Universität Würzburg Übungsblätter Bachelor Mathematische Physik

Jun Wei Tan

January 31, 2024

Contents

CHAPTER ONE

Lineare Algebra 1

1.1 Blatt 1

Definition 1.1. Sind $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0)$, so bezeichnet man die Menge $g := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$ als Gerade.

Satz 1.2. *Zu jeder Geraden gibt es $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, sodass die Gerade in der Form*

$$\{(c_1, c_2) + t(d_1, d_2) : t \in \mathbb{R}\}$$

geschrieben werden kann. Weiterhin ist obige Menge im Fall $(d_1, d_2) \neq (0,0)$ immer eine Gerade

Bemerkung 1.3. *Der Parameterform für Geraden und Ebenen ist in der Vorlesung bewiesen.*

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgende Aussage: Gegeben seien zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$ mit $p \neq q$. Dann gibt es genau eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $p \in g$ und $q \in g$. Diese ist gegeben durch $g_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1(q_2 - p_2) - x_2(q_1 - p_1) = p_1q_2 - p_2q_1\}$.

Beweis. Wir nutzen Def. 1.1. Weil p und q in der Gerade sind, können wir zwei Gleichungen schreiben...

$$a_1p_1 + a_2p_2 = b$$
$$a_1q_1 + a_2q_2 = b$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} a_1p_1 + a_2p_2 =& a_1q_1 + a_2q_2 \\ a_1(p_1 - q_1) =& a_2(q_2 - p_2) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} a_1 =& t \\ a_2 =& t\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} \end{aligned}$$

$$b = p_1 t + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t$$

Es ist klar, dass die gegebene Gerade eine Lösung zu die Gleichung ist, mit $t = q_2 - p_2$. Was passiert mit andere t? Sei $t = q_2 - p_2$ und $t' \in \mathbb{R}$. Vergleich dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 t + x_2 t \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1 t + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t \\ x_1 t' + x_2 t' \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1 t' + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t' \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die zweite Gleichung nur die erste Gleichung durch t'/t multipliziert ist. Deshalb habe die zwei Gleichungen die gleiche Lösungsmengen, dann sind die Gerade, die durch die Gleichungen definiert werden, auch gleich.

Wenn $q_1 = q_2$ dürfen wir die Lösungemenge nicht so schreiben. Aber wir können den Beweis wiederholen, aber mit a_2 als das freie Parameter. Es darf nicht, dass $(q_1 - p_1, q_2 - p_2) = (0, 0)$, weil $\vec{\mathbf{q}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ □

Aufgabe 2. In Beispiel 1.2.8 wurde der Schnitt von zwei Ebenen bestimmt. Er hatte eine ganz bestimmte Form, die wir für den Kontext dieser Aufgabe als Gerade bezeichnen wollen, formal:

Ist $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ und $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig, dann ist die Menge

$$\{(p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2, p_3 + t \cdot v_3) | t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade.

(a) Finden Sie zwei Ebenen, deren Schnitt die Gerade $g = \{(1 + 3t, 2 + t, 3 + 2t) | t \in \mathbb{R}\}$ ist. Erläutern Sie, wie Sie die Ebenen bestimmt haben und beweisen Sie anschließend, dass Ihr Ergebnis korrekt ist.

(b) Ist der Schnitt von zwei Ebenen immer eine Gerade? Wenn ja, begründen Sie das, wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(c) Zeigen Sie: Für den Schnitt einer Geraden g mit einer Ebene E gilt genau einer der folgenden drei Fälle:

- $g \cap E = \varnothing$
- $|g \cap E| = 1$
- $g \cap E = g$

Geben Sie für jeden der Fälle auch ein Geraden-Ebenen-Paar an, dessen Schnitt genau die angegebene Form hat.

Beweis. (a) Wir suchen zwei Ebenen, also 6 Vektoren $\vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{p}}_2, \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathbb{R}^3$, die zwei Ebenen durch

$$\begin{aligned}
E_1 =& \{\vec{\mathbf{p}}_1 + t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\
E_2 =& \{\vec{\mathbf{p}}_2 + t_1'\vec{\mathbf{v}}_1 + t_2'\vec{\mathbf{v}}_2 | t_1', t_2' \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

definieren. Einfachste wäre, wenn $p_1 = p_2 \in g$. Sei dann $p_1 = p_2 = (1,2,3)^T$. Wenn $\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1 = (3,1,2)^T$, ist es auch klar, dass der Schnitt g entschließt $(t_2 = t_2' = 0)$. Dann mussen wir $\vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2$ finden, für die gelten,

$$(t,t_2') \neq (0,0) \implies t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 \neq t_1' \underbrace{\vec{\mathbf{u}}_1}_{\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1} + t_2'\vec{\mathbf{v}}_2 \forall t_1, t_1' \in \mathbb{R},$$

also

$$\xi_1\vec{\mathbf{u}}_1 \neq t_2'\vec{\mathbf{v}}_2 - t_2\vec{\mathbf{u}}_2 \qquad (t_2, t_2') \neq (0,0), \forall \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = 0 : \vec{\mathbf{v}}_2 \neq k\vec{\mathbf{u}}_2 \qquad \forall k \in \mathbb{R} \\
&\xi_1 \neq 0 : \vec{\mathbf{u}}_1 \notin \operatorname{span}(\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_2)
\end{aligned}$$

Bemerkung 1.4. *Wir können uns einfach für solchen $\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_2$ entscheiden. Wir brauchen nur*

$$\langle \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2 \rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle = 0.$$

Aber weil das innere Produkt nicht in der Vorlesung nicht diskutiert worden ist, mussen wir es nicht systematisch finden.

Bemerkung 1.5. *Eigentlich braucht man keine spezielle Grunde, um $\vec{\mathbf{u}}_2$ und $\vec{\mathbf{v}}_2$ zu finden. Wenn man irgindeine normalisierte Vektoren aus einer Gleichverteilung auf $\mathbb{R}^3$ nimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die eine Lösung sind,* 1.

Daher entscheide ich mich ganz zufällig für zwei Vektoren...

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}_2 =& (1,0,0)^T \\
\vec{\mathbf{u}}_2 =& (0,1,0)^T
\end{aligned}$$

Der Schnitt von der Ebenen kann berechnet werden...

$$\begin{aligned}
\cancel{\vec{\mathbf{p}}} + t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 &= \cancel{\vec{\mathbf{p}}} + t_1'\vec{\mathbf{v}}_1 + t_2'\vec{\mathbf{v}}_2, \\
\xi_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 &= t_2'\vec{\mathbf{v}}_2.
\end{aligned}$$

Also

$$\xi_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_2' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ t_2 \\ t_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 1.6. *Hier ist es noch einmal klar, dass die einzige Lösung $\xi_1 = t_2 = t_2' = 0$ ist, weil $\det(\dots) \neq 0$. Aber wir mussen noch eine langere Beweis schreiben...*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

also die einzige Lösung ist $\xi_1 = t_2 = t_2' = 0 \implies t_2 = t_2' = 0, t_1 = t_2 \implies E_1 \cap E_2 = g$

(b) Nein.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

(c)

Satz 1.7. *Sei $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine Gerade g, wofür gilt $\vec{\mathbf{a}} \in g, \vec{\mathbf{b}} \in g$. Es kann als*

$$\vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}), t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

Beweis. Es ist klar, dass

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} &\in g \qquad (t = 0) \\ \vec{\mathbf{b}} &\in g \qquad (t = 1) \end{aligned}$$

Sei dann eine andere Gerade g', wofür gilt $\vec{\mathbf{a}} \in g'$ und $\vec{\mathbf{b}} \in g'$. g' kann als

$$\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}}, t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden, wobei $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$. Es existiert $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}} + t_1\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{a}} \\ \vec{\mathbf{u}} + t_2\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{u}} &= \vec{\mathbf{a}} - t_1\vec{\mathbf{v}} \\ \vec{\mathbf{a}} - t_1\vec{\mathbf{v}} + t_2\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{v}} &= \frac{1}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) \qquad t_1 \neq t_2 \text{ weil } \vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

Es gilt dann für g':

$$\begin{aligned}g' &= \{\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}} | t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\vec{\mathbf{a}} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) + \frac{t}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) | t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\vec{\mathbf{a}} + \left(\frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}\right)\left(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\right) | t \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Wenn man $t' = \frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}$ definiert, ist es dann klar, dass $g' = g$ □

Es ist klar, dass maximal eines der Fälle gelten kann. Wir nehmen an, dass die erste zwei Fälle nicht gelten. Dann gilt

$$|g \cap E| \geq 2.$$

Es gibt dann mindestens zwei Punkte in $g \cap E$. Es ist auch klar, dass die Verbindungsgerade zwische die beide Punkte g ist (Pr. 1)

Satz 1.8. *Sei $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in E$. Dann ist die Verbindungsgerade zwischen $\vec{\mathbf{v}}_1$ und $\vec{\mathbf{v}}_2$ auch in E.*

Beweis. Sei

$$E = \{\vec{\mathbf{p}}_1 + t_1\vec{\mathbf{u}} + t_2\vec{\mathbf{v}} | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Es wird angenommen, dass a_1, a_2, b_1, b_2 existiert, sodass

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_1 =& \vec{\mathbf{p}} + a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} \\ \vec{\mathbf{v}}_2 =& \vec{\mathbf{p}} + b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 = (b_1 - a_1)\vec{\mathbf{u}} + (b_2 - a_2)\vec{\mathbf{v}},$$

also

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_1 + t(\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1) =& \vec{\mathbf{p}} + a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} + t\left[(b_1 - a_1)\vec{\mathbf{u}} + (b_2 - a_2)\vec{\mathbf{v}}\right] \\ =& \vec{\mathbf{p}} + \left[a_1 + t(b_1 - a_1)\right]\vec{\mathbf{u}} + \left[a_2 + t(b_2 - a_2)\right]\vec{\mathbf{v}} \in E\end{aligned}$$

□

Deshalb ist $g \subseteq g \cap E$. Weil $g \cap E \subseteq g$, ist $g = g \cap E$

□

1.2 Blatt 2

Aufgabe 3. Gegeben sei die Relation $\sim\subseteq (\mathbb{R}^2\ \{0\}) \times (\mathbb{R}^2\ \{O\})$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn es eine Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, die 0, x und y enthält.

(a) Bestimmen Sie alle $y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mit $(0,1) \sim y$ bzw. $(1,0) \sim y$ und skizzieren Sie die beiden Mengen in einem geeigneten Koordinatensystem.

(b) Begründen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Bleibt $\sim$ auch dann eine Äquivalenzrelation, wenn man sie als Relation in $\mathbb{R}^2$ betrachtet?

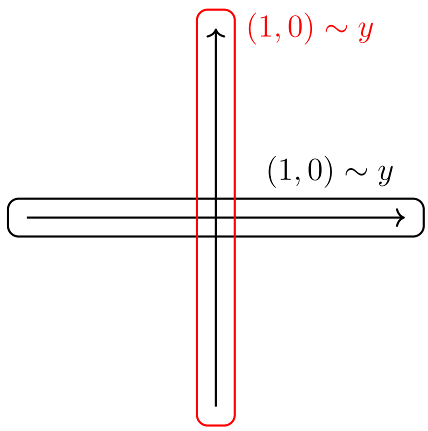
Beweis. (a) Eine Gerade hat den Form

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\right\}.$$

Weil $(0,0)$ in der Gerade ist, gilt $b = 0$. Für die zwei Fälle:

(i) $(0,1)$ ist in der Gerade. Es gilt dann $a_2 = 0, a_1 \in \mathbb{R}$. Die Gleichung der Gerade ist dann $x_1 = 0$, oder alle Punkte des Forms $(0,y), y \in \mathbb{R}$.

(ii) $(1,0)$ ist in der Gerade. Es gilt dann $a_1 = 0, a_2 \in \mathbb{R}$. Die Gerade enthält ähnlich alle Punkte des Forms $(x,0), x \in \mathbb{R}$.



(b) (i) $x \sim x$ (Reflexivität)

Es gibt immer eine Gerade zwischen 0 und x. Eine solche Gerade enthält x per Definition.

(ii) $x \sim y \iff y \sim x$ (Symmetrie)

Es gibt eine Gerade, die 0, x und y enthält. Deswegen gilt die beide Richtung der Implikationen.

(iii) $x \sim y$ und $y \sim z \implies x \sim z$ (Transitivität)
Es gibt eine Gerade zwischen $0, x$ und y, und eine Gerade zwischen $0, y$ und z. Weil die beide Geraden zwischen y geht, sind die Geraden gleich, und enthält x und z, daher $x \sim z$.

(c) Nein. $(1,0) \sim (0,0), (0,1) \sim (0,0)$, aber $(1,0) \sim (0,1)$ stimmt nicht. □

Aufgabe 4. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2)$, s die Spiegelung in $\mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Translation um $(1,0)$ und $em : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Einbettung.

(a) Bilden Sie die Verkettungen $f \circ em, em \circ f, s \circ f, T \circ s, s \circ T$ und $em \circ s$. Geben Sie dabei jeweils Argumentmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift an.

(b) Untersuchen Sie die Funktionen aus der vorherigen Teilaufgabe auf Surjektivität, Injektivität bzw. Bijektivität.

(c) Sei $F = em \circ T \circ s \circ f$. Bestimmen und skizzieren Sie das Bild bzw. Urbild von $[0,1] \times [-1,1] \times [0,2]$ unter F.

Beweis. (a) (i) $f \circ em$
Argumentmenge: $\mathbb{R}^2$
Zielmenge: $\mathbb{R}^2$
Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$

(ii) $em \cdot f$
Argumentmenge + Zielmenge: $\mathbb{R}^3$
Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, 0)$

(iii) $s \cdot f$
Argumentmenge: $\mathbb{R}^3$
Zielmenge: $\mathbb{R}^2$
Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_1)$

(iv) $em \circ s$
Argumentmenge: $\mathbb{R}^2$
Zielmenge: $\mathbb{R}^3$
Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1, 0)$

(b) (i) $f \circ em$
Surjektive, injektiv und auch bijektiv

(ii) $em \circ f$
Injektiv, aber nicht surjektiv (und deswegen nicht Bijektiv)

(iii) $s \circ f$
Surjektive, aber nicht injektiv

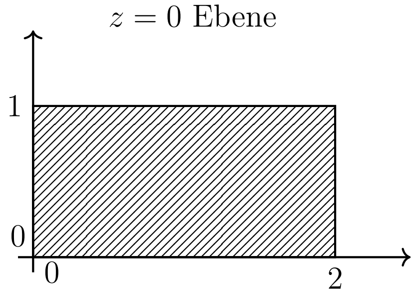
(iv) $em \circ s$

Injektiv, aber nicht surjektiv

(c)

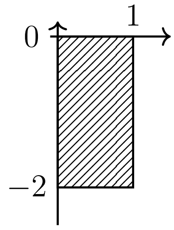
Bild: $[0,2] \times [0,1] \times \{0\}$

$z = 0$ Ebene



Urbild: $[0,1] \times [-2,0] \times \mathbb{R}$

$z = 0$ Ebene



□

Aufgabe 5. Es sei M eine beliebige, nichtleere Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Wir definieren induktiv $f^0 := id$ und für $k \in \mathbb{N} f^k := f \circ f^{k-1}$.

(a) Zeigen Sie: $f^{k+l} = f^k \circ f^l$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$

(b) Zeigen Sie: Gibt es $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $f^{k_0+l} = f^{k_0}$, dann gilt $f^{k+l} = f^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq k_0$.

(c) Geben Sie eine Funktion $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ an, für die $f^1 \neq f^3$, aber $f^{k+2} = f^k$ für alle $k \geq 2$ gilt. Begründen Sie, dass Ihre Funktion diese Eigenschaft hat.

Beweis. (a) Wir beweisen es per Induktion auf k. Für $k = 1$ gilt es per Definition (es wird in der Frage gegeben). Jetzt nehme an, dass es für ein beliebige $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)+l} =& f \circ f^{k+l} \\ =& f \circ f^k \circ f^l \\ =& (f \circ f^k) \circ f^l \\ =& f^{k+1} \circ f^l \end{aligned}$$

Deswegen gilt es auch für $k + 1$, und daher für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $k = k_0 + k'$. Es gilt

$$f^{k+l} = f^{k_0+k'+l} = f^{k_0} = f^{k_0+k'} = f^k.$$

(c) Sei f definiert durch

$$\begin{aligned} f(1) =& 1 \\ f(2) =& 1 \\ f(3) =& 2 \\ f(4) =& 1 \\ f(5) =& 4 \end{aligned}$$

Es gilt dann

x	$f^1(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$f^5(x)$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	4	1	1	1	1

$f^1 \neq f^3$, weil $f^1(3) \neq f^3(3)$. Aber $f^k(x) = 1 \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, k \geq 2$. Daher ist $f^{k+2} = f^k, k \geq 2$. □

Aufgabe 6. Es seien M, N Mengen, m, n natürliche Zahlen und die Abbildungen $f : M \to \{1, 2, 3, \dots, m\}, g : N \to \{1, 2, 3, \dots, n\}$ bijektiv. Finden Sie eine natürliche Zahl k und eine bijektive Abbildung $F : M \times N \to \{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Beweis. $k = nm$, und

$$F(a, b) = a + (b - 1)m.$$

Das ist bijektiv. Sei $x \in \{1, 2, \dots, nm\}$. Es existiert eindeutige Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, so dass

$$x = pm + q, q < m.$$

Falls $q = 0$, sei $b = p, a = m$. Sonst definiert man $b = p + 1, a = m$. Per Definition ist $a \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Außerdem ist $1 \leq b \leq n$, weil $p \leq k/m = n$ (n teilt $k = mn$). □

1.3 Blatt 3

Aufgabe 7. Entscheiden Sie zu jedem der folgenden Objekte, welche der Bezeichnungen aus Definition 2.3.3 darauf zutreffen

(a) $(\mathbb{R}, *, -2)$, wobei $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $a * b := a + b + 2$ definiert ist.

(b) $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$

(c) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, -, 0)$, wobei $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + (-\overline{b})$

(d) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, *, 4)$ mit $* : \mathbb{Z}\setminus\{0\} \times \mathbb{Z}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}, (a,b) \to ab^{-1}$

Beweis. (a) Eine abelsche Gruppe. Es ist assoziativ:

$$\begin{aligned} a * (b * c) =& a + (b + c + 2) + 2 \\ =& (a + b + 2) + c + 2 \\ =& (a * b) * c \end{aligned}$$

Es gilt auch $(-2) * x = (-2) + x + 2 = x$ und auch $x * (-2) = x$ für alle x, also $e = -2$ ist ein neutrales Element. Für jeder x gibt es auch $y = -(x+4) \in \mathbb{R}$, damit

$$y * x = -(x + 4) + x + 2 = -2 = e.$$

(b) Kommutatives Monoid. Per Definition ist 1 das neutrale Element, und für jeder $0 \neq x \in \mathbb{R}$ gibt es $1/x \in \mathbb{R}$, und $x\,(1/x) = 1$. Aber es existiert keine $x \in \mathbb{R}$, so dass $x0 = 1$.

(c) Magma. Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{a} - (\overline{b} - \overline{c}) =& \overline{a} + \left[-\left(\overline{b} - \overline{c}\right)\right] \\ =& \overline{a} + (-\overline{b}) + \overline{c} \\ (\overline{a} - \overline{b}) - \overline{c} =& \overline{a} + (-\overline{b}) + (-\overline{c}) \\ \neq& \overline{a} - (\overline{b} - \overline{c}) \end{aligned}$$

Deswegen ist $-$ nicht assoziativ.

(d) Nichts. $*$ ist keine Verknüpfung.

□

Aufgabe 8. Es sei $(M, \cdot)$ ein Magma, $(H, \odot)$ eine Halbgruppe und $\alpha : H \to M$ eine surjektive Abbildung, die die Bedingung $\alpha\,(a \odot b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b)$ für alle $a, b \in H$ erfüllt.

Zeigen Sie

(a) Dann ist auch M eine Halbgruppe.

(b) Ist H ein Monoid mit neutralem Element e, dann ist M ein Monoid mit neutralem Element $\alpha(e)$.

(c) Ist $(H, \odot, e)$ sogar eine Gruppe, dann ist $(M, \cdot, \alpha(e))$ eine Gruppe.

Beweis. (a) Sei $\beta, \gamma, \delta \in M$. Weil α surjektiv ist, gilt $\beta = \alpha(a), \gamma = \alpha(b), \delta = \alpha(c), a, b, c \in H$. Es gilt

$$\beta \cdot (\gamma \cdot \delta) = \alpha(a) \cdot (\alpha(b) \cdot \alpha(c))$$

$$
\begin{aligned}
&=\alpha(a)\cdot(\alpha(b\odot c))\\
&=\alpha\left(a\odot(b\odot c)\right)\\
&=\alpha\left((a\odot b)\odot c\right)\\
&=\alpha\left(a\odot b\right)\cdot\alpha(c)\\
&=\left(\alpha(a)\cdot\alpha(b)\right)\cdot\alpha(c)\\
&=(\beta\cdot\gamma)\cdot\delta
\end{aligned}
$$

(b) Sei $\beta\in M$. Noch einmal haben wir $\beta=\alpha(b), b\in H$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\beta\cdot\alpha(e) =&\alpha(b)\cdot\alpha(e)\\
=&\alpha(b\odot e)\\
=&\alpha(b)\\
=&\beta
\end{aligned}
$$

und ähnlich auch für $\alpha(e)\cdot\beta=\beta$.

(c) Wir müssen nur zeigen, dass es ein Inverse gibt. Sei $M\ni\beta=\alpha(a), a\in H$. Weil H eine Gruppe ist, existiert $a^{-1}\in H$, so dass $a\odot a^{-1}=e$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\beta\cdot\alpha\left(a^{-1}\right) =&\alpha(a)\cdot\alpha\left(a^{-1}\right)\\
=&\alpha\left(a\odot a^{-1}\right)\\
=&\alpha(e)
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 9. Wir wollen die folgende Verknüpfungstabelle so vervollständigen, dass $(\{\partial,\eta,L\},\odot,\eta)$ zu einer Gruppe wird.

$\odot$	∂	η	L
∂			
η			
L			

(a) Begründen Sie, dass es nur höchstens eine solche Verknüpfungstafel geben kann.

(b) Füllen Sie die Tafel so, dass eine Gruppe entsteht und begründen Sie, dass Sie die Verknüpfungs-tafel einer Gruppe gefunden haben.

Beweis. Notation: Ich schreibe ab statt $a\odot b$, für $a,b\in\{\partial,\eta,L\}$. Weil η das neutrale Element ist, muss die Verknüpfungstabelle so aussehen:

$\odot$	∂	η	L
∂		∂	
η	∂	η	L
L		L	

Wir brauchen Bedingungen, die mögliche Gruppe einzuschränken.

Lemma 1.9. *Sei G eine Gruppe, $x, y, z \in G$, und*

$$zx = zy.$$

Es gilt dann $x = y$

Beweis.

$$x = z^{-1}zx = z^{-1}zy = y.$$

□

Korollar 1.10. *In jeder Zeile und Spalte kommt jedes Element nur einmal vor.*

Leider ist es noch nicht genug, die Verknüpfungstabelle einzuschränken. Wir fangen deswegen an, und nehme an, dass $\partial^2 = L$ ist. Wir betrachten die erste Spalte und Zeile, und kommen zu die Schlussfolgerung, dass $\partial L = L\partial = \eta$.

$\odot$	∂	η	L
∂	η	∂	L
η	∂	η	L
L	L	L	

Hier gibt es ein Problem: $L\partial = L$, und auch $L\eta = L$. Daraus folgt $\partial = \eta$, ein Widerspruch. Wir nehmen jetzt an, $\partial^2 = L$. Man kann die Verknüpfungstabelle ausfüllen.

$\odot$	∂	η	L
∂	L	∂	η
η	∂	η	L
L	η	L	∂

Das ist die einzige Lösung (es gibt keine Möglichkeiten mehr). Die Gruppe ist $\cong C_3$. Man kann beachten, dass $\partial^2 = L, L^2 = \partial$. Per Definition ist es abgeschlossen. Es gilt auch

$$\partial^{-1} = \partial^2 = L$$

$$L^{-1} = L^2 = \partial$$

Jetzt beweisen wir Assoziativität. Wir betrachten

$$a(bc) \stackrel{?}{=} (ab)c, \qquad a, b, c \in \{\partial, \eta, L\}.$$

Im Fall, worin a, b oder c das neutrale Element η ist, folgt die Gleichung. Im Fall, worin nichts η ist, können wir $L = \partial^2$ einsetzen. Jetzt ist die Gleichung

$$\partial^x (\partial^y \partial^z) = (\partial^x \partial^y)\partial^z, \qquad x, y, z \in \{1, 2\},$$

was immer gilt, weil die beide Seite gleich ∂^{x+y+z} sind. Deswegen ist ⦿ assoziativ. □

Aufgabe 10. Wir definieren die drei Abbildungen $c_1, c_2, c_3 : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ durch die Abbildungsvorschriften

$$\begin{array}{llll} c_1(1) = 2 & c_1(2) = 1 & c_1(3) = 4 & c_1(4) = 3 \\ c_2(1) = 3 & c_2(2) = 4 & c_2(3) = 1 & c_2(4) = 2 \\ c_3(1) = 4 & c_3(2) = 3 & c_3(3) = 2 & c_3(4) = 1 \end{array}$$

Zeigen Sie: $U := \{\mathrm{id}, c_1, c_2, c_3\}$ ist eine Untergruppe von $S(\{1, 2, 3, 4\})$.

Beweis. Die folgende Aussagen können durch direkte Verkettung bewiesen werden:

$$\begin{aligned} c_1 \circ c_2 &= c_3 \\ c_2 \circ c_3 &= c_1 \\ c_3 \circ c_1 &= c_2 \\ c_1 \circ c_1 &= \mathrm{id} \\ c_2 \circ c_2 &= \mathrm{id} \\ c_3 \circ c_3 &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

Deswegen ist jede Elemente invertierbar. Es folgt daraus auch, dass U abgeschlossen ist. id ist natürlich das neutrale Element. □

Aufgabe 11. Es sei

$$\mathcal{L} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{ex existieren } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \text{ sodass für alle } x \in \mathbb{R} f(x) = ax + b\}.$$

(a) Zeigen Sie: $(\mathcal{L}, \circ, \mathrm{id})$ ist eine Gruppe, aber nicht abelsch.

(b) Wir definieren die Relation $\sim \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ durch die Festlegung $f \sim g$ genau dann, wenn $f(x) - f(0) = g(x) - g(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$.

Beweis. (a) Sei $f, g \in \mathcal{L}$, $f = ax + b, g = cx + d, a \neq 0 \neq c$. Es gilt

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) =& a(cx + d) + b \\ =& acx + ad + b\end{aligned}$$

Weil $a \neq 0 \neq 0$, gilt $ac \neq 0$. Deswegen gilt, für

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = acx + ad + b$$

$h \in \mathcal{L}$. $(\mathcal{L}, \circ, \mathrm{id})$ ist dann unter $\circ$ abgeschlossen. Die Verkettung von Abbildungen ist immer assoziativ. Sei jetzt $e \in \mathcal{L}$, $e(x) = 1x + 0 = x$. Es gilt dann

$$e \circ f = f \circ e = f,$$

also e ist ein neutrales Element. Sei $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. Weil $a \neq 0$, sind $1/a$ und b/a wohldefiniert, und $1/a \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) =& a\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) + b \\ =& x - b + b \\ =& x \\ \left(f^{-1} \circ f\right) =& \frac{1}{a}\left(ax + b\right) - \frac{b}{a} \\ =& x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \\ =& x\end{aligned}$$

Deswegen gilt $f \circ f^{-1} = e = f^{-1} \circ f$, also f^{-1} ist die Inverse von f. $\mathcal{L}$ ist dann eine Gruppe.

(b) (i) (Reflexivität) Es gilt

$$f(x) - f\left(0\right) = f(x) - f(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) (Symmetrie) Falls gilt

$$f(x) - f(0) = g(x) - g(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt auch

$$g(x) - g(0) - f(x) - f(0), x \in \mathbb{R}.$$

(iii) (Transitivität) Sei $f, g, h \in \mathcal{L}$, für die gilt

$$\begin{aligned}f \sim g &\iff f(x) - f(0) = g(x) - g(0), x \in \mathbb{R} \\ g \sim h &\iff g(x) - g(0) = h(x) - h(0), x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Es gilt, von die Transitivät der $=\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass

$$f(x) - f(0) = h(x) - h(0), x \in \mathbb{R},$$

also $f \sim h$

Ich vermute, dass die Äquivalenzklasse sind $f, g \in \mathcal{L}, f(x) = ax + b, g(x) = cx + d, a \neq 0 \neq c$, so dass

$$f \sim g \iff a = c.$$

Wir beweisen es: $f(0) = b, g(0) = d$, und daher $f(x) - f(0) - ax, g(x) - g(0) = cx$. Falls

$$ax = cx \forall x \in \mathbb{R},$$

muss $a = c$. Für $a \neq c$ gilt es, dass es mindestens ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, worauf $ax_0 \neq cx_0$. Deswegen sind die Äquivalenzklassen, für $f, g \in \mathcal{L}$, $f = ax + b, g = cx + d$

$$f \sim g \iff a = c. \qquad \square$$

1.4 Blatt 4

Aufgabe 12. Direktes Produkt

(a) Zeigen Sie: Sind $(G, *, e_G)$ und $(H, \star, e_H)$ Gruppen, dann ist auch $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$\odot\, (G \times H)\times(G \times H) \to G\times H, \qquad (g_1, h_1)\odot(g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 \star h_2)$$

und dem neutralen Element (e_G, e_H) eine Gruppe. Diese Gruppe nennt man auch das *direktes Produkt* von G und H.

(b) Zeigen Sie: Sind $(R, +, \cdot)$ und $(S, \star, *)$ Ringe, dann ist auch $R \times S$ mit den Verknüpfung $\oplus$ und $\odot$, definiert durch $(r_1, s_1) \oplus (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, s_1 \star s_2)$ bzw. $(r_1, s_1) \odot (r_2, s_2) := (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2)$ ein Ring.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann ist auch $K \times K$ mit den Verknüpfungen wie in (b) ein Körper.

Beweis. (a) (i) (Assoziativität)

$$\begin{aligned}(g_1, h_1) \odot ((g_2, h_2) \odot (g_3, h_3)) =& (g_1, h_1) \odot (g_2 * g_3, h_2 \star h_3)\\ =& (g_1 * (g_2 * g_3), h_1 \star (h_2 \star h_3))\\ =& ((g_1 * g_2) * g_3, (h_1 \star h_2) \star h_3)\\ =& (g_1 * g_2, h_1 \star h_2) \odot (g_3, h_3)\\ =& ((g_1, h_1) \odot (h_1, h_2)) \odot (g_3, h_3)\end{aligned}$$

(ii) (Neutrales Element)

$$(g_1, h_1) \odot (e_G, e_H) = (g_1, h_1) = (e_G, e_H) \odot (g_1, h_1).$$

(iii) (Existenz des Inverses) Sei $(g_1, h_1) \in G \times H$. Weil G und H gruppe sind, gibt es elemente $g_1^{-1} \in G, h_1^{-1} \in H$, sodass $g_1 * g_1^{-1} = e_G = g_1^{-1} * g_1$ und $h_1 \star h_1^{-1} = e_H = h_1^{-1} \star h_1$. Es gilt

$$(g_1, h_1) \odot (g_1^{-1}, h_1^{-1}) = (g_1 * g_1^{-1}, h_1 \star h_1^{-1}) = (e_G, e_H),$$

und ähnlich auch $(g_1^{-1}, h_1^{-1}) \odot (g_1, h_1) = (e_G, e_H)$

Schluss: $(G \times H, \odot, (e_G, e_H))$ ist eine Gruppe.

(b) (i) $(R \times S, \oplus, (0_R, 0_S))$ ist eine abelsche Gruppe.
Folgt aus (a).

(ii) $\oplus$ ist assoziativ:
Beweis läuft ähnlich zu (a), die Behauptung folgt aus die Assoziativität von $\cdot$ und $*$.

(iii) Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}(r_1, s_1) \odot ((r_2, s_2) \oplus (r_3, s_3)) =& (r_1, s_1) \odot (r_2 + r_3, s_2 \star s_3)\\ =& (r_1 \cdot (r_2 + r_3), s_1 * (s_2 \star s_3))\\ =& (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3, s_1 * s_2 \star s_1 * s_3)\\ =& (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2) \oplus (r_1 \cdot r_3, s_1 * s_3)\\ =& [(r_1, s_1) \odot (r_2, s_2)] \oplus [(r_1, s_1) \odot (r_3, s_3)]\end{aligned}$$

(c) Falsch. Sei $x, y \in K$ beliebige Elemente von K. Es ist klar, dass $(0, 0)$ das Nullelement ist, weil

$$(x, y) \oplus (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

Sei jetzt $x \neq 0 \neq y$. Es gilt

$$(x, 0) \odot (0, y) = (x \cdot 0, 0 \cdot y) = (0, 0),$$

also es gibt Nullteiler. □

Aufgabe 13. Zeigen Sie: In einem Ring $(R, +, \cdot)$ gilt genau dann die Kürzungsregel

> Falls $a \in R \setminus \{0\}$ und $x, y \in R$ beliebig sind, dann gilt $a \cdot x = a \cdot y \implies x = y$

wenn R nullteilerfrei ist.

Beweis. 1. R hat Nullteiler $\implies$ die Kürzungsregel gilt nicht.

Per Ausnahme gibt es $x \in R\setminus\{0\}$ mit Nullteiler $a \in R\setminus\{0\}$, also $a \cdot x = 0$. Es gilt auch, dass $a \cdot 0 = 0$, daher

$$a \cdot x = a \cdot 0 = 0.$$

Aber $x \neq 0$, und die Kürzungsregel gilt nicht.

2. R nullteilerfrei $\implies$ Kürzungsregel gilt.

Seien $a \in R\setminus\{0\}$ und $x, y \in R$ beliebig und

$$\begin{aligned} a \cdot x =& a \cdot y \\ a \cdot x + [-(a \cdot y)] =& a \cdot y + [-(a \cdot y)] \\ 0 =& a \cdot x - a \cdot y \\ =& a \cdot (x - y) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass entweder $a = 0$ oder $x - y = 0$. Weil wir schon ausgenommen haben, dass $a \neq 0$, gilt $x - y = 0$, oder $x = y$. □

Aufgabe 14. (Verknüpfungsverträglich) Es seien $(G, \cdot, e_G), (H, *, e_H)$ Gruppen und $\alpha : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie

(a) $U = \{u \in G | \alpha(u) = e_H\}$ ist eine Untergruppe von G.

(b) $\alpha(G)$ ist eine Untergruppe von H.

(c) Durch $a \sim b \iff ab^{-1}$ wird eine eine verknüpfungsverträgliche Äquivalenzrelation auf G definiert.

Beweis. (a) (i) Neutrales Element.

$\alpha(e_G) = e_H$, weil, für alle $x \in G$ gilt

$$\alpha(x) = \alpha(x \cdot e_G) = \alpha(x) * \alpha(e_G).$$

(ii) U ist abgeschlossen.

Sei $x, y \in U$, also $\alpha(x) = e_H = \alpha(y)$. Es gilt

$$\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) * \alpha(y) = e_H * e_H = e_H$$

also $x \cdot y \in U$.

(iii) Existenz des Inverses

Sei $x \in U$, und $x \cdot x^{-1} = e_G$. Es gilt

$$e_H = \alpha(e_G) = \alpha(x \cdot x^{-1}) = \alpha(x) * \alpha\left(x^{-1}\right) = e_H * \alpha\left(x^{-1}\right) = \alpha\left(x^{-1}\right),$$

also $x^{-1} \in U$.

(b) (a) Neutrales Element
$\alpha(e_G) = e_H$, der Beweis ist schon in (a) geschrieben.

(b) $\alpha(G)$ ist abgeschlossen.
Sei $\alpha(G) \ni y_1 = \alpha(x_1)$ bzw. $\alpha(G) \ni y_2 = \alpha(x_2)$, für $x_1, x_2 \in G$. Es gilt

$$y_1 * y_2 = \alpha(x_1) * \alpha(x_2) = \alpha(x_1 \cdot x_2) \in \alpha(G).$$

(c) Existenz des Inverses
Sei $\alpha(G) \ni y = \alpha(x)$. Sei auch $x^{-1} \in G$, sodass $x \cdot x^{-1} = e_G = x^{-1} \cdot x$. Es gilt

$$y * \alpha(x^{-1}) = \alpha(x) * \alpha(x^{-1}) = \alpha(x \cdot x^{-1}) = \alpha(e_G) = e_H,$$

also $\exists \alpha(x^{-1}) \in \alpha(G)$, für die gilt $y * \alpha(x^{-1}) = e_H = \alpha(x^{-1}) * y$.

(c) In (i) - (iii) beweisen wir, dass es eine Äquivalenzrelation ist. Dann beweisen wir, dass sie verknüpfungsverträglich ist. Sei im Beweis $x, y, z, w \in G$ beliebige Elemente.

(i) (Reflexivität) $x \sim x$, weil $x \cdot x^{-1} = e_G \in U$.

(ii) (Symmetrie) Sei $x \sim y$, also $xy^{-1} \in U$. Es gilt dann, $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}$. Weil U eine Gruppe ist, gilt $(xy^{-1})^{-1} \in U$, also $yx^{-1} \in U$. Daraus folgt $y \sim x$.

(iii) (Transitivität) Sei $x \sim y$ und $y \sim z$, also $x \cdot y^{-1} \in U$ und $y \cdot z^{-1} \in U$. Es folgt

$$x \cdot z^{-1} = \underbrace{x \cdot y^{-1}}_{\in U} \cdot \underbrace{y \cdot z^{-1}}_{\in U} \in U,$$

also $x \sim z$.

(iv) Sei $x \sim y$ und $z \sim w$, also $x \cdot y^{-1} \in U$ und $z \cdot w^{-1} \in U$. Wir möchten zeigen, dass $x \cdot z \sim y \cdot w$, also

$$x \cdot z \cdot (y \cdot w)^{-1} = x \cdot z \cdot w^{-1} \cdot y^{-1} \in U.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha(x \cdot z \cdot w^{-1} \cdot y^{-1}) &= \alpha(x) * \alpha(z \cdot w^{-1}) * \alpha(y^{-1}) \\ &= \alpha(x) * e_H * \alpha(y^{-1}) \\ &= \alpha(x \cdot y^{-1}) \\ &= e_H\end{aligned}$$

also $x \cdot z \sim y \cdot w$. □

Aufgabe 15. (Rechnen in verschiedenen Ringen)

(a) Bestimmen Sie das inverse Element von $\overline{6}$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ oder weisen Sie nach, dass es nicht existiert.

(b) Bestimmen Sie die Charakteristik von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, wobei die beiden Teile des Produktes als Ringe interpretiert werden und die Verknüpfung wie in 12(b) definiert wird.

(c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $z^2 + 2$ erfüllen.

(d) Berechnen Sie $(7+i)(6-i)^{-1}$ und geben Sie das Ergebnis ale komplexe Zahl gemäß Definition 2.4.14 an.

(e) Bestimmen Sie die Einerstelle von 27^{101}.

Beweis. (a) (i) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ $\overline{6} = \overline{2}$, und es gibt kein inverse Element.

$$\begin{aligned} \overline{2} \cdot \overline{0} &= \overline{0} \\ \overline{2} \cdot \overline{1} &= \overline{2} \\ \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} &= \overline{0} \\ \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6} &= \overline{2} \end{aligned}$$

(ii) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ $\overline{6} = \overline{1}$. Daher ist $\overline{6} = \overline{6}^{-1}$.

(iii) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ $\overline{6} \cdot \overline{6} = \overline{36} = \overline{1}$.

(iv) $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z})$ $\overline{6} \cdot \overline{6} = \overline{36} = \overline{1}$.

(b) Im Allgemein ist die Charakteristik von $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ das kleinste gemeinsame Vielfaches von a und b. Es gilt $n \cdot 1_{\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}}$, und auch $n \cdot 1_{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}}$. Für $\mathbb{N} \ni n < kgV(a,b)$ kann die beides gleichzeitig per Definition nicht gelten. Die Antworten folgen:

(i) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}))$ 15

(ii) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ 6

(c) $z^2 + 2 = 0, z^2 = -2$. Wir haben $|z|^2 = |2|$, und $|z| = \sqrt{2}$. Daraus folgt:

$$z = \pm\sqrt{2}i.$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{7+i}{6-i} &= \frac{(7+i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} \\ &= \frac{42+13i-1}{36+1} \\ &= \frac{41+13i}{37} \\ &= \left(\frac{41}{37}, \frac{13}{37}\right) \end{aligned}$$

(e) $27^{101} = (3^3)^{101} = 3^{303}$. Sei a die Einerstells von 3^{303}. Es gilt

$$3^{303} \equiv a \pmod{10}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} 3^1 = 3 \equiv& 3 \pmod{10} \\ 3^2 = 9 \equiv& 9 \pmod{10} \\ 3^3 = 27 \equiv& 7 \pmod{10} \\ 3^4 \equiv& 1 \pmod{10} \\ 3^5 \equiv& 3 \pmod{10} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 3^{303} =& 3^{4\times 75+3} \\ \equiv& 3^3 \pmod{10} \\ \equiv& 7 \pmod{10} \end{aligned}$$

also die Einerstelle von 27^{101} ist 7. □

Aufgabe 16. Wir können analog zur Konstruktion komplexer Zahlen vorgehen, um aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ größere Ringe zu konstruieren, d.h. für festes $n \in N$ definieren wir auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Addition $\oplus$ bzw. Multiplikation $\odot$ durch

$$(a_1, b_2) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

bzw.

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

für alle $(a_1, b_2), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Entscheiden Sie, für welche $n \in \{2, 3, 4\}$ mit dieser Konstruktion ein Körper entsteht.

Beweis. $(n = 2)$ Es ist kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist.

$$(\overline{1}, \overline{1}) \odot (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{2}) = (\overline{0}, \overline{0}).$$

$(n = 3)$ Es ist ein Körper. Wir wissen, weil 3 ein Primzahl ist, dass $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ein Körper ist. Wir vermuten, dass das inverse Element

$$(a, b)^{-1} = \left(a\left(a^2 + b^2\right)^{-1}, -b\left(a^2 + b^2\right)^{-1}\right),$$

was wohldefiniert ist, weil $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ein Körper ist. Wir wissen (und werde benutzen), dass multiplikation in der ganzen Zahlen kommutativ ist. Es folgt

$$(a, b) \odot (a, b)^{-1} = \left(a^2\left(a^2 + b^2\right)^{-1} - b^2\left(a^2 + b^2\right)^{-1}, 0\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\left(a^2+b^2\right) \left(a^2+b^2\right)^{-1}, 1 \right) \\
&= (1,0)\,,
\end{aligned}
$$

was das neutrale Element ist (beweis gleich wie der Beweis bzgl. $\mathbb{C}$).

$(n = 4)$ Es ist noch einmal kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist.

$$(\overline{2},\overline{2}) \odot (\overline{2},\overline{2}) = (\overline{0},\overline{4}+\overline{4}) = (\overline{0},\overline{0}).$$ □

1.5 Blatt 5

Aufgabe 17. Es sei K ein Körper. Ferner seien $a, b \in K[t] \setminus \{0\}$ Polynome.

Wir definieren $r_0 := a, r_1 := b$ und definieren für $k \in \mathbb{N}$ q_k und r_{k+1} als Polynome, die

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \qquad \deg(r_{k+1}) < \deg(r_k)$$

erfüllen, falls $r_k \neq 0$ und ansonsten definieren wir $r_{k+1} = r_k = 0$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt ein minimales $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $r_k = 0$ für alle $k > k_0$.

(b) Zegen Sie: Mit dieser Wahl ist $r_{k_0} \neq 0$ und r_{k_0} ist ein gemeinsamer Teiler von a und b.

(c) Zeigen Sie: Ist $s \in K[t]$ ein gemeinsamer Teiler von a und b, dann ist s auch ein Teiler von r_{k_0}.

Beweis. (a) Es gilt $\deg(r_k) < \deg(r_k)$, also die Folge $\deg(r_k)$ ist streng monoton fallend. Weil es nur endliche Möglichkeiten k für die Grad eines Polynomes mit $k < \deg(b)$ gibt, muss es ein Zahl k_0' geben, mit $\deg(r_{k_0'}) = -\infty$.

(Die Möglichkeiten sind $\{-\infty, 0, 1, \ldots, \deg(b)\}$.)

$\deg(r_{k_0}) = -\infty$ genau dann, wenn $r_{k_0} = 0$. Es folgt per Definition, $r_{k_0+1} = 0$ und $r_k = 0 \ \forall k \geq k_0$ per Induktion.

Weil $\{0, 1, \ldots, k_0'\}$ endlich ist, gibt es ein minimales Zahl k_0 mit die gewünsche Eigenschaft.

(b) Mit dieser Wahl ist $r_{k_0} \neq 0$.

Sonst wäre es ein Widerspruch, weil k_0 nicht die kleinste Zahl mit diese Eigenschaft wäre. Falls $r_{k_0} = 0$, wäre $k_0 - 1$ eine kleine Zahl mit die gewünschte Eigenschaft.

(i) Wir beweisen zuerst die folgende Behauptung:

> Sei p ein gemeinsamer Teiler von r_k und r_{k+1}. Dann ist p auch ein gemeinsamer Teiler von r_k und r_{k-1}.

Per Definition teilt p r_k. Wir wissen auch, dass

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}.$$

Weil p teilt r_k, teilt p $q_k r_k$ auch. Da p teilt auch r_{k+1}, teilt p $q_k r_k + r_{k+1}$, also p teilt r_{k-1}. Dann ist p ein gemeinsamer Teiler von r_k und r_{k-1}.

(ii) Sei p ein gemeinsamer Teiler von r_{k-1} und $r_k, k \leq k_0$. Dann ist p auch ein gemeinsamer Teiler von a und b.

Wir beweisen es per Induktion. Für $k = 1$ ist es klar, dass alle gemeinsamer Teiler von a und b auch gemeinsamer Teiler von a und b sind.

Jetzt nehmen wir an, dass es für eine beliebige $\mathbb{N} \ni k < k_0$ gilt, dass alle gemeinsamer Teiler von r_k und r_{k-1} auch gemeinsamer Teiler von a und b sind.

Jetzt betrachten wir r_k und r_{k+1}. Sei p ein gemeinsamer Teiler von r_k und r_{k+1}. Aus (i) folgt, dass p auch ein Teiler von r_k und r_{k-1} ist. Per Induktionvoraussetzung ist p auch ein gemeinsamer Teiler von a und b.

(iii) Insbesondere gilt, dass alle gemeinsamer Teiler p von r_{k_0} und r_{k_0-1} auch gemeinsamer Teiler von a und b sind.

(iv) In (a) haben wir schon bewiesen, dass r_{k_0} ein Teiler von r_{k_0-1} ist. Daraus folgt, dass r_{k_0} ein gemeinsamer Teiler von r_{k_0} und r_{k_0-1} ist. Es folgt, dass r_{k_0} ein gemeinsamer Teiler von a und b ist.

(c) Der Beweis läuft ähnlich:

(i) Wir beweisen per Induktion:

> Sei p ein gemeinsamer Teiler von a und b. p ist dann ein gemeinsamer Teiler von r_k und r_{k-1} für alle $k \in \{0, 1, \ldots, k_0\}$.

(ii) Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass es für beliebige $\mathbb{N} \ni k \leq k_0 - 1$, dass alle gemeinsamer Teiler von a und b auch gemeinsamer Teiler von r_k und r_{k-1} sind.

(iii) Wir betrachten p, was ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, also per Induktionsvoraussetzung ist p ein gemeinsamer Teiler von r_k und r_{k-1}.

Es gilt $r_{k+1} = r_{k-1} - q_k r_k$, also weil p r_k teilt, teilt p $q_k r_k$. Es folgt, dass p teilt $r_{k-1} - q_k r_k$, und p teilt r_{k+1}. Also p ist ein gemeinsamer Teiler von r_{k+1} und r_k.

Insbesondere gilt, dass wenn $s \in K[t]$ ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, ist s ein gemeinsamer Teiler von r_{k_0} und r_{k_0-1}, also s ist ein Teiler von r_{k_0}. □

Aufgabe 18. (a) Zeigen Sie: Ist K ein endlicher Körper, so gibt es ein Polynom $p \neq 0$, das alle $x \in K$ als Nullstelle hat. Folgern Sie daraus, dass die Abbildung $K[t] \to \mathrm{Abb}(K, K), f \to (x \to f(x))$ in diesem Fall nicht injektiv ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $p \in K[t]$ ein Polynom vom Grad 0, 1, 2 oder 3, das keine Nullstelle in K hat, dann hat von zwei Polynomen f, g mit $f \cdot g = p$ mindestens eines Grad 0.

(c) Bestimmen Sie mit dem vietaschen Nullstellensatz alle rationalen Nullstellen von

$$q = 99 \cdot t^3 - 63 \cdot t^2 - 44 \cdot t + 28 \in \mathbb{Q}[t].$$

(d) Beweisen Sie, dass das Polynom $t^8 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ keine rationalen Nullstellen hat.

(e) Es seien $f = (2 + 3i)X^7 - 5$ und $g = X^2 - 2i$ in $\mathbb{C}[X]$ gegeben. Bestimmen Sie wie im Existenzbeweis von Satz 2.4.26 die Polynome $q, r \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ und

$$f = q \cdot g + r.$$

Beweis. (a) Wir beweisen es konstruktiv. Sei $p = \prod_{r \in K}(x - r)$. Es gilt, für alle $x \in K$, dass $x - x = 0$, also $p(x) = 0$. Aber $p \neq 0$, z.B. ist das Koeffizient $a_n = 1$, wobei $n = |K|$.

Wir wissen, dass die Abbildung das konstruierte Polynom auf die Nullfunktion abbildet. Aber die Abbildung bildet auch das Nullpolynom auf die Nullfunktion ab. Also wir haben $K[t] \ni 0 \neq p \in K[t]$, aber die Abbildung bildet 0 und p auf die gleiche Funktion, also es ist nicht injektiv.

(b) Es gilt

$$\deg(p) = \deg(f) + \deg(g),$$

also es gibt nur zwei Möglichkeiten für $\deg(f)$ und $\deg(g)$: Entweder haben wir $0 + 3 = 3$ oder $1 + 2 = 3$.

Sei $\deg(f) = 1$ und $\mathrm{def}(g) = 2$, mit $p = f \cdot g$. Per Definition ist $f(t) = a_0 + a_1 t, a_0, a_1 \in K$. Sei $t = -a_1^{-1} a_0 \in K$. Es gilt $\tilde{f}(t) = a_0 - a_1 a_1^{-1} a_0 = 0$, also t ist eine Nullstelle von f.

Es folgt daraus, dass t ist eine Nullstelle von p, ein Widerspruch zu die Annahme, dass p keine Nullstellen hat.

Jetzt bleibt nur eine Möglichkeit, dass von f, g mindestens eines (eigentlich genau eine) Grad 0 hat.

(c) Für alle rationale Nullstellen $a/b, a \in \mathbb{N} \cup \{0\}, b \in \mathbb{Z}$, a, b teilerfremd gilt

$$a|28 \qquad b|99.$$

Weil $28 = 2^2 \times 7$ und $99 = 3^2 \times 11$, sind die Möglichkeiten dafür:

$$a \in \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$
$$b \in \{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$$

Man kann alle 36 Kominationen probieren, die rationale Nullstellen sind:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}, \qquad \lambda_2 = \frac{7}{11}, \qquad \lambda_3 = \frac{2}{3}.$$

(d) Wir verwenden Satz 2.4.37. Sei $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ teilerfremd, eine Nullstelle von $t^8 - 2$. Dann gilt

$$p| - 2 \qquad q|1,$$

also $q = 1$ und $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, dann $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aber für keine mögliche x gilt $x^8 - 2 = 0$, also $t^8 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ hat keine rationale Nullstellen.

(e)

$$\begin{aligned}(2+3i)X^7 - 5 =& (X^2 - 2i)((2+3i)X^5 - (6-4i)X^3 \\ & - (8+12i)X) + \underbrace{(24-16i)X - 5}_{r}.\end{aligned}$$ □

Aufgabe 19. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

(a) $\mathbb{R}$ wird mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(b) $\mathbb{Z}$ wird mit der gewöhnlichen Addition und der Multiplikation $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \overline{0} \cdot z = 0, \overline{1} \cdot z = z$ zu einem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum.

(c) Der Ring $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ wird mit der Multiplikation $a \cdot (z, r) = (az, ar)$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) Der Ring $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ wird mit der Multiplikation $a \cdot (z, r) = (az, ar)$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(e) Jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum ist mit der entsprechend eingeschränkten Multiplikation auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis. (a) Wahr. Wir wissen, dass $(\mathbb{R}, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist.

Die andere Gruppenaxiome folgen aus die analoge Axiome für Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$, wenn man $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ als Unterring von $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ betrachtet.

(b) Falsch. Das Distributivgesetz wird verletzt. Sei $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ und daher $a + a \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} a + a =& \overline{1} \cdot a + \overline{1} \cdot a \\ \neq& (\overline{1} + \overline{1})a \\ =& \overline{0} \cdot a \\ =& 0 \end{aligned}$$

(c) Wahr. Es folgt ähnlich zu (a):

Wir haben $+, \cdot : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wir wissen, dass $(\mathbb{R}, +|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}, \cdot|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}, 0, 1)$ ein Unterring ist. Daraus folgt, dass $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mit der Multiplikation $a \cdot (z, r) = (az, ar)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(d) Falsch. Es gilt, z.B. $(1, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{C}$, aber

$$i \cdot (1, 1) = (i, i) \notin \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

□

Aufgabe 20. Es sei $(V, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\operatorname{End}(V)$ aller Homomorphismen von $V \to V$ bildet mit den Verknüpfungen

$$\oplus : \operatorname{End}(V)\times\operatorname{End}(V) \to \operatorname{End}(V), f\oplus g := (V \to V, x \to f(x)+g(x))$$

und $\circ$ der gewöhnlichen Hintereinanderausführung von Abbildungen, einen Ring mit 1.

(b) Enthält $\operatorname{End}(V)$ einen Körper K, dann ist $(V, +)$ mit der skalaren Multiplikation $k \cdot v := k(v)$ ein K-Vektorraum.

Beweis. (a) (i) Wir wissen, weil $(V, +)$ abelsch ist, dass $(\operatorname{End}(V), \oplus)$ auch eine abelsche Gruppe ist.

(ii) Wir wissen auch, dass Verkettung von Funktionen assoziativ ist.

(iii) Distributivgesetz: Sei $f, g, h \in \operatorname{End}(V)$. Es gilt, für beliebige $x \in V$,

$$\begin{aligned} [f \circ (g \oplus h)] (x) =& f(g(x) + h(x)) \\ =& f(g(x)) + f(h(x)) && f \text{ ist ein Homomorphismus} \\ =& (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) \\ =& [(f \circ g) \oplus (f \circ h)] (x) \end{aligned}$$

Weil x beliebig war, ist $f \circ (g \oplus h) = (f \circ g) \oplus (f \circ h)$

(iv) Sei $1 \in \mathrm{End}(V), x \to x$. Sei außerdem $f \in \mathrm{End}(V)$, und $x \in V$ beliebig. Es gilt

$$f \circ 1 = 1 \circ f = f,$$

also $\mathrm{End}(V)$ ist ein Ring mit 1.

(b) V ist eine abelsche Gruppe (das haben wir vorausgesetzt). Wir müssen nur die andere Axiome betrachten. In folgendes Sei $\lambda, \mu \in K$ beliebiger Elemente von der Körper und $v, w \in V$. Weil K ein Körper ist, enthält K 1.

(i) $(\lambda \oplus \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ folgt per Definition von $\oplus$.

(ii) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$ gilt, weil λ ein Homomorphismus ist.

(iii)

$$\begin{aligned}(\lambda \circ \mu) \cdot v =& \lambda(\mu(v)) \\ =& \lambda \cdot (\mu \cdot v)\end{aligned}$$

(iv) Es gilt $1 \cdot v = 1(v) = v$ per Definition von 1. □

1.6 Blatt 6

Aufgabe 21. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum des jeweils angegebenen Vektorraums sind.

(a) $\{p \in \mathbb{R}[t] | \deg(p) \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}[t]$.

(b) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(c) $B = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) $\{p \in \mathbb{Q}[t] | \forall a \in \mathbb{Q} : \tilde{p}(-a) = \tilde{p}(a)\}$, wobei $\tilde{p}$ die zu p gehörige Polynomfunktion bezeichnet, als Teilmenge von $\mathbb{Q}[t]$.

(e) $\{(1, 2, 3) + t \cdot (4, 5, 6) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Beweis. (a) Ja. Sei $p_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$ und $p_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$. Es gilt

$$\begin{aligned}p_1 + p_2 =& (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t \\ &+ (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 + b_3)t^3 + (a_4 + b_4)t^3\end{aligned}$$

was auch ein Polynom mit Grad ≤ 4 ist.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$xp_1 = xa_0 + xa_1 t + xa_2 t^2 + xa_3 t^3 + xa_4 t^4,$$

noch ein Polynom mit Grad ≤ 4.

(b) Nein. Es ist sogar kein Vektorraum, weil $0 \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

(c) Nein. Sei $z \in B$ mit $|z| = a < 1$. Dann ist

$$\left|\frac{1}{a^2}z\right| = \frac{1}{a^2}|z| = \frac{1}{a} > 1,$$

also B ist nicht unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

(d) Ja. Sei p_1, p_2 beliebige Elemente von der Menge, und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt $p_1 \tilde{+} p_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$, und per Definition

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1(a) =&\tilde{p}_1(-a)\\ \tilde{p}_2(a) =&\tilde{p}_2(-a)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$p_1 \tilde{+} p_2(a) = \tilde{p}_1(a) + \tilde{p}_2(a) = \tilde{p}_1(-a) + \tilde{p}_2(-a) = p_1 \tilde{+} p_2(-a).$$

Außerdem ist $x\tilde{p}_1 = x\tilde{p}_1$, und

$$x\tilde{p}_1(a) = x\tilde{p}_1(a) = x\tilde{p}_1(-a) = x\tilde{p}_1(-a).$$

(e) Nein. Wir wissen, dass $(1, 2, 3)$ ein Element von unserer Menge ist. Dann sollte $2(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$ auch ein Element sein. Wir würden dann schreiben

$$(1, 2, 3) + t(4, 5, 6) = (2, 4, 6),$$

also

$$t(4, 5, 6) = (1, 2, 3).$$

Aus $6t = 3$ haben wir $t = \frac{1}{2}$. Dann ist $5t = \frac{5}{2} \neq 2$, ein Widerspruch, also es ist kein Untervektorraum. □

Aufgabe 22. Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien im jeweiligen Vektorraum linear unabhängig sind

(a) $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $((1, i), (i, -1))$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$.

(c) $((1, i), (i, -1))$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$.

(d) $(1, 1 + t, 1 + t + t^2)$ im $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$.

(e) $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Beweis. (a) Nein, weil

$$(1, 2, 3) + (5, 4, 3) + (-1)(6, 6, 6) = 0.$$

(b) Ja. Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$a(1, i) + b(i, -1) = (a + bi, ai - b).$$

Wir würden $a + bi = 0$ und $ai - b = 0$. Aber wir wissen, dass das nur möglich ist, wenn $a = b = 0$, also $(1, i)$ und $(i, -1)$ sind linear unabhängig.

(c) Nein, weil

$$i(1, i) + (-1)(i, -1) = (i, -1) - (i, -1) = 0,$$

und wir haben $i \neq 0$.

(d) Ja. Sei $a, b, c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sodass

$$a(1 + t + t^2) + b(1 + t) + c(1) = at^2 + (a + b)t + (a + b + c) = 0.$$

Per Defintion der Nullpolynom gilt $a = 0$. Dann ist $b + a = 0$, oder $b = 0$. Zuletzt gilt $a + b + c = 0$, also $c = 0$ weil $a = b = 0$.

(e) Ja. Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $a(1, 2, 3) + b(5, 4, 3) + c(6, 6, 7) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} -6c =& a + 5b \\ -6c =& 2a + 4b \\ -7c =& 3a + 3b \end{aligned}$$

Aus den zweiten und ersten Gleichungen folgt

$$a + 5b = 2a + 4b,$$

also $a = b$. Aus der ersten oder zweiten Gleichung folgt $c = -a$. Aus der dritten Gleichung folgt

$$-7(-a) = 7a = 3a + 3b = 6a.$$

Weil $7a = 6a$ muss $a = 0$ sein. Dann ist $b = c = 0$. Also die Vektoren sind linear unabhängig. $\square$

Aufgabe 23. Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums sind

(a) $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $(\exp it)_{t \in \mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) $(1 + t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(d) $(\tilde{p})_{p \in \mathbb{R}[t]}$ für den Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(e) $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Beweis. (a) Nein. Wir betrachten $(6,6,5)$. Wir hoffen, dass es als Summe

$$(6,6,5) = a(1,2,3) + b(5,4,3) + c(6,6,6)$$

dargestellt werden kann, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$. Weil $(6,6,6)$ als linear Kombination der anderen 2 Vektoren geschrieben werden kann, können wir oBdA schreiben

$$(6,6,5) = a'(1,2,3) + b'(5,4,3) + (6,6,6),$$

oder einfach

$$(0,0,-1) = a'(1,2,3) + b'(5,4,3).$$

wobei $a', b' \in \mathbb{R}$. Dann ist $a' + 5b' = 0$, oder $a = -5b'$. Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 =& 2a' + 4b' \\ =& 2(-5b') + 4b' \\ =& -6b' \end{aligned}$$

also $b' = 0$. Daraus folgt $a' = 0$. Aber

$$0(1,2,3) + 0(5,4,3) = (0,0,0) \neq (0,0,-1).$$

(b) Nein. Wir können komplexe Zahlen mit nicht rationale Winkel nicht erreichen.

(c) Ja. Sei $v_n = 1 + t^n$ $n \in \mathbb{N}_0$ der Erzeugendensystem. Es ist $v_0 = 1 + 1 = 2$. Dann ist $v_n - \frac{1}{2}v_0 = t^n$ $n \in \mathbb{N}$. Weil wir wissen, dass t^n ein Erzeugendensystem ist, ist dann auch $(1 + t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Erzeugendensystem.

(d) Nein. Alle solche Funktionen $\tilde{p}$ sind stetig, also lineare Kombinationen davon $a_1\tilde{p}_1 + a_2\tilde{p}_2 + \dots$ sind auch stetig. Aber es gibt unstetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}.$$

(e) Ja. Es gilt

$$\begin{aligned} (0,0,1) =& (6,6,7) - (5,4,3) - (1,2,3) \\ (1,0,0) =& -2(1,2,3) + (5,4,3) + 3(0,0,1) \\ (0,1,0) =& \frac{1}{2}\left[(1,2,3) - (1,0,0) - 3(0,0,1)\right] \end{aligned}$$

Weil alle Elemente der Standardbasis als Linearkombination von unserem System geschrieben werden können, können alle Elemente in $\mathbb{R}^3$ auch. Dann ist es ein Erzeugendensystem. Weil es linear unabhängig ist, ist es eine Basis. □

Aufgabe 24. (a) Zeigen Sie: Ist $(b_i)_{i\in B}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V und $i_0 \in B$, dann ist auch $(b_i - 2b_{i_0})_{i\in B}$ eine Basis von V.

(b) Zeigen Sie: Ist K ein unendlicher Körper und sind $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ Elemente von K mit $x_i \neq x_i$ für $i \neq j$, so ist $(b_k)_{k\in\{0,1,2,3,\ldots,n\}}$ mit

$$b_k = \frac{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(t-x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(t-x_i)\right)}{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k-x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k-x_i)\right)}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $K_{\leq n}[t] = \{p(t) \in K[t] | \deg(p) \leq n\}$.

(c) Geben Sie mit Hilfe der Basis aus der vorigen Teilaufgabe ein rationales Polynom vom Grad höchstens 4 an, dessen Polynomfunktion die Funktionswerte $f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 9,\ f(4) = 17,\ f(5) = 6000$ hat.

Beweis. (a) $(b_i - 2b_{i_0})_{i\in B}$ ist...

(i) Linear unabhängig
Sei $(a_k)_{k\in B}, a_k \in R$, nicht alle 0, sodass

$$\sum_{i\in B} a_i(b_i - 2b_{i_0}) = 0.$$

Es ist dann

$$\sum_{B\ni i\neq i_0} a_i b_i + 2\left(\sum_{B\ni i\neq i_0} a_i\right) b_{i_0} - a_{i_0} b_{i_0} = 0.$$

Die Koeffizienten sind nicht alle null, also $(b_i)_{i\in B}$ ist nicht linear unabhängig, ein Widerspruch, weil es ist dann kein Basis.

(ii) Ein Erzeugendesystem
Sei $v \in V$ beliebig und $a_i \in \mathbb{R}$, sodass

$$v = \sum_{i\in B} a_i b_i,$$

was immer möglich ist, weil $(b_i)_{i\in B}$ eine Basis ist. Sei dann

$$c_i = \begin{cases} a_i & i \neq i_0 \\ -2\sum_{B\ni i\neq i_0} a_i - a_{i_0} & i = i_0 \end{cases}.$$

Es gilt dann

$$\sum_{i\in B} c_i(b_i - 2b_{i_0}) = \sum_{B\ni i\neq n_0} c_i(b_i - 2b_{i_0}) + c_{i_0}(b_{i_0} - 2b_{i_0})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{B \ni i \neq 0} c_i b_i - 2 \sum_{B \ni i \neq i_0} b_{i_0} - c_{i_0} b_{i_0} \\
&= \sum_{B \ni i \neq i_0} a_i b_i + a_{i_0} b_{i_0} \\
&= \sum_{i \in B} a_i b_i \\
&= v
\end{aligned}$$

Weil v beliebig war, haben wir einen Erzeugendensystem. Die Behauptung folgt.

(b) Wir betrachten die Wirkung der Polynomfunktion $\tilde{b}_k$ auf ein Punkt x_i. Es gilt, für $i \neq k$, $\tilde{b}_k(x_i) = 0$. Für $i = k$ ist

$$\tilde{b}_k(x_k) = \frac{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k - x_i)\right)}{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k - x_i)\right)} = 1.$$

Sei $p \in K[t]$ ein Polynom mit Grad $\leq n$. Wir wissen, dass nachdem wir $\tilde{p}(x_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ wissen, ist das Polynom eindeutig. Sei jetzt $p(x_i) = a_i$ für alle i. Es ist $p' = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Dann gilt $\tilde{p}'(x_i) = a_i$ für alle i, also $p' = p$, also (b_k) ist ein Erzeugendensystem.

Weil wir genau $\dim(K_{\leq n}[t]) = n$ b_k haben, ist es ein Basis, sonst wäre die Dimension nicht eindeutig.

