
 H(q, p, t) &= \langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}, t) \\
 &= \langle p, T^{-1}(q) p \rangle - \frac{1}{2} \langle T^{-1}(q) p, T(q) T^{-1}(q) p \rangle + V(q, t) \\
 &= \frac{1}{2} \langle p, T^{-1}(q) p \rangle + V(q, t) = E \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

entspricht der Gesamtenergie  $E = T + V$ . Insbesondere für ein Teilchen im Potential

$$T(\vec{x}) = m \mathbf{1} \quad (5.49a)$$

$$T^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{m} \mathbf{1} \quad (5.49b)$$

und

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}} \quad (5.50a)$$

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{p}. \quad (5.50b)$$

Damit ergibt sich die Hamiltonfunktion als

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(\vec{x}, t) = E. \quad (5.51)$$

## 5.2 Kanonische Gleichungen

Wenn wir die Ableitungen der Hamiltonfunktion nach den Impulsen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p, t) &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \sum_j p_j \dot{q}_j(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \right) \\ &= \dot{q}_i(q, p, t) + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}(q, p, t) - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}(q, p, t) \\ &= \dot{q}_i(q, p, t) + \sum_j \underbrace{\left( p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \right)}_{=0} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}(q, p, t) = \dot{q}_i(q, p, t) \end{aligned} \quad (5.52a)$$

und Koordinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p, t) &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_j p_j \dot{q}_j(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \right) \\ &= \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}(q, p, t) - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}(q, p, t) - \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \\ &= \sum_j \underbrace{\left( p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \right)}_{=0} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}(q, p, t) - \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}(q, p, t), t) \stackrel{\text{ELG}}{=} -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}(q, p, t), t) = -\frac{dp_i}{dt} = -\dot{p}_i \end{aligned} \quad (5.52b)$$

berechnen, finden wir die zu den **ELG** äquivalenten *kanonischen Gleichungen*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p, t) \quad (5.53a)$$

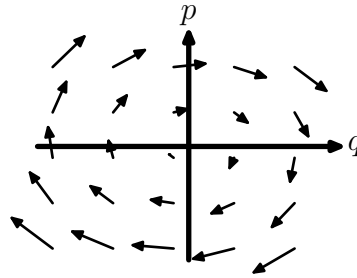


Abbildung 5.1: *Hamiltonsches Vektorfeldes des harmonischen Oszillators (5.57b).*

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p, t), \quad (5.53b)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

die die Dynamik im Ort-Impuls Phasenraum  $T^*Q$  als gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung beschreiben. Aufgrund des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Anfangswertprobleme ist also der Zustand des Systems ist durch einen Punkt im Phasenraum eindeutig charakterisiert.

Die rechte Seite von (5.54) wird auch *Hamilton'sches Vektorfeld*

$$X_H = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_N}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_N} \right)^T \quad (5.55)$$

genannt. Es beschreibt die Änderung des Zustands des Systems zu jedem Zeitpunkt

$$(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N)^T = X_H. \quad (5.56)$$

Geometrisch entspricht die Integration der Bewegungsgleichung der Glättung des Hamiltonschen Vektorfelds.

In Abbildung 5.1 wird das Hamiltonsche Vektorfeld

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p \\ -m\omega^2 q \end{pmatrix} \quad (5.57a)$$

des harmonischen Oszillators

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (5.57b)$$



illustriert.

*Beispiel 5.5* (Teilchen im Potential).

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(q, t) \quad (5.58)$$

also

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} p_i \quad (5.59a)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i \quad (5.59b)$$

wie zu erwarten war.

Wie in Abschnitt 3.8.4 schon mit dem Noether-Theorem gezeigt, ist die Hamiltonfunktion für zeitunabhängige Lagrangefunktionen entlang von Lösungen der ELG konstant. Hier können wir leicht mit den kanonischen Gleichungen zeigen, daß die totale Zeitableitung der Hamiltonfunktion gleich der partiellen Zeitableitung ist

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \dot{p}_i \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{=\dot{q}_i} + \sum_i \dot{q}_i \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{=-\dot{p}_i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.60)$$

Folglich ist die Hamiltonfunktion entlang von Lösungen der kanonischen Gleichungen konstant, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt

$$\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = 0. \quad (5.61)$$

### 5.3 Poissonklammern

Die zeitliche Änderung einer beliebigen Funktion  $f : T^*Q \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  kann auch leicht berechnet werden

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.62)$$

und für  $g : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}. \quad (5.63)$$

mit der *Poissonklammer*

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (5.64)$$

Vorlesung 24: Fr, 19.01.2024

Die Poissonklammer definiert eine binäre Verknüpfung auf den glatten Funktionen auf dem Phasenraum

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : C^\infty(T^*Q) \times C^\infty(T^*Q) &\rightarrow C^\infty(T^*Q) \\ (f, g) &\mapsto \{f, g\} \end{aligned} \quad (5.65)$$

mit den Eigenschaften:  $\forall f, g, h \in C^\infty(T^*Q), \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad \text{Antisymmetrie} \quad (5.66a)$$

$$\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha \{f, g\} + \beta \{f, h\} \quad \text{Linearität} \quad (5.66b)$$

$$0 = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \quad \text{Jacobi-Identität} \quad (5.66c)$$

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h \quad \text{Leibnitz-Regel} \quad (5.66d)$$

die als Übungsaufgabe nachgewiesen werden können<sup>3</sup>.

Das Paar  $(C^\infty(T^*Q), \{\cdot, \cdot\})$  erfüllt aufgrund von (5.65), (5.66a), (5.66b) und (5.66c) die Axiome einer *Lie-Algebra* in Abschnitt 3.8.1.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} D_f : C^\infty(T^*Q) &\rightarrow C^\infty(T^*Q) \\ g &\mapsto \{f, g\} \end{aligned} \quad (5.67)$$

ist aufgrund von (5.67), (5.66b) und der Produktregel (5.66d) für beliebige  $f \in C^\infty(T^*Q)$  eine *Derivation* auf  $C^\infty(T^*Q)$ . Tatsächlich ist die konkrete Definition (5.64) der Poissonklammer äquivalent zu den abstrakten Derivationsregeln und der axiomatischen Definition der elementaren Poissonklammern

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (5.68a)$$

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \quad (5.68b)$$

Die Poissonklammer ist auch für Funktionen  $f \in C^\infty(T^*Q \times \mathbf{R})$  über (5.65) definiert, macht aber nur Sinn, wenn sie für *gleiche Zeiten* angewandt wird.

Für  $f(q, p, t) = q$  und  $g(q, p, t) = p$  findet man natürlich aus (5.64) konsistent mit den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (5.69a)$$

---

<sup>3</sup>Die Jacobi-Identität (5.66c) ist recht aufwendig.

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (5.69b)$$

Für Integrale der Bewegung  $I$  haben wir wegen

$$0 = \frac{dI}{dt} = \{I, H\} + \frac{\partial I}{\partial t} \quad (5.70)$$

natürlich

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \{H, I\}. \quad (5.71)$$

Die Poissonklammer zweier Integrale  $I$  und  $J$  ist wegen der Produktregel und Jacobi-Identität wieder ein Integral

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{I, J\} &= \left\{ \frac{\partial I}{\partial t}, J \right\} + \left\{ I, \frac{\partial J}{\partial t} \right\} = \{\{H, I\}, J\} + \{I, \{H, J\}\} \\ &= -\{J, \{H, I\}\} - \{I, \{J, H\}\} = \{H, \{I, J\}\}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

also

$$\frac{d}{dt} \{I, J\} = 0. \quad (5.73)$$

Damit bilden die Integrale eines Systems eine Lie-Algebra, die, wie sich später zeigen wird, eng mit den Symmetrien des Systems zusammenhängt.

## 5.4 Kanonische Transformationen

Während wir in der Lagrange'schen Formulierung beliebige Koordinatentransformationen ausführen konnten, ohne die Form der Bewegungsgleichungen zu ändern, sind in der Hamilton'schen Formulierung eine größere Klasse von Transformationen des Phasenraums erlaubt, die insbesondere Orte und Impulse mischen können.

Um dies zu sehen, ist es günstig, die Koordinaten eines Phasenraumpunktes  $(q, p) \in T^*Q$  für ein System mit  $N$  Freiheitsgraden in einen Vektor mit  $2N$  Komponenten zusammenzufassen

$$(x_1, \dots, x_{2N}) = (q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \in T^*Q. \quad (5.74)$$

Dann schreiben sich die Poissonklammern

$$\{x_i, x_j\} = \eta_{ij} \quad (5.75)$$

mit der *symplektischen Form*  $\eta$  in Blockmatrixschreibweise

$$\eta = \begin{pmatrix} 0_{N \times N} & \mathbf{1}_{N \times N} \\ -\mathbf{1}_{N \times N} & 0_{N \times N} \end{pmatrix}, \quad (5.76)$$

die

$$\eta^2 = -\mathbf{1} \quad (5.77a)$$

$$\eta^{-1} = -\eta = \eta^T \quad (5.77b)$$

erfüllt. Die kanonischen Gleichungen (5.54) können in dieser Notation kompakt

$$\dot{x} = \eta \nabla H \quad (5.78)$$

geschrieben werden.

Die Poissonklammer zweier Funktionen  $f, g : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$  ergibt sich aus der Definition als

$$\{f, g\} = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \eta_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \quad (5.79)$$

**Definition 5.6** (kanonische Transformationen). Eine Transformation des Phasenraums

$$\begin{aligned} \phi : T^*Q &\rightarrow T^*Q \\ x &\mapsto y = \phi(x) \end{aligned} \quad (5.80)$$

heißt *kanonische Transformation*, wenn sie die Poissonklammern invariant lässt

$$\{y_i, y_j\} = \eta_{ij}. \quad (5.81)$$

Mit der Kettenregel

$$\{y_i, y_j\} = \sum_{kl} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \{x_k, x_l\} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} = \sum_{kl} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \eta_{kl} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} \stackrel{!}{=} \eta_{ij} \quad (5.82)$$

erhalten wir daraus eine Bedingung an die Jacobi-Matrix

$$[D\phi]_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (5.83)$$

einer kanonischen Transformationen in Komponenten

$$\sum_{kl} [D\phi]_{ik} \eta_{kl} [D\phi]_{jl} = \eta_{ij} \quad (5.84a)$$

oder in Matrixschreibweise

$$(D\phi)\eta(D\phi)^T = \eta. \quad (5.84b)$$

*Bemerkung 5.7.* Allgemein ist die kanonische Transformationen für einen Freiheitsgrad

$$\begin{aligned}\phi : T^*Q &\rightarrow T^*Q \\ (Q, P) &\mapsto (q, p)\end{aligned}\tag{5.85}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$D\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}, \tag{5.86}$$

die

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial q}{\partial Q} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}\tag{5.87}$$

also die kanonische Poissonklammer

$$\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} = 1 \tag{5.88}$$

erfüllen muß.

Jede Jacobi-Matrix erfüllt wegen der Kettenregel

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \tag{5.89}$$

(und ebenso mit  $x \leftrightarrow y$ ) oder in Matrixschreibweise

$$D\phi^{-1}D\phi = \mathbf{1} = D\phi D\phi^{-1} \tag{5.90a}$$

bzw.

$$D\phi^{-1} = (D\phi)^{-1} \tag{5.90b}$$

mit

$$[D\phi^{-1}]_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}, \tag{5.91}$$

wie schon in Abschnitt 2.2.2 besprochen. Durch Multiplikation von (5.84a) von rechts mit  $\frac{\partial x_m}{\partial y_j}$  folgt für kanonische Transformationen

$$\sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \eta_{km} = \sum_j \eta_{ij} \frac{\partial x_m}{\partial y_j} \tag{5.92}$$

oder in Matrixschreibweise

$$D\phi\eta = \eta(D\phi^{-1})^T. \quad (5.93)$$

Mit diesen Bausteinen können wir für zeitunabhängige kanonische Transformationen leicht zeigen, daß die kanonischen Gleichungen forminvariant sind, wenn man die Hamiltonfunktionen  $H$  für  $y$  und  $H' = H \circ \phi$  für  $x$  benutzt

$$\dot{x} = \eta \nabla H' = \eta \nabla (H \circ \phi) \quad (5.94a)$$

$$\dot{y} \stackrel{!}{=} \eta \nabla H. \quad (5.94b)$$

Die Verknüpfung der Abbildungen verdeutlicht das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} y \in T^*Q & & \\ \uparrow \phi & \searrow H & \\ x \in T^*Q & \xrightarrow{H' = H \circ \phi} & \mathbf{R} \end{array} \quad (5.95)$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{jk} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \eta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} (H \circ \phi) = \sum_{jkl} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \eta_{jk} \frac{\partial H}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \\ &= \sum_{jkl} \eta_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_l} = \sum_{jl} \eta_{ij} \delta_{jl} \frac{\partial H}{\partial y_l} = \sum_j \eta_{ij} \frac{\partial H}{\partial y_j}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Analog in Matrixschreibweise

$$\dot{y} = D\phi \dot{x} = D\phi \eta \nabla_x (H \circ \phi) = \eta (D\phi^{-1})^T (D\phi)^T \nabla_y H = \eta \nabla_y H, \quad (5.97)$$

wobei (5.93) und die Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (H \circ \phi) = \sum_j \frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_j [(D\phi)^T]_{ij} \frac{\partial H}{\partial y_j} \quad (5.98)$$

ausgenutzt wurde.

