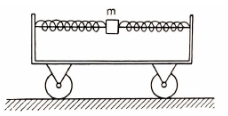
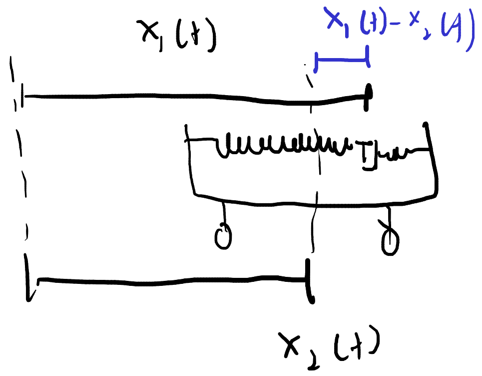
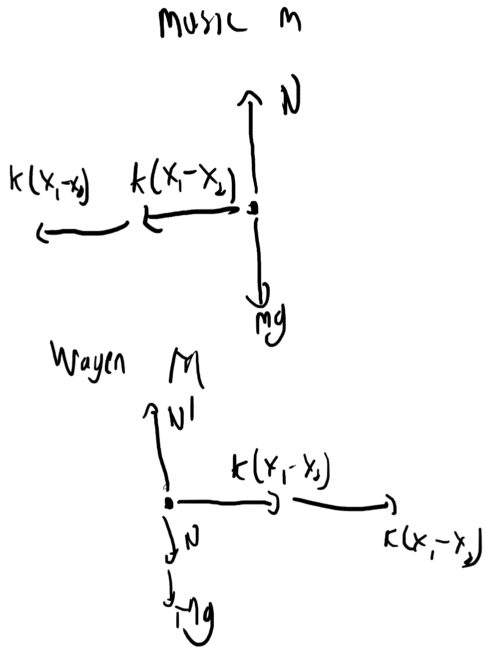
Aufgabe 9.4: *Schwingendes System* .... (3 Punkte)

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

Eine Masse m kann entlang einer masselosen Stange, die in einen Wagen der Masse M geklemmt ist, reibungsfrei gleiten. Die Masse ist mit zwei gleichen Federn der Federkonstante k mit dem Wagen verbunden (siehe Skizze). Nun wird die Masse um die Strecke l nach links aus der Ruhelage ausgelenkt und mit einem Seil am Wagen befestigt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil durchtrennt. Bestimmen Sie die Ortsfunktionen der Masse $x_1(t)$ und des Wagens $x_2(t)$ im Schwerpunktsystem. Vernachlässigen Sie die Massen der Federn und Reibungseffekte.







Newtonische Gesetze:

$$m\ddot{x}_1(t) = -2k(x_1 - x_2) \quad \text{----} \quad (1)$$

$$M\ddot{x}_2(t) = 2k(x_1 - x_2) \quad \text{----} \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{M} & -\frac{2k}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Definiere $M := \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{M} & -\frac{2k}{M} \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{2k}{m} - \lambda & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{M} & -\frac{2k}{M} - \lambda \end{vmatrix}$

$$= \left(\frac{2k}{m} + \lambda\right)\left(\frac{2k}{M} + \lambda\right) - \frac{4k^2}{mM}$$

$$= \frac{4k^2}{mM} + \lambda\left(\frac{2k}{m}+\frac{2k}{M}\right) + \lambda^2 - \frac{4k^2}{mM}$$

$$= \lambda\left[\lambda + 2k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right] = 0$$

$\lambda = 0$ oder $\lambda = -2k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$

Eigenvektoren: $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{M} & -\frac{2k}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{2k}{m}x + \frac{2k}{m}y = 0$$

$x = y$, ein Eigenvektor ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{2k}{m} \\ \frac{2k}{M} & -\frac{2k}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\cancel{2k}}{m}x + \frac{\cancel{2k}}{m}y = -\cancel{2k}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)x$$

$$-\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}y = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{M}x$$

$$\frac{1}{m}y = -\frac{1}{M}x$$

$$y = -\frac{m}{M}x$$

ein Eigenvektor ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind,

ist $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix} \right) = \mathbb{C}^2$. Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \xi_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \ddot{\xi}_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ddot{\xi}_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\xi}_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ddot{\xi}_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix} = M \left[\xi_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \xi_1(t)\,(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2(t) \left[-2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$$

$$= -2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \xi_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\xi}_1(t) = 0$$

$$\ddot{\xi}_2(t) = -2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \xi_2(t)$$

$$\int \ddot{\xi}_1 \, dt = \int 0 \, dt$$

$$\dot{\xi}_1 = v_{cm} \in \mathbb{R}$$

$$\int \dot{\xi} \, dt = \int v_{cm} \, dt$$

$$\xi_1 = R_0 + V_{cm} t$$

aus der Vorlesung

Für ξ_2, Lösungsansatz: $\xi_2 = A\cos(\omega t + \delta)$

$$\dot{\xi}_2 = -A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{\xi}_2 = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{\xi}_2(t) = -2k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\xi_2(t)$$

$$-A\omega^2\sin(\omega t + \delta) = -2k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = 2k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

$$\omega = \sqrt{2k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}$$

Insgesamt

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = (R_0 + V_{cm} t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A\cos(\omega t + \delta)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = v_{cm}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A\omega\sin(\omega t + \delta)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$$

Initialbedingungen

$$x_1(0) = R_0 + A\cos\delta = -l \quad ---- \; (1)$$

$$x_2(0) = R_0 - \frac{Am}{M}\cos\delta = 0 \quad ----- \; (2)$$

$$\dot{x}_1(0) = V_{cm} - A\sin\delta = 0 \quad ------ \; (3)$$

$$\dot{x}_2(0) = V_{cm} + \frac{Am}{M}\sin\delta = 0 \quad ----- \; (4)$$

(4) - (3): $$A\left(\frac{m}{M}+1\right)\sin\delta = 0$$

$A \neq 0$ (nichttriviale Lösung)

$\left(\frac{m}{M}+1\right) \neq 0$, da $m > 0,\ M > 0 \Rightarrow \frac{m}{M} > 0$

$\frac{m}{M}+1 > 0$, insbesondere $\frac{m}{M}+1 \neq 0$

$\sin\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$

(3) $\quad V_{cm} = 0$

$$R_0 + A = -l \quad ------ \; (5)$$

$$R_0 - \frac{Am}{M} = 0 \quad ------ \; (6)$$

(6): $$R_0 = \frac{Am}{M}$$

(5): $$\frac{Am}{M} + A = -l$$

$$A = -l\left(\frac{m}{M}+1\right)^{-1} = -l\left(\frac{m+M}{M}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{lM}{m+M}$$

$$R_0 = -\frac{lM}{m+M}\frac{m}{M} = -\frac{lm}{m+M}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{lm}{m+M}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{lM}{m+M}\cos(\omega t)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = -\frac{lm}{m+M} - \frac{lM}{m+M}\cos\left[\sqrt{2k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}\ t\right]$$

$$x_2(t) = -\frac{lm}{m+M} + \frac{lm}{m+M}\cos\left[\sqrt{2k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}\ t\right]$$