(c) Sei $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5$. Wir betrachten zuerst

$$c_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k - x_i)\right)$$

für $k =$

(0) $c_0 = 24$
(1) $c_1 = -6$
(2) $c_2 = 4$
(3) $c_3 = -6$
(4) $c_4 = 24$

Dann betrachten wir die Polynomfunktion:

$$\tilde{p} = \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{1}{c_i} \prod_{i \neq k=0}^{4} (t - x_i) \right).$$

p ist dann ein Polynom mit die gewünschte Nullstellen. Nach Vereinfachung ist

$$\frac{5971x^4}{24} - \frac{9951x^3}{4} + \frac{208985x^2}{24} - \frac{49751x}{4} + 5970.$$

□

1.7 Blatt 7

Aufgabe 25. Wir betrachten den Unterraum U von $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}[t]$, der von

$$B = \left(\overline{1}, t^2+t, t^3-t^2, t+t^3, t^7, t^6+t^5+t^3, t^4-\overline{5}\right)$$

erzeugt wird.

(a) Entscheiden Sie, ob B eine Basis von U ist. Finden Sie andernfalls eine Basis B' von U, die nur aus Elementen von B besteht.

(b) Zeigen Sie: Die Polynome

$$(t^7-t^3-t-\overline{5}, \overline{2}t^7-\overline{27}, t^6+t^5-t^4+t^3+\overline{5})$$

liegen alle in U und sie sind linear unabhängig.

(c) Bestimmen Sie eine Umnummerierung von B', die die Aussage des Austauschsatzes 2.6.8 mit $(w_1, w_2, w_3) = (t^7-t^3-t-\overline{5}, \overline{2}t^7-\overline{27}, t^6+t^5-t^4+t^3+\overline{5})$ erfüllt.

Beweis. (a) Nein. Per Definition ist B ein Erzeugendensystem. Es bleibt nur zu zeigen, dass es linear unabhängig ist.

Es ist aber nicht linear unabhängig. Es gilt

$$-(t^3+t)+(t^2+t)+(t^3-t^2)=0,$$

also es ist nicht linear unabhängig. Eine Basis B' ist

$$B' = \left\{\overline{1}, t^2+t, t^3+t, t^7, t^6+t^5+t^3, t^4-\overline{5}\right\}$$

(also B ohne t^3-t^2.)

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} t^7-t^3-t-\overline{5} =& t^7-(t^3+t)-\overline{5}(\overline{1}) \\ \overline{2}t^7-\overline{27} =& \overline{2}t^7-\overline{27}(\overline{1}) \\ t^6+t^5-t^4+t^3+\overline{5} =& (t^6+t^5+t^3)-(t^4-\overline{5}) \end{aligned}$$

also die liegen alle in U. Sei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$, so dass

$$\begin{aligned} &x_1(t^7-t^3-t-\overline{5})+x_2(\overline{2}t^7-\overline{27}) \\ &+x_3(t^6+t^5-t^4+t^3+\overline{5})=0 \end{aligned}$$

Aus Vergleich des Koeffizienten von t gilt $x_1=\overline{0}$. Dann vergleich wir den Koeffizient von t^7 und erhalten $x_2=\overline{0}$. Dann muss $x_3=\overline{0}$, also sie sind linear unabhängig.

(c)
$$B' = \left\{t^3 + t, t^7, t^4 - \overline{5}, \overline{1}, t^2 + t, t^6 + t^5 + t^3\right\}. \qquad \square$$

Aufgabe 26. Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Vektorräume.

(a) $V_1 = \{p \in \mathbb{Q}[x] | p(0) = 0 \wedge \deg(p) \leq 6\}$

(b) $V_2 = \{p \in \mathbb{Q}[x] | \forall a \in \mathbb{Q} : p(-a) = -p(a)\}$

(c) $V_3 = \{v \in \mathbb{R}^n | \forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} : v_i - v_{n-i+1} = 0\}$

Beweis. (a) Sei $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^5$. Es gilt $p(0) = a_0$. Also wir müssen $a_0 = 0$. Dann ist V_1 gespannte durch
$$B_1 = \left\{t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6\right\}.$$
Die Vektoren sind linear unabhängig, also ist $\dim(V_1) = 6$.

(b) Ein Polynom in V_2 muss dan nur gerade Potenzen enthalten. Dann ist ein Basis for V_2
$$B_2 = \left\{x^{2n}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$
also $\dim(B_2)$ ist abzählbar.

(c) Ein Basis für V_3 ist $\{(1, 0, \ldots, 0, 1), (0, 1, \ldots, 1, 0), \ldots, (0, \ldots, 1, \ldots, 0)\}$, also die Dimension ist
$$\dim(V_3) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$
$\square$

Aufgabe 27. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{8} \\ \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^{3\times 4}.$$

(a) Bringen Sie A mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Lesen Sie anschließend den Zeilenrang von A ab.

(b) Bringen Sie $B = A^T$ mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Lesen Sie anschließend den Zeilenrang von B ab.

Beweis. (a)
$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{8} \\ \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + \overline{6}R_1} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{7} & \overline{3} & \overline{10} \\ \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \overline{7}R_1}$$
$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{7} & \overline{3} & \overline{10} \\ \overline{0} & \overline{6} & \overline{1} & \overline{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \overline{8}} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{6} & \overline{1} & \overline{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$
also der Zeilenrang von A ist 2.

(b)

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{6} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{7} & \overline{2} \\ \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+\overline{9}R_1} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{7} & \overline{6} \\ \overline{3} & \overline{7} & \overline{2} \\ \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+\overline{8}R_1}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{7} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+\overline{7}R_1} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{7} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{10} & \overline{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\times\overline{8}}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{10} & \overline{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+\overline{8}R_2} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{10} & \overline{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_2} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

also der Zeilenrank von A^T ist 2. □

Aufgabe 28. Wir betrachten $U = \operatorname{span}\left((1,2,5,6),(5,4,3,2),(4,3,6,5)\right) \subseteq \mathbb{Q}^4$.

(a) Bringen Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Die entstandenen Zeilenvektoren nennen wir ab jetzt b_1, b_2, b_3.

(b) Begründen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

(c) Begründen Sie, dass b_1, b_2, b_3 in U liegen.

(d) Folgern Sie mit Hilfe der vorigen beiden Aussagen, dass sowohl $((1,2,4,5),(5,4,3,2),(4,3,6,5))$ als auch (b_1, b_2, b_3) eine Basis von U bilden.

(e) Nutzen Sie die Basis (b_1, b_2, b_3), um herauszufinden, welche der Vektoren $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,1,0,0)$ bzw. $u_3 = (1,2,3,4)$ in U enthalten sind. Geben Sie in diesem Fall zudem die Koeffizienten der Linearkombination

$$\lambda_i(1,2,5,6) + \mu_i(5,4,3,2) + \tau_i(4,3,6,5) = u_i$$

an.

Beweis. (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -22 & -28 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-4R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -22 & -28 \\ 0 & -5 & -14 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & -5 & -14 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Sei $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}$, so dass

$$q_1 b_1 + q_2 b_2 + q_3 b_3 = 0.$$

Wir betrachten zuerst die erste Komponent. Weil die erste Komponent nur in b_1 ungleich 0 ist, muss $q_1 = 0$. Die zweite Komponent ist nur in b_2 ungleich 0, also $q_2 = 0$. Daraus folgt, weil $b_3 \neq 0$, dass $q_3 = 0$, also b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.

(c) Durch elementare Zeilenoperationen arbeiten wir immer nur mit linear Kombinationen von Zeilen, also das Ergebnis muss eine lineare Kombination sein.

Wir berechnen es explizit, weil wir es später brauchen werden:

$$\begin{aligned} b_1 =& (1,2,5,6) \\ b_2 =& \frac{5}{6}(1,2,5,6) - \frac{1}{6}(5,4,3,2) \\ b_3 =& \frac{1}{6}(1,2,5,6) - \frac{5}{6}(5,4,3,2) + (4,3,6,5) \end{aligned}$$

(d) Wir wissen aus Satz 2.4.18, dass die Erzeugendensysteme sind. Dann ist es nur zu zeigen: Die Systeme sind linear unabhängig. Wir wissen, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

Wir nehmen an, dass es Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gibt, nicht alle null, so dass

$$x(1,2,4,5) + y(5,4,3,2) + z(4,3,6,5) = (0,0,0,0).$$

Dann können wir $x(1,2,4,5) + y(5,4,3,2) + z(4,3,6,5)$ als Summe von b_1, b_2, b_3 schreiben. Dann haben wir ein linear Kombination von b_1, b_2, b_3 mit Koeffizienten nicht alle 0, aber das Kombination ist 0, also b_1, b_2, b_3 wären dann nicht linear unabhängig.

(e) (1) Es gilt

$$x_1(1,2,5,6) + y_1(0,1,\frac{11}{3},\frac{14}{3}) + z_1(0,0,\frac{13}{3},\frac{13}{3}) = (1,1,1,1).$$

Daraus folgt: $x_1 = 1$ und $y_1 = -1$, also

$$z_1(0,0,\frac{13}{3},\frac{13}{3}) + (1,1,4/3,4/3) = (1,1,1,1).$$

Wir entscheiden uns für $z_1 = -\frac{1}{13}$ und die Behauptung folgt.

$$(1,1,1,1) = (1,2,5,6) - (0,1,11/3,14/3) - \frac{1}{13}(0,0,13/3,13/3)$$

$$
\begin{aligned}
=&(1,2,5,6) - \left[\frac{5}{6}(1,2,5,6) - \frac{1}{6}(5,4,3,2)\right] \\
&- \frac{1}{13}\left[\frac{1}{6}(1,2,5,6) - \frac{5}{6}(5,4,3,2) + (4,3,6,5)\right] \\
=&\frac{2}{13}(1,2,5,6) + \frac{3}{13}(5,4,3,2) - \frac{1}{13}(4,3,2,5)
\end{aligned}
$$

(2) Es würde gelten

$$(1,1,0,0) = x_2(1,2,5,6) + y_2\left(0,1,\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right) + z_2\left(0,0,\frac{13}{3},\frac{13}{3}\right).$$

Daraus folgt: $x_2 = 1$ und $y_2 = -1$, also

$$\left(1,1,\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) + z_2\left(0,0,\frac{13}{3},\frac{13}{3}\right) = (1,1,0,0).$$

Wir entscheiden uns für $z_2 = -4/13$, und die Gleichung ist erfüllt, also $(1,1,0,0)$ liegt in U. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
(1,1,1,1) =&(1,2,5,6) - (0,1,11/3,14/3) - \frac{4}{13}(0,0,13/3,13/3) \\
=&(1,2,5,6) - \left[\frac{5}{6}(1,2,5,6) - \frac{1}{6}(5,4,3,2)\right] \\
&- \frac{4}{13}\left[\frac{1}{6}(1,2,5,6) - \frac{5}{6}(5,4,3,2) + (4,3,6,5)\right] \\
=&\frac{3}{26}(1,2,5,6) + \frac{11}{26}(5,4,3,2) - \frac{4}{13}(4,3,2,5)
\end{aligned}
$$

(3) Es würde gelten

$$(1,2,3,4) = x_3(1,2,5,6) + y_3\left(0,1,\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right) + z_3\left(0,0,\frac{13}{3},\frac{13}{3}\right).$$

Daraus folgt: $x_3 = 1$ und $y_3 = 0$, also

$$(1,2,3,4) = (1,2,5,6) + z_3\left(0,0,\frac{13}{3},\frac{13}{3}\right).$$

Dann sei $z_3 = -\frac{6}{13}$, und die Gleichung wurde erfüllt, also es liegt in U. Dann ist

$$
\begin{aligned}
(1,2,3,4) =&(1,2,5,6) - \frac{6}{13}\left(0,0,\frac{13}{3},\frac{13}{3}\right) \\
=&(1,2,5,6) - \frac{6}{13}\left(\frac{1}{6}(1,2,5,6)\right. \\
&\left. - \frac{5}{6}(5,4,3,2) + (4,3,6,5)\right) \\
=&\frac{12}{13}(1,2,5,6) + \frac{5}{13}(5,4,3,2) - \frac{6}{13}(4,3,6,5). \quad \square
\end{aligned}
$$

1.8 Blatt 8

Aufgabe 29. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \to x \cdot y$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \to x + y$

(c) $h : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]$ $p(t) \to p(t^2)$

(d) $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $k(t) = t + 2$

(e) $l : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $l(z) = \overline{z}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(f) l, aber mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum

Beweis. (a) Nein. $f((1, 1)) = 1 \cdot 1 = 1$, aber $f(2(1, 1)) = f((2, 2)) = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2(1)$.

(b) Ja. Sei $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) =& f((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) \\ =& (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ =& (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ =& f((x_1, x_2)) + f((y_1, y_2)) \end{aligned}$$

Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, x_2)) =& f((\lambda x_1, \lambda x_2)) \\ =& \lambda x_1 + \lambda x_2 \\ =& \lambda(x_1 + x_2) \\ =& \lambda f((x_1, x_2)) \end{aligned}$$

(c) Ja. Sei $p, q \in Q[t]$, $p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n$ und $q = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_n t^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} h(p(t)) =& p_0 + p_1 t^2 + p_2 t^4 + \cdots + p_n t^{2n} \\ h(q(t)) =& q_0 + q_1 t^2 + q_2 t^4 + \cdots + q_n t^{2n} \\ h(p(t)) + h(q(t)) =& (p_0 + q_0)) + (p_1 + q_1)t^2 + \cdots + (p_n + q_n)t^{2n} \\ =& h(p + q) \end{aligned}$$

Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{Q}$. Es gilt

$$\begin{aligned} h(\lambda p(t)) =& \lambda p_0 + \lambda p_1 t^2 + \lambda p_2 t^4 + \cdots + \lambda p_n t^{2n} \\ =& \lambda \left(p_0 + p_1 t^2 + \cdots + p_n t^{2n}\right) \\ =& \lambda h(p(t)) \end{aligned}$$

(d) Nein. Es gilt $k(2) = 4$, aber $k(2 \cdot 2) = k(4) = 6 \neq 2k(2) = 8$.

(e) Ja. Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, Es gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt dann

$$\overline{\lambda z_1} = \overline{\lambda}\overline{z}_1 = \lambda \overline{z}_1.$$

(f) Nein. Die erste Eigenschaft bleibt wie in (e), aber die zweite nicht. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\overline{\lambda z_1} = \overline{\lambda}\overline{z}_1 \neq \lambda \overline{z_1}$$

solange $\lambda \notin \mathbb{R}$. Sei z.B. $\lambda = i,\ z_1 = i$. Dann gilt $\lambda z_1 = -1$ und $\overline{\lambda z_1} = -1$. Das ist aber ungleich $\lambda \overline{z}_1 = i(\overline{i}) = i(-i) = 1$. □

Aufgabe 30. Entscheiden Sie, welche der folgenden linearen Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, x \to Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \to Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t], p(t) \to p'(t)$

(d) $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit $(z, w) \to (z+w, z-\overline{w})$, wobei wir $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen.

(e) $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}$ mit $f \to \mathrm{Re}(f|_{\mathbb{R}}) + \mathrm{Im}(f|_{\mathbb{R}})$, wobei $f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f|_{\mathbb{R}}(x) := f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und Re bzw. Im den Real bzw. Imaginärteil bezeichnen.

Beweis. (a) Nicht injektiv, weil die Spalten nicht linear unabhängig sind. Insbesondere gilt

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist surjektiv, weil die erste zwei Spalten eine Basis sind.

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times 18} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & -42 & -84 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & -84 \end{pmatrix}$$

also es ist injektiv und surjektiv, daher bijektiv.

(c) Nicht injektiv. Sei $p = x + 1$ und $q = x + 2$. Dann ist $p' = q' = 1$, aber $p \neq q$.

Es ist aber surjektiv. Sei $\mathbb{Q}[t] \ni p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$. Dann ist $q = a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ ein Polynom, dessen Bild p ist.

(d) Es ist nicht injektiv. Sei $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{C}^2$, $z_1 = 0, z_2 = i, w_1 = 2 + 3i, w_2 = 2 + 2i$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} (z_1 + w_1, z_1 - \overline{w}_1) =& (2 + 3i, -2 + 3i) \\ (z_2 + w_2, z_2 - \overline{w}_2) =& (2 + 3i, -2 + 3i) \end{aligned}$$

Es ist auch nicht surjektiv. Es gilt

$$\mathrm{Im}(z_1 + w_1) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(w_1)$$

und

$$\mathrm{Im}(z_1 - \overline{w}_1) = \mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(\overline{w}_1) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2).$$

Dann gilt für alle (z, w) im Bild, dass $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z)$. Da es gibt Punkte in $\mathbb{C}^2$, die das nicht erfüllen, ist die Abbildung nicht surjektiv.

(e) Es ist nicht injektiv. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x$. Dadurch definieren wir zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f(x) =& h(x) \\ g(x) =& ih(x) \end{aligned}$$

Dann gilt $f \neq g$. Aber

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(f) =& \mathrm{Im}(g) = h \\ \mathrm{Im}(f) =& \mathrm{Re}(g) = 0 \end{aligned}$$

also die zwei Funktionen werden auf die gleiche Funktion abgebildet.

Es ist aber surjektiv. Für jede $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $g = f$. Dann wird g auf f abgebildet. $\square$

Aufgabe 31. Geben Sie je eine lineare Abbildung mit den folgenden Eigenschaften an. Sie müssen Ihre Aussagen ausnahmsweise nicht beweisen.

(a) $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $L(x) = x$ nur für $x = (0, 0)$.

(b) $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass $L_2((1, 1, 1)) = L_2((1, 1, 0))$.

(c) $L_3 : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]$, sodass $\deg(L_3(p(t))) \geq 3\deg(p(t))$ für alle $p \in \mathbb{Q}[t]$.

(d) $L_3 : V \to V$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist, für einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum Ihrer Wahl.

(e) $L_5 : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, sodass es genau drei verschiedene Elemente $x, y, z \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ mit $L_5(x) = L_5(y) = L_5(z) = (1, 0)$ gibt.

Beweis. (a) $L_1((x, y)) = (2x, 2y)$ ist linear, aber $L(x) = x$ nur für $x = (0, 0)$.

(b) Projektor: $L_2((x, y, z)) = (x, y)$.

(c) $p(t) \to p(t^3)$ (wie in 29)

(d) Für $V = \mathbb{Q}[t]$: $L_5 : p(t) \to p(t)t$. □

Aufgabe 32. Die folgenden linearen Abbildungen können jeweils auch in der Form $x \to Ax$ mit einer Matrix A geschrieben werden. Bestimmen Sie für jede der Abbildungen eine geeignete Matrix.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a + b \\ b - c \end{pmatrix}.$$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

(c) $f \circ g$.

(d) $g \circ f$.

Beweis. (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir verifizieren es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ b - c \end{pmatrix}.$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Noch einmal können wir direkt verifizieren:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(c) Die Matrixdarstellung ist nur das Produkt:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Noch einmal:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$ □

Aufgabe 33. Wir betrachten die Abbildung $S_n : \mathbb{Q}[t]_{\leq n} \to \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ mit $p(t) \to p'(t) + \tilde{p}(0)t^n$.

(a) Beweisen Sie: S_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ linear.

(b) Untersuchen Sie S_n auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(c) Beweisen Sie: $S_n^k(t^k) = k!$ und $S_n^{n-k}(t^n) = n!/k!t^k$ für $k = 0, \ldots, n$.

(d) Folgern Sie: $S_n^{n+1}(p(t)) = n!p(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $p(t) \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$.

Beweis. (a) Sei $q, p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$. Es gilt
$$\begin{aligned} S_n(q+p) =& (q+p)'(t) + \widetilde{q+p}(0)t^n \\ =& q'(t) + p'(t) + \tilde{q}(0)t^n + \tilde{p}(0)t^n \\ =& (q'(t) + \tilde{q}(0)t^n) + (p'(t) + \tilde{p}(0)t^n) \\ =& S_n(q) + S_n(p). \end{aligned}$$

Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{Q}$. Es gilt
$$\begin{aligned} S_n(\lambda q) =& (\lambda q)'(t) + \widetilde{\lambda q}(0)t^n \\ =& \lambda q'(t) + \lambda\tilde{q}(0)t^n \\ =& \lambda\left(q'(t) + \tilde{q}(0)t^n\right) \\ =& \lambda S_n(q) \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben die Wirkung von S_n auf einem Polynom:

$$S_n : (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \to (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, a_0).$$

Daraus folgt die Injektivität und Surjektivität: Sei $p = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ und $q = (b_0, b_1, \dots, b_n)$. Wann ist $S_n(p) = q$? Es gilt genau dann, wenn

$$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, a_0) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Dann ist es klar: $a_1 = b_0$, $2a_2 = b_1$, ... Weil alle Koeffizienten noch rational sind, ist p in $\mathbb{Q}[t]_{\leq n}$. Es folgt auch daraus, das p eindeutig ist, also es ist injektiv.

(c) Wir zeigen es per Induktion: Sei $k = 0$. Dann ist $t^0 = 1 = 0!$. Wir nehmen jetzt an, dass für beliebiges $\mathbb{N} \ni k < n$ gilt

$$S_n^k(t^k) = k!.$$

Dann betrachten wir

$$\begin{aligned} S_n^{k+1}(t^{k+1}) =& S_n^k(S_n(t^{k+1})) \\ =& S_n^k((k+1)t^k) \\ =& (k+1)S_n^k(t^k) \\ =& (k+1)k! \\ =& (k+1)! \end{aligned}$$

Wie beweisen die andere Behauptung per Rückwartsinduktion. Es gilt, für $k = n$:

$$S_n^{n-n}(t^n) = S_n^0(t^n) = t^n = n!/k!t^k.$$

Dann nehmen wir an, dass es für $1 \leq k \leq n$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} S_n^{n-(k-1)}(t^n) =& S_n(S_n^{n-k}(t^n)) \\ =& S_n(n!/k!t^k) \\ =& \frac{n!}{k!} S_n(t^k) \\ =& \frac{n!}{k!} kt^{k-1} \\ =& \frac{n!}{(k-1)!} t^{k-1} \end{aligned}$$

(d) Wir schreiben ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ als Linearkombination von Potenzen von t. Für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$S_n^{n+1}(t^k) = S_n^{n-k}(S_n(S_n^k(t^k)))$$

$$\begin{aligned}
&= S_n^{n-k}(S_n(k!)) \\
&= S_n^{n-k}(k!t^n) \\
&= k! S_n^{n-k}(t^n) \\
&= \frac{k!n!}{k!} t^k \\
&= n! t^k
\end{aligned}$$

Daraus folgt, für ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$:

$$\begin{aligned}
S_n^{n+1} p &= S_n^{n+1}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) \\
&= S_n^{n+1}(a_0) + S_n^{n+1}(a_1 t) + \cdots + S_n^{n+1}(a_n t^n) \\
&= n! a_0 + n! a_1 t + \cdots + n! a_n t^n \\
&= n!(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) \\
&= n! p.
\end{aligned}$$

□

1.9 Blatt 10

Aufgabe 34. Die Fibonacci-Folge ist definiert durch $f_0 := 0, f_1 := 1 und f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Per Definition gilt

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Dann beweisen wir die Behauptung per Induktion. Weil $M^0 = E_2$ für alle 2x2 Matrizen, gilt die Behauptung für $n = 0$. Jetzt nehmen wir an, dass es für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. □

Aufgabe 35. Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $A^m = 0$. Zeigen Sie: Dann gilt $(E_n - A)(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) = E_n$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(E_n - A)(E_n + A + \dots + A^{m-1}) =& E_n + A + \dots + A^{m-1} \\ & - A - A^2 - \dots - \cancelto{0}{A^m} \\ =& E_n.\end{aligned}$$ □

Aufgabe 36. Entscheiden Sie jeweils, ob es eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, die die gegebenen Eigenschaften erfüllt. Entscheiden Sie zudem, ob diese eindeutig ist. Falls es genau eine solche Abbildung gibt, skizzieren Sie das Bild des Quadrates mit den Eckpunkten $P = (0,0), Q = (1,0), R = (1,1), S = (0,1)$ unter dieser Abbildung in einem geeigneten Koordinatensystem. Sie müssen Ihre Skizze nicht begründen.

(a) fro mit $fro((1,0)) = (1,0)$ und $fro((0,1)) = (1,1)$.

(b) pa mit $pa((3,6)) = (1,1), pa((4,7)) = (3,4)$ und $pa((7,13)) = (9, 3/4)$.

(c) $hewe$ mit $hewe((1,3)) = (2,6), hewe((2,3)) = (8,12)$ und $hewe((3,6)) = (10,18)$.

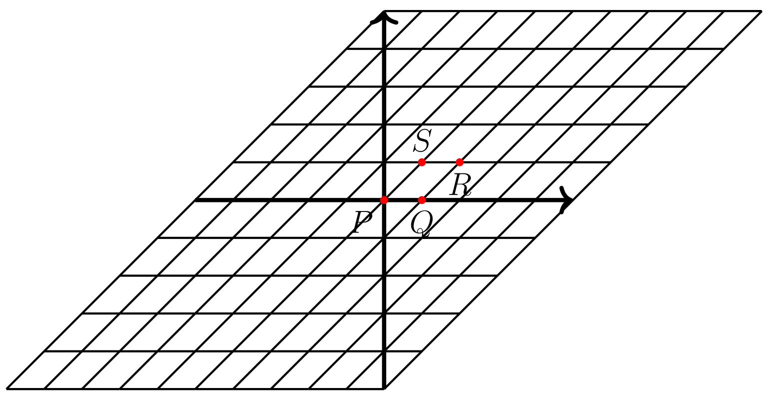
(d) ihn mit $ihn((2,4)) = (6,16)$ und $ihn((-1,2)) = (-3,4)$.

(e) un mit $un((2,3)) = (3,4)$ und $un((4,6)) = (6,8)$.

(f) ach mit $ach((1,0)) = (1,0)$ und $ach(3/5, -1/5) = (12/25, -4/25)$.

(g) ten mit $ten((2,4)) = (1,2)$ und $ten((1,1)) = (2,4)$

Beweis. (a) Es existiert und ist eindeutig.

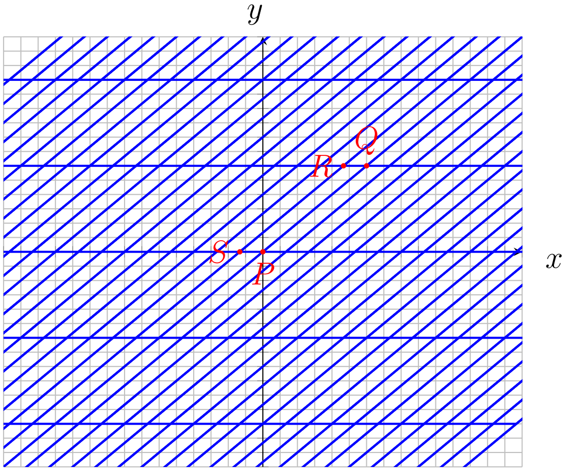


(b) Existiert nicht, weil

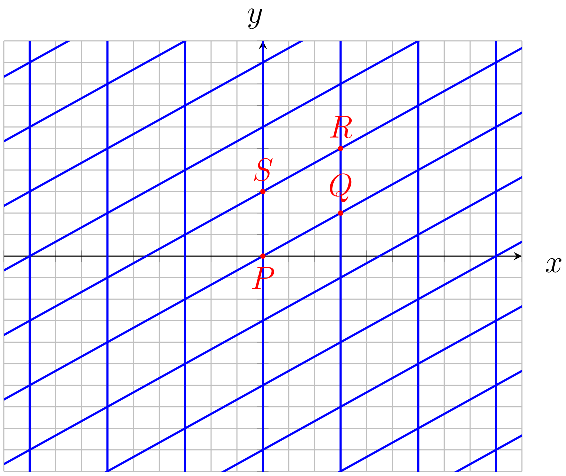
$$\begin{aligned} pa((3,6)) =& (1,1) \\ pa((4,7)) =& (3,4) \\ pa((3,6) + (4,7)) =& pa((7,13)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(9, 3/4)\\
&\neq(1, 1) + (3, 4)\\
&=pa((3, 6)) + pa((4, 7))
\end{aligned}
$$

(c) Existiert und ist eindeutig

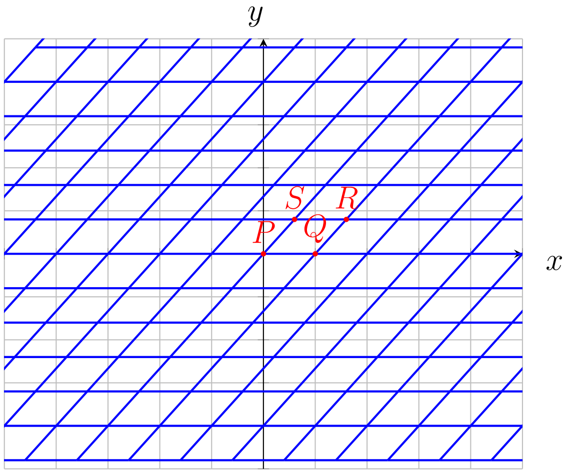


(d) Existiert und ist eindeutig.

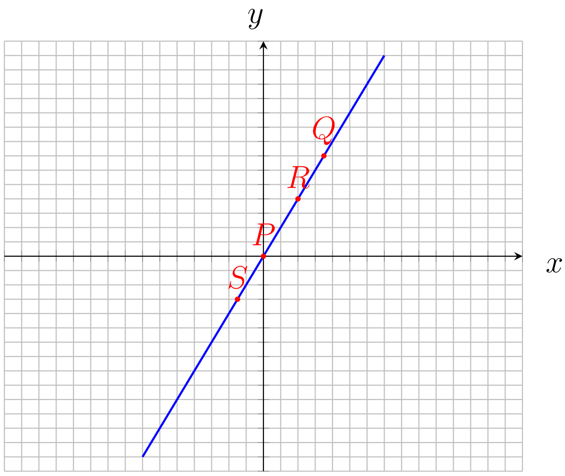


(e) Existiert, ist aber nicht eindeutig, weil die Wirkung auf einem 1-Dimensionale Unterraum definiert ist.

(f) Existiert und ist eindeutig.



(g) Existiert und ist eindeutig



□

Aufgabe 37. Für einen Körper K und zwei quadratische, gleich große Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ definieren wir den Kommutator $[A, B]$ von A und B als $[A, B] := AB - BA \in K^{n\times n}$.

(a) Berechnen Sie $[A, B]$ für $K = \mathbb{R}$, $n = 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie ein Beispiel für $A \neq B$ mit $[A, B] = 0$, wobei A und B keine skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix sein sollen.

Es definiert also $[\cdot, \cdot] : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K^{n\times n}$ eine Verknüpfung auf $K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(c) Die Verknüpfung hat für kein $n \in \mathbb{N}$ ein Linksneutrales, d.h. es existiert für kein $E \in K^{n\times n}$ mit $[E, A] = A$ für alle $A \in K^{n\times n}$.

(d) Zeigen Sie für die Matrizen A, B aus Teilaufgabe (a) $[[A, B], B] \neq 0$ und folgern Sie: Die Verknüpfung $[\cdot, \cdot]$ ist für $n = 3$ nicht assoziativ.

Beweis. (a) Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 8 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$
$$[A, B] = \begin{pmatrix} 10 & 9 & -14 \\ 5 & 4 & -8 \\ 8 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

(b) Irgendeine skalare Vielfache gilt: Wenn $A = kB$, ist $AB = kB^2 = BA$ und $AB - BA = 0$. Ein konkretes Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $A = E_n$. Für alle Matrizen $E \in K^{n\times n}$ gilt:

$$\begin{aligned} [E, E_n] &= EE_n - E_nE \\ &= E - E = 0 \neq E_n \end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$[A, B]B = \begin{pmatrix} 11 & -14 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \\ 2 & -22 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B[A, B] = \begin{pmatrix} 35 & 31 & -50 \\ 20 & 17 & -30 \\ 35 & 30 & -52 \end{pmatrix}$$

Jetzt ist es klar, dass $[[A, B], B] \neq 0$, weil die Matrizen ungleich sind. Aber $[A, [B, B]] = 0$, weil $[B, B] = B^2 - B^2 = 0$. □

Aufgabe 38. Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^m$, dann nennen wir

$$P(v_1, \ldots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n | \forall i \in \{1, \ldots, n\} : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

das von $v_1, ., v_n$ aufgespannte n-Parallelotop.

(a) Zeigen Sie: Jedes Rechteck $[0,a] \times [0,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$ ist ein 2-Parallelotop und jeder Quader $[0,a] \times [0,b] \times [0,c] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$ ist ein 3-Parallelotop.

(b) Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

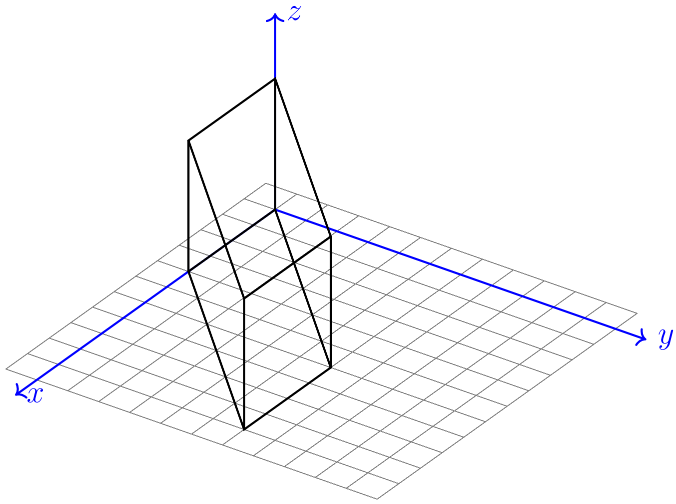
Skizzieren Sie $L([0,2] \times [0,3] \times [0,1])$ in einem geeigneten Koordinatensystem. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

(c) Zeigen Sie: Ist $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine bijektive lineare Abbildung und $P(v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Parallelotop, dann ist $\phi(P(v_1, \ldots, v_n)) = P(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n))$ und dies ist ein n-Parallelotop.

(d) Es sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $p(x,y,z) = (x,y)$. Bestimmen und skizzieren Sie $p(P((1,0,0),(0,1,0),(2,2,1)))$. Begründen Sie, dass dies kein Parallelotop ist.

Beweis. (a) Per Definition ist $[0,1] \times [0,1] = P((a,0),(0,1))$ und $[0,a] \times [0,b] \times [0,c] = P((a,0,0),(0,b,0),(0,0,c))$.

(b)



(c) Es gilt wegen Linearität

$$\phi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \phi(v_1) + \cdots + \lambda_n \phi(v_n),$$

also

$$\phi(P(v_1, \ldots v_n)) = P(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)).$$

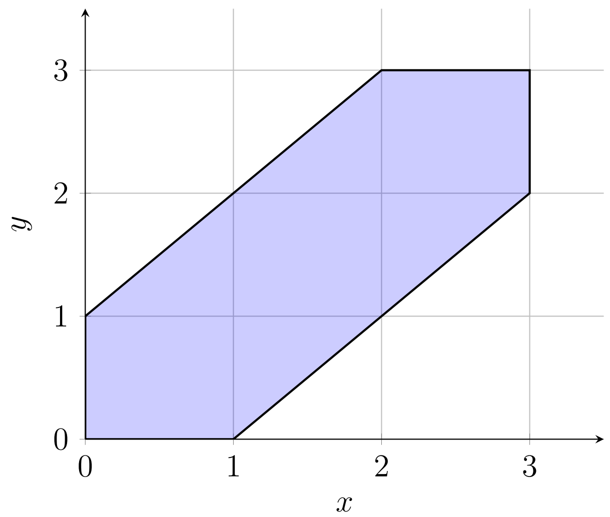
Es bleibt linear Unabhängigkeit zu zeigen. Per Definition müssen $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sein. Alle $v_1, \dots, v_n$ sind unterschiedlich und ungleich null, weil ϕ bijektiv (insbesondere injektiv) ist. Falls $\phi(v_1), \dots \phi(v_n)$ linear abhängig wäre, wäre

$$\begin{aligned} 0 =& a_1\phi(v_1) + \cdots + a_n\phi(v_n) \\ =& \phi(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) && \text{Linearität} \end{aligned}$$

Weil ϕ bijektiv ist, ist deren Kern trivial und $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, was nur möglich ist, wenn $a_1 = a_2 = \dots a_n = 0$. Daraus folgt: $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sind linear unabhängig und die Behauptung folgt.

(d) Sei $v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (2,2,1)$. Weil p linear ist, ist

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_3 v_3) =& \lambda_1 p(v_1) + \cdots + \lambda_3 p(v_3) \\ =& \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) + \lambda_3(2,2) \end{aligned}$$



Es ist klar, dass die Menge entweder ein 1 oder 2-Parallelotop sein kann, weil es keine 3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ gibt. Ein 1-Parallelotop ist eine Teilmenge $P(v) \subseteq \operatorname{span} v$, also die Menge ist kein 1-Parallelotop.

Dann muss es ein 2-Parallelotop sein. Aber das ist auch unmöglich, weil 2-Parallelotops Dreiecke sind, also die Menge ist kein Parallelotop.

$\square$

Aufgabe 39. Es sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Wir betrachten den Vektorraum $V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$.

(a) Zeigen Sie: Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V, dann wird für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ durch $b_i^*(b_j) := \delta_{ij}$ für $j = 1, \dots, n$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung festgelegt.

(b) Zeigen Sie: $(b_1^*, \dots b_n^*)$ ist ein Erzeugendensystem von V^*,

(c) Zeigen Sie: $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ ist linear unabhängig.

Sei W ein weiterer endlich dimensionaler Vektoraum mit Basis $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ und $L : V \to W$ linear.

(d) Zeigen Sie: Die Abbildung $L^* : W^* \to V^*$ mit $\omega \to \omega \circ L$ ist linear.

(e) Die Abbildung L habe bezglich der Basen $(b_1, \dots, b_n)$ und $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ die Darstellungsmatrix A. Zeigen Sie, dass L^* bezüglich der Basen $(\beta_1^*, \dots, \beta_m^*)$ und $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ die Darstellungsmatrix A^T hat.

Beweis. (a) Die Wirkung auf einem Vektor ist eindeutig bestimmt. Sei $v \in V$ mit Basisdarstellung $v = v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} b_i^*(v) =& b_i^*(v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n) \\ =& v_1 b_i^*(b_1) + \cdots + v_n b_i^*(b_n) && \text{Linearität} \\ =& v_i \end{aligned}$$

(b) Sei $v^* \in V^*$, also eine lineare Abbildung $V \to K$.

Wir setzen $a_i = v^*(b_i) \in K$. Das Ziel ist:

$$v^* = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*.$$

Sei $V \ni v = v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*\right)(v) =& \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^n v_j b_j\right) \\ =& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i v_j b_i^*(b_j) \\ =& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i v_j \delta_{ij} \\ =& \sum_{i=1}^n a_i v_i \\ =& \sum_{i=1}^n v_i v^*(b_i) \\ =& v^*\left(\sum_{i=1}^n v_i b_i\right) \\ =& v^*(v). \end{aligned}$$

Weil v beliebig war, ist $v^* \in \operatorname{span}(b_1^*, \dots, b_n^*)$. Weil v^* beliebig war, ist es ein Erzeugendensystem.

(c) Sei $\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^* = 0$. Wir wenden die Gleichung auf einem Basisvektor b_i an. Die rechte Seite ist natürlich 0. Die linke Seite ist

$$(\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \lambda_i = 0.$$

Daraus folgt: $\lambda_i = 0$ für alle i.

(d) Sei $k \in K$, $\omega \in W^*$ und $v \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}(L^*(a\omega))v =& a\omega(L(v))\\ =& a(\omega(L(v)))\\ =& a(L^*(\omega)(v))\end{aligned}$$

Weil v beliebig war, ist

$$L^*(a\omega) = aL^*(\omega).$$

Sei jetzt $\omega_1, \omega_2 \in W^*$. Es gilt

$$\begin{aligned}L^*(\omega_1 + \omega_2)(v) =& (\omega_1 + \omega_2)(L(v))\\ =& \omega_1(L(v)) + \omega_2(L(v))\\ =& (L^*(\omega_1) + L^*(\omega_2))(v)\end{aligned}$$

also

$$L^*(\omega_1 + \omega_2) = L^*(\omega_1) + L^*(\omega_2).$$

(e) Es gilt $L^*(\beta_i^*) = \beta_i^* \circ L$. Wir möchten diese als linear Kombination von b_j^* darstellen. Sei die Matrixdarstellung von L^* B, also

$$\beta_i^* \circ L = \sum_{j=1}^{n} B_{ji} b_j^*.$$

Wir wenden die Gleichung auf b_k an und erhalten, weil $b_j^*(b_k) = \delta_{jk}$

$$\beta_i^*(L(b_k)) = B_{ki}.$$

Aus der Matrixdarstellung erhalten wir $L(b_k) = \sum_{i=1}^{m} A_{ik}\beta_i$. Daraus folgt:

$$\beta_i^* \left(\sum_{j=1}^{m} A_{jk}\beta_j \right) = A_{ik} = B_{ki}.$$

Weil für die Komponente der Matrizen A und B gilt $A_{ik} = B_{ki}$, ist $B = A^T$. □

1.10 Blatt 11

Aufgabe 40. Bestimmen Sie für $b \in \left\{ \begin{pmatrix} i+2 \\ 2 \\ -i-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2i-6 \\ -5 \\ 3i+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3$ jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{C}^3$.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 6+2i & -i & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -3-2i & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Beweis. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & 2+i \\ i & 1 & 1 & 2 \\ 0 & i & 1 & -1-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - iR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & 2+i \\ 0 & 2 & 1-2i & 3-2i \\ 0 & i & 1 & -1-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - \frac{i}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & i & 2 \\ 0 & 2 & 1-2 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{i}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{i}{2} & 1-\frac{i}{2} \\ 0 & 2 & 1-2i & 3-2i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & -2-\frac{5i}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - (4+2i)R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{i}{2} & 1-\frac{i}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 6+12i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & -2-\frac{5i}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - (}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2+6i \\ 0 & 2 & 0 & 6+12i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & -2-\frac{5i}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \times 2i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2+6i \\ 0 & 2 & 0 & 6+12i \\ 0 & 0 & 1 & 5-4i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2+ \\ 0 & 1 & 0 & 3+6 \\ 0 & 0 & 1 & 5-4 \end{array}\right.$$

Die Lösungsmenge ist $\{(-2+yi, 3+6i, 5-4i)^T\}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & -6-2i \\ i & 1 & 1 & -5 \\ 0 & i & 1 & 2+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & -6-2i \\ -1 & i & i & -5i \\ 0 & i & 1 & 2+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & - \\ 0 & 2i & 2+i & - \\ 0 & i & 1 & 2 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{R_2 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & -6-2i \\ 0 & i & 1+\frac{i}{2} & -3-\frac{7i}{2} \\ 0 & i & 1 & 2+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & -6-2i \\ 0 & i & 1+\frac{i}{2} & -3-\frac{7i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 5+\frac{13i}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{i}{2} & -3+\frac{3i}{2} \\ 0 & i & 1+\frac{i}{2} & -3-\frac{7i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 5+\frac{13i}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + (1-2i)R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{i}{2} & -3+\frac{3i}{2} \\ 0 & i & 0 & 15-7i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 5+\frac{13i}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - (1+2i)R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5-15i \\ 0 & i & 0 & 15-7i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 5+\frac{13i}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times -i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5-15i \\ 0 & 1 & 0 & -7-15i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 5+\frac{13i}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \times 2i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

also die Lösungsmenge ist $\{(5-15i, -5-15i, -13+10i)^T\}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & 0 \\ i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & 0 \\ -1 & i & i & 0 \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 2+i & 0 \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times \frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & 0 \\ 0 & i & 1+\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & 0 \\ 0 & i & 1+\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & i & 1+\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+(1-2i)R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & i & 0 & 1-2i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-(1+2i)R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-2i \\ 0 & i & 0 & 1-2i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\times -i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 & -2-i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\times 2i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 & -2-i \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{array}\right)$$

also die Lösungsmenge ist $\{(-1-2i, -2-i, 2i)^T\}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6+2i & -i & -2 & 2+i \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ -3-2i & i & 1 & -1-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6+2i & -i & -2 & 2+i \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-\frac{3}{5}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6+2i & -i & -2 & 2+i \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\times \frac{3}{20}-\frac{i}{20}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & \frac{7}{20}+\frac{i}{20} \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2-5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & \frac{7}{20}+\frac{i}{20} \\ 0 & -\frac{3}{4}+\frac{3i}{4} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & \frac{1}{4}-\frac{i}{4} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times -\frac{2}{3}-\frac{2i}{3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & \frac{7}{20}+\frac{i}{20} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-\frac{3}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & \frac{7}{20}+\frac{i}{20} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\times 20} \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & -1-3i & -6+2i & 7+i \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+(1+3i)R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 0 & -\frac{20}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\times \frac{1}{20}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge ist dann

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t+\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}t-\frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{C} \right\}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6+2i & -i & -2 & -6-2i \\ 5 & -1 & -1 & -5 \\ -3-2i & i & 1 & 2+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6+2i & -i & -2 & -6-2i \\ 5 & -1 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & -4+i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\times \frac{3}{20}-\frac{i}{20}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & -1\\ 5 & -1 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & -4+i\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & -1\\ 5 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & \frac{3}{20}+\frac{9i}{20} & -\frac{1}{10}-\frac{3i}{10} & -1+i\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & -1\\ 0 & -\frac{3}{4}+\frac{3i}{4} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}+\frac{9i}{20} & -\frac{1}{10}-\frac{3i}{10} & -1+i\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{R_3\times 20} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & -1\\ 0 & -\frac{3}{4}+\frac{3i}{4} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 3+9i & -2-6i & -20+20i\end{array}\right) \xrightarrow{R_3+4R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & -1\\ 0 & -\frac{3}{4}+\frac{3i}{4} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 12i & -8i & -20+20i\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times -\frac{2}{3}-\frac{2i}{3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & -1\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 12i & -8i & -20+20i\end{array}\right) \xrightarrow{R_3+-12iR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \\ 0 & 0 & 0 & -\end{array}\right.$$

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung, die Lösungsmenge ist $\varnothing$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6+2i & -i & -2 & 0\\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -3-2i & i & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6+2i & -i & -2 & 0\\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\times \frac{3}{20}-\frac{i}{20}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & 0\\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & 0\\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}+\frac{9i}{20} & -\frac{1}{10}-\frac{3i}{10} & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-5R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & 0\\ 0 & -\frac{3}{4}+\frac{3i}{4} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}+\frac{9i}{20} & -\frac{1}{10}-\frac{3i}{10} & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\times \frac{2}{3}-2i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & 0\\ 0 & -\frac{3}{4}+\frac{3i}{4} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}-2i\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\times -\frac{2}{3}-\frac{2i}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}-2i\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{20}-\frac{3i}{20} & -\frac{3}{10}+\frac{i}{10} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}-2i\end{array}\right) \xrightarrow{R_1+\frac{1}{20}+\frac{3i}{20}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}-2i\end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösungen. Die Lösungsmenge ist $\varnothing$. □

Aufgabe 41. (a) Bestimmen Sie für $m = 3$ die Elementarmatrizen $S_1(\lambda), Q_{12}(\lambda), P_{12}$ aus 3.6.1 als explizite 3×3- Matrizen und überprüfen Sie für damit die Behauptungen 1-6 aus 3.6.2 exemplarisch im Fall $i = 1, j = 2, m = 3$.

(b) Beweisen Sie für alle $i, j, m \in \mathbb{N}, \lambda \in K$ mit $i \neq j$ und $i, j \leq m$ die Behauptungen

$$S_i(\lambda)^{-1} = S_i(\lambda^{-1}),\ Q_{ij}(\lambda)^{-1} = Q_{ij}(-\lambda),\ P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

aus Bemerkung 3.6.2.

Beweis. (a)

$$S_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$Q_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Es gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \end{pmatrix}.$$

(2) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11} + \lambda A_{21} & A_{12} + \lambda A_{22} & \dots & A_{1n} + \lambda A_{2n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \end{pmatrix}$$

(3) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{11} & A_{12} & \dots A_{1n} & \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \end{pmatrix}.$$

(4) Es gilt

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \lambda A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \end{pmatrix}.$$

(5) Es gilt

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + \lambda A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} + \lambda A_{21} & A_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} + \lambda A_{n1} & A_{n3} \end{pmatrix}.$$

(6)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{11} & A_{13} \\ A_{22} & A_{21} & A_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n2} & A_{n1} & A_{n3} \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} (E_m + (\lambda - 1)E_{i,i}) \left(E_m + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) E_{i,i}\right) =& \cancelto{E_m}{E_m^2} + (\lambda - 1)E_{i,i} \\ & + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) E_{i,i} \\ & + (\lambda - 1)\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \cancelto{E_{i,i}}{E_{i,i}^2} \\ =& E_m \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (E_m + \lambda E_{ij})(E_m - \lambda E_{ij}) =& \cancelto{E_m}{E_m^2} + \lambda E_{ij} - \lambda E_{ij} + \lambda^2 \cancelto{0}{E_{ij}^2} \\ =& E_m \end{aligned}$$

Aus (3) wissen wir, dass $P_{ij}^2 A = A$ für alle $A \in K^{m \times n}$. Daraus folgt: $P_{ij}^2 = E_m$ und $P_{ij} = P_{ij}^{-1}$. □

1.11 Blatt 12

Aufgabe 42. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A und B mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A und B direkt mit der Leibnizformel.

(c) Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Methoden. Welche würden Sie bevorzugen? Hängt Ihre Antwort von der Struktur der Matrix ab?

Beweis. (a)

$$\begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\times 5} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 10 & -40 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & -9 & 60 & -180 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & -9 & 60 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3+3R_2} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Als obere Dreiecksmatrix hat die Matrix am Ende die Determinante $10(3)(-3)(3) = -270$. Weil wir im ersten Schritt durch 5 multipliziert haben, ist das genau 5 mal die gewünschte Determinante, also $\det A = -270/5 = -54$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_4+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ähnlich ist die Determinante der Matrix am Ende $1(-3)(-1)(2) = 6$. Da wir keine Operationen gemacht haben, die die Determinante verändern, ist das die gewünschte Determinante.

(b) Es gilt

$$\det A = A_{1,4}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,1} - A_{1,3}A_{2,4}A_{3,2}A_{4,1}$$

$$
\begin{aligned}
&- A_{1,4}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,1} + A_{1,2}A_{2,4}A_{3,3}A_{4,1}\\
&+ A_{1,3}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,1} - A_{1,2}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,1}\\
&- A_{1,4}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,2} + A_{1,3}A_{2,4}A_{3,1}A_{4,2}\\
&+ A_{1,4}A_{2,1}A_{3,3}A_{4,2} - A_{1,1}A_{2,4}A_{3,3}A_{4,2}\\
&- A_{1,3}A_{2,1}A_{3,4}A_{4,2} + A_{1,1}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,2}\\
&+ A_{1,4}A_{2,2}A_{3,1}A_{4,3} - A_{1,2}A_{2,4}A_{3,1}A_{4,3}\\
&- A_{1,4}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,3} + A_{1,1}A_{2,4}A_{3,2}A_{4,3}\\
&+ A_{1,2}A_{2,1}A_{3,4}A_{4,3} - A_{1,1}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,3}\\
&- A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}A_{4,4} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,4}\\
&+ A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,4} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,4}\\
&- A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3}A_{4,4} + A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,4}\\
=&0 + 0 - 307440 + 0 + 302400\\
&+ 0 + 0 + 0 + 238266 + 0 - 234360\\
&+ 0 + 0 + 0 + 65880 + 0 + 234360\\
&- 302400 + 0 + 0 - 64800 + 0\\
&- 234360 + 302400 = -54
\end{aligned}
$$

Ähnlich für B, aber weil in der letzten Zeile eine nicht null Zahl nur im dritten Spalte entsteht, tragt nur Permutationen σ mit $\sigma(4) = 4$ bei. Dann gibt es nur zwei Terme im Summe, die die Permutationen $(3,4)$ und $(1,2)(3,4)$ entsprechen.

$$\det B = 12 - 6 = 6.$$

(c) Für A habe ich mehr Arbeit gebraucht, durch die Leibnizformel die Determinante zu berechnen. Für B ist es anders.

Für Matrizen mit viele null Elemente würde ich daher mit der Leibnizformel die Determinante zu berechnen, sonst würde ich Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden. □

Aufgabe 43. E sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $x \to Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ -96 & 268 & -63 \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix}$$

sowie $B := (b_1, b_2, b_3) := ((13, 6, 4), (10, 6, 10), (6, 8, 24))$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $C = T_B^E$, wobei E die Standardbasis ist (Notation wie in 3.5.2)

(c) Bestimmen Sie C^{-1} und berechnen Sie CAC^{-1}.

(d) Geben Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis B an.

(e) Bestimmen Sie $\det(A), \det(C), \det(C^{-1})$ und $\det(CAC^{-1})$, ohne den Determinantenmultiplikationssatz zu verwenden. Verifizieren Sie damit für diesen Spezialfall Folgerung 4.3.6 und Satz 4.3.7.

Beweis. (a) Die Vektoren (b_1, b_2, b_3) sind linear unabhängig genau dann, wenn $\det B \neq 0$. Wir berechnen die Determinante

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{7}{3}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 14 & 14 & \frac{56}{3} \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times \frac{7}{2}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 14 & 35 & 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 0 & 25 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{25}{4}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 25 & \frac{475}{6} \\ 0 & 25 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 25 & \frac{475}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

deren Determinante ungleich null ist. Daher ist $\det B \neq 0$, und die Vektoren sind linear unabhängig. Da wir 3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$ haben, wobei $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, sind die Vektoren eine Basis.

(b) Es gilt

$$C^{-1} := T_E^B = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix}.$$

Da $T_B^E = (T_E^B)^{-1}$, berechnen wir die inverse Matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \times \frac{1}{14}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 6R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{156}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times \frac{25}{6}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{156}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{10} R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times \frac{7}{50}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \times -3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - \frac{19}{6} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + \frac{11}{6} R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right)$$

also

$$C = \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

(c) C^{-1} wurde schon in (b) gegeben. Durch direkte Rechnung erhalten wir

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Darstellungsmatrix ist genau CAC^{-1}.

(e) A:

$$\begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ -96 & 268 & -63 \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+\frac{96}{7}R_1} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3+\frac{400}{7}R_1} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ 0 & \frac{1770}{7} & \frac{159}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{885}{218}R_2} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ 0 & 0 & \frac{21}{218} \end{pmatrix}$$

also $\det(A) = 7(436/7)(21/218) = 42$. Für C gilt:

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\times 3} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\times 7}$$
$$\begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 42 & 42 & 56 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\times\frac{21}{2}}$$
$$\begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 42 & 105 & 252 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 0 & 75 & 234 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\times 4}$$
$$\begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 0 & 300 & 936 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\times 25} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 300 & 950 \\ 0 & 300 & 936 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 300 & 950 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

also $\det(C) = -8$. Für C^{-1}:

$$\begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+\frac{7}{4}R_1} \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{9}{16}R_1}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{5}{32} & \frac{3}{32} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+\frac{5}{12}R_2} \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

also $\det(C^{-1}) = -1/8$. Zuletzt ist $\det(CAC^{-1}) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. □

Aufgabe 44. In dieser Aufgabe sei stets $D : \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K$ eine Abbildung, die linear in jeder Spalte ist, d.h. Eigenschaft 1 von Definition 4.2.1 erfüllt.

(a) Zeigen Sie: Ist die Charakteristik von K nicht 2, dann ist D genau dann alternierend, wenn für D die Aussage 3 von Satz 4.2.2, also

"Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Spalten, so ist $D(B) = -D(A)$."

gilt. Diese Eigenschaft nennt man auch "schiefsymmetrisch"

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung $D_1 : \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to ab + cd$ ist linear in jeder Spalte und schiefsymmetrisch, aber nicht alternierend.

(c) Zeigen Sie: Für jedes $k \in K$ gibt es genau eine Abbildung $D : \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K$, die linear in jeder Spalte und alternierend ist und zusätzlich $D(E_n) = k$ erfüllt. Diese ist gegeben durch die Abbildungsvorschrift $D(A) = k\det(A)$.

Beweis. (a) Die Rückrichtung ist trivial. Angenommen A hat zwei gleiche Spalten. B entstehe aus A durch die Vertauschung diese Spalten. Deswegen gilt $B = A$. Aber $D(B) = D(A) = -D(A)$, oder $2D(A) = 0$. Da die Charakteristik nicht 2 ist, impliziert dies $D(A) = 0$.

Sei jetzt D alternierend. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. B entstehe aus A durch die Vertauschung zwei Spalten. Sei die Spalten v_1, v_2. Da die andere Spalten fest sind, bezeichnen wir $f(v_1, v_2) := D((\dots, v_1, v_2, \dots))$. f ist auch linear in v_1 und v_2. Außerdem ist $D(A) = f(v_1, v_2)$ und $D(B) = f(v_2, v_1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(v_1+v_2, v_1+v_2) &= 0 && D \text{ ist alternierend} \\ &= f(v_1,v_1) + f(v_1,v_2) + f(v_2,v_1) + f(v_2,v_2) && \text{Linearität} \\ &= f(v_1,v_2) + f(v_2,v_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$D(A) = f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1) = -D(B).$$

(b) Linearität: Es gilt

$$D_1\left(\begin{pmatrix} ka & b \\ kc & d \end{pmatrix}\right) = k(ab+cd) = D_1\left(\begin{pmatrix} a & kb \\ c & kd \end{pmatrix}\right).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & D_1\left(\begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix}\right) \\ =&(a+a')b+(c+c')d \\ =&(ab+cd)+(a'b+c'd) \\ =&D_1\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)+D_1\left(\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & D_1\left(\begin{pmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{pmatrix}\right) \\ =&a(b+b')+c(d+d') \\ =&(ab+cd)+(ab'+cd') \\ =&D_1\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)+D_1\left(\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

also D_1 ist linear. D_1 ist auch schiefsymmetrisch, da

$$D\left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right) = ab - cd.$$

Aber $ab - cd = -(ab - cd)$, weil es nur 2 Elemente in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt, und für alle Elemente $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt $x + x = 0$. Dann ist D_1 schiefsymmetrisch. D_1 ist jedoch nicht alternierend.

$$D_1\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 \neq 0.$$

□

1.12 Blatt 13

Aufgabe 45. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von B direkt mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A einmal, indem Sie den Laplace'schen Entwicklungssatz direkt anwenden, und einmal, indem Sie vorher eine geschickte Zeilenumformung durchführen.

(c) Wie verhält es sich mit dem Aufwand jetzt gegenüber letzter Woche? Beschreiben Sie eine Strategie zum geschickten Berechnen von Determinanten bei Matrizen geeigneter Struktur.

Beweis. (a) Laplaceentwicklung durch die vierte Spalte:

$$\begin{aligned}\det(B) =& -2\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\\ =& -2(1)\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}\\ =& -2(1)(3-6)\\ =& 6\end{aligned}$$

(b) Laplaceentwicklung durch die dritte Zeile

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix}-31 & -60 & 180\\ 3 & -21 & 63\\ -31 & -60 & 183\end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix}10 & -60 & 180\\ 0 & -21 & 63\\ 10 & -60 & 183\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-31 & -60 & 180\\ 3 & -21 & 63\\ -31 & -60 & 183\end{vmatrix} =& (-31)\begin{vmatrix}-21 & 63\\ -60 & 183\end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix}3 & 63\\ -31 & 183\end{vmatrix} + 180\begin{vmatrix}3 & -21\\ -31 & -60\end{vmatrix}\\ =& (-31)(-63) + 60(2502) + 180(-311)\\ =& 2493\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}10 & -60 & 180\\ 0 & -21 & 63\\ 10 & -60 & 183\end{vmatrix} =& 10\begin{vmatrix}-21 & 63\\ -60 & 183\end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix}-60 & 180\\ -21 & 63\end{vmatrix}\\ =& -630\end{aligned}$$

$$\det(A) = -54$$

Jetzt führen wir eine Zeilenumformung durch.

$$\begin{pmatrix}10 & -31 & -60 & 180\\ 0 & 3 & -21 & 63\\ 2 & -8 & 0 & 0\\ 10 & -31 & -60 & 183\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{pmatrix}10 & -31 & -60 & 180\\ 0 & 3 & -21 & 63\\ 2 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Laplaceentwicklung durch die dritte Zeile:

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix}10 & -31 & -60\\ 0 & 3 & -21\\ 2 & -8 & 0\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
=&3(10)\begin{vmatrix} 3 & -21 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} + 3(2)\begin{vmatrix} -31 & -60 \\ 3 & -21 \end{vmatrix} \\
=&-3(10)(21 \cdot 8) + 3(2)(31 \cdot 21 + 60 \cdot 3) \\
=&-54
\end{aligned}
$$

(c) Die Arbeit ist einfacher. Man sollte, wenn möglich, die Zeilen bzw. Spalten umformen, bis eine Zeile bzw. Spalte so viel wie möglich null Einträge hat. □

Aufgabe 46. Es sei K ein Körper. Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $k \leq n$ bezeichnen wir mit $A[1:k, 1:k]$ die Untermatrix von A, die aus den ersten k Spalten der ersten k Zeilen besteht, dh. für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

wäre

$$A[1:2, 1:2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie: Sind $L, R, D \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ der Reihe nach eine linke untere Dreiecksmatrix mit ausschließlich Einsen auf der Diagonalen, eine rechte obere Dreiecksmatrix mit ausschließlich Einsen auf der Diagonalen und eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge alle $\neq 0$ sind, dann gilt für $A = LDR$ und alle $k = 1, \ldots, n$ $\det(A[1:k, 1:k]) \neq 0$.

(b) Beweisen Sie: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine Matrix, für die für alle $k \leq n$ $\det(A[1:k, 1:k]) \neq 0$ gilt, ann gibt es eine linke untere Dreiecksmatrix L mit ausschließlich Einsen auf der DIagonalen, eine rechte obere Dreiecksmatrix R mit ausschließlich Ensen auf der Diagonalen und eine Diagonalmatrix D, deren Diagonaleinträge alle $\neq 0$ sind, sodass $A = LDR$ gilt.

(c) Erklären Sie, was dieses Resultat mt elementaren Zeilenumformungen zu tun hat.

Aufgabe 47. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) A ist invertierbar.

(b) $\det(A) \neq 0$.

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(d) Der Rang von A ist n.

(e) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(f) Die Abbildung $L_A : K^n \to K^n, x \to Ax$ ist surjektiv.

(g) Die Abbildung L_A ist injektiv.

(h) Die Abbildung L_A ist bijektiv.

(i) Es gilt $\ker(A) = \{0\}$.

(j) Jedes Gleichungssystem der Form $Ax = b$ mit $b \in K^n$ ist eindeutig lösbar.

(k) Es gilt $Ax = 0$ nur für $x = 0$.

Beweis. Hier ist der Plan

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{(b)} \arrow[ddll, Rightarrow] & & \\
 & & \text{(f)} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{(c)} \arrow[ull, Rightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow] \\
\text{(a)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(h)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{(d)} \arrow[ur, Rightarrow] & \\
 & \text{(j)} & \text{(g)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & & \text{(e)} \\
 & \text{(k)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(i)} & &
\end{tikzcd}$$

1. Per Definition ist A invertierbar genau dann, wenn die Abbildung invertierbar ist. Abbildungen sind invertierbar genau dann, wenn die bijektiv sind.

2. Bijektive Abbildungen sind sowohl injektiv als auch surjektiv.

3. Per Definition ist der Rang die Dimension des Bildraums. Sei jetzt die Abbildung surjektiv. Dann ist $\mathrm{Bild}(L_A) = K^n$ mit dimension n, also (f) $\implies$ (d).

4. Sei jetzt L_A injektiv. Dann ist $\dim(L_A(K^n)) = \dim(K^n) = n$, also Dimension des Bilds ist gleich Dimension des Definitionsbereiches.

5. Rang ist n genau dann, wenn die Spalten linear unabhängig sind (Zeilenstufenform).

6. Spalten sind linear unabhängig genau dann wenn Zeilen linear unabhängig sind (Zeilenrang = Spaltenrang, im Skript).

7. Per letzte Übungsblatt: Linear unabhängige Spalten $\implies \det(A) \neq 0$.

8. (g) $\iff$ (i) per Satz 5.3.10 (Homomorphiesatz).

9. (i) $\iff$ (k) per Definition des Kerns.

10. Bijektivität liefert eine eindeutige Lösung. Surjektivität liefert eine Lösung, Injektivität liefert Eindeutigkeit. $\square$

Aufgabe 48. Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind $U, V \subseteq V$ Unterräume mit $U \not\subseteq W$ und $W \not\subseteq U$, dann ist $U \cup W$ kein Unterraum von V.

(b) Sind $U, W \subset V$ Unterräume mit $\dim(U) = \dim(W) = 2$ und gilt $\dim(V) = 3$, dann gilt $U = W$ oder $\dim(U \cap W) = 1$.

(c) Sind U, W Unterräume von V und sind $\phi : U \to K, \psi : W \to K$ lineare Abbildungen, dann gibt es eine lineare Abbildung $\Psi : U + W \to K$ mit $\Psi(u) = \phi(u)$ für alle $u \in U$ und $\Psi(w) = \psi(w)$ für $w \in W$.

(d) Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann gibt es genau einen Unterraum $W \subseteq V$ mit $U \oplus W = V$.

Beweis. (a) Wahr. Per Definition gibt es $u \in U$, aber $u \notin W$ und $w \in W$, aber $w \notin U$. Falls $U \cup W$ ein Unterraum wäre, würde $u + w \in U \cup W$, also entweder $u + w \in U$ oder $u + w \in W$. Sei $u + w = v \in U$. Dann gilt $w = v - u \in U$, also $w \in U$, ein Widerspruch. Analog bekommt man ein Widerspruch falls $u + v \in W$.

(b) Wahr. Aus $U \cap W \subseteq U$ gilt $\dim(U \cap W) \leq 2$. Wenn es 2 wäre, ist $U = U \cap W$. Daraus folgt: $U = W$.

Wir müssen daher nur den Fall $\dim(U \cap W) = 0$ ausschließen. In diesem Fall: Sei u_1, u_2 eine Basis von U sowie w_1, w_2 eine Basis von W. Da $\dim(U \cap W) = 0$, st $U \cap W = \{e\}$ und $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ ist linear unabhängig. Dadurch haben wir 4 linear unabhängige Vektoren in einem Raum mit Dimension 3, ein Widerspruch.

(c) Falsch. Sei $U = W$ und $U \ni V \in W$. Sei jetzt $\phi(u) \neq \psi(u)$. Dann kann nicht gleichzeitig $\phi(u) = \Psi(u)$ und $\psi(u) = \Psi(u)$ gelten.

(d) Falsch. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}((1,0,0)^T, (0,1,0)^T)$. Wir betrachten $V = \text{span}((0,0,1)^T)$ und $V' = \text{span}((0,1,1)^T)$.

