Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 22, 2024)

Problem 1. Der Laplace-Operator Δ ist für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f.$$

Allgemeiner ist ein (homogener) Differentialoperator P zweiter Ordnung für $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$Pf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j f.$$

Zeigen Sie, dass die einzigen rotationsinvarianten Differentialoperatoren, d.h. solche, welche

$$P(f(Qx)) = (Pf)(Qx).$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllen, Vielfache des Laplace-Operators darstellen.

Proof. Sei Q orthogonal und beliebig mit Elemente $Q_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Sei auch $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Die Voraussetzung ist dann Es gilt (Kettensregel)

$$\partial_i f(Qx) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(Qx) Q_{ji}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j f(Qx) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \left(\sum_{k=1}^{n} (\partial_k f)(Q_{kj}) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} (\partial_l \partial_k f)(Qx) Q_{kj} Q_{li} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} (\partial_l \partial_k f) \sum_{i,j=1}^{n} Q_{li} a_{ij} Q_{kj}
\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$= \sum_{k,l=1}^{n} (\partial_l \partial_k f) \sum_{i,j=1}^{n} Q_{li} a_{ij} (Q^T)_{jk}$$
$$\stackrel{?}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\partial_i \partial_j f)(Qx)$$

Sei $B := QAQ^T$. Offensichtlich muss dann, für alle orthogonale Matrizen Q, $QAQ^T = A$ gelten. □

Problem 2. Beweisen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, so existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein Polynom $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f - p\|_\infty \leq \epsilon.$$

Die Menge der Polynome auf dem Intervall $[a,b]$ ist also dicht im Raum der stetigen Funktionen bzgl. der Supremumsnorm.

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) (Hutfunktionen) Es sei

$$h_{a,b}(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{|x-a|}{b}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

für $a \in \mathbb{R}, b > 0$. Begründen Sie, dass auf jedem kompakten Intervall I für jedes ϵ ein Polynom p existiert mit $\|h_{a,b} - p\|_{\infty,I} \leq \epsilon$.

(b) (Lineare Interpolante) Zu einer gegebenen Partition von $[a,b]$ mit Stützstellen $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ definieren wir die lineare Interpolante von f durch

$$H(x) = \sum_{i=0}^{N} h_{x_i,\Delta x_i}(x) f(x_i),$$

wobei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\Delta x_0 = x_1 - a$. Bestimmen Sie zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Partition von $[a,b]$, sodass $\|H - f\|_\infty \leq \epsilon$ gilt.

(c) Beweisen Sie den Approximationssatz von Weierstraß.

Proof. (a) Wir brauchen hier die Aufgaben

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \max\{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

□

Problem 3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

gilt. Ist f in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar?

Proof. Wir berechnen die Ableitung auf der Gerade $(x,0)$, also $y=0$. Es gilt $f(x,0)=0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} &=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}f(x,y)\\ &=\lim_{y\to 0}\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\\ &=x\end{aligned}$$

Dies ist genug, um die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ zu berechnen. Es gilt $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, also

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1.$$

Ähnlich berechnen wir die Ableitung auf der Gerade $(0,y)$, also $x=0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} &=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}f(x,y)\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\\ &=-y\end{aligned}$$

Dann ist

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}=-1.$$

Die sind ungleich, also f kann in $(0,0)$ nicht stetig differenzierbar sind, sonst wären die Ableitungen gleich. □

Problem 4. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ nimmt $f_v(t) = f(tv),\ t \in \mathbb{R}$ ein striktes lokales Minimum in $t = 0$ an.

(b) Die Funktion f besitzt in $(0,0)$ kein lokales Minimum

Proof. (a) Sei $v = (a,b)^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_v(t) =& f(tv) \\ =& (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2t^2) \\ =& b^2t^2 + 2a^4t^4 - 2ba^2t^3 - ba^2t^3 \\ =& b^2t^2 + 2a^4t^4 - 3ba^2t^3 \\ =& t^2(2a^4t^2 - 3ba^2t + b^2) \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f_v'(t) =& t(8a^4t^2 - 9a^2bt + 2b^2) \\ f_v'(0) =& 0 \\ f_v''(t) =& 2(12a^4t^2 - 9a^2bt + b^2) \\ f_v''(0) =& 2b^2 > 0 \end{aligned}$$

Da $f_v''(0) > 0$ und $f_v'(0) = 0$, ist $f_v'(0)$ ein lokales Minimum. Weil $f_v(t)$ ein Polynom vom Grad 4 ist, besitzt $f_v(t)$ maximal 4 Nullstellen, also $f_v(0)$ ist ein strikt lokales Minimum.

(b) Offensichtlich ist $f(0,0) = 0$. Sei x fest. Wir wählen $x^2 < y < 2x^2$. Damit ist

$$f(x,y) = \underbrace{(y - x^2)}_{>0}\underbrace{(y - 2x^2)}_{<0} < 0,$$

also $f(x,y) < 0$. Da

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sqrt{x^2 + (2x^2)^2} \\
&= \sqrt{x^2 + 4x^4} \\
&= |x|\sqrt{1 + 4x^2}
\end{aligned}
$$

was wir beliebig klein wählen kann, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein Punkt $p \in B_\epsilon((0,0))$ so dass $f(p) < f((0,0))$, also f besitzt kein lokales Minimum in $(0,0)$. $\square$