Aufgabe 1 *Beispiele für Dichteoperatoren* **4 P.**

In einem 2- bzw. 3-dimensionalen Hilbertraum seien folgende Operatoren in Matrixdarstellung bzgl. einer beliebigen Orthonormal-Basis vorgegeben:

$$\hat\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \hat\rho_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\tanh(\beta t) \\ -\frac{1}{2}\tanh(\beta t) & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\hat\rho_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & i \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ -i & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \hat\rho_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Kann es sich um Dichteoperatoren handeln? Wenn ja, beschreiben diese einen reinen oder gemischten Zustand?

Alle haben $tr = 1$ ✓

$\hat\rho_1, \hat\rho_4$ sind selbstadjugiert ✓

Eigenwerte alle ≥ 0

In 2-dim sind alle Eigenwerte ≥ 0, wenn $\det \geq 0$

$\det(\hat\rho_1) = 0$ ✓

$\hat\rho_1$ ist Dichteoperator mit EW 1 und 0

reiner Operator

$\hat\rho_2$ ist nicht selbstadjugiert, also kein Dichteoperator

$\hat\rho_3$ ist nicht selbstadjugiert, also kein Dichteoperator

EW von $\hat\rho_4 = 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$

$\hat\rho_4$ ist Dichteoperator eines gemischten Zustands

Aufgabe 2 *Dichteoperator eines reinen und gemischten Zustands* **7 P.**

Betrachten Sie einen allgemeinen Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{N} p_n \, |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \,, \tag{1}$$

wobei die Zustände $|\psi_n\rangle$ eine Orthonormalbasis des N dimensionalen Hilbertraums bilden. Für einen gemischten Zustand gilt $0 \leq p_n < 1$, während für einen reinen Zustand $p_n = \delta_{in}$ für ein festes $i \in \{1, ..., N\}$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass für einen gemischten Zustand $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ gilt, indem Sie $\hat{\rho}^2$ explizit berechnen. Argumentieren Sie, dass die Bedingung, dass $\hat{\rho}$ rein ist, äquivalent dazu ist, dass $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ gilt. *2 P.*

b) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Dichteoperator $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$ gilt. Begründen Sie, dass $\hat{\rho}$ genau dann rein ist, wenn $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ erfüllt ist. *2 P.*

c) Berechnen Sie explizit *3 P.*

$$S(\hat{\rho}) = -\mathrm{tr}(\hat{\rho}\,\ln(\hat{\rho}))\,, \tag{2}$$

für einen allgemeinen Dichteoperator. Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}$ genau dann rein ist, wenn $S(\hat{\rho}) = 0$ gilt.

Bitte wenden!

a) $\hat{\rho}^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} p_n p_k (|n\rangle\langle n|)(|k\rangle\langle k|)$

$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{nk}\, p_n p_k\, |n\rangle\langle k|$

$= \sum_{n=1}^{N} p_n^2\, |n\rangle\langle n|$

$= \hat{\rho}$ genau dann, wenn $p_n = 1$ oder 0 $\forall n$,

Also $\hat{\rho}$ ist ein reiner Zustand

b) $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_{n=1}^{N} p_n^2 \leq \sum_{n=1}^{N} p_n = 1$

$0 \leq p_n \leq 1 \;\; \forall n$

Gleichheit wenn $p_n = 0$ oder $p_n = 1$ $\forall n \Leftrightarrow \hat{\rho}$ rein

c) $\hat{\rho} \ln \hat{\rho} = \sum_{n=1}^{N} p_n \ln p_n \, |n\rangle\langle n|$

$-\mathrm{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = \sum_{n=1}^{N} p_n \ln p_n$

Bemerkung: $0 < p_n \leq 1 \Rightarrow -p_n \ln p_n \geq 0$

$S(\hat{\rho}) = 0 \Leftrightarrow p_n \ln p_n = 0 \;\; \forall n$

$\Leftrightarrow p_n = 0$ oder $p_n = 1$ $\forall n$

$\Leftrightarrow \hat{\rho}$ rein

Aufgabe 3 *Dichteoperator eines Zwei-Niveau-Systems* **4 P.**

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System (ZNS) mit Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Gegeben sei ein allgemeiner Dichteoperator des ZNS in Matrixdarstellung