Es ist klar, dass $V \cap U = V' \cap U = \{(0,0,0)\}$, also die direkte Summe ist wohldefiniert. Per Definition ist $\mathbb{R}^3 = V \oplus U$. Jedoch gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V'} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in V}$$

also $(0,0,1)^T \in V' \oplus U$. Daraus folgt, dass $V \oplus U \subseteq V' \oplus U$. Dann ist $V' \oplus U = \mathbb{R}^3$. □

Aufgabe 49. Es sei $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

(a) Bestimmen Sie alle eindimensionalen Unterräume von V.

(b) Bestimmen Sie anschließend für alle eindimensionalen Unterräum $U, W \subseteq V$ mit $U \neq W$ den Rang $U \oplus W$.

(c) Begründen Sie, dass Sie nun alle ein- und zweidimensionalen Unterräume von V gefunden haben.

(d) Visualisieren Sie die Struktur der Unterräume, in dem sie für jeden Unterraum einen Punkt in der Ebene festlegen und zwei Unterräume U, V genau dann mit einem Pfeil $U \to W$ verbinden, wenn $U \subset W$ gilt.

(e) Wie können Se anhand Ihres Bildes $U \cap W$ bzw. $U + W$ ablesen?

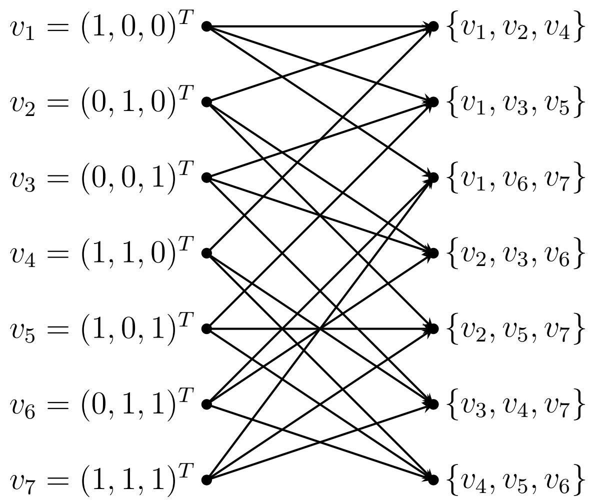
Beweis. (a) So ein Unterraum enthält zumindest ein Vektor, der nicht null ist. Weiter muss der Unterraum gleich der Span des Vektors sein. Da der Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist, enthält er nur 2 Elemente, 1 und 0. Sei $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Dann ist $1v = v$ und $0v = 0$, also ein 1-dimensionaler Unterraum enthält ein Vektor und der Nullvektor.

Dann gibt es, für alle $v \in V$, ein Unterraum $\{0, v\}$ der Dimension 1.

(b) Wir betrachten $v, w \in V$ mit $v \neq 0$ und die entsprechenden Unterräume V bzw. W. Der Unterraum enthält $v + w$, also er enthält mindestens $\{0, v, w, v + w\}$. Dies ist aber alles. Die Vektoren erzeugen keine neuen Vektoren, da $v + v = w + w = 0$ und daraus $(v + w) + v = v + v + w = w$ usw.

(c) In (a) wurde es schon begründet, warum alle eindimensionale Unterräume hier sind. Die zweidimensionale Unterräme müssen durch 2 Vektoren gespannt werden, z.B u und w. Wir können dann der Unterraum als direkte Summe von die entsprechenden Unterraume konstruieren.

(d) In der Legende schreiben wir nur die nicht null Vektoren, es versteht sich also, dass die Unterräme der Nullvektor enthalten.



(e) $U \cap W$: Wir suchen die Punkte, die einen auf sowohl U als auch W richteten Pfeil haben.

$U + W$: Wir suchen Pfeile von U und W, die sich auf dem gleichen Punkt richtet. Das Punkt ist also $U + W$. $\square$

CHAPTER TWO

Lineare Algebra 2

2.1 Blatt 1 (30/33)

Aufgabe 50. (a) Bestimmen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung

$$x^2 = u + iv,$$

in Abhängigkeit von $u, v \in \mathbb{R}$

(b) Führen Sie das Nullstellenproblem

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

mit $a \in \mathbb{C}\backslash 0, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ auf den Fall in (a) zurück. Geben Sie weiterhin eine geschlossene Darstelling aller Lösungen für den Fall $a = 1$ an.

Hat alles geklappt, sollte bei Ihnen speziell für den Fall $a = 1$ und $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(c) = 0$ die entsprechende Mitternachtsformel dastehen.

Beweis. (a) $|x^2| = |x|^2 = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}$

Daraus folgt:

$$|x| = (u^2 + v^2)^{1/4},$$
$$x = (u^2 + v^2)^{1/4} e^{i\theta}.$$

Setze es in $x^2 = u + iv$ ein und löse die Gleichungen für θ. Sei $\varphi = \mathrm{atan}_2(u, v)$ Dann ist:

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \text{ oder } \theta = \frac{\varphi + 2\pi}{2}.$$

(b)

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

d.h.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 =& \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\\ x =& -\frac{b}{2a}\pm p\end{aligned}$$

wobei p die Lösung zu $p^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ ist. Im Fall $a=1$ und $\mathrm{Im}(b)=\mathrm{Im}(c)=0$, daraus folgt:

$$x=-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}.$$

□

Aufgabe 51. Finden Sie für die Polynome $p,d\in\mathbb{C}[x]$ jeweils solche $q,r\in\mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r)<\deg(d)$, dass $p=qd+r$ gilt.

(a) $p=x^7+x^5+x^3+1, d=x^2+x+1$

(b) $p=x^5+(3-i)x^3-x^2+(1-3i)x+1+i, d=x^2+i$

(c) Wie sehen s, r aus, wenn man in (a) und (b) jeweils die Rollen von p und d vertauscht? D.h. bestimmen Sie $s,r\in\mathbb{C}[x]$ mit $\deg r<\deg p$, sodass $d=sp+r$ gilt.

Beweis. (a)

$$\begin{array}{r l}
 & x^5 - x^4 + x^3 \\ \cline{2-2}
x^2+x+1 \big) & x^7 \qquad + x^5 \qquad\qquad + x^3 + 1 \\
 & -x^7 - x^6 - x^5 \\ \cline{2-2}
 & -x^6 \\
 & x^6 + x^5 + x^4 \\ \cline{2-2}
 & x^5 + x^4 + x^3 \\
 & -x^5 - x^4 - x^3 \\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}$$

Daher

$$q=x^5-x^4+x^3, r=1.$$

(b) $q=x^3+(3-2i)x-x, r=-(1+6i)x+(1+2i)$

(c) $r=d, s=0$

□

Aufgabe 52. Seien

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&5\\2&1&-1&4\\1&0&-1&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-38\\-46\\-18\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(A)$ und $\ker(A)$

(b) Bestimmen Sie Lös(A,b) und Lös(A,c).

Beweis. (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\times -\frac{1}{3}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei dann $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Wenn $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \ker(A)$, gilt

$$\begin{aligned} t_3 &:= x_3 \\ t_4 &:= x_4 \\ x_1 &= x_3 - x_4 = t_3 - t_4 \\ x_2 &= -x_3 - 2x_4 = -t_3 - 2t_4 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -46 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= -18 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= -10 \end{aligned}$$

Deswegen ist Lös(A, b)

$$\begin{pmatrix} -18 + x_3 - x_4 \\ -10 - x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Es gibt keine Lösungen, weil $0 \neq 1$, also Lös$(A, c) = \varnothing$

$\square$

Aufgabe 53. Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume V mit Basis $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ und Basis $B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Wir definieren einen linearen Operator $T : V \to W$ wie folgt:

$$T(v_1) = w_1 + w_3 \qquad T(v_2) = w_1 + w_2, T(v_3) = -w_1 - w_2 - w_3.$$

(a) $w_1, w_2, w_3 \in \operatorname{span}\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$, weil

$$\begin{aligned} w_1 &= T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) \\ w_2 &= (-1)\,(T(v_3) + T(v_1)) \\ w_3 &= (-1)\,(T(v_2) + T(v_3)) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$W = \operatorname{span}(w_1, w_2, w_3) = \operatorname{span}(T(v_1), T(v_2), T(v_3)).$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{im}(T) = \mathbb{R}^3, \qquad \ker(T) = \{0\}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$B_W^* = \{w_1 + w_3, w_1 + w_2, -w_1 - w_2 - w_3\}.$$

(d)

$$B_V^* = \{v_1 + v_2 + v_3, -(v_1 + v_3), -(v_2 + v_3)\}.$$

2.2 Blatt 2

Aufgabe 54. Es seien die Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren den Operator

$$\Phi : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}^{n+1}, p \to y, \text{ mit } p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

wobei wir mit $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchsten n bezeichnen und $p(x)$ die Auswertung des Polynoms p im Punkt x beschreibt.

(a) Zeigen Sie: Sind die Punkte x_i paarweise verschieden, so ist die Abbildung Φ wohldefiniert und isomorph. (Eine Konsequenz hieraus ist die eindeutige Lösbarkeit der Polynominterpolation.)

(b) Was passiert, wenn Sie nicht fordern, dass die x_i paarweise verschieden sind? Kann Φ im Allgemeinen noch injektiv (surjektiv) sein?

Beweis. (a) Injektiv: Nehme an, dass es zwei unterschiedliche Polynome p_1, p_2 gibt, mit $p_1(x_i) = p_2(x_i) \forall i = 0, \dots, n$. Dann ist $p(x) := p_1(x) - p_2(x)$ auch ein Polynom, mit $p(x_i) := 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$. Weil $\deg(p) \leq n$ist, folgt daraus, dass $\forall x, p(x) = 0, p_1(x) = p_2(x)$. Das ist ein Widerspruch.

Surjektive: Sei $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$p(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n)$$

auch ein Polynom mit $\Phi(p) = (y_0, \dots, y_n)$.

Linearität: Sei $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x], a \in \mathbb{R}$. Sei auch $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$. Es gilt dann

$$p(x_i) = p_1(x_i) + p_2(x_i), i = 0, \dots, n$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(p_1 + p_2) = \Phi(p_1) + \Phi(p_2).$$

Es gilt auch, für $p(x) := ap_1(x)$, dass

$$p(x_i) = ap_1(x_i), i = 0, \dots, n,$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(ap_1) = a\Phi(p_1).$$

(b) Nein. Sei, zum Beispiel, $n = 1$, $x_0 = x_1 = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi(x) =& (0,0)^T \\ \Phi(x^2) =& (0,0)^T \end{aligned}$$

Aber die zwei Polynome sind ungleich.

□

Aufgabe 55. (a) Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben. Wir bilden die erweiterte Matrix

$$B = (A|1_n)$$

mit 1_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn A durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Verfizieren Sie weiterhin: Werden die dafür benötigten Zeilenumformungen auf ganz B angewendet, so ergibt sich im hinteren Teil, wo zu Beginn die Einheitsmatrix stand, genau A^{-1}.

(b) Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^{-1}.

Beweis. (a) Definiert $(x, y), x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$ durch $\mathbb{K}^{n+m} \ni (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Eine solche erweiterte Matrix bedeutet eine Gleichungssystem durch

$$B(x, -y) = Ax - 1_n y = 0,$$

wobei $x, y \in \mathbb{K}^n$. Für jeder $x \in \mathbb{K}^n$ gibt es $y \in \mathbb{K}^n$, so dass $B(x, -y) = 0$. Nehme an, dass wir durch elementare Zeilenumformung

$$B = (A|1_n) \to (1_n, A') := B'$$

kann. Die Gleichungssystem ist dann $x = A'y$. Dadurch können wir für jeder $y \in \mathbb{K}^n$ eine $A'y = x \in \mathbb{K}^n$ rechnen, für die gilt, dass $Ax = y$. Das heißt, dass $A' = A^{-1}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-3R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times-}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

□

Aufgabe 56. Es seien die Vektorräume V, W über $\mathbb{K}$ gegeben mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Wir betrachten eine lineare Abbildung

$$T : V \to W, v \to T(v)$$

Seien B_V und B_W Basen von V, bzw. W. Wir nehmen an T ist nicht die konstante Nullabbildung. Beweisen Sie:

(a) Der Kern von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder trivial (d.h. nur die 0) oder hängt nur von der Wahl von B_V ab, aber nicht von B_W.

(b) Das Bild von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder der ganze $\mathbb{K}^m$ oder hängt nur von der Wahl von B_W ab, aber nicht von B_v.

(c) Der Rang von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist unabhängig von B_W und B_V.

Beweis. Nach Korollar 5.43 gilt, für $A, A' \subseteq V$ und $B, B' \subseteq W$ Basen der Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$, und $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

$${}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\mathrm{id}_V]_{A'}.$$

Lemma 2.1. *Jeder Basiswechsel für sowohl B_V als auch B_W kann als zwei Basiswechseln interpretiert werden, wobei eine Basiswechsel nur B_V verändert, und die andere nur B_W.*

Beweis.

$${}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\mathrm{id}_V]_{A'} = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B \left({}_B[\mathrm{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\mathrm{id}_V]_{A'}\right) {}_A[\mathrm{id}_V]_A.$$

(In den Klammern gibt es zuerst ein Basiswechsel in V, dann ein Basiswechsel in W). Ein ähnliche Argument zeigt, dass wir zuerst ein Basiswechseln in W betrachten kann. □

Korollar 2.2. *In die Aufgabe muss man nur das Fall betrachten, in dem entweder B_V oder B_W sich verändert.*

(a) Nehme an, $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V}) \neq 0$. Die zwei Fälle

(i) Nur B_W sich verändert.
Sei $v \in \mathbb{K}^n$, ${}_B[\Phi]_A v = 0$. Es gilt

$${}_{B'}[\Phi]_A = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B[\Phi]_{AA}[\mathrm{id}_V]_A v = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_{BB}[\Phi]_A v = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B(0) = 0.$$

Sei jetzt ${}_B[\Phi]_A v \neq 0$. Solange wir zeigen, dass

$${}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B u \neq 0$$

für $\mathbb{K}^m \ni u \neq 0$, sind wir fertig. Aber ${}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B u = 0$, nur wenn $u = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n, v_i \in B' = 0$ wegen der linear Unabhängigkeit.

(ii) Nur B_V sich verändert. Es stimmt leider nicht, dass $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V})$ von B_V abhängig sein *muss*. Sei zum Beispiel B_K ein Basis für $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V})$, und B_V und B'_V Basen von V, für die gilt $B_K \subset B_V, B_K \subset B'_V$. Jetzt ist der Kern einen invarianten Unterraum von B unter ${}_{B'_V}[T]_{B_V}$, also der Kern verändert sich nicht, wenn der Basis sich verändert.

Wenn der Kern kein invarianter Unterraum ist, gilt es natürlich, das der Kern sich durch das Basiswechsel verändert.

(b) Nehme an, dass $\mathrm{im}({}_{B_W}[T]_{B_V}) \neq \mathbb{K}^m$. Wir betrachten noch einmal die zwei Fälle

(i) Nur B_V sich verändert. Weil ${}_{B_V}[\mathrm{id}]_{B'_V} : V \to V$ bijektiv ist, gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{im}\left({}_{B_W}[T]_{B'_V}\right) &= \left\{{}_{B_W}[T]_{B'_V} v | v \in \mathbb{K}^m\right\} = \left\{{}_{B_W}[T]_{B_V B_V}[\mathrm{id}]_{B'_V} v | v \in \mathbb{K}^m\right\} \\ &= \left\{{}_{B_W}[T]_{B_V} v | v \in \mathbb{K}^m\right\} = \mathrm{im}\left({}_{B_W}[T]_{B'_V}\right)\end{aligned}$$

(ii) B_W sich verändert. Jetzt gilt

$${}_{B'_W}[T]_{B_V} = {}_{B'_W}[\mathrm{id}]_{B_W B_W}[T]_{B_V}.$$

Leider ist es noch falsch, dass das Bild von B_W abhängig sein *muss* wegen eines ähnliches Arguments zu das Kern.

(c) Weil das Bild von B_V unabhängig ist, ist der Rang auch von B_V unabhängig.

Weil ${}_{B'_W}[\mathrm{id}]_{B_W}$ bijektiv als Abbildung $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ ist, ist es auch bijekive für alle Teilmengen $U \subseteq \mathbb{K}^m$. Das Bild vor und nach dem Basiswechsel sind dann isomorph. Deswegen ist der Rang von B_W unabhängig.

□

Aufgabe 57. Es wird gerechnet.

(a) Wir definieren die lineare Abbildung T (x) = A · x mit A gegeben wie in 2(b). Wir definieren die Basen

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \right\}, \qquad B_2 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie

$${}_{B_2}[T]_{B_1}.$$

(b) Wir schauen nochmal auf Aufgabe 1. Es seien die paarweise verschiedene Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gegeben und die Abbildung Φ wie zuvor. Gegeben sei die kanonische Basis

$$B := \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

vom $\mathbb{R}^n$ sowie die Basen

$$B_M := \left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}$$

und

$$B_l := \{l_0(x), l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x)\}, \qquad \text{mit} \qquad l_i(x) := \prod_{i \neq j = 0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Bestimmen Sie

$${}_B[\Phi]_{B_M}, \qquad \text{und} \qquad {}_B[\Phi]_{B_l}.$$

Ausgehend von den entstandenen Matrizen: Stellen Sie eine Vermutung, welche Basis für große n bevorzugt wird.

Beweis. Wir berechnen

$${}_{B_2}[\mathrm{id}]_{B_1}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = - \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\,2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$${}_{B_2}[\mathrm{id}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $\{{}_{B_2}[\mathrm{id}]_{B_1}\}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times -1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+3R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+2R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\times -1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

also

$${}_{B_1}[\mathrm{id}]_{B_2} = \{{}_{B_2}[\mathrm{id}]_{B_1}\}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
{}_{B_1}[\mathrm{id}]_{B_2} A_{B_2}[\mathrm{id}]_{B_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & -5 & -4 \\ 8 & 1 & 10 & 7 \\ -7 & 0 & -12 & -9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sei $p_k(x) = x^k \in B_M$. Es folgt, dass $\Phi\left(p_k(x)\right) = \left\{x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right\}$. Deswegen gilt

$$
{}_B[\Phi]_{B_M} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}.
$$

Betrachten Sie dann $l_k(x)$. Weil $(x - x_i)$ für $i \neq k$ vorkommt, gilt $l_k(x_i) = 0 \forall i \neq k$. Für $i = k$ gilt $l_k(x_k) = \prod_{i \neq j = 0}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1$. Es gilt daher

$$
{}_B[\Phi]_{B_l} = I_n = \operatorname{diag}_n(1, 1, \ldots, 1).
$$

Ich vermute, dass B_l für große n bevorzugt wird... □

2.3 Blatt 3

Aufgabe 58. (a) Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte der folgenden Matrizen. Was muss jeweils für die Dimensionen erfüllt sein?

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}
$$

$$
D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
$$

(b) Eine Blockmatrix ist eine Matrix von der Form

$$
A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}
$$

mit Matrizen $A_1 \in \mathbb{K}^{n \times m}, A_2 \in \mathbb{K}^{n' \times m}, A_3 \in \mathbb{K}^{n \times m'}, A_4 \in \mathbb{K}^{n' \times m'}$. Sei weiterhin

$$
B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}
$$

mit ebenso Einträgen aus $\mathbb{K}$. Wer nun meint, die Multiplikation von A und B sei so simpel wie

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_3B_2 & A_1B_3 + A_3B_4 \\ A_2B_1 + A_4B_2 & A_2B_3 + A_4B_4 \end{pmatrix}$$

hat tatsächlich recht. Beweisen Sie diese Formel und geben Sie gleichzeitig die B_i's für die benötigten Matrizenräume an, sodass die Rechnung wohldefiniert ist.

Beweis. (a) Für A eine $n \times m$ Matrize, und B eine $p \times q$ Matrize, ist AB wohldefiniert, nur wenn $m = p$

Die Matrizprodukte sind

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ 6 & 8 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$
$$AE = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ 43 & 100 \end{pmatrix}$$
$$FA = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$BC = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$
$$CD = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ -7 & 14 & 0 & 56 \end{pmatrix}$$
$$DC = (55)$$
$$CF = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 \\ -7 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$
$$FE = \begin{pmatrix} -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(b) Wir brauchen $B_1 \in \mathbb{K}^{m \times p}, B_2 \in \mathbb{K}^{m' \times p}, B_3 \in \mathbb{K}^{m \times q}, B_4 \in \mathbb{K}^{m' \times q}$ für $p, q \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen, für $v_1 \in \mathbb{K}^a, v_2 \in \mathbb{K}^b$, das Vektor $(v_1, v_2) \in \mathbb{K}^{a+b}$. Sei jetzt $v_1 \in \mathbb{K}^p, v_2 \in \mathbb{K}^q$.

$$\begin{aligned} AB(v_1, v_2) =& A \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ =& A \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} B_1v_1 + B_3v_2 \\ B_2v_1 + B_4v_2 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{K}^m}}_{\in \mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 v_1 + B_3 v_2 \\ B_2 v_1 + B_4 v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_1(B_1 v_1 + B_3 v_2) + A_3(B_2 v_1 + B_4 v_2) \\ A_2(B_1 v_1 + B_3 v_2) + A_4(B_2 v_1 + B_4 v_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_3 B_2 & A_1 B_3 + A_3 B_4 \\ A_2 B_1 + A_4 B_2 & A_2 B_3 + A_4 B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Aufgabe 59. Es seien V und W Vektorräume über K, nicht notwendigerweise endlich-dimensional und

$$\Phi : V \to W$$

eine lineare Abbildung. Beweisen Sie:

(a) Die duale Abbildung Φ^* ist injektiv genau dann, wenn Φ surjektiv ist.
Hinweis: Die Richtung $\implies$ beweisen Sie am einfachsten als eine Kontraposition.

(b) Die duale Abbildung Φ^* ist surjektiv genau dann, wenn Φ injektiv ist.
Hinweis: Die Rückrichtung lässt sich am einfachsten direkt beweisen. Nutzen Sie in dem Fall die Injektivität von Φ aus, um für ein beliebiges $v^* \in V^*$ eine lineare Abbildung im Bild von Φ^* zu konstruieren, die die gleichen Werde wie Abbildung v^* liefert.

(c) Im Falle der Invertierbarkeit gilt

$$\left(\Phi^{-1}\right)^* = (\Phi^*)^{-1}.$$

Beweis. (a) Sei Φ surjektiv, und $w_1^*, w_2^* \in W^*$. Es gilt $\Phi w_1^* = w_1^* \circ \Phi, \Phi w_2^* = w_2^* \circ \Phi$. Die zwei Abbildungen $w_1^* \circ \Phi$ und $w_2^* \circ \Phi$ sind unterschiedliche, solange es mindestens ein $v \in V$ gibt, sodass $(w_1^* \circ \Phi)(v) \neq (w_2^* \circ \Phi)(v)$. Wir haben aber ausgenommen, dass $w_1^* \neq w_2^*$. Das bedeutet, dass es $w \in W$ gibt, so dass $w_1^*(w) \neq w_2^*(w)$. Weil Φ surjektiv ist, ist $w = \Phi(v)$ für eine v. Dann ist $(w_1^* \circ \Phi)(v) \neq (w_2^* \circ \Phi)(v)$, also Φ^* ist injektiv.

Jetzt nehmen wir an, dass Φ nicht surjektiv ist, also es gibt ein Unterraum $U \subseteq W$, sodass $U \setminus \{0\} \cap \operatorname{im}(\Phi) = \varnothing$. Dann können wir zwei lineare Abbildungen w_1^* und w_2^* definieren, die auf $\operatorname{im}(\Phi)$ gleich sind, aber auf U ungleich sind. Es gillt $\Phi^*(w_1) = \Phi^*(w_2)$, aber $w_1 \neq w_2$, also Φ^* ist nicht injektiv.

(b) Zuerst beweisen wir: Φ nicht injektiv $\implies$ Φ^* nicht surjektiv. Sei $v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2$ und $\Phi(v_1) = \Phi(v_2) = w$.Es gibt eine lineare Abbildung $v^* \in V^*$, so dass $v^*(v_1) \neq v^*(v_2)$. Sei aber $w^* \in W^*$. Es gilt $(\Phi^* w^*)(v) = (w^* \circ \Phi)(v)$. Dann ist

$$\Phi^* w^*(v_1) = \Phi^*(w) = \Phi^* w^*(v_2),$$

also $\Phi^*(w^*) \neq v^*$ für alle $w^* \in W^*$. Es folgt: Φ^* ist nicht surjektiv.

Jetzt beweisen wir Φ injektiv $\implies$ Φ^* surjektiv. Sei $v^* \in V^*$. Wir definieren eine Abbildung (momentan nicht unbedingt linear) so: Für alle $w \in \text{im}(\Phi)$, also $w = \Phi(v)$, ist $w^*(w) = v^*(v)$. Für $w \notin \text{im}(\Phi)$ ist $w^*(w) = 0$.

Es ist klar, dass $w^* \circ \Phi = v^*$. Wir müssen nur zeigen, dass w^* linear ist, also $w^* \in W^*$.

(1) Sei $w \in W$, $a \in \mathbb{K}$. Falls $w \notin \text{im}(\Phi)$, ist auch $aw \notin \text{im}(\Phi)$. Es gilt daher

$$w^*(aw) = aw^*(w) = 0.$$

Falls $w \in \text{im}(\Phi)$, also $w = \Phi v$ für ein $v \in V$, gilt auch $aw = \Phi(av)$, und

$$w^*(aw) = v^*(av) = av^*(v) = aw^*(w).$$

Daraus folgt: $w^* \in W^*$, und $\Phi^*(w^*) = v^*$.

(c) In den letzten Teilaufgaben haben wir bewiesen, dass wenn Φ bijektiv ist, ist Φ^* auch bijektiv. Die Rückrichtung stimmt auch. Wir müssen nur Gleichheit zeigen.

> **Vereinfachung**
>
> Wir müssen nur zeigen, per Definition eine Inverseabbildung, dass
> $$\Phi^* \circ \left(\Phi^{-1}\right)^* = \text{id}_{V^*}.$$
> (Wir müssen nicht zeigen, dass $\left(\Phi^{-1}\right)^* \circ \Phi^* = \text{id}_W$, weil die beide Abbildungen bijektiv sind.)

Es gilt, für $v^* \in V^*$, $\left(\Phi^{-1}\right)^* (v^*) = v^* \circ \Phi^{-1}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left(\Phi^* \circ \left(\Phi^{-1}\right)^*\right)(v^*) &= \Phi^*\left(v^* \circ \Phi^{-1}\right)\\ &= v^* \circ \Phi^{-1} \circ \Phi\\ &= v^*\end{aligned}$$

□

Aufgabe 60. (Darstellung eines Unterraums)

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Beweisen Sie: Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau dann eine Lösung in $x \in \mathbb{K}^m$, wenn für alle $y \in \mathbb{K}^m$ aus $A^T y = 0$ folgt $b^T y = 0$.

(b) Es sei

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(c) Verwenden Sie (a) um eine Matrix B zu konstruieren, sodass gilt

$$U = \ker(B).$$

Beweis. (a) (a) Sei x eine Lösung, $Ax = b$, und $y \in \mathbb{K}^m$ beliebig, sodass $A^T y = 0$. Es gilt dann:

$$x^T A^T y = b^T y = 0.$$

(b) Wir machen eine Basisergänzung:

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir brauchen $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{1,1} & w_{2,1} \\ 0 & 0 & w_{1,2} & w_{2,2} \\ 0 & 0 & w_{1,3} & w_{2,3} \\ 0 & 0 & w_{1,4} & w_{2,4} \end{pmatrix} := C,$$

wobei $(w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4})^T$ und $(w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3}, w_{2,4})^T$ linear unabhängig sind, also $B = CA^{-1}$. Weil

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Wir nehmen außerdem

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.4 Blatt 4

Aufgabe 61. Wir definieren mit S_n die Menge der bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} .$$

Dann ist bekannterweise $(S, \circ)$ mit

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(i) = \sigma_2(\sigma_1(i))$$

eine Gruppe. Wir führen für gewöhnlich eine Abbildungstabelle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

mit $i_1, \dots, i_n$ paarweise verschieden, um zu signalisieren $\sigma(k) = i_k$ für $k = 1, \dots, n$.

(a) Eine übliche Darstellung bei Elementen aus S_n ist die Zyklenschreibweise. Ein Zyklus der Länge k mit $k \leq n$ hat die Form

$$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$$

und signalisiert $i_1 \to i_2, i_2 \to i_3$, usw. $i_k \to i_1$ under σ. Ist die Zahl i_j nicht im Zyklus vertreten, so wird sie unter σ auf sich selbst abgebildet. Speziell für $k = 1$ erhalten wir die Identität und schreiben

$$\sigma = (1).$$

Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Abbildungen σ durch ein Zyklus der Länge k realisiert werden können! Kann jedes Element in S_3 (S_4) als ein Zyklus geschriebeb werden?

(b) Wir definieren die Menge der (Permutations-)Matrizen

$P_n := \big\{ P \in \mathbb{K}^{n \times n} : P = (e_{i_1}, \dots, e_{i_n},$ mit $i \leq i_k \leq n$ und alle i_k paarweise verschi

mit e_i der i-te Einheitsvektor. Verifizieren Sie: $(P_n, \cdot)$ ist mit der herkömmlichen Matrixmultiplikation eine Gruppe! Bestimmen Sie weiterhin einen bijektiven Gruppenmorphismus

$$\Phi : (S_n, \circ) \to (P_n, \cdot),$$

sodass gilt

$$\Phi(\sigma) e_i = s_j \iff \sigma(i) = j.$$

Beweisen Sie, dass sich jedes P aus P_n schreiben lässt als

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} V_{i_k j_k},$$

mit V_{ij} definiert wie in Lemma 5.56.

Beweis. (a) Es gibt $n!$ Möglichkeiten für eine Folge $(i_1 i_2 \dots i_k)$, aber wir können die zyklisch permutieren und σ verändert sich nicht. Deswegen gibt es $n!/n = (n-1)!$ unterschiedliche Abbildungen, die durch ein Zyklus der Länge k realisiert werden können.

Ja, jedes Element in S_3 kann als ein Zyklus geschrieben werden. Das können wir explizit machen:

$$\begin{array}{ccc} (1) & (12) & (23) \\ (13) & (132) & (123) \end{array}$$

Weil wir 6 Elemente haben, und $|S_3| = 3! = 6$, haben wir alle Elemente.

Das stimmt aber nicht für S_4. Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Falls es als Zyklus geschreiben werden kann, muss das Zyklus den Länge 4 haben, weil $\sigma(i) \neq i$ für alle i. Wir fangen obdA mit 1 an. Dann ist das Zyklus $(12\dots)$. Aber weil $\sigma(2) = 1$, hört das Zyklus auf, und $\dots = \varnothing$. Dann ist das Zyklus nicht mit Länge 4.

(b) Sei $A, B \in P_n$ beliebige Elemente von P_n,

$$\begin{aligned} A =& (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \\ B =& (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \end{aligned}$$

(i) G ist abgeschlossen: Wir betrachten ABe_k für k beliebig.

$$ABe_k = Ae_{j_k} = e_{i_{j_k}},$$

also

$$AB = (e_{i_{j_1}}, e_{i_{j_2}}, \dots, e_{i_{j_n}}) \in P_n.$$

Das i_{j_k} paarweise verscheiden sind folgt daraus, dass j_k alle paarweise verscheiden sind.

(ii) Neutrales element: Wir wissen aus der linearen Algebra, dass

$$1_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in P_n$$

das neutrales Element ist.

(iii) Assoziativität: Wir wissen auch, dass Matrizmultiplikation assoziativ ist.

(iv) Existenz des Inverses: Sei jetzt p_k, sodass $i_{p_k} = k$.

> **Bemerkung**
>
> Man kann $i, p : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ interpretieren. Dann ist i eine bijektive Abbildung, und das Existenz einer inversen Abbildung p folgt daraus. Deswegen ist unsere Entscheidung immer möglich.

Wir betrachten $A(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n})$, und dafür die Wirkung der Abbildung auf einem beliebigen Basiselement e_k:

$$A(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n})e_k = Ae_{p_k} = e_{i_{p_k}} = e_k.$$

(c) Sei i eine bijektive Abbildung $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Wir schreiben i_k oder $i(k)$ als das Bild von k. Wir vermuten, dass die gewünschte Homomorphismus

$$\Phi : i \to (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots e_{i_n})$$

ist.

(i) $\Phi(\sigma)e_j = e_{\sigma_j}$, also $\Phi(\sigma)e_i = s_j \iff \sigma(i) = j$.

(ii) Injektiv: Sei $\sigma, \sigma' \in S_n$, $\sigma \neq \sigma'$, insbesondere gilt $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$. Es gilt dann

$$\begin{tikzcd} & (e_{\sigma_1}, \dots, \boxed{e_{\sigma_i}}, \dots, e_{\sigma_n}) \\ \Phi(\cdot) \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma'"'] & \\ & (e_{\sigma'_1}, \dots, \boxed{e_{\sigma'_i}}, \dots, e_{\sigma_n}) \end{tikzcd}$$

$\neq$

also $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\sigma')$.

(iii) Surjektiv: Sei $M = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$. Wie im letzten Teilaufgabe können wir eine Abbildung $i(k) = i_k$ definieren, und $\Phi(i) = M$.

(iv) Homomorphismusgesetz: Es ist zu zeigen, für $i, j \in S_n$ und

$$\begin{aligned} M_1 =& (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \Phi(i) \\ M_2 =& (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) = \Phi(j), \end{aligned}$$

dass

$$\Phi(i \circ j)(e_k) = M_1 M_2 e_k$$

für alle k gilt. Per Definition ist

$$\Phi(i \circ j)e_k = e_{i(j(k))} = e_{i_{j_k}}.$$

Es gilt auch

$$M_1 M_2 e_k = M_1 e_{j(k)} = e_{i(j(k))} = e_{i_{j_k}}.$$

(d) Es gilt

$$\Phi((ij)) = V_{ij}$$

per die vorherige Definition. Dann ist die Behauptung klar. Sei $P \in P_n$

(i) Weil Φ bijektiv ist, ist $P = \Phi(\sigma)$ für eine $\sigma \in S_n$.

(ii) σ kann als Produkt von $n-1$ Transpositionen dargestellt werden (wenn weniger als $n-1$, können wir id hinzufügen), z.B. $\sigma = (a_1b_1)(a_2b_2)\dots(a_{n-1}b_{n-1})$.

(iii) Das Bild von ein Transposition ist ein Matriz V_{ij}.

(iv) Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma) =& \Phi((a_1b_1))\Phi((a_2b_2))\dots\Phi(a_{n-1}b_{n-1})\\ =& V_{a_1b_1}V_{a_2b_2}\dots V_{a_{n-1}b_{n-1}}\\ =& P.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 62. Gegeben sei die Permutation

$$S_9 \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 7 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen sie σ als Produkt von Transpositionen dar.

(b) Berechnen Sie das Signum von σ.

Beweis. (a) Zuerst berechnen wir die disjunkter Zyklus

$$\begin{aligned}Z_1 =&(1249578)\\ Z_2 =&(6)\\ Z_3 =&(3)\end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\sigma = (18)(17)(15)(19)(14)(12).$$

Begründung

Es gilt, für ein Zyklus

$$(a_1a_2\dots a_n) = \underbrace{(a_1a_n)(a_1a_{n-1})\dots(a_1a_2)}_{\sigma'}.$$

Wir betrachten zuerst $\sigma'(a_1)$. Dann ist $(a_1a_2)a_1 = a_2$. a_2 kommt nie wieder vor, also $\sigma'(a_1) = a_2$. Dann betrachten wir a_k, $k \neq 1$. Wir haben $(a_1a_k)a_k = a_1$. a_1 kommt sofort wieder vor, und ist $(a_1a_{k+1})a_1 = a_{k+1}$. a_{k+1} kommt nicht wieder vor, also $\sigma'(a_k) = a_{k+1}$.

(b) Wir haben

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((18))\operatorname{sgn}((17))\dots\operatorname{sgn}((12)) = (-1)^6 = 1. \qquad \square$$

Aufgabe 63. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch* bzw. *antisymmetrisch*, wenn $A^T = A$ bzw. $A^T = -A$ gilt. Seien $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ die Untermengen von $M_n(\mathbb{R})$, die aus allen symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen bestehen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R}), \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ Untervektorräume von $M_n(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$A^T + A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R}), \qquad A - A^T \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R}), \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Folgern Sie, dass $M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SM}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$.

(c) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{SM}_n(\mathbb{R}))$ und $\dim(\mathrm{AS}_n(\mathbb{R}))$.

(d) Seien $A, B \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ asymmetrische Matrizen. Zeigen Sie, dass der *Kommutator* $[A, B] := AB - BA$ wieder antisymmetrisch ist.

Beweis. (a) Sei $M, N \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, und $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$(aM)^T = aM^T = aM,$$

also $aM \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. Es gilt auch

$$(aM + bN)^T = aM^T + bN^T = aM + bN,$$

also $aM + bN \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$.

Sei jetzt $M, N \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$. Ähnlich folgt

$$(aM)^T = aM^T = a(-M) = -aM,$$

und

$$(aM + bN)^T = aM^T + bN^T = a(-M) + b(-N) = -(aM + bN)$$

also $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ sind Untervektorräume.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
(A + A^T)^T &= A^T + (A^T)^T \\
&= A^T + A = A + A^T \\
(A - A^T)^T &= A^T - (A^T)^T \\
&= A^T - A = -(A - A^T)
\end{aligned}$$

Für alle $A \in M_n(\mathbb{R})$ gilt

$$A = \frac{1}{2}(\underbrace{A + A^T}_{\in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{A - A^T}_{\in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})}),$$

also $M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SM}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$.

(c) In ein Matriz gibt es genau $n \times n$ freie Parameter. Aber für symmetrische Matrizen haben wir $M_{xy} = M_{yx}$, also wir haben nur

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

freie Parameter in $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. Für die antisymmetrischen Matrizen gilt eine ähnliche Argument, aber die Elemente auf dem Diagonal müssen 0 sein. Wir haben daher nur

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

freie Parameter, also

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})) =& \frac{n(n+1)}{2}\\ \dim(\mathrm{AS}_n(\mathbb{R})) =& \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}[A,B]^T =&(AB-BA)^T\\ =&(AB)^T-(BA)^T\\ =&B^TA^T-A^TB^T\\ =&(-B)(-A)-(-A)(-B)\\ =&BA-AB\\ =&-(AB-BA)\end{aligned}$$

also $[A,B]$ ist antisymmetrisch. □

Aufgabe 64. Gegeben sind die Matrizen $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1-t \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}$, $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}, t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{rang}(A(t))$ und $\mathrm{rang}(B(t))$ in Abhängigkeit von t.

(b) Berechnen Sie die Inversen $(A(0))^{-1}$ und $(B(1))^{-1}$.

Beweis. (a) Wir verwenden das Gauß-Algorithisums

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\times t}$$

$$\begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\times t+1}$$
$$\begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & 1-t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Für $t \neq 0, t^2-1 \neq 0$, also $t \notin \{-1,0,1\}$, ist es offenbar, $\text{rang}(A(t)) = 3$ ist.

Für $t = \pm 1$ ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, also $Ae_1 = Ae_2 = Ae_3 \neq 0$. Daraus folgt, dass $\text{rang}(A(\pm 1)) = 1$.

Obwohl es vom Gauß-Algorithismus so aussieht, dass $\text{rang}(A(0)) \neq 3$, ist eigentlich $\text{rang}(A(0)) = 3$. Wenn $t = 0$ gilt

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte dann, dass

$$\begin{aligned} A(e_3 - e_1) &= (0,0,1)^T \\ A(e_3 - e_2) &= (0,1,0)^T \\ A(e_1 + e_2 - e_3) &= (1,0,0)^T \end{aligned}$$

Weil wir jede Basiselement erreichen können, können wir also jedes Element $v \in \mathbb{R}^3$ erreichen. Deswegen gilt $\text{rang}(A(0)) = 3$. Zusammenfassung:

$$\text{rang}(A(t)) = \begin{cases} 1 & t = \pm 1, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Wir machen etwas ähnliches für B :

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1-t \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1-t \\ 0 & -2t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\times 2t}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -2t & -2(t-1)t \\ 0 & -2t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -2t & -2(t-1)t \\ 0 & 0 & t(2t-1) \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt, dass wenn $t \neq 0$ und $t \neq 1/2$, ist $\text{rang}(B(t)) = 3$. Wenn $t = 1/2$, ist die Matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{rang}(B(1/2)) = 2$. Wenn $t = 0$ dürfen wir das Ergebnis des Gauß-Algorithismuses nicht direkt nutzen, weil wir durch $2t$ multiplizieren haben. Stattdessen schreiben wir

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist es klar, dass

$$\operatorname{im}(B(0)) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

also $\operatorname{rang}(B(0)) = 2$.

(b) Wir haben

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also $(A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt auch

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times -1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

also

$$(B(1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

2.5 Blatt 6

Aufgabe 65. Betrachten Sie eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Zahlen $d_1, \dots d_n \in \mathbb{R}$ auf der Diagonalen.

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $D := d_1 \dots d_n \neq 0$ gilt. Beweisen Sie, dass in diesem Fall die zu A inverse Matrix ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Seien nun alle Einträge von A ganze Zahlen und A invertierbar. Zeigen Sie, dass die inverse Matrix A^{-1} aus rationalen Einträgen besteht, wobei (im gekürzten Fall) als Nenner höchstens D auftritt.

Beweis. (a) Es genügt zu zeigen, dass $\det(A) = d_1 \dots d_n$ für ein Dreiecksmatrix gilt. Wir beweisen es per Induktion auf n. Für $n = 1$ ist $\det(A_1) = A_{11}$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für $n-1$ gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Wir betrachten ein $n \times n$ Dreiecksmatrix A_n und ein Laplaceentwicklung auf der ersten Spalte.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & A_{n-1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Also $\det(A_n) = a_{11}\det(A_{n-1})$. Als Induktionsannahme haben wir angenommen, dass $\det(A_{n-1}) = a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$. Daraus folgt:

$$\det(A_n) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Die Ergebnis folgt daraus und aus Proposition 6.28.

(b) Wir beweisen es durch Durchfürung des Gauß-Algorithismus.

Wir fangen an mit dem zweiten Spalte bzw. zweiten Zeile. Wir dividieren das zweite Zeile durch a_{22}. Das Matrix sieht so aus

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & \dots & a_{2n}/a_{22} & 0 & 1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Dann subtrahtieren wir a_{12} mal die zweite Zeile von die erste Zeile. Weil der Einträg in der linken Seite der zweiten Zeile eine rationale Zahl mit Nenner höchstens a_{22} ist, werden alle Einträge in der zweiten Spalte des ehemaligen Einheitsmatrix auch rationale Zahlen mit Nenner höchstens $\frac{1}{a_{22}}$.

Danach dividieren wir die dritte Zeile durch $a_{22}a_{33}$. Dann sieht das Matrix so aus

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} & 1 & -1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & \dots & a_{2n}/a_{22} & 0 & 1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & \dots & 1 & 0 & 0 & 1/(a_{22}a_{33}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Alle Einträge in der dritten Spalte sind Vielfachen von $1/a_{22}$, also wir können alle Einträge darin 0 machen durch subtrahtieren ein Vielfaches von die dritte Zeile, was das Nenner nicht erhöhen kann.

Ähnlich machen wir weiter. Wir dividieren die vierte Zeile durch $1/a_{22}a_{33}a_{44}$. Alle Einträge in die vierte Spalte werden nur Vielfachen von $1/a_{22}a_{33}$. Zuletzt dividieren wir die erste Zeile durch a_{11}, damit das Matrix auf der linken Seite das Einheitsmatrix ist. Dann kann das Nenner höchstens $a_{11} \dots a_{nn}$ sein. □

Aufgabe 66. Es sei im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir definieren die Spur

$$\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad A \to \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Spur ist ein lineares Funktional in $M_n(\mathbb{K})^*$.

(b) Für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

(c) Für $A \in GL_n(\mathbb{K})$ und $B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt

$$\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(B).$$

(d) Ist $f \in M_N(\mathbb{K})^*$ ein lineares Funktional mit

$$f(AB) = f(BA), \qquad f(1) = n$$

für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, dann gilt bereits $f = \operatorname{tr}$.

Beweis. (a) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(xA + yB) =& \sum_{i=1}^{n} (xA + yB)_{ii} \\
=& \sum_{i=1}^{n} [(xA)_{ii} + (yB)_{ii}] \\
=& \sum_{i=1}^{n} (xA)_{ii} + \sum_{i=1}^{n} (yB)_{ii} \\
=& x \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii} + y \sum_{i=1}^{n} (B)_{ii} \\
=& x\operatorname{tr}(A) + y\operatorname{tr}(B).
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} =& \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \\
=& \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} && \text{wir dürfen endliche Summe umordnen} \\
=& \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} B_{ik} && \text{wir vertauschen } i \text{ und } k \\
=& \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} && \mathbb{K} \text{ ist kommutativ} \\
=& \operatorname{tr}(BA)
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(ABA^{-1}) =& \operatorname{tr}\left((AB)A^{-1}\right) \\
=& \operatorname{tr}\left(A^{-1}(AB)\right) \\
=& \operatorname{tr}(A^{-1}AB) \\
=& \operatorname{tr}(AB)
\end{aligned}$$

(d) Wir betrachten ein Basis für $M_n(\mathbb{K})$. Das gewählte Basis ist die Elementarmatrizen E_{ij} (s. Proposition 5.54). Es gilt

$$E_{ii}E_{ij} = E_{ij} \qquad E_{ij}E_{ii} = 0 \qquad i \neq j.$$

Es folgt $f(E_{ij}) = f(E_{ii}E_{ij}) = f(E_{ij}E_{ii}) = f(0) = 0$, also $f(M)$ ist nicht von nichtdiagonale Elemente abhängig.

Danach betrachten wir die diagonale Elemente. Wir können ein Permutationsmatrix (ein Matrix mit die Zeilen i und j vertauscht) P betrachten. Es gilt $P^{-1} = P$ und

$$P^{-1}\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n).$$

Weil f angewandt auf die beide Seite der Gleichung wegen (c) gleich sein muss, ist f unabhängig von ein Umordnung der diagonale Elemente. Zuletzt gilt

$$f(1) = \sum_{i=1}^{n} f(E_{ii}) = nf(E_{11}) = n,$$

also

$$f(E_{ii}) = 1 \qquad \text{für alle } i.$$

Dann ist $f = \text{tr}$. □

Aufgabe 67. Bestimmen Sie zu den folgenden linearen Abbildungen jeweils alle Eigenwerte und Eigenräume. Entscheiden Sie weiterhin, ob die entsprechende Abbildung diagonalisierbar ist.

(a)
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \to Ax,$$
mit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)
$$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad x \to Ax,$$
mit A wie in (a).

(c)
$$T : M_n(\mathbb{K}) \to M_N(\mathbb{K}), \qquad A \to \text{tr}(A)1.$$

(d)
$$T : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \qquad A \to A^T.$$

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) =& \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -4 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ =& (-1-\lambda)(-(1+\lambda)(2-\lambda) - 0) + (2 - (1+\lambda)(4))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda - \lambda^3 \\
&= -\lambda(1+\lambda^2)
\end{aligned}
$$

also $\lambda = 0$ ist ein Eigenwert, aber $1+\lambda^2 = 0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$, also es gibt nur ein Eigenwert, also T ist nicht diagonaliserbar.

(b) Das charakteristische Polynom hat 3 unterschiedliche Eigenwerte, $\lambda = 0$ und $\lambda = \pm 1$. Weil alle Eigenwerte unterschiedlich sind und der Eigenraum mindestens Dimension 1 hat, ist es diagonalisierbar.

(c) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. A ist ein Eigenvektor von T genau dann, wenn

$$A = \lambda \mathrm{tr}(A) 1_n.$$

Also gilt, dass A diagonal ist und

$$n \mathrm{tr}(A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$$

also es gibt nur ein Eigenwert n und der Eigenraum ist gespannte durch

$$\mathrm{span}\,(1_n)\,,$$

was ein 1-dimensionaler Vektorraum ist. Für $n > 1$ kann es kein Basis sein, und T ist nicht diagonaliserbar. Für $n = 1$ ist T das Identität, also es ist schon diagonal.

(d) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. A ist ein Eigenvektor genau dann, wenn

$$A^T = \lambda A.$$

Wir können hier sofort zwei Eigenwerte und deren Eigenräume lesen:

$$
\begin{aligned}
\lambda = 1 :& A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{K}) \\
\lambda = -1 :& A \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{K})
\end{aligned}
$$

Das Dimension der Eigenraum wissen wir schon

$$
\begin{aligned}
\dim\left(\mathrm{SM}_n(\mathbb{K})\right) =& \frac{n(n+1)}{2} \\
\dim(\mathrm{AS}_n(\mathbb{K})) =& \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2,$$

also wir können ein Basis für $M_n(\mathbb{K})$ finden mit genau $\frac{n(n+1)}{2}$ Vektoren aus $\lambda = 1$ Eigenraum und $\frac{n(n-1)}{2}$ Vektoren aus dem $\lambda = -1$ Eigenraum. Daraus folgt: T ist diagonaliserbar. $\square$

Aufgabe 68. Über einen algebraisch vollständigen Körper $\mathbb{K}$ zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ immer in Linearfaktoren

$$\chi_A(x) := \det(A - x1) = (\lambda_1 - x)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_m - x)^{\mu_m}.$$

Dabei ist der Exponent μ_i die algebraische Vielfachheit zum Eigenwert λ_i und $n = \mu_1 + \dots + \mu_m$. Es sei V_{λ_i} der Eigenraum zum Eigenwert λ_i, dann bezeichnen wir die Dimension des Eigenraums

$$d_i := \dim(V_{\lambda_i})$$

als geometrische Vielfachheit von λ_i. Zeigen Sie: Es gilt immer

$$\mu_i \geq d_i, \qquad \forall i = 1, \dots, m.$$

Hinweis: Führen Sie einen Basiswechsel mit einer möglichst geschickt gewählten Basis B durch.

Beweis. Sei λ_i ein Eigenwert mit geometrische Vielfachheit d_i. Das heißt, dass wir d_i linear unabhängige Vektoren finden können, so dass $Av = \lambda_i v$ für alle solche Vektoren. Dann ergänzen wir die Basis, so dass die erste d_i Vektoren in der Basis Eigenvektoren mit Eigenwert λ_i sind. Das charakteristische Polynom verändert sich nicht, wenn wir ein Basiswechsel machen. Also das charakterische Polynom ist gleich das charakteristische Polynom von

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda 1_{d_i} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A' - x1_n) = (x - \lambda)^{d_i} \det(C),$$

also die algebraische Vielfachheit von λ_i ist mindestens die geometrische Vielfachheit. □

2.6 Blatt 7

Aufgabe 69. Beweisen oder Widerlegen Sie:

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $p \in \mathbb{K}[x]$ ein beliebiges Polynom, dann gilt: Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

(b) Angenommen wir haben in (a) eine Konstellation in der λ ein Eigenwert von A und $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$ ist, dann stimmen jeweils auch die geometrischen Vielfachheiten überein.

(c) Eine $n \times n$ Matrix mit n paarweise verscheidenen Eigenwerten ist invertierbar.

(d) Im Falle der Intervierbarkeit ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau dann, wen λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

(e) Sind zwei Matrizen A und B ähnlich, dann haben sie dieselben Eigenwert.

(f) Sind zwei Matrizen A und B äquivalent, dann haben sie dieselben Eigenwert.

(g) Sind zwei Matrizen A und B ähnlich so folgt: Ist λ ein Eigenwert von A dann ist λ ein Eigenwert von $(A+B)/2$.

Beweis. (a) Wahr. Sei $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt

$$\begin{aligned} p(A)v = &\left(a_0 + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n\right) v \\ =&a_0v + a_1Av + a_2A^2v + \cdots + a_nA^nv \\ =&a_0v + a_1\lambda v + a_2\lambda^2v + \cdots + a_n\lambda^nv \\ =&(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n)v \\ =&p(\lambda)v \end{aligned}$$

(b) Wahr. Aus (a) wissen wir, dass die Eigenvektoren sich nicht verändern. Also bezüglich A entscheiden wir uns für eine Basis, deren Dimension die geometrische Vielfachheit ist, dann bleibt die auch eine Basis für das Eigenraum bezüglich das Eigenwert $p(\lambda)$.

(c) Wahr. Es gibt eine Basis von n Eigenvektoren (es ist eine Basis, weil die linear unabhängig sind (Korollar 6.59)).

Dann ist $\{\lambda_iv_i | i \in 1, 2, \ldots, n\}$ auch eine Basis, weil Multiplikation durch ein Konstant kann die linear Unabhängigkeit nicht verletzten.

(d) Wahr. Sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt per Definition

$$Av = \lambda v.$$

Außerdem gilt

$$Av = A^{-1}AAv = A^{-1}A(\lambda v) = \lambda A^{-1}Av,$$

also

$$\frac{1}{\lambda}Av = A^{-1}(Av).$$

Das heißt, dass Av ein Eigenvektor von A^{-1} mit Eigenwert λ^{-1} ist.

Sei jetzt v ein Eigenvektor von A^{-1} mit Eigenwert λ. Ähnlich gilt

$$A^{-1}v = AA^{-1}A^{-1}v = AA^{-1}(\lambda v) = \lambda AA^{-1}v$$

und die andere Richtung folgt.

(e) Wahr. Sei $A = Q^{-1}BQ$. Sei außerdem v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt $QA = BQ$ und

$$\begin{aligned} QAv =& Q\lambda v = \lambda(Qv) \\ =& BQv = B(Qv) \end{aligned}$$

also Qv ist ein Eigenvektor von B mit Eigenwert λ. Wir können die Rollen von A und B vertauschen, um die andere Richtung zu zeigen.

(f) Falsch.

Definition

Seien $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$. Dann heißen A und B äquivalent, falls es $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ gibt, sodass

$$A = QBP.$$

Sei $A = \mathrm{diag}(4, 4),\ B = \mathrm{diag}(1, 1),\ Q = P = \mathrm{diag}(2, 2)$. Dann hat A nur den Eigenwert 4 während B nur den Eigenwert 1 hat.

(g) Falsch. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann hat B die Eigenwerte 3 und -1, aber $(A + B)/2$ hat characteristisches Polynom $x^2 - 2x - 4$. Durch Einsetzen können wir zeigen, dass weder 3 noch -1 Nullstellen sind, aber die Diskriminante ist > 0, also wir haben zwei unterschiedliche Nullstellen.

Das zeigt, dass B bzw. A Eigenwerte hat, die keine Eigenwerte von $(A + B)/2$ sind und $(A + B)/2$ hat Eigenwerte, die keine Eigenwerte von A bzw. B sind. □

Aufgabe 70. Es seien A, B in $\mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar und D_A, D_B zugehörige Diagonalmatrizen. Zeigen Sie:

(a) Existiert ein $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit

$$D_A = U^{-1}AU, \qquad D_B = U^{-1}BU$$

so gilt für den Kommutator $[A, B] = 0$.

(b) Ist $[A, B] = 0$, dann existiert eine geordnete Basis $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ bezüglich derer gilt

$${}_V[B]_V = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{pmatrix}$$

mit $B_1 \in \mathbb{K}^{d_i \times d_i}$ und d_i die geometrische Vielfachheit von λ_i für $i = 1, \ldots, r$.

(c) Jedes der B_i wie in (b) ist selbst wieder diagonalisierbar für $i = 1, \ldots, r$.

(d) Ist $[A, B] = 0$, so existiert ein U mit

$$D_A = U^{-1}AU, \qquad D_B = U^{-1}BU.$$

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
[A, B] =& AB - BA \\
=& UD_AU^{-1}UD_BU^{-1} - UD_BU^{-1}UD_AU^{-1} \\
=& UD_AD_BU^{-1} - UD_BD_AU^{-1} \\
=& UD_AD_BU^{-1} - UD_AD_BU^{-1} && \text{Diagonalmatrizen kommutieren} \\
=& 0
\end{aligned}$$

(b) Sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt

$$\begin{aligned}
[A, B]v =& 0v = 0 \\
=& (AB - BA)v \\
=& ABv = B(\lambda v) \\
\lambda Bv =& A(Bv)
\end{aligned}$$

Dann ist Bv ein Eigenvektor von A mit gleichen Eigenwert. Wir wählen eine geordnete Basis aus Eigenvektoren, so dass alle Eigenvektoren mit gleichen Eigenwerte nebeneinander stehen.

Wir haben schon gezeigt, dass Bv ein Vektor mit dem gleichen Eigenwert ist, also er liegt noch im Eigenraum. Das heißt, das die nicht (block-)diagonal Terme null sein müssen und das Matrix ist block-diagonal (wobei die Spalten die Wirkung von B auf einem Vektor der Basis bzw. Eigenvektor von A darstellen). Als Darstellung der Wirkung eines Eigenräumes ist es auch klar, dass die Dimension die Dimension des Eigenräumes ist, was per Definition die geometrische Vielfachhheit ist.

(c) Wir betrachten das charakterische Polynom von B_i, und bezeichnen es mit $p_i(\lambda)$. Es gilt $p_1(\lambda)p_2(\lambda)\ldots p_r(\lambda) = p(\lambda)$, wobei $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom für ${}_V[B]_V$ ist.

Dann ist jede Eigenwert von einem B_i auch ein Eigenwert von ${}_V[B]_V$, und zu jedem Eigenwert von B gehört einen Eigenvektor. Wir wissen, dass wir aus solche Eigenvektoren eine Basis bilden können (weil B diagonaliserbar ist), also wir können aus eine Teilmenge eine Basis für B_i bilden.

(d) Wir können das Bild und Zielbereich von B_i als einen Eigenraum von A betrachten. Aus (c) wissen wir, dass wir durch ein Basiswechsel B_i diagonalisieren können. Weil das Bild genau ein Eigenraum ist, enthält die Basis nur Eigenvektoren von A, also A bleibt diagonal, während B jetzt nach der Basiswechsel diagonal ist.

Wir haben dann A und B gleichzeitig diagonalisiert. Sei U das Matrix mit Vektoren von die Basis als Spalten. Dann gilt

$$D_A = U^{-1}AU \qquad D_B = U^{-1}BU.$$

□

Aufgabe 71. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ein reelle Matrix.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und dazugehörige Eigenräume.

(c) Im Falle der Diagonalisierbarkeit, bestimmen Sie explizit die Projektoren $P_1, \dots, P_r$ auf die r-vielen Eigenräume, sodass gilt

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i.$$

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
p(\lambda) =& \det(A - \lambda I) \\
=& \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
=& (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
=& (1-\lambda)\left[(1-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1) + (\lambda-3+1) + (2+1-\lambda)\right] \\
=& (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(3+\lambda^2-4\lambda+1) + \lambda - 2 + 2 - \lambda\right] \\
=& (1-\lambda)^2(3+\lambda^2-4\lambda+1) \\
=& (1-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda+4) \\
=& (1-\lambda)^2(\lambda-2)^2
\end{aligned}$$

(b) Die Eigenwerte sind 1 und 2. Es gilt

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis für den Eigenraum bzw. Kern von $A-1$ ergibt sich sofort:

$$ER_1 = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Weil wir schon 2 Vektoren gefunden haben, und die algebraische Vielfachheit 2 ist, haben wir den ganzen Eigenraum gefunden. Es gilt auch

$$A - 2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis ergibt sich sofort:

$$ER_2 = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

(c) Wir schreiben eine neue Basis von Eigenvektoren:

$$ER_1 = \operatorname{span}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

und

$$ER_2 = \operatorname{span}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Dann sind die Projektoren

$$P_1' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist P_1', P_2' eine Zerlegung der Eins. Die gewünschte Projektoren sind

$$P_1 = AP_1' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = AP_2' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 6 & -4 & 2 & 2 \\ 10 & -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

und es gilt $A = P_1 + P_2$. □

2.7 Blatt 10

Aufgabe 72. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle v, w\rangle = \overline{v}^T w$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die adjungierte Abbildung von A, wie in Definition 7.66, ist gerade durch die in Definition 7.13 beschriebene adjungierte Matrix $A^* = \overline{A^T}$ gegeben.

(b) Es gilt $\operatorname{tr}(A^*) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$.

(c) Es gilt $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

(d) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann Eigenwert von A, wenn $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A^* ist.

Sei A nun ein invertierbarer und adjungierbarer Endomorphismus auf dem unitären Vektorraum V. Dann gilt

(e) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle A^*v, w\rangle =&(A^*v)^T w\\ =&v^T\overline{(A^*)^T}w\\ =&v^T\overline{(\overline{A^T})^T}w\\ =&v^T\overline{(\overline{A}^T)^T}w\\ =&v^T\overline{\overline{A}}w\\ =&v^TAw\\ =&\langle v, Aw\rangle\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^*) =&\sum_{i=1}^n (A^*)_{ii}\\ =&\sum_{i=1}^n (\overline{A^T})_{ii}\\ =&\sum_{i=1}^n \overline{A^T_{ii}}\\ =&\sum_{i=1}^n \overline{A_{ii}}\\ =&\overline{\sum_{i=1}^n A_{ii}}\\ =&\overline{\operatorname{tr}(A)}.\end{aligned}$$

(c) Wir brauchen aus den vorherigen Übungsblätter: $\det(A^T) = \det A$. Wir wissen auch aus den Eigenschaften der komplexe Konjugierte

$$\overline{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^k a_{ij}} = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \overline{a_{ij}} \tag{2.1}$$

Es folgt daraus:

$$\begin{aligned}\det(A^*) =&\det(\overline{A^T})\\ =&\overline{\det(A^T)} && (2.1)\\ =&\overline{\det(A)}\end{aligned}$$

(d) Sei λ ein Eigenwert von A. Es gilt dann

$$\det(A^* - \overline{\lambda}I) =\det(\overline{A^T} - \overline{\lambda}I)$$

$$
\begin{aligned}
&= \det(\overline{A}^T - \overline{\lambda} I^T) \\
&= \det(\overline{(A - \lambda I)}^T) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Umgekehrt: Sei $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A^*. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det(\overline{(\overline{A} - \overline{\lambda} I)}) \\
&= \det(\overline{((\overline{A}^T - \lambda I^T))^T}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(e) Sei $v, w \in V$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\left\langle (A^*)^{-1} w, v \right\rangle &= \left\langle (A^*)^{-1} w, A A^{-1} v \right\rangle \\
&= \left\langle A^* (A^*)^{-1} w, A^{-1} v \right\rangle \\
&= \left\langle w, A^{-1} v \right\rangle
\end{aligned}
$$

also $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. $\square$

Aufgabe 73. Betrachten Sie die Vektoren

$$
v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}
$$

im unitären Vektorraum $\mathbb{C}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle x, y \rangle := \overline{x}^T y$. Sei $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. Bestimmen Sie eine Orthonomalbasis von U sowie von $U^\perp$.

Beweis.

$$
U^\perp = \ker \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -i & 0 \end{pmatrix}.
$$

Es gilt

$$
\begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2iR_1} \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & i & 4i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & -2i \\ 0 & 2 & i & 4i \end{pmatrix}
$$

Eine Basis für den Kern ist dann

$$
\begin{pmatrix} i \\ -i/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Der Gram-Schmidt-Algorithismus ergibt dann Orthonomalbasen. Für U ist $\langle v_2, v_1\rangle = 3i$, $\langle v_1, v_1\rangle = 6$. Dann ist eine Basis

$$\left\{v_1, v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1\right\} = \left\{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ i/2 \\ -i \end{pmatrix}\right\}.$$

Daraus ergibt sich eine Orthonomalbasis für U:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ i/2 \\ -i \end{pmatrix}\right\}.$$

Für $U^\perp$ ist ähnlich eine Basis

$$\left\{3\begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2i \\ -4i \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

□

Aufgabe 74. Sei $V_n \subset \mathbb{C}[x]$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Sei

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x$$

für $f, g \in V_n$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V_n definiert ist.

(b) Starten Sie mit der Basis der Monome $1, x, x^2, x^3$ und führen Sie den Gram-Schmidt-Algorithmus durch, um eine Orthonomalbasis von V_3 bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zu finden.

Beweis. (a) Die linearität Eigenschaften folgen alle aus die Linearität des Integrals. Es bleibt positiv Definitheit zu zeigen.

(Es wurde nicht geschrieben, welche Definition des Integrals hier benutzt wurde. Ich benutze das Lebesgue-Integral, weil es einfacher ist).

Es gilt

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Weil $|f| \geq 0$, ist das Integral ≥ 0. Es ist 0 genau dann, wenn $|f(x)|^2$ λ_1-fast überall 0 ist. Das Integral ist 0 genau dann, wenn $|f(x)|^2$ λ_1-fast überall 0 ist. Aber alle Polynome sind stetig. $|f|^2$ ist dann als Verkettung stetige Funktionen auch stetig und eine λ_1-fast überall 0 stetige Funktion ist überall 0. Daraus folgt: $f = 0$, das Nullpolynom.

(b) (i) Das erste Element ist 1. Es gilt

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1.$$

(ii) $\langle x, 1\rangle = \int_0^1 |x| \,\mathrm{d}x = 1/2$. Das zweite Element ist $x - 1/2$. Es gilt

$$\left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{12}.$$

(iii)

$$\left\langle x^2, 1\right\rangle = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = 1/3$$
$$\left\langle x^2, x - \frac{1}{2}\right\rangle = 1/12$$

Das zweite Element ist

$$x^2 - \frac{1}{3} - (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Es gilt

$$\left\langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6}\right\rangle = \frac{1}{180}.$$

(iv)

$$\left\langle x^3, 1\right\rangle = 1/4$$
$$\left\langle x^3, x - \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{3}{40}$$
$$\left\langle x^3, x^2 - x + \frac{1}{6}\right\rangle = \frac{1}{120}$$

Dann ist das dritte Element

$$x^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{10}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{1}{20}.$$

Insgesamt ist die Orthogonalbasis

$$\left\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}, x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{1}{20}\right\}.$$

Wir normalisieren dann alle Elemente und erhalten die Orthonormalbasis

$$\left\{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}\left(6x^2 - 6x + 1\right), \sqrt{7}\left(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1\right)\right\}.$$

□

Aufgabe 75. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $M, N \subseteq V$ Teilmengen von V.

(a) Sei $N \subseteq M$. Zeigen Sie, dass dann $M^\perp \subseteq N^\perp$ gilt.

(b) Zeigen Sie $M \subseteq \left(M^\perp\right)^\perp$ und geben Sie ein Beispiel für einen euklidischen oder unitären Vektorraum V, sowie eine Teilmenge $M \subseteq V$ an, sodass $M \neq (M^\perp)^\perp$.

(c) Zeigen Sie, dass das Orthogonalkomplement von M durch

$$M^\perp = \bigcap_{v \in M} \ker v^\flat$$

gegeben ist, wobei $v^\flat = \langle v, \cdot \rangle \in V^*$ wie in Bemerkung 7.2iii.

(d) Zeigen Sie, dass $(M^\perp)^{\perp\perp} = (M^{\perp\perp})^\perp$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass $M^\perp + N^\perp \subset (M \cap N)^\perp$ gilt.