Kanonische Transformationen können dazu benutzt werden, die Bewegungsgleichungen so zu transformieren, daß die Lösung trivial wird. Dabei spielt es eine wichtige Rolle, daß die Rollen von Orten und Impulsen vermischt werden können. Dies sehen wir im folgenden

Beispiel 5.8 (Harmonischer Oszillator).

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (5.99)$$

Die Transformation

$$\phi: \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

mit

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad (5.101a)$$

$$p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \quad (5.101b)$$

ist kanonisch, weil

$$\begin{aligned} \{q, p\} &= \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} \\ &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \cos Q \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \cos Q + \sqrt{2Pm\omega} \sin Q \sqrt{\frac{1}{2Pm\omega}} \sin Q = 1 \end{aligned} \quad (5.102)$$

und die anderen Poissonklammern trivial verschwinden. Die neue Hamiltonfunktion ist

$$H'(Q, P) = (H \circ \phi)(Q, P) = \frac{1}{2m} 2Pm\omega \cos^2 Q + \frac{m\omega^2}{2} \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q = P\omega \quad (5.103)$$

und hängt nicht von  $Q$  ab, also sind die kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega \quad (5.104a)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0. \quad (5.104b)$$

Die Lösungen sind trivial

$$Q(t) = Q(0) + \omega t \quad (5.105a)$$

$$P(t) = P(0). \quad (5.105b)$$

Weil die Funktion  $\phi$  im ersten Argument  $Q$  periodisch ist, sollte man sich  $(Q, P)$  als Koordinaten auf der Zylinderoberfläche  $S^2 \times \mathbf{R}$  betrachten.

In Abbildung 5.2 wird gezeigt, wie die kanonische Transformation (5.101) zu einer Begradigung des Hamiltonschen Vektorfeldes führt.

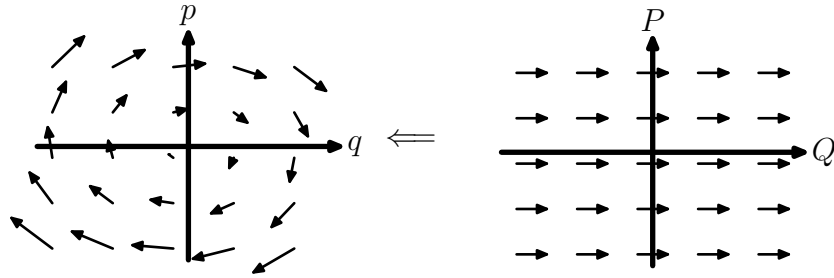


Abbildung 5.2: Begradigung des Hamiltonschen Vektorfeldes des harmonischen Oszillators (5.99),  $X_H = (p/m, -m\omega^2 q)$ , durch die kanonische Transformation (5.100-5.101) zu  $X_{H \circ \phi} = (\omega, 0)$ .

#### 5.4.1 Punkttransformationen

Vorlesung 25: Mo, 22. 01. 2024

Sei

$$\begin{aligned} \psi : Q &\rightarrow Q \\ q &\mapsto \psi(q) \end{aligned} \quad (5.106)$$

eine Koordinatentransformation des Konfigurationsraums. Wir wissen aus Abschnitt 3.3, daß solche Transformationen die ELG invariant lassen. Die zugehörige Punkttransformation oder Kontakttransformation des Phasenraums ist

$$\begin{aligned} \phi_\psi : T^*Q &\rightarrow T^*Q \\ (q, p) &\mapsto (q', p') = (\psi(q), (D\psi^{-1})^T p), \end{aligned} \quad (5.107)$$

wobei mit  $L'(q', \dot{q}', t) = (L \circ \psi^{-1})(q', \dot{q}', t)$  bzw.  $L(q, \dot{q}, t) = (L' \circ \psi)(q, \dot{q}, t)$

$$p'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} = \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{(3.42)}{=} \sum_j \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} p_j = [(D\psi^{-1})^T p]_i \quad (5.108)$$

benutzt wurde. Deren Jacobi-Matrix ist

$$D\phi_\psi = \begin{pmatrix} D\psi & 0 \\ \Gamma & (D\psi^{-1})^T \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

mit

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial q_k}{\partial q'_i} p_k \right) = \sum_{kl} \frac{\partial^2 q_k}{\partial q'_i \partial q'_l} \frac{\partial q'_l}{\partial q_j} p_k. \quad (5.110)$$

Daraus folgt



$$\begin{aligned}
(D\phi_\psi)\eta(D\phi_\psi)^T &= \begin{pmatrix} D\psi & 0 \\ \Gamma & (D\psi^{-1})^T \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (D\psi)^T & \Gamma^T \\ 0 & D\psi^{-1} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & D\psi^{-1} \\ -(D\psi)^T & -\Gamma^T \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \Gamma D\psi^{-1} - (D\psi^{-1})^T \Gamma^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \Gamma D\psi^{-1} - (\Gamma D\psi^{-1})^T \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(5.112)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = \eta, \quad (5.111)
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt

$$\Gamma D\psi^{-1} = (\Gamma D\psi^{-1})^T \quad (5.112)$$

benutzt wurde, was aus

$$\begin{aligned}
[\Gamma D\psi^{-1}]_{ij} &= \sum_k \Gamma_{ik} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} = \sum_{klm} \frac{\partial^2 q_l}{\partial q'_i \partial q'_m} \frac{\partial q'_m}{\partial q_k} p_l \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \\
&= \sum_l \frac{\partial^2 q_l}{\partial q'_i \partial q'_j} p_l = [\Gamma D\psi^{-1}]_{ji} \quad (5.113)
\end{aligned}$$

folgt. Damit haben wir gezeigt, daß  $\phi_\psi$  kanonisch ist. Also lassen Punkttransformationen auch die kanonischen Gleichungen invariant.

### 5.4.2 Flüsse

Sei  $\Phi$  ein *Fluß*, d. h. eine differenzierbare einparametrische Gruppe von Transformationen des Phasenraums

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathbf{R} \times T^*Q &\rightarrow T^*Q \\
(s, q, p) &\mapsto (q(s), p(s)) = \Phi_s(q, p) \\
(s, x) &\mapsto x(s) = \Phi_s(x),
\end{aligned} \quad (5.114)$$

mit den Gruppeneigenschaften

$$\Phi_s \circ \Phi_{s'} = \Phi_{s+s'} \quad (5.115a)$$

$$\Phi_s^{-1} = \Phi_{-s} \quad (5.115b)$$

$$\Phi_0 = \text{id}. \quad (5.115c)$$

Eine wichtige Konsequenz der Gruppeneigenschaft ist, daß die Ableitung der Transformation für einen beliebigen Wert des Parameters  $s$  durch die transformierte Ableitung an der Stelle  $s = 0$  festgelegt ist

$$\frac{d\Phi_s}{ds} = \left. \frac{d\Phi_{s+s'}}{ds'} \right|_{s'=0} = \left. \frac{d\Phi_{s'}}{ds'} \right|_{s'=0} \circ \Phi_s. \quad (5.116)$$

Wir betrachten also zunächst die Taylor-Entwicklung des Flusses an der Stelle  $s = 0$

$$\Phi_s(q, p) = (q(s), p(s)) = (q, p) + s\delta_\Phi(q, p) + \mathcal{O}(s^2) \quad (5.117a)$$

bzw.

$$\Phi_s(x) = x(s) = x + s\delta_\Phi x + \mathcal{O}(s^2), \quad (5.117b)$$

wobei die infinitesimale Transformation  $\delta_\Phi x = \delta_\Phi(q, p)$ , bzw. die Erzeugende des Flusses  $\Phi$ , über

$$\delta_\Phi(q, p) = \left. \frac{d\Phi_s}{ds}(q, p) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds}(q(s), p(s)) \right|_{s=0} \quad (5.118a)$$

bzw.

$$\delta_\Phi x = \left. \frac{d\Phi_s}{ds}(x) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds}x(s) \right|_{s=0} \quad (5.118b)$$

definiert ist.

Ein Fluß heißt kanonisch, oder Hamilton'sch wenn  $\Phi_s : T^*Q \rightarrow T^*Q$  für alle  $s \in I \subseteq \mathbf{R}$  eine kanonische Transformation ist, also wenn

$$\eta = (D\Phi_s)\eta(D\Phi_s)^T. \quad (5.119)$$

Diese Gleichung können wir an der Stelle  $s = 0$  ableiten

$$0 = \left. \frac{d}{ds} ((D\Phi_s)\eta(D\Phi_s)^T) \right|_{s=0} = D\delta_\Phi x \eta + \eta(D\delta_\Phi x)^T, \quad (5.120)$$

wobei in Komponenten

$$[D\delta_\Phi x]_{ij} = \frac{\partial[\delta_\Phi x]_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left. \frac{dx_i(s)}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \frac{\partial x_i(s)}{\partial x_j} \right|_{s=0} \quad (5.121)$$

gilt. Wenn wir

$$D\delta_\Phi x = \eta A, \quad (5.122)$$

bzw.  $A = \eta^{-1}D\delta_\Phi x = -\eta D\delta_\Phi x$ , definieren, können wir (5.120) auch als

$$0 = \eta A \eta + \eta(\eta A)^T = \eta A \eta + \eta A^T \eta^T = \eta A \eta - \eta A^T \eta = \eta (A - A^T) \eta \quad (5.123)$$

schreiben. Also ist  $A$  symmetrisch

$$A = A^T. \quad (5.124)$$

Weil  $A$  bis auf  $\eta$  eine Jacobi-Matrix ist

$$A_{ij} = \frac{\partial[\delta_\Phi \tilde{x}]_i}{\partial x_j} \quad (5.125)$$

mit

$$\eta\tilde{x} = x, \quad (5.126)$$

(bzw.  $\tilde{x} = -\eta x$ ) bedeutet die Symmetrie von  $A$ , daß

$$\frac{\partial[\delta_\Phi\tilde{x}]_i}{\partial x_j} - \frac{\partial[\delta_\Phi\tilde{x}]_j}{\partial x_i} = 0, \quad (5.127)$$

bzw. daß die  $2N$ -dimensionale Verallgemeinerung der Rotation von  $\delta_\Phi\tilde{x}$  verschwindet. Damit greift wieder das Poincaré Lemma und es existiert, zumindest lokal, eine Funktion  $f_\Phi : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$  mit

$$\delta_\Phi\tilde{x}_i(x) = \frac{\partial f_\Phi}{\partial x_i}(x) \quad (5.128)$$

bzw.

$$\delta_\Phi\tilde{x} = \nabla f_\Phi. \quad (5.129)$$

Multiplikation von links mit  $\eta$  ergibt

$$[\delta_\Phi x]_i(x) = \sum_j \eta_{ij} \frac{\partial f_\Phi}{\partial x_j}(x) \quad (5.130)$$

bzw.<sup>4</sup>

$$\delta_\Phi x = \eta \nabla f_\Phi = \{x, f_\Phi\}. \quad (5.131)$$

Wir sehen also, daß  $x(s) = \Phi_s(x)$  mit  $\Phi_s = \text{id}$  folgendes Anfangswertproblem erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds}(s) &= \frac{d\Phi_s}{ds}(x) = \frac{d}{ds'} \Phi_{s'}(\Phi_s(x)) \Big|_{s'=0} = \frac{d}{ds'} x(s') \Big|_{s'=0} (\Phi_s(x)) \\ &\stackrel{(5.118b)}{=} \delta_\Phi x(\Phi_s(x)) = \{x, f_\Phi\}(\Phi_s(x)) \end{aligned} \quad (5.132)$$

bzw.

$$\frac{d\Phi_s}{ds} = \{x, f_\Phi\} \circ \Phi_s \quad (5.133)$$

und man sagt, daß  $f_\Phi$  über die Poissonklammer den Fluß  $\Phi$  *erzeugt*. Mit der Kettenregel finden wir daraus für jede Phasenraumfunktion  $g : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$

---

<sup>4</sup>Die Gleichungen (5.131) und (5.133) sollte in Komponenten

$$\begin{aligned} [\delta_\Phi x]_i &= [\eta \nabla f_\Phi]_i = \{x_i, f_\Phi\} \\ \frac{d\Phi_{s,i}}{ds} &= \{x_i, f_\Phi\} \circ \Phi_s \end{aligned}$$

gelesen werden.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(g \circ \Phi_s) &= \frac{d}{ds}g(x(s)) = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{d}{ds}x_i(s) \\ &= \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \{x_i, f_\Phi\} \circ \Phi_s = \{g, f_\Phi\} \circ \Phi_s, \quad (5.134)\end{aligned}$$

also

$$\frac{d}{ds}(g \circ \Phi_s) = \{g, f_\Phi\} \circ \Phi_s. \quad (5.135)$$

*Beispiel 5.9* (Zeitentwicklung). Die Lösung

$$\Phi_t(q_0, p_0) = (q(t), p(t)) \quad (5.136)$$

des Anfangswertproblems zur Hamiltonfunktion  $H$

$$\dot{q} = \{q, H\} \quad (5.137a)$$

$$\dot{p} = \{p, H\} \quad (5.137b)$$

$$q(0) = q_0 \quad (5.137c)$$

$$p(0) = p_0 \quad (5.137d)$$

ist mit (5.63)

$$\forall g \in C^\infty(T^*Q) : \frac{d}{ds}(g \circ \Phi_s) = \{g, H\} \circ \Phi_s \quad (5.138)$$

ein kanonischer Fluß, der von der Hamiltonfunktion  $H$  erzeugt wird. Demnach kann man die Zeitentwicklung eines Hamilton'schen Systems als Abfolge von kanonischen Transformationen auffassen.