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

wobei $\rho_{ij} = \langle i|\hat{\rho}|j\rangle$.

a) Wie viele unabhängige reele Parameter sind zur Bestimmung eines beliebigen Dichteoperators für ein ZNS nötig? Begründen Sie Ihre Antwort mit den allgemeinen Eigenschaften von Dichteoperatoren. *1 P.*

b) Berechnen Sie den Vektor $\vec{S} = (\langle\hat{\sigma}_x\rangle, \langle\hat{\sigma}_y\rangle, \langle\hat{\sigma}_z\rangle)^T$, der sich aus den Erwartungswerten der drei Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ für einen allgemeinen Dichteoperator ergibt. Drücken Sie die Dichtematrix in Gleichung (3) durch die Erwartungswerte S_x, S_y und S_z aus. *1 P.*

c) Drücken Sie $\vec{S}$ in Polarkoordinaten aus und bestimmen Sie die Beziehung zwischen (r, θ, ϕ) und den Elementen ρ_{ij}. *1 P.*

d) Berechnen Sie die Reinheit $R = \mathrm{tr}\{\hat{\rho}^2\}$ von $\hat{\rho}$ und drücken Sie das Resultat als Funktion der Matrixelemente ρ_{ij} und mithilfe der Polarkoordinatendarstellung von $\vec{S}$ aus. *1 P.*

4 komplexe Parameter - 8 reelle

Selbstadjungiert

$\rho_{11} = \overline{\rho_{11}}$ $\quad -1$

$\rho_{00} = \overline{\rho_{00}}$ $\quad -1$

$\rho_{10} = \overline{\rho_{01}}$ $\quad -2$

$tr(\hat{\rho}) = 1$ $\quad -1$

$= 3$

b) $\langle A\rangle = Tr(\rho A)$

$$\rho\sigma_x = \begin{pmatrix} \rho_{10} & \rho_{11} \\ \rho_{00} & \rho_{01} \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_x\rangle = \rho_{10} + \rho_{01} = 2Re[\rho_{10}]$

$$\rho\sigma_y = \begin{pmatrix} i\rho_{10} & -i\rho_{11} \\ i\rho_{00} & -i\rho_{01} \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_y\rangle = i(\rho_{10} - \rho_{01}) = i[2i\, Im(\rho_{10})] = -2i\,Im(\rho_{10})$

$$\rho\sigma_z = \begin{pmatrix} \rho_{11} & -\rho_{10} \\ \rho_{01} & -\rho_{00} \end{pmatrix}$$

$\langle\sigma_z\rangle = \rho_{11} - \rho_{00}$

Trace: $\quad \rho_{11} + \rho_{00} = 1$

$2\rho_{11} = 1 + S_z$

$2\rho_{00} = 1 - S_z$

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+S_z & S_x - iS_y \\ S_x + iS_y & 1 - S_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + S_x\sigma_x + S_y\sigma_y + S_z\sigma_z\right]$$

In Polarkoordinaten ist

$S_x = r\sin\theta\cos\varphi$

$S_y = r\sin\theta\sin\varphi$

$S_z = r\cos\theta$

$\rho_{11} = \frac{1}{2}[1 + S_z] = \frac{1}{2}[1 + r\cos\theta]$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2}\left[S_x - iS_y\right] = \frac{r\sin\theta}{2}\left[\cos\varphi - i\sin\varphi\right]$$

$$\rho_{01} = \overline{\rho_{10}} = \frac{r\sin\theta}{2}\left[\cos\varphi + i\sin\varphi\right]$$

$$\rho_{00} = \frac{1}{2}\left[1 - r\cos\theta\right]$$

d) Eigenwerte sind $\frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[1 \pm r\right]$$

$$Tr(\hat{\rho}^2) = \frac{1}{2^2}\left[1+r\right]^2 + \frac{1}{2^2}\left[1-r\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[1+r^2+2r + 1+r^2-2r\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+r^2\right]$$