(f) Zeigen Sie, dass $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$ gilt, wenn M und N Unterräume von V sind.

Beweisen oder widerlegen Sie:

(g) Es gilt $M^\perp \cup N^\perp \subset (M \cup N)^\perp$.

(h) Es gilt $(M \cup N)^\perp \subset M^\perp \cup N^\perp$.

Beweis. (a) Sei $v \in M^\perp$. Per Definition gilt $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in M$. Dann gilt es auch für alle $w \in N$, weil $N \subseteq M$. Dann ist $M^\perp \subseteq N^\perp$.

(b) Sei $v \in M^\perp$, $w \in M$. Per Definition ist $\langle v, w \rangle$ für alle solche w. Daraus folgt: $v \in (M^\perp)^\perp$ und $M \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Gegenbeispiel: Sei $V = \mathbb{C}[x]$ mit innerem Produkt

$$\langle a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x_n, b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x_m \rangle = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} a_i b_i$$

und M die Menge alle Polynome f, so dass für die Polynomefunktion $f(1) = 1$ gilt. Dann ist $M^\perp = \{0\}$ und $(M^\perp)^\perp = V$. Aber $M \neq V$ offenbar gilt.

(c) Die Definitionen sind gleich: Auf der linken Seite haben wir alle Vektoren $w \in V$, so dass $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $v \in M$.

Per Definition ist $w \in \ker v^\flat$ genau dann, wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Wenn w in alle $\ker v^\flat$ liegt, gilt das für alle v, was genau der Definition von $M^\perp$ ist.

(d)
$$(M^\perp)^{\perp\perp} = ((M^\perp)^\perp)^\perp = (M^{\perp\perp})^\perp.$$

(e) Sei
$$v := \underbrace{v_M}_{\in M^\perp} + \underbrace{V_N}_{\in N^\perp} \in M^\perp + N^\perp$$
und $w \in M \cap N$. Dann ist
$$\begin{aligned} \langle w, v\rangle =& \cancelto{0}{\langle w, v_M\rangle} && w \in M \\ &+ \cancelto{0}{\langle w, v_N\rangle} && w \in N \\ =&0 \end{aligned}$$
also $v \in (M \cap N)^\perp$. Daraus folgt: $M^\perp + N^\perp \subseteq (M \cap N)^\perp$.

(f) Sei $v \in M^\perp \cap N^\perp$ und
$$w := \underbrace{w_M}_{\in M} + \underbrace{w_N}_{\in N} \in M + N$$
Dann gilt
$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle =& \cancelto{0}{\langle v, w_M\rangle} && v \in M^\perp \\ &+ \cancelto{0}{\langle v, w_N\rangle} && v \in N^\perp \\ =&0 \end{aligned}$$
also $(M + N)^\perp \supseteq M^\perp \cap N^\perp$.
Sei jetzt $v \in (M+N)^\perp$ und $w \in M$. Da $M+N \supseteq M$ und $M+N \supseteq N$ gilt, ist
$$\begin{aligned} (M + N)^\perp \subseteq& M^\perp \\ (M + N)^\perp \subseteq& N^\perp \end{aligned}$$
und daher
$$(M + N)^\perp \subseteq M^\perp \cap N^\perp.$$

(g) Falsch. Sei $V = \mathbb{R}^3$, $M = \operatorname{span}((1,0,0)^T)$, $N = \operatorname{span}((0,1,0)^T$. Es gilt
$$\begin{aligned} M^\perp =& \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ N^\perp =& \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ (M \cup N)^\perp =& \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

(h) Wahr. Es gilt $M \cup N \supseteq M$ und $M \cup N \supseteq N$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}(M \cup N)^\perp \subseteq & M^\perp \\ (M \cup N)^\perp \subseteq & N^\perp\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

2.8 Blatt 11

Aufgabe 76. Betrachten Sie die folgenden 3×3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ -1+i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die adjungierten Abbildungen A^* und B^*.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B.

(c) Überprüfen Sie, dass sich aus den Eigenvektoren der Matrix A eine Orthonomalbasis des $\mathbb{C}^3$ mit Standardskalarprodukt bauen lässt. Führen Sie das selbe auch mit Matrix B durch.

(d) Bestimmen Sie unitäre Matrizen $U, V \in M_3(\mathbb{C}^3)$, sodass UAU^* und VBV^* diagonal sind. Können Sie zudem erreichen, dass U und V orthogonal sind?

Beweis. (a)

$$A^* = A, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 1-i & -1-i & 0 \\ 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

(b) A:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) = & \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ = & (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = & (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (1-\lambda) + (\lambda - 1) \\ = & (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - 2 + 2\lambda \\ = & -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\lambda = 1$ ein Nullstelle des Polynoms. Es gilt

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4)$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

also die Eigenwerte von A sind 1 und 4.

Ähnlich für B:

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-i-\lambda & -1-i & 0 \\ 1+i & 1-i-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-i-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3(1-i)\lambda^2 + 4i\lambda \\ &= -\lambda(\lambda-(1-i))(\lambda-(2-2i))\end{aligned}$$

also die Eigenwerte sind 0, $1-i$ und $2-2i$.

(c) Wir berechnen die Eigenvektoren:

Für A:

$$\begin{aligned}\text{EW} = 4 :&(1,1,1)^T \\ \text{EW} = 1 :&(-1,0,1)^T \\ \text{EW} = 1 :&(-1,1,0)^T\end{aligned}$$

Die Eigenräume für die Eigenwerte 4 und 1 sind schon orthogonal. Im Eigenraum EW=1 können wir den Gram-Schmidt-Algorithismus durchführen, da lineare Kombinationen von Eigenvektoren mit gleichen Eigenwerte noch Eigenvektoren sind. Eine Orthonormalbasis ist dann

$$\begin{aligned}\text{EW} = 4 :&\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T \\ \text{EW} = 1 :&\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T \text{ und} \\ &\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T\end{aligned}$$

Die Eigenvektoren von B sind

$$\begin{aligned}\text{EW} = 0 :&(i,1,0)^T \\ \text{EW} = 1-i :&(0,0,1)^T \\ \text{EW} = 2-2i :&(-i,1,0)^T\end{aligned}$$

Die Vektoren sind schon orthogonal, also wir normalisieren die Vektoren, um eine Orthonormalbasis zu bekommen.

$$\begin{aligned}\text{EW} = 0 :&\frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0)^T \\ \text{EW} = 1-i :&(0,0,1)^T \\ \text{EW} = 2-2i :&\frac{1}{\sqrt{2}}(-i,1,0)\end{aligned}$$

(d) Wir schreiben die Orthonomalbasis von Eigenvektoren von A als die Zeilen der Matrix U.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ähnlich für V:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

U ist schon orthogonal. V ist unitär und kann nicht orthogonal werden. □

Aufgabe 77. Betrachten Sie die reelle Matrix

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass P ein Orthogonalprojektor bezüglich des Standardskalarprodukts ist.

(b) Bestimmen Sie den Rang von P.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonomalbasis des Bildes und des Kerns von P sowie den Basiswechsel O von der Standardbasis auf diese Basis.

(d) Verifizieren Sie, dass O orthogonal ist, Können Sie einen solchen orthonomalen Basiswechsel finden, dass $\det O = 1$ gilt?

Beweis. (a) Schritt 1: P ist ein Projektor. Durch direktes Rechnung:

$$P^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = P.$$

Da $P^* = P$, ist P ein Orthogonalprojektor nach Proposition 7.79.

(b)

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\times 5} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3\times 5} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist 2.

(c) Eine Basis des Bildes ist die erste 2 Spalten, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir ergänzen es bis eine Basis für den ganzen Vektorraum:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus ergibt sich eine Orthonomalbasis durch den Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die ersten 2 Vektoren sind eine Orthonomalbasis des Bildes, der dritte eine Orthonomalbasis des Kerns. Der Basiswechselmatrix ist

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(d)

$$OO^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & \sqrt{\frac{2}{15}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1, 1, 1).$$

Er hat schon Determinante 1. Sonst könnten wir die erste zwei Spalten vertauschen. □

Aufgabe 78. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Jede Matrix $P \in M_n(\mathbb{C})$ mit $P^2 = P$ ist ein Orthogonalprojektor bezüglich eines *geeigneten* Skalarprodukts auf V.

(b) Eine invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal für ein geeignet gewähltes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (a) Da P ein Projektor ist, ist $\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Die Frage ist: Können wir uns für ein Skalarprodukt entscheiden, so dass $\ker P = (\operatorname{im} P)^\perp$?

Wir entscheiden uns für eine Basis von ker P bzw. von im P, was wir mit $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ bezeichnen. Sei die Matrix A^{-1} so definiert: Die Spalten sind die Basisvektoren von ker P bzw. im P. Dann schickt A die Basisvektoren nach der Standardbasis. Wir definieren dann $B = A^T A$. Wir definieren dann ein Skalarprodukt $\langle v_1, v_2\rangle = (v_1)^T B v_2$, was noch ein Skalarprodukt ist, da B positiv definit ist.

Es gilt dann, für $b_i \neq b_j$:

$$\begin{aligned}\langle b_i, b_j\rangle =&(b_i)^T B b_j\\ =&(b_i)^T A^T A b_j\\ =&(Ab_i)^T (Ab_j)\\ =&0\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass die Standardbasis bzgl. des Standardskalarprodukts orthonomal ist. Daraus folgt, dass ker $P = (\text{im } P)^\perp$ bzgl. dieses Standardskalarprodukts, also nach Proposition 7.79 ist P ein Orthogonalprojektor.

(b) Falsch. Sei $n = 1$ und Endomorphismus $Ax = 2x$, dann ist

$$\langle 2x, 2x\rangle = 4\langle x, x\rangle \neq \langle x, x\rangle$$

unabhängig vom Wahl von x.

□

Aufgabe 79. Seien V, W euklidische Vektorräume und A eine lineare Abbildung $V \to W$.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

i. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\langle v_1, v_2\rangle_V = 0 \implies \langle Av_1, Av_2\rangle_W = 0$.

ii. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\|v_1\|_V = \|v_2\|_V \implies \|Av_1\|_W = \|Av_2\|_W$.

iii. Es existieren eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Isometrie $\Phi : V \to W$ mit $A = \alpha\Phi$.

(b) Zeigen Sie, dass es genau dann Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, sodass

$$C_1 \langle v_1, v_2\rangle_V \leq \langle Av_1, Av_2\rangle_W \leq C_2 \langle v_1, v_2\rangle_V$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt, wenn $A = \alpha\Phi$ für eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Isometrie $\Phi : V \to W$ erfüllt ist. Bestimmen Sie die bestmöglichen Parameter C_1 und C_2.

Beweis. (a) (i) $\implies$ (ii) Sei $v_1, v_2 \in V$, so dass $\|v_1\| = \|v_2\|$. Es gilt

$$\langle v_1 + v_2, v_1 - v_2\rangle = \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle$$

$$=0 \qquad\qquad \text{Voraussetzung}$$

Aus (i) folgt dann

$$\langle A(v_1+v_2), A(v_1-v_2)\rangle = 0$$

und

$$\|Av_1\| = \|Av_2\|.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Sei $v_1, v_2 \in V$ mit $|v_1| = |v_2|$. Es gilt $|Av_1| = |Av_2|$. Wir teilen die zweite Gleichung durch die erste Gleichung und erhalten

$$\frac{|Av_1|}{|v_1|} = \frac{|Av_2|}{|v_2|} := \alpha.$$

Da dies für alle Paare v_1, v_2 gilt, gilt es für alle Vektoren, also $|Av| = \alpha|v|$ für alle $v \in V$. Außerdem ist.

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle =& \frac{1}{2}\left(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\right)\\
\langle Au, Av\rangle =& \frac{1}{2}\left(|A(u+v)|^2 - |Au|^2 - |Av|^2\right)\\
=& \frac{1}{2}(\alpha^2|u+v|^2 - \alpha^2|u|^2 - \alpha^2|v|^2)\\
=& \frac{\alpha^2}{2}(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2)\\
=& \alpha^2\left\langle u, v\right\rangle\\
\left\langle \frac{A}{\alpha}u, \frac{A}{\alpha}v\right\rangle =& \langle u, v\rangle
\end{aligned}$$

Dann ist A/α ein Isometrie.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

Sei $A = \alpha\Phi$. Seien $v_1, v_2 \in V$, so dass $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle Av_1, Av_2\rangle =& \langle \alpha\Phi v_1, \alpha\Phi v_2\rangle\\
=& \alpha^2\left\langle \Phi v_1, \Phi v_2\right\rangle\\
=& \alpha^2(0) = 0
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle Av_1, Av_2\rangle =& \langle \alpha\Phi v_1, \alpha\Phi v_2\rangle\\
=& \alpha^2\langle \Phi v_1, \Phi v_2\rangle\\
=& \alpha^2\langle v_1, v_2\rangle && \Phi \text{ ist Isometrie}
\end{aligned}$$

also $C_1 = C_2 = \alpha^2$, und wir haben Gleichheit. □

2.9 Blatt 12

Aufgabe 80. Betrachten Sie die komplexen 3×3-Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -i \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der Matrzen sind positiv, welche sogar positiv definit?

Beweis. Wir berechnen das Spektrum von A_1. Es gilt für das charakteristiches Polynom

$$P(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda.$$

Die Nullstellen bzw. Eigenwerte sind $\lambda = 0$ und $\lambda = 6$. Dann ist A_1 positiv. Weil $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, ist $\det(A_1) = 0$ und A_1 ist nicht invertierbar.

A_2 ist nicht positiv, weil $A_2 \neq A_2^*$.

Wir berechnen noch einmal das Spektrum von A_3. Es gilt für das charakteristische Polynom.

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -x^3 + 8x^2 - 13x + 2.$$

Die Nullstellen sind $x = 2$ und $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$, also A_3 ist positiv. Da 0 kein Nullstelle ist, ist $\det(A_3) \neq 0$ und A_3 ist invertierbar, also A ist positiv definit. $\square$

Aufgabe 81. Betrachten Sie den unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ selbstadjungiert und $A = U^{-1}DU$, wobei U eine invertierbare Matrix und D eine Diagonalmatrix sind. Sei $P_i = U^{-1}M_iU$ mit Diagonalmatrix M_i, sodass

$$(M_i)_{kk} = \begin{cases} 1 & D_{kk} = \lambda_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gilt. Zeigen Sie, dass P_i eine Orthogonalprojektion auf den Eigenraum von λ_i ist.

(b) Bestimmen Sie den Positivteil $(A_i)_+$, den Negativteil $(A_i)_-$ und den Absolutbetrag $|A_i|$ für $i = 1, 2$ der folgenden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. (a) $P_i^2 = U^{-1}M_iUU^{-1}M_iU = U^{-1}M_i^2U = U^{-1}M_iU = P_i$. Sei v ein Eigenvektor mit Eigenwert λ. D.h. $Uv = e_i$ für eine geeignete Basisvektor e_i. Dann ist $(M_j)_{kk}Uv = 0$, wenn j einen anderen Eigenwert entspricht. Dann ist im P_i der Eigenraum mit Eigenwert λ_i.

Da A selbstadjugiert und daher normal ist, sind die Eigenräume orthogonal, und P_i ist ein Orthogonalprojektor.

(b) Wir berechnen die Eigenvektoren und Eigenwerte von den Matrizen. Für A_1 sind die Eigenwerte $2, 2$ und -1. Die Eigenvektoren sind $(-1, 0, 1)$ und $(-1, 2, -1)$ bzgl. des Eigenwerts 2 und $(1, 1, 1)$ bzg. des Eigenwerts -1.

Dann diagonalisieren wir A_1:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ A_1 &= U\operatorname{diag}(2, 2, -1)U^{-1} \end{aligned}$$

Dann ist das Positivteil $U\operatorname{diag}(2, 2, 0)U^{-1}$, oder

$$(A_1)_+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

und

$$(A_1)_- = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag ist

$$|A_1| = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ähnlich sind die Eigenwerte von B ± 3 und ± 2. Die Eigenvektoren sind

$$\begin{aligned} \mathrm{EW} = -3 &: (-1, 1, 0, 0)^T \\ \mathrm{EW} = 3 &: (1, 1, 0, 0)^T \\ \mathrm{EW} = -2 &: (0, 0, i, 1) \\ \mathrm{EW} = 2 &: (0, 0, -i, 1) \end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$U_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A_2 = U_2 \mathrm{diag}(-3,3,-2,2)U_2^{-1}$. Das Positivteil ist durch $A_2 = U_2\mathrm{diag}(0,3,0,2)$ definiert und

$$(A_2)_+ = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Negativteil ist ähnlich

$$(A_2)_- = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 0 & i & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag ist

$$|A_2| = \mathrm{diag}(3,3,2,2).$$

□

Aufgabe 82. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Eine obere Dreiecksmatrix ist nie orthogonal.

(b) Sei V ein unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus A ist genau dann normal, wenn $\|Av\| = \|A^*v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

Beweis. (a) Falsch. Die Identität $\mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$ ist eine obere Dreiecksmatrix und jedoch orthogonal. □

Aufgabe 83. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei weiter $\mathrm{End}_{sa}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ die Teilmenge der selbstadjungierten Endomorphismen auf V. Für $A, B \in \mathrm{End}_{sa}(V)$ definieren wir $A \leq B$, falls $B - A$ ein positiver Endomorphismus ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_{sa}(V)$ ein reeller Unterraum von $\mathrm{End}(V)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $\lambda, \mu \geq 0$ und $A, B, C, D \in \mathrm{End}_{sa}(V)$ mit $A \leq B$ und $C \leq D$ folgt, dass

$$\lambda A + \mu C \leq \lambda B + \mu D$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $A \leq B$

$$CAC^* \leq CBC^*$$

für alle $C \in \mathrm{End}(V)$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass für $A \geq 0$ und $\lambda > 0$ der Endomorphismus $A + \lambda$ invertierbar ist.

(e) Betrachten Sie $V = \mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $0 \leq A \leq B$ gilt. Zeigen Sie, dass $A^2 \leq B^2$ *nicht* gilt.

Beweis. (a) Linearität von die adjungierte Endomorphismus:

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 A + \lambda_2 B)^* =& (\lambda_1 A)^* + (\lambda_2 B)^* \\
=& \lambda_1^* A^* + \lambda_2^* B^* \\
=& \lambda_1 A^* + \lambda_2 B^* && \lambda \text{ reell} \\
=& \lambda_1 A + \lambda_2 B && A, B \text{ selbstadjugiert}
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
& \lambda B + \mu D - (\lambda A + \mu C) \\
=& \lambda(B - A) + \mu(D - C)
\end{aligned}$$

Da sowohl $B - A$ als auch $D - C$ positiv sind, ist die lineare Kombination auch positiv. Die Behauptung folgt.

(c) Es gilt $CBC^* - CAC^* = C(B - A)C^*$. Sei $v \in V$. Es gibt dann $w \in W$, so dass $\langle v, C(B-A)C^* v\rangle = \langle w, (B-A)w\rangle$. Dies ist definiert genau durch $w = C^* v$. Da $B - A$ positiv ist, ist das innere Produkt auch immer positiv.

(d) Ein Endomorphismus ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist. Da $A \geq 0$, besitzt A nichtnegative Eigenwerte. Wir zeigen: Sei $\lambda_1 \geq 0$ ist genau dann Eigenwert von A, wenn $\lambda_1 + \lambda$ Eigenwert von $A + \lambda$ ist.

Sei zunächst λ_1 Eigenwert von A. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A + \lambda - (\lambda_1 + \lambda)) =& \det(A - \lambda_1) \\
=& 0
\end{aligned}$$

Dann ist $\lambda + \lambda_1$ Eigenwert von $A + \lambda$. Sei umgekehrt $\lambda_1 + \lambda$ Eigenwert von $A + \lambda$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda_1) =& \det(A - \lambda_1 + \lambda - \lambda) \\
=& \det(A + \lambda - (\lambda_1 + \lambda)) \\
=& 0
\end{aligned}$$

Dann ist λ_1 Eigenwert von A.

Weil $\lambda > 0$, sind die Eigenwerte alle strikt positiv. Dann ist 0 kein Eigenwert, und $A + \lambda$ ist invertierbar.

(e)
$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Die Eigenwerte sind 2 und 0, also $B - A$ ist positiv. Es gilt
$$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
und
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dann ist
$$B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
Die Eigenwerte von $B^2 - A^2$ sind $3 \pm \sqrt{10}$. Aber $3 - \sqrt{10} < 0$, also $B^2 - A^2$ ist nicht positiv. $\square$

CHAPTER THREE

Analysis 2

Ich habe die Übungen für Analysis 2 mit Lukas Then gemacht.

3.1 Blatt 1

Aufgabe 84. Berechnen Sie Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{\arctan \sin x^2}{e^{1-x}}$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = x^{(x^x)}$ für $x > 0$

(a)

$$f(x) = e^{x-1} \arctan \sin x^2.$$

$$\begin{aligned}
f'(x) =& e^{x-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \sin x^2 + \left(\arctan \sin x^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x-1} \\
=& \frac{e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x^2 + \left(\arctan \sin x^2\right) e^{x-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x-1) \\
=& \frac{e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} (\cos x^2)(2x) + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \\
=& \frac{2x \cos x^2 e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} + (\arctan \sin x^2) e^{x-1}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
g(x) =& x^{(x^x)} \\
\ln g(x) =& x^x \ln x
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.

$$\begin{aligned}
h(x) &:= x^x \\
h'(x) &= x^x (1 + \ln x)
\end{aligned}$$

Beweis.

$$\ln h(x) = x \ln x.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} | \ln h(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln x) \\
\frac{h'(x)}{h(x)} =& \ln x + 1 \\
h'(x) =& h(x)(1 + \ln x) \\
=& x^x (1 + \ln x)
\end{aligned}$$

Man kann auch $x^x = e^{x \ln x}$ verwenden und Kettenregeln benutzen.

□

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln g(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x \ln x) \\
\frac{g'(x)}{g(x)} =& \frac{1}{x} x^x + (\ln x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x) \\
=& \frac{x^x}{x} + (\ln x) x^x (1 + \ln x) \\
g'(x) =& g(x) x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right] \\
=& x^{x^x + x} \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right] \\
=& x^{x^x + x - 1} \left[1 + x \ln x + x \ln^2 x \right]
\end{aligned}$$

Aufgabe 85. Untersuchen Sie, für welche Argumente des Definitionsbereiches die folgenden Funktionen differenzierbar sind:

(a) $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) $h(z) = \overline{z}, z \in \mathbb{C}$

(a) Für $x_0 \neq 0$ gibt es eine Umgebung auf x_0, worin $|x| = x$ oder $|x| = -x$. Dann ist die Ableitung von $|x|$ gleich mit die Ableitung von entweder x oder $-x$, also $f'(x_0)$ existiert für $x_0 \neq 0$.

Für $x_0 = 0$ gilt $|0| = 0$, und auch

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Weil die beide ungleich sind, existiert die Grenzwert und daher auch die Ableitung nicht.

(b) Sei $x_0 \neq 0$ und $y_0 = x_0^2$. Dann für $0 < \epsilon < y_0$ existiert keine $\delta > 0$, sodass $|x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

Beweis: Es gibt zwei Fälle:

(i) $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann in jeder offenen Ball $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt es ein Zahl $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, also $|g(x) - g(x_0)| = g(x_0) = y_0 > \epsilon$

(ii) Sei $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Dann in jeder offenen Ball $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt es ein Zahl $x \in \mathbb{Q}$, also $|g(x) - g(x_0)| = g(x) > y_0 > \epsilon$

Sei $x_0 = 0$. Dann gilt $g(x_0) = 0$, und auch:

(i) $x \in \mathbb{Q}$, also

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \frac{x^2}{x} \\ &= x \end{aligned}$$

(ii) oder $x \notin \mathbb{Q}$, also

$$g(x) - g(0) = 0 - 0 = 0 \implies \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

Deshalb ist

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

(c) Zu berechnen:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Sei $z = z_0 + x, x \in \mathbb{R}$. Dann, falls die Grenzwert existiert, ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{z_0 + x - z_0}}{z_0 + x - z_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sei jetzt $z = z_0 + ix, x \in \mathbb{R}$. Falls die Grenzwert existiert ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{z_0 + ix - z_0}}{z_0 + ix - z_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{ix}}{ix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to 0} \frac{-ix}{ix} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Weil das Grenzwert, wenn durch zwei Richtungen berechnet wurde, ungleich ist, existiert das Grenzwert nicht (für alle $z \in \mathbb{C}$)

Aufgabe 86. Man zeige, dass die Gleichung

$$x = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

auf $[0,1]$ genau eine Lösung besitzt.

Sei $f(x) = x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Dann ist die Gleichung gleich $f(x) = 0$. $f(x)$ ist auf $[0,1]$ stetig, und auf $(0,1)$ differenzierbar.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 - 1 = -1 \\
f(1) &= 1 - 0 = 1
\end{aligned}
$$

Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es mindestens eine Lösung zu der Gleichung $f(x) = 0$. Dann

$$f'(x) = 1 + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0 \text{ für } x \in [0,1].$$

f is dann monoton wachsend, und es gibt maximal eine Lösung zu $f(x) = 0$.

Deswegen besitzt die Gleichung genau eine Lösung.

Aufgabe 87. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{k\to\infty} k \ln \frac{k-1}{k}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}$

(a)

$$k \ln \frac{k-1}{k} = \frac{\ln(k-1) - \ln k}{1/k}.$$

Weil $\ln x$ und $1/x$ auf $x \in (0, \infty)$ differenzierbar sind, kann man den Satz von L'Hopital verwenden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\ln(k-1) - \ln k\right] &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{1}{k} &= -\frac{1}{k^2}
\end{aligned}
$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k(k-1)}}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{k}{k-1}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$
$$= -1$$

Weil das Grenzwert auf $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ existiert, ist

$$\lim_{k\to\infty} k\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -1.$$

(b)

$$\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \frac{\left(e^{\ln x}\right)^{\ln x}}{e^x} = \frac{e^{\ln^2 x}}{e^x} = e^{\ln^2 x - x} = e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-1\right)}.$$

Lemma 3.2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^p x}{x^q} = 0, \qquad p, q > 0.$$

Beweis.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^p x}{x^q} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{p/q}}\right)^q$$
$$= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x^{p/q})}\right)^q \qquad \text{L'Hopital}$$
$$= 0^q = 0$$

□

Korollar 3.3.

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-1\right)\right] = -\infty.$$

Deswegen ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-1\right)} = 0.$$

Aufgabe 88. Überprüfen Sie die Funktion $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & -1 \le x < 1 \\ \frac{8}{\pi}\arctan\frac{1}{x} & x \ge 1 \end{cases}$$

auf lokale und globale Extrema.

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & -1 < x < 1 \\ \frac{8}{\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x > 1 \end{cases}.$$

Es ist klar, dass $x = 0$ eine Lösung zu $f'(x) = 0$ ist. Weil $f''(0) = 2 > 0$, ist es ein lokales Minimum. Es gibt auch $a, b \in \mathbb{R}, a < 1 < b$, wofür gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \qquad && x \in (a, 1) \\ f'(x) &< 0 \qquad && x \in (1, b) \end{aligned}$$

Falls $f(1) \geq \lim_{x\to 1^-} f(x)$, ist $f(1)$ ein lokales Maximum (sogar wenn f nicht auf 1 stetig ist). Weil

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2 + 1\right) = 2$$

und

$$f(1) = \frac{8}{\pi} \arctan 1 = \frac{8}{\pi}\frac{\pi}{4} = 2$$

ist $f(1)$ ein lokales Maximum. Weil $f(x) < 2$ für $x > 1$ kann kein Punkt $x > 1$ ein globales Maximum sein. Es gilt auch, dass

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Außer $x \in \{-1, 0, 1\}$ gibt es keine Möglichkeiten für ein globales Maximum. Daher sind die globale Maxima auf $x \in \{-1, 1\}$

Für $x \in [1, 1)$ gilt $f(x) \geq 1$. Dennoch ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Deswegen gibt es *keine* globales Maximum auf $\mathbb{R}$. Wenn man $f(\infty)$ definiert durch $f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$, ist $f(\infty)$ das globale Maximum.

Tipfehler - Maximum sollte Minimum sein.

3.2 Blatt 2

Aufgabe 89. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}\backslash 0$ und $D \subset \mathbb{K}$ offen. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ ebenfalls n-mal differenzierbar ist und weiterhin

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für jedes $x \in D$ gilt.

Beweis. Wir zeigen es per Induktion, für $n = 1$ ist es das Produktregel. Nehme jetzt an, dass f, g $(n+1)-$ mal differenzierbar Funktionen sind und

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

gilt (weil alle $(n + 1)$-mal differenzierbar Funktionen sind auch n-mal differenzierbar). Dann ist $(f \cdot g)^{(n)}(x)$ differenzierbar, weil die rechte Seite eine Linearkombination von Produkte aus (zumindest) einmal differenzierbar Funktionen. Es gilt auch,

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n)}(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) && n = 1 \text{ Fall} \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
=& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
=& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 90. i) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2x^2 + 1}.$$

Beweisen Sie, dass $(f_n), n \in \mathbb{N}$ gegen eine zu bestimmende Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, diese jedoch nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Warum ist das kein Widerspruch zu Proposition 5.5.2?

ii) Untersuchen Sie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, x \in \mathbb{R}.$$

auf Differenzierbarkeit.

Beweis. i)

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Es ist klar, dass $f_n(x)$ konvergiert gegen $\sqrt{x^2} = |x|$. Sei dann $r(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|$. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
r(x) =& \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - x \\
r'(x) =& \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{x}{\sqrt{x^2}} - 1$$
$$= 0$$

Deswegen ist $r(x)$ monoton fallend auf $(0, \infty)$. Ähnlich beweist man, dass $r(x)$ monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$ ist. Deswegen ist $x = 0$ ein globales Maximum, und $r(x) \leq r(0) = \frac{1}{n}$. Daher konvergiert (f_n) gleichmäßig.

Man berechnet:

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Die Folge der Ableitungen konvergiert gegen $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)$, falls $x \neq 0$, und 0, falls $x = 0$. Es konvergiert aber nicht lokal gleichmäßig in eine Umgebung U auf 0.

Sei $1 > \epsilon > 0$ gegeben, und nehme an, dass existiere $N \in \mathbb{N}$, für die gilt,

$$|f_n(x)' - g(x)| \leq \epsilon \qquad n > N, x \in U,$$

wobei

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Nehme eine solche Abbildung $f_n'(x)$. Weil f_n' stetig ist, und $f_n'(0) = 0$, gibt es eine Umgebung $0 \in V$, in der gilt, dass $|f_n'(x) - f_n'(0)| = f_n'(x) \leq 1 - \epsilon, x \in V$. Sei dann $0 \neq x \in V$, und $|1 - f_n'(x)| > \epsilon$, also die Folge f_n' konvergiert nicht lokal gleichmäßig.

Man kann auch beachten, dass $f_n'(x)$ stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist. Wenn die Folge lokal gleichmäßig in eine Umgebung auf 0 konvergiert, wäre das Grenzwert auch stetig. Weil das Grenzwert nicht stetig ist, kann die Folge nicht lokal gleichmäßig konvergieren.

Deswegen ist es kein Widerspruch zu den Korollar, weil die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

ii) Es gilt $\left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$. Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig (Weierstraßsches Majorantenkriterium).

Jetzt ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos(nx)}{n^3} = -\frac{\cancel{n}\sin(nx)}{n^{\cancel{3}}\,{}^{2}}$. Weil $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|$ gleichmäßig. Deswegen ist f differenzierbar, mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\sin(nx)}{n^2}\right].$$ □

Aufgabe 91. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \max\{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Beweis. Wir wissen schon, dass es $q_n(x)$ existiert, $q_n(x)$ Polynome, und $q_n(x) \to |x|$ gleichmäßig. Es gilt auch

$$f(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{x}{2}.$$

Daher konvergiert gleichmäßig

$$\frac{q_n(x)}{2} + \frac{x}{2} \to f(x).$$

□

Aufgabe 92. i) Es seien $f : (a, b) \to (c, d)$ und $g : (c, d) \to R$ n-mal differenzierbare Funktionen mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f$ n-mal differenzierbar ist.

ii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert ist. Bestimmen Sie zudem $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis. i)

Satz 3.4. *Die Ableitung von ein Produkt $f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$ ist*

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\ldots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\ldots f_n(x).$$

Beweis. Wir beweisen es per Indukion. Für $n = 2$ ist es das Produktregel. Jetzt nehme an, dass es für eine $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_1(x)f_2(x)\ldots f_{n+1}(x)\right) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\right)f_{n+1}(x) \\ &+ \left(f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\right)\frac{\mathrm{d}f_{n+1}}{\mathrm{d}x} \\ =& \left(\sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\ldots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\ldots f_n(x)\right) \\ &+ \left(f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\right)f_n'(x) \\ =& \sum_{i=1}^{n+1} f_1(x)f_2(x)\ldots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\ldots f_{n+1}(x)\end{aligned}$$

□

Korollar 3.5. *Alle Monome von differenzierbare Funktionen sind differenzierbar, und die Ableitung ist noch eine lineare Kombination von Monome.*

Korollar 3.6. *Sei f $k-$ mal differenzierbar. Dann alle Monome von*

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$$

sind differenzierbar.

Satz 3.7. $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f \circ g)$ *ist ein Monom von Ableitungen von f und g (höchstens die k-ste Ableitung), sofern f und g, n-mal differenzierbar sind.*

Beweis. Für $k = 1$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Nehme an, dass es für ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ gilt. Dann per Korollar 3.5 gilt es auch für $k+1$. Per Induktion ist die Verkettung dann n-mal differenzierbar, □

ii)

Lemma 3.8.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0, k > 0.$$

Beweis. Wir beweisen es per Induktion auf p. Für $p = 1$ verwenden wir den Satz von L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^{k-1}(k)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^k} = 0.$$ □

Jetzt nehme an, dass es für p gilt. Wir zeigen, dass es für $p \to p+1$ auch gilt.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)(\ln x)^p}{kx^{k-1}(x)} = \frac{p+1}{k} \lim_{\xi\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0.$$

Lemma 3.9.

$$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-kx} = 0, k > 0.$$

Beweis. Nimm $x = e^\xi$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-k}(\ln x)^p = \lim_{x\to\infty} e^{-k\xi}\xi^p = 0.$$ □

Die Ableitungen $f^{(n)}(x), x \neq 0$ haben den Form $p_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$, wobei $p_n(x)$ eine Polynome ist.

Proposition 1. $f^{(n)}(0) = 0$

Beweis. Wir beweisen es per Induktion. $f^{(0)}(0) = 0$ per Definition.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f^{(n-1)}(x)\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} x p_n(x) e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Deswegen ist f überall (inkl. 0) differenzierbar, mit alle Ableitungen $f^{(n)}(0) = 0$ □

□

Aufgabe 93. Es seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{K}$ nichtleere, kompakte Mengen und die Folgen stetiger Funktionen $f_n : K_1 \to K_2$ sowie $g_n : K_2 \to K$ seien gleichmäßig konvergent gegen $f : K_1 \to K_2$ bzw. $f : K_2 \to K$. Beweisen Sie, dass auch

$$g_n \circ f_n \to g \circ f$$

gleichmäßig auf K_1 gilt.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann per Definition existiert $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}, x \in K_2, n \geq n_2 \tag{3.1}$$

Weil g stetig und auf eine kompakte Menge definiert ist, ist g gleichmäßig stetig, und es existiert $\delta > 0$, für die gilt

$$|g(a) - g(b)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |a-b| < \delta \tag{3.2}$$

Es gibt auch $n_1 \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| < \delta, x \in K_1, n \geq n_1$. Für $n > n_1$ gilt daher auch

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \frac{\epsilon}{2}, n > n_1, x \in K_1 \tag{3.3}$$

Sei $N = \max(n_1, n_2)$. Für $n \geq N$ gilt Eq. (3.1) und Eq. (3.3) auch, weil $N \geq n_1$ und $N \geq n_2$. Dann für $n \geq N$ gilt.

$$\begin{aligned} |g(f(x)) - g_n(f_n(x))| =& |g(f(x)) - g(f_n(x)) + g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))| \\ \leq& \underbrace{|g(f(x)) - g(f_n(x))|}_{<\epsilon/2\ (3.3)} + \underbrace{|g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))|}_{<\epsilon/2\ (3.1)} \\ <& \epsilon \end{aligned}$$

Also $g_n \circ f_n \to g \circ f$ gleichmäßig. □

3.3 Blatt 3

Aufgabe 94. (a) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x)\cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius $R = +\infty$ dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht durch ihre Taylorreihe um x = 0 dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9?

Beweis. (a)

$$\begin{aligned} g(x) =& \sin(x)\cosh(x) \\ =& \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) \\ =& \frac{1}{4i}\left(e^{(i+1)x} + e^{(i-1)x} - e^{(1-i)x} - e^{-(i+1)x}\right) \\ =& \frac{i}{4}\left[e^{-(i+1)x} + e^{(1-i)x} - e^{(i+1)x} - e^{(i-1)x}\right] \\ g^{(n)}(x) =& \frac{i}{4}\left[[-(i+1)]^n e^{-(i+1)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x}\right. \\ & \left. -(1+i)^n e^{(i+1)x} - (i-1)^n e^{(i-1)x}\right] \\ |g^{(n)}(x)| \leq& \frac{1}{4}(\sqrt{2})^n \left[\left|e^{-(i+1)x}\right| + \left|e^{(1-i)x}\right| + \left|e^{(i+1)x}\right| + \left|e^{(i-1)x}\right|\right] \end{aligned}$$

Die Bedingungen sind jetzt erfüllt: Sei $B_r(0)^{cl}$ ein abgeschlossenes Ball für beliebige $r > 0$. Sei außerdem

$$c = \sup_{x \in B_r(0)^{cl}} \frac{1}{4}\left[\left|e^{-(i+1)x}\right| + \left|e^{(1-i)x}\right| + \left|e^{(i+1)x}\right| + \left|e^{(i-1)x}\right|\right]$$
$$\alpha = \sqrt{2}$$

Es gilt $c \neq \infty$, weil die Abbildung in den Klammern stetig ist, und ist daher auf eine eingeschränkte Menge auch eingeschränkt. Es folgt:

$$\|g^{(n)}\|_{B_r(0)^{cl}} \leq c\alpha^n \tag{5.6.23}$$

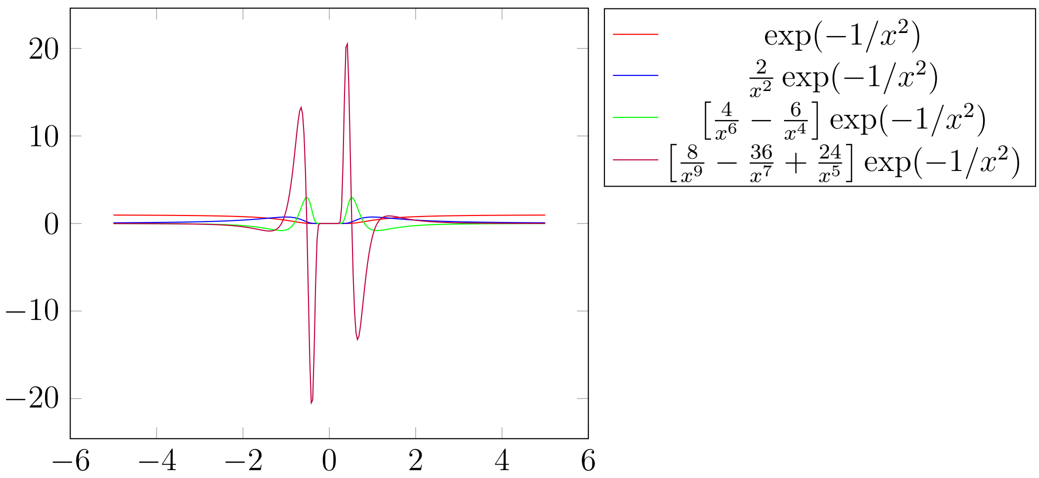
Also die formale Taylorreihe hat einen Konvergenzradius $R > r$ und konvergiert gegen auf $B_r(0)^{cl}$ gegen g. Weil das für alle $r > 0$ gilt, konvergiert die Taylorreihe gegen f für alle $x \in \mathbb{R}$, und die Konvergenzradius $R = +\infty$.

(b) Es ist klar, dass es nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Die Taylorreihe ist $0 + 0x + 0x^2 + \cdots = 0$, aber $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.

Wir berechnen jetzt $f^{(n)}(a)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(a) &= \exp\left(-1/a^2\right) \\ f'(x) &= \frac{2}{x^2}\exp\left(-1/x^2\right) \\ f''(x) &= \left[\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right]\exp\left(-1/x^2\right) \\ f'''(x) &= \left[\frac{8}{x^9} - \frac{36}{x^7} + \frac{24}{x^5}\right]\exp\left(-1/x^2\right) \end{aligned}$$ □

Aber das Supremum ist nicht nur durch die Koeffizienten beeinflusst, sondern auch das Maximumpunkt…



Also

Aufgabe 95. Es sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Geben Sie das Taylorpolynom P_2 von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an und schätzen Sie den maximalen Fehler von $|f(x) - P_2(x)|$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ab.

Beweis. Es gilt $f(x) = x^{1/3}$, und daher

$$f^{(n)}(x) = \left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3} - i\right)\right] x^{\frac{1}{3}-n},$$

also

$$f^{(n)}(1) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3} - i\right).$$

Es gilt daher

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2.$$

Wir wissen schon

$$|R_{n,x_0}(f)(h)| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(x_0+th) - f^{(n)}(x_0)\right| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \tag{5.6.20}$$

Hier ist $n = 2$, und $|h| \leq \frac{1}{2}$.

Vereinfachung

(Nur in diesem Problem, falsch im Allgemein) Der maximale Fehler ist gleich $\sup_{t\in[-1,1]} \left|f^{(n)}(x_0+th) - f^{(n)}(x_0)\right| \frac{|h|^n}{(n-1)!}$, wobei $h = \frac{1}{2}, n = 2$, und $x_0 = 1$.

Beweis. Wir betrachten zuerst $R_{n,x_0}(f)(\xi)$ für $0 \leq \xi \leq h$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi\in[0,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) &\leq \sup_{\xi\in[0,h]} \left[\sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(x_0+t\xi) - f^{(n)}(x_0)\right| \frac{|\xi|^n}{(n-1)!}\right] \\
&= \sup_{\xi\in[0,h]} \left[\sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(x_0+t\xi) - f^{(n)}(x_0)\right| \frac{|h|^n}{(n-1)!}\right] \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(x_0+th) - f^{(n)}(x_0)\right| \frac{|h|^n}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Ähnlich gilt auch

$$\sup_{\xi\in[-h,0]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t\in[-1,0]} \left|f^{(n)}(x_0+th) - f^{(n)}(x_0)\right| \frac{|h|^n}{(n-1)!}.$$

Weil wir den maximalen Fehler auf dem ganzen Intervall schätzen möchten, ist die gewünschte Antwort daher

$$\sup_{\xi\in[-h,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t\in[-1,1]} \left|f^{(n)}(x_0+th) - f^{(n)}(x_0)\right| \frac{|h|^n}{(n-1)!}. \qquad \square$$

Wir betrachten deswegen

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[-1,1]} \left|f^{(n)}(x_0+th) - f^{(n)}(x_0)\right| \\
&= \sup_{t\in[-1,1]} \left|\left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)\right](x_0+th)^{\frac{1}{3}-n} - \left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-i\right)\right]\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - i\right) \right| \sup_{t\in[-1,1]} \left| \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-5/3} - 1 \right| \\
&= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - i\right) \right| \left| \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-5/3} - 1 \right| \\
&= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - i\right) \right| \left(2^{5/3} - 1\right)
\end{aligned}$$

Also der maximale Fehler ist

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{|0.5|^2} \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - i\right) \right| \left(2^{5/3} - 1\right) = \frac{1}{18} \left(2^{5/3} - 1\right). \qquad \square$$

Aufgabe 96. Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in x_0.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ im Punkt $x_0 = 2$.

(b) $g(x) = \sin^2(\pi x)$ in $x_0 = 3$.

(c) $h(x) = \sin^{-1}(x)$ in $x_0 = 0$.

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
f(2) =& 2^3 - 3(2)^2 + 3(2) + 2 = 4 \\
f'(x) =& 3x^2 - 6x + 3 \\
f'(2) =& 3 \\
f''(x) =& 6x - 6 \\
f''(2) =& 6 \\
f'''(x) =& 6 = f(2) \\
f''''(x) =& 0
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom ist dann

$$4 + 3(x-2) + 3(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

(b)

$$\begin{aligned}
g(x) =& \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x)) \\
g(3) =& 0 \\
g'(x) =& \pi \sin(2\pi x) \\
g^{(n)}(x) =& (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} \sin(2\pi x) & n \text{ ungerade} \\ \cos(2\pi x) & n \text{ gerade} \end{cases} \qquad n \geq 1
\end{aligned}$$

$$g^{(n)}(3) = (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} \qquad n \geq 1$$

Das Taylorpolynom vom Grad 30 ist

$$\sum_{n=1}^{15} \left[(-1)^{\lfloor (2n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} (x-3)^{2n} \right].$$

(c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin^{-1} x \\ h(0) &= 0 \\ h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \\ h'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Sei $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Wir wissen, dass die Taylorreihe von $(1+x)^\alpha$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{5.6.41}$$

ist, wobei $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} [\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)]$. Die Taylorreihe von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt:

$$\begin{aligned} T_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(-x^2\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n \qquad\qquad b_n = 0, \text{ n ungerade} \end{aligned}$$

Es gilt daher, für die Koeffizienten der Taylorreihe von $\sin^{-1}(x)$

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dass $a_n = b_{n-1}/n$, für $n \geq 1$. Es ist dann

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{14} \frac{1}{2n+1} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n+1}).$$

□

Aufgabe 97. Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von $\exp : [0,1] \to \mathbb{R}$ für die markierten Zerlegungen (J_n, Ξ_n) mit der Auswahl $\Xi_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

Beweis.

Wir werden später die folgende Lemma brauchen:

Lemma 3.10.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{-1/n}\right) = 1.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{-1/n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-1/n}}{1/n} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-x}}{x} && x = 1/n \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}}{1} && \text{L'Hopital} \\
&= 1 && \square
\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{O}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\exp\left(\frac{k+1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{(e-1)e^{1/n}}{e^{1/n}-1} \\
&= \frac{1}{n}\frac{e-1}{1-e^{-1/n}}
\end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{O}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n\left(1-e^{-1/n}\right)} = e-1.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\exp\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{e-1}{e^{1/n}-1} \\
&= \frac{1}{n}\frac{e-1}{e^{1/n}\left(1-e^{-1/n}\right)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n(e^{1/n}\left(1-e^{-1/n}\right)} = e-1. \qquad \square$$

3.4 Blatt 4

Aufgabe 98. In dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Verknüpfung zweier Riemann-integrierbarer Funktionen i.A. nicht Riemann-integrierbar ist. Dazu gehen wir wie folgt vor:

(a) Es sei $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, d.h. eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Weiterhin sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & x = q_n. \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.

(b) Weiterhin sei

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \backslash \left\{ \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \right\}, \\ 1 & x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g Riemann-integrierbar ist, die Verknüpfung $g \circ f$ mit der Funktion f jedoch nicht.

Beweis. (a) Wir betrachten eine uniforme Zerlegung

$$\mathcal{J}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 \right\},$$

und die Intervalle

$$I_n(k) = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right].$$

Es gilt $\inf_{x \in I_n(k)} f(x) = 0$. Wir müssen daher nur beweisen

Ziel

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $\mathcal{J}_n$, sodass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}(n)} < \epsilon.$$

Die wichtigste Bemerkung ist: jedes q_x kommt maximal zweimal vor (das passiert im Fall wenn $q_x = k/n$ for eine $k \in \{0, \ldots, n\}$). Es folgt dann für $n = 2p$ gerade,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}(n)} \leq \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2p} \frac{2}{j}$$

$$\overline{\int_0^1} f(x)\, \mathrm{d}x \leq \lim_{p \to \infty} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2p} \frac{2}{j}$$

$$
\begin{aligned}
&< \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}(1+\ln p)\\
&=0
\end{aligned}
$$

Also f ist integrierbar mit $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ so eine Zerlegung: Sei $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}$. Außer $[x_0, x_1]$ gibt es dann nur endlich viele $x = \frac{1}{n}$ (eigentlich gibt es genau $n-1$). Sei dann

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_n = \Bigg\{ & 0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} - \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \frac{1}{n-1} + \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \frac{1}{n-2} - \frac{\epsilon}{2^{n-1}},\\
& \frac{1}{n-2} + \frac{\epsilon}{2^{n-2}}, \frac{1}{n-3} - \frac{\epsilon}{2^{n-3}}, \ldots, 1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: In der Intervall $\left[\frac{1}{n-p} + \frac{\epsilon}{2^{n-p}}, \frac{1}{n-p-1} - \frac{\epsilon}{2^{n-p-1}}\right]$ gibt es keine Zahlen mit dem Form $1/n, n \in \mathbb{Z}$, also $\sup f = 0$ auf solchen Intervalle. Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathcal{J}_n} &= \frac{2}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^j}\\
\lim_{n\to\infty} \mathcal{O}_{\mathcal{J}_n} &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^j}\right]\\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

Weil ϵ beliebig war, ist dann

$$
\overline{\int_0^1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0,
$$

also g ist integrierbar mit

$$
\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0.
$$

(c) Es gilt

$$
(g\circ f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \end{cases}.
$$

Sei $h := g\circ f$. h ist nicht auf $[0,1]$ integrierbar. Sei $\mathcal{J} = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_N = 1\}$. Es gibt, für alle Intervalle $[a,b] \subseteq [0,1]$, zwei Punkte

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Q} \ni x_0 \in [a,b] && \text{dichtheit von } \mathbb{Q}\\
&\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \ni x_1 \in [a,b] && \mathbb{Q} \text{ ist nur abzählbar}
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$\sup\left(h|_{[a,b]}\right) = 1 \tag{3.4}$$
$$\inf\left(h|_{[a,b]}\right) = 0 \tag{3.5}$$

Daraus folgt, für jede Zerlegung $\mathcal{J}$ von $[0,1]$, dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) = 1$$
$$\mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) = 0$$

also h ist nicht auf $[0,1]$ integrierbar. □

Aufgabe 99. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf dem echten Intervall $[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein echtes Intervall $J \subset [a,b]$ gibt, auf dem f strikt positiv ist, d.h. mit $f(x) > 0$ für alle $x \in J$.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, die Charakterisierung der Darboux-Integrierbarkeit zu benutzen und Untersummen zu betrachten.

Beweis. Wir beweisen es per Widerspruch. Nehme an, dass in jedem Intervall es mindestens ein Punkt x_0 gibt, für die $f(x_0) \leq 0$. Insbesondere gilt das für alle abgeschlossen Intervalle $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Sei jetzt $\mathcal{J}$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$, $\mathcal{J} = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$, mit die übliche Voraussetzung $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathcal{J}} &= \sum_{i=1}^{N} \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} (0)(t_i - t_{i-1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Weil $\mathcal{J}$ beliebig war, gilt das für alle Zerlegungen, und

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0,$$

also

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0,$$

ein Widerspruch. □

Aufgabe 100. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $|f|$ integrierbar auf $[a, b]$, so ist es auch f.

(b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a, b]$ und ein $\delta > 0$, so ist auch $\frac{1}{f}$ über $[a, b]$ integrierbar.

(c) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis. (a) Falsch. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Dann ist $|f| = 1$ integrierbar (Proposition 6.1.6). Wir müssen jetzt nur beweisen, dass f nicht integrierbar ist. Der Beweis ist gleich zu der Beweis in der vorherigen Aufgabe. Wir müssen nur statt (3.5) schreiben

$$\inf\left(h|_{[a,b]}\right) = -1$$

(b) Wahr.

Bemerkung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq \delta$ für ein $\delta > 0$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\inf(f)} &= \sup\left(\frac{1}{f}\right) \\ \frac{1}{\sup(f)} &= \inf\left(\frac{1}{f}\right) \end{aligned}$$

wegen der Monotonie von $x \to 1/x$.

Wir haben auch

Korollar

(Korollar aus Proposition 6.2.3(vi)) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{J} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ von I gibt, sodass

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\sup\left(f|_{[a,b]}\right) - \inf\left(f_{[a,b]}\right)\right](t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Wir arbeiten mit dem Korollar. Sei $\mathcal{J} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \left[\sup\left(\frac{1}{f}\bigg|_{[t_{i-1},t_i]} \right) - \inf\left(\frac{1}{f}\bigg|_{[t_{i-1},t_i]} \right) \right] (t_i - t_{i-1}) \\
=&\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{\inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)} - \frac{1}{\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)} \right] (t_i - t_{i-1}) \\
=&\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) - \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)}{\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right)} \right] (t_i - t_{i-1}) \\
\leq&\frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^{N} \left[\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) - \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) \right] (t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

Per Hypothese gibt es eine Zerlegung $\mathcal{J}$ von $[a, b]$, für die gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\sup\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) - \inf\left(f|_{[t_{i-1},t_i]}\right) \right] < \epsilon\delta^2.$$

Dies ist genau die gewünschte Zerlegung, also nach dem Korollar ist f integrierbar.

(c) Falsch. Sei f und g Treppefunktionen, $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
g(x) &= \begin{cases} 1 & 0.5 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Es gilt $(f \cdot g)(x) = 0$, und daher $\int_0^1 (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Jetzt sei $\mathcal{J} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \geq& \sup\left(f|_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\
=& 1(1/4) = 1/4 \\
\mathcal{U}_{\mathcal{J}}(g) \geq& \sup\left(g|_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]}\right) \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \\
=& 1(1/4) = 1/4
\end{aligned}$$

Also $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{1}{4} > 0$, und gleich für $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Daher ist

$$\int_0^1 (f \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad \square$$

Aufgabe 101. (Wanderdüne) Man gebe eine Folge von nicht-negativen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, sodass

- $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
- $f_n \not\to 0$ für jedes $x \in [0,1]$.

Beweis. Sei

$$g_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\int_0^1 g_{a,b}(x) = (b-a).$$

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$, und $k(n)$ das Zahl, sodass

$$\frac{k(k+1)}{2} \le n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

gilt. Das ist immer möglich, weil $x \to x(x+1)/2$ monoton wachsend ist. Sei

$$\begin{aligned} p(k(n)) :=& \frac{k(n)(k(n)+1)}{2} \\ f_n(x) =& g_{\frac{n-p(n)}{k(n)+1}, \frac{n-p(n)+1}{k(n)+1}}(x) \end{aligned}$$

Wir beweisen die gewünschte Eigenschaften:

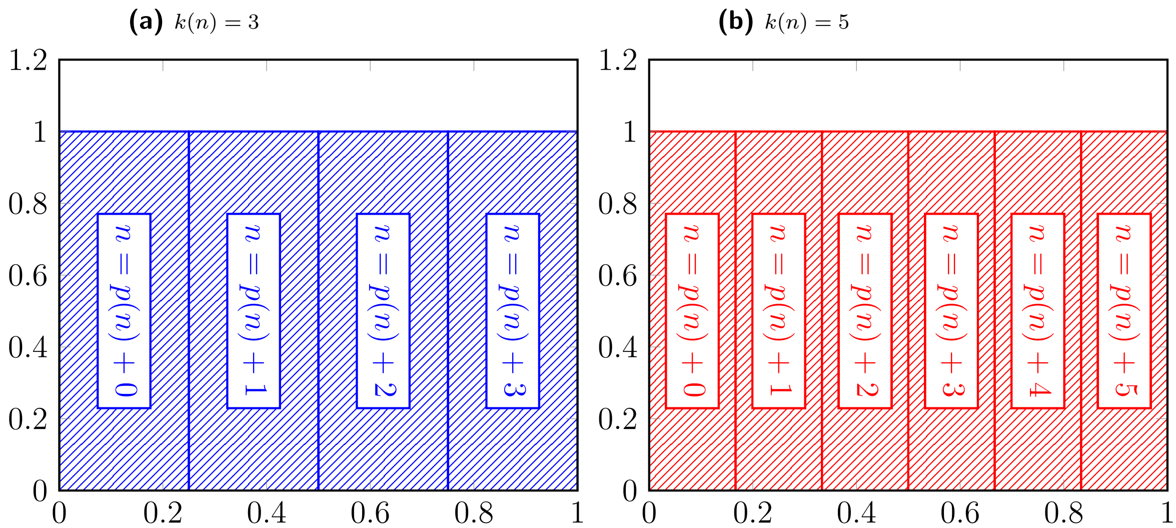


Figure 3.1: Im Allgemein ergibt sich für $p(k) \le n < p(k+1)$ eine Überdeckung von $[0,1]$ mit Treppen mit Länge $1/(k(n)+1)$.

(i) Es gilt $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k(n)+1}$. Weil $k(n)$ wachsend ist, und $k(n) \to \infty$ gilt, ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(ii) Sei $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei auch $q = \lfloor x(k(n)+2) \rfloor$. Es gilt dann

$$f_{p(k(n)+1)+q}(x) \neq 0,$$

also $f_n(x) \not\to 0$ für jedes $x \in [0,1]$. □

3.5 Blatt 5

Aufgabe 102. (Stückweise Integrierbarkeit) Zeigen Sie: ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[a,c]$ und $[c,b]$ für ein $c \in (a,b)$, so auch auf $[a,b]$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Weil f auf sowohl $[a,c]$ als auch $[c,b]$ integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung $\mathcal{J}_1 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = c\}$ bzw. $\mathcal{J}_2 = \{x_n = c, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}$ von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$, so dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}_1} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}(f) < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\mathcal{O}_{J_2} - \mathcal{U}_{J_2} < \frac{\epsilon}{2}$$

Dann ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}} < \epsilon.$$

Weil ϵ beliebig war, ist f integrierbar. □

Aufgabe 103. (Bestimmte Integrale) Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale :

(a) $\int_1^4 \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Beweis. (a) $u = \sqrt{x}, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, also $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. Wenn $x = 1$ ist $u = 1$, und $x = 4$ ist $u = 2$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sin\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x =& \int_1^2 \sin(u)(2u\,\mathrm{d}u)\\ =&2\int_1^2 u \sin u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=2\left[u(-\cos u)|_1^2 + \int_1^2 \cos u \, \mathrm{d}u\right] \qquad \text{partielle Integration}\\
&=2\left[(\cos(1) - 2\cos(2)) + [\sin u]_1^2\right]\\
&=2\cos 1 - 4\cos 2 + 2\sin 2 - 2\sin 1
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x =& x\arcsin(x)|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
=& \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
u =& 1 - x^2, \qquad \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x\,.\\
\text{Wenn } x =& 0, \text{ ist } u = 1.\\
\text{Wenn } x =& 1/2, \text{ ist } u = 3/4.\\
\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x =& \frac{\pi}{2} - \int_1^0 \frac{1}{(-2)}\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\\
=& \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-1/2}\,\mathrm{d}u\\
=& \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\int_{3/4}^{1} u^{-1/2}\,\mathrm{d}u\\
=& \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\left[2u^{1/2}\right]_{3/4}^{1}\\
=& \frac{\pi}{12} - 1 + \sqrt{\frac{3}{4}}\\
=& -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

(c) Substitution: $x = \tan\theta$, $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, für $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Es gilt $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}(\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta)\\
&= \int \frac{1}{\sec^4\theta}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]
\end{aligned}
$$

Es gilt auch $\sin\theta = \sin\tan^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $\cos\theta = \cos\tan^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Daraus folgt

$$\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{x}{1+x^2}.$$

Dann ist

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2}\right).$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =& \frac{x^2}{2}\sqrt{1-x^2}|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\,\mathrm{d}x \\
=& 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
u =& 1-x^2 \qquad \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x \\
x^3\,\mathrm{d}x =& \frac{1}{-2}x^2(-2x\,\mathrm{d}x) \\
=& -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}u \\
=& -\frac{1}{2}(1-u)\,\mathrm{d}u \\
\text{Wenn } x =& 0 \text{ ist } u = 1 \\
\text{Wenn } x =& 1 \text{ ist } u = 0 \\
\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =& +\frac{1}{2}\int_1^0 \left(-\frac{1}{2}\frac{1-u}{\sqrt{u}}\right)\mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{4}\left[2\sqrt{u} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
=& \frac{1}{4}\left[2 - \frac{2}{3}\right] \\
=& \frac{1}{4}\frac{4}{3} \\
=& \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 104. (Der Hauptsatz) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.

(b) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt ein Stammfunktion.

(c) Ein Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, welche eine Stammfunktion auf $[a,b]$ besitzt, ist integrierbar.

Hinweis: $F(x) = \sqrt{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$

Beweis. (a) Falsch. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Es gilt dann

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & x \le \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

(b) Ja (Proposition 6.4.1 und Definition 6.4.2).

(c) Nein. Sei $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F = \begin{cases} \sqrt{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und

$$F' = f = -x^{-1/2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3\sqrt{x}}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dann ist f nicht integrierbar, weil es nicht auf $[0,1]$ eingeschränkt ist ($x^{1/2} \to \infty$ wenn $x \to 0$). □

Aufgabe 105. (Riemann-Lemma) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{5.1}$$

gilt. Verifizieren Sie dazu:

(i) Zeigen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ eine stückweise konstante Funktion $T : [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\int_a^b |f(x) - T(x)|\,\mathrm{d}x \le \epsilon.$$

(ii) Zeigen Sie (5.1) für beliebige, stückweise konstakte Funktionen.

(iii) Folgern Sie die Behauptung.

Beweis. (i) Weil f integrierbar ist, können wir eine Zerlegung $\mathcal{J} = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ finden, so dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) - \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \le \epsilon.$$

Wir definieren zwei stückweise konstante Funktionen:

$$\tau(x) = \begin{cases} \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} & x_i \le x < x_{i+1}, 0 \le i < n-1 \\ \sup_{x_{n-1} \le x \le x_n} & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} & x_i \le x < x_{i+1}, 0 \le i < n-1 \\ \inf_{x_{n-1} \le x \le x_n} & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

Dann sind τ und σ Treppenfunktionen mit $\sigma \le f \le \tau$ auf $[a, b]$. Es gilt außerdem per Definition

$$\begin{aligned} \epsilon \ge & \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) - \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \\ = & \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) - \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i) \\ = & \sum_{i=0}^{n-1} (\tau(x_i) - \sigma(x_i))(x_{i-1} - x_i) \\ \ge & \sum_{i=0}^{n-1} (\tau(x_i) - f(x_i))\,(x_{i+1} - x_i) \\ = & \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(\tau - \sigma) \\ \ge & \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(\tau - f) \\ \ge & \int_a^b (\tau - f)(x)\,\mathrm{d}x \\ = & \int_a^b |\tau(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(ii) Wir beweisen es zuerst für konstante Funktionen

$$\int_a^b k \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{k}{n}(-\cos nx)|_a^b,$$

also

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b k \sin nx \,\mathrm{d}x \right| = & \left| \frac{k}{n} (\cos nb - \cos na) \right| \\ \le & \frac{k}{n} [|\cos nb| + |\cos na|] \\ \le & \frac{k}{n}(2) \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b k \sin nx \,\mathrm{d}x \right| \le \lim_{n\to\infty} \frac{2k}{n} = 0.$$

Statt eine stückweise konstante Funktion integrieren wir dann mehrere Male eine konstante Funktion. Danach summieren wir die Ergebnisse. Weil alle Ergebnisse geht gegen 0, geht die Summe auch gegen 0, also die Behauptung gilt für stückweise konstante Funktionen.

(iii) Sei

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)-\tau(x)+\tau(x)]\sin nx\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b (f(x)-\tau(x))\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_a^b \tau(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$
$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \le \lim_{n\to\infty}\left[\left|\int_a^b (f(x)-\tau(x))\sin nx\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \tau(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\right]$$
$$\le \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b |f(x)-\tau(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b \sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

Wir nehmen dann $N\in\mathbb{N}$ hinreichend groß, so dass für alle $n>N$ gilt

$$\int_a^b \tau(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \le \frac{\epsilon}{2}$$

(Möglich wegen (b)). Dann ist

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \le \epsilon.$$

Weil ϵ beliebig war, gilt die Behauptung. □

Aufgabe 106. Für eine gegebene Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ kann unter bestimmten Voraussetzungen (z.B. $f\in C^1([a,b])$, wir kommen in der Vorlesung darauf zurück) die Länge des Funktionsgraphen durch

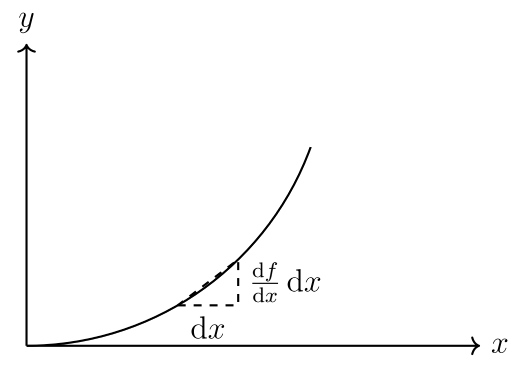
$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,\mathrm{d}x$$

bestimmt werden.

(i) Begründen Sie kurz anschaulich, warum diese Formel wahr sein kann. *Hinweis: Pythagoras.*

(ii) Bestimmen Sie über obige Identität den Umfang eines Einheitskreises.

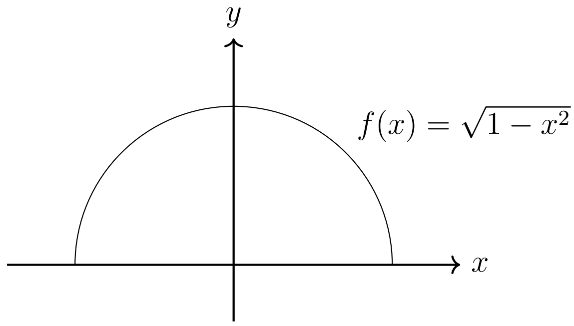
Beweis. (i)



also intuitiv wäre

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(ii) Wir berechnen zuerst die Länge eines Hälftes des Kreises, also



Es gilt

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

und

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \arcsin(x)\big|_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \end{aligned}$$

also der Umfang ist 2π. □

3.6 Blatt 6

Aufgabe 107. Im Folgenden ist $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Sind $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, so auch $f + g$.

(b) Sind $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, so auch $f \cdot g$.

(c) Sind $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so auch $g \circ f$.

(d) Es sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, nicht-negativ und uneigentlich integrierbar. Dann konvergiert

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis. (a) Wahr. Sei $a < c < b$. Wir wissen, dass $f + g$ auf $[a, c]$ integrierbar für alle solchen c ist und außerdem

$$\int_a^c (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{c\to b}\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x =& \lim_{c\to b}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{c\to\infty}\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x\\ =& \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

also $f + g$ ist integrierbar.