### 5.4.3 Liouville Theorem

Die Änderung des Phasenraumvolumens unter einer Transformation  $\phi : T^*Q \rightarrow T^*Q$  ist

$$d^{2N}y = \det(D\phi)d^{2N}x \quad (5.139)$$

mit der Jacobi-Determinante  $J = |\det(D\phi)|$ . Für eine kanonische Transformation muß gelten

$$\det \eta = \det (D\phi \eta (D\phi)^T) = \det \eta (\det(D\phi))^2, \quad (5.140)$$

also

$$J = |\det(D\phi)| = 1. \quad (5.141)$$

Damit erhalten kanonische Transformationen das Phasenraumvolumen und insbesondere gilt dies für die Zeitentwicklung eines Hamilton'schen Systems (*Liouville Theorem*).

Eine praktische Konsequenz davon ist, daß es ohne Dissipation unmöglich ist, Phasenraumverteilungen zu kompromieren. Eine Fokussierung im Ort führt zu einer Defokussierung im Impuls und umgekehrt. Teilchenbeschleuniger müssen sogenannte „Dämpfungsringe“ einfügen, in denen das vom Strahl eingenommene Phasenraumvolumen komprimiert wird.

### Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):

Eine alternative Herleitung des gleichen physikalischen Sachverhalts beginnt mit der *Kontinuitätsgleichung* für eine, evtl. zeitabhängige, *Verteilungsfunktion* oder Dichte auf dem Phasenraum  $\rho : T^*Q \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} (\rho \dot{q}_i) + \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} (\rho \dot{p}_i) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.142)$$

wobei  $j = (\rho \dot{q}, \rho \dot{p})$  die Flußdichte durch die Grenzflächen eines Phasenraumvolumens  $d^N q d^N p$  angibt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \rho \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \sum_i \rho \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \\ &= \frac{d\rho}{dt} + \sum_i \rho \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \rho \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{d\rho}{dt} \end{aligned} \quad (5.143)$$

und die totale zeitliche Ableitung der Dichte  $\rho$  verschwindet entlang der Trajektorien des Systems im Phasenraum.

## 5.5 Symmetrien

Nachdem wir gesehen haben, wie Hamilton'sche Flüsse von Phasenraumfunktionen über die Poissonklammer erzeugt werden, können wir die Phasenraumfunktionen aufsuchen, die diejenigen Flüsse erzeugen, die den bekannten Symmetrien entsprechen.

Allgemein finden wir einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen, der dem Noether-Theorem entspricht. Sei wieder  $f_\Phi : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$  die Phasenraumfunktion, die den Fluß  $\Phi$  erzeugt. Dann ist die infinitesimale Änderung einer beliebigen Phasenraumfunktion  $g : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$

$$\delta_\Phi g = \{g, f_\Phi\}. \quad (5.144)$$

Insbesondere gilt dies für eine Hamiltonfunktion  $H : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$

$$\delta_\Phi H = \{H, f_\Phi\} = -\{f_\Phi, H\} = -\frac{df_\Phi}{dt}. \quad (5.145)$$

Daraus folgt, daß die Invarianz der Hamiltonfunktion unter einem Fluß  $\Phi$  äquivalent zur Erhaltung seiner Erzeugenden  $f_\Phi$  ist

$$\frac{d}{ds}H \circ \Phi_s = 0 \Leftrightarrow \delta_\Phi H = 0 \Leftrightarrow \frac{df_\Phi}{dt} = 0. \quad (5.146)$$

### 5.5.1 Translationen

Verschiebungen der Orte um  $\vec{a}$  im  $\mathbf{R}^3$

$$\Phi_{\vec{a}}(\vec{q}, \vec{p}) = (\vec{q}(\vec{a}), \vec{p}(\vec{a})) = (\vec{q} + \vec{a}, \vec{p}) \quad (5.147)$$

sind Punkttransformationen, also kanonisch. Offensichtlich gilt

$$\delta_{\vec{a}}(\vec{q}, \vec{p}) = (\vec{a}, 0) = (\{\vec{q}, (\vec{a}\vec{p})\}, \{\vec{p}, (\vec{a}\vec{p})\}) , \quad (5.148)$$

also erzeugt

$$f_{\vec{a}}(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{a}\vec{p} \quad (5.149)$$

die Translationen.

Wenn die Hamiltonfunktion nicht von  $\vec{q}$  abhängt, ist sie translationsinvariant; gleichzeitig verschwindet die Poissonklammer mit  $p$

$$\{H(\vec{p}), \vec{p}\} = 0 \quad (5.150)$$

also ist der Impuls  $\vec{p}$  erhalten.

### 5.5.2 Rotationen

Drehungen um  $\vec{\theta}$  im  $\mathbf{R}^3$

$$\Phi_{\vec{\theta}}(\vec{q}, \vec{p}) = (\vec{q}(\vec{\theta}), \vec{p}(\vec{\theta})) = (R(\vec{\theta})\vec{q}, R(\vec{\theta})\vec{p}) \quad (5.151)$$

sind wieder Punkttransformationen, also kanonisch. Wie in Abschnitt 3.8.7 sind die Erzeugenden

$$\delta_{\vec{\theta}}(\vec{q}, \vec{p}) = (\vec{\theta} \times \vec{q}, \vec{\theta} \times \vec{p}) = \left( \{\vec{q}, (\vec{\theta}\vec{L})\}, \{\vec{p}, (\vec{\theta}\vec{L})\} \right) , \quad (5.152)$$

wobei im letzten Schritt das Ergebnis einer Übungsaufgabe<sup>5</sup>

$$\{L_i, q_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} q_k \quad (5.154)$$

---

<sup>5</sup>Damit

$$\begin{aligned} \{\vec{q}, (\vec{\theta}\vec{L})\}_i &= \sum_j \theta_j \{q_i, L_j\} = - \sum_j \theta_j \{L_j, q_i\} \\ &= - \sum_{jk} \theta_j \epsilon_{jik} q_k = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \theta_j q_k = [\vec{\theta} \times \vec{q}]_i \end{aligned} \quad (5.153)$$

(und analog für  $\vec{p}$ ) ausgenutzt wurde. Also erzeugt der Drehimpuls

$$f_{\vec{\theta}}(q, p) = \vec{\theta} \vec{L} = \vec{\theta}(\vec{q} \times \vec{p}) \quad (5.155)$$

die Rotationen.

Wie als Übung berechnet werden kann, erfüllen die Komponenten des Drehimpulses die Vertauschungsrelationen (3.217a) der Lie-Algebra der Erzeuger der Drehgruppe  $SO(3)$  als Lie-Algebra der Poissonklammern

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k. \quad (5.156)$$

Ebenso gilt dies für die Vertauschungsrelationen von Drehimpuls und Impuls

$$\{L_i, p_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} p_k. \quad (5.157)$$

### Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):

#### 5.5.3 Runge-Lenz Vektor

Wir können die Wirkung des Runge-Lenz Vektors

$$\vec{R} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m} - \frac{\alpha \vec{q}}{|\vec{q}|} \quad (5.158)$$

auf beliebige Funktionen  $f : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$  durch

$$\delta_{\vec{R}} f = \{f, \vec{R}\} \quad (5.159)$$

oder in Komponenten

$$\delta_j f = \{f, R_j\} \quad (5.160)$$

berechnen. Insbesondere finden wir für die Koordinaten

$$\begin{aligned} \delta_j q_i &= \{q_i, R_j\} = \frac{1}{m} \sum_{kl} \epsilon_{jkl} \{q_i, p_k L_l\} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{kl} \epsilon_{jkl} \{q_i, p_k\} L_l + \frac{1}{m} \sum_{kl} \epsilon_{jkl} p_k \{q_i, L_l\} \\ &= \frac{1}{m} \sum_l \epsilon_{jil} L_l + \frac{1}{m} \sum_{kln} \epsilon_{jkl} p_k \epsilon_{iln} q_n \\ &= \frac{1}{m} \sum_{kn} \underbrace{\sum_l \epsilon_{jil} \epsilon_{lnk}}_{\delta_{jn} \delta_{ik} - \delta_{jk} \delta_{in}} q_n p_k + \frac{1}{m} \sum_{kn} \underbrace{\sum_l \epsilon_{jkl} \epsilon_{iln}}_{\delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{kn}} q_n p_k \\ &= \frac{1}{m} \sum_{kn} (2\delta_{ik} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{kn}) q_n p_k \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m} (2p_i q_j - q_i p_j - \delta_{ij} \vec{q} \vec{p}) \quad (5.161)$$

(vgl. (4.129a)), sowie für die Impulse

$$\begin{aligned} \delta_j p_i = \{p_i, R_j\} &= \frac{1}{m} \sum_{kl} \epsilon_{jkl} \{p_i, p_k L_l\} - \alpha \left\{ p_i, \frac{q_j}{|\vec{q}|} \right\} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{kln} \epsilon_{jkl} p_k \epsilon_{iln} p_n - \alpha \{p_i, q_j\} \frac{1}{|\vec{q}|} - \alpha q_j \left\{ p_i, \frac{1}{|\vec{q}|} \right\} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{kn} (\delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{kn}) p_k p_n + \alpha \delta_{ij} \frac{1}{|\vec{q}|} + \alpha q_j \sum_k \{p_i, q_k\} \frac{q_k}{|\vec{q}|^3} \\ &= \frac{1}{m} (p_i p_j - \delta_{ij} \vec{p}^2) - \frac{\alpha}{|\vec{q}|^3} (q_i q_j - \delta_{ij} \vec{q}^2) \quad (5.162) \end{aligned}$$

(vgl. (4.129b)), in Übereinstimmung mit den Symmetrietransformationen 4.129.

#### 5.5.4 Erzeugende Funktionen

Vorlesung 26: Fr, 26. 01. 2024

Es gibt noch einen anderen Begriff von erzeugenden Funktionen, die *endliche* kanonische Transformationen

$$\begin{aligned} \Phi : T^*Q &\rightarrow T^*Q \\ (q, p) &\mapsto (Q, P) \end{aligned} \quad (5.163)$$

erzeugen. Diese Funktionen sind *keine* Phasenraumfunktionen, sondern reellwertige Funktionen von Paaren von alten und neuen Orten oder Impulsen

$$S_1(q, Q), S_2(q, P), S_3(p, Q), S_4(p, P). \quad (5.164)$$

Die verbleibenden Orte und Impulse werden durch partielle Ableitungen festgelegt, z. B. definiert  $S_1 : Q \times Q \rightarrow \mathbf{R}$  mit

$$p(q, Q) = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q) \quad (5.165a)$$

$$P(q, Q) = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q) \quad (5.165b)$$

genau dann eine Transformation  $T^*Q \rightarrow T^*Q$ , wenn man in (5.165a) die implizite Funktion  $p = p(q, Q)$  nach  $Q$  auflösen kann

$$0 \neq \frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial Q}, \quad (5.166)$$



um  $Q$  als  $Q(q, p)$  schreiben zu können. Danach kann man  $P$  als  $P(q, Q(q, p))$  schreiben. Wir werden unten in (5.180) zeigen, daß diese Transformation in der Tat kanonisch ist.

Analoge Transformationen ergeben sich mit

$$p(q, P) = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P) \quad (5.167a)$$

$$Q(q, P) = \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P) \quad (5.167b)$$

oder

$$q(p, Q) = -\frac{\partial S_3}{\partial p}(p, Q) \quad (5.168a)$$

$$P(p, Q) = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(p, Q) \quad (5.168b)$$

oder

$$q(p, P) = -\frac{\partial S_4}{\partial p}(p, P) \quad (5.169a)$$

$$Q(p, P) = \frac{\partial S_4}{\partial P}(p, P) \quad (5.169b)$$

erzeugen. In Systemen mit mehr als einem Freiheitsgrad können auch Mischformen von (5.165), (5.167), (5.168), und (5.169) auftreten.

*Beispiel 5.10.* Die Funktion

$$S_1(q, Q) = qQ \quad (5.170)$$

erzeugt mit

$$p(q, Q) = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q) = Q \quad (5.171a)$$

$$P(q, Q) = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q) = -q \quad (5.171b)$$

die Transformation

$$\Phi : (q, p) \mapsto (Q, P) = (p, -q), \quad (5.172)$$

die wegen

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \eta \quad (5.173)$$

und

$$D\Phi\eta(D\Phi)^T = \eta\eta^T = \eta \quad (5.174)$$

kanonisch ist.

Beispiel 5.11. Die Funktion

$$S_2(q, P) = qP \quad (5.175)$$

erzeugt mit

$$p(q, P) = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P) = P \quad (5.176a)$$

$$Q(q, P) = \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P) = q \quad (5.176b)$$

die Identität

$$\Phi : (q, p) \mapsto (Q, P) = (q, p). \quad (5.177)$$

Weil die Transformationen (5.165), (5.167), (5.168), und (5.169) durch implizite Funktionen definiert sind muß man bei partiellen Ableitungen besondere Sorgfalt walten lassen. Insbesondere muß man spezifizieren, welche Variablen festgehalten werden. In den Poissonklammern tauchen die partiellen Ableitungen in der Form

$$\{f, g\} = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{p=\text{const.}} \left. \frac{\partial g}{\partial p} \right|_{q=\text{const.}} - \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{q=\text{const.}} \left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{p=\text{const.}} \quad (5.178)$$

auf.

