Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 27, 2024)

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie

(a) Die Funktion

$$f : \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < 1\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ist beschränkt.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f \in H(U)$ nicht konstant. Dann ist die Funktion $z \to f(\overline{z})$ holomorph auf $U^* := \{z \in C | \overline{z} \in U\}$.

(c) Seien $f, g : K_1(0) \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Sei außerdem die Funktion

$$h : K_1(0) \to \mathbb{C}, \qquad h(z) = f(z) \cdot g(z)$$

holomorph. Dann ist auch f oder g holomorph auf $K_1(0)$.

(d) Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in H(G)$ mit $\operatorname{Re}(f(z)) = 1$ für alle $z \in G$. Dann ist f konstant.

Beweis. (a) Falsch. Man betrachte einfach $x \to -1$ (sogar eingeschränkt auf der reellen Achse). Da

$$\lim_{z \to -1} \frac{1}{1+z^2} = \infty,$$

ist f nicht beschränkt.

(b) Falsch. Beweis wie: $z \mapsto \overline{z}$ ist nicht differenzierbar.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f(\overline{z})) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 - iy) - f(x_0 - iy_0)}{iy_0} = i\frac{\partial f}{\partial y} = -f'(\overline{z_0}),$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

jedoch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f(\overline{z})) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x - iy_0) - f(x_0 - iy_0)}{x_0} = f'(\overline{z_0}).$$

Weil f nicht konstant ist, gibt es mindestens ein Punkt z_0, sodass $f'(\overline{z_0}) \neq 0$. Daher kann $f'(\overline{z_0})$ nicht immer gleich $-f'(\overline{z_0})$ sein, also $f(\overline{z})$ ist nicht differenzierbar.

(c) Falsch. Sei

$$f(z) = \begin{cases} 1 & z \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$g = \begin{cases} 0 & z \notin \mathbb{Q}^2 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

im Sinne, dass wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ sowie $\mathbb{Q}^2$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ idenfizieren. f und g sind dann in keinem Punkt differenzierbar, weil die in keinem Punkt stetig sind. Deren Produkt ist aber $f \cdot g = 0$, eine konstante Funktion, also differenzierbar.

(d) Wahr. Schreibe $f = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$. Es gilt $u = 1$. Es gilt auch die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad 0 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Da f holomorph ist, verwenden wir die Wirtinger-Ableitung

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Dann ist f konstant. 🎉

Aufgabe 2. (a) Es seien U, V offene Menge in $\mathbb{C}$ sowie $f : U \to V$ eine stetige und $g : V \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner sei $g'(w) \neq 0$ für alle $w \in V$ und es gelte $g(f(z)) = z$ für alle $z \in U$. Zeigen Sie, dass f holomorph auf U ist und $f'(z) = 1/(g'(f(z))$ für alle $z \in U$.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und nullstellenfrei. Zeigen Sie, dass aus $f^2 \in H(U)$ bereits $f \in H(U)$ folgt.

Beweis. (a) $g(f(z))$ ist differenzierbar. Insbesondere

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0}$$

existiert, da f stetig ist, und sogar

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z\to f(z_0)} \frac{g(z) - g(f(z_0))}{z - f(z_0)} = g'(f(z_0)).$$

D.h. der andere Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

existiert auch (f ist holomorph), und

$$1 = g'(f(z_0)) \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Die Behauptung folgt.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)^2 - f(z_0)^2}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))(f(z) + f(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right] [f(z) + f(z_0)] \end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} [f(z) + f(z_0)]$$

existiert, und zwar konvergiert der Limes gegen $2f(z_0) \neq 0$, weil f stetig ist, und auch weil $f(z_0) \neq 0$ ist (f ist nullstellenfrei). Das heißt, der Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)^2 - f(z_0)^2}{z - z_0} \frac{1}{f(z) + f(z_0)}$$

existiert auch.

Aufgabe 3. Es sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}.$$

Ferner sei $z_0 = 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion f ist in z_0 partiell differenzierbar.

(b) Die Funktion erfüllt in z_0 die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung.

(c) Es sei $t \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann besitzt f einen radialen Grenzwert in z_0, also es existiert folgender Grenzwert

$$\lim_{r\to 0, r>0} \frac{f(e^{it}r) - f(0)}{e^{it}r}.$$

(d) Die Funktion f ist in z_0 *nicht* complex differenzierbar. Begründen Sie außerdem, warum dies nicht im Widerspruch zu Korollar 2.10 steht.

Beweis. (a) Wir schreiben wie üblich $f = u + iv$ und idenfizieren

$$u = \frac{x^3y^2}{x^6+y^2} \qquad v = -\frac{x^4y}{x^6+y^2}$$

für $(x,y) \neq (0,0)$. Damit sind die partielle Ableitungen

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{v(x,0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{y\to 0} \frac{v(0,y)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Da alle 4 Ableitungen existieren, ist f partiell differenzierbar.

(b) Die Cauchy-Riemann Gleichungen sind erfüllt (man setze die Ausdrucke aus (a) ein)

(c)

$$f(e^{it}r) = \frac{(r\cos t)^3(r\sin t)(r\sin t - ir\cos t)}{r^6\cos^6 t + r^2\sin^2 t}.$$

Da $f(0) = 0$, ist

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \left| \frac{f(e^{it}r) - f(0)}{e^{it}r} \right| &= \lim_{r\to 0} \left| \frac{f(e^{it}r)}{e^{it}r} \right| \\
&= \lim_{r\to 0} \left| e^{-it} \frac{r^2 \cos^3 t \sin t (\sin t - i \cos t)}{r^4 \cos^6 t + \sin^2 t} \right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

(d) Wir betrachten das Weg parametrisiert durch $y = t^3$, $x = t$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(z(t))}{z(t)} &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3(t^3)(t^3 - it)}{t^6 + t^6} \frac{1}{t + it^3} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - i}{2(1 + it^2)} \\
&= -\frac{i}{2}
\end{aligned}$$

Aber wenn die Funktion holomorph wäre, wäre der Grenzwert gleich $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sein. Das dies offensichtlich nicht der Fall ist, ist die Funktion nicht holomorph.