Wintersemester 2023/24 — 13.11.2023
Prof. Dr. Stephan Elsenhans — Benedikt Wolf

Lineare Algebra: Aufgabenblatt 05

5.1 Größter gemeinsamer Teiler — /30 Punkte

Es sei K ein Körper. Ferner seien $a, b \in K[t] \setminus \{0\}$ Polynome.
Wir definieren $r_0 := a$, $r_1 := b$ und definieren für $k \in \mathbb{N}$ q_k und r_{k+1} als die eindeutig bestimmten Polynome, die

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad \deg(r_{k+1}) < \deg(r_k)$$

erfüllen, falls $r_k \neq 0$ und ansonsten definieren wir $r_{k+1} = q_k = 0$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt ein minimales $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $r_k = 0$ für alle $k > k_0$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Mit dieser Wahl ist $r_{k_0} \neq 0$ und r_{k_0} ist ein gemeinsamer Teiler von a und b.

(c) Zeigen Sie: Ist $s \in K[t]$ ein gemeinsamer Teiler von a und b, dann ist s auch ein Teiler von r_{k_0}.

5.2 Vermischtes zu Polynomen — /30 Punkte

(a) Zeigen Sie: Ist K ein endlicher Körper, so gibt es ein Polynom $p \neq 0$, das alle $x \in K$ als Nullstelle hat. Folgern Sie daraus, dass die Abbildung $K[t] \to \mathrm{Abb}(K, K), f \mapsto (x \mapsto f(x))$ in diesem Fall *nicht* injektiv ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $p \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $0, 1, 2$ oder 3, das keine Nullstelle in K hat, dann hat von zwei Polynomen f, g mit $f \cdot g = p$ mindestens eines Grad 0.

(c) Bestimmen Sie mit dem vietaschen Nullstellensatz alle rationalen Nullstellen von

$$q = 99 \cdot t^3 - 63 \cdot t^2 - 44 \cdot t + 28 \in \mathbb{Q}[t].$$

(d) Beweisen Sie, dass das Polynom $t^8 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ keine rationalen Nullstellen hat.

(e) Es seien $f = (2+3i)X^7 - 5$ und $g = X^2 - 2i$ in $\mathbb{C}[X]$ gegeben. Bestimmen Sie wie im Existenzbeweis von Satz 2.4.26 die Polynome $q, r \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ und

$$f = q \cdot g + r$$

5.3 Vermischtes zu Vektorräumen — /20 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

(a) $\mathbb{R}$ wird mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(b) $\mathbb{Z}$ wird mit der gewöhnlichen Addition und der Multiplikation $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \overline{0} \cdot z = 0, \overline{1} \cdot z = z$ zu einem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum

(c) Der Ring $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ wird mit der Multiplikation $a \cdot (z, r) = (az, ar)$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) Der Ring $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ wird mit der Multiplikation $a \cdot (z, r) = (az, ar)$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(e) Jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum ist mit der entsprechend eingeschränkten Multiplikation auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

5.4 Endomorphismenring **/20 Punkte**

Es sei $(V, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $End(V)$ aller Homomorphismen von $V \to V$ bildet mit den Verknüpfungen

$$\oplus : End(V) \times End(V) \to End(V), f \oplus g := (V \to V, x \mapsto f(x) + g(x))$$

und $\circ$, der gewöhnlichen Hintereinanderausführung von Abbildungen, einen Ring mit 1.

(b) Enthält $End(V)$ einen Körper K, dann ist $(V, +)$ mit der skalaren Multiplikation $k \cdot v := k(v)$ ein K-Vektorraum.

Abgabetermin: **20.11.2023, 11:00 Uhr auf WueCampus**
Maximal 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Begründen Sie Ihre Behauptungen. Sofern nicht anders angegeben, dürfen Sie nur Aussagen verwenden, die in der Vorlesung oder in den Übungen bereits bewiesen wurden. $\sum$ **/100**

Lösungshinweise

Aufgabe 1:

(a) Was passiert mit den Graden?

(b) Lesen Sie die Folge rückwärts.

(c) Einen gemeinsamen Teiler von a und b, der jeden gemeinsamen Teiler von a und b als Teiler hat, nennt man auch den *größten gemeinsamen Teiler*.

Aufgabe 2:

(a) Das zeigt die Umkehrung von Folgerung 2.4.31

(b) ...

(c) ...

(d) ...

(e) Hinweis zur Notation: Die „formale Unbestimmte" ist in diesem Fall X. Der Bezeichner in den eckigen Klammern gibt den Namen der „formalen Unbestimmten" an, entsprechend gibt es auch die Ringe $\mathbb{Q}[Y]$, $\mathbb{Q}[X]$ usw.

Aufgabe 3:
...

Aufgabe 4:
Einen Homomorphismus $V \to V$ nennt man auch Gruppen-Endomorphismus, den hier definierten Ring bezeichnet man als Endomorphismenring.