Im Falle der Transformation (5.165) sind die partiellen Ableitungen

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial q} \right|_p, \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_q$$

unproblematisch, aber bei

$$\left. \frac{\partial P}{\partial p} \right|_q, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_p,$$

muß man berücksichtigen, daß  $P$  als  $P(q, Q(q, p))$  über  $Q$  von  $q$  und  $p$  abhängt. Damit erhält man

$$\left. \frac{\partial P}{\partial p} \right|_q = \left. \frac{\partial P}{\partial Q} \right|_q \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_q \quad (5.179a)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_p = \left. \frac{\partial P}{\partial Q} \right|_q \left. \frac{\partial Q}{\partial q} \right|_p + \left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_Q. \quad (5.179b)$$

In den Poissonklammern ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p \frac{\partial P}{\partial p} \Big|_q - \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial P}{\partial q} \Big|_p \\
&= \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p \frac{\partial P}{\partial Q} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q - \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial P}{\partial Q} \Big|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \Big|_p}_{=0} - \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial P}{\partial q} \Big|_Q \\
&= \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial Q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_q \frac{\partial p}{\partial Q} \Big|_q = 1, \quad (5.180)
\end{aligned}$$

also ist die Transformation  $(q, p) \mapsto (Q, P)$  in (5.165) kanonisch. Die Beweise dafür, daß auch die Transformationen (5.167), (5.168) und (5.169) kanonisch sind, verlaufen analog.

Es gibt Methoden, systematisch nach solchen erzeugenden Funktionen zu suchen, die schrittweise Paare von Orten und Impulsen auf *Wirkungs- und Winkelvariablen* transformieren, in denen die Hamiltonfunktion und die zugehörige Zeitentwicklung wie in Beispiel 5.8 trivial sind

$$H(Q, P) = \sum_i P_i \omega_i. \quad (5.181)$$

## 5.6 Hamilton-Jacobi-Gleichung

Betrachte die Menge aller glatten Kurven im *Konfigurationsraum*  $Q$  mit festem Anfangspunkt, aber freiem Endpunkt

$$\Gamma_{t_0, q_0}^{t_1} = \left\{ \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow Q \mid \begin{array}{l} q(t_0) = q_0 \\ t \mapsto q(t) \end{array} \right\} \quad (5.182)$$

und die Wirkung  $\tilde{S}$  als eine reellwertige Funktion auf dieser Menge

$$\begin{aligned}
\tilde{S} : \Gamma_{t_0, q_0}^{t_1} &\rightarrow \mathbf{R} \\
\gamma &\mapsto \tilde{S}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t). \quad (5.183)
\end{aligned}$$

Einparametrische Familien von Variationen mit festgehalten Anfangspunkten und freien Endpunkten (vgl. Abbildung 5.3)

$$\begin{aligned}
\delta : \mathbf{R} \times \Gamma_{t_0, q_0}^{t_1} &\rightarrow \Gamma_{t_0, q_0}^{t_1} \\
(s, \gamma) &\mapsto \gamma_s^\delta : t \mapsto q_s^\delta(t) = q(t) + s \delta q(t) + \mathcal{O}(s^2) \quad (5.184)
\end{aligned}$$

mit

$$\delta q(t) = \left. \frac{d}{ds} q_s^\delta(t) \right|_{s=0}. \quad (5.185)$$

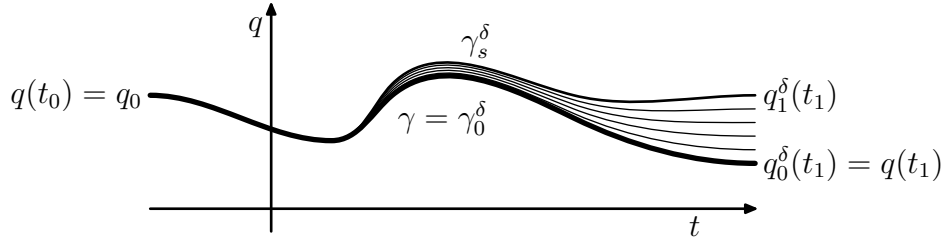


Abbildung 5.3: Eine einparametrische Familie von Kurven  $\{\gamma_s^\delta\}_{s \in [0,1]}$  mit festgehaltenem Anfangspunkt.

Die Variation der Wirkung ergibt sich daraus als

$$\begin{aligned}
 \delta \tilde{S}(\gamma) &= \left. \frac{d}{ds} \tilde{S}(\gamma_s^\delta) \right|_{s=0} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\
 &= \sum_i \int_{t_0}^{t_1} dt \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\text{ELG}} \delta q_i \\
 &\quad - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t_0), \dot{q}(t_0), t_0) \underbrace{\delta q_i(t_0)}_{=0} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \underbrace{\delta q_i(t_1)}_{\neq 0} \quad (5.186)
 \end{aligned}$$

Wenn wir nun  $\Gamma_{t_0, q_0}^{t_1}$  und damit  $\delta$  auf Lösungen der **ELG**, bzw. der kanonischen Gleichungen einschränken, verschwindet der erste Term und wir erhalten

$$\delta \tilde{S}(\gamma) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta q_i(t_1) = \sum_i p_i(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta q_i(t_1). \quad (5.187)$$

Andererseits gibt es zu jedem Endpunkt  $q(t_1)$  genau eine Trajektorie  $\gamma(q, t_1)$ , die die **ELG** löst und wir können damit  $\tilde{S}(\gamma)$  auch als Funktion von  $q$  auffassen

$$\begin{aligned}
 S : Q \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\
 (q, t) &\mapsto S(q, t) = \tilde{S}(\gamma(q, t)). \quad (5.188)
 \end{aligned}$$

Dann gilt mit (5.187) für Variationen des Endpunkts

$$\delta S(q, t) = \sum_i p_i \delta q_i \quad (5.189)$$

und deshalb

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}(q, t) = p_i(q, \dot{q}, t), \quad (5.190)$$

wobei  $\dot{q}(t) = \dot{q}(t_1)$  durch die Lösung der **ELG** festgelegt ist. Mit der Kettenregel gilt einerseits

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i \quad (5.191)$$

und andererseits ist aufgrund von (5.183)

$$\frac{dS}{dt} = L, \quad (5.192)$$

also

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \sum_i p_i \dot{q}_i + L = -H(q, p, t). \quad (5.193)$$

Mit (5.190) ergibt sich schließlich die *Hamilton-Jacobi-Gleichung* für die Wirkung  $S$  in (5.188)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \quad (5.194)$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung (**HJG**) (5.194) ist eine *partielle* Differentialgleichung. Im Allgemeinen ist die Lösung partieller Differentialgleichungen *wesentlich* schwieriger als die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen wie der **ELG** oder der kanonischen Gleichungen. Außerdem ist nicht offensichtlich, wie die Zeitentwicklung eines dynamischen Systems aus einer Funktion  $S : Q \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  rekonstruiert werden kann.

Erstaunlicherweise kann die **HJG** für manche Systeme analytisch gelöst werden, deren **ELG** oder kanonische Gleichungen analytisch nicht direkt gelöst werden können. Die Tatsache, daß die Zeitentwicklung durch kanonische Transformationen gegeben ist und daß kanonische Transformationen durch erzeugende Funktionen beschrieben werden können, gibt Hoffnung, daß die Lösung der **HJG** genügend Informationen enthalten kann.

Für zeitunabhängige Hamiltonfunktionen  $H : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$  gilt

$$H(q, p) = E = \text{const.} \quad (5.195)$$

und man kann für die Wirkungsfunktion den Ansatz

$$S(q, t) = S_0(q) - Et \quad (5.196)$$

mit einem zeitunabhängigen  $S_0 : Q \rightarrow \mathbf{R}$  machen. Dann ergibt sich mit

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad (5.197a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \quad (5.197b)$$

die zeitunabhängige **HJG**

$$E = H \left( q, \frac{\partial S_0}{\partial q} \right). \quad (5.198)$$

Die Lösungen  $S$  oder  $S_0$  der **HJG** (5.194) oder (5.198) sind im Allgemeinen *nicht* eindeutig, sondern hängen von Integrationskonstanten ab, die wegen (5.188) Anfangsbedingungen für die kanonischen Gleichungen entsprechen müssen. Wenn wir aus der Lösung der **HJG** eine kanonische Transformation konstruieren können, die  $(q, p = \partial S / \partial q)$  auf kanonische Variable  $(Q, P)$  transformieren, deren eine Hälfte den per Definition konstanten Anfangsbedingungen entsprechen und die verbleibende Hälfte triviale Zeitabhängigkeit hat, haben wir die kanonischen Gleichungen gelöst.

In der Tat können wir o. B. d. A.  $P$  als die konstante Anfangsbedingung wählen und  $S$  oder  $S_0$  als  $S_2(q, P)$  in (5.167) verwenden. Hierbei ist

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad (5.199)$$

durch (5.190) gewährleistet und falls

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} \neq 0 \quad (5.200)$$

wird mit

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} \quad (5.201)$$

eine kanonische Transformation definiert.

*Beispiel 5.12* (Harmonischer Oszillator redux).

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = E = \text{const.} \quad (5.202)$$

Wähle als konstanten Impuls  $P$  mit

$$E(P) = \omega P \quad (5.203)$$

in (5.198), wobei die Renormierung mit  $\omega$  willkürlich ist. Dann gilt

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \omega P, \quad (5.204)$$

bzw.

$$\frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 q^2}, \quad (5.205)$$

was von

$$S_0(q) = \int_{q_0}^q d\xi \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 \xi^2} \quad (5.206)$$

gelöst wird (die analytische Form des Integrals ist nicht wichtig). Weil

$$\frac{\partial (\partial S_0 / \partial q)}{\partial P} = \frac{\partial^2 S_0}{\partial q \partial P} = \sqrt{\frac{m\omega}{2P - m\omega q^2}} = \frac{m\omega}{|p|} \neq 0 \quad (5.207)$$

kann  $S_0$  als erzeugende Funktion  $S_2(q, P)$  in (5.167) verwendet werden. Damit

$$p = \frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 q^2} \quad (5.208a)$$

und

$$\begin{aligned} Q = \frac{\partial S_0}{\partial P} &= \int_{q_0}^q d\xi \frac{\partial}{\partial P} \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 \xi^2} = \int_{q_0}^q d\xi \sqrt{\frac{m\omega}{2P - m\omega \xi^2}} \\ &= \int_{q_0}^q d\xi \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \sqrt{\frac{1}{1 - m\omega/(2P)\xi^2}} = \int_{\alpha q_0}^{\alpha q} d\eta \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \\ &= \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} q \right) - \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} q_0 \right) \end{aligned} \quad (5.208b)$$

wobei  $\alpha = \sqrt{m\omega/(2P)}$ . Wähle  $q_0 = 0$ , dann

$$p = \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 q^2} \quad (5.209a)$$

$$Q = \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} q \right), \quad (5.209b)$$

was von der kanonischen Transformation

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (5.210a)$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad (5.210b)$$

gelöst wird, die früher im Beispiel 5.8 „geraten“ wurde und auf

$$H'(Q, P) = P\omega \quad (5.211)$$

und

$$Q(t) = Q(0) + \omega t \quad (5.212a)$$

$$P(t) = P(0) \quad (5.212b)$$

führt.

Zusatzmaterial (nicht in der Vorlesung besprochen):

## 5.7 Quantenmechanik

In der Quantenmechanik werden die Phasenraumkoordinaten Ort und Impuls durch Operatoren ersetzt

$$(q, p) \implies (\hat{q}, \hat{p}), \quad (5.213)$$

deren Kommutator durch die Poissonklammer der klassischen Größen festgelegt ist

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar\{q, p\}\mathbf{1} = i\hbar\mathbf{1}. \quad (5.214)$$

Die sogenannten *kanonischen Vertauschungsrelationen* (5.214) können z. B. durch

$$(\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x) \quad (5.215a)$$

$$(\hat{p}\psi)(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) \quad (5.215b)$$

realisiert werden

$$[\hat{q}, \hat{p}]\psi(x) = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}(x\psi(x)) = i\hbar\psi(x). \quad (5.216)$$

Die *Schrödingergleichung* ist dann

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = H \left( q, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, t \right) \psi(q, t) \quad (5.217)$$

mit, z. B. dem Hamiltonoperator für ein Teilchen im Potential

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + V(q) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q). \quad (5.218)$$

Einen Zusammenhang mit den **HJG** finden wir, wenn wir Betrag und Phase mit dem Ansatz

$$\psi(q, t) = \rho(q, t) e^{i\phi(q, t)/\hbar} \quad (5.219)$$

trennen. Damit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho e^{i\phi/\hbar} = i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} e^{i\phi/\hbar} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{i\phi/\hbar} = \left( i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) e^{i\phi/\hbar} \quad (5.220)$$

und

$$\begin{aligned} H\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \rho e^{i\phi/\hbar} + V(q) \rho e^{i\phi/\hbar} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial \rho}{\partial q} e^{i\phi/\hbar} + \frac{i}{\hbar} \rho e^{i\phi/\hbar} \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) + V(q) \rho e^{i\phi/\hbar} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial q^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{\partial \phi}{\partial q} - \frac{\rho}{\hbar^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial q} \right)^2 + \frac{i\rho}{\hbar} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} \right) e^{i\phi/\hbar} + V(q) \rho e^{i\phi/\hbar}, \end{aligned} \quad (5.221)$$



also

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \rho}{\partial q^2} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{\partial \phi}{\partial q} + \frac{\rho}{2m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial q} \right)^2 - \frac{i\hbar \rho}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} + V(q)\rho. \quad (5.222)$$

Im Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  ergibt sich daraus für  $\rho \neq 0$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial q} \right)^2 + V(q). \quad (5.223)$$

Also löst die Phase  $\phi$  im semiklassischen Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  die **HJG**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial \phi}{\partial q}, t\right) = \mathcal{O}(\hbar). \quad (5.224)$$

Dies liefert die Grundlage für die WKB-Approximation in der Quantenphysik.

