

Einführung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 30, 2023)

Problem 1. Seien G, H Gruppen und $\Phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus.

(a) Sei $g \in G$ ein Element mit Ordnung $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass $\text{ord}(\Phi(g)) \mid n$ gilt.

(b) Sei $N \trianglelefteq G$. Ist dann stets auch $\Phi(N) \trianglelefteq H$?

Proof. (a) Es gilt

$$\Phi(g)^n = \Phi(g^n) = \Phi(1_G) = 1_H,$$

also $\text{ord}(\Phi(g)) \leq n$. Wir beweisen die Aussage per Widerspruch. Sei $\text{ord}(\Phi(g)) = p \nmid n$. Wir schreiben

$$n = qp + r, \quad r < p$$

(Division mit Rest). Es gilt dann

$$\begin{aligned} \Phi(g)^n &= \Phi(g)^{qp+r} \\ &= \Phi(g)^{qp} \Phi(g)^r \\ &= (\Phi(g)^p)^q \Phi(g)^r \\ &= 1^q \Phi(g)^r \\ &= \Phi(g)^r \\ &\neq 1 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $r < p = \text{ord}(\Phi(g))$, also $\Phi(g)^r \neq 1$, sonst wäre $\text{ord}(\Phi(g)) = r$.

(b) Nein. Wir betrachten eine "Einbettung" $\text{em} : S_n \rightarrow S_m$, wobei $m > n$. Sei $\sigma \in S_n$.

Es gilt $\text{em}(\sigma) = \sigma'$ genau dann, wenn

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \leq n \\ i & \text{sonst.} \end{cases}.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Es ist klar, dass Φ ein Homomorphismus ist. Sei $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, mit $\Phi(\sigma_1) = \sigma'_1$ und $\Phi(\sigma_2) = \sigma'_2$. Dann ist

$$\sigma'_1 \sigma'_2(i) = \sigma'_1(i) = i \quad n < i \leq m,$$

also $\sigma'_1 \sigma'_2|_{\{1,2,\dots,n\}}$ ein Element von S_n , dessen Bild $\sigma'_1 \sigma'_2$ ist.

Wir wissen, dass $A_n \trianglelefteq S_n$.

Konkretes Gegenbeispiel: Sei $n = 3, m = 5$. Wir betrachten $\text{em} : S_3 \rightarrow S_4$, und $\Phi(A_3)$, wobei $A_3 \trianglelefteq S_3$.

Dann ist $\Phi(A_3)$ kein Normalteiler von S_4 . Unter Zweckentfremdung der Notation stellen wir A_3 und $\Phi(A_3)$ in Zykelnnotation dar

$$A_3 = \Phi(A_3) = \{(123), (132)\}.$$

Es gilt auch $(14) \in S_4$ und $(14)^{-1} = (14)$.

Es gilt aber

$$(14)(123)(14) = (14)(1234) = (234) \notin \Phi(A_3),$$

also $\Phi(A_3) \not\trianglelefteq H$. □

Problem 2. Seien G eine Gruppe und $M := \{x^2 | x \in G\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $N := \langle M \rangle$ ein Normalteiler von G ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes Element gN der Faktorgruppe G/N gilt: $\text{ord}(gN) \leq 2$.

Proof. (a) Sei $x, y \in G$ beliebig. Es gilt $x^2 \in M$. Es ist $y^{-1}xy \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y^{-1}x^2y &= y^{-1}xxy \\ &= y^{-1}xyy^{-1}xy \\ &= (y^{-1}xy)^2 \\ &\in M, \end{aligned}$$

also M ist ein Normalteiler von G .

- (b) Wir betrachten das Quadrat einer Linksnebenklasse. Sei $a \in G$ beliebig, also aN ist eine beliebige Linksnebenklasse.

$$aN \cdot aN = (a^2)N.$$

Wir wissen aber, dass $a^2 \in N$ (per Definition). Weil N ein Normalteiler ist, gilt dann $a^2N = N$. Es folgt, dass $\text{ord}(aN) \leq 2$. \square

Problem 3. Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe mit Untergruppen $A, B \leq G$ an, so dass

$$A \trianglelefteq B \quad \text{und} \quad B \trianglelefteq G$$

gelten, nicht jedoch $A \trianglelefteq G$.

