Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 12

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: February 4, 2024)

Problem 1. (Parametrisierung) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α und $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$. Außerdem existieren offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ und lokale Parameterdarstellungen $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von M mit $\varphi(U) \cup \psi(V) = M$ und $\varphi(U) = M \backslash A$, wobei $A = \psi(N)$ mit einer λ_k-Nullmenge $N \subseteq V$ gilt. Zeigen Sie, dass A messbar ist und

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_{M \backslash A} f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_k \,.$$

Proof. $\varphi(U)$ ist messbar, weil für jedes Punkt in $\varphi(U)$ eine offene Umgebung $\varphi(U)$ gibt, deren Urbild $\mathcal{L}(n)$ als offene Menge noch messbar ist. Weil $\mathcal{L}_M$ eine σ-Algebra ist, ist $A = M \backslash \varphi(U)$ messbar.

Wir betrachten den endlichen Atlas $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ mit passender Zerlegung der Eins $\chi_{\varphi(U)}, \chi_A$. Diese ist eine Zerlegung der Eins, da die Mengen messbar sind.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M &= \int_U (f \cdot \chi_{\varphi(U)}) \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \,\mathrm{d}\lambda_k \\
&\quad + \int_V (f \cdot \chi_A) \circ \psi \sqrt{\det(\psi'^T \psi')} \,\mathrm{d}\lambda_k \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \,\mathrm{d}\lambda_k \\
&\quad + \int_N f \circ \psi \cdot \sqrt{\det(\psi'^T \psi')} \,\mathrm{d}\lambda_k \\
&\leq \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \,\mathrm{d}\lambda_k \\
&\quad + \int_N \infty \,\mathrm{d}\lambda_k \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \,\mathrm{d}\lambda_k + \infty \lambda_k(N)
\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{aligned}
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, \mathrm{d}\lambda_k + \infty \cdot 0 \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, \mathrm{d}\lambda_k \\
&= \int_{M \setminus A} f \, \mathrm{d}\lambda_M \,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Problem 2. (Nullmengen) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(a) Sei $N \in \mathcal{L}_m$ mit $\lambda_M(N) = 0$. Dann gilt $\lambda_{M,V}(N) = 0$ für alle in M offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ für die eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$, mit $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, existiert.

(b) Zeigen Sie, dass M eine λ_n-Nullmenge ist.

Hinweis: Satz 3.5

Proof. (a) Sei (φ_j), $\varphi_j : T_j \to V_j$ eine abzählbare Atlas von M und V beliebig, aber wie in Aufgabenstellung. Da $\lambda_M(N) = 0$, gilt, für eine Folge von Mengen $(A_j), j \in 1, \dots,$

$$
\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = 0.
$$

Jetzt fügen wir die Menge V hinzu, mit $V_0 := V$, also jetzt ist (φ_j), $j = 0, \dots$ ein abzählbarer Atlas. Wir setzen $A'_0 = A \cap V$ und $A'_j = A_j \cap V^c$ sonst, wobei die A_j hier die vorherigen A_j sind. Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
0 = &\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A'_j) \\
= &\lambda_{M,V}(A'_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{M,V_i}(A'_i)
\end{aligned}
$$

Aber $A'_j \subset A_j$ für $j \in \mathbb{N}$, also

$$
\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A'_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = 0.
$$

Da das Maß positiv ist, muss der Ausdruck Null sein. Daraus folgt:

$$
\lambda_{M,V}(A'_0) = \lambda_{M,V}(A \cap V) = 0.
$$

(b) Wir brauchen zunächst ein

Lemma 1. $\lambda_n(E_k) = 0$ *für* $k < n$.

Proof. Sei $d = r - k$. Da E_k offensichtlich diffeomorph zu $\mathbb{R}^k$ ist, gibt es eine Überdeckung von Mengen $A_j \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $\lambda_k(A_j) < \infty$ und $A_j \times (a,b)^d \subseteq \mathbb{R}^n$. Weil $\mathbb{R}^p$ σ-endlich für alle $p \in \mathbb{N}$ ist, ist das Maß

$$\lambda_n(A_i \times (a,b)^d) = \lambda_k(A) \cdot (b-a)^d.$$

Sei jetzt $\epsilon > 0$. Wir betrachten die Folge von Mengen

$$B_j = \begin{cases} A_j \times (-1,1)^d & \lambda_k(A_j) = 0 \\ A_j \times \left(-\frac{\epsilon}{2^j \lambda_k(A_j)}, \frac{\epsilon}{2^j \lambda_k(A_j)}\right) & \lambda_k(A_j) > 0 \end{cases}.$$