## —6—

## NICHTLINEARE DYNAMIK

Vorlesung 27: Mo, 29.01.2024

Die unten im Abschnitt 6.3 kurz besprochenen integrablen Systeme sind nicht die Regel, sondern eine Ausnahme. Wenn ein System *sehr* viele Freiheitsgrade hat, kann man mit den Methoden der *Statistischen Mechanik* Aussagen über gemittelte Observable (Energie, Druck, etc.) machen. Relevante Aussagen über nichtintegrable Systeme mit wenigen Freiheitsgraden können weder durch Integration der Bewegungsgleichung, noch durch Statistik gemacht werden.

## 6.1 Virialsatz

Einen interessanten Sonderfall, mit dem man doch etwas über Eigenschaften eines nichtintegrablen Systems lernen kann, stellt der *Virialsatz* dar. Er erlaubt es, die Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie *separat* zu bestimmen.

Betrachte das Zeitmittel der totalen Ableitung einer Phasenraumfunktion  $f : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} f(q(t), p(t)) \right\rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} f(q(t), p(t)) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f(q(\tau), p(\tau)) - f(q(0), p(0))}{\tau}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Falls  $f$  beschränkt ist, folgt mit

$$\left| \left\langle \frac{d}{dt} f(q(t), p(t)) \right\rangle \right| \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2}{\tau} \max_{T^*Q} |f| = 0, \quad (6.2)$$

daß dieses Zeitmittel für hinreichend große Zeiten verschwindet

$$\left\langle \frac{d}{dt} f(q(t), p(t)) \right\rangle = 0. \quad (6.3)$$

Für das sogenannte *Virial*

$$\begin{aligned} v : T^*Q &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, p) &\mapsto v(q, p) = \sum_i q_i p_i \end{aligned} \quad (6.4)$$

gilt entlang der Lösungen der Bewegungsgleichungen

$$\dot{v} = \sum_i (\dot{q}_i p_i + q_i \dot{p}_i) = \sum_i \left( p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (6.5)$$

Wenn wir annehmen, daß die Hamiltonfunktion in kinetische Energie  $T$  und potentielle Energie  $E$  zerfällt

$$H(q, p) = T(p) + V(q) \quad (6.6a)$$

wobei  $T$  quadratisch in  $p$

$$T(p) = \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij} p_i p_j \quad (6.6b)$$

und  $V$  homogen vom Grade  $\eta$

$$\sum_i q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} = \eta V \quad (6.6c)$$

sei, dann gilt

$$\dot{v} = 2T - \eta V \quad (6.7)$$

und damit für beschränkte Bewegung

$$2 \langle T \rangle = \eta \langle V \rangle. \quad (6.8)$$

Mit der Energieerhaltung

$$\langle T \rangle + \langle V \rangle = E \quad (6.9)$$

folgt für  $\eta \neq -2$

$$\langle T \rangle = \frac{\eta}{\eta + 2} E \quad (6.10a)$$

$$\langle V \rangle = \frac{2}{\eta + 2} E. \quad (6.10b)$$

*Beispiel 6.1.* Für harmonische Kräfte

$$V(q) = \frac{1}{2} \sum_{ij} D_{ij} q_i q_j \quad (6.11)$$

d. h.  $\eta = 2$  gilt

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle = \frac{1}{2} E. \quad (6.12)$$

*Beispiel 6.2.* Für Newtonsche Gravitation und Elektrostatik

$$V(q) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{|q_i - q_j|} \quad (6.13)$$

d. h.  $\eta = -1$  gilt

$$\langle T \rangle = -E = -\frac{1}{2} \langle V \rangle. \quad (6.14)$$

Anwendung: Dunkle Materie (Zwicky, 1937).  $\langle T \rangle$  eines Galaxien-Clusters kann durch Doppler-Verschiebung von Spektrallinien gemessen werden, daraus kann man unter der Annahme, daß das Zeitmittel durch das Mittel über alle Galaxien des Clusters ersetzt werden kann, mit  $\alpha_{ij} = Gm_i m_j$  in  $\langle V \rangle$  die Massen abschätzen und erhält wesentlich mehr, als die Leuchtkraft erwarten läßt.

## 6.2 Stabilitätstheorie

Die Dynamik eines Systems im Phasenraum wird durch einen Fluß

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{R} \times T^*Q &\rightarrow T^*Q \\ (t, x_0) &\mapsto x(t) = \Phi_t(x_0) \end{aligned} \quad (6.15)$$

beschrieben, der über eine Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}(t) = X(x, t) \quad (6.16)$$

durch ein Vektorfeld  $X : T^*Q \times \mathbf{R} \rightarrow T(T^*Q) \cong \mathbf{R}^{2n}$  festgelegt ist. In einem konservativen System sind Fluß und Vektorfeld hamiltonsch und in einem autonomen System hängt das Vektorfeld nicht von der Zeit ab. Der Einfachheit halber werden wir uns im Folgenden auf autonome Systeme beschränken.

### 6.2.1 Fixpunkte

Für das qualitative Verhalten des Systems wichtig sind Gleichgewichtslagen oder *Fixpunkte*  $x_0$ , an denen das System verharren kann

$$\forall t \in \mathbf{R} : x(t) = \Phi_t(x_0) = x_0. \quad (6.17)$$

An diesen Stellen muß das Vektorfeld verschwinden, weil

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\Phi_t}{dt} \right|_{t=0} (x_0) = X(x_0) = 0. \quad (6.18)$$

Man kann dort das Vektorfeld linear approximieren

$$X(x) = \underbrace{X(x_0)}_{=0} + \underbrace{DX(x_0)}_{=A} \cdot (x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2) \quad (6.19)$$

und findet mit

$$A_{ij} = [DX]_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (6.20a)$$

$$y = x - x_0 \quad (6.20b)$$

die *linearisierte Gleichung*

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \quad (6.21)$$

Man kann diese durch

$$y = e^{A(t-t_0)} y_0 \quad (6.22)$$

lösen und das qualitative Verhalten wird von den Eigenwerten  $\lambda_i$  von  $A = DX(x_0)$  bestimmt:

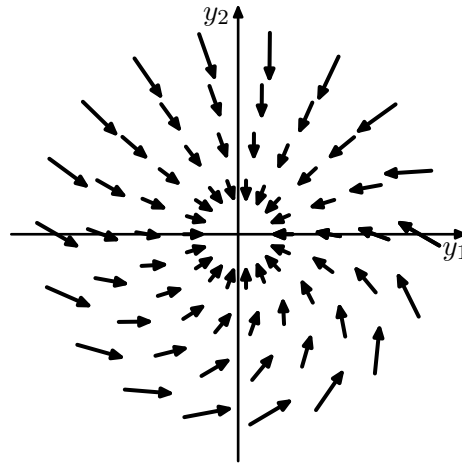
- $\lambda_i > 0$ : repulsiv in Richtung des zugehörigen Eigenvektors
- $\lambda_i < 0$ : attraktiv in Richtung des zugehörigen Eigenvektors
- $\lambda_{\pm} = \pm i\omega$ : Zykel.

Dazu kommen noch Mischformen, wenn die Eigenwerte weder reell noch rein imaginär sind. Für ein konservatives System muß wegen des Liouville'schen Theorems (Abschnitt 5.4.3)

$$1 = \det e^{A(t-t_0)} = e^{\text{tr } A(t-t_0)} \quad (6.23)$$

gelten, also

$$\text{tr } A = 0 \quad (6.24)$$

Abbildung 6.1: Attraktor bei  $y = 0$ .

oder

$$\sum_i \lambda_i = 0. \quad (6.25)$$

Die Eigenwerte sind Beispiele für *Lyapunov-Exponenten*, die die Zeitabhängigkeit des Abstands benachbarter Trajektorien charakterisieren.

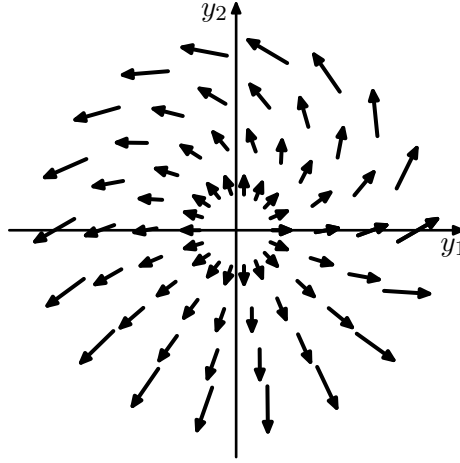
*Beispiel 6.3.* In zwei Dimensionen gibt es in der Nähe eines Fixpunktes die Möglichkeiten

	Abb.	$\lambda_1$	$\lambda_2$
Attraktor	6.1	$< 0$	$< 0$
Repulsor	6.2	$> 0$	$> 0$
Sattelpunkt	6.3	$> 0$	$< 0$
Zykel	6.4	$+i\omega$	$-i\omega$

wobei in einem kanonischen Phasenraum  $(y_1, y_2) = (q, p)$  wegen des Liouville'schen Theorems nur Sattelpunkte mit  $\lambda_1 = -\lambda_2$  und Zykel erlaubt sind.

### 6.2.2 Grenzzyklen

Neben den Fixpunkten gibt es auch *Grenzzyklen* mit einer stabilen periodischen Bewegung, wie in Abbildung 6.5 und 6.6, um die herum wieder linearisiert werden kann, um zu unterscheiden, ob die Bewegung in den Zyklus hinein oder hinaus verläuft.

Abbildung 6.2: *Repulsor bei  $y = 0$ .*

### 6.3 Integrabilität

**Definition 6.4** (Integrables System). Ein autonomes mechanisches System  $\Gamma = (T^*Q, H)$  mit  $N$  Freiheitsgraden, bestehend aus einem  $2N$ -dimensionalen Phasenraum  $T^*Q$  und einer Hamiltonfunktion  $H : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$  heißt *integrabel*, wenn es neben der Hamiltonfunktion  $g_1 = H$  mindestens  $N - 1$  weitere Integrale  $\{g_i : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}\}_{i=2,\dots,N}$  gibt, die

1. Teilmengen  $\Sigma_c \subseteq T^*Q$  definieren

$$\Sigma_c = \{x \in T^*Q : g_i(x) = c_i, \forall i = 1, \dots, N\}, \quad (6.26a)$$

mit  $c_1 = E$ ,

2. zueinander *in Involution stehen*

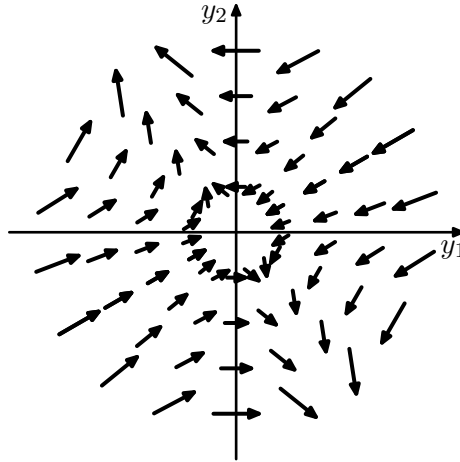
$$\forall x \in T^*Q : \forall i, j = 1, \dots, N : \{g_i, g_j\}(x) = 0, \quad (6.26b)$$

und

3. voneinander unabhängig sind, d. h.

$$\forall x \in \Sigma_c : \{dg_i(x)\}_{1,\dots,N} \text{ linear unabhängig.} \quad (6.26c)$$

Für integrable Systeme erhält man nicht nur lokale Aussagen über die Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen in einer Umgebung der Anfangswerte, sondern *globale* Aussagen über die Lösungen für alle Zeiten:

Abbildung 6.3: Sattelpunkt bei  $y = 0$ .

**Theorem 6.5** (Liouville, Arnold). *Sei  $\Gamma$  ein integrables System, dann ist*

1.  $\Sigma_c$  eine glatte Untermannigfaltigkeit die invariant unter dem von  $H$  erzeugten Fluß  $\Phi$  ist

$$\Phi_t \Sigma_c = \Sigma_c \quad (6.27)$$

2. wenn  $\Sigma_c$  kompakt ist, dann ist  $\Sigma_c$  diffeomorph zu einem  $N$ -dimensionalen Torus

$$T^N = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1, \quad (6.28)$$

d. h. es gibt eine glatte Bijektion  $\Sigma_c \rightarrow T^N$ , wobei  $S^1$  der Einheitskreis ist,

3. die Winkel  $\{\theta_i\}_{i=1,\dots,N}$  auf jedem  $S^1$  sind geeignete Koordinaten für  $T^N$  und die zugehörigen Bewegungsgleichungen sind

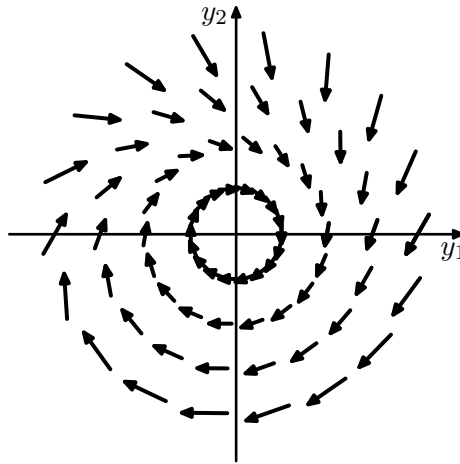
$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i \quad (6.29)$$

deren Lösung zu einer quasiperiodischen Bewegung auf  $S$  führt,

4. die kanonischen Gleichungen können durch Quadraturen gelöst werden.