Hinweis: Dies zeigt, dass das Normalteiler-Sein im Allgemeinen nicht transitiv ist.

Proof. Wir betrachten $G = D_4$, $B = \langle r^2, s \rangle$ und $A = \langle s \rangle$. Wir zeigen die Eigenschaften

- (i) $B \trianglelefteq G$.

Es gilt $|D_4| = 8$ und $B = \{1, r^2, s, r^2s\}$, also $|B| = 4$, $[G : B] = 2$. Dann ist B stets ein Normalteiler (Bsp 2.35).

- (ii) $A \trianglelefteq B$.

Wir betrachten $x^{-1}Ax$ für $x \in B$. Für $x \in \{1, s\}$ ist es klar. Für $x \in \{r^2, r^2s\}$ muss wir direkt das Produkt mit $x^{-1}sx$ berechnen.

Es gilt

$$r^{-2}sr^2 = sr^4 = s,$$

$$(r^2s)^{-1} = sr^2 \text{ (man kann das durch direktes Multiplikation verifizieren)}$$

$$sr^2ssr^2 = sr^4 = s.$$

Insgesamt ist $A \trianglelefteq B$.

- (iii) $A \not\trianglelefteq G$.

Es gilt $r^{-1}sr = r^{-2}s = r^2s \neq 0$. Wenn wir $D_4 \subseteq S_{\mathbb{C}}$ betrachten, ist $r^2s(1_{\mathbb{C}}) = -1$, wobei $1_{\mathbb{C}}$ das 1 in \mathbb{C} ist (also nicht das neutrale Element in $\text{Sym}_{\mathbb{C}}$).

\square

Problem 4. Zeigen Sie, dass

$$S_n = \langle (12), (123 \dots n) \rangle$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

Proof. Wir zeigen, dass Elemente mit bestimmte Formen Elemente von $\langle (12), (123 \dots n) \rangle$ sind. Im Beweis begründen wir alle Schritte mit "Sonst wäre $\langle (12), (123 \dots n) \rangle$ keine Gruppe, weil es nicht abgeschlossen wäre".

Außerdem bedeutet hier Addition immer die Addition in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, aber durch 1 verschoben, also die mögliche Ergebnisse sind $1, 2, \dots, n$ statt $0, 1, \dots, n-1$. Wir bezeichnen $(12) = s$ und $(123 \dots n) = T$.

(i) Alle Transpositionen $(i(i+1))$. Die Proposition ist

$$T^x s T^{n-x} = ((x+1)(x+2)).$$

Es gilt

$$T^{n-x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1+(n-x) & 2+(n-x) & \dots & n-1+(n-x) & n+(n-x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$s T^{n-x} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+(n-x) & \dots & 2 & 1 & \dots & 2n-x \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} T^x s T^{n-x} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+(n-x)+x & \dots & 2+x & 1+x & \dots & 2n-x+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+n & \dots & 2+x & 1+x & \dots & 2n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1 & \dots & 2+x & 1+x & \dots & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Alle Transpositionen $(i(i+k))$, für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Wir beweisen es per Induktion über k . Wir wissen es schon für $k=1$. Jetzt nehmen wir an, dass alle Transpositionen $i(i+k') \in \langle (12)(123 \dots n) \rangle$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $k' \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

Wir betrachten $(i(i+k))$ für i beliebig. Ziel:

$$(i(i+k)) = (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1)). \quad (1)$$

Wir betrachten die Wirkung auf i , $i+k-1$ und $i+k$. Es ist klar, dass keine andere Zahlen nicht davon bewegt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} & (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))i \\ &= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i+k-1) \\ &= (i(i+k-1))(i+k) \\ &= i+k \\ & (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))(i+k) \\ &= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i+k) \\ &= (i(i+k-1))(i+k-1) \\ &= i \\ & (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))(i+k-1) \\ &= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))i \\ &= (i(i+k-1))i \\ &= i+k-1, \end{aligned}$$

also die Gleichheit in (1) gilt.

(iii) Alle Elemente $\sigma \in S_n$.

Wir schreiben ein beliebiges Element $\sigma \in S_n$ als Produkt von Transpositionen. Weil alle Transpositionen Elemente von $\langle (12)(123 \dots n) \rangle$ sind, müssen dann $\sigma \in \langle (12)(123 \dots n) \rangle$ auch. \square