(b) Falsch. Sei $f, g : [-1, 0) \to \mathbb{R}, f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$. Das uneigentliche Integral existiert:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}}\,\mathrm{d}x =& \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \qquad \lim_{x_0\to 0}\int_{x_0}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\ =& \lim_{x_0\to 0} 2\sqrt{x}|_{x_0}^1\\ =& \lim_{x_0\to 0}(2-\sqrt{x_0})\\ =& 2\end{aligned}$$

Aber $fg = \frac{1}{-x}$ und

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{-x}\,\mathrm{d}x =& \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ =& \lim_{x_0\to 0} \ln x|_{x_0}^1\\ =& \lim_{x_0\to 0}(-\ln x_0)\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert nicht.

(c) Falsch. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ und $f : [0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{-\sqrt{x}}$. Dann ist $g \circ f = \frac{1}{-x}$.

Wir haben schon gezeigt, dass f integrierbar ist, $g \circ f$ aber nicht.

(d) Wir betrachten nur das Fall, in dem $f \geq 1$. Sonst können wir $f+1$ betrachten. Weil die konstante Funktion 1 uneigentlich (sogar eigentlich) auf $[0,1]$ integrierbar ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ genau dann, wenn $\int_0^1 f(x)+1\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Wir betrachten der Grenzwert, durch den das uneigentliche Riemann-Integral definiert ist. Weil f nichtnegativ ist, ist

$$I(x_0) = \int_{x_0}^1 \sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

ein Monoton fallend Funktion von x_0. Der Grenzwert existiert also genau dann, wenn $I(x_0)$ von oben beschränkt ist.

Wir definieren außerdem:

$$J(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Weil f integrierbar ist, ist $J(x_0)$ von oben beschränkt. Weil $\sqrt{f} \leq f$ gilt, ist $I(x_0) \leq J(x_0)\ \forall x_0 \in (0,1]$. Daraus folgt, dass I beschränkt ist, also $\sqrt{f}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar. □

Aufgabe 108. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Riemannintegrale auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Beweis. (a) Wir betrachten zuerst $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Weil e^{-x^2} monoton fallend ist, konvergiert das Integral genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$$

konvergiert. Es gilt $e^{-k^2} \geq e^{-k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$$

konvergiert, weil es eine geometrische Reihe ist.

Nachdem wir gezeigt haben, dass $\int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, existiert auch das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Es gilt, für $c \leq -1$, dass

$$\int_c^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_c^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Weil $\exp(-x^2)$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist, ist $\exp(-x^2)$ auf $[-1,1]$ integrierbar, also der Grenzwert $\int_{-\infty}^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert genau dann, wenn $\int_c^{-1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Aber wir wissen, weil $\exp(-(-x)^2) = \exp(-x^2)$, dass

$$\int_c^{-1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^c e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

also

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^{-1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Weil der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, existiert der Grenzwert auf der linken Seite, also $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert.

Weil $e^{-x^2} > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, konvergiert das Integral genau dann, wenn es absolut konvergiert, also es konvergiert absolut.

(b) Es steht schon im Skript, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

existiert. Aus

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

existiert auch $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x}$, daher auch

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir untersuchen es also für absolut Konvergenz. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi N}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{N-1}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x\\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi(j+1)}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)}|\sin x|\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{j=1}^{N-1}\frac{2}{\pi(j+1)}\end{aligned}$$

Dann nehmen wir die Limes $N\to\infty$. Weil die Summe divergent ist, ist das Integral auch divergent.

(c) Wie vorher ist $\sin((-x)^2) = \sin x$, also wir müssen nur zeigen, dass $\int_0^\infty \sin(x^2)$ konvergiert bzw. absolut konvergiert.

Sei $u = x^2,\ \ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{u}\,\mathrm{d}x$ und $\mathbb{R} \ni a, b, 0 < a < b$. Es folgt:

$$\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

Dann machen wir partielle Integration

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left.\frac{-\cos u}{\sqrt{u}}\right|_{a^2}^{b^2} - \int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos u}{2u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right| &\leq \left|\left.\frac{-\cos u}{\sqrt{u}}\right|_{a^2}^{b^2}\right| + \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2u^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\ &\geq \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \left.\frac{1}{\sqrt{u}}\right|_{a^2}^{b^2} \\ &= \frac{2}{a},\end{aligned}$$

was unabhängig von der oberen Grenze ist. Also $\int_a^\infty x^2 \sin(x^2)$ konvergiert für alle a. Da $\sin(x^2)$ überall in $\mathbb{R}$ definiert und stetig ist, ist auch

$$\int_0^\infty \sin\bigl(x^2\bigr)\,\mathrm{d}x$$

konvergent. Daraus folgt, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \sin\bigl(x^2\bigr)\,\mathrm{d}x$$

konvergent ist. Wir untersuchen es dann für absolut Konvergenz. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi N} \left|\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\right|\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2\sqrt{2\pi j}} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{j}}\end{aligned}$$

Weil die Summe divergent ist, divergiert auch das Integral. □

Aufgabe 109. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

Beweis. Es gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\ln 2 =& \ln 2n - \ln n \\ =& \int_1^{2n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ =& \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

also wir brauchen

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j}.$$

Es gilt

$$\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} \le \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \le \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j+1}$$

weil $\frac{1}{x}$ auf $(0,\infty)$ monoton fallend ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j+1}\right] =& \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}\right] \\ =& 0\end{aligned}$$

also wenn wir die Limes gegen ∞ nehmen, konvergiert die beide Summen gegen den gleichen Wert, also das Integral.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} = \lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Die Behauptung folgt. □

Aufgabe 110. Wir zeigen die Irrationalität von π durch einen Widerspruch. Angenommen, es gälte $\pi = \frac{a}{b}$ für $a, b \in \mathbb{N}$. Außerdem seien $f, F : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned}f(x) =& x^n \frac{(a-bx)^n}{n!}, \\ F(x) =& f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).\end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f^{(k)}(0), f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie

$$f(x)\sin x = \left(F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right)'.$$

Folgern Sie anschließend, dass $F(\pi) + F(0)$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist, was allerdings nicht mit den Eigenschaften von $x \to f(x)\sin x$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ vereinbar ist.

Beweis. (a) Wir leiten es ab. Sei $g(x) = x^n,\ h(x) = (a - bx)^n$. Es gilt

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} g^{(k)}(x) h^{(p-k)}(x).$$

Es gilt außerdem

$$g^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k},$$

also $g^{(k)}(0) \neq 0$ genau dann, wenn $k = n$ und in diesem Fall ist $g^{(n)}(0) = n!$. Ähnlich ist $h^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(-b)^k(a-bx)^{n-k}$, also $h^{(k)}(0) \in \mathbb{N}$. Dann im Summe müssen wir nurdem Fall $k = n$ betrachten, also

$$f^{(p)}(0) = \binom{p}{n} h^{(p-k)}(0) \in \mathbb{N}.$$

Ähnlich bei π gilt $g^{(k)}(\pi) = n(n-1)\dots(n-k+1)\pi^{n-k}$ und

$$\begin{aligned} g^{(k)}(\pi) =& n(n-1)\dots(n-k+1)(-b)^k(a-b\pi)^{n-k} \\ =& n(n-1)\dots(n-k+1)(-b)^k(a-b(a/b))^{n-k} \\ =& \begin{cases} 0 & k \neq n \\ n!(-b)^n & k = n \end{cases} \\ \in& \mathbb{Z} \end{aligned}$$

also wir betrachten im Summe nur den Fall $p - k = n$, also

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{n!}\binom{p}{p-n} g^{(p-n)}(\pi) h^{(n)}(\pi) = \binom{p}{p-n} g^{(p-n)}(\pi)(n!)(-b)^n \in \mathbb{N}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' =& F''(x)\sin x + F'(x)\cos x - F'(x)\cos x + F(x)\sin x \\ =& [F''(x) + F(x)]\sin x \\ =& \sin(x)[\cancel{f^{(2)}(x)} - \cancel{f^{(4)}(x)} + \cancel{f^{(6)}(x)} - \dots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) \\ & + f(x) - \cancel{f^{(2)}(x)} + \cancel{f^{(4)}(x)} - \dots + \cancel{(-1)^n f^{(2n)}(x)}] \\ =& f(x)\sin x + (-1)^n f^{(2n+2)}(x). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $f^{(2n+2)}(x) = 0$. Wir wissen: $g^{(n+1)}(x) = h^{(n+1)}(x) = 0$. Aus

$$f^{(2n+2)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{2n+2} g^{(k)}(x) h^{(2n+2-k)}(x).$$

Weil entweder k oder $2n + 2 - k \geq n + 1$ ist, sind alle Terme im Summe 0, also $f^{(2n+2)} = 0$ und

$$f(x)\sin x = (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)'.$$

(c) $F(x)$ und $F(\pi)$ sind natürliche Zahlen, weil sie Summen von Ableitungen von f sind, und wir wissen, dass alle Ableitungen bei 0 oder π ganze Zahlen sind.

Wir integrieren die beide Seite

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' \,\mathrm{d}x \\ &= [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi \\ &= -F(\pi)\cos\pi + F(0)\cos 0 \\ &= F(0) + F(\pi)\end{aligned}$$

Wir wissen auch, dass $f(x)$ und $\sin x \geq 0$ für $x \in [0,\pi]$ sind, also $F(0)+F(\pi) \geq 0$ und $F(0)+F(\pi)$ ist eine natürliche Zahl. Aber:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_0^\pi |f(x)\sin x| \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^\pi |f(x)| \,\mathrm{d}x \\ &\leq \pi \sup_{x\in[0,\pi]} f(x)\end{aligned}$$

Weil $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x^n} = 0$ für alle $x > 0$, können wir $f(x)$ beliebig klein machen. Insbesondere gilt für hinreichend groß n $f(x) \leq 1$. Dann ist das Integral keine ganze Zahl, ein Widerspruch. □

3.7 Blatt 8

Aufgabe 111. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) $g : (\mathcal{C}^1((a,b)), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}(a,b)), \|\cdot\|_\infty)$ mit

$$g(u(x)) := u'(x).$$

(c) Eine beliebige Funktion $h : (X, d_{disk}) \to (Y,d)$, wobei d_{disk} die diskrete Metrik und (Y,d) ein beliebiger metrischer Raum ist.

Beweis. (a) Nicht stetig. Wir betrachten eine Folge $(y_n), y_n \in \mathbb{R}, y_n \searrow 0$ und die Folge $(1, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $(1,y_n) \to (1,0)$ und

$$f(1,0) = 0.$$

Aber

$$\begin{aligned} f(1, y_n) &= \frac{y_n^2}{1+y_n^4} \\ &= \frac{1}{y_n^{-2}+y_n^2} \\ &\geq \frac{1}{y_n^2} = y_n^{-2} \end{aligned}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(1, y_n) \geq \lim_{n\to\infty} y_n^{-2} = \infty \neq 0.$$

(b) Nicht stetig. Sei f_n die Funktionfolge

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\bigl(-nx^2\bigr).$$

Weil $\exp(-nx^2) \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ konvergiert $f_n \to 0$ mit Ableitung $0' = 0$.

Aber

$$f_n'(x) = -2x\sqrt{n} \exp\bigl(-nx^2\bigr).$$

Wir berechnen das Maximumpunkt:

$$f_n''(x) = 2\sqrt{n} \exp\bigl(-nx^2\bigr)(2nx^2 - 1) = 0$$

also $x^2 = \frac{1}{2n}$ und

$$f_n'\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right) = -\sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Daraus folgt, dass $g(f_n)$ keine konvergente Folge ist, obwohl f_n eine konvergente Folge ist, also g kann nicht stetig sein.

(c) Wir brauchen hier: Alle Mengen sind bzgl. der diskreten Metrik offen. Wegen $\{x_0\} = B_{1/2}(x_0)$ sind alle Punktmengen in der Topologie. Weil beliebige Vereinigungen von offene Mengen auch offen sind, sind alle Mengen in der Topologie, also die Topologie ist einfach die Potenzmenge.

Sei $U \subseteq Y$ offen. $h^{-1}(U) \subseteq X$, aber wir haben schon gezeigt, dass alle Teilmengen offen sind, also $h^{-1}(U)$ ist offen. Daraus folgt: h ist stetig. $\square$

Aufgabe 112. Untersuchen Sie die folgenden metrischen Räume auf Vollständigkeit:

(a) (X, d), wobei $X \neq \varnothing$ und d die diskrete Metrik darstellt.

(b) $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$.

(c) $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$.

Hinweis: Finden Sie stetige Funktionen, welche eine Treppenfunktion approximieren.

Beweis. (a) Vollständig. Sei $(a_n), a_n \in X$ eine Cauchy-folge, also es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < 1/2 \; \forall n, m > N$. Aus der Definition folgt, dass $a_n = a_m \; \forall n, m > N$. Dann ist $a_n, \; n > N$ (egal welche N) der Grenzwert, weil a_n nach N eine konstante Folge ist.

(b) Vollständig. (Hier ist es angenommen, dass $\mathcal{P}$ die Menge der Polynome ist).

Sei p, q Polynome. Dann ist $p - q$ ein Polynom. Alle Polynome sind bei $\pm\infty$ divergent, also $\|p - q\| = \infty$. Daraus folgt, dass wenn $(a_n), a_n \in \mathcal{P}$ eine Cauchy-folge ist, ist (a_n) nach einer Zahl eine konstante Folge, also es konvergiert gegen ein Polynom (das Konstant).

(c) Nicht vollständig. Wir betrachten die Funktionfolge $f_n : [= 1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f_n = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq -1/n \\ nx & -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Sei $x > 0$. Es gibt dann $N \in \mathbb{N}$, so dass $1/N < x$. Dann ist $f_n(x) = 1$ für alle $n \geq N$, also $f_n(x) \to 1$. Ähnlich ist $f_n(x) \to -1$ für alle $x < 0$. Außerdem ist $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (eine konstante Folge), also $f_n(0) \to 0$. Dann ist die Grenzfunktion

$$f = \begin{cases} -1 & 1 \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

was offenbar nicht stetig ist. Es bleibt zu zeigen: Die Folge ist eine Cauchyfolge. Wir betrachten $n, m \in \mathbb{N}$ mit $M = \min(n, m)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\| &= \int_{-1}^{1} |f_n - f_m| \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\int_{-1}^{-1/M} |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}x\right]^{1/p} + \left[\int_{-1/M}^{1/M} |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}X\right]^{1/p} \\
&\quad + \left[\int_{1/M}^{1} |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \\
&= \left[\int_{-1/M}^{1/M} |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}x\right]^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\int_{-1/M}^{1/M} 2^p \,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \\
&=2\left(\frac{2}{M}\right)^{1/p} \\
&\to 0 \qquad M \to \infty
\end{aligned}$$

also die Folge ist eine Cauchyfolge. □

Aufgabe 113. Wir beweisen den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf für Anfangswertprobleme. Er besagt (vereinfacht): Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (mit Konstante L), so besitzt die Gleichung

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(a) = x_0, \qquad \forall t \in [a, b] \tag{3.6}$$

für jedes $b > a$ eine eindeutige Lösung (dies ist eine Differentialgleichung, die Lösung ist also eine Funktion $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, welche stetig differenzierbar ist). Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Es sei

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(x(s))\,\mathrm{d}s\,, \qquad \forall t \in [a, b]. \tag{3.7}$$

Zeigen Sie für $x \in \mathcal{C}^1([a, b])$:

$$\text{x erfüllt (3.6)} \iff \text{x erfüllt (3.7)}.$$

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung $F : (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ definiert durch

$$F(y(t)) = y_0 + \int_a^t f(y(s))\,\mathrm{d}s$$

eine Lipschitz-stetige Selbstabbildung ist mit Lipschitz-Konstante $L(b - a)$ ist.

(c) Folgern Sie mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes die Existenz einer eindeutigen Lösung zu (3.6), in dem Sie zunächst $b - a$ klein genug wählen. Anschließend iterieren Sie das Argument endliche Male (warum?), um eine Lösung für ein beliebiges $b > a$ zu konstuieren. Begründen Sie außerdem, warum die Lösung $x \in \mathcal{C}^1([a, b])$ erfüllt.

Beweis. Keine Zeit T_T □

Aufgabe 114. Zur Wiederholung: Der Rang ∂A einer Menge $A \subset X$ ist definiert als die Menge der Punkte in X, welche sowohl Berührpunkte von A als auch A^c sind.

Es seien (X,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$. Zeigen Sie, dass für $B_r(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned}\partial B_r(x_0) &\subset S_r(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) = r\}\\ B_r(x_0)^{cl} &\subset K_r(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}.\end{aligned}$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Es gelten auch die umgekehrten Inklusionen.

Beweis. Sei $x \in X, d(x,x_0) > r$. Sei $\epsilon = (d(x,x_0) - r)/2$. Wir behaupten, dass $B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0) = \varnothing$. Sei $y \in B_r(x_0)$. Es folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}d(x,x_0) &\leq d(x_0,y) + d(y,x)\\ d(y,x) &\geq d(x,x_0) - d(x_0,y)\\ &\geq d(x,x_0) - r\\ &= 2\epsilon\end{aligned}$$

also x ist kein Berührpunkt von $B_r(x_0)$ und

$$B_r(x_0)^{cl} \subset K_r(x_0).$$

Jetzt sei $x \in B_r(x_0)$. Es gilt $B_r(x_0)^c = \{x \in X : d(x,x_0) > r\}$. Sei noch einmal $\epsilon = \frac{r - d(x,x_0)}{2}$. Wir zeigen: x ist kein Berührspunkt von $B_r(x_0)^c$, also $B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0)^c = \varnothing$. Sei $y \in B_r(x_0)^c$. Es gilt

$$\begin{aligned}d(x_0,y) &\leq d(x_0,x) + d(x,y)\\ d(y,x) &\geq d(y,x_0) - d(x_0,x)\\ &\geq r - d(x_0,x)\\ &= 2\epsilon\end{aligned}$$

also alle solche Punkte sind keine Berührspunkte von $B_r(x_0)^c$ und es folgt daraus:

$$\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0).$$

Die Umkehrrichtung ist falsch. Sei $X = \{a,b\}$ und die Metrik definiert:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) = (a,b) \text{ oder } (x,y) = (b,a) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Wir betrachten $B_1(a) = \{a\}$. Dann ist b kein Berührspunkt von $B_1(a)$, weil $B_1(b) = \{b\}$ und $\{b\} \cap \{a\} = \varnothing$. Dann ist b in weder $\partial B_r(x_0)$ noch $B_r(x_0)^{cl}$, obwohl $d(a,b) = 1 \leq 1$. □

3.8 Blatt 9

Aufgabe 115. Sei M eine Menge mit $\#M = \infty$. Ein Menge $A \subset M$ sei als offen definiert, falls $M = \varnothing$ oder $M \backslash A$ endlich ist. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Topologie definiert. Ist diese Topologie metrisierbar?

Beweis. (i) $\varnothing$ ist per Definition offen.

(ii) $M \backslash M = \varnothing$, was endlich ist, also M ist offen.

(iii) Sei $A_i, i \in I$ offene Mengen. Es gilt

$$M \backslash \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq M \backslash A_j$$

für alle $j \in I$. Da $M \backslash A_j$ endlich ist, ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen.

(iv) Sei $A_i, i \in \{1, \ldots, n\} := I$ offene Mengen. Es gilt

$$M \backslash \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} (M \backslash A_i).$$

Weil I endlich ist, und alle Mengen $M \backslash A_i$ endlich sind, ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ offen.

Es ist aber nicht metrisierbar, weil es nicht Hausdorff ist. Sei $x, y \in M$, $x \neq y$. Wir nehmen an, dass es offene Mengen U, V gibt, so dass $U \cap V = \varnothing$ und $x \in U, y \in V$. Weil $U \cap V = \varnothing$, ist $V \subseteq M \backslash U$, also V ist endlich. Aber $M \backslash V$ ist dann unendlich, also V ist nicht offen, ein Widerspruch. □

Aufgabe 116. Zeigen Sie, dass

$$M = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)^T | x \in (0,1) \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend in $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} M_1 =& \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)^T \middle| x \in (0,1) \right\} \\ M_2 =& \{0\} \times [-1, 1] \end{aligned}$$

M_1 und M_2 sind offenbar wegzusammenhängend (und daher zusammenhängend). Wir fahren per Widerspruch fort: Nehme an, dass es U, V offen gibt, so dass $U \cup V = M$. Es muss gelten, dass M_1 und M_2 Teilmengen von entweder U oder V sind, sonst wäre M_1 oder M_2 nicht zusammenhängend. Die beide müssen in unterschiedliche Mengen sein, also oBdA $M_1 \subseteq U$ und $M_2 \subseteq V$, sonst wäre die andere Menge leer.

Wir betrachten $(0,0) \in M_2 \subseteq V$. Weil V offen ist, gibt es einen Kugel $B_r((0,0)) \subseteq V$. Per Definition von U und V ist $B_r((0,0)) \cap M_1 = \varnothing$. Wir zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

Es gilt

$$M_1 = \left\{ \left(\frac{1}{x}, \sin x \right)^T \middle| x \in (1, \infty) \right\}.$$

Es gibt N, so dass $\frac{1}{N} < r$. Weil $\sin x$ unendlich viele Nullstellen hat, gibt es einen Nullstelle nach N, also es gibt ein Punkt $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x < r$, also $(x, 0) \in B_r((0,0))$, ein Widerspruch.

Jetzt zeigen wir: M ist nicht wegzusammenhängend. Wir zeigen, dass es keinen Weg zwischen M_2 und $(1, \sin 1)$ gibt. Falls es einen solchen Weg gibt, gibt es $t_1 \geq 0$, so dass $\gamma(t) \notin M_2\ \forall t \geq t_1$, also wir nehmen oBdA an, dass $\gamma(0) \in M_2$ und $\gamma(t) \in M_1\ \forall t \in (0, 1]$. Sei $\gamma(0) = (0, a)$.

Weil $\operatorname{im}(\gamma) \subseteq M$, muss dann gelten, dass $\gamma((0,1]) = M_1$. Sei $B_r((0,a))$ ein offener Kugel um $(0, a)$ bzw. $\gamma(0)$, mit r hinreichend klein, so dass $|1 - a| > r$ oder $|r| < |a|$ gilt (also der Kugel enthält keine Punkte von der Form $(x, 1)$ oder $(x, 0)$).

Sei $[0, x)$ ein offener Kugel von $[0, 1]$ um 0. Wie vorher gibt es dann mindestens ein Punkt (eigentlich unendlich viel) t, so dass $\gamma(t) = (x, 1)$ bzw. $(x, 0)$ für $x \in [0, 1]$, also $f(B_x(0)) \not\subseteq B_r((0, a))$, wobei $f(x) = \sin(1/x)$. Dann kann K nicht wegzusammenhängend sein. □

Aufgabe 117. Es seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ sowie $r > 0$. Wir betrachten die Menge $K := \{x_0\} \cup K_r(x_1)$ und die konvexe Hülle dieser Menge ist gegeben durch

$$\operatorname{conv} K := \{t x_0 + (1-t)x | t \in [0,1], x \in K_r(x_1)\}.$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{conv} K$ kompakt ist.

Hinweis: Wählen Sie geschickt eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge.

Beweis. Wir betrachten $K' \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ mit

$$K' = \{(x, x_0, t) | x \in K_r(x_1) \text{ und } t \in [0,1]\}.$$

Als Produkt kompakte Mengen ist K' kompakt. Sei $f : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$f(x, x_0, t) = t x_0 + (1-t)x.$$

f ist stetig und das Bild von K' ist K. Daraus folgt: K ist kompakt. □

3.9 Blatt 10

Aufgabe 118. (Stetigkeit, partielle und totale Differenzierbarkeit) Sind die Funktionen mit den Funktionswerten

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/4}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

stetig, partiell oder total differenzierbar in $(0,0)$?

Beweis. (a) Die Funktion ist stetig. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Sei $\delta = \epsilon^2$. Dann für alle $r \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|r - 0\| = \|r\| < \delta$ gilt $f(x,y) = (\|r\|^2)^{1/4} = \|r\|^{1/2} < \epsilon$.

Die Funktion ist nicht partiell differenzierbar. Für die Gerade $x = 0$ gilt $f(0,y) = (y^2)^{1/4} = \sqrt{|y|}$. Aber $g(y) = \sqrt{|y|}$ ist nicht bei 0 differenzierbar. Ähnlich ist sie auch nicht durch x partiell differenzierbar.

Weil die Funktion nicht partiell differenzierbar ist, ist sie auch nicht total differenzierbar.

(b) Die Funktion ist stetig. Es gilt

$$\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq (x^2+y^2).$$

Da $x^2 + y^2 \to 0$ wenn $(x,y) \to (0,0)$, gilt es auch fü $f(x,y)$ und $f(x,y)$ ist in $(0,0)$ stetig.

Sie ist nicht partiell differenzierbar. z.B. Für die Gerade $y = 0$ ist $f(x,0) = x^2 \sin(1/|x|)$, was nicht differenzierbar bei 0 ist. Ähnlich existiert auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht.

Weil f nicht partiell differenzierbar ist, ist f nicht total differenzierbar.

(c) Die Funktion ist stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \frac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} \\ =& \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}} \end{aligned}$$

Da $\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to \infty$ wenn $(x,y) \to (0,0)$, geht die Funktion $f(x,y) \to 0$. Dann ist $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, also die Funktion ist stetig.

Sie ist auch partiell differenzierbar. Da $f(x,0) = 0$, ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Es gilt

$$f(0,y) = \frac{y(y^2)^{3/2}}{y^4+y^2}.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{(y^2)^{3/2}}{y^4+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{|y|^3}{y^4+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y^2+1}$$

Da $\frac{1}{y^2+1}$ stetig ist und $\frac{1}{y^2+1}\to 0$ wenn $y\to 0$, existiert der Grenzwert. Der Grenzwert ist auch 0.

Sie ist aber nicht total differenzierbar. Falls eine Ableitung existiere, kann die Ableitung durch die partielle Ableitungen dargestellt werden. Diese Darstellung liefert eine totale Ableitung von 0. Es würde also gelten:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Es gilt aber

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2+y^2}$$

was nicht existiert. □

Aufgabe 119. (Tangenten von Kurven) Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt $t\in[a,b]$ ein regulärer Punkt, falls $\gamma'(t)\neq 0$. Andernfalls nennen wir t ein singulären Punkt.

Bestimmen Sie die Menge der regulären/singulären Punkte folgender Kurven:

(a) $\gamma_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t)=(t^2,t^3)^T$,

(b) $\gamma_2:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ mit $\gamma_2(t)=(\cos^3(t),\sin^3(t))^T$,

(c) $\gamma_3:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ mit $\gamma_3(t)=(t\cos t, t\sin t, t)^T$.

Beweis. (a) $\gamma_1(t)=(2t,3t^2)^T$.

Singulären Punkte: $\{0\}$.

Regularären Punkte: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(b) $\gamma_2'(t)=(3\cos^2(t)(-\sin t), 2\sin^2(t)\cos t)$, also

Singulären Punkte: $S=\{0,\pi/2,\pi,3\pi/2,2\pi\}$

Regulären Punkte: $[0,2\pi]\backslash S$.

(c) $\gamma_3'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t - t\cos t, 1)^T$

Die Ableitung ist nie der Nullvektor, also

Singulären Punkte: $\varnothing$

Regulären Punkte: $[0, 2\pi]$. □

Aufgabe 120. (Rechnen mit der Kettenregel) Der reelwertigen Funktionen $f(u_1, \ldots, u_n)$ und $u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m)$ seien auf den offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $G \subset \mathbb{R}^m$ erklärt, und die Funktion

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := f(u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m))$$

existiere auf G.

Im Folgenden ist jeweils die Ableitung $D\varphi$ der Funktion φ zu berechnen:

(a) $f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2$; $\quad u(t) = e^t\cos t,\ v(t) = e^t \sin t,\ w(t) = e^t$,

(b) $f(u, v) = \ln(u^2 + v^2)$ für $(u, v) \neq (0, 0)$; $u(x, y) = xy,\ v(x, y) = \sqrt{x}/y$ für $x, y > 0$,

(c) $f(u, v, w) = uv + vw - uw$; $\quad u(x, y) = x + y, v(x, y) = x + y^2, w(x, y) = x^2 + y$.

Beweis. (a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \to (u(t), v(t), w(t))^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(t) =& Df(g(t))Dg(t) \\ =&(2u, 2v, 2w)(u'(t), v'(t), w'(t))^T \\ =&2uu'(t) + 2vv'(t) + 2ww'(t) \\ =&2(e^t\cos t)(e^t\cos t - e^t \sin t) \\ &+ 2(e^t\sin t)(e^t\sin t + e^t\cos t) + 2e^{2t} \\ =&4e^{2t}. \end{aligned}$$

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \to (u(x, y), v(x, y))^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} Df &= \left(\frac{2u}{u^2+v^2}, \frac{2v}{u^2+v^2}\right) \\ Dg &= \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & \sqrt{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(x, y) =& Df(g(x, y))Dg(x, y) \\ =& \left(\frac{2xy}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}, \frac{2\sqrt{x}/y}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}\right)\begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & \sqrt{x} \end{pmatrix} \\ =& \left(\frac{1 + 2xy^4}{x + x^2y^4}, \frac{2y(1 + xy^2)}{1 + xy^4}\right) \end{aligned}$$

(c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \to (u(x,y), v(x,y), w(x,y))^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} Df(u,v,w) =& (v-w, u+w, v-u) \\ Dg(x,y,z) =& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(x,y) =& Df(g(x,y))Dg(x,y) \\ =& (x+y^2-x^2-y, x^2+x+2y, y^2-y) \\ & \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \\ =& (y(1+y)+2x(1-y+y^2), \\ & x+2xy+x^2(2y-1)+2y(3y-1)). \end{aligned}$$ □

Aufgabe 121. Beweisen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und geben Sie die Ableitung an:

(a) $f(x) = x^T A x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

(b) $f(X,Y) = XY$ für $(X,Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times k}$.

Beweis. (a) Wir berechnen $f'(x_0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x_0+\delta x) =& (x_0+\delta x)^T A(x_0+\delta x) \\ =& x_0 A x_0 + (\delta x)^T A x_0 + (x_0)^T A(\delta x) \\ & + (\delta x)^T A(\delta x) \\ =& f(x_0) + ((x_0)^T A^T \delta x)^T + (x_0)^T A(\delta x) \\ & + (\delta x)^T A(\delta x) \\ =& f(x_0) + x_0^T A^T(\delta x) + (x_0)^T A(\delta x) \qquad (x_0)^T A^T \delta x \in \mathbb{R} \\ & + (\delta x)^T A(\delta x) \\ =& f(x_0) + x_0^T(A^T+A)(\delta x) + (\delta x)^T A(\delta x) \end{aligned}$$

Wir idenfizieren $Df(x_0) = x_0^T(A^T+A)$. Es bleibt zu zeigen, dass $(\delta x)^T A(\delta x)$ eigentlich die Restabbildung ist. Da

$$\lim_{\|\delta x\| \to 0} \left| \frac{(\delta x)^T}{\|\delta x\|} A \delta x \right| \le \lim_{\|\delta x\| \to 0} \|A\| \|\delta x\| = 0,$$

gilt die Behauptung.

(b) Ähnlich berechnen wir $f'(X_0, Y_0)$. Es gilt

$$f(X_0+\delta X, Y_0+\delta Y) = (X_0+\delta X)(Y_0+\delta Y)$$

$$= X_0Y_0 + (\delta X)Y_0 + X_0(\delta Y) + (\delta X)(\delta Y)$$

Da $\frac{(\delta X)(\delta Y)}{|(\delta X,\delta Y)|} \to 0$ wenn $|(\delta X, \delta Y)| \to 0$, ist die Ableitung

$$J_f((\delta X, \delta Y)) = (\delta X)Y_0 + X_0(\delta Y). \qquad \square$$

Aufgabe 122. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = xy$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen kritischen Punkt in $(x, y) = (0, 0)$ besitzt, aber kein Extremum.

Beweis.

$$f'(x, y) = (y, x)^T$$

und $f'(0, 0) = (0, 0)$. Die Funktion besitzt in $(0, 0)$ daher einen kritischen Punkt. Es ist aber kein Extremum. Es gilt $f(0, 0) = 0$. Es ist kein Maximum, weil auf der Gerade $x = y = t$ gilt $f(t, t) = t^2 > 0$ für $t \neq 0$, also in jede offene Menge bzw. offenem Kugel gibt es mindestens ein Punkt $(x, y) = (t, t)$, so dass $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$. Ähnlich gilt, auf der Gerade $(x, y) = (t, -t)$, $f(t, -t) = -t^2 < 0$, also $f(0, 0)$ ist kein Minimum. Dann besitzt f kein Extremum in $(0, 0)$. $\square$

3.10 Blatt 11

Aufgabe 123. Der Laplace-Operator Δ ist für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f.$$

Allgemeiner ist ein (homogener) Differentialoperator P zweiter Ordnung für $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$Pf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j f.$$

Zeigen Sie, dass die einzigen rotationsinvarianten Differentialoperatoren, d.h. solche, welche

$$P(f(Qx)) = (Pf)(Qx).$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfüllen, Vielfache des Laplace-Operators darstellen.

Beweis. Sei Q orthogonal und beliebig mit Elemente $Q_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Sei auch $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Die Voraussetzung ist dann Es gilt (Kettensregel)

$$\partial_i f(Qx) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(Qx)Q_{ji}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j f(Qx) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i \left(\sum_{k=1}^{n}(\partial_k f)(Q_{kj})\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}(\partial_l\partial_k f)(Qx)Q_{kj}Q_{li}\\ &= \sum_{k,l=1}^{n}(\partial_l\partial_k f)\sum_{i,j=1}^{n} Q_{li}a_{ij}Q_{kj}\\ &= \sum_{k,l=1}^{n}(\partial_l\partial_k f)\sum_{i,j=1}^{n} Q_{li}a_{ij}(Q^T)_{jk}\\ &\stackrel{?}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial_i\partial_j f)(Qx)\end{aligned}$$

Sei $B := QAQ^T$. Offensichtlich muss dann, für alle orthogonale Matrizen Q, $QAQ^T = A$ gelten. □

Aufgabe 124. Beweisen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, so existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein Polynom $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f - p\|_\infty \le \epsilon.$$

Die Menge der Polynome auf dem Intervall $[a,b]$ ist also dicht im Raum der stetigen Funktionen bzgl. der Supremumsnorm.

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) (Hutfunktionen) Es sei

$$h_{a,b}(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{|x-a|}{b}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

für $a \in \mathbb{R}, b > 0$. Begründen Sie, dass auf jedem kompakten Intervall I für jedes ϵ ein Polynom p existiert mit $\|h_{a,b} - p\|_{\infty,I} \le \epsilon$.

(b) (Lineare Interpolante) Zu einer gegebenen Partition von $[a,b]$ mit Stützstellen $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ definieren wir die lineare Interpolante von f durch

$$H(x) = \sum_{i=0}^{N} h_{x_i,\Delta x_i}(x) f(x_i),$$

wobei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\Delta x_0 = x_1 - a$. Bestimmen Sie zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Partition von $[a,b]$, sodass $\|H - f\|_\infty \le \epsilon$ gilt.

(c) Beweisen Sie den Approximationssatz von Weierstraß.

Beweis. (a) Wir brauchen hier die Aufgaben

> Zeigen Sie, dass die Funktion
> $$f : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \max\{x, 0\}$$
> gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

□

Aufgabe 125. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

gilt. Ist f in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar?

Beweis. Wir berechnen die Ableitung auf der Gerade $(x,0)$, also $y = 0$. Es gilt $f(x,0) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} =& \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} f(x,y) \\ =& \lim_{y\to 0} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\ =& x \end{aligned}$$

Dies ist genug, um die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ zu berechnen. Es gilt $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, also

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = 1.$$

Ähnlich berechnen wir die Ableitung auf der Gerade $(0,y)$, also $x = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} =& \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} f(x,y) \\ =& \lim_{x\to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\ =& -y \end{aligned}$$

Dann ist

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0,0)} = -1.$$

Die sind ungleich, also f kann in $(0,0)$ nicht stetig differenzierbar sind, sonst wären die Ableitungen gleich. $\square$

Aufgabe 126. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nimmt $f_v(t) = f(tv)$, $t \in \mathbb{R}$ ein striktes lokales Minimum in $t = 0$ an.

(b) Die Funktion f besitzt in $(0,0)$ kein lokales Minimum

Beweis. (a) Sei $v = (a,b)^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_v(t) =& f(tv) \\ =& (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2t^2) \\ =& b^2t^2 + 2a^4t^4 - 2ba^2t^3 - ba^2t^3 \\ =& b^2t^2 + 2a^4t^4 - 3ba^2t^3 \\ =& t^2(2a^4t^2 - 3ba^2t + b^2) \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f_v'(t) =& t(8a^4t^2 - 9a^2bt + 2b^2) \\ f_v'(0) =& 0 \\ f_v''(t) =& 2(12a^4t^2 - 9a^2bt + b^2) \\ f_v''(0) =& 2b^2 > 0 \end{aligned}$$

Da $f_v''(0) > 0$ und $f_v'(0) = 0$, ist $f_v'(0)$ ein lokales Minimum. Weil $f_v(t)$ ein Polynom vom Grad 4 ist, besitzt $f_v(t)$ maximal 4 Nullstellen, also $f_v(0)$ ist ein strikt lokales Minimum.

(b) Offensichtlich ist $f(0,0) = 0$. Sei x fest. Wir wählen $x^2 < y < 2x^2$. Damit ist

$$f(x,y) = \underbrace{(y - x^2)}_{>0}\underbrace{(y - 2x^2)}_{<0} < 0,$$

also $f(x,y) < 0$. Da

$$\begin{aligned} \|(x,y)\| =& \sqrt{x^2 + y^2} \\ \leq& \sqrt{x^2 + (2x^2)^2} \\ =& \sqrt{x^2 + 4x^4} \\ =& |x|\sqrt{1 + 4x^2} \end{aligned}$$

was wir beliebig klein wählen kann, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein Punkt $p \in B_\epsilon((0,0))$ so dass $f(p) < f((0,0))$, also f besitzt kein lokales Minimum in $(0,0)$. $\square$

3.11 Blatt 12

Aufgabe 127. Begründen Sie, warum die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung im Punkt $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche besondere Form nimmt $(D\det)(\mathrm{Id})$ an?

Beweis. Per Definition ist

$$\det(X) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{1\sigma(1)} X_{2\sigma(2)} \dots X_{n\sigma(n)}.$$

Da dies eine Summe von Produkte der Komponenten sind, ist det unendlich oft differenzierbar.

Es gilt $\det' : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R})$. Wir betrachten eine parameterabhängige Matrix $A(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det A(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}(t) \dots A_{n\sigma(n)}(t) \\
=& \sum_{\sigma\in S_n} \left[(A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \sum_{j=1}^{n} \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right] \\
=& \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n} \left[(A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right]
\end{aligned}$$

Für festes j kann dieser Ausdruck so vorgestellt werden: Wir setzten in der j-te Zeile A' statt A, also

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\
A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2n}(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A'_{j1}(t) & A'_{j2}(t) & \dots & A'_{jn}(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \dots & A_{nn}(t)
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

und berechnen deren Determinante. Wir führen eine Laplaceentwicklung um die j-te Zeile durch und erhalten, mit $A^{\#}$ die adjugierte Matrix

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det A(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A'_{jk}(t) A^{\#}_{kj}$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A^{\#}_{kj}A'_{jk}(t)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(A^{\#}A')_{kk}\\
&=\mathrm{tr}(A^{\#}A')
\end{aligned}$$

Also die Ableitung $\det'$ im Punkt A ist die Abbildung, die B nach $\mathrm{tr}(A^{\#}B)$ abbildet.

Im Punkt I: Es gilt $I^{\#} = I$, also $D\det(I) = \mathrm{tr}$. □

Aufgabe 128. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so kann die zweite Ableitung $D^2 f$ in jedem Punkt $x \in U$ durch eine blineare Abbildung $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ darstellen. Für eine gegebene Basis auf dem $\mathbb{R}^n$-wir wählen die kanonische Basis hier - lassen sich bilineare Abbildungen durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ darstellen, die sog. Hesse-Matrix Hf mit

$$Hf(x,y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die partiellen Ableitungen nach dem Satz von Schwarz vertauschen, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch.

Es sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt genau dann besitzt, wenn die Hesse-Matrix von f (in (0,0)) positiv semi- negativ semi- bzw. indefinit ist.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für allgemeine Funktionen mit positiv (bzw. negativ) semidefiniter Hesse-Matrix im kritischen Punkt kein lokales Minimum (bzw. Maximum) vorliegen muss.

Beweis. (a) Offensichtlich ist A die Hesse-Matrix und $f(0) = 0$. Wir drücken $f(x)$ als $\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle$ aus.

Dann per Definition: Falls A positiv semidefinit ist, ist $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle \geq 0$ für alle x, also f besitzt ein Minimum in $(0,0)$. Die Umkehrrichtung gilt auch per Definition. Sei U eine Umgebung. Für $x \in U$ ist $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ per Definition eines Minimums.

Das gleiche Argument (per Definition) gilt für f ein Maximum in $(0,0)$.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ besitzt in 0 Ableitung 0. 0 ist sowohl positiv als auch negativ definit. Die Funktion besitzt aber weder ein Maximum noch ein Minimum in 0.

□

Aufgabe 129. Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F.

(b) In welchem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ existiert die Inverse von $JF(p)$?

(c) Finden Sie eine lokale inverse Abbildung F^{-1} von F in einer Umgebung von $p = (1,0) = F(1,0)$ und berechnen Sie die Ableitung von F^{-1} in p.

(d) Ist F auf dem ganzen Gebiet $\{p \in \mathbb{R}^2 | JF(p) \text{ invertierbar}\}$ global invertierbar?

Beweis. (a)

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

(b) $\det(JF) = 4x^2 + 4y^2$. Dies ist genau dann Null, wenn $x = y = 0$. Sonst ist JF invertierbar.

(c) Wir lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 =& \xi \\ 2xy =& \zeta \\ y =& \frac{\zeta}{2x} \\ x^2 - \left(\frac{\zeta}{2x}\right)^2 =& \xi \\ x^4 - \frac{\zeta^2}{4} =& \xi x^2 \\ x^4 - \xi x^2 - \frac{\zeta^2}{4} =& 0 \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left[\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}\right]$$

Beim Punkt $(x,y) = (1,0)$ ist $(\xi, \zeta) = (1,0)$. In einer genug kleinen Umgebung nehmen wir daher die positive Nullstelle und danach positive Würzel.

$$x = \left[\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{2}\right]^{1/2}.$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{\zeta}{2}\left[\frac{2}{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}\right]^{1/2}.$$

Dies ist die Umkehrabbildung.

(d) Nein, weil sie nicht injektiv ist. Es gilt $F(1,1) = (0,2)$ und $F(-1,-1) = (0,2)$, aber $(1,1) \neq (-1,-1)$. $\square$

Aufgabe 130. Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen wir die Glattheit der Inversen-Abbildung $\inf : GL(n) \to GL(n)$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Begründen Sie, dass die Abbildung $A \cdot B \to AB$ auf $\mathbb{R}^{(n\times n)^2}$ unendlich oft differenzierbar ist.

(b) Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um $\inf \in \mathcal{C}^\infty(GL(n), GL(n))$ zu beweisen.

Hinweis: Betrachten Sie $A \cdot B = \mathrm{Id}$

Beweis. (a) Das Produkt AB besitzt Komponente $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$. Dann sind alle Komponenten von AB nach alle Komponenten von A und B unendlich stetig differenzierbar, da die lineare Kombinationen von Produkten von AB sind.

(b) Wir betrachten $g : \mathbb{R}^{(n\times n)^2} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $g(A,B) \to AB - I$. Falls die Ableitung $(D_2 g)(A,B)$ invertierbar ist, ist die Abbildung $\mathrm{inv} : A \mapsto B$ glatt.

Da I konstant ist, leiten wir also das Produkt AB nach B ab. Dies ist aber bekanntermaßen glatt, also nach dem Satz von inverse Funktionen ist inv glatt. $\square$

CHAPTER FOUR

Vertiefung Analysis

Ich habe die Übungen für Vertiefung Analysis mit Lucas Wollman gemacht.

4.1 Blatt 1

Aufgabe 131. Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}, \mathcal{S}$ σ-Algebren über X sowie B eine σ-Algebra über Y. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(c) $\mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(d) $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{B}\}$ ist eine σ-Algebra über X.

(e) $f(\mathcal{A}) = \{f(A) \subseteq Y | A \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Beweis. (a) Falsch. Sei

$$\begin{aligned} X &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{A} &= \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, X\} \\ \mathcal{S} &= \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$A \cup S = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}.$$

keine σ-Algebra, weil

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{S}.$$

(b) Richtig.

(1) $X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$

(2) Sei $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann $A \in \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{S}$.
Daraus folgt: $A^c \in \mathcal{A}$ und $A^c \in \mathcal{S}$. Deswegen ist $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$.

(3) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$$

Daraus folgt
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}.$$

(c) Falsch. $X \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{S} \implies X \notin \mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$

(d) Richtig.

(1) $f^{-1}(Y) = X \in f^{-1}\mathcal{B}$

(2) Sei $A = f^{-1}(B)$
$$X - A = f^{-1}(\underbrace{Y - B}_{\in \mathcal{B}}) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

(3) Es folgt aus
$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right).$$

(e) Falsch. Sei $a \in Y$ und f die konstante Abbildung $f(x) = a \forall x \in X$. Dann gilt
$$f(\mathcal{A}) = \{\varnothing, \{a\}\}$$
was keine σ-Algebra ist, solange $Y \neq \{a\}$.

$\square$

Aufgabe 132. (a) Sei $X := \mathbb{Q}$ und $\mathcal{A}_\sigma(M)$ die von $M := \{(a, b] \cap Q | a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_\sigma(M) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ gilt.

(b) Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ gilt
$$f^{-1}\left(A_\sigma(\mathcal{M})\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right).$$

Das Urbild von $\mathcal{M}$ ist hierbei analog zum Urbild einer σ-Algebra definiert durch
$$f^{-1}(\mathcal{M}) := \left\{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{M}\right\}.$$

Beweis. (a) $\{q\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) \forall q \in \mathbb{Q}$, weil

$$\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(q - \frac{1}{n}, q\right] \in \mathcal{A}_\sigma(M).$$

Es sollte den Schnitt mit $\mathbb{Q}$ geben, also $\left(q - \frac{1}{n}, q\right] \cap \mathbb{Q}$ statt $\left(q - \frac{1}{n}, q\right]$

Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, sind alle Teilmenge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ abzählbar, daher

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma\left(\{\{q\} \,| q \in \mathbb{Q}\}\right) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(M)$$

Es ist klar, dass

$$\mathcal{A}_\sigma(M) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}).$$

(b) Sei $P = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}\}$. Per Definition ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}$. Dann ist es zu beweisen:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}\right) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right).$$

Jeder σ-Algebra $f^{-1}\left(\mathcal{A}\right)$ enthält $f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)$. Daraus folgt, dass

$$\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right) \subseteq \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}\right) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A})$$

stimmt nicht. Es gilt zu sagen, weil $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})$, gilt auch

$$f^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq f^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma\left(\mathcal{M}\right)\right)$$

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma\left(\mathcal{M}\right.\right.\right.$$

Jetzt betrachten wir

$$\mathcal{M}' := f_*\left(\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right)\right).$$

Es ist schon in der Vorlesung bewiesen, dass $\mathcal{M}'$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{M}$ und daher auch $\mathcal{A}_\sigma\left(\mathcal{M}\right)$ enthält. Weil $f^{-1}(\mathcal{M}')$ eine σ-Algebra ist, ist $f^{-1}\left(\mathcal{M}'\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right)$. Daraus folgt:

$$f^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma\left(\mathcal{M}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\mathcal{M}'\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right).$$ □

Aufgabe 133. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik, also ausgestattet mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Für $re > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| < r\}$. Definiere außerdem $B_{\mathbb{Q}} := \{B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n | \mathbb{Q} \ni r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$ und $B_{\mathbb{R}} := \{B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n | r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$

(a) Zeigen Sie: Für jeder offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $A = \cup_{B_r(q) \in M} B_r(q)$ mit

$$M := \{B_r(q) \in B_{\mathbb{Q}} | B_r(q) \subseteq A\}.$$

(b) Folgern Sie nun $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$

Beweis. (a) Es genügt zu beweisen, dass jeder offene Ball eine Vereinigung von $\mathbb{Q}$-Bälle sind.

Sei $B_p(x), p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Ball. Sei auch $(a_i), a_i \in \mathbb{Q}^n$ eine Folge, für die gilt

$$\|x - a_i\| < r \forall i$$
$$\lim_{i \to \infty} a_i = x$$

Sei dann

$$M_i = B_{r - \|x - a_i\|}(a_i) \in B_{\mathbb{Q}}.$$

Leider ist der Beweis hier falsch, weil es sein kann, dass $r - \|x - a_i\| \notin \mathbb{Q}$. Man muss eine durch $r - \|x - a_i\|$ beschränkte Folge betrachten.

Es ist klar, dass jeder $M_i \subseteq B_r(x)$ ist. Wir beweisen auch, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = B_r(x)$.

Sei $y \in B_r(x)$. Es gilt $\|y - x\| = r_0 < r$. Sei $\xi = r - r_0$. Weil $\lim_{n \to \infty} a_n = x$, gibt es ein Zahl a_k, wofür gilt

$$\|a_k - x\| < \frac{\xi}{2}.$$

(Eigentlich existiert unendlich viel, aber die brauchen wir nicht). Es gilt dann

$$\|y - a_k\| \leq \|y - x\| + \|x - a_k\| \leq r_0 + \frac{\xi}{2} < r - \frac{\xi}{2} < r - \|x - a_i\|,$$

also $y \in B_{r - \|x - a_k\|}(a_k)$. Jetzt ist die Ergebnis klar: Weil jeder offene Menge eine Vereinigung von offene Bälle ist, gilt

$$A = \bigcup B_p(x) = \bigcup \bigcup B_r(q),$$

wobei $p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}^n$

(b) $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$ per Definition.

Aus $B_{\mathbb{Q}} \subseteq B_{\mathbb{R}}$ folgt $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}})$

Aus (a) folgt, dass

$$B_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}).$$

Dann

$$\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}})) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}).$$

Deswegen

$$\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n.$$

□

Aufgabe 134. Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $\mu : A \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion.

(a) Sei μ σ-subadditiv, $B \in \mathcal{A}$ und definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty], \mu_B(A) := \mu(A \cap B)$. Zeigen Sie, dass μ_B wohldefiniert und eine σ-subadditive Mengenfunktion ist.

(b) μ erfülle die beiden Eigenschaften

(1) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \varnothing$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ für alle $(A_n) \subseteq A$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$.

Zeigen Sie, dass μ σ-additiv ist.

Beweis. (a) Weil $B \in \mathcal{A}$, ist $B \cap A \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A}$. μ_B ist daher wohldefiniert.

Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}, \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Sei auch $B_j = A_j \cap B \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu_B\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_B(A_j)$$

(b) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkter Menge. Dann definiere $B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_j$. Für k endlich ist es klar,

$$\mu(B_k) = \sum_{i=1}^{k} A_i.$$

Weil $B_i \subseteq B_{i+1}$, (2) gilt auch:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

□

4.2 Blatt 2

Aufgabe 135. (Maß über $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere

$$\mu_\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}, \mu_\lambda(A) := \sum_{k\in A} \exp(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bestimmen Sie jeweils alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_\lambda)$ ein Maßraum ist.

(b) μ_λ ein endliches Maß ist.

(c) μ_λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Beweis. (a) μ_λ ist auf jedem Fall für endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ wohldefiniert. Weil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ konvergiert (absolut) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, konvergiert absolut alle Teilfolge.

μ_λ ist auch trivialerweise additiv, weil es eine Summe ist.

(b) Das passt für $\lambda \in \mathbb{R}$, weil

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)(\exp(\lambda) - 1) < \infty.$$

(c) Wir brauchen

$$\exp(\lambda)\left(\exp(\lambda) - 1\right) = 1.$$

oder

$$\exp(\lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Weil $\exp(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ immer positiv ist, gibt es nur eine reelle Lösung:

$$\lambda = \ln\left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right].$$

□

Aufgabe 136. (vollständiger Maßraum) Sei X eine nichtleere Menge, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\mu_B(A) := \mu(A \cap B)$.

(a) Zeigen Sie, dass μ_B ein Maß über $\mathcal{A}$ ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ ein vollständiger Maßraum, dann auch $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, dann auch $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$.

Beweis. (a) In der Übungsblatt 1. haben wir schon bewiesen, dass es wohldefiniert und eine Mengenfunktion ist.

Sei dann $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ eine Folge disjunkte Menge. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mu_B\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \mu\left(B \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \\
&= \underbrace{\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B \cap A_i)}_{\sigma-\text{additivität von } \mu} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_B(A_i)
\end{aligned}$$

μ_B ist dann σ-additiv, und daher Maß.

(b) Ja. Sei $\mu(A) = 0$. Weil $A \cap B \subseteq A$ ist, gilt auch $\mu_B(A) = 0$. Weil $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ vollständig ist, ist jede Teilmenge $\mathcal{A} \ni A' \subseteq A$. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist dann vollständig.

(c) Nein. Sei $X = \{a, b, c\}$, $B = \{a\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$.

Das ist keine σ-Algebra, weil $x \notin \mathcal{A}$.

Sei auch $\mu(\{b,c\}) \neq 0, \mu(X) \neq 0, \mu(\{a\}) \neq 0$. Sei außerdem $\mu_B(A) = \mu(\{a\} \cap A\}$ Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig (es gibt keine Nullmengen), aber $\mu_B(\{b,c\}) = \mu(\{a\} \cap \{b,c\}) = \mu(\varnothing) = 0$. Deswegen ist $\{b,c\}$ eine Nullmenge in (X, A, μ_B), aber $\{b\} \subseteq \{b,c\} \notin \mathcal{A}$. □

Aufgabe 137. (a) Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varnothing \in K_i$ für $i = 1, 2$ und $\nu_i : K_i \to [0, \infty]$ mit $\nu_i(\varnothing) = 0$ für $i = 1, 2$. Bezeichne nun mit μ_i^* die analog zu Satz 1.37 von ν_i induzierten äußeren Maße. Es existiere ein $\alpha > 0$, so dass

$$\forall I_1 \in K_1 \exists I_2 \in K_2 : I_1 \subseteq I_2 \text{ und } \alpha\nu_2(I_2) \leq \nu_1(I_1).$$

Zeigen Sie: Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\alpha\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$.

(b) Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 1.55: Zeigen Sie, dass

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ und } \lambda_a^*(A) \leq \lambda_r^*(A) \leq \lambda_n^*(A)$$

für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt.

Beweis. (a) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine Überdeckung $(A_{1,j}), A_{1,j} \in K_1$, für die gilt

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1,k} &\supseteq A \\ \sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{1,k}) &\leq \mu_1^*(A) + \epsilon\end{aligned}$$

Es gibt auch per Hypothese eine Folge $(A_{2,k}), A_{2,k} \in K_2, A_{2,k} \supseteq A_{1,k}, \alpha\nu_2(A_{2,k}) \leq \nu_2(A_{1,k})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2,k} &\supseteq A \\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\nu_2(A_{2,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{2,k}) &< \mu_1^*(A) + \epsilon\end{aligned}$$

Weil das für alle ϵ gilt, ist $\alpha\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$

(b) Es existiert, für jede Elemente $(a, b) = J \in \mathbb{J}(n)$, ein Element $[a, b) \in \mathbb{J}_l(n) \supseteq (a, b)$, und es gilt $\text{vol}_n([a, b)) \leq \text{vol}_n((a, b))$. Für jede Elemente $[a, b) \in \mathbb{J}_l$ existiert auch $\overline{\mathbb{J}}(n) \ni [a, b] \supseteq [a, b)$, für die gilt $\text{vol}_n([a, b]) \leq \text{vol}_n([a, b))$. Daraus folgt die Behauptung:

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ für alle } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ähnlich folgt die andere Teil. Man muss nur $(a, b]$ statt $[a, b)$ einsetzen, und alle Aussagen bleiben richtig. □

Aufgabe 138. Zeigen Sie folgende Aussagen über das äußere Lebesgue-Maß:

(a) Es gilt $\lambda_n^*(A) = 0$ für alle abzählbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$mit $\lambda_n^*(B) = 0$. Dann gilt $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A)$.

(c) Es ist $\lambda_1^*\left([0,1] \backslash \mathbb{Q}\right) = 1$.

(d) Es ist $\lambda_2^*\left(\mathbb{R} \times \{0\}\right) =0$

Beweis. (a) Sei $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Sei auch

$$M_\epsilon = \left\{ \left(x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) | i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Für jede $\epsilon > 0$ ist M_ϵ eine Überdeckung von A. Es gilt auch:

$$\begin{aligned}\sum_{B \in M_\epsilon} \mathrm{vol}_n(B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n \left(\left(x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Weil dann $\lambda_n^*(A) \leq \epsilon \forall \epsilon > 0$, ist $\lambda_n^*(A) = 0$.

(b) Weil äußere Maße σ-subadditiv sind, gilt

$$\lambda_n^*(A \cup B) \leq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) = \lambda_n^*(A).$$

Weil $A \subseteq A \cup B$, gilt $\lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(A \cup B)$. Daraus folgt:

$$\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A).$$

(c) Weil $\{[0,1]\}$ eine Überdeckung von $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$ ist, ist $\lambda_1^*\left([0,1] \backslash \mathbb{Q}\right) \leq 1$. Wegen subadditivität gilt $\lambda_1^*([0,1]) = 1 \leq \lambda_1^*([0,1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \lambda_1^*([0,1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q})$.Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gilt $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$ und daraus folgt $1 \leq \lambda_1^*\left([0,1]\right)$. Daher gilt $\lambda_1^*\left([0,1]\right) = 1$

(d) Sei für jeder $\epsilon > 0$ M_ϵ die Überdeckung.

$$M_\epsilon = \left\{ \left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} \right) \times \left(-\frac{\epsilon}{2^n}, \frac{\epsilon}{2^n} \right) | n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ \left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1 \right) \times \left(-\frac{\epsilon}{2^n}, \frac{\epsilon}{2^n} \right) | n \in$$

Es gilt $\sum_{A \in M_\epsilon} \mathrm{vol}_2(A) = 2\epsilon$. Weil M_ϵ für alle $\epsilon > 0$ eine Überdeckung von $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist, gilt $\lambda_2^*\left(\mathbb{R} \times \{0\}\right) = 0$. $\square$

4.3 Blatt 3

Aufgabe 139. Sei λ_n^* das äußere Lebesgue-Maß und $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist λ_n^* messbar.

(b) Es gilt $\lambda_n^*(A \cap Q) + \lambda_n^*(A^c \cap Q) = \lambda_n^*(Q)$ für alle $Q \in \mathbb{J}(n)$.

Beweis.

Definition 4.1. Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt μ^*-messbar, falls gilt

$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \qquad \forall D \subseteq X.$$

Weil alle Teilmengen $I \in \mathbb{J}(n)$ solche Teilmengen $D \subseteq X$ sind, gilt natürlich (a) $\Longrightarrow$ (b). Jetzt bleibt (b) $\Longrightarrow$ (a) zu zeigen. Es gibt, für jede $\epsilon > 0$, eine abzählbare Überdeckung $M = \{Q_i, i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{J}$ aus offene Intervale von D, für die gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) = \lambda_n^*(D) + \epsilon$. Für jede $Q_i \in M$ gilt

$$\lambda_n^*(A \cap Q_i) + \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \lambda_n^*(Q_i).$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) = \lambda_n^*(D) + \epsilon.$$

Weil $A \cap Q_i$ bzw. $A^c \cap Q_i$ eine abzählbare Überdeckung von A bzw. A^c ist, gilt für $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$:

$$\lambda_n^*(A \cap D) \leq \lambda_n^*(A \cap Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i),$$

und ähnlich

$$\lambda_n^*(A^c \cap D) \leq \lambda_n^*(A^c \cap Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^C \cap Q_i).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\lambda_n^*(A \cap D) + \lambda_n^*(A^c \cap D) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) \leq \lambda_n^*(D) + \epsilon\end{aligned}$$

Weil $\epsilon >$ beliebig war, ist

$$\lambda_n^*(A \cap D) + \lambda_n^*(A^c \cap D) \leq \lambda_n^*(D). \qquad \square$$

Aufgabe 140. Sei $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ein Maßraum und μ^* das von $(\mathcal{A}, \nu)$ induzierte äußere Maß auf X, d.h. in Satz 1.37 ist $K = \mathcal{A}$ und $\nu = \nu$. Nach Satz 1.59 induziert μ^* ein Maß $\mu := \mu^* | A(\mu^*)$ auf der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mu^*)$.

(a) Zeigen Sie, dass μ eine sogenannte Erweiterung von ν ist, also dass

(1) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mu^*)$ und

(2) $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.

(b) Gilt sogar $\mu = \nu$, also $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mu^*)$?

Beweis. (a) Wir beweisen zuerst $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Es genugt zu beweisen, dass $\nu(A) = \mu^*(A)$. Es ist klar, dass $\{A\}$ eine abzählbare Überdeckung von A ist, und daher $\mu^*(A) \leq \nu(A)$. Wir betrachten dann eine abzählbare Überdeckung $(Q_i), Q_i \in \mathcal{A}, \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \supseteq A$. $\mu^*(A)$ ist die Infinum von solchen Folgen von Mengen. Es gilt wegen der Monotonie von μ^* und der σ-Additivität von ν: $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(Q_i) \geq \nu(A)$. Daraus folgt

$$\mu(A) = \nu(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Jetzt beweisen wir (1). Sei $A \in \mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, das für alle $D \subseteq X$, gilt

$$\mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) = \mu^*(D).$$

Sei $(Q_i), Q_i \in \mathcal{A}$ eine abzählbare Überdeckung von D, für die gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(Q_i) \leq \mu^*(D) + \epsilon, \epsilon > 0$ beliebig. Betrachten Sie

$$\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i).$$

Weil sowohl A als auch Q_i in $\mathcal{A}$ sind, gilt

$$\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i) = \mu^*(Q_i).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \leq& \mu^*(A \cap Q) + \mu^*(A^c \cap Q) \\
\leq& \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i)) \\
=& \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q_i) \leq \mu^*(D) + \epsilon
\end{aligned}$$

Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt

$$\mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \leq \mu^*(D),$$

also A ist messbar.

(b) Nein. Sei zum Beispiel $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n))$, und $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ das eingeschränkte Lebesgue-Maß. Dann ist $\mu^* = \lambda_n^*$, und daher μ das Lebesgue-Maß. Es gilt aber

$$\{q\} \notin \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)), \qquad q \in \mathbb{R},$$

obwohl jede Punktmenge λ_n^* messbar ist. □

4.4 Blatt 4

Aufgabe 141. (a) Seien $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $a \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\{y \in Y | (a, y) \in C\} \in \mathcal{B}.$$

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann $K \times N$ eine λ_{m+n}-Nullmenge ist.

(c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine λ_m-Nullmenge und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann $M \times N$ eine λ_{m+n}-Nullmenge ist.

(d) Zeigen Sie Bemerkung 1.71, also dass $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n) \subsetneq \mathcal{L}(m+n)$.

Hinweis: Sie dürfen hierfür annehmen, dass $B \notin \mathcal{L}(n)$ tatsächlich existiert.

Beweis. (a) Zuerst betrachten wir dem Fall, in dem $C = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Es gilt dann

$$\{y \in Y | (a, y) \in C\} = \begin{cases} B & x \in A \\ \varnothing & x \notin A \end{cases}.$$

Weil sowohl $\varnothing$ als auch B Elemente von $\mathcal{B}$ sind, gilt die Aussage für solche Mengen $C \in A \times B$.

Jetzt beweisen wir die Aussage im Allgemein: Sei $C \in A \otimes B$. Dann gilt entweder:

(i) C ist eine abzählbare Vereinigung von Mengen $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$, wobei $A_i \times B_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

(ii) C ist eine abzählbare Schnitt von Mengen $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$, wobei $A_i \times B_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Sei dann $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahlen, sodass $a \in A_i \iff i \in M$. Es gilt, in der beiden Fälle

$$\{y \in Y | (a, y) \in C\} = \begin{cases} \bigcup_{i \in M} B_i & (i), \\ \bigcap_{i \in M} B_i & (ii). \end{cases}$$

was immer ein Element von $\mathcal{B}$ ist.

(b) Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, A_i \in \mathbb{J}(m)$ eine endliche Überdeckung von K, wobei jedes $\lambda_m(A_i) < \infty$.

> Das ist immer möglich, weil K kompakt ist. Wir können dann eine Überdeckung (A_i) von K wählen, und die Kompaktheit von K liefert eine endliche Teilüberdeckung.

Sei dann $A = \max(\lambda_m(A_1), \lambda_m(A_2), \ldots, \lambda_m(A_n))$. Per Definition (N ist eine λ_n-Nullmenge) gibt es eine abzählbare Überdeckung $(B_j), B_j \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) < \frac{\epsilon}{nA}.$$

Wir betrachten dann

$$M = \bigcup_{j=1}^{n} \{A_j \times B_i | i \in \mathbb{N}\},$$

was eine abzählbare Überdeckung von $K \times N$ ist, aber $\sum_{C \in M} \lambda_{n+m}(C) < \epsilon$, also $K \times N$ ist eine λ_{m+n}-Nullmenge.

(c) Wir haben, für alle Würfel $I_m \in \mathbb{R}^m$ und $I_n \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\lambda^*_{n+m}(I_n \times I_m) = \lambda^*_n(I_n)\lambda^*_m(I_m).$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Per Definition gibt es eine Überdeckung $(B_i), B_i \in \mathbb{R}^n$ von N, sodass

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supseteq N \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_n(B_i) \leq 1.$$

Wir haben daher

$$\lambda^*_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_n(B_i) \leq 1.$$

Sei $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Es ist also $\lambda_n(B) \leq 1$. Sei $(A_i), A_i \in \mathbb{R}^m$ eine Überdeckung von M, für die gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_m(A_i) < \epsilon.$$

Jetzt ist $A_i \times B$ eine abzählbare Überdeckung von $N \times M$, und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_{n+m}(A_i \times B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_n(A_i) < \epsilon,$$

also $M \times N$ ist eine λ_{n+m}-Nullmenge.

(d) Wie im Skript betrachten wir $\{0\} \times B, B \notin \mathcal{L}(n)$. Es gilt $\{0\} \times B \in \mathcal{L}(m+n)$, weil $\{0\} \times B$ eine λ_{n+m}-Nullmenge ist.