Während die Notwendigkeit der Unabhängigkeit der Integrale  $\{g_i\}_{i=1,\dots,N}$  zur Definition einer  $N$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit einer  $2N$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit intuitiv einsichtig sein sollte, verdient die Bedin-



Abbildung 6.4: Zykel bei  $y = 0$ .

gung, daß sie paarweise in Involution stehen  $\{g_i, g_j\} = 0$  eine Bemerkung. Die Bedingungen

$$\forall i = 2, \dots, N : \{g_i, g_1\} = \{g_i, H\} = \frac{dg_i}{dt} = 0 \quad (6.30)$$

ist offensichtlich erforderlich, damit  $\Sigma_c$  unter der Zeitentwicklung stabil sein kann. Die verbleibenden Bedingungen versteht man am besten dadurch, daß die Integrale den Impulsen auf den unabhängigen  $S^1$  die den Torus  $T^N$  ausmachen entsprechen, und deshalb paarweise verschwindende Poissonklammern haben müssen. Weil kanonische Transformation die Poissonklammern nicht ändern, muß dies auch für die Integrale gelten.

In der Quantenphysik sind die Observablen die gleichzeitig gemessen werden können die, die miteinander vertauschen, also die klassischen Observablen entsprechen deren Poissonklammern verschwinden, bzw. die in Involution sind.

Vorlesung 28: Fr, 02.02.2024

Geometrisch entspricht die Integration der Bewegungsgleichung der Glättung des Hamiltonschen Vektorfelds

$$X_H = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_N}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_N} \right)^T \quad (6.31)$$

$$(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N)^T = X_H \quad (6.32)$$

das die zeitliche Änderung des Systems beschreibt.

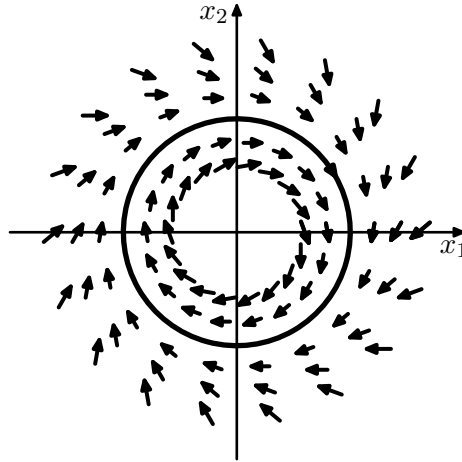


Abbildung 6.5: *Stabiler (attraktiver) Grenzzyklus bei  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .*

*Beispiel 6.6* (Harmonischer Oszillator redux). Vor der Integration

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (6.33)$$

mit hamiltonischem Vektorfeld

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -m\omega^2 q \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

und nach der Integration

$$H'(Q, P) = P\omega \quad (6.35)$$

mit hamiltonischem Vektorfeld

$$X_{H'} = (\omega, 0) . \quad (6.36)$$

### 6.3.1 Beispiele

Im Zentralkraftproblem mit drei Freiheitsgraden,  $T^*Q = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  und

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + V(|\vec{q}|) \quad (6.37)$$

gibt es vier Integrale

- die Gesamtenergie  $H$

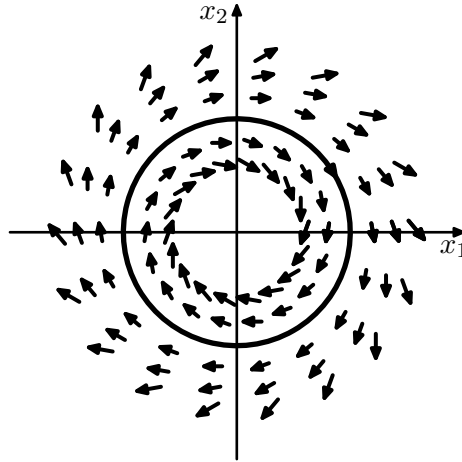


Abbildung 6.6: *Instabiler Grenzyklus bei  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .*

- die drei Komponenten des Drehimpulses  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ .

Allerdings gilt

$$\{H, L_i\} = 0 \quad (6.38a)$$

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad (6.38b)$$

und die  $L_i$  stehen *nicht* in Involution. Wenn man eine Komponente, o. B. d. A.  $L_3$ , auswählt, hat man nur zwei Integrale, eines zuwenig für drei Freiheitsgrade. Glücklicherweise findet man (Übungsaufgabe), daß

$$\{L_i, \vec{L}^2\} = 0 \quad (6.39)$$

und man kann drei Integrale auswählen, die zueinander in Involution stehen:

$$H, \vec{L}^2, L_3. \quad (6.40)$$

Im Abschnitt 4.2 hatten wir die Bahnen durch die beiden Integrale  $H$  und  $p_\phi = |\vec{L}|$  parametrisiert. Dies entspricht trotzdem den drei Integralen (6.40), weil wir die Koordinaten so gewählt hatten, daß die Bewegung in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene verläuft und deshalb  $L_3 = |\vec{L}|$ .

Im Keplerproblem

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{\alpha}{|\vec{q}|} \quad (6.41)$$

haben wir mit den drei Komponenten des Runge-Lenz-Vektors  $\vec{R}$  zusätzliche Integrale, die wie als Übung nachgewiesen werden kann, nicht alle in Involution stehen:

$$\{H, L_i\} = 0 \quad (6.42a)$$

$$\{H, R_i\} = 0 \quad (6.42b)$$

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad (6.42c)$$

$$\{L_i, R_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} R_k \quad (6.42d)$$

$$\{R_i, R_j\} = -\frac{2H}{m} \sum_k \epsilon_{ijk} L_k. \quad (6.42e)$$

Allerdings können wir  $R_3$  und  $\vec{R}^2$  zu (6.40) hinzufügen und erhalten fünf Integrale

$$H, \vec{L}^2, L_3, \vec{R}^2, R_3, \quad (6.43)$$

die in Involution stehen. Damit haben wir mehr Integrale als für die Integration eines System mit drei Freiheitsgraden nötig. Solche Systeme nennt man *superintegrabel*.

## 6.4 KAM-Theorie

Eine physikalisch wichtige Situation ist gegeben, wenn sich die Hamiltonfunktion  $H$  eines Systems aufspalten läßt in einen Anteil  $H_0$ , der ein integrables System beschreibt und einen Teil  $H'$ , der eine „kleine“ Störung des integrablem Systems beschreibt

$$H = H_0 + H'. \quad (6.44)$$

Das berühmteste Beispiel hierfür ist das Sonnensystem. Hierbei ist die unabhängige Bewegung der Planeten um die Sonne

$$H_0 = \sum_{i=\text{Merkur}}^{\text{Neptun}} H_i \quad (6.45a)$$

mit

$$H_i = \frac{1}{2m_i} \vec{p}_i^2 - \frac{GMm_i}{|\vec{q}_i|} \quad (6.45b)$$

integrabel (vgl. Abschnitte 4.2.3 und 6.3), weil  $3 \times N_{\text{Planeten}}$  Integrale existieren, die in Involution stehen

$$\{H_i, L_{i,3}, \vec{L}_i^2\}_{i=\text{Merkur}, \dots, \text{Neptun}}. \quad (6.46)$$

In den entsprechenden Wirkungs- und Winkelvariablen ausgedrückt verlaufen beschränkte Bewegungen dann auf Tori  $S^1 \times S^1 \times S^1 \times \dots$  und unbeschränkte Bewegungen auf Zylindern  $S^1 \times S^1 \times \dots \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots$ . Wenn man die Wechselwirkung der Planeten untereinander

$$H' = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=\text{Merkur} \\ i \neq j}}^{\text{Neptun}} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{q}_i - \vec{q}_j|} \quad (6.47)$$

hinzufügt, zerstört sie die Integrabilität.

Für den integrablen Teil wissen wir, daß die Bewegung für  $\max_i E_i < 0$  auf Tori im Phasenraum verläuft. Man kann nun zwei Szenarien für das Gesamtsystem erwarten:

- das Gesamtsystem ist nicht integrabel, also gibt es die Tori des ungestörten Systems hier nicht mehr und das System kann irgendwann jeden mit  $H(q, p) = E$  energetisch erlaubten Punkt im Phasenraum erreichen oder
- falls  $m_i \ll M$  könnten die Störungen zu klein sein, um die Tori zu zerstören.

Für das zweite Szenarium spricht die beobachtete Stabilität des Sonnensystems über  $\mathcal{O}(10^9 \text{ y})$ . Für das erste Szenarium spricht, daß bereits im Dreikörperproblem eine Masse nach unendlich entweichen kann, wenn die anderen beiden Massen genügend Energie an sie übertragen.

Man kann diese Frage systematisch mit *Störungstheorie* studieren und erzeugende Funktionen für kanonische Transformationen als Potenzreihenentwicklung in einem kleinen Parameter  $\epsilon$  konstruieren

$$S_2(q, P) = qP + \epsilon S_2^{(1)}(q, p) + \epsilon^2 S_2^{(2)}(q, p) + \dots, \quad (6.48)$$

wobei in unserem Fall  $\epsilon_i = m_i/M$ . Weil sich das ungestörte Problem quasi-periodisch mit Frequenzen  $\omega_i$  bewegt

$$q_i \propto e^{i\omega_i t} \quad (6.49)$$

trägt die Störung Terme der Form

$$f(t) = \sum_{n_1, n_2, \dots} C_{n_1, n_2, \dots} e^{i \sum_i n_i \omega_i t} \quad (6.50)$$

bei, die nach Integration auf

$$\int^t dt' f(t') = \frac{1}{i} \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{C_{n_1, n_2, \dots}}{\sum_i n_i \omega_i} e^{i \sum_i n_i \omega_i t} \quad (6.51)$$

führen, was für Frequenzen, die in *rationalen* Verhältnissen

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = Q_{ij} = \frac{N_{ij}}{D_{ij}}, \quad N_{ij}, D_{ij} \in \mathbf{N} \quad (6.52)$$

mit kleinen Zählern  $N_{ij}$  und Nennern  $D_{ij}$  stehen, zu großen Korrekturen führt, die die Konvergenz der Störungsreihe auch für kleine  $\epsilon$  zerstören.

Solche *Resonanzeffekte* sind typisch in der Physik: auch in der Quantentheorie werden Störungen, die nahezu gleiche Energie (d. h. Frequenz) haben, zu besonders starken Effekte führen.

Trotzdem kann man das *KAM-Theorem* (Kolmogorov, Arnold, Moser, ca. 1954-63) beweisen: hinreichend kleine Störungen zerstören die meisten der sogenannten *KAM-Tori* nicht, sondern verformen sie nur. Die ersten *KAM-Tori*, die zerstört werden, sind diejenigen mit Umlauffrequenzen, die in *rationalen* Verhältnissen mit kleinen Zählern  $N_{ij}$  und Nennern  $D_{ij}$  stehen.

In der Tat finden man, daß z. B. die Saturnringe vorzugsweise Lücken an den Stellen haben, deren Umlaufzeiten in rationalen Verhältnissen zu den Umlaufzeiten der Saturnmonde stehen.

## 6.5 Deterministisches Chaos

Im Gegensatz zur Quantentheorie, die *prinzipiell* nur Aussagen über die *Wahrscheinlichkeiten* von experimentellen Resultaten treffen kann, ist die klassische Physik deterministisch: wenn das Hamilton'sche Vektorfeld (der Hamilton'schen Fluß, die Hamiltonfunktion, die Lagrangefunktion, oder die Kräfte) bekannt sind, kann aus einem zum Zeitpunkt  $t_0$  bekannten Anfangszustand  $x_0 \in T^*Q$  eindeutig der Zustand  $x(t) = \Phi_t x_0 \in T^*Q$  berechnet werden. Auch wenn die Lösung des Problems nicht per Integration möglich ist, kann eine zumindest prinzipiell beliebig genaue numerische Lösung gefunden werden.

Wenn das System aber positive Lyapunov-Exponenten aufweist, dann wächst aus einer Unsicherheit  $\Delta x_0$  in der Bestimmung des Anfangspunktes  $x_0 \in T^*Q$  mit der Zeit zu einer Unsicherheit

$$\Delta x(t) = e^{\max_i \lambda_i (t-t_0)} \Delta x_0 \quad (6.53)$$

an. Dies kann dazu führen, daß trotz deterministischer Dynamik die Unsicherheit so groß wird, daß *keine* quantitativen Aussagen über  $x(t)$  mehr möglich sind, weil es für alle  $\Delta x_0 > 0$  ein  $t > t_0$  gibt, sodaß  $\Delta x(t)$  zur Größe des energetisch zugänglichen Teils des Phasenraumes anwachsen kann.

Solche Systeme sind ein Beispiel für *deterministisches Chaos*, einem in den 80er und 90er Jahren des letzten Jahrhunderts sehr aktiven Forschungsgebiet. Populär wurde der Schmetterlingseffekt: „das Flügelschlagen eines Schmetterlings in China kann nach endlicher Zeit das Wetter in Unterfranken beeinflussen“.

## —7—

## RELATIVISTISCHE DYNAMIK

Seit ca. 1900 zeigen Beobachtungen, daß die Galilei-invariante („nichtrelativistische“) Mechanik bei großen Geschwindigkeiten die Natur nicht mehr korrekt beschreibt

- experimentell:
  - der Licht scheint sich für jeden Beobachter, d. h. in *jedem* Inertialsystem mit der Geschwindigkeit  $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  auszubreiten, die Galilei'sche Geschwindigkeitsaddition  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$  kann also für  $|\vec{v}_i| \lesssim c$  nicht korrekt sein,
  - masselose Teilchen tragen in Streu- und Zerfallsprozessen Impuls,
  - die beobachtete Lebensdauer von Teilchen hängt von ihrer Geschwindigkeit ab;
- theoretisch: die Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0 \quad (7.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (7.1b)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.1d)$$

mit  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  sind unter Galilei-Boosts (vgl. Abschnitt 3.8.8) nicht *kovariant*, d. h. sie ändern ihre Form und ihre Gültigkeit hinge vom Beobachter ab. Vielmehr haben sie Wellenlösungen, die sich mit der universellen Geschwindigkeit  $c$  ausbreiten.