Jetzt versuchen wir, $\{0\} \times B$ als eine abzählbare Schnitt

$$\{0\} \times B \stackrel{?}{=} \bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{A_i \times B_i}_{\in \mathcal{L}(m) \times \mathcal{L}(n)}$$

darzustellen. Aber

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right),$$

und wir wissen schon, dass es keine Folgen von Mengen $(B_i), B_i \in \mathcal{B}$ existiert, sodass $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B$, also $\{0\} \times B \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. $\square$

Aufgabe 142. Sei $A \in \mathcal{L}(n)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \inf \{\lambda_n(K) | K \supseteq A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

(b) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \sup \{\lambda_n(O) | O \subseteq A,\ O \text{ offen}\}.$$

Beweis. (a) Falsch. Betrachten Sie $A = \mathbb{Q}$. Weil $\mathbb{Q}$ nicht beschränkt ist, gibt es keine kompakte Mengen K mit $K \supseteq A$. Deswegen ist

$$0 = \lambda_n(\mathbb{Q}) \neq \inf \{\lambda_n(K) | K \supseteq A,\ K \text{ kompakt}\} = \infty.$$

Bemerkung

Erinnern Sie sich daran, dass wir $\inf(\varnothing) = \infty$ definieren. Sonst kann man $\lambda_n(\mathbb{R})$ betrachten.

(b) Falsch. Die Intuition dafür ist, dass

$$\lambda_n(A) = \sup \{K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$$

Wenn wir eingeschränkte Mengen betrachten, gilt dass, nur wenn K abgeschlossen ist. Die meistens abschlossenen Mengen K sind der Abschluss eine offene Menge $K = \overline{U} = U + \partial U$. Wir müssen daher nur eine offene Menge finden, sodass ∂U Maß > 0 hat.

Konkretes Gegenbeispiel: Smith-Volterra-Cantor-Menge.

Wir definieren $S_0 = [0, 1]$ und weiter induktiv

$$S_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}} \right] \cup \left[\frac{a_k + b_k}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}, b_k \right] \right),$$

wobei $0 < a_1 < b_1 < \ldots, a_{2^{n-1}}, b_{2^{n-1}}$ durch

$$S_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [a_k, b_k]$$

definiert sind. Sei jetzt $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_n$. Wir beweisen jetzt die Eigenschaften der Menge:

(i) Alle Intervalle, aus den S_n besteht, haben die gleiche Länge.

Wir beweisen es per Induktion. Für S_0 ist es trivial, weil es nur ein Intervall gibt. Jetzt nehmen wir an, das es für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt, also $b_k - a_k = \Delta_n \ \forall k \in 2^{n-1}$. Es gilt:

$$\frac{a_k + b_k}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}} = a_k + \frac{\Delta_{n-1}}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}},$$

und auch

$$\frac{a_k + b_k}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}} = a_k + \frac{\Delta_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Also alle Intervalle haben die Länge

$$\Delta_n = \frac{\Delta_{n-1}}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Die Lösung ist

$$\Delta_n = 2^{-(2n+1)}(1 + 2^n).$$

(ii) Das Innere von S ist leer.

Wir nehmen an, dass eine offene Intervall $(a, b) \subseteq S$ gibt. Das Intervall hat Länge $b - a$. Aber, weil $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$ gilt, muss es ein S_n geben, für das gilt, dass die Intervalle Länge $< b - a$ haben, also $(a, b) \not\subseteq S$.

(iii) Also $\{U | U \subseteq S \ U \text{ offen}\} = \{\varnothing\}$.

(iv) $\sup\{\lambda_n(O) | O \subseteq S, O \text{ offen}\} = \sup\{0\} = 0$.

(v) $\lambda_n(S) \neq 0$. In jedem Schritt nehmen wir Intervalle mit Maß

$$\frac{2^n}{2^{2n+2}},$$

also ingesamt nehmen wir Maß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2}$$

raus. Daraus folgt $\lambda_n(S) = \frac{1}{2} \neq 0$. □

Aufgabe 143. (Maße von Matrixbildern)

(a) Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $\mu : \mathcal{B}^n \to [0, \infty]$ ein Maß. Zeigen Sie, dass $\mu_S : \mathcal{B}_n \to [0, \infty], \mu_S(A) := \mu(SA)$ wohldefiniert und ein Maß ist.

(b) Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht invertierbar. Zeigen Sie, dass $\lambda_n(SA) = 0$ für alle $A \in L(n)$ gilt.

Beweis. (a) (i) (Wohldefiniert) Wir müssen nur zeigen, dass SA offen ist. Wir definieren die übliche Norm auf Matrizen $\|A\| = \sup_{|x|=1}|Ax|$. Weil S invertierbar ist, muss $\|A\| > 0$ gelten. Sei $x \in A$ und eine r, sodass $B_r(x) \subseteq A$. Sei $y \in B_r(x)$. Es gilt

$$|Ay - Ax| \leq \|A\||y - x| \leq \|A\|r$$

also $B_{\|A\|r}(Sx) \subseteq SA$. Daraus folgt, dass SA offen ist, und μ_S wohldefiniert ist.

(ii) Wir haben auch, $\mu_S(\varnothing) = \mu(S\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

(iii) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{L}(n)$ eine Folge von messbare Mengen. Wir betrachten

$$\begin{aligned}\mu_S\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu\left(S\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(SA_i) && (\sigma\text{-Additivität von } \mu)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_S(A_i)\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass SA_i noch paarweise disjunkt ist, weil S bijektiv (insbesondere injektiv) ist.

(b) $\mu_S(A) := \mu(SA)$ ist noch Maß (vorherige Beweis gilt noch): Weil S nicht invertierbar ist, gibt es einen nichttrivialen Kern. Wir entscheiden uns für ein Vektor $v_1 \in \ker(S)$. Dann machen wir eine Basisergänzung, um eine Basis zu konstruieren:

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Wir bezeichnen $[0,1)^n \in \mathcal{L}(n)$ als

$$[0,1)^n = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n | (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

für eine Menge M. Es gilt dann

$$\begin{aligned}S[0,1)^n &= \{a_1S(v_1) + a_2S(v_2) + \cdots + a_nS(v_n) | (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M\}\\ &= \{a_2S(v_2) + \cdots + a_nS(v_n) | (a_1, a_2, \ldots a_n) \in M\}\end{aligned}$$

$\{S(v_1), S(v_2), \ldots, S(v_n)\}$ ist keine Basis, weil der Nullvektor darin vorkommt (vielleicht mehr als einmal). Wir können jedoch eine Basisergänzung machen, die Nullvektoren einzusetzen. Sei die neue Basis

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Wir nehmen hier zum Beispiel an, dass $u_i = S(v_i) \forall i \geq 2$, also wir müssen nur $S(v_1) = 0$ einsetzen. Das Argument ist gleich, wenn das nicht stimmt. Sei $M = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Dann ist $\mu'(A) := \mu(M^{-1}SA)$ ein Maß, und

$$\mu'([0,1)^n) = \mu(\{\{0\} \times (a_2, a_3, \dots, a_n) | (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\}) = 0.$$

Also μ' ist ein Bewegungsinvariantes Maß mit $\mu'([0,1)^n) = 0$. Daraus folgt, dass

$$\mu(SA) = 0 \; \forall A \in \mathcal{L}(n).$$

□

4.5 Blatt 5

Aufgabe 144. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ nicht-negativ und messbar. Es existiere eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie, dass ein $\epsilon > 0$ und eine Menge $B \in A$ mit $\mu(B) > 0$ existieren, sodass $f(x) > \epsilon$ für alle $x \in B$ gibt.

Beweis. Wir beweisen es per Widerspruch. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Dann für jedes $\epsilon > 0$ ist $\{f > \epsilon\}$ eine Nullmenge. (Wir wissen, dass die Menge messbar ist, weil f bessbar ist.)

Insbesondere gilt es für alle $\mathbb{Q} \ni \epsilon > 0$. Wir bezeichnen $\mathbb{Q}^+ := \{x | x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$. Es gilt

$$A \subseteq \{f > 0\} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^+} \{f > x\},$$

also

$$\begin{aligned} \mu(A) \leq & \mu(\{f > 0\}) \\ \leq & \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} \{f > x\} \\ = & \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} 0 \\ = & 0 \end{aligned}$$

also A ist eine Nullmenge, ein Widerspruch zu die Annahme, dass $\mu(A) > 0$. □

Aufgabe 145. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei (f_n) punktweise μ-fast überall konvergent, d.h. es existiert ein μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ und eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, sodass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X \backslash N$ gilt. Zeigen Sie, dass f messbar ist.

Beweis. Wir wissen, dass sowohl

$$f_s = \limsup_{n \to \infty} f_n \text{ als auch}$$

$$f_l = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

messbar sind. Es gilt auch $f_s(x) = f_l(x)$, $\forall x \in X\backslash N$. Sei jetzt $U \subseteq \mathbb{R}$ messbar. Es gilt $f^{-1}(U) = [f^{-1}(U) \cap N^c] \cup [f^{-1}(U) \cap N]$.

Es ist $f^{-1}(U) \cap N \in \mathcal{A}$, weil $f^{-1}(U) \cap N \subset N$, N ist eine Nullmenge und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist vollständig. Es gilt auch

$$f^{-1}(U) \cap N^c = f_{l/s}^{-1}(U) \cap N^c,$$

wobei $f_{l/s}$ bedeutet, dass entweder f_l oder f_s funktionert (hier möchten wir betonen, dass die beide Funktionen auf $X\backslash N$ gleich sind). Aber weil $f_{l/s}$ messbar sind, ist

$$f^{-1}(U) \cap N^c = \underbrace{f_{l/s}^{-1}(U)}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{N^c}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

Es ist dann

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \; \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ messbar},$$

also f ist messbar. □

Aufgabe 146. Sei $A \subsetneq \mathbb{R}$ nichtleer. Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A} := \{\varnothing, A, A^c, \mathbb{R}\}$ messbar sind.

Beweis. Es gilt immer $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Außerdem wissen wir aus der Mengentheorie, dass $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A^c) = \varnothing$, und das Bild von einer nichtleeren Menge ist immer nichtleer. Die unterschiedliche Funktionen sind

$$\begin{aligned} f(A) &= A \qquad & f(A^c) &= A^c \qquad & f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R}, \\ f(A) &= A^c \qquad & f(A^c) &= A \qquad & f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 147. Der Beweis von Lemma 1.83 funktionert anstelle von $[0, 1]$ auch analog für jede beliebige Lebesgue-messbare Menge in $\mathbb{R}$, die keine Nullmenge ist. Das heißt für jede solche Menge existiert eine Teilmenge, die nicht Lebesgue-messbar ist. Sei nun f die Cantor-Funktion aus Präsenzübung 3 und definiere $g : [0, 1] \to [0, 2], x \to x + f(x)$.

> Wir definieren die Funktionenfolge (f_n) durch $f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \to x$ und
>
> $$f_{n+1} : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \to \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, & \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}.$$
>
> Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f.

(a) Zeigen Sie, dass g bijektiv und die Umkehrfunktion g^{-1} messbar ist.

(b) Zeigen Sie nun, dass der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda_1|_{\mathcal{B}^1})$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Nutzen Sie eine geeignete nicht Lebesgue-messbare Menge.

Beweis. (a) Wir wissen, dass f stetig und monoton wachsend ist. Daraus folgt, das s $x + f(x)$ stetig und *streng* monoton wachsend ist. Es gilt auch $g(0) = 0$ und $g(1) = 2$.

Das g surjektiv ist folgt aus dem Zwischenwertsatz. g ist auch injektiv. Sei $x > y$. Dann gilt $g(x) > g(y)$, insbesondere $g(x) \neq g(y)$.

Es gilt $(g^{-1})^{-1} = g$, also wir betrachten eine messbare Teilmenge von $[0, 1]$.

□

4.6 Blatt 6

Aufgabe 148. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\alpha > 0$ und $f : X \to \overline{R}$ messbar. Zeigen Sie:

(a) Ist f nichtnegativ so gilt

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

(b) Ist f integrierbar, so haben $\{f \geq \alpha\}$ und $\{f \leq -\alpha\}$ endliches Maß.

Beweis. (a) Sei $A = \{f \geq \alpha\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int f \, \mathrm{d}\mu &= \int (f\chi_A + f\chi_{A^c}) \\
&= \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f \, \mathrm{d}\mu \\
&\geq \int_A f \, \mathrm{d}\mu && \int_{A^c} f \, \mathrm{d}\mu \geq 0, \text{ weil } f \text{ nichtnegativ ist.} \\
&\geq \int_A \alpha \, \mathrm{d}\mu && f(x) \geq \alpha \ \forall x \in A \\
&= \alpha\mu(A)
\end{aligned}$$

Also

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

(b) Wir beweisen es per Kontraposition, also wir nehmen an, dass $\{f \geq \alpha\}$ oder $\{f \leq -\alpha\}$ unendliches Maß hat. (Der Fall, in dem die beide unendliches Maß haben ist nicht ausgeschlossen.)

Wir nehmen an, dass $\{f \geq \alpha\}$ unendliches Maß hat. Sei $A = \{f \geq \alpha\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int f^+ \,\mathrm{d}\mu =& \int_A f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f^+ \,\mathrm{d}\mu\\ \geq& \int_A f^+ \,\mathrm{d}\mu\\ \geq& \int_A \alpha \,\mathrm{d}\mu\\ =& \alpha\mu(A)\\ =& \infty\end{aligned}$$

Dann ist $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \infty$, also f ist nicht integrierbar. Sei jetzt ähnlich $A = \{f \leq -\alpha\}$. Wenn A unendliches Maß hat, ist

$$\begin{aligned}\int f^- \,\mathrm{d}\mu =& \int_A f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f^- \,\mathrm{d}\mu\\ \leq& \int_A f^- \,\mathrm{d}\mu\\ \leq& \int_A (-\alpha) \,\mathrm{d}\mu\\ =& (-\alpha)\mu(A)\\ =& -\infty\end{aligned}$$

Also $\int f^- \,\mathrm{d}\mu = -\infty$, und f ist noch einmal nicht integrierbar. □

Aufgabe 149. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $N, A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0 = \mu(A \cap B)$ und $f : X \to \overline{R}$ integrierbar. Sei außerdem (f_j) eine Folge integrierbarer Funktionen von X nach $\overline{R}$ mit $f_j \geq 0$ μ-fast überall und $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ integrierbar. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Integrals:

(a) $\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0$

(b) $\int_{A \cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$.

(c) $\int \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. (a) Es gilt $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu$. Sei dann $g : X \to \overline{R}$ die konstante Funktion mit $g(x) = \infty$ $\forall x \in X$. Weil es konstant ist, ist g messbar. Es ist klar, dass $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$, insbesondere für alle $x \in N$. Dann ist

$$\left|\int_N f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_N |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_N g \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Wir müssen nur zeigen, dass $\int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0$. Sei g_j eine Folge einfache Funktionen, mit

$$g_j(x) = j \ \forall x \in X.$$

Dann konvergiert g_j gegen g, und für alle j gilt

$$\int_N g_j \,\mathrm{d}\mu = j\mu(N) = j(0) = 0.$$

Per Definition gilt dann

$$\int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

und die Behauptung folgt.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu &= \int \chi_{A\cup B} d \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}) \, f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu - \int_{A\cap B} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu && \text{(a)}
\end{aligned}$$

(c) Für endliche Summe wissen wir schon

$$\int \sum_{j=1}^{n} f_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \int f_j \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Sei $p_n = \sum_{i=1}^n f_i$. p_n konvergiert gegen eine Funktion p, weil f_i nichtnegativ sind, also die Reihe $\sum_{i=1}^n f(x)$ ist für alle x monoton wachsend und in $\overline{R}$ konvergent. Dann gilt

$$\int p_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int p \,\mathrm{d}\mu \,,$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \,. \qquad \square$$

Aufgabe 150. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ integrierbar. Definiere die Abbildung

$$\nu : \mathcal{A} \to \overline{R}, \qquad \nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Zeigen Sie:

(a) $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ist ein endlicher Maßraum.

(b) Jede μ-Nullmenge ist auch eine ν-Nullmenge.

(c) Gilt $f > 0$ μ-fast überall, so ist jede ν-Nullmenge auch eine μ-Nullmenge.

(d) Sei $f > 0$ μ-fast überall. Dann ist eine messbare Funktion $g : X \to \overline{R}$ genau dann bezüglich ν integrierbar, wenn gf bezüglich μ integrierbar ist und in diesem Fall gilt $\int gf \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\nu$.

Beweis. (a) (i) Alle μ-messbare Mengen sind auch ν-messbar.

Hier müssen wir nur beobachten, dass das Integral über alle μ-messbare Mengen definiert ist, also ν ist zumindest wohldefiniert. $\nu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$, weil $f \geq 0$ und daher ist

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \geq 0.$$

(ii) σ-Additivität

Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int \chi_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \left[\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \right] f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \chi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \right).
\end{aligned}$$

Also ν ist σ-additiv.

(iii) Endlich

Es gilt

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty} < \infty,$$

also $\nu(X)$ ist endlich, und ν ist ein endlicher Maßraum.

(b) Sei N eine μ-Nullmenge. Es gilt (mit Hilfe von 149(a))

$$\nu(N) = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

(c) Sei N eine ν-Nullmenge, also

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Jetzt nehmen wir an, dass $\mu(N) > 0$. Wir betrachten $g = \chi_N f$. In der letzten Übungsblatt haben wir schon bewiesen, dass es $\epsilon > 0$ und eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) > 0$ gibt, sodass $g(x) > 0 \; \forall x \in B$. Es ist klar, dass $B \subseteq N$, weil g außerhalb N null ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_N f \,\mathrm{d}\mu &\geq \int_B f \,\mathrm{d}\mu \\ &\geq \int_B \epsilon \,\mathrm{d}\mu \\ &= \epsilon\mu(B) \\ &> 0\end{aligned}$$

was ein Widerspruch zu die Anname ist. Also wenn $\nu(N) = 0$ ist auch $\mu(N) = 0$.

(d) Sei s eine einfache Funktion mit Darstellung $s = \sum x_i A_i, A_i \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int s \,\mathrm{d}\nu &= \sum x_i \nu(A_i) \\ &= \sum x_i \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int \sum x_i \chi_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int s f \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Sei (g_j^+) eine Folge einfache Funktionen, die gegen g^+ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}\int g^+ \,\mathrm{d}\nu &= \lim_{j\to\infty} \int g_j^+ \,\mathrm{d}\nu \\ &= \lim_{j\to\infty} \int g_j^+ f \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Ähnlich gilt, für $g_j^- \searrow g^-$, dass

$$\int g^- \,\mathrm{d}\nu = \lim_{j\to\infty} \int g_j^- f \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Also ist $\int g^+ \,\mathrm{d}\nu$ bzw. $\int g^- \,\mathrm{d}\nu$ endlich genau dann, wenn $\int g^+ f \,\mathrm{d}\mu$ bzw. $\int g^- f \,\mathrm{d}\nu$ endlich ist. Dann ist g bzgl. ν integrierbar genau dann, wenn gf bzgl. μ integrierbar ist und in diesem Fall ist das Integral

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \int gf \,\mathrm{d}\mu \,. \qquad \square$$

4.7 Blatt 7

Aufgabe 151. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Für $(E_j) \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $E := \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ gilt

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} f \,\mathrm{d}\mu \,.$$

(b) Sei nun $X := \mathbb{R}$ und $A_n := \{x \in \mathbb{R} | |x| \geq n\} = (-\infty, n] \cup [n, \infty)$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu \right| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt.

Beweis. (a) Wir wissen (Satz 2.39), dass $|f|$ integrierbar ist mit Integral $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

Wir betrachten dann die Funktionfolge

$$f_n = \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} f.$$

f_n konvergiert gegen f, und es gilt $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ für alle x, also die Folge ist durch $|f(x)|$ dominiert. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_E f \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_{E_j} \sum_{j=1}^n f \,\mathrm{d}\mu \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_{E_i} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} f \,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $\left|\int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_{A_n} |f| \,\mathrm{d}\mu$, also wir müssen es nur für $|f|$ beweisen. Wir betrachten die Funktionfolge $g_n = \chi_{A_n}|f|$. g_n konvergiert gegen 0 für alle x. Außerdem gilt $|g_n| \leq f$ für alle n. Wir verwenden dann den dominierte konvergenz Satz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \int 0 \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Aus dem Definition von Konvergenz einer Folge bekommen wir für jedes $\epsilon > 0$ eine ganze Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_{A_n} |f| \,\mathrm{d}\mu < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. □

Aufgabe 152. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $f_k : X \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbare Funktionen, die gleichmäßig gegen ein Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass f integrierbar ist mit

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass auf Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ im Allgemein nicht verzichtet werden kann.

Beweis. (a) f ist messbar (Folgerung 2.25).

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir bezeichnen mit ϵ gleichzeitig eine Zahl und die konstante Funktion $\epsilon(x) = \epsilon \ \forall x \in X$.

ϵ ist integrierbar, weil $\int |\epsilon| \,\mathrm{d}\mu = |\epsilon|\mu(X) < \infty$. Dann ist $|f| + \epsilon := g$ integrierbar. Weil f_k gleichmäßig konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Das heißt, dass

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + \epsilon.$$

Dann ist die Funktionfolge für alle $n \geq N$ durch g dominiert: $|f_n| \leq g$. Weil nur das Verhalten für n groß wichtig für Konvergenz ist, können wir den Satz von dominierte Konvergenz verwenden, also

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu\,.$$

(b) Wir betrachten $(1, \infty)$ mit den eingeschränkten Lebesgue σ-Algebra und Maß. Sei ϵ_j eine Folge, $\epsilon_j \in \mathbb{R}$, $\epsilon_j \searrow 0$ und die Funktionfolge

$$f_j(x) = \frac{1}{x^{1+\epsilon_j}}.$$

Die Folge f_j konvergiert gegen $f(x) = 1/x$. Wir zeigen die Eigenschaften:

(i) Die Funktionfolge konvergiert gleichmäßig.
Wir berechnen den Fehler für beliebiges $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta(x) =& \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\epsilon}} \\ =& \frac{x^{\epsilon} - 1}{x^{1+\epsilon}} \\ \frac{\mathrm{d}\Delta(x)}{\mathrm{d}x} =& - x^{-2} + (1+\epsilon)x^{-(2+\epsilon)} = 0 \\ -1 + (1+\epsilon)x^{-\epsilon} =& 0 \\ x^{-\epsilon} =& \frac{1}{1+\epsilon} \\ x^{\epsilon} =& 1+\epsilon \\ x =& (1+\epsilon)^{1/\epsilon} \\ \Delta(x) \leq& \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} \\ =& \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{1+1/\epsilon}},\end{aligned}$$

also der Fehler ist durch eine streng monoton fallende Funktion eingeschränkt, und die Folge konvergiert gleichmäßig.

(ii) f_j ist integrierbar für alle $j \in \mathbb{N}$.
Dies folgt nicht aus Satz 2.61, weil wir nicht über einem kompakten Interval integrieren. Wir wissen nur, dass das Riemann-integral konvergent ist. Sei j fest und definiere

$$f_{j,n} = \chi_{[1,n]} f_h.$$

Dann stimmt das Lebesgue-integral mit das Riemann-Integral für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Funktionfolge ist auch durch f_j dominiert, also

$$\begin{aligned}\int f_j \,\mathrm{d}\mu =& \lim_{n\to\infty} \int f_{j,n} \,\mathrm{d}\mu && \text{dominierte Konvergenz} \\ =& \lim_{n\to\infty} R - \int_1^n f_j(x)\,\mathrm{d}x && \text{Satz 2.61} \\ =& R - \int_1^\infty f_j(x)\,\mathrm{d}x && \text{Definition}\end{aligned}$$

Weil wir wissen, dass das uneigentliche Riemann-Integral existiert, ist f_j auch integrierbar für alle $j \in \mathbb{N}$.

(iii) Ähnlich haben wir

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\mu = R - \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Weil das Riemann-Integral auf der rechten Seite nicht existiert, ist $\frac{1}{x}$ auch nicht Lebesgue-integrierbar. □

Aufgabe 153. (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum mit $\mu(X) > 0$. Zeigen Sie, dass dann eine messbare Funktion $f : X \to \overline{R}$ existiert mit $f > 0$ auf X und $0 < \int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

(b) Geben Sie einen Maßraum an, für den $\mathcal{L}^1(\mu) = \{0\}$ gilt.

Beweis. (a) Per Definition gibt es eine Folge $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$, so dass alle A_j endliche Maß haben und $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X$. Wir definieren $f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{\mu(A_i)} \chi_{A_i}$. Per Definition als eine Reihe von einfache Funktionen gilt (f ist positiv, also wir müssen kein Betrag schreiben):

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{\mu(A_i)} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}.$$

Die Summe konvergiert und ist endlich.

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$, wobei

$$\mu(X) = \begin{cases} 0 & X = \varnothing \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Sei $f \neq 0$, also es gibt ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$,so dass $|f(x_0)| > 0$. Es gilt $|f| \geq |f(x_0)|\chi_{\{x_0\}}$. Es gilt auch

$$\int |f(x_0)|\chi_{\{x_0\}} \, \mathrm{d}\mu = |f(x_0)|\mu(\{x_0\}) = \infty,$$

also f ist nicht in $\mathcal{L}^1(\mu)$. □

Aufgabe 154. (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$ gilt.

(b) Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume und $f : X \times Y \to \overline{R}$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann für jedes $x \in X$ die Funktion $f_x(y) := f(x, y)$ $\mathcal{B}$-messbar ist.

Beweis. (a) Es gilt $\mu(A \triangle B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$. Wir nehmen oBdA an, dass $\mu(A) \geq \mu(B)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\mu(A) - \mu(B)| &\leq \mu(A) - \mu(B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(B) \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B) \end{aligned}$$

da $A \supseteq A \cap B \subseteq B$ und daher $\mu(A) \geq \mu(A \cap B) \leq \mu(B)$.

(b) Wir betrachten $C = \{f \leq k\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (weil f messbar ist). Sei $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\{f_x \leq k\} = \{y | f(x, y) \leq k\} = \{y | (x, y) \in C\}.$$

Aber wir wissen aus Übungsblatt 4, Aufgabe 1(a), dass die Menge $\{y | (x, y) \in C\}$ $\mathcal{B}$-messbar ist, also f_x ist messbar für alle $x \in X$. □

4.8 Blatt 8

Aufgabe 155. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ und $(Z, \mathcal{C}, \eta)$ σ-endliche Maßraume. Definiere $A \otimes B \otimes C := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{C})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \mathcal{C} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$.

Hinweis: Betrachten Sie $\Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ *mit*

$$\Pi : X \times Y \times Z \to X \times Y,\ \Pi(x, y, z) := (x, y).$$

(b) Es gilt $(\mu \otimes \nu) \otimes \eta = \mu \otimes (\nu \otimes \eta)$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$.

Beweis. (a) Per Hinweis betrachten wir $\Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$. Sei $P \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. $P \in \Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ genau dann, wenn $P \times Z \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$.

$\square$

Aufgabe 156. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2, a < b \in \mathbb{R}, r : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und

$$A := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < r(z)^2, z \in [a, b]\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie $\lambda_2(B_R(x_0))$ für $R > 0$ mittels dem Satz von Fubini.

(b) Zeigen Sie:

$$\lambda_3(A) = \pi \int_a^b r(z)^2 \,\mathrm{d}z\,.$$

Beweis. (a) Aus Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes genügt es, $B_R(0)$ zu betrachten. Per Definition ist es definiert durch

$$x^2 + y^2 < R^2.$$

Insbesondere ist, für jedes $x \in [-1, 1]$,

$$\{y | (x, y) \in B_R(0)\} = [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}].$$

Aus Satz 2.81 folgt

$$\begin{aligned}\lambda_2(B_R(0)) &= \int_{-R}^{R} \lambda_1([-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2} \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Die Funktion ist Riemann-integrierbar, also wir dürfen Sätze vom Riemann-Integral verwenden. Hier integrieren wir es per Substitution. Sei $x = R \sin \theta, \mathrm{d}x = R \cos \theta \,\mathrm{d}\theta$. Wenn $x = -R$, ist $\theta = -\pi/2$ und wenn $x = R$ ist $\theta = \pi/2$.

$$\lambda_2(B_R(0)) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R\sqrt{1 - \sin^2 \theta} R \cos \theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^2 \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&=2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \,\mathrm{d}\theta \\
&=2R^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&=2R^2 \left[\sin\pi - \sin 0 + \frac{\pi}{2}\right] \\
&=\pi R^2 \\
&=\lambda_2(B_R(x_0))
\end{aligned}
$$

(b) Wir vorher ist $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ σ-endlich. Das Innere der Menge $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < r(z)^2, z \in (a,b)\}$ ist offen und daher messbar. Da A das Innere mit eine Nullmenge hinzugefügt ist, ist A auch messbar. Wir können daher das Maß als Integral schreiben:

$$
\begin{aligned}
\lambda_3(A) &= \int_{[a,b]} A_z \,\mathrm{d}\lambda_1 \\
&= \int_{[a,b]} \pi r(z)^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \\
&=\pi \int_a^b r(z)^2 \,\mathrm{d}z\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 157. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq |a| + |b|$. Definiere

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, 0 \leq z \leq ax + by + c\right\}.$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(E)$.

Beweis. Ähnlich betrachten wir $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, 0 < z < ax + by + c\}$. Da die Menge offen ist, ist sie messbar. Weil E gleich die Menge mit eine Nullmenge hinzugefügt ist, ist E auch messbar. Wir schreiben dann das Maß als Doppel bzw. Tripelintegral. Hierbei nutzen wir, dass $x^2 \leq 1$, also $x \in (-1,1)$ aus die Gleichung $x^2 + y^2 < 1$. Sei x fest. Dann ist $y^2 < 1 - x^2$, also $y \in (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$.

$$
\begin{aligned}
\lambda_3(E) &= \int_{-1}^{1} \lambda_2(E_x) \,\mathrm{d}\lambda_2 && \text{Satz 2.81} \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \lambda_1([0, ax + by + c]) \,\mathrm{d}\lambda_1(y) \,\mathrm{d}\lambda_1\,(x) && \text{Satz 2.81} \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ax + by + c \,\mathrm{d}\lambda_1(y) \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\
&= \int_{-1}^{1} \left[axy + by^2/2 + cy\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}\lambda_1(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} 2ax\sqrt{1-x^2} + 2c\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\
&=2\int_{-1}^{1} (ax+c)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\
&=2\left[\int_{-1}^{1} (ax)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + c\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right] \\
&=2c\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x && x\sqrt{1-x^2} \text{ ist ungerade} \\
&=c\pi.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 158. Seien $B_1 := B_1(0,0,0) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $B_2 := B_1(0,0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$ die offenen Kugeln mit Radius 1 um die Punkte $(0,0,0)$ und $(0,0,1)$. Bestimmen Sie $\lambda_3(B_1 \cap B_2)$.

Beweis. Per Definition ist

$$
\begin{aligned}
B_1 =&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 < 1\} \\
B_2 =&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+(z-1)^2 < 1\}
\end{aligned}
$$

Weil λ_1 bzw. das Lebesgue-Maß σ-endlich ist, werden wir das Maß als Integral gemäß Satz 2.81 schreiben. Daher betrachten wir $(B_1 \cap B_2)_z$ für beliebiges $z \in [0,1]$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(B_1 \cap B_2)_z =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < \min(1-(z-1)^2, 1-z^2)\} \\
=&B_{\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})}(0) \subseteq \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Offenbar ist

$$
\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2}) = \begin{cases} \sqrt{1-z^2} & z \geq 1/2, \\ \sqrt{1-(z-1)^2} & z \leq 1/2. \end{cases}
$$

Aus 156 ist $\lambda_2(B_R(0)) = \pi R^2$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\lambda_3(B_1 \cap B_2) =& \int_0^1 \lambda_2(B_{\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})}(0))\,\mathrm{d}\lambda_1(z) \\
=& \int_0^1 \pi \min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})^2\,\mathrm{d}\lambda_1(z) \\
=&2\int_{1/2}^{1} \pi(1-z^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(z) \\
=&2\pi(z - z^3/3)|_{1/2}^{1} \\
=&\frac{5\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

□

4.9 Blatt 9

Aufgabe 159. Sei

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, (x, y) \to \frac{x^2}{y^2},\\
&A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le y \le x, 0 \le x \le 2, xy \ge 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie $\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_2$.

Beweis. Zuerst zeigen wir: f ist messbar. Wir betrachten dazu $\{f < \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ (Wenn $\alpha \le 0$ ist die Menge die Leermenge, weil $f \ge 0$ stets). Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
x^2 &< \alpha y^2\\
|x| &< \sqrt{\alpha}|y|
\end{aligned}
$$

Dann ist $\{f < \alpha\}$ eine Borelmenge, also f ist messbar.

Ähnlich wie in Übungen 8.2 ist A eine Borelmenge. Die dritte Voraussetzung kann umgeformt werden:

$$
\begin{aligned}
y &\ge 1/x\\
x &\ge y \ge 1/x
\end{aligned}
$$

was nur möglich ist, wenn $2 \ge x \ge 1$ und in diesem Fall ist der Schnitt $\{y | (x, y) \in A\}$ nichtleer. Also wir berechnen das Integral über die Teilmenge nach der Präsenzübung

$$
\begin{aligned}
\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{[1,2]} \int_{A_x} f \, \mathrm{d}\lambda_1\\
&= \int_1^2 \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} \, \mathrm{d}\lambda_1(y) \, \mathrm{d}\lambda_1(x)\\
&= \int_1^2 -x^2 y^{-1} |_{1/x}^x \, \mathrm{d}\lambda_1(x)\\
&= \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}\lambda_1(x)\\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\bigg|_1^2\\
&= \frac{9}{4}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 160. Sei

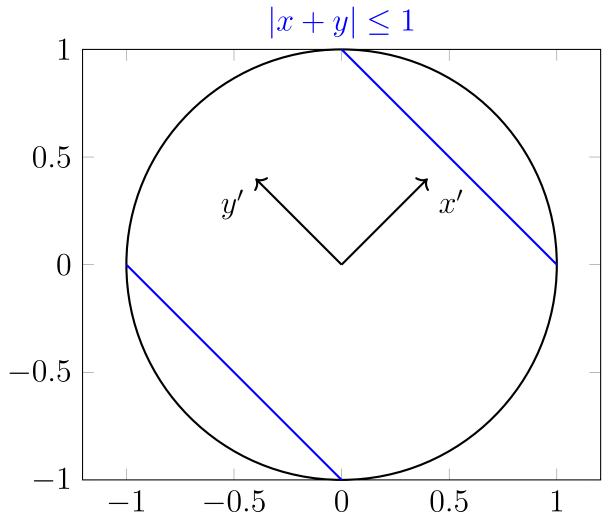
$$
A := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \le 1, \frac{1}{2}(x + y)^2 + z^2 \le 1\right\}.
$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(A)$.

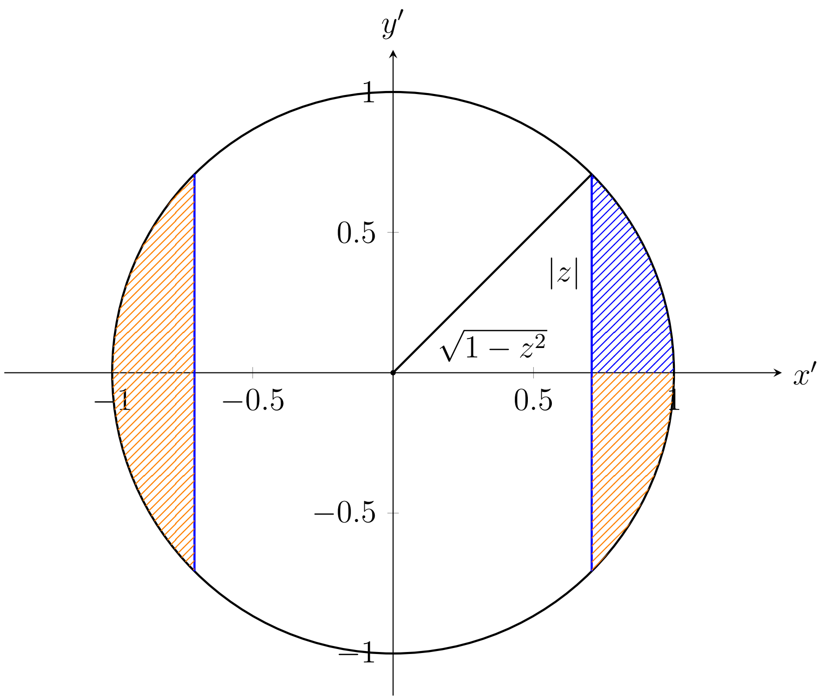
Hinweis: Rotation

Beweis. A ist eine Borelmenge und daher messbar. Wir schreiben A_z. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 \geq& \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \\ 2(1-z^2) \geq& (x+y)^2 \\ |x+y| \leq& \sqrt{2}\sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$



Wir rotierenden dann das Koordinatensystem wie im Diagramm.



Das Maß der blauen Region ist

$$\frac{1}{2}\sin^{-1}|z| - \frac{1}{2}|z|\sqrt{1-z^2},$$

also das Maß von A_z ist

$$\begin{aligned}\lambda_2(A_z) =& \pi(1)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}|z| - |z|\sqrt{1-z^2}\right)\\ =& \pi - 2\left(\sin^{-1}|z| - |z|\sqrt{1-z^2}\right)\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda_3(A) =& \int_{-1}^{1} \pi - 2(\sin^{-1}|z| - |z|\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z\\ =& 2\int_0^1 \pi - 2(\sin^{-1}|z| - |z|\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z\\ =& 2\int_0^1 \pi - 2(\sin^{-1} z - z\sqrt{1-z^2})\,\mathrm{d}z\\ =& 2\left[\int_0^1 \pi\,\mathrm{d}z - 2\int_0^1 \sin^{-1} z\,\mathrm{d}z + 2\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right]\\ =& 2\left[\pi - 2\int_0^1 \sin^{-1} z\,\mathrm{d}z + 2\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right].\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin^{-1} z\,\mathrm{d}z =& z\sin^{-1} z|_0^1 - \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z\\ =& \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z\\ u =& 1-z^2, \qquad \mathrm{d}u = -2z\,\mathrm{d}z\\ \int_0^1 \sin^{-1} z\,\mathrm{d}z =& \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\\ =& \frac{\pi}{2} + \sqrt{u}|_1^0\\ =& \frac{\pi}{2} - 1\\ \int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z =& -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u\\ =& \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u\\ =& \frac{1}{3}u^{3/2}|_0^1\\ =& \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\lambda_3(A) = 2\left[\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{2}{3}\right]$$

$$\begin{aligned}
&=2\pi - 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{4}{3} \\
&=2\pi - 2\pi + 4 + \frac{4}{3} \\
&=\frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 161. Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n$. Definere damit die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \to a + Sx$. Sei außerdem $A \in \mathcal{L}(n)$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}(n) - B^1$ messbar, sodass $\chi_{\varphi(A)} f$ λ_n integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $\chi_A(f \circ \varphi)$ λ_n-integrierbar ist mit

$$\int_{\varphi(A)} f \,\mathrm{d}\lambda_n = |\det(S)| \int_A (f \circ \varphi) \,\mathrm{d}\lambda_n \,.$$

Hinweis: Lemma 2.92

Beweis. Nach Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz ist $\varphi(A)$ messbar mit Maß $\lambda_n(\varphi(A)) = |\det(S)|\lambda_n(A)$. $\chi_{\varphi(A)}$ ist dann messbar. Weil φ affin ist, ist φ stetig und daher messbar. Dann ist $f \circ \varphi$ messbar, und als Produkt von messbare Funktionen ist $\chi_A(f \circ \varphi)$ λ_n-messbar.

Wir verwenden Lemma 2.93 und betrachten f^+. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu &= \int f^+ \chi_{\varphi(A)} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x : f^+(x)\chi_\varphi(A) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x : x \in \varphi(A) \wedge f^+(x) > t\} \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(x) > t\} \cap \varphi(A)) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)
\end{aligned}$$

Weil φ bijektiv ist, gibt es für jedes Punkt $x \in \varphi(A),\ f^+(x) > t$ auch ein Punkt $y := \varphi^{-1}(x),\ y \in A,\ f^+(\varphi(y)) > t$ und andersherum. Daher ist

$$\{x : x \in \varphi(A) \wedge f^+(x) > t\} = \varphi(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\}).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu &= \int_0^\infty \mu(\varphi(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\})) \\
&= \int_0^\infty |\det(S)|\mu(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&\quad \text{(Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz)} \\
&=|\det(S)| \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(\varphi(x)) > t\} \cap A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=|\det(S)| \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(\varphi(x))\chi_A(x) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&=|\det(S)| \int (f^+ \circ \varphi)\chi_A \,\mathrm{d}\lambda_n \\
&=|\det(S)| \int_A (f^+ \circ \varphi) \,\mathrm{d}\lambda_n
\end{aligned}$$

Ähnlich gilt es auch für $-f^-$ und aus

$$\int_{\varphi(A)} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\varphi(A)} f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_{\varphi(A)} (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$$

auch für f. $\square$

Aufgabe 162. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$. Für $h \in \mathbb{R}^n$ definiere die Funktion $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f_h(x) := f(x+h)$. Definiere außerdem die Abbildung

$$T_f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}^1(\lambda_n), \qquad h \to f_h.$$

Zeigen Sie:

(a) T_f ist wohldefiniert.

(b) T_f ist stetig.

Hinweis: Approximieren Sie die Funktion f

Beweis. (a) Hier zeigen wir: $f_h(x) \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$. Wir brauchen zuerst: f_h ist messbar.

$$\{f_h < \alpha\} = \{f < \alpha\} + h,$$

was messbar ist, was sonst ein Widerspruch zu der Bewegungsinvarianz wäre. Weil $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ σ-endlich ist, verwenden wir Satz 2.93:

$$\begin{aligned}
\int |f| \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f_h(x)| > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f(x)| > t\} + h) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f(x)| > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) && \text{Bewegungsinvarianz} \\
&= \int |f| \,\mathrm{d}\lambda_n < \infty && \text{Voraussetzung}
\end{aligned}$$

also $f_h \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$.

(b) Nach Satz 2.101 gibt es eine stetige Funktion mit kompaktem Support f_ϵ, so dass
$$\|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon.$$

Dann beweisen wir die Behauptung für stetige Funktionen mit kompaktem Träger, also sei f eine solche Abbildung. Weil f stetig auf einer kompakten Menge ist, ist f gleichmäßig stetig. Sei A der Träger von f. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta < 0$, so dass $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Daraus folgt:

$$\|f - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \leq \int \epsilon \,\mathrm{d}\lambda_n = \epsilon\lambda_n(A).$$

Weil A kompakt ist, hat A endliches Maß. Die Behauptung folgt.

Jetzt sind wir fertig, die Behauptung für beliebiges f zu beweisen. Wir definieren außerdem $f_{\epsilon,h} = f_\epsilon(x + h)$, was auch messbar, stetig und mit kompaktem Support ist. Aus Bewegungsinvarianz gilt

$$\|f_h - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} = \|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \epsilon.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\|f - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} =& \|f - f_\epsilon + f_\epsilon - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
=& \|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} + \|f_\epsilon - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
\leq& \epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h} + f_{\epsilon,h} - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
\leq& \epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} + \|f_{\epsilon,h} - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
\leq& 2\epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\
\leq& 3\epsilon \qquad |h| < \delta
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wir die vorherigen Gezeigten benutzt haben, um δ hinreichend klein zu wählen, damit $\|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \epsilon$ für alle $|h| < \delta$. □

4.10 Blatt 10

Aufgabe 163. Sei $R > 0$ und $a < b$. Definiere $Z := B_R(0) \times (a, b) \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ die (offene) Kreisscheibe um 0 mit Radius R ist. Definiere außerdem die Abbildung

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit $U := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (a, b)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $\Phi(U) = Z \backslash N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \to Z\backslash N$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det(\Phi'(r, \varphi, z)) = r$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to r$ definiert durch $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}$. Bestimmen Sie $\int_Z f \,\mathrm{d}\lambda_3$.

Beweis. (a) Hypothese: $N = [0, R) \times \{0\} \times (a, b)$.

Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Z.$$

Wir finden die (x, y, z), für die die Gleichungen keine Lösung haben. Es ist klar, dass die dritte Gleichung trivialerweise immer erfüllt werden kann.

Jetzt betrachten wir $(x, y, z) \in N$. Weil $y = 0$, ist $\sin\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ($\varphi = 0$ ist keine Lösung in U). Dann ist $x = r\cos\varphi = -r$. Weil $r > 0$, ist dann $x < 0$, also $\Phi(U) \subseteq Z\backslash N$.

Sei jetzt $(x, y, z)^T \notin N$. Die (eindeutige) Lösungen sind

$$\begin{aligned} r =& \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi =& y/x \end{aligned}$$

Man verfiziere sofort, dass r und φ Lösungen sind und außerdem in U liegen, insofern $(x, y, z)^T \notin N$. Daraus folgt:

$$\Phi(U) = Z\backslash N.$$

Jetzt zeigen wir: N ist eine Nullmenge. Da $N \subseteq [0, R) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (a, b)$ für alle $\epsilon > 0$, ist N eine Nullmenge.

(b) Die Ableitung ist

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Komponente alle stetig sind, ist Φ' stetig, und Φ ist stetig differenzierbar. Die Determinante ist

$$\det\Phi' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

(c)

$$\int_Z f \,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{Z\backslash N} f \,\mathrm{d}\lambda_3 \qquad N \text{ Nullmenge}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_U |\det \Phi'| (f \circ \Phi) \,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_U r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_U rz\sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} \\
&= \int_U r^2 z \,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_{U_z} \int_a^b r^2 z \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{U_z} r^2 (b-a) \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{(U_z)_\theta} \int_0^{2\pi} r^2 (b-a) \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{(U_z)_\theta} 2\pi r^2 (b-a) \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_0^R 2\pi r^2 (b-a) \,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= 2\pi (b-a) \frac{r^3}{3}\Big|_0^R \\
&= \frac{2}{3}\pi (b-a) R^3. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 164. Sei $R > 0$ und $K := B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3$. Definiere die Abbildung

$$
\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r, \theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}
$$

mit $U := (0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $\Phi(U) = K \backslash N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \to K\backslash N$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det(\Phi'(r, \theta, \varphi)) = r^2 \sin\theta$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$
H := B_R(0) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}.
$$

Bestimmen Sie $\int_H f \,\mathrm{d}\lambda_3$.

Beweis. (a) Ähnlich ist die Nullmenge $\{(0, 0, R), (0, 0, -R), (0, 0, 0)\}$. Wir lösen die Gleichungen

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}
$$

für $(x,y,z)^T \in B_R(0)$. Ähnlich ist $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tan\theta = (\sqrt{x^2+y^2})/z$ und $\tan\varphi = y/x$ eine Lösung, solange $z \neq \pm R$ (sonst wäre $\theta = 0$ oder π, welche nicht in U sind. Das Punkt $(0,0,0)$ ist auch ausgeschlossen, weil r nicht null sein darf. Als endliche Menge ist N eine Nullmenge.

(b) Es gilt

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Weil alle Komponente stetig sind, ist auch Φ' stetig, und Φ ist stetig differenzierbar. Für die Determinante führen wir eine Laplaceentwicklung mit der dritten Spalte durch:

$$\begin{aligned} \det\Phi' &= \cos\theta(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi) \\ &\quad + r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi) \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta \\ &= r^2\sin\theta \end{aligned}$$

(c) Sei $U = (0,R)\times(0,\pi/2)\times(0,2\pi)$. Es gilt $\Phi(U) = H\backslash N$.

$$\begin{aligned} \int_H f\,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int_{H\backslash N} f\,\mathrm{d}\lambda_3 \\ &= \int_U |\det\Phi'|(f\circ\Phi)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\ &= \int_U (r^2\sin\theta) r\cos\theta\sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2} \\ &= \int_U (r^2\sin\theta) r\cos\theta(r\sin\theta) \\ &= \int_U r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\lambda_3 \\ &= \int_{U_\varphi}\int_0^{2\pi} r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \int_{U_\varphi} 2\pi r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \int_{(U_\varphi)_\theta}\int_0^{\pi/2} 2\pi r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_0^R 2\pi r^4(1/3)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{15}\pi r^5|_0^R \\ &= \frac{2\pi}{15}R^5. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 165. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\bigl(-x^T Ax\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Beweis. Da A symmetrisch ist, ist A orthogonal diagonalisierbar, also $A = P^{-1}DP$ bzw. $A = P^T DP$, wobei P orthogonal ist. Die Matrix D besitzt nur positive Einträge, weil A positiv definit ist. Dann besitzt A (mehr als) eine quadratische Würzel. Sei $A = P^T SSP = P^T S^T SP$, wobei $S^2 = D$.

Es gilt

$$\exp\bigl(-x^T Ax\bigr) = \exp\bigl(-x^T P^T S^T SPx\bigr) = \exp\bigl(-(SPx)^T SPx\bigr).$$

Dann betrachten wir $\Phi : x \to SPx$, was offenbar ein Diffeomorphismus ist, weil es linear ist. Es gilt (Transformationssatz):

$$\begin{aligned}\int \exp\bigl(-x^T x\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int |\det\Phi| \exp\bigl(-(SPx)^T(SPx)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3\\ &= \int |\det S||\det P| \exp\bigl(-(SPx)^T(SPx)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3\\ &=\sqrt{\det A}\int \exp\bigl(-(SPx)^T(SPx)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 \end{aligned}\tag{4.1}$$

Wobei wir die folgende benutzt haben: Als orthogonale Matrix ist $\det P = 1$. Da S eine quadratische Würzel von A ist, ist $(\det S)^2 = \det A \geq 0$ und $|\det S| = \sqrt{\det A}$. Es genügt also, $\int \exp\bigl(-x^T x\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int \exp(-(x^2+y^2+z^2))\,\mathrm{d}\lambda_3$ zu berechnen.

Wir berechnen das Integral in Kugelkoordinaten. Sei alle Definitionen wie in Aufgabe 164 mit $R = \infty$. Hier ist $N = \{0\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}&\int \exp\bigl(-(x^2+y^2+z^2)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3\\ &= \int_{R\setminus N} \exp\bigl(-(x^2+y^2+z^2)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3\\ &= \int_U (r^2\sin\theta)\exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3\\ &= \int_{U_\theta}\int_0^\pi r^2\exp\bigl(-r^2\bigr)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda_2\\ &= 2\int_{U_\theta} r^2\exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_2\\ &= 2\int_{(U_\theta)_\varphi}\int_0^{2\pi} r^2\exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\lambda_1\\ &= 4\pi\int_0^\infty r^2\exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \left[-\frac{r}{2} \exp\left(-r^2\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-r^2\right) \mathrm{d}r \right] \\
&= 2\pi \int_0^\infty \exp\left(-r^2\right) \mathrm{d}r \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Jetzt berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \exp\left(-r^2\right) \mathrm{d}r \right)^2 &= \left(\int_0^\infty \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x \right) \left(\int_0^\infty \exp\left(-y^2\right) \mathrm{d}y \right) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{(0,\infty)^2} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) \mathrm{d}\lambda_2 \\
&\quad \text{Satz von Fubini} \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,\pi/2)} r \exp\left(-r^2\right) \mathrm{d}\lambda_2 \\
&\quad \text{Folgerung 2.121 (Polarkoordinaten)} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r \exp\left(-r^2\right) \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r \exp\left(-r^2\right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \exp(-u) \, \mathrm{d}u \\
&\quad u = r^2 \text{ ist Diffeomorphismus mit Ableitung } 2r \\
&= -\frac{\pi}{4} \exp(-u)\Big|_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Da $\exp(-r^2)$ immer positiv ist, ist auch $\int_0^\infty \exp\left(-r^2\right) \mathrm{d}r$ positiv, also wir nehmen das positive Würzel:

$$\int_0^\infty \exp\left(-r^2\right) \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Durch Einsetzen in alle den vorherigen Gleichungen erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-x^T x\right) \mathrm{d}\lambda_3 = \pi^{3/2} \qquad (4.2)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-x^T A x\right) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\det A}} \qquad (4.1)$$

$\square$

4.11 Blatt 11

Aufgabe 166. (Hyperbelfunktion) Sei $d \in \{1,2,3\}, R > 0, 1 \leq p < \infty$ und $\alpha > 0$. Definiere

$$B_R(d;0) := \{x \in \mathbb{R}^d | \|x\| < R\}, \qquad f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \to \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{1}{\|x\|^\alpha} & x \neq 0. \end{cases}.$$

(a) Sei zunächst $d = 1$. Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{B_R(1;0)} f$ in $L^p(\lambda_1)$? Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{\mathbb{R} \setminus B_R(1;0)} f$ in $L^p(\lambda_1)$?

(b) Welche Bedingungen müssen in den Fällen $d = 2, 3$ für α, p gelten, damit $\chi_{B_R(d;0)} f \in L^p(\lambda_d)$ ist?

(c) Sei $1 < p < r < q < \infty$. Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit $g \in L^r(\lambda_1)$, $g \notin L^p(\lambda_1)$, $g \notin L^q(\lambda_1)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ an, sodass $g \in L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in [1, \infty)$ gilt, aber $g \notin L^\infty(\lambda_1)$.

Beweis. (a) Die Funktion $\chi_{B_R(1;0)} f$ ist in $L^p(\lambda_1)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}\int \chi_{B_R(1;0)} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 &= \int_{B_R(1;0)} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_{B_R(1;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_0^R \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_{-R}^0 \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\lambda_1\end{aligned}$$

Weil die Funktionen positiv sind, sind sie Lebesgue-Integrierbar genau dann, wenn sie (uneigentlich) Riemann-Integrierbar sind. Wir wissen aber auch, dass

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\lambda_1 &= \int_0^R \frac{1}{x^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\lambda_1 \qquad\qquad x > 0 \\ &= \lim_{a \to 0} \int_a^R \frac{1}{x^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a \to 0} \left[\frac{x^{-\alpha p + 1}}{1 - \alpha p}\right]\end{aligned}$$

was existiert genau dann, wenn $-\alpha p + 1 \geq 0$. Das Ergebnis stimmt nicht für $\alpha p = 1$. In diesem Fall ist

$$\int_a^R \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = [\ln x]_a^R$$

und der Grenzwert existiert nicht. Aus der Symmetrie von $x \to -x$ gilt genau die gleiche für $\int_{-R}^0 \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x$. Insgesamt ist die Funktion genau dann integrierbar, wenn $-\alpha p + 1 > 0$.

Ähnlich berechnen wir das Riemann-Integral für $\chi_{\mathbb{R}\setminus B_R(1;0)}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_R^\infty \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} &= \int_R^\infty \frac{1}{x^{\alpha p}}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{a\to\infty}\int_R^a \frac{1}{x^{\alpha p}}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha p+1}}{1-\alpha p}\right]\end{aligned}$$

was genau dann existiert, wwenn $-\alpha p+1\leq 0$. Ähnlich stimmt das Ergebnis nicht für $-\alpha p = 1$ nicht. In diesem Fall ist

$$\int_R^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\ln x|_R^a,$$

was nicht existiert. Also es ist genau dann integrierbar, wenn $-\alpha p + 1 < 0$.

(b) $d=2$: Wir berechnen das Integral in Polarkoordinaten. Da die Funktion positiv ist, ist das Integral wohldefiniert. Sie ist genau dann integrierbar, wenn die transformierte Funktion integrierbar ist. Wir wissen, dass $\|x\| = r$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_{B_R(2;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}}\,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^{\alpha p}}\,\mathrm{d}\theta\, r\,\mathrm{d}r\\ &=2\pi\int_0^R \frac{1}{r^{\alpha p-1}}\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Aus dem Argument in (a) ist das Integral endlich genau dann, wenn

$$-(\alpha p-1)+1 = -\alpha p+2 > 0.$$

Ähnlich für $d=3$ berechnen die das Integral in Kugelkoordinaten. Die Funktion ist integrierbar genau dann, wenn die transformierte Funktion integrierbar ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{B_R(3;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}}\,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{r^{\alpha p}}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &=2\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^{\alpha p-2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &=4\pi\int_0^R\frac{1}{r^{\alpha p-2}}\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Das Integral ist endlich genau dann, wenn

$$-(\alpha p-2)+1 = -\alpha p+3 > 0.$$

(c) Sei $p = 1, r = 2, q = 3$. Sei außerdem

$$g(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & |x| < 1 \\ 1/x & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Wir zeigen alle drei Eigenschaften.

$$\begin{aligned} \int |g| \,\mathrm{d}\lambda_1 &\geq \int_{\mathbb{R}\setminus B_1(1;0)} |g| \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus B_1(1;0)} \frac{1}{|x|} \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \infty && \text{(a)} \end{aligned}$$

also $g \notin L^1(\lambda_1)$. Jetzt ist

$$\begin{aligned} \int |g|^3 \,\mathrm{d}\lambda &\geq \int_{B_1(1;0)} |g|^3 \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|} \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \infty && \text{(a)} \end{aligned}$$

also $g \notin L^3(\lambda_1)$. Zuletzt ist

$$\begin{aligned} \int |g|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 &= \int_{B_1(1;0)} |g|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_{\mathbb{R}\setminus B_1(1;0)} |g|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \underbrace{\int_{B_1(1;0)} x^{-2/3} \,\mathrm{d}\lambda_1}_{<\infty} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus B_1(1;0)} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\lambda_1}_{<\infty} \\ &< \infty \end{aligned}$$

wobei die zwei Integrale weniger als unendlich aus (a) sind, also $g \in L^2(\lambda_1)$.

(d) Sei $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \ln x$. Es gilt $\lim_{x\to 0} |g(x)| = \infty$, also $g \notin L^\infty(\lambda_1)$. g ist jedoch ein Element von $L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Wir zeigen es zunächst für all $p \in \mathbb{N}$ per Induktion. Außerdem berechnen wir das Integral über $(0, 1]$, was das Ergebnis nicht verändert, weil $\{1\}$ eine Nullmenge ist. Da $\ln x$ entweder > 0 oder < 0 für alle $x \in (1, 0]$ ist, schreiben wir $|\ln x| = k \ln x$, wobei $k \in \{-1, 1\}$.

$p = 1$ Fall:

$$\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}\lambda_1 = \lim_{a\to 0} \int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}\lambda_1$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 0}\left[x \ln x|_a^1 - \int_a^1 \mathrm{d}\lambda_1\right]\\
&= \lim_{a\to 0}\left[a \ln x - (1-a)\right]\\
&= -1
\end{aligned}
$$

also

$$\int_0^1 |\ln x| \,\mathrm{d}\lambda_1 = 1.$$

Wir nehmen jetzt an, dass es für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ gilt.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 =& k^{p+1} \int_0^1 (\ln x)^{p+1} \,\mathrm{d}\lambda_1\\
=& k^{p+1}\left[x(\ln x)^{p+1}|_0^1 - \int_0^1 x(p+1)(\ln x)^p \frac{1}{x}\right]\\
=& k^{p+1}\left[-(p+1)\int_0^1 (\ln x)^p \,\mathrm{d}\lambda_1\right]
\end{aligned}
$$

Per Voraussetzung ist das Integral von $|\ln x|^p$ endlich, also das Integral von $|\ln x|^{p+1}$ ist auch endlich. Insgesamt ist $\ln x \in L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in \mathbb{N}$.

Sei jetzt p beliebig. Es gilt

$$\int_0^1 |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_0^{1/e} |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_{1/e}^1 |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 .$$

Da $|\ln x|^p$ auf $(1/e, 1)$ stetig für alle p ist, existiert das Integral von $1/e$ bis 1 stets. Also wir vergleichen $|\ln x|^p$ für $x \in (0, 1/e)$.

Weil $|\ln x| > 1$ für alle $x \in (0, 1/e)$, ist

$$\int_0^{1/e} |\ln x|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 \leq \int_0^{1/e} |\ln x|^{\lceil p\rceil} \,\mathrm{d}\lambda_1 .$$

Per Definition ist $\lceil p\rceil \in \mathbb{N}$ und $|\ln x|^{\lceil p\rceil}$ integrierbar. Dann ist $|\ln x|^p$ auch integrierbar und $\ln x \in L^p(\lambda_1)$ $\forall p \in [1, \infty)$. $\square$

Aufgabe 167. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$ gilt und außerdem

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\mu)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(\mu)}$$

für alle $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ und $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

(b) Sei der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nun endlich. Zeigen Sie, dass dann $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ und

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mu)}$$

für alle $f \in L^q(\mu)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie den Raum $L^r(\mu)$ für $r := \frac{q}{p}$.

Beweis. (a) Sei $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$. Das Ziel ist: $f \in L^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$. Sei

$$\begin{aligned} A =& \{x | x \in X,\ |f(x)| < 1\} \\ B =& \{x | x \in X,\ |f(x)| \geq 1\} = X \backslash A \end{aligned}$$

Weil $|f|^p$ bzw. $|f|^q$ auf der ganzen Menge X integrierbar sind, sind $|f|^p$ bzw. $|f|^q$ auf A und B integrierbar. Es gilt, für alle $x \in A$,

$$|f|^q \leq |f|^r \leq |f|^p$$

also $|f|^r$ ist auf A integrierbar. Ähnlich ist für alle $x \in B$

$$|f|^p \leq |f|^r \leq |f|^q$$

und das Integral von $|f|^r$ auf B existiert. Da

$$\int |f|^r \, \mathrm{d}\mu = \int_A |f|^r \, \mathrm{d}\mu + \int_B |f|^r \, \mathrm{d}\mu \,,$$

ist $|f|^r$ integrierbar und $f \in L^r(\mu)$. Aus der Höldersche Ungleichung folgt, für $1/p + 1/q = 1, p, q \in [1, \infty]$

$$\|f^2\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|f\|_{\mathcal{L}^q(\mu)}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r(\mu)} &= \left[\int |f|^r \, \mathrm{d}\mu \right]^{1/r} \\ &= \left[\int |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta) r} \, \mathrm{d}\mu \right]^{1/r} \\ &= \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} =& \int |f| \, \mathrm{d}\mu \\ =& \int |f|^\theta |f|^{1-\theta} \, \mathrm{d}\mu \\ \leq& \|f^\theta\|_{\mathcal{L}^q(\mu)} \|f^{1-\theta}\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \\ =& \left[\int |f|^{q\theta} \, \mathrm{d}\mu \right]^{1/q} \left[\int |f|^{p(1-\theta)} \, \mathrm{d}\mu \right]^{1/p} \end{aligned}$$

□

Aufgabe 168. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := |xyz|$ und

$$A := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Bestimmen Sie $\int_A f \,\mathrm{d}\lambda_3$.

Beweis. Weil f stetig auf einer kompakten Menge definiert ist, ist f auf A integrierbar. Für den Schnitt A_z gilt

$$A_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\right\}.$$

Dann verwenden wir den Satz von Fubini, um das Integral als Doppelintegral zu schreiben. z muss in $(1/2, 1)$ sein, damit A_z nichtleerist. $z \geq 1/2$ per Definition und $z \leq 1$, weil sonst $x^2 + y^2 \leq 1 - z^2 \leq 0$. Da $x^2 + y^2$ positiv ist, wäre der Schnitt dann leer.

$$\int_A f \,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{1/2}^1 \int_{A_z} |xy||z| \,\mathrm{d}\lambda_2 \,\mathrm{d}z\,.$$

Wir berechnen jetzt das Integral

$$\int_{A_z} |xy| \,\mathrm{d}\lambda_2$$

in Polarkoordinaten. Das Integral existiert zumindest für fast alle $z \in (1/2, 1)$, weil $|xyz|$ integrierbar in $\mathbb{R}^3$ ist, also wir verwenden den Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_{A_z} |xy| \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{(0,\sqrt{1-z^2})} \int_{(0,2\pi)} |r^2 \cos\varphi \sin\varphi| r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\sqrt{1-z^2}} 2r^3 \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}(1 - z^2)^2
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\sin\varphi \cos\varphi| \,\mathrm{d}\varphi &= 4 \int_0^{\pi/2} |\sin\varphi \cos\varphi| \,\mathrm{d}\varphi \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \left|\frac{1}{2} \sin 2\varphi\right| \mathrm{d}\varphi \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2 \left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2}
\end{aligned}$$

$$=(1-(-1)) = 2$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_A f \,\mathrm{d}\lambda_3 =& \int_{1/2}^1 \frac{|z|}{2}(1-z^2)^2 \,\mathrm{d}z \\
=& \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 z(1-z^2)^2 \,\mathrm{d}z \\
=& \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 z(1-2z^2+z^4) \,\mathrm{d}z \\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{6}\right]_{1/2}^1 \\
=& \frac{9}{256}.
\end{aligned}$$

□

4.12 Blatt 12

Aufgabe 169. Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^α sowie $P \subseteq \mathbb{R}^m$ eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Zeigen Sie:

(a) $M \times P \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(b) Gilt $M \cap \overline{N} = \varnothing = \overline{M} \cap N$, so ist $M \cup N$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(c) Die Mengen

$$\begin{aligned}
A :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (-1,1), y = x^2\}, \\
B :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (-1,0) \cup (0,1), y = -|x|\},
\end{aligned}$$

sind jeweils 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^1.

(d) Die Aussage aus (b) ist unter der schwächeren Voraussetzung $M \cap N = \varnothing$ im Allgemeinen nicht richtig.

Beweis. (a) Sei $(m,p) \in M \times P$. Per Definition gibt es offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, f und g α-mal differenzierbare Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, $g : V \to \mathbb{R}^{m-l}$, so dass

$$\begin{aligned}
& m \in U,\ p \in V \\
& M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\} \\
& \mathrm{Rang}(f'(m)) = n - k
\end{aligned}$$

$$P \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\}$$
$$\text{Rang}(g'(p)) = m - l$$

Dann ist $U \times V \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ offen Sei außerdem $h : U \times V \to \mathbb{R}^{n+m-(n+k)}$ definiert durch $h(x,y) = (f(x), g(y))$, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$.

Dann ist $h(x,y) = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ und $g(y) = 0$. Außerdem ist

$$h' = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}.$$

Da h' eine Blockmatrix ist, ist $\text{Rang}(h'(m,p)) = \text{Rang}(f'(m)) + \text{Rang}(g'(p))$. (Man kann das beweisen, indem man das Gauss-Algorithismus durchführt, bis f' und g' in Zeilenstufenform sind.)

Weil f und g α-mal stetig differenzierbar sind, ist h auch α-mal stetig differenzierbar

Es gilt dann

$$(U \times V) \cap (M \times P) = \{x \in U \times V : h(x) = 0\}$$
$$\text{Rang}(h'(m,p)) = n + m - (k + l)$$

(b) Sei $x \in M \cup N$, also $x \in M$ oder $x \in N$. OBdA betrachten wir den Fall, $x \in M$. Per Definition gibt es $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ α-mal stetig differenzierbar, so dass

$$M \cap U = \{y \in U : f(y) = 0\}$$
$$\text{Rang}(f'(x)) = n - k$$

Da $M \cap \overline{N} = \varnothing$, ist $M \subseteq \overline{N}^c$. Per Definition ist $\overline{N}^c$ offen. Seien $V := U \cap \overline{N}^c$ und $g := f|_V$. Weil f α-mal stetig differenzierbar ist, ist g auch α-mal stetig differenzierbar. Es gilt

$$(M \cup N) \cap V = M \cap V = \{y \in V : g(y) = 0\}$$
$$\text{Rang}(g'(x)) = n - k$$

Ähnlich gilt für $x \in N$. Dann ist $M \cup N$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - y$. Sei $p \in A$ und U offen, so dass $p \in U$. Per Definition ist

$$A \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Außerdem ist f mindestens einmal stetig differenzierbar, mit Ableitung $f' = (2x, -1)$. Da f' eine 1×2-Matrix ist, ist f vom höchstens Rang 1. Weil die zweite Komponente konstant $-1 \neq 0$ ist, ist f nie von

Rang 0. Dann ist f immer vom Rang 1, also A ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1.

Sei jetzt $p \in B$. Wir betrachten den Fall, $\pi_1(p) > 0$, wobei $\pi_1((x,y)) = x$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f((x,y)) = x + y$ und U offen mit $p \in U$. OBdA ist $\pi_1(U) \subseteq (0,\infty)$, sonst ist $(0,\infty) \times \mathbb{R} \cap U$ offen mit gleiche Eigenschaften.

Dann ist

$$\begin{aligned} U \cap B =& \{x \in U : f(x) = 0\} \\ f'(p) =& (1,1) \\ \text{Rang}(f'(p)) =& 1 \end{aligned}$$

und analog für p mit $\pi_1(p) < 0$. Weil $x \neq 0$, ist $\pi_1(p)$ nie 0. Also wir sind fertig, und B ist eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1.

(d) Wir betrachten $A \cap B$. Es gilt $A \cap B = \varnothing$, weil $x^2 = |x|$ nur wenn $|x| = 0$ oder $|x| = 1$, aber die beide Fälle sind ausgeschlossen.

Es gilt $(0,0) \in A \cup B$, weil $(0,0) \in A$. Wir fahren per Widerspruch fort. Wir nehmen an, dass $M \cup N$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1 ist.

Dann gibt es eine offene Menge U mit $(0,0) \in U$ sowie eine stetig differenzierbare Funkton $f : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$(A \cup B) \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$$

und $\text{Rang}(f'((0,0))) = 1$. Wir zeigen, dass der Rang eigentlich 0 ist. Wir wissen, entlang die Kurve $y = x^2$ ist $f = 0$. Sei $\gamma(t) = (t, t^2)^T$. Weil $f \circ \gamma = 0$ in eine offene Umgebung um 0, gilt

$$\begin{aligned} 0 =& D(f \circ \gamma) \\ =& (Df)(\gamma') \\ D(f \circ \gamma)(0) =& (Df)(\gamma'(0)) \\ =& Df((1,0)^T) \\ =& 0 \end{aligned}$$

Ähnlich gilt, weil f entlang $y = -|x|$ ist, definieren wir die Kurve $\gamma : [0,a] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t,-t)$ für ein $a > 0$. Daraus folgt, weil $\gamma'(t) = (1,-1)$.

$$\begin{aligned} D(f \circ \gamma)(0) =& (Df)(\gamma'(0)) \\ =& (Df)((1,-1)^T) \end{aligned}$$

also sowohl $(1,0)^T$ als auch $(1,-1)$ liegen in $\ker Df(0)$. Da diese linear unabhängig sind, ist $\ker D = 2$ und wegen des Rangsätzes ist $\text{Rang}(f'((0,0))) = 0$, ein Widerspruch. $\square$

Aufgabe 170. Sei $a < b, \alpha \in \mathbb{N}$ und $r : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei α-mal stetig differenzierbar mit $r(z) > 0$ für alle $z \in (a,b)$. Definiere

$$R := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \in (a,b), \sqrt{x^2+y^2} = r(z)\right\}.$$

Dann ist R durch die Abbildung

$$\varphi : (a,b) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(z,\alpha) := \begin{pmatrix} r(z)\cos\alpha \\ r(z)\sin\alpha \\ z \end{pmatrix}$$

parametrisiert.

(a) Zeigen Sie, dass R eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ist.

(b) Zeigen Sie, dass R eine λ_3-Nullmenge ist.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$I := \int_{(a,b)\times(0,2\pi)} \sqrt{\det(\varphi'^T\varphi')}\, \mathrm{d}\lambda_2(z,\alpha)$$

in Abhängigkeit der Funktion r.

(d) Bestimmen Sie das Integral I in (c) für den Fall $r(z) := \cosh(z)$ und $(a,b) := (0,1)$.

Beweis. (a) Sei $p \in R$.

Lemma

Lemma 4.2. *Ist $p \in \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$, so ist $p \notin R$.*

Beweis. Es gälte dann $\sqrt{x^2+y^2} = 0$, also $0 > r(z)$, was unmöglich ist, weil $r(z) > 0$ per Definition. □

Sei jetzt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f((x,y,z)) = \sqrt{x^2+y^2} - r(z)$. Sei jetzt $p \in R$ und $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $p \in U$. Per Definition ist

$$R \cap U = \{q \in U : f(q) = 0\}. \tag{4.3}$$

Außerdem ist f stetig differenzierbar mit

$$f' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, r'(z)\right),$$

solange $(x,y,z) \notin \{(0,0,z)|z \in \mathbb{R}\}$. Dies ist aber kein Problem wegen des Lemmas. Als Verkettung von elementäre Funktionen sind die ersten zwei Komponenten unendlich mal stetig differenzierbar. $r(z)$ ist bekanntermaßen α-mal stetig differenzierbar.

Wenn f' Null ist, muss $x = y = 0$ gelten, da $(x^2 + y^2)^{-1/2} > 0$. Dies ist noch einmal wegen des Lemmas ausgeschlossen, also f' ist immer vom Rang 1.

Zusammen mit Eq. (4.3) ist R eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(b) R ist messbar, weil R abgeschlossen (und daher eine Borelmenge) ist.

Da $(\mathbb{R}^3, \lambda_3, \mathcal{L}(3))$ σ-endlich ist (oder weil es in der Vorlesung bewiesen wurde), schreiben wir das Maß als Integral.

$$\lambda_3(R) = \int_a^b \lambda_2(R_z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Jetzt betrachten wir R_z und schreiben das Maß aus dem gleichen Grund noch einmal als Integral.

$$R_z = \{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} = r(z)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Weil $\sqrt{\cdot}$ monoton wachsend ist, muss $|x| < r(z)$ gelten, sonst kann die Bedingung nicht erfüllt werden. Sei jetzt x fest. Es gilt $y^2 = r(z)^2 - x^2$, oder

$$y = \pm\sqrt{r(z)^2 - x^2}.$$

also $(R_z)_x = \{(x, \sqrt{r(z)^2 - x^2}, z), (x, -\sqrt{r(z)^2 - x^2}, z)\}$. Als endliche Menge ist $\lambda_1((R_z)_x) = 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(R) &= \int_a^b \lambda_2(R_z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_a^b \int_{-r(z)}^{r(z)} \lambda_1((R_z)_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&= \int_a^b \int_{-r(z)}^{r(z)} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&=0
\end{aligned}$$

(c) Als offene Menge ist $(a, b) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine messbare Menge. Es gilt

$$\varphi' = \begin{pmatrix} r'(z)\cos\alpha & -r(z)\sin\alpha \\ r'(z)\sin\alpha & r(z)\cos\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\varphi'^T = \begin{pmatrix} r'(z)\cos\alpha & r'(z)\sin\alpha & 1 \\ -r(z)\sin\alpha & r(z)\cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varphi'^T\varphi &= \begin{pmatrix} r'(z)^2\cos^2\alpha + r'(z)^2\sin^2\alpha + 1 & 0 \\ 0 & r(z)^2\sin^2\alpha + r(z)^2\cos^2\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r'(z)^2 + 1 & 0 \\ 0 & r(z)^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\det(\varphi'^T\varphi) = (r'(z)^2 + 1)(r(z)^2)$. Weil $\mathbb{R}^2$ σ-endlich ist, dürfen wir den Satz von Fubini verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}&\int_{(a,b)\times(0,2\pi)} \sqrt{\det(\varphi'^T\varphi)}\,\mathrm{d}\lambda_2(z,\alpha) \\ =&\int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(\varphi'^T\varphi)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z \\ =&\int_a^b \int_0^{2\pi} r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z \\ =&2\pi \int_a^b r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

(d) In diesem Fall ist $r(z) := \cosh z$ und $(a, b) = (0, 1)$. Das Integral ist

$$\begin{aligned}&2\pi \int_a^b r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2}\,\mathrm{d}z \\ =&2\pi \int_0^1 \cosh z\sqrt{1 + \sinh^2 z}\,\mathrm{d}z \\ =&2\pi \int_0^1 \cosh^2 z\,\mathrm{d}z \\ =&2\pi \int_0^1 \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 \mathrm{d}z \\ =&\frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^{2z} + 2 + e^{-2z})\,\mathrm{d}z \\ =&\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}e^{2z} - \frac{1}{2}e^{-2z} + 2z\right]_0^1 \\ =&\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-2} + 2\right] \\ =&\frac{\pi}{4} \left[e^2 - e^{-2} + 4\right].\end{aligned}$$

□

CHAPTER FIVE

Einfürung in die Algebra

5.1 Blatt 1

Aufgabe 171. Sei $G := 2\mathbb{N}^* := \{2n | n \in \mathbb{N}^*\}$ die Menge der positiven geraden Zahlen. Wir nennen $a \in G$ *zerlegbar*, falls sich a als Produkt zweier Elemente aus G schreiben lässt. Ansonsten nennen wir a unzerlegbar. Beispielsweise sind 4 zerlegbar und 6 unzerlegbar. Zeigen Sie:

(a) G ist multiplikativ abgeschlossen.

(b) Jedes $a \in G$ lässt sich als Produkt unzerlegbarer Elemente aus G schreiben.

(c) Selbst wenn man die Reihenfolge der Faktoren nicht berücksichtigt, so ist die Zerlegung nach (b) im Allgemeinen nicht eindeutig.

Beweis. (a) $2n \times 2n' = 4nn' = 2(nn')$

(b) Wir beweisen es per Induktion. Nehme an, dass jede Elemente $2n, n < k$ entweder unzerlegbar ist, oder als Produkt unzerlegbare Elemente aus G geschrieben werden kann. Für $2(1) = 2$ ist es klar - 2 ist unzerlegbar.

Sei $M_k \subseteq G = \{m \in G | \exists n \in G, mn = 2k\}$

Entweder ist $M = \varnothing$, also k ist unzerlegbar, oder es existiert $m, n \in G, mn = 2k$. Weil m und n ein Produkt unzerlegbarer Elemente aus G sind, ist $2k$ auch ein Produkt unzerlegbarer Elemente.

(c) Gegenbeispiel:

$$G \ni 1020 = 30 \times 34 = 102 \times 10.$$

□

Aufgabe 172. In dieser Aufgabe stellen wir den Euklidischen Algorithmus zur Berechung des größten gemeinsamen Teilers vor. Seien hierzu zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \neq 0$ vorgelegt. Wir setzen $r_0 := a, r1 := b$ und rekursiv für alle $i \in \mathbb{N}^*$ mit $r_i \neq 0$.

$$r_{i+1} := \text{ Rest von } r_{i-1} \text{ bei der Division durch } r_i$$

(a) Zeigen Sie, dass es ein $n \geq 2$ mit $r_n = 0$ gibt.

Da die Rekursionsformel für $i = n$ nicht mehr anwendbar ist, bricht die Folge (r_i) der Reste beim Index n ab. Daher gibt es nur genau einen Index $n \geq 2$ mit $r_n = 0$. Beweisen Sie nun:

(b) Für alle $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ gilt $ggT(a, b) = ggT(r_{i-1}, r_i)$.

(c) Es ist $ggT(a, b) = r_{n-1}$.

(d) Berechnen Sie $ggT(210, 45)$ mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus.

Beweis. (a)

$$r_{i-1} = qr_i + r_{i+1} \qquad 0 \leq r_{i+1} < r_i$$

per Definition. Weil $r_{i-1} < r_i$, ist die Folge monoton fallend. Da es endlich viele natürliche Zahlen $k < b$ gibt, muss $r_n = 0$.

(b) Wir beweisen:

$$ggT(r_{i-1}, r_i) = ggT(r_i, r_{i+1}).$$

Die gewünschte Ergebnisse folgt daraus per Induktion.

Es gilt $r_{i-1} - qr_i = r_{i+1}$. Dann folgt: $ggT(r_{i-1}, r_i)$ teilt r_{i-1} und r_i und daher auch $r_{i-1} - qr_i$. Deshalb ist $ggT(r_{i-1}, r_i)$ auch einen Teiler von $r_{i+1} \implies ggT(r_{i-1}, r_i) \leq ggT(r_i, r_{i+1})$.

Weil $r_{i-1} = qr_i + r_{i+1}$, ist $ggT(r_i, r_{i+1})$ einen Teiler von r_i und r_{i+1} und daher auch von $qr_i + r_{i+1}$. Deshalb ist es auch einen Teiler von r_{i-1}, und $ggT(r_i, r_{i+1}) \leq ggT(r_{i-1}, r_i)$

(c) Es gilt

$$r_{n-2} = qr_{n-1} + \cancel{r_n},$$

also r_{n-1} teilt r_{n-2}. Daraus folgt

$$ggT(r_{n-1}, r_{n-2}) = r_{n-1} = ggT(a, b).$$

(d)

$$\begin{aligned}
210 &= 4 \times 45 + 30 \\
45 &= 1 \times 30 + 15 \\
30 &= 2 \times 15 + 0 \\
15 & \\
0 &
\end{aligned}$$

$$ggT(210, 45) = 15.$$

$\square$

Aufgabe 173. (Bonus Problem) Wir wissen von dem Lemma von Bezout, dass für jeder $x, y, \in \mathbb{N}$ es $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$ax + by = ggT(x, y).$$

Zum Beispiel ist $-210 + 5 \times 45 = 15$. Kann man von das Euklidische Algorithmus die Zahlen a, b rechnen?

Beweis. Wir berechnen zuerst eine andere Beispiel

$$\begin{aligned}
427 =& 1 \times 264 + 163 \\
264 =& 1 \times 163 + 101 \\
163 =& 1 \times 101 + 62 \\
101 =& 1 \times 62 + 39 \\
62 =& 1 \times 39 + 23 \\
39 =& 1 \times 23 + 16 \\
23 =& 1 \times 16 + 7 \\
16 =& 2 \times 7 + 2 \\
7 =& 3 \times 2 + 1 \\
2 =& 1 \times 2 + 0
\end{aligned}$$

Wir kehren zurück:

$$\begin{aligned}
7 - 1 =& 3 \times 2 \\
3 \times 16 =& 6 \times 7 + 3 \times 2 \\
=& 6 \times 7 + (7 - 1) \\
=& 7 \times 7 - 1 \\
6 \times 16 =& 14 \times 7 - 1 \\
6 \times 16 + 1 =& 14 \times 7 \\
14 \times 23 =& 14 \times 16 + 14 \times 7 \\
=& 14 \times 16 + (6 \times 16 + 1) \\
=& 20 \times 16 + 1
\end{aligned}$$

In der letzte Gleichung bleibt $ggT(427, 264)$ (1). Wir setzen immer wieder ein, bis zu wir eine Gleichung des Forms $427a + 264b = 1$ haben □

Aufgabe 174. Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Für welche Zahlen $\mathbb{N} \ni a, b < k$ braucht das Euklidische Algorithismus die meiste Schritte?

Beweis. Wir möchten, dass die Folge $r_n \to 0$ nicht so schnell.

$$\begin{aligned}
13 &= 1 \times 8 + 5 \\
8 &= 1 \times 5 + 3 \\
5 &= 1 \times 3 + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&3 = 1 \times 2 + 1\\
&2 = 1 \times 2 + 0\\
&1\\
&0
\end{aligned}$$

ist die Fibonacci Folge. □

Aufgabe 175. Seien p und q zwei ungerade und aufeinanderfolgende Primzahlen, so dass also zwischen p und q keine weiteren Primzahlen existieren. Zeigen Sie, dass $p + q$ ein Produkt von mindestens drei (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen ist.

Beweis. Sei obdA $p < q$. Weil p und q ungerade sind, ist $p + q$ gerade, also $p + q = 2k, k \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass $p + q$ ein Produkt von zwei Primzahlen ist, also $k \in \mathbb{P}$. Dann gilt

$$p < k < q, \qquad k \in \mathbb{P},$$

ein Widerspruch. Deshalb ist $k \notin \mathbb{P}$ und k ist ein Produkt von mindestens zwei Primzahlen, also $p+q$ ist ein Produkt von mindestens drei Primzahlen. □

Aufgabe 176. Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es genau dann ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $ax \equiv 1 \pmod n$ gibt, wenn $ggT(a, n) = 1$ gilt.

Beweis. $ax \equiv 1 \pmod n \iff ax - 1 = kn, k \in \mathbb{Z}$, also $ax - kn = 1$.

Weil $ggT(a, n) = 1$, gibt es so zwei Zahlen $a, -k$, so dass $ax - kn = 1$ (Lemma von Bezout) □

5.2 Blatt 2

Aufgabe 177. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element 1. Für jedes Element $g \in G$ gelte $g^2 = 1$. Zeigen Sie, dass G dann abelsch ist.

Beweis.

Lemma 5.1. *Sei $a, b \in G$. Dann gilt $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Beweis.

$$abb^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1.$$ □

Es gilt, für jede $g \in G$, dass $g = g^{-1}$, weil $gg = 1$ (per Definition). Deswegen gilt

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$ □

Aufgabe 178. Sei K ein endlicher Körper mit $q \in \mathbb{N}^*$ Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass es genau $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$ geordnete Basen des K-Vektorraums K^n gibt. Unter einer geordneten Basis des K-Vektorraums K^n verstehen wir hierbei ein n-Tupel $(b_1, \dots, b_n)$ linear unabhängiger Vektoren $b_1, \dots, b_n \in K^n$.

(b) Nutzen Sie Teilaufgabe (a), um nachzuweisen, dass die Gruppe $GL_n(K)$ aus Beispiel 2.4 (d) die Ordnung $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$ besitzt.

Beweis. (a) Wir versuchen, ein p-Tupel lineare unabhängig Vektoren zu finden. Ich zeige, dass es genau $\prod_{k=0}^{p-1}\left(q^n - q^k\right)$ solche Vektoren gibt. Für $p = n$ ist das natürlich die gewünschte Behauptung.

Für $p = 1$ müssen wir n Elemente aus K finden. Es gibt q^n Möglichkeiten dafür. Jedoch ist $(0, 0, \dots, 0)$ verboten. Deswegen gibt es genau $q^n - 1$ Vektoren, die nicht $(0, 0, \dots, 0)$ sind.

Jetzt nehmen wir an, dass es genau $\prod_{k=0}^{p-1}\left(q^n - q^k\right)$ Tupel von p lineare unabhängig Vektoren gibt (wenn man die Reihenfolge berücksichtig), für eine beliebige $p < n$. Sei $v_1, v_2, \dots, v_p$ ein solches p-Tupel. Wir möchten eine andere Vektor v_{p+1} finden, die lineare unabhängig von $v_1, v_2, \dots, v_p$ ist. Das bedeutet:

$$v_{p+1} \neq a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_p v_p$$

für **alle** $a_1, a_2, \dots, a_p \in K$. Es gibt p^q Kombinationen für $(a_1, a_2, \dots, a_p)$. Weil $v_1, v_2, \dots, v_p$ linear unabhängig sind, gilt für jede $(a_1, a_2, \dots, a_p) \neq (a'_1, a'_2, \dots, a'_p)$ auch $a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p \neq a'_1 v_1 + \cdots + a'_p v \cdots + a'_p v_p$. Deswegen gibt es für jede $v_1, v_2, \dots, v_p$ genau $q^n - q^p$ Möglichkeiten für v_{p+1}.

Es gibt daher

$$\prod_{k=0}^{p-1}\left(q^n - q^k\right)$$

p-Tuple von linear unabhängig Vektoren. Für $p = n$ ist die Behauptung bewiesen.

(b) Sei $v_1, v_2, \dots, v_n$ ein Basis von K^n, und T eine lineare Abbildung $T : K^n \to K^n$. Wenn man $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ weiß, ist T eindeutig. T is invertierbar genau wenn $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ linear unabhängig sind. Es gibt dadurch eine bijektive Funktion

$$f : GL_n(K) \to \left\{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in K^{n \times n} | v_1, \dots, v_n \text{ sind linear unabhängig}\right\}.$$

Aber wir wissen, dass es genau $\prod_{k=0}^{n-1}\left(q^n - q^k\right)$ solche $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in K^{n \times n}$ gibt. Daraus folgt:

$$|GL_n(K)| = \prod_{k=0}^{n-1}\left(q^n - q^k\right). \qquad \square$$

Aufgabe 179. Wir betrachten die komplexen (2×2)-Matrizen

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $Q_8 := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8 bildet. Man nennt Q_8 auch die *Quaternionengruppe* der Ordnung 8.

Hinweis: Ein paar konkrete Matrixmultiplikationen werden Sie bei dieser Aufgabe ausrechnen müssen. Versuchen Sie, deren Anzahl gering zu halten und möglichst viel aus Ihren bereits durchgeführten Rechnungen zu schließen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass Q_8 under $\cdot$ abgeschlossen ist. Wir wissen von der Linearen Algebra, dass $EM = M$ für alle Matrizen M. Das heißt, dass E ein neutrales Element ist. Wir wissen auch, dass $(-E)M = -M$. Ich betrachte einige wichtige Matrixmultiplikationen:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E.$$

Daraus folgt, dass $x^{-1} = -x$, für $Q_8 \ni x \neq \pm E$. Für $x = -E$ ist $x^{-1} = x$. Jede $x \in G$ ist daher invertierbar. Es gilt auch

$$\begin{aligned} IJ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = K \\ JK &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = I \\ KI &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \end{aligned}$$

Von daraus folgt, dass Q_8 under Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Deswegen ist Q_8 eine Gruppe. Es ist nicht abelsche. Sei $a, b \in \{\pm I, \pm J, \pm K\}$, $a \neq \pm b$, und daher $ab \in \{\pm I, \pm J, \pm K\}$

$$ab = -(ab)^{-1} = -b^{-1}a^{-1} = -(-b)(-a) = -ba.$$ □

Aufgabe 180. Sei G eine Gruppe der Ordnung 4. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Beweis. Sei $G = \{1, a, b, c\}$. Nehme an, dass G nicht abelsch ist. ObdA können wir annehmen, dass $ab \neq ba$. Wir betrachten dann drei Fälle:

1. $ab = a$ oder $ab = b$ (obdA nehme an, $ab = a$).

   Es gilt dann

   $$(ba)b = b(ab) = ba.$$

   Daraus folgt $b = 1$, ein Widerspruch.

2. $ab = 1$. Es folgt aus die eindeutigkeit des Inverses, dass $ba = 1$, auch ein Widerspruch.

3. $ab = c$. Erinnern Sie sich daran, dass $ba \neq 1$, sonst gibt es ein Widerspruch wie im vorherigen Fall. Es gilt auch $ba \neq c$, weil $ab \neq ba$. Nehme obdA an, dass $ba = a$. Es gilt dann

$$bab = ab = bc.$$

Es gilt auch

$$bc = bab = b^2c.$$

Deswegen ist $b = 1$, noch ein Widerspruch. □

Aufgabe 181. Wie viele Gruppe der Ordnung 1/2/3/4 gibt es?

Beweis. Ordnung:

(a) 1: $G = \{1\}$

(b) 2: $G = \{1, a\}, a^2 = 1$

(c) 3: $G = \{1, a, b\}$

Jede element muss invertierbar sind, und 1 kann nicht die Inverse sein. Wir betrachten a^{-1} :

(i) $a^{-1} = a$. Es gilt $b^{-1} = b$, sonst ist $b^{-1} = a \implies a^{-1} = b$. Es gilt dann entweder $ab = a$ oder $ab = b$. Sei $ab = a$. Es gilt

$$b = (aa)b = aab = aa = 1,$$

ein Widerspruch. Das Fall ist leider unmöglich.

(ii) Es gilt $ab = 1$, daher auch $ba = 1$. Dann muss es gelten, $a^2 = b$, $b^2 = a$. Das Fall ist möglich.

Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 3.

(d) 4: Wir haben schon bewiesen, dass es abelsch sein muss. Wir zeichnen die Tabelle

$$\begin{array}{cccc} 1 & a & b & c \\ a & & & \\ b & & & \\ c & & & \end{array}$$

Es muss symmetrisch sein. Weil alle Elemente in alle Zeilen und Spalten vorkommen muss, gilt entweder

□

5.3 Blatt 3

Aufgabe 182. Wir ändern die Gruppendefinition aus Definition 2.3 ab, indem wir für eine Menge G mit einer zweistelligen Verknüpfung $\cdot$ und einem Element $e \in G$ fordern:

(a) Es gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in G$.

(b) Es gilt $a \cdot e = a$ für alle $a \in G$.

(c') Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element $b \in G$ mit $b \cdot a = e$

Ist dann G stets eine Gruppe?

Beweis. Nein. Sei $x \cdot y = x$. Es ist assoziativ, weil $x \cdot (y \cdot z) = x = (x \cdot y) \cdot z$. Es gilt auch $x \cdot e = x \; \forall x$. Außerdem gilt $e \cdot x = e \; \forall x \in G$. Aber es gilt für alle $e \neq x \in G$, dass $x \cdot y = x \neq e \; \forall y \in G$. G ist dann keine Gruppe. □

Aufgabe 183. Sei $n \in N$ mit $n \geq 3$ fixiert. Wir setzen $\alpha := \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$ und definieren die folgenden zwei Abbildungen:

$$s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \to \overline{z} \qquad \text{sowie} \qquad r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \to \alpha z.$$

Das neutrale Element der Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ bezeichnen wir mit e und mit $\cdot$ die Verkettung von Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $s^2 = e$ und $r \cdot s \cdot r = s$ gelten.

(b) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ genau dann $r^k = e$ gilt, wenn $n|k$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass r und s Elemente der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ sind.

(d) Zeigen Sie, dass $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $t \in \mathbb{N}$ mit $r^{-k} = r^t$ existiert.

(f) Beschreiben Sie das Abbildungsverhalten von r und s geometrisch.

(g) Folgern Sie aus (a)–(e), dass $\{r^x \cdot s^y | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$ gilt.

(h) Zeigen Sie, dass $D_n := \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$ eine Gruppe ist.

(i) Beweisen Sie, dass $|D_n| = 2n$ gilt.

(j) Zeigen Sie, dass D_n nicht abelsch ist.

Beweis. (a) $s^2 = e$ folgt aus $\overline{\overline{z}} = z$. Es gilt

$$\begin{aligned}(r \cdot s \cdot r)(z) =& (r \cdot s)\left(\exp(2\pi i/n)z\right)\\ =& r\left(\exp(-2\pi i/n)\overline{z}\right)\\ =& \exp(2\pi i/n)\exp(-2\pi i/n)\overline{z}\\ =& \overline{z}\end{aligned}$$

Also $r \cdot s \cdot r = s$.

(b) Wir wissen, $r^k(z) = \exp(2\pi ik/n)z$. $r^k = e$ genau dann, wen $\exp(2\pi ik/n) = 1$, also $n|k$.

(c) Sie sind bijektiv. Wir schreiben einfach die Umkehrfunktion.

$$s^{-1} = s \tag{a}$$

$$\begin{aligned}f(x) =& \exp(-2\pi i/n)x\\ r \circ f =& e = f \circ r\end{aligned}$$

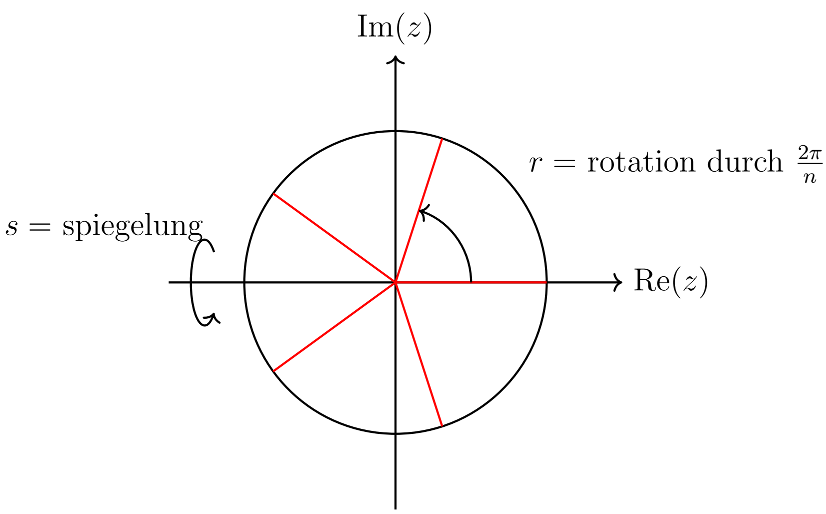
(d)

$$\begin{aligned}(s \cdot r^k)(z) =& s\left(\exp\left(2\pi ik/n\right)z\right)\\ =& \exp\left(-2\pi ik/n\right)\overline{z}\\ (r^{-k} \cdot s)(z) =& \left(r^{-k}\right)(\overline{z})\\ =& \exp(-2\pi ik/n)\overline{z}\\ =& (s \cdot r^k)(z)\end{aligned}$$

(e) Sei $t = -k + pn, p \in \mathbb{N}$, für p hinreichend groß, damit $t > 0$ und daher $p \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$s^t = s^{-k+pn} = s^{-k}s^{pn} = s^{-k}(s^n)^p = s^{-k}.$$

(f)



(g) Sei $y = 2n + b, b \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$s^y = s^{2n+b} = s^{2n} \cdot s^b = e \cdot s^b = s^b.$$

(h) (i) D_n ist abgeschlossen

$$\begin{aligned} r^a \cdot s^b \cdot r^{a'} \cdot s^{b'} =& r^a \cdot r^{-a'} \cdot s^b \cdot s^{b'} && \text{(d)} \\ =& r^{a-a'} s^{b+b'} \\ \in& D_n && \text{(g)} \end{aligned}$$

(ii) D_n ist assoziativ wegen der Assoziatitivät von Funktionverkettung.

(iii) Neutrales Element
$a = 0, b = 0, r^0 \cdot s^0 = e \in D_n$.

(iv) Inverses Element

$$s^{-b} \cdot r^{-a} \cdot r^a \cdot s^b = s^{-b} \cdot (r^{-a} \cdot r^a) \cdot s^b = s^{-b} \cdot s^b = e.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} s^{-b} \cdot r^{-a} =& r^a \cdot s^{-b} && \text{(d)} \\ =& r^a \cdot s^c,\ 0 \leq c < 2 && \text{(a)} \end{aligned}$$

(i) Es gibt genau n Möglichkeiten für a, und 2 Möglichkeiten für b. Daraus folgt $|D_n| = 2n$.

(j) Wir haben $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$ (d), und müssen nur k finden, sodass $r^k \neq r^{-k}$. $k = 1$ ist ein Gegenbeispiel. □

5.4 Blatt 4

Aufgabe 184. Seien $n \in \mathbb{N}^*, T$ die Menge der positiven Teiler von n und G eine Gruppe der Ordnung n. Für $t \in T$ definieren wir die Mengen

$$M_t := \{g \in G | \mathrm{ord}(g) = t\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes $g \in G$ in genau einer der Mengen M_t mit $t \in T$ liegt.

(b) Sei nun zudem G zyklisch. Zeigen Sie, dass dann $|M_t| = \varphi(t)$ für alle $t \in T$ gilt.

(c) Folgern Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $n = \sum_{t|n,t>0} \varphi(t)$.

Beweis. (a) Sei $g \in G$ beliebig und $H = \langle g \rangle$. H ist eine Untergruppe von G. Es gilt auch, dass $|H| = \mathrm{ord}(g)$. Wir wissen, dass $|H|$ teilt $|G|$. Daraus folgt, dass $\mathrm{ord}(g)$ teilt $|G|$, und g liegt in genau einer der Mengen M_t mit $t \in T$.

(b) Weil G zyklisch ist, gibt es für jede Teiler $t|n$ eine Untergruppe der Ordnung t.

Diese Untergruppe hat genau $\varphi(t)$ Erzeuger. Für alle Erzeuger $p$gilt $\operatorname{ord}(t) = |\langle t \rangle| = t$. Es gilt daher, für jedes $t \in T$, $|M_t| \geq \varphi(t)$.

Außerdem ist die Untergruppe der Ordnung t eindeutig. Deswegen ist genau $|M_t| = \varphi(t)$. Wir nehmen an, dass es $p \in G$ gibt, sodass $\operatorname{ord}(p) = t$, also $|\langle p \rangle| = t$. Weil die zyklische Untergruppe der Ordnung t eindeutig ist, ist die erzeugte Gruppe genau die Gruppe, die wir vorher diskutiert haben, also p ist einer der vorherigen $\varphi(t)$ Erzeuger.

Daraus folgt, dass $|M_t| = \varphi(t)$ für alle $t \in T$.

(c) Es gibt für jedes n eine zyklische Gruppe der Ordnung n, z.B. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Alle Element sind in einer der Mengen M_t. Die Zahl der Elemente ist einfach $\sum_{t \in T} |M_t| = \varphi(t) = n$

□

Aufgabe 185. Zeigen Sie, dass für eine Gruppe G der Ordnung $n \in \mathbb{N}^*$ äquivalent sind:

(a) G ist zyklisch.

(b) G besitzt zu jedem positiven Teiler t von n genau eine Untergruppe der Ordnung t.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b) ist schon in der Vorlesung bewiesen. (Satz 2.18). Es bleibt (b) $\Longrightarrow$ (a) zu zeigen. Wir betrachten dann ein Element $a \in G$ und die erzeugte zyklische Gruppe $\langle a \rangle$. Falls $\langle a \rangle = G$ sind wir fertig. Also nehmen wir an, $\langle a \rangle \neq G$. Sei $\operatorname{ord}(a) = k$, und $\langle a \rangle = k$. Diese Gruppe besitzt genau $\varphi(k)$ Erzeuger.

Dann wählen wir ein anderes b Element aus, das kein Erzeuger von $\langle a \rangle$ ist. Wir betrachten $\langle b \rangle$. Es muss gelten, dass $\operatorname{ord}(b) = |\langle b \rangle| \neq k$. Sonst wäre $\langle b \rangle = \langle a \rangle$, weil es nur *eine* Untergruppe der Ordnung k gibt. Wir nehmen noch an, dass $\langle b \rangle \neq G$.

Ähnlich fahren wir fort. Wir wählen ein Element aus, das kein Erzeuger von der voherigen betrachten zyklischen Gruppen sind. Weil es für jeder Teiler von n nur eine Untergruppe der Ordnung gibt, gilt $|M_t| = \varphi(t)$.

Sei T die Menge der positiven Teiler von n. Wir berechnen

$$\sum_{n \neq t \in T} \varphi(t) < n,$$

also wir haben Elemente, deren Ordnung kein positiver Teiler von n, das weniger als n ist. Weil die Ordnung ein Teiler von n sein muss, muss die Ordnung n sein, also solche Elemente sind Erzeuger der Gruppe G, und G ist zyklisch. □

Aufgabe 186. (a) Bestimmen Sie die Ordnungen der Elemente für jede der Diedergruppen D_n mit $n \geq 3$.

(b) Zeigen Sie, dass Satz 2.23 für nicht-abelsche Gruppen im Allgemeinen falsch ist.

> (Satz 2.23) Sei n die größte Elementordnung in einer abelschen Gruppe G. Dann gilt $g^n = e$ für alle $g \in G$.

Beweis. (a) Wir betracten zuerst Elemente mit dem Form $r^k s^0 = r^k$. Wir haben per die letzte Übungsblatt

> Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ genau dann $r^k = e$ gilt, wenn $n|k$ ist.

also wir brauchen die kleinste Zahl $\mathrm{ord}(r^k)$, sodass $(r^k)^{\mathrm{ord}(r^k)} = r^{k\mathrm{ord}(r^k)} = r^{pn}, p \in \mathbb{N}$. Per Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfaches ist

$$\mathrm{ord}(r^k) = \frac{\mathrm{kgV}(k,n)}{k} = \frac{n}{\mathrm{ggT}(k,n)}.$$

Wir wissen auch, dass $s^2 = e$, also $\mathrm{ord}(s) = 2$.

Jetzt betrachten wir alle Elemente mit dem Form $r^k s$. Es gilt

$$r^k s r^k s = r^k r^{-k} s s = ee = e,$$

also alle Elemente mit dem Form $r^k s$ haben Ordnung 2.

(b) Wir betrachten D_3. Die größte Elementordnung ist 3, weil $\mathrm{ggT}(3,2) = 1$, und $\frac{3}{\mathrm{ggT}(3,2)} = 3$, also r^2 hat Ordnung 3.

Keine größere Elementordnung ist möglich, weil $\frac{n}{\mathrm{ggT}(n,k)} \leq n = 3$, und $2 \leq 3$.

Es gilt aber

$$s^3 = (s^2)s = es = s,$$

also $s^3 \neq e$, ein Widerspruch. $\square$

Aufgabe 187. Sei $n \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $R := \{r^0, r^1, \ldots, r^{n-1}\}$ ein Normalteiler von D_n ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\langle x \rangle$ für kein $x \in D_n \backslash R$ ein Normalteiler von D_n ist.

Beweis. (a) Wir betrachten $x^{-1}Rx$:

(i) $x = r^p$:
Es gilt $x^{-1} = r^{-p}$. und

$$r^{-p} r^k r^p = r^k,$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, also $r^{-p} R r^p = R$, insbesondere $r^{-p} R r^p \subseteq R$.

(ii) $x = s$:
Es gilt $s^{-1} = s$, und

$$s r^k s = r^{-k} s s = r^{-k} \in S,$$

(Die Behauptung, dass $r^{-k} \in S$, war im letzten Übungsblatt bewiesen).

(iii) $x = r^p s$:
Wir haben schon bewiesen, dass $x^{-1} = r^p s$. Es gilt

$$r^p s r^k r^p s = r^p s r^{k+p} s = r^p r^{-(k+p)} s s = r^{-k} \in R.$$

Insgesamt gilt $x^{-1} R x \subseteq R$ für alle $x \in D_n$, also R ist ein Normalteiler.

(b) Noch einmal betrachten wir die unterschiedlichen Fälle

(i) $x = s$, also $\langle x \rangle = \{e, s\}$:
Es gilt

$$r^{-1} s r = r^{-1} r^{-1} s = r^{-2} s \neq s.$$

(Es gilt $r^{-2} \neq r^0 = e$ wenn $n \geq 3$).

(ii) $x = r^p s$, also $\langle x \rangle = \{e, r^p s\}$.
Es gilt

$$r^{-k} r^p s r^k = r^{-k} r^p r^{-k} s = r^{p-2k} s,$$

was nur ein Element von $\langle x \rangle$ ist, wenn $p - 2k \equiv p \pmod{n}$. Sei zum Beispiel $k = 1$. Weil $n \geq 3$, gilt die Gleichung nie.

Lemma 5.2. *Für $n \geq 3$ kann*

$$p - 2 \equiv p \pmod{n}$$

nicht gelten, für alle $p \in \mathbb{Z}$

Beweis. Die Gleichung $p - 2 \equiv p \pmod{n}$ genau dann, wenn es $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass

$$p - p - 2 = kn,$$

aber das impliziert

$$2 = kn,$$

was unmöglich ist, weil $n \geq 3 > 2$. □

Also $r^{-1} \langle x \rangle r \nsubseteq \langle x \rangle$

Die Gruppe $\langle x \rangle$ ist dann keine Gruppe für $x \in D_n \backslash R$. $\square$

5.5 Blatt 5

Aufgabe 188. (a) Begründen Sie, dass die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 9 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ S_9 in der alternierenden Gruppe A_9 liegt.

(b) Finden Sie i und k, so dass die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix} \in$ S_9 gerade ist.

Beweis. (a) Wir schreiben zuerst σ als Zyklus

$$\sigma = (176)(259)(384).$$

Dann stellen wir die Zyklus als Produkte von Transpositionen dar, wie im Beweis von 2.44

$$\sigma = (17)(76)(25)(59)(38)(84).$$

Es gibt 6 Transpositionen, also σ ist gerade, und $\sigma \in A_9$.

(b) Weil jede Zahl nur einmal vorkommen darf, gibt es nur zwei Möglichkeiten

$$\begin{aligned} i &= 3 & \qquad j &= 8, \\ i &= 8 & \qquad j &= 3. \end{aligned}$$

Wir betrachten die zwei Fälle:

(i) $i = 3, j = 8$:
Wir schreiben es als Zyklus, und dann von Transpositionen

$$(3765) = (37)(76)(65),$$

also es ist ungerade.

(ii) $i = 8, j = 3$ wir machen ähnlich

$$(37658) = (37)(76)(65)(58),$$

also es ist in diesem Fall gerade. $\square$

Aufgabe 189. Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Die Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ seien disjunkt.

(a) Beweisen Sie Lemma 2.41: Es gilt $\sigma\tau = \tau\sigma$.

(b) Folgern Sie: Es ist $\operatorname{ord}(\sigma\tau) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(\sigma), \operatorname{ord}(\tau))$.

Beweis. (a) Kurze Erinnerung am Definition von disjunkte Permutationen:

> **Definition 5.3.** Zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ heißen *disjunkt*, falls gilt
>
> $$\sigma(i) \neq i \implies \tau(i) = i, \text{ und}$$
> $$\tau(i) \neq i \implies \sigma(i) = i$$

Wir brauchen außerdem eine Ergebnis

> **Lemma 5.4.** *Sei $\sigma(i) = j \neq i$. Es gilt dann $\sigma(j) \neq j$.*
>
> *Beweis.* Sonst wäre es ein Widerspruch zu die Definition, dass S_n die Gruppe alle bijektive funktionen $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ ist. Die Permutation wäre dann nicht injektiv, weil $\sigma(i) = \sigma(j)$, aber per Annahme $i \neq j$ gilt. □
>
> **Korollar 5.5.** *Sei $\sigma, \tau \in S_n$ disjunkte Permutationen. Falls $\sigma(i) \neq i$ gilt $\tau\sigma\,(i) = \sigma(i)$.*
>
> **Bemerkung 5.6.** *Alle Aussagen here gelten natürlich noch, wenn man die Rollen von σ und τ vertauschen.*

Die Ergebnis folgt jetzt fast sofort. Wir betrachten drei Fälle:

(i) $\sigma(i) \neq i$, also $\tau(i) = i$.
Es gilt dann

$$\sigma\tau(i) \overset{5.3}{=} \sigma(i) \overset{5.5}{=} \tau\sigma(i).$$

(ii) $\tau(i) \neq i$, also $\sigma(i) = i$.

$$\tau\sigma(i) \overset{5.3}{=} \tau(i) \overset{5.5}{=} \sigma\tau(i).$$

(iii) $\tau(i) = i$ und $\sigma(i) = i$.

$$\tau\sigma(i) = i = \sigma\tau(i).$$

Insgesamt gilt $\tau\sigma = \sigma\tau$.

(b) Es gilt

$$(\sigma\tau)^n = \sigma^n\tau^n$$

wegen (a), weil σ und τ kommutiert, und wir können die Reihenfolge im Produkt

$$\underbrace{\sigma\tau\sigma\tau\dots\sigma\tau}_{n \text{ Mal}}$$

verändern, sodass die σ alle an einer Seite liegen, und die τ an der anderen Seite. Sei $N \ni p \leq \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$. Sei $p = n_1\text{ord}(\sigma) + a = n_2\text{ord}(\tau) + b,\ a, b, n_1, n_2 \in \mathbb{N}, 0 \leq a < \text{ord}(\sigma)$ und $0 \leq b < \text{ord}(\tau)$.

$$\begin{aligned}
(\sigma\tau)^p =& \sigma^p\tau^p \\
=& \sigma^{n_1\text{ord}(\sigma)+a}\tau^{n_2\text{ord}(\tau)+b} \\
=& \sigma^{n_1\text{ord}(\sigma)+a}\tau^{n_2\text{ord}(\tau)+b} \\
=& \sigma^{n_1\text{ord}(\sigma)}\sigma^a\tau^{n_2\text{ord}(\tau)}\tau^b \\
=& \sigma^a\tau^b
\end{aligned}$$

Per Definition, wenn $p = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$, ist $a = b = 0$ und

$$(\sigma\tau)^{\text{kgV}(\text{ord}(\sigma),\text{ord}(\tau)} = \sigma^0\tau^0 = 1.$$

Für $p < \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau)$ kann die beide nicht gleichzeitig gelten. Wir betrachten dann $\sigma^a\tau^b$. Per Definition können a und b nicht gleichzeitig 0 sein. Sei zum Beispiel $a \neq 0$. Dann haben wir nie das neutrale Element (es ist egal, was b ist). Sei i_k von σ bewegt (hier nehmen wir an, dass $\sigma \neq 1$). Dann ist i_k nicht von τ bewegt, weil σ und τ disjunkt sind.

$$\sigma^a\tau^b i_k = \sigma^a i_k.$$

Per Definition ist $\sigma^a i_k \neq i_k$ für alle mögliche i_k, sonst wäre $\text{ord}(\sigma) = i_k$. Dann ist $(\sigma\tau)^p \neq 1$ für alle $p < \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$. Ähnlich für $b \neq 0$ betrachten wir alle Elemente, die nicht von σ bewegt sind. Für entweder $\sigma = 1$ oder $\tau = 1$ ist die Behauptung klar. Sei $\sigma = 1$. Dann gilt $\text{ord}(1) = 1$, und $\text{ord}(\sigma\tau) = \text{ord}(\tau) = \text{kgV}(1, \text{ord}(\tau))$. Schluss:

$$\text{ord}(\sigma\tau) = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau)).$$ □

Aufgabe 190. (a) Zeigen Sie: Für jeden m-Zykel σ gilt $\text{ord}(\sigma) = m$.

(b) Bestimmen Sie das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass S_n ein Element der Ordnung 20 enthält.

Beweis. (a) Sei $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_m)$, mit die i_j paarweise unterschiedlich. Es gilt, für $\mathbb{N} \ni x \leq m$

$$\sigma^x i_k = i_p,$$

wobei $1 \leq p \leq m$ und $p \equiv k + x \pmod{n}$. $\sigma^x = 1$ genau dann, wenn $\sigma^x i_k = i_k$ für alle k, also $p = k$. Für $x = m$ ist es dann klar, $p = k$, also $\sigma^x = 1$.

Für $x < m$ kann das nicht sein. Das Kongruenz gilt genau dann, wenn

$$k + x - rx = k,\ r \in \mathbb{Z}.$$

Aber per Definition, wenn $r = 1$ ist $k + x - \overset{1}{\cancel{r}}x < k$. Wenn $r = 0$ ist $k + x \neq k$, weil $x \geq 1 > 0$. Also $\sigma^x \neq 1$ für alle $1 < x < m$.

(b) Mit Hilfe von 189 können wir einfach eine solche S_n konstruieren. Sei $n = 9$. Dann haben wir 2 disjunkter Zyklus

$$(12345) \qquad \text{und} \qquad (6789).$$

mit Ordnung 4 und 5 (a). Dann hat das Produkt (12345)(6789) der Ordnung 20, weil 4 und 5 Teilerfremd sind, und daher $\mathrm{kgV}(4,5) = 4 \times 5 = 20$.

Jetzt betrachten wir die Aufgabe im Allgemein. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und σ ein Element von S_n mit der Ordnung 20. Wir können σ als Produkt von k disjunkter Zykel. Die Zykel haben länge $l_i, 2 \le l_i \le k\ \forall l_i$ und

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_k \le n.$$

Der Ordnung von σ ist

$$\mathrm{ord}(\sigma) = l_1 l_2 \ldots l_n = 20 = 2^2 \times 5.$$

Weil 5 ein Primzahl ist, muss mindestens ein l_1 5 sein. Also oBdA können wir für beliebiges n so versuchen, ein solches Element so konstruieren: Wir nehmen 5 Elemente raus, und versuchen weiter, ein disjunkter Zyklus mit Länge 4 oder 2 disjunkte Zykel mit Länge 2 zu finden. Das heißt, dass wir mindestens 9 Elemente brauchen. Dann ist 9 genau die gewünschte Zahl. □

Aufgabe 191. (a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$V_4 := \{\sigma \in A_4 | \mathrm{ord}(\sigma) \le 2\}$$

eine Untergruppe der Ordnung 4 von A_4 (und daher auch S_4) ist.

(b) Zeigen Sie, dass V_4 ein Normalteiler von S_4 (und daher auch A_4) ist.

Hinweis: V_4 heißt auch Kleinsche Vierergruppe.

Beweis. (a) Wir schreiben ein beliebiges Element $\sigma \in V_4$ als Produkt von disjunkte Zykeln und nutzen die Eigenschaften:

(i) $\sigma \in A_4$.
Dann kann das Produkt keine Zykeln der Ordnung 4 enthalten, weil σ ist dann genau das Zyklus und lässt sich als Produkt von 3 Transpositionen schreiben, also $(i_1 i_2 i_3 i_4) = (i_1 i_4)(i_1 i_3)(i_1 i_2)$.

(ii) $\mathrm{ord}(\sigma) \le 2$.
Also das Produkt enthält nur Zykeln der Länge 2.

(iii) Dann können alle $\sigma \in V_4$ als Produkt von 0 oder 2 Zykeln der Länge 2 bzw. Transpositionen geschrieben werden. Wie viele solchen Zykeln gibt es? Wir schreiben alle Möglichkeiten

$$(12) \qquad\qquad (23) \qquad\qquad (34)$$

$$(13) \qquad (24) \qquad (14)$$

Dann können wir alle Elemente von V_4 schreiben:

$$\begin{aligned}&1 = ()\\&(12)(34)\\&(13)(24)\\&(14)(23)\end{aligned}$$

(iv) Wir müssen keine Assoziativgesetz oder Existenz des Inverses beweisen, die folgen alle aus den Eigenschaften der Gruppe A_4.

(v) V_4 ist abgeschlossen:
Wir schreiben die Verknüpfungstafel

$$\begin{pmatrix} () & (12)(34) & (13)(24) & (14)(23) \\ (12)(34) & () & (14)(23) & (13)(24) \\ (13)(24) & (14)(23) & () & (12)(34) \\ (14)(23) & (13)(24) & (12)(34) & () \end{pmatrix}.$$

(vi) Alle Elemente in V_4 sind invertierbar, weil $\mathrm{ord}(\sigma)$ ist entweder 1, also $\sigma = 1$ und $\sigma^2 = 1$, oder $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$, also $\sigma^2 = 1$. In beiden Fälle ist $\sigma = \sigma^{-1}$.

(b) Sei $(v_1 v_2)(v_3 v_4) = v \in V_4$ und $\sigma \in S_4$. Sei $f = \sigma^{-1}$. Das Ziel ist

$$\sigma^{-1} v \sigma = (f(v_1) f(v_2))(f(v_3) f(v_3)).$$

Wir betrachten die Wirkung $fvf^{-1}u$. Weil sowohl σ als auch f bijektiv sind, können wir statt u $f(x)$ schreiben. Sei $v(x) = y$. Es gilt dann

$$fvf^{-1}f(x) = fv(x) = f(y).$$

Weil f bijektiv ist, ist $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\} = \{1, 2, 3, 4\}$, also wir haben ein Produkt von 2 disjunkte Zykeln der Länge 2 bzw. Permutationen, also $\sigma^{-1} v \sigma \in V_4$. □

5.6 Blatt 6

Aufgabe 192. Seien G, H Gruppen und $\Phi : G \to H$ ein Homomorphismus.

(a) Sei $g \in G$ ein Element mit Ordnung $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}(\Phi(g)) | n$ gilt.

(b) Sei $N \trianglelefteq G$. Ist dann stets auch $\Phi(N) \trianglelefteq H$?

Beweis. (a) Es gilt

$$\Phi(g)^n = \Phi(g^n) = \Phi(1_G) = 1_H,$$

also $\operatorname{ord}(\Phi(g)) \leq n$. Wir beweisen die Aussage per Widerspruch. Sei $\operatorname{ord}(\Phi(g)) = p \nmid n$. Wir schreiben

$$n = qp + r, \qquad r < p$$

(Division mit Rest). Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\Phi(g)^n &= \Phi(g)^{qp+r} \\
&= \Phi(g)^{qp}\Phi(g)^r \\
&= (\Phi(g)^p)^q\, \Phi(g)^r \\
&= 1^q \Phi(g)^r \\
&= \Phi(g)^r \\
&\neq 1
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $r < p = \operatorname{ord}(\Phi(g))$, also $\Phi(g)^r \neq 1$, sonst wäre $\operatorname{ord}(\Phi(g)) = r$.

(b) Nein. Wir betrachten eine "Einbettung" $\mathrm{em} : S_n \to S_m$, wobei $m > n$. Sei $\sigma \in S_n$. Es gilt $\mathrm{em}(\sigma) = \sigma'$ genau dann, wenn

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \leq n \\ i & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Es ist klar, dass Φ ein Homomorphismus ist. Sei $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, mit $\Phi(\sigma_1) = \sigma_1'$ und $\Phi(\sigma_2) = \sigma_2'$. Dann ist

$$\sigma_1'\sigma_2'(i) = \sigma_1'(i) = i \qquad n < i \leq m,$$

also $\sigma_1'\sigma_2'|_{\{1,2,\dots,n\}}$ ein Element von S_n, dessen Bild $\sigma_1'\sigma_2'$ ist.

Wir wissen, dass $A_n \trianglelefteq S_n$.

Konkretes Gegenbeispiel: Sei $n = 3, m = 5$. Wir betrachten $\mathrm{em} : S_3 \to S_4$, und $\Phi(A_3)$, wobei $A_3 \trianglelefteq S_3$.

Dann ist $\Phi(A_3)$ kein Normalteiler von S_4. Unter Zweckentfremdung der Notation stellen wir A_3 und $\Phi(A_3)$ in Zykelnotation dar

$$A_3 = \Phi(A_3) = \{(123), (132)\}.$$

Es gilt auch $(14) \in S_4$ und $(14)^{-1} = (14)$.

Es gilt aber

$$(14)(123)(14) = (14)(1234) = (234) \notin \Phi(A_3),$$

also $\Phi(A_3) \ntrianglelefteq H$. □

Aufgabe 193. Seien G eine Gruppe und $M := \{x^2 | x \in G\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $N := \langle M \rangle$ ein Normailteiler von G ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes Element gN der Faktorgruppe G/N gilt: $\operatorname{ord}(gN) \leq 2$.

Beweis. (a) Sei $x, y \in G$ beliebig. Es gilt $x^2 \in M$. Es ist $y^{-1}xy \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y^{-1}x^2y =& y^{-1}xxy \\ =& y^{-1}xyy^{-1}xy \\ =& (y^{-1}xy)^2 \\ \in& M, \end{aligned}$$

also M ist ein Normalteiler von G.

(b) Wir betrachten das Quadrat eine Linksnebenklasse. Sei $a \in G$ beliebig, also aN ist eine beliebige Linksnebenklasse.

$$aN \cdot aN = (a^2)N.$$

Wir wissen aber, dass $a^2 \in N$ (per Definition). Weil N ein Normalteiler ist, gilt dann $a^2N = N$. Es folgt, dass $\operatorname{ord}(aN) \leq 2$. $\square$

Aufgabe 194. Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe mit Untergruppen $A, B \leq G$ an, so dass

$$A \trianglelefteq B \qquad \text{und} \qquad B \trianglelefteq G$$

gelten, nicht jedoch $A \trianglelefteq G$.

Hinweis: Dies zeigt, dass das Normalteiler-Sein im Allgemeinen nicht transitiv ist.

Beweis. Wir betrachten $G = D_4$, $B = \langle r^2, s \rangle$ und $A = \langle s \rangle$. Wir zeigen die Eigenschaften

(i) $B \trianglelefteq G$.

Es gilt $|D_4| = 8$ und $B = \{1, r^2, s, r^2s\}$, also $|B| = 4$, $[G : B] = 2$. Dann ist B stets ein Normalteiler (Bsp 2.35).

(ii) $A \trianglelefteq B$.

Wir betrachten $x^{-1}Ax$ für $x \in B$. Für $x \in \{1, s\}$ ist es klar. Für $x \in \{r^2, r^2s\}$ muss wir direkt das Produkt mit $x^{-1}sx$ berechnen.

Es gilt

$$r^{-2}sr^2 = sr^4 = s,$$

$(r^2s)^{-1} = sr^2$ (man kann das durch direktes Multiplikation verifizieren)

$$sr^2ssr^2 = sr^4 = s.$$

Insgesamt ist $A \trianglelefteq B$.

(iii) $A \ntrianglelefteq G$.

Es gilt $r^{-1}sr = r^{-2}s = r^2 s \neq 0$. Wenn wir $D_4 \subseteq S_{\mathbb{C}}$ betrachten, ist $r^2 s(1_C) = -1$, wobei 1_C das 1 in $\mathbb{C}$ ist (also nicht das neutrale Element in $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}$).

□

Aufgabe 195. Zeigen Sie, dass

$$S_n = \langle (12), (123 \dots n) \rangle$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

Beweis. Wir zeigen, dass Elemente mit bestimmte Formen Elemente von $\langle (12), (123 \dots n) \rangle$ sind. Im Beweis begründen wir alle Schritte mit "Sonst wäre $\langle (12), (123 \dots n) \rangle$ keine Gruppe, weil es nicht abgeschlossen wäre".

Außerdem bedeutet hier Addition immer die Addition in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, aber durch 1 verschoben, also die mögliche Ergebnisse sind $1, 2, \dots n$ statt $0, 1, \dots, n-1$. Wir bezeichnen $(12) = s$ und $(123 \dots n) = T$.

(i) Alle Transpositionen $(i(i+1))$. Die Proposition ist

$$T^x s T^{n-x} = ((x+1)(x+2)).$$

Es gilt

$$T^{n-x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1+(n-x) & 2+(n-x) & \dots & n-1+(n-x) & n+(n-x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$sT^{n-x} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+(n-x) & \dots & 2 & 1 & \dots & 2n-x \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} T^x s T^{n-x} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+(n-x)+x & \dots & 2+x & 1+x & \dots & 2n-x+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+n & \dots & 2+x & 1+x & \dots & 2n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1 & \dots & 2+x & 1+x & \dots & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Alle Transpositionen $(i(i+k))$, für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Wir beweisen es per Induktion über k. Wir wissen es schon für $k = 1$. Jetzt nehmen wir an, dass alle Transpositionen $i(i+k') \in \langle (12)(123 \dots n) \rangle$ für alle $i \in \{1, 2, \dots n\}$ und $k' \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

Wir betrachten $(i(i+k))$ für i beliebig. Ziel:

$$(i(i+k)) = (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1)). \quad (5.1)$$

Wir betrachten die Wirkung auf i, $i+k-1$ und $i+k$. Es ist klar, dass keine andere Zahlen nicht davon bewegt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
&(i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))i \\
&= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i+k-1) \\
&= (i(i+k-1))(i+k) \\
&= i+k \\
&(i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))(i+k) \\
&= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i+k) \\
&= (i(i+k-1))(i+k-1) \\
&= i \\
&(i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))(i+k-1) \\
&= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))i \\
&= (i(i+k-1))i \\
&= i+k-1,
\end{aligned}$$

also die Gleichheit in (5.1) gilt.

(iii) Alle Elemente $\sigma \in S_n$.

Wir schreiben ein beliebiges Element $\sigma \in S_n$ als Produkt von Transpositionen. Weil alle Transpositionen Elemente von $\langle (12)(123\dots n)\rangle$ sind, müssen dann $\sigma \in \langle (12)(123\dots n)\rangle$ auch. $\square$

5.7 Blatt 7

Aufgabe 196. Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Automorphismen von G zusammen mit der Verkettung von Funktionen als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Man nennt diese Gruppe die *Automorphismengruppe* von G und schreibt $\mathrm{Aut}(G)$ für sie.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ durch

$$k_g : G \to G \qquad x \to gxg^{-1}$$

ein Automorphismus von G gegeben ist.

Dies zeigt, dass die Konjugation mit einem beliebigen Gruppenelement g einen Automorphismus von G liefert.

Beweis. (a) Wir beweisen die Eigenschaften

(i) Neutrales Element:
Sei $1 : G \to G,\ 1(x) = x\ \forall x \in G$. Es ist klar, dass 1 bijektiv ist. Außerdem ist
$$1(xy) = xy = 1(x)1(y),$$
also 1 ist ein Automorphismus. Außerdem gilt für alle $f \in \mathrm{Aut}(G)$:
$$f1(x) = f(x)\ \forall x \in G,$$
also 1 ist das neutrale Element.

(ii) Existenz des Inverses: Sei $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Weil f bijektiv ist, gibt es auch eine bijektive inverse Abbildung f^{-1}. Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} eine Homomorphismus ist. Sei $x, y \in G$ beliebig. Weil f bijektiv ist, gibt es Elemente $a, b \in G$, so dass $x = f(a)$ und $y = f(b)$ gilt. Per Definition eine inverse Abbildung ist $f^{-1}(x) = a,\ f^{-1}(y) = b$.
Es folgt:
$$\begin{aligned} f^{-1}(xy) &= f^{-1}(f(a)f(b)) \\ &= f^{-1}(f(ab)) && f \text{ ist ein Homomorphismus} \\ &= ab = f^{-1}(x)f^{-1}(y) \end{aligned}$$
also $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$.

(iii) Assoziatiativität
Folgt sofort aus der Assoziativität von Funktionverknüpfungen.

(iv) Abgeschlossenheit
Die Verkettung bijektive Abbildungen ist noch einmal bijektiv. Die Verkettung ist auch ein Homomorphismus (Definition 2.58), also $\mathrm{Aut}(G)$ ist abgeschlossen.

(b) Noch einmal zeigen wir alle Eigenschaften. Sei $g \in G$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung k_g.

(i) Sie ist ein Homomorphismus.
Sei $x, y \in G$. Es gilt $k_g(x) = gxg^{-1}$ und $k_g(y) = gyg^{-1}$. Daraus folgt:
$$k_g(x)k_g(y) = gxg^{-1}gyg^{-1} = gxyg^{-1} = k_g(xy).$$

(ii) Sie ist injektiv.
Wir zeigen, dass $\mathrm{Ker}(k_g) = \{1\}$. Wir nehmen an, dass es $1 \neq x \in G$ gibt, so dass $k_g(x) = 1$. Dann ist
$$gxg^{-1} = 1 \implies gx = g.$$
Aus der Kurzungsregel folgt $x = 1$, ein Widerspruch.

(iii) Sie ist surjektiv. Sei $y \in G$ und $x = g^{-1}yg$. Dann gilt

$$k_g(x) = gxg^{-1} = gg^{-1}ygg^{-1} = y,$$

also sie ist surjektiv.

Dann ist k_g ein bijektiver Homomorphismus, also ein Automorphismus. □

Aufgabe 197. Unter dem *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe G versteht man die Menge aller Elemente von G, die mit allen Elementen von G vertauschen, also die Menge $Z(G) = \{g \in G | \text{es gilt } gxg^{-1} = x \text{ für alle } x \in G\}$. Wir definieren die Menge der *inneren Automorphismen von G* durch

$$\mathrm{Inn}(G) := \{k_g | g \in G\} \qquad \text{mit } k_g \text{ wie in 196(b).}$$

Zeigen Sie, dass $Z(G) \trianglelefteq G, \mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ und $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$ gelten.

Beweis. Wir schreiben zuerst einen alternativen Definition:

$$Z(G) = \{g \in G | \text{ es gilt } gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

Dann ist auch $1 \in Z(G)$, weil $1x = x1 = x$ für alle $x \in G$ gilt.

(a) $Z(G) \leq G$ bzw. $Z(G)$ ist eine Gruppe.

Sei $g, h \in Z(G)$. Dann gilt, für alle $x \in G$:

$$\begin{aligned} ghx(gh)^{-1} &= ghxh^{-1}g^{-1} \\ &= gxg^{-1} && h \in Z(G) \\ &= x && g \in Z(G), \end{aligned}$$

also $Z(G)$ ist abgeschlossen.

Sei jetzt $g \in Z(G)$ mit Inverse g^{-1} (momentan nicht angenommen, dass es in $Z(G)$ ist). Das Ziel ist:

$$g^{-1}xg = x \ \forall x \in G.$$

Weil G eine Gruppe ist, können wir x als y^{-1} schreiben für ein $y \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} g^{-1}y^{-1}g &= (g^{-1}yg)^{-1} \\ &= y^{-1} && g \in Z(G). \end{aligned}$$

Das heißt: $g^{-1}xg = x$ für alle $x \in G$, und alle Elemente in $Z(G)$ sind invertierbar.

(b) $Z(G) \trianglelefteq G$.

Folgt fast sofort per Definition: Wir betrachten die Nebenklassen. Sei $x \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} xZ(G) =& \{xg|g \in Z(G)\} \\ =& \{gx|g \in Z(G)\} \\ =& Z(G)x \end{aligned}$$

(c) $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$

Sei $f_1, f_2 \in \mathrm{Inn}(G)$, also es gibt $g_1, g_2 \in Z(G)$, so dass

$$\begin{aligned} f_1(x) =& g_1 x g_1^{-1} \\ f_2(x) =& g_2 x g^{-1} \end{aligned}$$

Dann ist $(f_1 \circ f_2)(x) = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 g_2 x (g_1 g_2)^{-1}$, also $f_1 \circ f_2 \in \mathrm{Inn}(G)$.

Die Abbildung $f : G \to G,\ f(x) = x = 1x1^{-1}$ ist auch ein Element von $\mathrm{Inn}(G)$. Es ist klar, dass es das neutrale Element ist.

Sei jetzt

$$\begin{aligned} f_1(x) =& g_1 x g_1^{-1} \\ f_1^{-1}(x) =& g_1^{-1} x g \end{aligned}$$

$f_1^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$, weil $g_1^{-1} \in G$ und $f_1 = k_{g_1^{-1}}$. Es gilt für alle $x \in X$, dass

$$(f_1 \circ f_1^{-1})(x) = g_1 g_1^{-1} x g_1 g_1^{-1} = x$$

Also $\mathrm{Inn}(G)$ ist eine Gruppe.

$G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

Per Definition ist $\Lambda : g \to k_g$ eine surjektive Abbildung. Weiter ist Λ ein Homomorphismus: Sei $g, h \in G$. Dann ist $\Lambda(gh) = k_{gh}$, wobei $k_{gh}(x) = (gh)x(gh)^{-1}$ für alle $x \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} k_{gh}(x) =& (gh)x(gh)^{-1} \\ =& (gh)xh^{-1}g^{-1} \\ =& g(hxh^{-1})g^{-1} \\ =& (k_g \circ k_h)(x) \end{aligned}$$

Was ist der Kern des Homomorphismus? $k_g = 1$ genau dann, wenn

$$k_g(x) = gxg^{-1} = x \ \forall x \in G.$$

Der Kern ist per Definition genau das Zentrum. Dann folgt $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$ aus dem Homomorphiesatz.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g \to k_g"] \arrow[d] & \mathrm{Inn}(G) \\ G/Z(G) \arrow[ur, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

□

Aufgabe 198. (a) Nach Beispiel 2.71 operiert S_n auf sich selbst per Konjugation. Beschreiben Sie die Bahnen dieser Operation.