## 7.1 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Postulat der *speziellen Relativitätstheorie*: der Betrag

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (7.2)$$

der Lichtgeschwindigkeit ist eine Naturkonstante und für *jeden* Beobachter, d. h. in *jedem* Inertialsystem gleich.

Damit liegen die bei  $t = 0$  und  $\vec{x} = 0$  auslaufenden Lichtwellenfronten in *jedem* Inertialsystem auf der Kugel

$$|\vec{x}| = ct = x^0, \quad (7.3)$$

wobei die Zeit  $t$  durch eine äquivalente Länge ausgedrückt wurde

$$t = \frac{x^0}{c}. \quad (7.4)$$

Gleichzeitig erfüllen einlaufende Lichtwellenfronten

$$|\vec{x}| = -ct = -x^0. \quad (7.5)$$

Wenn wir *Ereignisse* durch ihren Zeitpunkt und Ort in einem *Vierervektor*

$$x = (x^0, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) \quad (7.6)$$

charakterisieren, dann kann ein Lichtstrahl zwei Ereignisse  $x$  und  $y$  genau dann verbinden, wenn

$$0 = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 = c^2(t_x - t_y)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2, \quad (7.7)$$

d. h. wenn ihr Abstand  $x - y$  auf dem *Lichtkegel* in Abbildung 7.1 liegen.

Eine von der Wahl des Beobachters unabhängige Definition der „Länge“ eines Vierervektors  $x$  ist also

$$x^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \quad (7.8)$$

und die Vierervektoren zerfallen in drei Klassen

- *zeitartig*:  $x^2 > 0$ ,
- *lichtartig*:  $x^2 = 0$  und
- *raumartig*:  $x^2 < 0$ .

Aufgrund der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist diese Unterteilung für jeden Beobachter gleich, vgl. Abbildung 7.1.

Für zeit- und lichtartige Vierervektoren kann man Zukunft  $x_0 > 0$  und Vergangenheit  $x_0 < 0$  unterscheiden, während das Vorzeichen von  $x_0$  für raumartige Vierervektoren vom Beobachter abhängt.

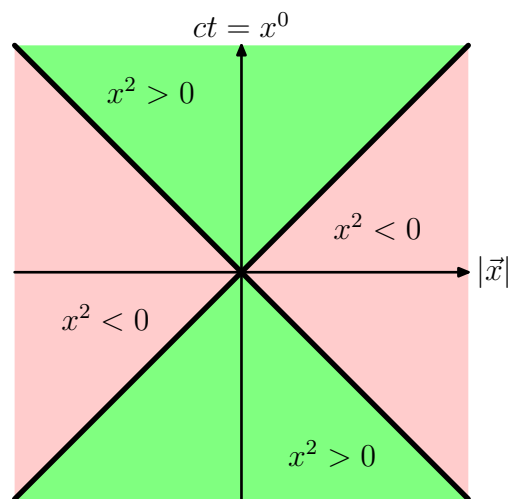


Abbildung 7.1: Der Lichtkegel  $x^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2 = 0$  trennt zeitartige  $x^2 > 0$  von raumartigen  $x^2 < 0$  Abständen und hat in jedem Inertialsystem die gleiche Form.

# —A—

## NOTATION

In der Vorlesung und in diesem Skript verwende ich eine Notation, die weitgehend den Konventionen der modernen Mathematischen Physik folgt. So unterscheide ich z. B. zwischen dem Phasenraum  $T^*Q$  der von Koordinaten und Impulsen  $(q, p)$  aufgespannt wird und dem Raum  $TQ$  der von Koordinaten und Geschwindigkeiten  $(q, \dot{q})$  aufgespannt wird (Geschwindigkeits-Phasenraum), obwohl sowohl  $p$  als auch  $q$  in zu  $\mathbf{R}^n$  isomorphen Vektorräumen leben. Zunächst mögen solche Unterscheidungen als unnötige Pedanterie erscheinen, die von „der Physik“ ablenken, aber ich bin sicher, daß sie später Verwirrungen verhindern.

$H$  Hamiltonfunktion, entweder zeitunabhängig

$$\begin{aligned} H : T^*Q &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, p) &\mapsto H(q, p) \end{aligned} \tag{A.1}$$

oder zeitabhängig

$$\begin{aligned} H : T^*Q \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, p, t) &\mapsto H(q, p, t) \end{aligned} \tag{A.2}$$

(vgl. Abschnitt 5.44, Seite 156).

$L$  Lagrangefunktion, entweder zeitunabhängig

$$\begin{aligned} L : TQ &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, \dot{q}) &\mapsto L(q, \dot{q}) \end{aligned} \tag{A.3}$$

oder zeitabhängig

$$\begin{aligned} L : TQ \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\mapsto L(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \tag{A.4}$$

(vgl. Abschnitt 3.24, Seite 27).

- $q$  Ein Punkt im Konfigurationsraum  $Q$ , d. h.  $q \in Q$ .
- $\vec{q}$  Der Vektor der Koordinaten des Punkts  $q \in Q$ , d. h.  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbf{R}^n$ . Oft auch als *verallgemeinerte Koordinaten* bezeichnet.
- $q_i$  Die  $i$ -te Komponente von  $\vec{q}$ .
- $Q$  Konfigurationsraum des betrachteten Systems. Für ein Punktteilchen ohne Nebenbedingung im Anschauungsraum gilt  $Q \cong \mathbf{R}^3$ . (vgl. Abschnitt 2, Seite 5).
- $\mathbf{R}$  Der Körper der reellen Zahlen oder der eindimensionale Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen.
- $\mathbf{R}^n$  Der  $n$ -dimensionale Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen.
- $T_q Q$  mathematisch: Tangentialvektorraum an  $Q$  am Punkt  $q \in Q$  ( $T_q Q \cong \mathbf{R}^n$ ).
- $TQ$  Geschwindigkeits-Phasenraum, d. h. Raum der Koordinaten und Geschwindigkeiten. Falls der Konfigurationsraum  $Q$  topologisch einfach ist, gilt  $TQ \cong Q \times \mathbf{R}^n$ . Die mathematische Bezeichnung und Motivation der Notation ist Tangentialbündel (oder auch Tangentialvektorraumbündel) an  $Q$ .
- $T_q^* Q$  mathematisch: Kotangentialvektorraum an  $Q$  am Punkt  $q \in Q$  ( $T_q^* Q \cong \mathbf{R}^n$ ) (vgl. Abschnitt 5, Seite 149).
- $T^* Q$  Phasenraum, d. h. Raum der Koordinaten und Impulse. Falls der Konfigurationsraum  $Q$  topologisch einfach ist, gilt  $T^* Q = Q \times \mathbf{R}^n$ . Die mathematische Bezeichnung und Motivation der Notation ist Kotangentialbündel (oder auch Kotangentialvektorraumbündel) an  $Q$ . (vgl. Abschnitt 5, Seite 149).
- $x$  Punkt in den *kartesischen* Anschauungsräumen  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{R}^3$  oder entsprechender Produkte für Mehrteilchensysteme. Mit  $x : Q \rightarrow \mathbf{R}^n$  wird die Einbettung von  $Q$  in einen Anschauungsraum bezeichnet.
- $\vec{x}$  Die Koordinaten von  $x$ . Die kartesischen Koordinaten  $\vec{x}$  bilden einen Vektorraum der auf natürliche Weise isomorph zum Konfigurationsraum ist.
- $x_i$  Die  $i$ -te Komponente von  $\vec{x}$ .
- $x$  Kurzschreibweise  $x = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  für einen Punkt im Phasenraum  $T^* Q$ . (vgl. Abschnitt 5.4, Seite 162).

# —B—

## MATHEMATISCHER WERKZEUGKASTEN

### B.1 Funktionen

Eine *Funktion*  $f$  ist eine Abbildung, die *jedem* Element  $x$  des *Definitionsreichs* (bzw. des *Urbildes*)  $A$  *genau ein* Element der *Bildmenge*  $B$  zuordnet

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y = f(x) . \end{aligned} \tag{B.1}$$

In der physikalischen und der älteren mathematischen Literatur wird die Funktion  $f$  oft mit  $f(x)$  bezeichnet. Diese Notation ist aber mißverständlich, weil sie es unmöglich macht, zwischen der *Funktion*  $f : A \rightarrow B$  und ihrem *Wert*  $f(x) \in B$  an der Stelle  $x \in A$  zu unterscheiden. Spätestens, wenn wir in Abschnitt 3.1 Funktionen von Funktionen betrachten, müssen wir zwischen

$$S_1(f) \tag{B.2}$$

und

$$S_2(f(x)) \tag{B.3}$$

unterscheiden. Wenn  $F_{A,B}$  die Menge der Funktionen  $f : A \rightarrow B$  bezeichnet, dann ist

$$\begin{aligned} S_1 : F_{A,B} &\rightarrow C \\ f &\mapsto z = S_1(f) , \end{aligned} \tag{B.4}$$

aber

$$\begin{aligned} S_2 : B &\rightarrow C \\ y &\mapsto z = S_2(y) \end{aligned} \tag{B.5}$$

oder

$$\begin{aligned} S_2 \circ f : A &\rightarrow C \\ x &\mapsto z = S_2(f(x)) . \end{aligned} \tag{B.6}$$

Die beiden Funktionen haben also nichts miteinander zu tun! Typische Beispiele für Funktionen von  $F_{\mathbf{R},\mathbf{R}}$  nach  $\mathbf{R}$  sind z. B. bestimmte Integrale

$$I_{a,b} : F_{\mathbf{R},\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f \mapsto I_{a,b}(f) = \int_a^b dx f(x). \quad (\text{B.7})$$

Wir werden die Notation  $f(x)$  für die Funktion nur dort benutzen, wo eine Verwechslung mit dem Funktionswert  $f(x)$  ausgeschlossen ist und die präzise Notation unnötig umständlich wäre.

An manchen Stellen muß nicht gefordert werden oder kann nicht garantiert werden, daß eine Funktion

$$f : \mathbf{R} \rightarrow A$$

$$x \rightarrow f(x) \quad (\text{B.8})$$

für *alle* reellen Zahlen definiert ist<sup>1</sup>, sondern nur für eine Teilmenge  $I \in \mathbf{R}$

$$f : I \rightarrow A$$

$$x \rightarrow f(x). \quad (\text{B.9})$$

Oft handelt es sich bei  $I$  um eine offene Umgebung eines Punktes. Analoges gilt für Teilmengen von  $\mathbf{R}^n$ .

## B.2 Lineare Algebra

### B.2.1 Rechnen mit Indices

*Summationsindices vs. freie Indices*

*Kronecker- $\delta$*

*$\epsilon$ -Tensor*

Forderung: total antisymmetrisch

$$\forall i, j, k = 1, 2, 3 : \epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj} \quad (\text{B.10})$$

und

$$\epsilon_{123} = 1, \quad (\text{B.11})$$

---

<sup>1</sup>In der ersten Version des Skriptes wurde auch in diesen Fällen oft  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  anstelle von  $f : I \rightarrow A$  geschrieben, wenn es wichtiger war, zu betonen, daß  $I \in \mathbf{R}$ , als daß  $f$  nicht notwendig auf ganz  $\mathbf{R}$  definiert ist. Bei der Überarbeitung soll möglichst konsequent  $f : I \in \mathbf{R} \rightarrow A$  geschrieben werden.

dann

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321}. \quad (\text{B.12})$$

Summationen

$$\sum_{m=1}^3 \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{B.13a})$$

$$\sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{ikl} \epsilon_{jkl} = 2\delta_{ij} \quad (\text{B.13b})$$

### B.3 Ableitungen

*Our presentation [...] aims at keeping as close as possible to the fundamental idea of calculus, namely the local approximation of functions by linear functions. In the classical teaching of calculus, this idea is immediately obscured by the accidental fact that, on a one dimensional vector space, there is a one-to-one correspondence between linear forms and numbers, and therefore the derivative at a point is defined as a number instead of a linear form. This slavish subservience to the shibboleth of numerical interpretation at any cost becomes much worse when dealing with functions of several variables.*

J. Dieudonne, *Treatise on Analysis* (1960) [13]

Die Darstellung orientiert sich an den Abschnitten 8.1-8.4 von [13].

**Definition B.1.** Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Vektorraum.

Banachräume sind die Abstraktion der in der Physik überall verwendeten vollständigen normierten Vektorräume  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{C}^n$ , was die reellen Zahlen  $\mathbf{R}$  und die komplexen Zahlen  $\mathbf{C}$  einschließt.