(b) Wir nennen eine Transposition der S_3 *schön*, wen Sie von der Form $(1x)$ mit $x \in \{2, 3\}$ ist. Sei das Neutrale von S_3 als Produkt schöner Transpositionen dargestellt. Kommen in diesem Produkt die einzelnen schönen Transpositionen dann stets in gerader Anzahl vor?

Beweis. (a) Wir brauchen hier

Satz 2.52

Sei $\varphi = (a_1 a_2 \dots)(b_1 b_2 \dots) \dots \in S_n$ in Zykelnotation und $\psi \in S_n$. Dann

$$\psi\varphi\psi^{-1} = (\psi(a_1)\psi(a_2)\dots)(\psi(b_1)\psi(b_2)\dots)\dots.$$

Per Definition sind die Bahnen definiert durch

$$\left\{\sigma'\sigma\sigma'^{-1} | \sigma' \in S_n\right\}.$$

Zu jedem $\sigma \in S_n$ gehört eine (vielleicht nicht eindeutige) Bahn. Wir schreiben σ als Produkt disjunkte Zykeln (im Sinne von Satz 2.41)

Dann zeigen wir zwei Richtungen

(i) Wenn zwei Permutationen die gleichen Zykellänge haben, sind sie konjugiert (Satz 2.53)

Dies zeigt, dass sie in der gleichen Bahn sind.

(ii) Wenn zwei Permutationen bzw. Elemente in S_n unterschiedliche Darstellungen als Produkt disjunkte Zykeln haben, wobei unterschiedliche heißt *nicht* bis auf die Reihenfolge der Faktoren), sind die Permutation nicht konjugiert.

Dies folgt aus die Eindeutigkeit der Darstellung von σ als Produkt von disjunkte Zykeln.

Insgesamt gilt: Zwei Elemente liegen in der gleichen Bahn genau dann, wenn die Elemente die gleiche Darstellung als Produkt disjunkte Zykeln haben.

(b) Nein. Es gilt $(12)(23) = (123)$, ein Zyklus der Länge 3. Also gilt $[(12)(23)]^3 = (123)^3 = 1$, aber die einzelnen Transpositionen kommen in ungerade Zahlen (3) vor. □

Aufgabe 199. Die Gruppe G operiere auf der Menge M. Weiter sei U eine Untergruppe von G, so dass die auf U eingeschränkte Operation transitiv auf M sei.

Zeigen Sie, dass dann $G = U \cdot G_m$ für alle $m \in M$ gilt.

Beweis. Sei $m \in M$ fest, aber beliebig. Sei $U' \subseteq U$ eine minimale Teilmenge von U, so dass $\{xm | x \in U'\} = M$ (möglich weil die Operation transitiv ist). Wir können eine solche Teilmenge konstruieren, indem wir das Ergebnis der Operation xm betrachten und alle andere Elemente mit dem gleichen Ergebnis wegwerfen.

(i) Sei $a, b \in G_m,\ a \neq b$ und $x \in U'$. Dann gilt $xa \neq xb$ (Kürzungsregel)

(ii) Sei $x, y \in U',\ x \neq y$ und $a, b \in G_m$. Dann gilt $xa \neq yb$, weil $xam = xm$ und $ybm = ym$, aber $xm \neq ym$ per Definition von U' als minimale Teilmenge.

(iii) Dann betrachten wir alle Elemente von der Form $xa, x \in U', a \in G_m$. Wir haben schon gezeigt, dass alle solche Elemente unterschiedlich sind. Wie viele Elemente gibt es? $|U'| = |M|$ per Konstruktion und $|G_m| = |G|/|M|$ (Satz 2.71). Daraus folgt, dass

$$|U \cdot G_m| \geq |M|(|G|/|M|) = |G|,$$

also $G \subseteq U \cdot G_M$. Weil wir offenbar per Definition keine Elemente außerhalb G erreichen können, haben wir also $U \cdot G_m \subseteq G$ und daher Gleichheit. □

5.8 Blatt 8

Aufgabe 200. (a) Eine Gruppe G der Ordnung 21 operiere auf einer Menge M mit 11 Elementen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Bahn der Länge 1 besitzt.

(Ist $\{m\} \subseteq M$ eine solche einelementige Bahn, dann gilt $g.m = m$ für alle $g \in G$. Jedes $g \in G$ fixiert also m. Man nennt m daher auch einen Fixpunkt der Operation.)

(b) Sei $G := \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen (2×2)-Matrizen und M die Menge aller komplexen (2×2)-Matrizen, die nur reelle Eigenwerte besitzen. Dann operiert G per Konjukation auf M. (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation an)

Beweis. (a) Wir schreiben die Klassengleichung

$$|M| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_m].$$

Jeder Term im Summe ist eine Teiler von 21, also $1, 3, 7$ oder 21. Die Operation besitzt eine Bahn der Länge 1 genau dann, wenn 1 zumindest einmal vorkommt. Wir schreiben die möglichen Summen:

$$\begin{aligned}
11 =& 1 \times 11 \\
11 =& 3 + 1 \times 8 \\
11 =& 3 \times 2 + 1 \times 5 \\
11 =& 3 \times 3 + 1 \times 2 \\
11 =& 7 + 1 \times 4 \\
11 =& 7 + 3 + 1
\end{aligned}$$

Weil 1 immer vorkommt, gibt es immer eine Bahn der Länge 1.

(b) Konjukation ist genau eine Ähnlichkeitstransformation. Wir brauchen:

> Zwei Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie die gleichen Jordan-Normalform haben.

Daraus ergibt sich ein Repräsentantensystem der Bahnen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die erste diagonalisierbare Matrizen darstellt und die zweite nicht diagonalisierbare Matrizen darstellt. □

Aufgabe 201. Von der endlichen Gruppe G sei bekannt, dass sie nicht abelsch ist und zu jedem positiven Teiler t von $|G|$ mindestens eine Untergruppe der Ordnung t besitzt. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist. (Hinweis: Sei p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt, und U eine Untergruppe von G vom Index p. Lassen Sie G auf den Nebenklassen von U operieren und betrachten Sie den Kern des zugehörigen Homomorphismus.)

Beweis. Wie im Hinweis: Sei p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt und U eine Untergruppe von G vom Index p. G operiere auf den Linksnebenklassen von U. Die Operation ist ein Homomorphismus $G \to S_p$. Deren Kern K ist eine Untergruppe von U, weil $xU \neq U$ für $x \notin U$. Das Ziel ist: Der Kern ist nicht trivial.

Die Faktorgruppe G/K ist isomorph zu eine Untergruppe von S_p, also es teilt $|S_p| = p!$. Als Faktorgruppe teilt $|G/K|$ den Ordnung von G auch. Weil $p \neq 1$, ist U eine echte Untergruppe, also $|G/K| \neq 1$. Dann ist die einzige Zahl, die sowohl $p!$ als auch $|G|$ teilt, p. Daraus folgt: $|K| = |U|$. Weil $K \subseteq U$, ist $K = U$, also U ist ein Normalteiler. □

Aufgabe 202. Benutzen Sie die Beweisidee aus Korollar 2.79, um folgende Aussage zu zeigen: Seien p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}^*$, G eine Gruppe der Ordnung p^n und $\{e\} < N \trianglelefteq G$ ein nicht-trivialer Normalteiler von G. Dann gilt $|Z(G) \cap N| > 1$.

Beweis. Als Normalteiler (insbesondere Untergruppe) teilt der Ordnung von N den Ordnung von G, also $|N| = p^m$, $0 < m \leq n$. 0 ist ausgeschlossen, weil N nicht trivial ist. Dann ist p ein Teiler von $|N|$. Wir schreiben noch einmal die Klassengleichung:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : C_G(x_i)].$$

Als Normalteiler ist N per Definition eine Vereinigung von Konjugationsklassen, sonst wäre N unter Konjugation nicht abgeschlossen. Eine solche Konjukationsklasse ist $\{e\}$, weil N eine Untergruppe ist. Der Ordnung von Konjugationsklassen sind Teiler von p^n, also Potenzen von p. Dann ist der Ordnung von N eine Summe

$$|N| = \sum_{m=1}^{k} [G : G_m] = 1 + p^{m_1} + p^{m_2} + \cdots + p^{m_k}.$$

Es ist nicht möglich, dass alle $m_1, \ldots, m_k > 0$ sind, weil dann p ein Teiler von alle p^{m_i} und $|N|$ wäre, jedoch kein Teiler von 1 und daher kein Teiler von die rechte Seite. Dann muss es für eine m_i gelten, dass $m_i = 0$. Dann enthält N Konjugationsklassen der größe 1 bzw. Elemente im Zentrum, die nicht e sind, also $N \cap Z(G) \neq \{e\}$. □

Aufgabe 203. Die Gruppe G operiere auf einer Menge M. Sei $\Phi : G \to \mathrm{Sym}(M)$ der zugehörige Homomorphismus und K sein Kern. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$G/K \times M \to M, \qquad gK.m := g.m$$

eine treue Operation von G/K auf M gegeben ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass es wohldefiniert ist. Sei $k_1, k_2 \in K$ und $m \in M$. Es gilt

$$\begin{aligned} gk_1.m =& \Phi(gk_1)(m) \\ =& \Phi(g)(\Phi(k_1)(m)) \\ =& \Phi(g)(e(m)) \\ =& \Phi(g)(m) \\ =& g.m \end{aligned}$$

und ähnlich für $gk_2.m = g.m$. Sei jetzt $g_1, g_2 \in G$, so dass $g_1K.m = g_2K.m$ für alle $m \in M$. Dann ist

$$g_2^{-1} g_1.m = m$$

für alle $m \in M$ oder $g_2^{-1} g_1 \in K$. Daraus folgt: g_1 und g_2 liegen in der gleichen Nebenklasse. □

5.9 Blatt 9

Aufgabe 204. (a) Beweisen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung 15 zyklisch sind.

(b) Funktioniert die Schlussweise aus Aufgabenteil (a) auch bei Gruppen der Ordnung 45?

Beweis. (a) $15 = 3 \times 5$, zwei Primzahlen, also die Teiler von 15 sind $1, 3, 5$ und 15. Da 3 teilt 15, $3^2 = 9$ aber nicht, gibt es mindestens eine 3-Sylowgruppe G_3. Für die Zahl der 3-Sylowgruppen n_3 gilt:

$$n_3 \equiv 1 \pmod 3$$
$$n_3 | [G : G_3] = 5$$

Aus den ersten Gleichung folgt: n_3 ist 1 oder 4. Da $4 \nmid 5$, ist $n_3 = 1$, also es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 3. Ähnlich gibt es genau eine Gruppe der Ordnung 5. Es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 1, die triviale Gruppe und genau eine Gruppe der Ordnung 15, die ganze Gruppe.

Da es für jeder Teiler t von 15 genau eine Untergruppe der Ordnung t gibt, sind alle solche Gruppen zyklisch.

(b) Nein. Es kann mehr als eine Gruppe der Ordnung 5 geben, weil für die Zahl der 5-Sylowgruppen n_5 gilt:

$$n_5 \equiv 1 \pmod 5$$
$$n_5 | 9$$

Eine Möglichkeit ist $n_5 = 6$, also wir dürfen den Fall, in dem mehr als eine Untergruppe der Ordnung 5 gibt, nicht ausschließen. □

Aufgabe 205. (a) Seien p eine Primzahl, G eine Gruppe, P eine p-Sylowgruppe von G und n_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Zeigen Sie, dass $P \trianglelefteq G$ genau dann gilt, wenn $n_p = 1$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 12 nicht einfach ist.

Beweis. (a) Sei $n_p \neq 1$, also $n_p > 1$. Dann gibt es eine andere p-Sylowgruppe U. Weil alle Sylowgruppen konjugiert sind, gibt es $x \in G$, so dass $x^{-1}Px = U \neq P$, also $x^{-1}Px \neq P$ für alle $x \in G$, und P ist kein Normalteiler.

Sei umgekehrt P kein Normalteiler. Es gibt dann $x \in G$, so dass $x^{-1}Px = U \neq P$, Weil die Abbildung $p \to x^{-1}px$ injektiv ist, ist U auch eine p-Sylowgruppe, also $n_p > 1$.

(b) $12 = 2^2 \times 3$. Für die Zahlen der 3 bzw. 2-Sylowgruppen gilt

$$\begin{aligned} n_2 \equiv& 1 \pmod 2 \\ n_2|&3 \\ n_3 \equiv& 1 \pmod 3 \\ n_3|&4 \end{aligned}$$

Falls irgendeine Zahl n_2 oder n_3 1 ist, sind wir nach (a) fertig. Also wir nehmen an, dass weder n_2 noch n_3 1 sind. Die einzige Lösung ist dann $n_2 = 3,\ n_3 = 4$.

Die 3-Sylowgruppen sind außer das Neutrale disjunkt. In andere Worte: Sei H' und H 3-Sylowgruppen. Dann ist $H' \cap H = \{e\}$. Beweis: Wir beweisen es per Widerspruch. Weil $H = H'$ angenommen ist, ist $|H \cap H'| = 2$. Alle Elemente in H bzw. H' haben die Ordnung 3, weil die Ordnung ein Teiler von der Gruppenordnung (3) ist, was nicht 1 ist, wenn das Element nicht das Neutrale ist. Dann ist $H \cap H' = \{e, p\}$, wobei p die Ordnung 3 hat. Das ist aber ein Widerspruch, weil 3 teilt 2 nicht.

Das heißt: Aus 4 3-Sylowgruppen bekommen wir 8 unterschiedliche Elemente, die nicht e sind. Es gibt eine 2-Sylowgruppe der Ordnung 4, z.B. H. Da Sylowgruppen von unterschiedliche Ordnung einen trivialen Schnitt haben, bekommen wir daraus 3 neue Elemente. Es gibt aber mehr als eine 2-Sylowgruppe, z.B. H'. Da $H = H'$, bekommen wir zumindest ein neues Element. Aus dem gleichen Argument ist dies nicht in den 8 Elemente aus der 3-Sylowgruppen enthalten.

Insgesamt: Die Gruppe besitzt ein neutrales Element. Aus den 3-Sylowgruppen bekommen wir 8 nicht neutrale Elementen. Aus den 2-Sylowgruppen bekommen wir mindestens 4 Elemente. Alle diese Elemente sind unterschiedlich. Dann hat die Gruppe mindestens 13 Elemente, ein Widerspruch. □

Aufgabe 206. Sei G eine Gruppe der Ordnung $392 = 2^3 \cdot 7^2$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Beweis. Es gibt Sylow-Untergruppen der Ordnung 7^2 und 2^3. Für die Zahl solche Untergruppen n_7 und n_2 gilt:

$$\begin{aligned} n_2 \equiv& 1 \pmod 2 \\ n_2|&49 \\ n_7 \equiv& 1 \pmod 7 \\ n_7|&8 \end{aligned}$$

Angenommen $n_2 \neq 1 \neq n_7$, sonst wären wir nach 205(a) fertig. Also es gilt $n_7 = 8$. Die Gruppe G operiere auf die Menge der 7-Sylowgruppen per Konjugation. Die Operation ist ein Homomorphismus $\varphi : G \to S_8$, dessen Kern ein Normalteiler ist. Wir zeigen, dass der Kern nicht trivial und nicht die ganze Gruppe ist.

Wenn der Kern die ganze Gruppe wäre, gibt es eine 7-Sylowgruppe H, so dass $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in G$. Dann sind die 7-Sylowgruppen nicht konjugiert, ein Widerspruch. (Außerdem wäre H ein Normalteiler.)

Wenn der Kern trivial wäre, wäre das Bild $\varphi(G)$ eine Untergruppe von S_8. Weil φ injektiv wäre, hätte diese der Ordnung 392. Die Ordnung alle Untergruppen teilt die Ordnung der ganzen Gruppe, also

$$392 | 8!.$$

Aber 7 kommt nur einmal in der Primfaktorzerlegung von 8! vor, während es zweimal in der Primfaktorzerlegung von 392 zweimal vorkommt. Das heißt: $392 \nmid 8!$, ein Widerspruch. □

Aufgabe 207. (a) Sei G eine endliche Gruppe mit zyklischer *Zentrumsfaktorgruppe* $Z/Z(G)$. Zeigen Sie, dass dann $G = Z(G)$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Sind $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und G ein Gruppe der Ordnung p^2, so ist G abelsch.

(c) Sind auch Gruppen der Ordnung p^3 (mit primem $p \in \mathbb{P}$) stets abelsch?

Beweis. (a) Die Zentrumsfaktorgruppe ist zyklisch genau dann, wenn es ein Element $x \in G$ gibt, so dass die Potenzen $x^n Z(G)$ alle Elemente erreichen können. Das heißt, dass für jedes $y \in G$ ein $p \in Z(G)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $y = x^n p$. Sei $y' \in G$ beliebig. Ähnlich gibt es $p' \in Z(G)$ und $n' \in \mathbb{N}$, so dass $y' = x^{n'} p'$. Wir betrachten die Menge

$$\{p, x^n, p', x^{n'}\}.$$

Da $p \in Z(G)$ ist, kommutiert p mit alle Elemente aus G, insbesondere x und daher x^n und $x^{n'}$. Das gilt auch für p'. Weil x^n und $x^{n'}$ Potenzen von x sind, kommutiert die miteinander. Also alle Elemente sind paarweise kommutativ und

$$yy' = x^n p x^{n'} p' = x^{n'} p' x^n p = y'y.$$

Da y und y' beliebig waren, kommutiert jedes beliebiges $y \in G$ mit alle andere Elemente $y' \in G$, also $G = Z(G)$.

(b) Das Zentrum ist eine Untergruppe. Weil $Z(G)$ nicht trivial ist (Korollar 2.78), ist $Z(G)$ entweder p oder p^2. Falls $|Z(G)| = p^2$, wäre $G = Z(G)$ und wir sind dann fertig.

Falls $|Z(G)| = p$, hat die Faktorgruppe $G/Z(G)$ Ordnung p. Nach der Satz von Cauchy gibt es ein Element der Ordnung p in $G/Z(G)$, also das Element ist ein Erzeuger von $G/Z(G)$, und $G/Z(G)$ ist zyklisch. Daraus folgt: $G = Z(G)$, und G ist abelsch.

(c) Nein. $2^3 = 8$ und es gibt eine Diedergruppe D_4 der Ordnung 8. Die Diedergruppe ist aber nicht abelsch. □

5.10 Blatt 10

Aufgabe 208. Bestimmen Sie alle Isomorphietypen für Gruppen der Ordnung $45 = 3^2 \cdot 5$.

Beweis. Wir betrachten die Zahl der 3- bzw. 5-Sylowgruppen n_3 bzw. n_5. Es gilt

$$\begin{aligned} n_3 \equiv& 1 \pmod 3 \\ n_3|&5 \\ n_5 \equiv& 1 \pmod 5 \\ n_5|&9 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist $n_3 = 1$ und $n_5 = 1$. Da die Zahlen 1 sind, sind die Untergruppen normal. Sei A die 3-Sylowgruppe und B die 5-Sylowgruppe. Die Gruppen müssen sich trivial schneiden, weil die Ordnung alle Elemente darin ein Teiler von der Gruppenordnung sein müssen.

Da $9 \times 5 = 45$, ist $|AB| = 45$, also AB ist einfach die ganze Gruppe. Da $n_3 = n_5 = 1$, sind die Untergruppen normal. Es folgt daraus, dass die ganze Gruppe (isomorph zu) $A \times B$ ist.

Also ist jetzt die Frage: Wie viele Gruppen der Ordnung 5 und 9 gibt es?

Es gibt nur eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Gruppe der Ordnung 5, weil 5 eine Primzahl ist, also es enthält ein Element der Ordnung 5, was ein Erzeuger ist. Daher ist die Gruppe C_5.

Wir wissen aus der vorherigen Übungsblatt, dass eine Gruppe der Ordnung 3^2 abelsch ist. Dann ist eine Gruppe der Ordnung 9 ein direktes Produkt von zyklische Gruppen von Primpotenzordnung. Die einzige Möglichkeit ist $C_3 \times C_3$. Natürlich ist C_9 auch eine Gruppe der Ordnung 9.

Insgesamt gibt es nur zwei Gruppen der Ordnung 45: $C_5 \times C_9$ und $C_5 \times C_3 \times C_3$. □

Aufgabe 209. Seien N und U zwei Gruppen. Zeigen Sie: Genau dann gilt $N \rtimes_\phi U = N \times U$, wenn $\phi_u = \mathrm{id}_N$ für alle $u \in U$ gilt.

Beweis. Die beide Gruppen sind auf der Menge $N \times U$ (kartesisches Produkt von Mengen) definiert. Jetzt die Rückrichtung: Falls $\phi_u = \mathrm{id}_N$ für alle N gilt, ist das Produkt

$$(n_1, u_1) \circ (n_2, n_2) = (n_1 \phi_{u_1}(n_2), u_1 u_2) = (n_1 n_2, u_1 u_2)$$

für alle $n_1, n_2 \in N, u_1, u_2 \in U$. Dann bekommen wir per Definition das direktes Produkt.

Sei jetzt $N \rtimes_\phi U = N \times U$. Dann stimmen alle Produkte überein. Sei $u_1, u_2 \in U$ und $n_1, n_2 \in N$. Es gilt

$$(n_1 \phi_{u_1}(n_2), u_1 u_2) = (n_1 n_2, u_1 u_2)$$

insbesondere

$$n_1 \phi_{u_1}(n_2) = n_1 n_2.$$

Aus der Kurzungsregel folgt

$$\phi_{u_1}(n_2) = n_2.$$

Da u_1, u_2, n_1, n_2 beliebig waren, muss dies für alle u_1, n_2 gelten, also $\phi_{u_1} = \mathrm{id}_N$ für alle $u_1 \in U$. □

Aufgabe 210. Von einer Gruppe G seien bekannt:

(1) Sie habe Ordnung $p^2 \cdot q^2$ mit zwei verschiedenen Primzahlen $p, q \in \mathbb{P}$.

(2) Die q-Sylowgruppe Q von G sei normal.

(3) p sei kein Teiler von $|\mathrm{Aut}(Q)|$.

Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(Hinweis: Denken Sie an semidirekte Produkte. Verwenden Sie an geeigneter Stelle Übung 209.)

Beweis. Sei die p-Sylowgruppe bzw. q-Sylowgruppe von G P bzw. Q. Weil p und q teilerfremd sind, schneiden die Sylowgruppen trivial. Daher gilt $|P||Q| = |G|$, also $G = PQ$. Da Q normal ist, ist $G \cong Q \rtimes P$.

Als quadratische Primordnung sind sowohl Q als auch P abelsch. Falls wir zeigen könnten, dass $G \cong Q \times P$, wären wir dann fertig.

Aus 209 und Transitivität ist es zu zeigen

$$Q \rtimes P \cong Q \times P \iff k_u(v) = v \ \forall u \in P, v \in Q,$$

wobei wir hier mit $k_u(\cdot)$ die Konjugation $k_u(p) = upu^{-1}$ bezeichnen. Dies induziert den Homomorphismus $\varphi : P \to \mathrm{Aut}(Q)$. Das Bild $\varphi(P)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(Q)$, deren Ordnung auch ein Teiler von $|P|$ wegen $\varphi(P) \cong P/\mathrm{ker}\varphi$ ist.

Die Teiler von $|P|$ sind $1, p$ und p^2. Aber p teilt $|\mathrm{Aut}(Q)|$ nicht. Daher teilt p^2 $|\mathrm{Aut}(Q)|$ auch nicht. Dann muss $|\varphi(P)| = 1$, also $\varphi(P) = \{e\}$. Dann ist $k_u = \mathrm{id}_Q$ für alle $u \in P$, also

$$G \cong Q \rtimes P = Q \times P.$$

Die Behauptung folgt. □

Aufgabe 211. (a) Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 100 ein Element der Ordnung 10 enthält

(b) Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt (vgl. auch Bemerkung 2.29 im Skript).

Beweis. (a) Als abelsche Gruppe ist die Gruppe isomorph zu ein Produkt zyklische Gruppen von Primpotenzordnung. Da $100 = 5^2 \cdot 2^2$, sind die möglichen Gruppen

$$\begin{aligned} &C_{5^2} \times C_{2^2} \\ &C_5 \times C_5 \times C_{2^2} \\ &C_{5^2} \times C_2 \times C_2 \\ &C_5 \times C_5 \times C_2 \times C_2 \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass alle diese Gruppen ein Element der Ordnung 10 enthalten.

(1) $C_{5^2} \times C_{2^2}$:
Da 25 und 4 teilerfremd sind, ist $C_{5^2} \times C_{2^2} \cong C_{100}$. Da 10 ein Teiler von 100 ist, und die zyklische Gruppe C_{100} für jede Teiler t von 100 eine zyklische Untergruppe der Ordnung t besitzt, gibt es ein Element der Ordnung 10.

(2) $C_5 \times C_5 \times C_{2^2}$:
Wir ziehen C_5 und C_4 zusammen, weil 5 und 4 teilerfremd sind. Also $C_5 \times C_4 \cong C_{20}$, was auch ein Element der Ordnung 10 besitzt, weil 10 ein Teiler von 20 ist. Sei das Element g. Dann ist

$$(e, g) \in C_5 \times C_{20}$$

ein Element der Ordnung 10.

(3) Es gilt

$$C_{5^2} \times C_2 \times C_2 \cong C_{50} \times C_2$$

da 25 und 2 teilerfremd sind. Ähnlich gibt es $g \in C_{50}$ der Ordnung 10. Dann ist

$$(g, e) \in C_{50} \times C_2$$

ein Element der Ordnung 10.

(4) Gleich ist

$$C_5 \times C_5 \times C_2 \times C_2 = C_5 \times C_{10} \times C_2.$$

Sei g ein Erzeuger von C_{10}. Dann ist

$$(e, g, e') \in C_5 \times C_{10} \times C_2$$

ein Element der Ordnung 10.

(b) $|A_4| = 4!/2 = 12 = 3 \times 2^2$.

Da $6 = 12/2$, wäre eine Untergruppe der Ordnung 6 ein Normalteiler. Wir bezeichnen diese mit H.

$$\begin{array}{l} e \\ \left.\begin{array}{l} (12)(34) \\ (13)(24) \\ (14)(23) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Produkt von disjunkte} \\ \text{Transpositionen}\end{array} \\ \text{3-Zykeln (genau 8)} \end{array}$$

Das Ziel ist: Alle 3-Zykeln sind in H enthalten. Bemerkung (oder Errinerung): 3-Zykeln haben alle die Ordnung 3. Sei ein beliebiges 3-Zyklus x. Es gilt $(xH)^3 = x^3H = H$. Außerdem gilt in der Faktorgruppe G/H der Ordnung 2: $(xH)^2 = H$. Aus der Kurzungsregel folgt $xH = H$, also $x \in H$.

Dann hat H mehr als 8 Elemente, ein Widerspruch. □

5.11 Blatt 11

Aufgabe 212. Seien p, q zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Primzahlen und G eine Gruppe der Ordnung pq. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Beweis. Sei $p = q$. Dann ist G eine Gruppe der Ordnung p^2. Wir wissen, dass solche Gruppen abelsch ist, also $G' = \{e\}$ und G ist auflösbar.

Sei jetzt $p \neq q$. ObdA nehmen wir an, $p > q$. Nach den Sylowsätze gibt es Untergruppen der Ordnung p, für deren Anzahl n_p gilt:

$$\begin{aligned} n_p \equiv & 1 \pmod p \\ n_p & | q \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $n_p = 1, p+1, \ldots$. Da $n_p | q$, ist die einzige Möglichkeit 1. Sei P die Untergruppe der Ordnung p. Als Gruppe einer Primzahlordnung ist P zyklisch, insbesondere abelsch und daher auflösbar. Da $n_p = 1$, ist P ein Normalteiler und G/P ist wohldefiniert. $|G/P| = q$, also $|G/Q|$ ist zyklisch, abelsch und auflösbar.

Dann ist G auflösbar. □

Aufgabe 213. Zeigen Sie, dass jede Gruppe G der Ordnung 12 auflösbar ist.

Beweis. $12 = 3 \times 2^2$, also es gibt nach den Sylowsätze Gruppen der Ordnung 4 und 3 von Anzahl n_2 bzw. n_3. Aus den vorherigen Übungsblätter wissen wir, dass $n_2 = 1$ oder $n_3 = 1$ gilt.

1. $n_2 = 1$. Sei H die Untergruppe der Ordnung 4. Als Gruppe der Ordnung $4 = 2^2$ ist H abelsch und auflösbar. Weil $|G/H| = 3$, ist G/H zyklisch, abelsch und auflösbar. Da sowohl H als auch G/H auflösbar sind, und H ein Normalteiler ist, ist G auflösbar.

2. $n_3 = 1$. Sei H die Untergruppe der Ordnung 3. Als Gruppe von Primordnung ist H zyklisch, abelsch und auflösbar. Da $|G/H| = 4 = 2^2$, ist G/H abelsch und daher auflösbar. Da H normal ist und sowohl H als auch G/H auflösbar sind, ist G auflösbar. $\square$

Aufgabe 214. Sei R ein Ring, und seien $a, b \in R$. Es gelte $ab = 1$ und $ba \neq 1$. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $x^s = 0$ gibt. Ein Element $x \in R$ heißt idempotent, falls $x^2 = x$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass das Element $1 - ba$ idempotent ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Element $b^n(1 - ba)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ nilpotent ist.

(c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele nilpotente Elemente in R gibt.

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
(1 - ba)^2 =& (1 - ba)(1 - ba) \\
=& 1 - ba - ba + (-ba)(-ba) && \text{Distributivgesetz} \\
=& 1 - 2(ba) + baba && \text{Lemma 3.1} \\
=& 1 - 2(ba) + b(ab)a \\
=& 1 - 2ba + ba \\
=& 1 - ba
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
[b^n(1 - ba)b^n(1 - ba)] =& b^n(b^n - bab^n)(1 - ba) \\
=& b^n(b^n - b\cancel{ab}^{\,1}b^{n-1})(1 - ba) \\
=& b^n(b^n - b^n)(1 - ba) \\
=& b^n 0 (1 - ba) \\
=& 0
\end{aligned}$$

(c) Falls wir zeigen könnten, dass $b^n(1 - ba)$ für unterschiedliche n unterschiedlich sind, wäre wir schon fertig.

Wir betrachten $b^{n_1}(1 - ba)$ und $b^{n_2}(1 - ba)$ mit $n_2 > n_1$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Wir nehmen dann an, dass $b^{n_1}(1 - ba) = b^{n_2}(1 - ba)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
b^{n_1}(1 - ba) =& b^{n_2}(1 - ba) \\
a^{n_1}b^{n_1}(1 - ba) =& a^{n_1}b^{n_2}(1 - ba) \\
(1 - ba) =& b^{n_2 - n_1}(1 - ba)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(1-ba)]^2 &= \left[b^{n_2-n_1}(1-ba)\right]^2 \\ \underbrace{(1-ba)}_{\text{(a)}} &= 0 \text{ (b)}\end{aligned}$$

ein Widerspruch, weil $ba \neq 1$ und daher $1 - ba \neq 0$. □

Aufgabe 215. (a) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) Für alle $r, s \in R$ gilt $(r+s)^4 = r^4 + s^4$.

(2) In R gilt $2 = 0$.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring an, der den Bedingungen aus (a) genügt, aber kein Körper ist.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}(r+s)^2 =&(r+s)(r+s)\\ =&r^2 + sr + rs + s^2\\ (r+s)^4 =&(r+s)^2(r+s)^2\\ =&(r^2 + sr + rs + s^2)(r^2 + sr + rs + s^2)\\ =&r^4 + r^2sr + r^3s + r^2s^2\\ &+ sr^3 + srsr + srrs + srs^2\\ &+ rsr^2 + rssr + rsrs + rs^3\\ &+ s^2r^2 + s^3r + s^2rs + s^4\\ =&r^4 + r^3s + r^3s + r^2s^2\\ &+ sr^3 + s^2r^2 + s^2r^2 + s^3r\\ &+ r^3s + r^2s^2 + r^2s^2 + rs^3\\ &+ s^2r^2 + s^3r + s^3r + s^4 \qquad \text{Kommutativgesetz}\\ =&r^4 + 4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 + s^4\end{aligned}$$

Die Behauptung $(s+r)^4 = r^4 + s^4$ ist dann äquivalent zu

$$4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 = 0 \ \forall s, r \in R.$$

Die Rückrichtung ist jetzt klar: Falls $2 = 0$, ist

$$2r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^2 = \overset{0}{\cancel{2}}(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 0.$$

Die andere Richtung: Wir nehmen an, dass

$$2(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 0 \ \forall r, s \in R.$$

Insbesondere betrachten wir $r = -1$ und $s = 1$. Dann ist $r^3 = 1$ und $r^2 = 1$. Alle Potenzen von s sind 1. Es gilt

$$2(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 2(-1) = 0.$$

Aber $-1 \neq 0$, also $2 = 0$.

(b) Wir konstruieren die "kompleze Zahlen" auf der Menge $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, also wenn $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ definieren wir

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) :=& (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\\ (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) =& (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)\end{aligned}$$

Als Eigenschaft der komplexen Zahlen haben wir das neutrale Element $(\overline{1}, \overline{0})$ bzgl. Multiplikation und $(\overline{0}, \overline{0})$ bzgl. Addition. Kommutativität folgt auch aus der entsprechenden Eigenschaft der komplexen Zahlen. Es gilt $2 = 0$, weil $(\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{0}) = (\overline{2}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{0})$. Es ist aber kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist. Es gilt

$$(\overline{1}, \overline{1}) \times (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{2}, \overline{2}) = (\overline{0}, \overline{0}).$$ □

5.12 Blatt 12

Aufgabe 216. Sei $R := K^{n \times n}$ der Ring der $n \times n$-Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie, dass $\{0\}$ und R die einzigen Ideale von R sind, vgl. Bemerkung 3.13.

Beweis. Sei $I \neq \{0\}$ ein Ideal von R. Wir nehmen an, dass $m \in I$ gibt mit m invertierbar. Dann ist $m^{-1} \in R$ und $1 = mm^{-1} \in I$. Sei jetzt $m \in R$ beliebig. Da $1 \in I$, ist $1m = m \in I$, also $I = R$.

Deswegen nehmen wir an, dass I nur nichtinvertierbare Elemente enthält.Sei $m \in I$. Aus dem Spektralsatz bzw. Jordannormalform haben wir eine Zerlegung $m = m_d + m_n$ mit $[m_d, m_n] = 0$, m_d diagonalisierbar und m_n nilpotent. Da $m^n = m_d + m_n \in I$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, enthält I ein diagonalisierbares Element.

Wir diagonalisieren das Element, also I enthält ein diagonales Element, z.B. $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in I$. Wir wissen, dass Zeilenumformungen durch Matrixmulplikationen dargestellt werden kann. Durch diese Zeilenumformungen erhalten wir für jedes Diagonalelement zumindest ein Element, das keine Nullstelle in diesem Eintrag besitzt.

Wir additieren alle solche Elemente und erhalten daher eine diagonale Matrix, mit alle diagonale Elemente ungleich Null. Dies ist invertierbar, und die Behauptung folgt. □

Aufgabe 217. Seien R ein kommutativer Ring und $g \in R[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}^*$. Sei $I := gR \trianglelefteq R[X]$ das von g erzeugte Ideal von $R[X]$. Zeigen Sie:

(a) Jedes ELement des Faktorrings $R[X]/I$ lässt sich in der Form

$$r_0 + r_1 X + \dots, + r_{n-1} X^{n-1} + I \qquad \text{mit gewissen} r_i \in R$$

darstellen. Es gilt also $R[X]/I = \{r_0 + r_1 X + \dots + r_{n-1} X^{n-1} | r_0, \dots, r_{n-1} \in R\}$.

(b) Die Elemente $\sum_{i=0}^{n-1} r_i X^i + I$ aus der Menge in Teil (a) sind paarweise verschieden, d.h. für beliebige $r_0, \ldots, r_{n-1}, s_0, \ldots, s_{n-1}$ gilt

$$(r_0, \ldots, r_{n-1}) \neq (s_0, \ldots, s_{n-1}) \implies \sum_{i=0}^{n-1} r_i X^i + I \neq \sum_{i=0}^{n-1} s_i X^i + I.$$

Aufgabe 218. Zur Abkürzung schreiben wir $\mathbb{Z}_n$ für den Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die vier Ringe

$$R_1 := \mathbb{Z}_4,\ R_2 := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ R_3 := \mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X],\ R_4 := \mathbb{Z}_2[X]/(X^2+X+1)\mathbb{Z}_2[X]$$

paarweise nicht isomorph sind.

Aufgabe 219. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, falls $a^n = 0$ für ein $n \geq 1$ gilt.

(a) Begründen Sie, warum Null in einem Körper das einzige nilpotente Element ist.

(b) Zeigen Sie, dass das *Nullradikal* $N := \{a \in R | a \text{ ist nilpotent}\}$ ein Ideal ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Nilradikal in jedem Primideal P von R enthalten ist.

Beweis. (a) Sei K ein Körper mit $K \ni a \neq 0$. Da $K \backslash \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen sein sollte, wäre $a^k \in K \backslash \{0\}$, also $a^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$

(b) N ist eine additive Untergruppe:

(i) 0 ist nilpotent (siehe oben)

(ii) Sei a nilpotent mit $a^n = 0$. Es gilt dann $(-a)^n = (-1)^n a^n = (-1)^n 0 = 0$.

(iii) Sei a, b nilpotent mit $a^n = b^m = 0$. Da R kommutativ ist, dürfen wir den Binomialsatz verwenden. Wir betrachten

$$(a+b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+m-k}.$$

Falls $k \geq n$ wäre, gälte dann $a^k = 0$ und $a^k b^{n+m-k} = 0$. Falls $k \leq n$ wäre, gälte $n + m - k \geq m$ und $b^{n+m-k} = 0$, daher $a^k b^{n+m-k} = 0$. Dann ist $(a+b)^{n+m} = 0$, und $a + b$ ist nilpotent.

Sei jetzt $a \in N, b \in R$ mit $a^n = 0$. Es gilt $(ab)^n = a^n b^n = 0 b^n = 0$.

(c) Sei P ein Ideal von R mit $N \not\subseteq P$. Wir zeigen, dass $P + N \supseteq P \cup N$ ein Ideal ist, also P ist nicht maximal.

Die additive Eigenschaften folgen, da sowohl P als auch N Untergruppen sind. Da die additive Gruppe abelsch ist, ist $P+N = N+P$, also $P + N$ ist eine abelsche Untergruppe der additive Gruppe.

Sei jetzt $p \in P, a \in N, r \in R$, also $p + a \in P + N$. Da sowohl P als auch N Ideale sind, ist

$$r(p + a) = \underbrace{rp}_{\in P} + \underbrace{ra}_{\in N} \in P + N.$$

$P + N$ ist also ein Ideal. Da $N \not\subseteq P$, ist $P \subsetneq P + N$, also P ist nicht maximal. $\square$

CHAPTER SIX

Theoretische Mechanik

6.1 Blatt 1

Aufgabe 220. Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in einer Dimension, d. h. das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} =& F(x(t)) = -kx(t) \\ x(t_0) =& x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =& v_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, daß wenn eine komplexwertige Funktion $z : I \to \mathbb{C}$ mit $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ die Differentialgleichung (1a) löst, ihr Realteil $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ zur Lösung des reellen Anfangswertproblems (1) benutzt werden kann.

2. Was ist die allgemeinste Form der rechten Seite der Differentialgleichung (1a), für die der Realteil einer komplexen Lösung selbst eine Lösung ist? Geben Sie Gegenbeispiele an.

3. Machen Sie den üblichen Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten…

Beweis. 1. Sei $x(t) = x_r(t) + ix_i(t), x_r, x_i : I \to \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t^2} + i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\right) = -k(x_r + ix_i).$$

Weil das eine Gleichung von zwei komplexe Zahlen ist, gilt auch

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t^2} = -kx_r.$$

2. Das passt für alle reelle lineare Kombinationen der Ableitungen von $x(t)$.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i x}{\mathrm{d}t^i} = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Gegenbeispiele

(i) Irgendeine $a_i \notin \mathbb{R}$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -ikx(t), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Hier ist es klar, dass *keine* Abbildung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung sein kann, weil die linke Seite reelle wird, aber die rechte Seite nicht reelle wird.

Daraus folgt: Das Realteil der Lösung ist kein Lösung.

(ii) Nichtlineare Gleichung, z.B.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

3.

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 \alpha e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} m\cancel{\alpha}\lambda^2\cancel{e^{\lambda t}} &= -k\cancel{\alpha}\cancel{e^{\lambda t}} \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\ \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} &= \pm i\omega \qquad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Daraus folgt, für $z_1(t)$:

$$\begin{aligned} z_1(0) =& \alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = x_0 \\ z_1'(0) =& -i\omega\alpha_{1,+} + i\omega\alpha_{1,-} = v_0 \\ & -\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = -\frac{iv_0}{\omega} \\ 2\alpha_{1,-} =& x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \\ 2\alpha_{1,+} =& x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \\ z_1(t) =& \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t} + \left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{i\omega t}\right] \end{aligned}$$

Daraus folgt die andere Formen der Lösungen:

(i) $x_2(t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(x_0+\frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t}+\left(x_0-\frac{iv_0}{\omega}\right)e^{i\omega t}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\left(x_0+\frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\left(x_0+\frac{iv_0}{\omega}\right)(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t))\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+i(\dots)\right]\\
&=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t
\end{aligned}$$

(ii) $x_3(t)$ (R-Formula)

$$\begin{aligned}
x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t&=\alpha_3\sin(\omega t+\delta_3)\\
\alpha_3&=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\\
\delta_3&=\arctan\frac{v_0}{x_0\omega}
\end{aligned}$$

(iii) $x_4(t)$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_4=\alpha_3 \qquad \delta_4=\delta_3+\frac{\pi}{2}.$$

□

Aufgabe 221. Betrachten Sie den gedämpften und getriebenen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F(x(t),\dot{x}(t),t)&=-kx(t)-2m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_{ext}(t)\\
x(0)&=x_0\in\mathbb{R}\\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=v_0\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

1. Lösen sie das Anfangswertproblem zunächst für verschwindende äußere Kraft $F_{ext}\equiv 0$. Machen Sie dazu wieder den üblichen Exponentialansatz
$$x(t)=\alpha e^{\lambda t}$$
und behandeln Sie auch den Fall $\gamma^2=k/m$

2. Lösen sie das Anfangswertproblem für eine harmonische äußere Kraft $F_{ext}(t)=F_0 sin(\omega_0 t)$ indem Sie zur soeben gefundenen Lösung der

homogenen Differentialgleichung noch eine Partikularlösung mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite "$x(t) = Asin(\omega_0 t) + Bcos(\omega_0 t)$" addieren. Auch hier empfiehlt es sich, Kraft und Ansatz zu komplexifizieren:

$$
\begin{aligned}
F_{ext}(t) =& F_0 \sin(\omega_0 t) \to F_0 e^{-i\omega_0 t} \\
x(t) =& A \sin(\omega_0 t) \to A e^{-i\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

3. Zeigen Sie anhand der Lösungen, daß die Energie

$$E(t) = \frac{m}{2} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{k}{2} x^2(t)$$

für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ und äußere Kraft $F_{ext} \equiv 0$ erhalten ist und diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit von $E(t)$ als Funktion von γ im allgemeinen Fall. Berücksichtigen Sie insbesondere eine harmonische äußere Kraft $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$.

Beweis. 1.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\
\dot{x}(t) &= \alpha \lambda e^{\lambda t} \\
\ddot{x}(t) &= \alpha \lambda^2 e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
m\lambda^2 \cancel{\alpha e^{\lambda t}} =& - k \cancel{\alpha e^{\lambda t}} - 2m\gamma\lambda \cancel{\alpha e^{\lambda t}} \\
0 =& m\lambda^2 + 2m\gamma\lambda + k \\
\lambda =& - \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

Falls $\gamma^2 \neq \frac{k}{m}$:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[A e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right],$$

$$
\begin{aligned}
x'(t) =& - \gamma e^{-\gamma t} \left[A e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right] \\
&+ e^{-\gamma t} \left[A \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} - B \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right]
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
x(0) &= A + B = x_0 \\
x'(0) &= \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} (A - B) = v_0
\end{aligned}
$$

$$2A = x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}}$$
$$2B = x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}}$$

Es ist zu beachten, dass es möglich ist, dass $\gamma^2 < \frac{k}{m}$. In diesem Fall ist $\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}$, aber der Form der Lösung bleibt.

Für $\gamma^2 = \frac{k}{m}$ ist die Lösung

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}.$$

Es gilt

$$x'(t) = -\gamma Ae^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} - Bt\gamma e^{-\gamma t}.$$

Dann

$$\begin{aligned} x(0) =& A = x_0 \\ x'(0) =& -\gamma A + B = v_0 \\ B =& v_0 + \gamma x_0 \\ x(t) =& x_0 e^{-\gamma t} + (v_0 + \gamma x_0) t e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

2. Wir suchen eine Partikularlösung für die Gleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F_0 e^{-i\omega_0 t}$$

mit dem Form

$$x(t) = Ae^{-i\omega_0 t}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x'(t) =& -i\omega_0 Ae^{-i\omega_0 t} \\ x''(t) =& -\omega_0^2 Ae^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Dann ist

$$-\omega_0^2 Ame^{-i\omega_0 t} - 2m\gamma i\omega_0 Ae^{-i\omega_0 t} + Ake^{-i\omega_0 t} = F_0 e^{-i\omega_0 t},$$

$$A = \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k}.$$

3. für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ und äußere Kraft $F_{\text{ext}} \equiv 0$ ist die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Wir berechnen

$$\dot{x} = -x_0\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 =& \frac{m}{2}\left(-x_0\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t\right)^2 \\
=& \frac{m}{2}\left(x_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t - 2x_0 v_0 \omega \sin \omega t \cos \omega t + v_0^2 \cos^2 \omega t\right) \\
=& \cancelto{k/2}{\frac{m}{2\omega^2}}\left(x_0^2 \sin^2 \omega t - \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t\right) \\
=& \frac{k}{2}\left(x_0^2(1-\cos^2 \omega t) - \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2}\left(1 - \sin^2 \omega t\right)\right)
\end{aligned}$$

Aus

$$\frac{k}{2}x(t)^2 = \frac{k}{2}\left(x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t\right)$$

folgt

$$\begin{aligned}
E(t) =& \frac{k}{2}\left(x_0^2(1-\cos^2 \omega t) - \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2}\left(1 - \sin^2 \omega t\right)\right) \\
&+ \frac{k}{2}\left(x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t\right) \\
=& \frac{k}{2}x_0^2 + \frac{kv_0^2}{2\omega^2},
\end{aligned}$$

was nicht abhängig von t ist.

Wir untersuchen jetzt die Energie für eine harmonische äußere Kraft. Wenn die Dämpfung $\neq 0$ ist, ist

$$\lim_{t\to\infty}\left(x_h(t) + x_p(t)\right) = \lim_{t\to\infty} x_p(t).$$

Daher muss man nur die Energie der Partikularlösung berechnen:

$$\begin{aligned}
x(t) =& \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t} \\
\dot{x}(t) =& -\frac{iF_0\omega_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Wenn $\gamma = 0$, kann $x(t) \to \infty$, wenn

$$-m\omega_0^2 + k = 0 \qquad \text{(Resonanz)}.$$

Das bedeutet $E(t) \to \infty$ auch.

$\square$

6.2 Blatt 2

Aufgabe 222. Betrachten Sie die folgenden Familien von Kraftfeldern auf geeigneten Definitionsbereichen $D_\eta^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} F_\eta^{(1)} &: D_\eta^{(1)} \ni \vec{\mathbf{x}} \to r^\eta \cdot \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \\ F_\eta^{(2)} &: D_\eta^{(2)} \ni \vec{\mathbf{x}} \to r_{12}^\eta \cdot (x_1\vec{\mathbf{e}}_1 - x_2\vec{\mathbf{e}}_2) \in \mathbb{R}^3 \\ F_\eta^{(3)} &: D_\eta^{(3)} \ni \vec{\mathbf{x}} \to r_{12}^\eta \cdot (x_2\vec{\mathbf{e}}_1 - x_1\vec{\mathbf{e}}_2) \in \mathbb{R}^3 \\ F_\eta^{(4)} &: D_\eta^{(3)} \ni \vec{\mathbf{x}} \to r_{12}^\eta \cdot (x_2\vec{\mathbf{e}}_1 + x_1\vec{\mathbf{e}}_2) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Eigentlich ist $\vec{\mathbf{x}}$ als $\vec{\mathbf{x}} = (x, y, z)^T$ definiert. Deswegen sind alle meine Antworten nicht die erwartete Antwort.

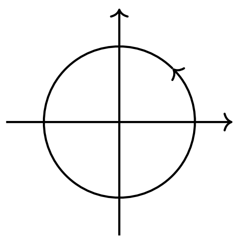
wobei $r_{12} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$ Skizzieren Sie die Felder $\vec{\mathbf{F}}_\eta^{(n)}$ als Vektorpfeile in der von den Einheitsvektoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ und $\vec{\mathbf{e}}_2$ aufgespannten Ebene (hier genügt es, zwischen den Fällen $\eta > -1, \eta = -1$ und $\eta < -1$ zu unterscheiden).

Bestimmen Sie, abhängig von der Potenz $\eta \in \mathbb{R}$,

1. den maximalen Definitionsbereich $D_\eta^{(n)}$,
2. die maximale Bereiche $C_\eta^{(n)} \subseteq D_\eta^{(n)}$, auf denen $F_\eta^{(n)}$ konservativ ist,
3. eine Potentialfunktion $V_\eta^{(n)} : C_\eta^{(n)} \to \mathbb{R}$ mit $F_\eta^{(n)} = -\boldsymbol{\nabla} V_\eta^{(n)}$, sofern sie existiert,
4. das Kurvenintegral

$$I_\eta^{(n)}(R) = \int_{\gamma_R} \mathrm{d}\vec{\xi} \cdot \vec{\mathbf{F}}_\eta^{(n)}(\vec{\xi})$$

über den gegen den Uhrzeigersinn umlaufenen Kreis γ_R mit Radius R und Mittelpunkt $\vec{\mathbf{0}}$ in der von $\vec{\mathbf{e}}_1$ und $\vec{\mathbf{e}}_2$ aufgespannten Ebene



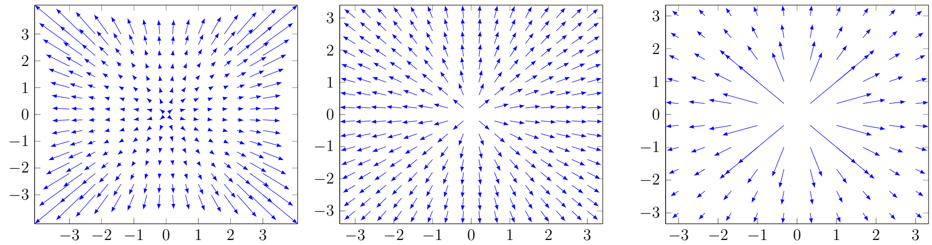
Beweis. 1. Maximalen Definitionsbereich (für alle $\vec{\mathbf{F}}_\eta^{(n)}$): Wenn $\eta \leq -1, \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, sonst $\mathbb{R}^3$.

2. maximale Bereiche, auf denen $\vec{\mathbf{F}}_\eta^{(n)}$ konservativ ist. $n = \ldots$

   (1) Falls $\eta = 0, D_\eta^{(1)}$, sonst $z = 0$

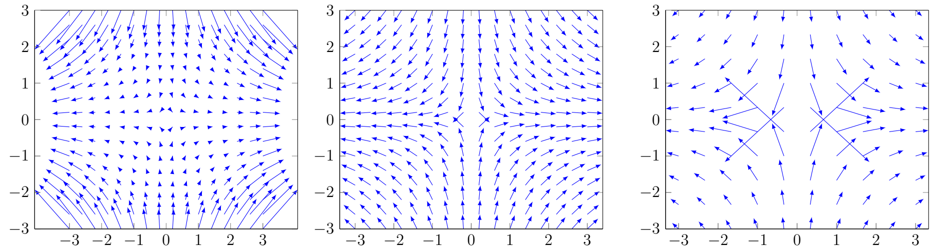
   Erwartete Antwort ist einfach $D_\eta^{(1)}$.

   (2) Falls $\eta = 0, D_\eta^{(2)}$, sonst $\varnothing$



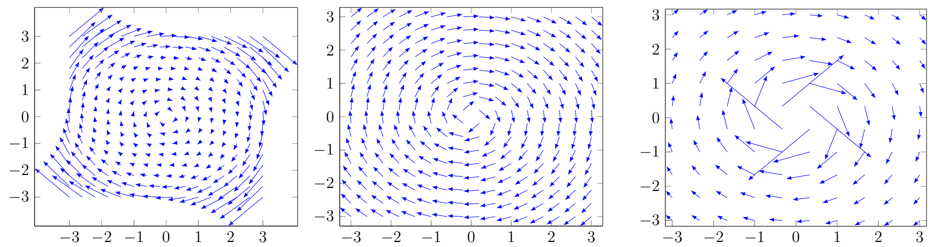
(a) $\eta > -1$ **(b)** $\eta = -1$ **(c)** $\eta < -1$

Figure 6.1: Vektorpfeile für $\vec{\mathbf{F}}_\eta^{(1)}$



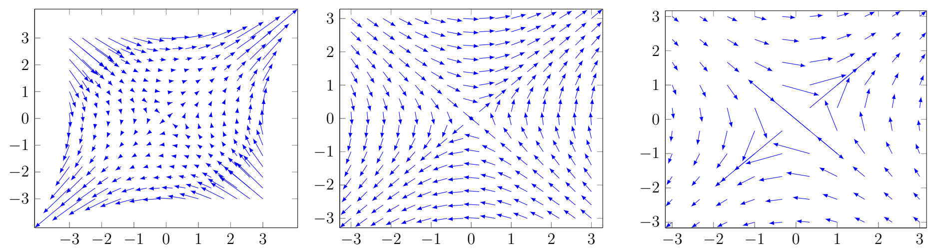
(a) $\eta > -1$ **(b)** $\eta = -1$ **(c)** $\eta < -1$

Figure 6.2: Vektorpfeile für $\vec{\mathbf{F}}_\eta^{(2)}$



(a) $\eta > -1$ **(b)** $\eta = -1$ **(c)** $\eta < -1$

Figure 6.3: Vektorpfeile für $\vec{\mathbf{F}}_\eta^{(3)}$



(a) $\eta > -1$ **(b)** $\eta = -1$ **(c)** $\eta < -1$

Figure 6.4: Vektorpfeile für $\vec{\mathbf{F}}_\eta^{(4}$

(3) Falls $\eta = -2, D_\eta^{(3)}$, sonst $\varnothing$.

(4) Falls $\eta = 0, D_\eta^{(4)}$, sonst $\varnothing$.

3. Potentialfunktion, für $n = \dots$

(1) Auf $z = 0$ Ebene:

$\eta = -2$: $V = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, sonst $V = -\frac{1}{\eta+2}r^{\eta+2}$

Wenn $n = 0$ kann eine Potentialfunktion für alle $\vec{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3$ definiert werden: $V(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

Die erwartete Antwort ist einfach $V = -\frac{1}{\eta+2}r^{\eta+2}$

(2) Nur für $\eta = 0$, $V = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$.

(3) Für $\eta = -2$, $V = -\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$.

In zylindrische Koordinaten ist es $V = -\varphi$

(4) Für $\eta = 0$, $V = -xy$.

4. Kurvenintegral, für $n = \ldots$

(1) Weil $\boldsymbol{\nabla} \times F_\eta^{(1)} = 0$ auf die $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ Ebene, ist das Kurvenintegral stets 0.

(2) Gleich für $\eta = 0$. Sonst sei $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \sin\theta$, $\mathrm{d}x_1 = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}x_2 = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_1\,\mathrm{d}x_1 - x_2\,\mathrm{d}x_2 =& R^\eta \int_0^{2\pi} (-\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) \\ =& R^\eta \int_0^{2\pi} (-2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ =& 0 \end{aligned}$$

(3) Sei $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \sin\theta$, $\mathrm{d}x_1 = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}x_2 = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_2\,\mathrm{d}x_1 - x_1\,\mathrm{d}x_2 =& R^\eta \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta - \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \\ =& -R^\eta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ =& -2\pi R^\eta \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass es für $\eta = -2$ ungleich 0 ist, weil $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}_\eta^{(3)}$ auf $(0,0)$ nicht definiert ist.

(4) Für $\eta = 0$ ist die Kurvenintegral stets 0. Sonst sei $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \sin\theta$, $\mathrm{d}x_1 = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}x_2 = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ und

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_2\,\mathrm{d}x_1 + x_1\,\mathrm{d}x_2 =& R^\eta \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ =& R^\eta \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ =& 0 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 223. Zwischen zwei Kreisringen mit Radius R, die bei $x = -x_0$ und $x = x_0$ zentriert in der yz-Ebene liegen, sei eine Seifenhaut gespannt (s. Skizze). Aufgrund der Oberflächenspannung wird sich die Seifenhaut so ausbilden, dass die entsprechende Oberfläche minimal ist.

1. Das gesamte Problem ist rotationssymmetrisch um die x-Achse. Zeigen Sie, dass die Fläche der Rotationsfigur um die x-Achse für die Funktion $y : [-x_0, x_0] \to \mathbb{R}$ zwischen den Kreisringen durch

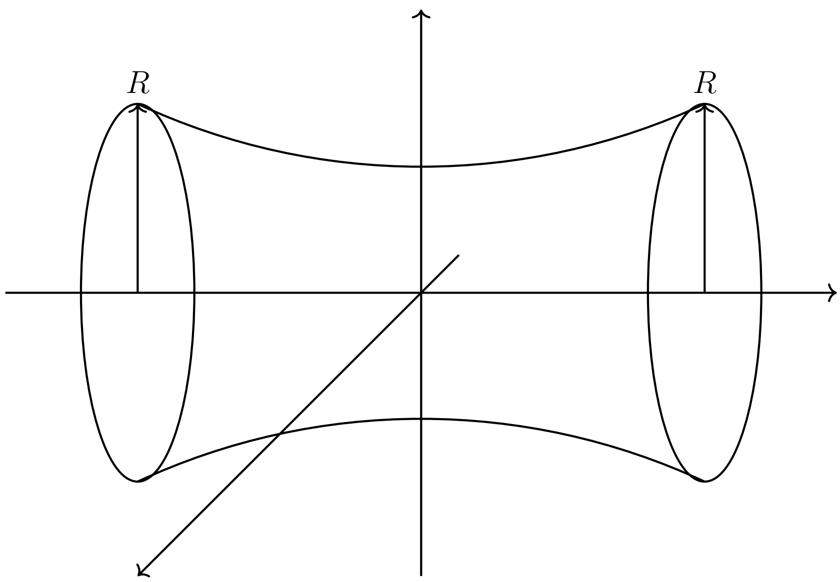
$$F(y) = \int_{-x_0}^{x_0} 2\pi y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

mit $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ gegeben ist.

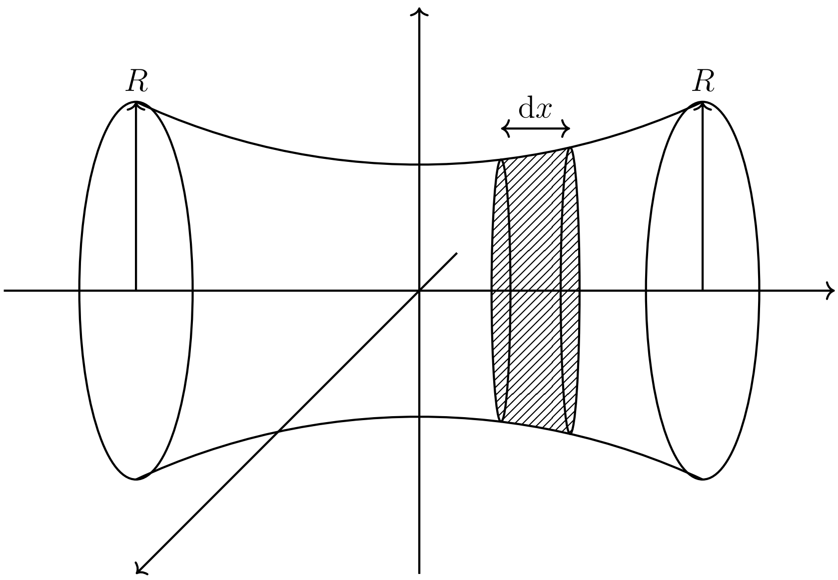
2. Benutzen Sie nun die in der Vorlesung kennengelernte Methode der Variationsrechnung, um die Minimalfläche zu finden, die von der Seifenhaut gebildet wird. Gesucht ist also die Funktion y, die $F(y)$ minimiert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Problem als

$$\frac{1}{y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

geschrieben werden kann.)



Beweis. 1.



$$\mathrm{d}V = 2\pi y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

2.

Satz 6.1. *Im Allgemein, für $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L\right) = 0.$$

Beweis. Erinnern Sie sich daran, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{6.1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L\right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\dot q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\ddot q - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\ddot q - \frac{\partial L}{\partial q}\dot q + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\dot q - \frac{\partial L}{\partial q}\dot q\\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)\dot q - \frac{\partial L}{\partial q}\dot q = 0\end{aligned}$$

□

Sei jetzt $L(y(x), y'(x), x) = y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}$. Es folgt $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y'}y' - L &= \left(\frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right)y' - y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\\ &= \left(\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) - \frac{y(1+y'^2)}{\sqrt{1+y'^2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Es gilt dann, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\alpha y &= \sqrt{1+y'^2} \\
\alpha^2 y^2 &= 1 + y'^2 \\
y' &= \pm\sqrt{\alpha^2 y^2 - 1} && + \text{ wenn } x > 0 \\
\int \mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\alpha^2 y^2 - 1}} \\
x &= \frac{1}{\alpha}\cosh^{-1}(\alpha y) - \beta \\
y &= \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha(x+\beta))
\end{aligned}$$

Die Randbedingungen ergeben:

$$\alpha R = \cosh(\alpha(x_0+\beta)) = \cosh(\alpha(-x_0+\beta))$$

Daraus folgt $\beta = 0$. Leider ist die Gleichung für α unlösbar. Die Lösung zu die Gleichung ist

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x) \\
\alpha R &= \cosh(\alpha x)
\end{aligned}$$

□

6.3 Blatt 3

Aufgabe 224. Die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen lautet:

$$\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t) + \omega^2 \vec{\mathbf{x}} = 0 \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Entwickeln Sie den Ortsvektor $x(t)$ und seine zeitlichen Ableitungen in der Polarkoordinatenbasis $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\phi\}$ und überzeugen Sie sich, dass die so aus (1) folgenden Differentialgleichungen den Bewegungsgleichungen entsprechen, die Sie wie in der Vorlesung mittels der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

direkt aus der Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $q_i = r, \phi$ erhalten.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \\
\dot{\vec{\mathbf{x}}} &= \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + r\dot{\phi}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \\
\ddot{\vec{\mathbf{x}}} &= \ddot{r}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} + r\dot{\phi}^2\begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Weil $(\cos\phi, \sin\phi)^T$ und $(\sin\phi, \cos\phi)^T$ linear unabhängig (sogar orthogonal) sind, kann die Gleichung $\ddot{\vec{\mathbf{x}}} + \omega^2\vec{\mathbf{x}}(t)$ als

$$\begin{aligned}
\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r &= 0 \\
2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} &= 0
\end{aligned}$$

Man schreibt auch direkt die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$\begin{aligned}
r: & m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + m\omega^2 r = 0 \\
& \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r = 0 \\
\phi: & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\phi}\right) = 0 \\
& 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = 0 \\
& 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 225. Eine Punktmasse m rotiere reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen gespannten Faden der Länge l ($l = r + s$) sei sie durch ein Loch in der Platte mit einer anderen Masse M verbunden (s. Skizze). Wie bewegt sich M unter dem Einfluss der Schwerkraft?

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen.

2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten s und φ auf und ermitteln Sie daraus die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \equiv C$ gilt.

3. Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2, um die φ-Abhängigkeit in der Differentialgleichung für s zu eliminieren. Betrachten Sie nun den Gleichgewichtsfall $s(t) = \text{const}$ und finden Sie einen Ausdruck für die resultierende Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t) = \text{const} \equiv \omega_0$ der Masse m. Ausgehend vom Gleichgewichtsfall, unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?

4. Diskutieren Sie das Ergebnis für die Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(t_0) = 0$.

Beweis. 1. $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 0$.

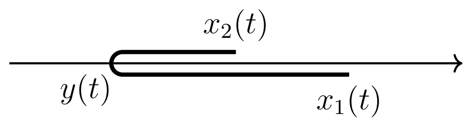
2.
$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + Mg(l - r).$$

Weil $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, gilt aus der Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$, also $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \equiv C$.

3. Weil $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \equiv C$, gilt

□

Aufgabe 226. Eine einmal gefaltete Schnur mit Gesamtlänge l und konstanter Masse pro Länge ρ bewegt sich auf der x-Achse. Die Endpunkte der Schnur seien mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet. Die Stelle, an der die Schnur gefaltet ist, sei mit $y(t)$ bezeichnet.



1. Geben Sie die Zwangsbedingungen des Systems an.

2. Geben Sie eine Langrangefunktion des Systems an.

   Betrachten Sie für die kinetische Energie T die Endpunkte x_1 und x_2, deren "Masse" durch die integrierte Masse des Schnurstücks zwischen x_1 und y bzw. x_2 und y gegeben ist.

3. Die Lagrangefunktion kann in den Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = x_1 - x_2 \text{ und } X = \frac{1}{2l}\left[(x_1 - y)(x_1 + y) + (x_2 - y)(x_2 + y)\right]$$

zu

$$L = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\xi}^2$$

umgeschrieben werden, wobei M und μ Funktionen von X und ξ sind. Bestimmen Sie M und μ durch den Vergleich der Lagrangefunktionen in Koordinaten (x_1, x_2) und (X, ξ).

Beweis. 1. $l = x_2(t) - y(t) + x_1(t) - y(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2y(t)$

2. Wir betrachten eine Koordinate $0 \leq \xi \leq l$, die ab x_1 anfängt und steigt monoton, bis die andere Seite. Die Position eine kleine Masselemente ist:

$$x(\xi) = y + |\xi - (x_2 - y)|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =& \dot{y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\xi - (x_2 - y)| \\ =& \dot{y} + \operatorname{sgn}(\xi - (x_2 - y)) \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \right)\end{aligned}$$

Wir integrieren die Geschwindigkeit, um die kinetische Energie zu bekommen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 \mathrm{d}\xi =& \frac{1}{2}\rho \left[\int_0^{x_2-y} (\dot{y} - (\dot{y} - \dot{x}_2))^2 \, \mathrm{d}\xi + \int_{x_2-y}^{l} (\dot{y} + (\dot{y} - \dot{x}_2))^2 \, \mathrm{d}\xi \right] \\ =& \frac{1}{2}\rho \left[(x_2 - y)\dot{x_2}^2 + (l - x_2 + y)(2\dot{y} - \dot{x}_2)^2 \right]\end{aligned}$$

□