**Definition B.2.** Zwei Funktionen  $f : E \rightarrow F$  und  $g : E \rightarrow F$  berühren einander,  $f \stackrel{x_0}{\sim} g$  im Punkt  $x_0 \in E$  wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - g(x)\|_F}{\|x - x_0\|_E} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Dies definiert wegen

$$\|f(x) - h(x)\|_F \leq \|f(x) - g(x)\|_F + \|g(x) - h(x)\|_F \quad (\text{B.15})$$

eine Äquivalenzrelation

$$f \stackrel{x_0}{\sim} g \wedge g \stackrel{x_0}{\sim} h \implies f \stackrel{x_0}{\sim} h. \quad (\text{B.16})$$

Unter allen Funktionen  $g : E \rightarrow F$ , die eine gegebene Funktion  $f : E \rightarrow F$  an einem Punkt  $x_0 \in E$  berühren, gibt es *höchstens* eine lineare Approximation der Form

$$E \ni x \mapsto f(x_0) + Df|_{x_0}(x - x_0) \in F \quad (\text{B.17})$$

wobei  $Df|_{x_0} : E \rightarrow F$  eine *lineare* Funktion ist, d. h.  $Df|_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Definition B.3.** Wenn  $Df|_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$  aus (B.17) existiert, nennt man es die *Ableitung* der Funktion  $f : E \rightarrow F$  am Punkt  $x_0 \in E$ .

Diese Definition der Ableitung wird auch mit *Frechet-Ableitung* bezeichnet. Ihr großer Vorteil ist, daß die völlig unabhängig von den betrachteten Banachräumen ist und im ein-, im mehr- und im unendlichdimensionalen Fall verwendet werden kann.

*Beispiel B.4.* Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

dann wirkt  $Df|_{x_0}$  durch Multiplikation und kann durch eine Zahl  $f'(x_0) \in \mathbf{R}$  repräsentiert werden

$$Df|_{x_0}(x) = x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = x f'(x_0). \quad (\text{B.19})$$

*Beispiel B.5.* Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

dann ist die lineare Transformation  $Df|_{x_0}$  eine Form  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , die ihrerseits durch einen Vektor  $\nabla f|_{x_0} \in \mathbf{R}^n \cong \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ , den *Gradienten*, repräsentiert werden kann

$$Df|_{x_0}(x) = \sum_{i=1}^n [Df|_{x_0}]_i x_i = \sum_{i=1}^n \nabla_i f|_{x_0} x_i = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{x_0} x_i, \quad (\text{B.21})$$

bzw.

$$[Df|_{x_0}]_i = \nabla_i f|_{x_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_0}. \quad (\text{B.22})$$



*Beispiel B.6.* Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^m \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

dann kann die lineare Transformation  $Df|_{x_0}$  durch eine reelle  $m \times n$ -Matrix repräsentiert werden

$$\forall i = 1, \dots, m [Df|_{x_0}(x)]_i = \sum_{j=1}^n [Df|_{x_0}]_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Big|_{x_0} x_j, \quad (\text{B.24})$$

bzw.

$$[Df|_{x_0}]_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Big|_{x_0}. \quad (\text{B.25})$$

### B.3.1 Kettenregel

$$\phi : E \rightarrow F \quad (\text{B.26a})$$

$$\psi : F \rightarrow G \quad (\text{B.26b})$$

und

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi : E &\rightarrow G \\ x &\mapsto \psi(\phi(x)) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Dann

$$D(\psi \circ \phi) : E \rightarrow G \quad (\text{B.28a})$$

mit

$$D(\psi \circ \phi)|_x = D\psi|_{\phi(x)} \circ D\phi|_x \quad (\text{B.28b})$$

### B.3.2 Produktregel

Für eine bilineare Funktion

$$\begin{aligned} \phi : E \times F &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto \phi(x, y) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

gilt

$$\begin{aligned} D\phi|_{x_0, y_0} : E \times F &\rightarrow G \\ (\xi, \eta) &\mapsto D\phi|_{x_0, y_0}(\xi, \eta) = \phi(x_0, \eta) + \phi(\xi, y_0), \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

weil

$$\phi(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = \phi(x_0, y_0) + \phi(\xi, y_0) + \phi(x_0, \eta) + \phi(\xi, \eta). \quad (\text{B.31})$$

$$f : E \rightarrow E' \quad (\text{B.32a})$$

$$g : F \rightarrow F' \quad (\text{B.32b})$$

$$(f \times g) : E \times F \rightarrow E' \times F' \quad (\text{B.33})$$

$$(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$$

$$\Phi : E \times F \rightarrow G \quad (\text{B.34})$$

$$(x, y) \mapsto \phi(f(x), g(y))$$

oder

$$\Phi = \phi \circ (f \times g) \quad (\text{B.35})$$

also

$$D\Phi_{(x_0, y_0)} : E \times F \rightarrow G \quad (\text{B.36a})$$

mit

$$D\Phi|_{x_0, y_0}(x, y) = \phi|_{(f(x_0), g(x_0))}(Df|_{x_0}(x), Dg|_{y_0}(y))$$

$$= \phi(f(x_0), Dg|_{y_0}(y)) + \phi(Df|_{x_0}(x), g(y_0)). \quad (\text{B.36b})$$

Als kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Phi & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 E \times F & \xrightarrow{f \times g} & E' \times F' & \xrightarrow{\phi} & G \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & Df|_x \times Dg|_y & & D\phi|_{(x', y')} & \\
 & \nwarrow & & \swarrow & \\
 & & D\Phi|_{(x, y)} & & 
 \end{array} \quad (\text{B.37})$$

*Beispiel* B.7. Sei

$$E = E' = F = F' = G \quad (\text{B.38})$$

eine Banach-Algebra mit

$$\phi(x, y) = xy. \quad (\text{B.39})$$

Dann

$$\Phi(x) = f(x)g(x) \quad (\text{B.40})$$

und

$$D\Phi|_{x_0}(x) = f(x_0) Dg|_{x_0}(x) + Df|_{x_0}(x)g(x_0). \quad (\text{B.41})$$

*Beispiel* B.8. Sei

$$E = E' = F = F' = G = \mathbf{R}, \quad (\text{B.42})$$

dann wirkt  $Df$  per Multiplikation,  $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$  und (B.41) kann

$$D(fg) = f(Dg) + (Df)g \quad (\text{B.43})$$

geschrieben werden.

### B.3.3 „Vektoranalysis“

#### *Gradient*

$$\begin{aligned} \text{grad} : C^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) &\rightarrow C^{k-1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \\ f &\mapsto g = \text{grad } f \end{aligned} \quad (\text{B.44a})$$

mit

$$g_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad (\text{B.44b})$$

oder

$$\vec{g}(x) = \vec{\nabla} f(x). \quad (\text{B.44c})$$

Der Gradient kann durch die Frechet-Ableitung

$$Df|_x(v) = \sum_{i=1}^n v_i g_i(x) \quad (\text{B.45})$$

ausgedrückt werden.

#### *Divergenz*

$$\begin{aligned} \text{div} : C^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) &\rightarrow C^{k-1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \\ f &\mapsto \text{div } f \end{aligned} \quad (\text{B.46a})$$

mit

$$(\text{div } f)(x) = \vec{\nabla} \vec{f}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x). \quad (\text{B.46b})$$

### Rotation

Während der Gradient und die Divergenz in beliebigen Dimensionen definiert werden kann, ist die Rotation nur *drei* Dimensionen eine Abbildung von vektorwertigen Funktionen auf vektorwertigen Funktionen

$$\begin{aligned} \text{rot} : C^k(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3) &\rightarrow C^{k-1}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3) \\ f &\mapsto g = \text{rot } f \end{aligned} \quad (\text{B.47a})$$

mit

$$g_i(x) = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \quad (\text{B.47b})$$

oder

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}). \quad (\text{B.47c})$$

Die Verallgemeinerung auf beliebige Funktionen erfordert mehr Indices

$$\begin{aligned} \text{rot} : C^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) &\rightarrow C^{k-1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \otimes_A \mathbf{R}^n) \\ f &\mapsto g = \text{rot } f \end{aligned} \quad (\text{B.48a})$$

mit

$$g_{ij}(x) = -g_{ji}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x). \quad (\text{B.48b})$$

Den angemessene mathematische Rahmen dafür liefert die *äußere Ableitung* von *Differentialformen*.

—C—  
ABKÜRZUNGEN

**ELG** Euler-Lagrange Gleichung

**HJG** Hamilton-Jacobi-Gleichung

**LT** Lorentztransformation

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] GOLDSTEIN, H. ; POOLE, C.P. ; SAFKO, J.L.: *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002 <https://books.google.de/books?id=tJCuQgAACAAJ>. – ISBN 9780201657029
- [2] LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band 1: Mechanik*. Akademie-Verlag Berlin, 1984
- [3] TONG, David: *Lectures on Dynamics and Relativity*. Version: 2013. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/relativity.html>
- [4] TONG, David: *Lectures on Classical Dynamics*. Version: 2015. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics.html>
- [5] SCHECK, F.: *Theoretische Physik 1: Mechanik*. Springer Berlin Heidelberg, 2007 (Springer-Lehrbuch). <https://books.google.de/books?id=AwgjBAAQBAJ>. – ISBN 9783540713791
- [6] ARNOLD, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1978
- [7] THIRRING, W.: *Lehrbuch der Mathematischen Physik. Band 1: Klassische Dynamische Systeme*. Springer-Verlag, 1977
- [8] SUSSMAN, Gerald J. ; WISDOM, Jack: *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*. Cambridge, MA, USA : MIT Press, 2001. – ISBN 0-262-19455-4
- [9] FLANNERY, M. R.: The enigma of nonholonomic constraints. In: *American Journal of Physics* 73 (2005), 03, Nr. 3, 265-272. <https://doi.org/10.1119/1.1830501>
- [10] FLANNERY, M. R.: d'Alembert-Lagrange analytical dynamics for non-holonomic systems. In: *Journal of Mathematical Physics* 52 (2011), 03, Nr. 3, 032705. <https://doi.org/10.1063/1.3559128>

- [11] FLANNERY, M. R.: The elusive d'Alembert-Lagrange dynamics of non-holonomic systems. In: *American Journal of Physics* 79 (2011), 09, Nr. 9, 932-944. <https://doi.org/10.1119/1.3563538>
- [12] LEUTWYLER, H.: Why some tops tip. In: *European Journal of Physics* 15 (1994), 59. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/15/2/003>
- [13] DIEUDONNÉ, J.: *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, 1968

# INDEX

- Hamilton-Jacobi-Gleichung, 180  
äußere Ableitung, 211  
abgeschlossenen System, 65  
Ableitung, 207  
Anholonome, 37  
Banachraum, 206  
berühren einander, 206  
Bildmenge, 204  
Definitionsbereichs, 204  
Derivation, 161  
deterministisches Chaos, 198  
Differentialformen, 211  
differentiellen Wirkungsquerschnitt,  
103  
Drehimpuls, 44, 67  
Dschanibekow Effekt, 137  
effektive Potential, 45  
Eichtransformationen, 108  
Ereignisse, 200  
erhaltene Energie, 11  
Erhaltungsgrößen, 8  
Exzentrizität, 82  
Feldtheorie (Elektrodynamik), 2  
Figurenachse, 136  
Fixpunkte, 188  
Fluß, 168  
Funktion, 204  
Gradienten, 207  
Grenzzyklen, 189  
Gruppen, 49  
Hamilton'schen Prinzip, 27  
Hamilton'sches Vektorfeld, 159  
Hamiltonfunktion, 59, 156  
Hard Core Potential, 95  
Hauptträgheitsachsen, 132  
Hauptträgheitsmomente, 132  
holonom, 33  
in Involution stehen, 190  
inelastische Streuung, 97  
Inertialsysteme, 7  
infinitesimale Erzeugende, 51  
integrabel, 190  
Integrale, 8  
Integration, 15  
Intermediate Axis Theorem, 137  
Jelle's Integral, 145  
körperfestes, 130  
kanonisch, 151  
kanonische Transformation, 163  
kanonischen Gleichungen, 158  
kanonischen Vertauschungsrelationen, 183  
kommutatives Diagramm, 153  
Kommutator, 55  
konjugierte Impuls, 43  
konservativ, 11  
Kontakttransformation, 167  
Kontinuitätsgleichung, 172  
kovariant, 199  
Kraft, 7  
Lagrangefunktion, 27



- lichtartig, 200  
Lichtkegel, 200  
Liouville Theorem, 171  
  
Matrixelementen, 115  
mechanische Eichtransformation, 46  
  
Newton'schen Gesetze, 7  
nicht-holonome, 37  
Nutation, 143  
  
orthogonale, 52  
  
Phasenfluß, 20  
Phasenraum, 149  
Poissonklammer, 160  
Potential, 11  
potentielle Energie, 11  
Projektil, 97  
Punkttransformation, 167  
  
Quantenmechanik, 2  
  
raumartig, 200  
raumfestes, 130  
reduzierten Masse, 72  
Rheonome, 37  
  
Schrödingergleichung, 183  
semi-latus rectum, 84  
Skeloronome, 37  
speziellen Relativitätstheorie, 200  
Störungstheorie, 196  
starrer Körper, 130  
Statistischen Mechanik, 185  
Statistischen Physik (Thermodynamik), 2  
superintegrabel, 195  
Symmetrie, 46, 48  
symplektischen Form, 162  
Systems, 1  
  
Target, 97  
  
Tennis Racket Theorem, 137  
totalen Wirkungsquerschnitt, 103  
Trägheitsmoment, 37  
Trägheitstensor, 131  
Trajektorie, 5  
  
Urbildes, 204  
  
verallgemeinerte Koordinaten, 33, 203  
  
Verteilungsfunktion, 172  
Vierervektor, 200  
Virial, 186  
Virialsatz, 185  
  
Winkelgeschwindigkeit, 127  
Wirkung, 2  
Wirkungs- und Winkelvariablen, 178  
Wirkungsfunktional, 26  
  
zeitartig, 200  
Zeitordnungsoperator, 128  
Zentralkräfte, 70  
Zentripedalkraft, 40  
Zustand, 8  
Zustands, 1  
zyklisch, 43