Damit ist $\lambda_n(B_j) \le \frac{2\epsilon}{2^j}$ und außerdem $E_k \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_n(E_k) \le& \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) \\ \le& \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^i} \\ =& 2\epsilon \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig war, ist $\lambda_n(E_k) = 0$. □

Wir nutzen jetzt Satz 3.5, um eine abzählbare Überdeckung von Mengen U_j zu finden, so dass $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j \supseteq M$ und ein C^α Diffeomorphismus F existiert, so dass für jedes j eine $V_j \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $M \cap U_j = F(E_k \cap V_j)$

Daraus folgt für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lambda_n(M \cap U_i) =& \int_{M \cap U_i} 1 \, \mathrm{d}\lambda_n \\ =& \int_{E_k \cap V_i} |\det F'| \, \mathrm{d}\lambda_n \\ \le& \int_{E_l \cap V_i} \infty \, \mathrm{d}\lambda_n \\ =& \infty \int_{E_k \cap V_i} \mathrm{d}\lambda_k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \infty \lambda_n(E \cap V_i) \\
&\leq \infty \lambda_n(E_k) \\
&= \infty \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\lambda_n(M) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(U_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Problem 3. Seien $0 < r < R$ und

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 = 0 \right\}$$

die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit aus Präzenzaufgabe 10.1. Definiere außerdem die Funktion

$$\varphi : U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \varphi(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot (R + r\cos\beta) \\ \sin\alpha \cdot (R + r\cos\beta) \\ r\sin\beta \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subseteq T$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$, ein Homömorphismus $\psi : V \to \psi(V) \subseteq T$ und eine λ_2-Nullmenge $N \subseteq V$ existiert, sodass $\varphi : U \to T \setminus A$ ein Homömorphismus ist und $\psi(N) = A$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_T(T) = 4\pi^2 Rr$ gilt.

Proof. (a) Sei $x, y, z \in T$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 &= 0 \\
\frac{(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} &= 0
\end{aligned}
$$

Da das Punkt

$$\left(\frac{(R - \sqrt{x^2 + y^2})}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

auf dem Einheitskreis liegt, gibt es bekanntermaßen genau eine Winkel $\beta \in (0, 2\pi)$, so dass

$$\begin{aligned} z =& r \sin \beta \\ R - \sqrt{x^2 + y^2} =& r \cos \beta. \end{aligned}$$

Da $0 \neq \beta \neq 2\pi$, ist der Fall $(1, 0)$ ausgeschlossen, also der Fall

$$\begin{aligned} R - \sqrt{x^2 + y^2} =& r \\ z =& 0 \end{aligned}$$

ist ausgeschlossen. Sei jetzt β fest. Es gilt

$$x^2 + y^2 = (R - r \cos \beta)^2.$$

Daher liegt das Punkt

$$\left(\frac{x}{R - r \cos \beta}, \frac{y}{R - r \cos \beta} \right)$$

auch auf dem Einheitskreis, und noch einmal gibt es *genau eine* $\alpha \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha \cdot (R + r \cos \beta) \\ y &= \sin \alpha \cdot (R + r \cos \beta) \end{aligned}$$

Noch einmal ist der Fall $\alpha = 0$, also ist

$$\begin{aligned} x =& R + r \cos \beta \\ y =& 0 \end{aligned}$$

ausgeschlossen. Wir definieren dann

$$\begin{aligned} A = & \left\{ \begin{pmatrix} R + r \cos \beta \\ 0 \\ r \sin \beta \end{pmatrix}, \beta \in (0, 2\pi) \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot (R + r) \\ \sin \alpha \cdot (R + r) \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in (0, 2\pi) \right\} \end{aligned}$$

Jetzt definieren wir den gewünschten Homöomorphmus ψ ähnlich wie φ

(b) Nach 2 gilt

$$\begin{aligned}\lambda_T(T) &= \int_T 1 \,\mathrm{d}\lambda_T \\ &= \int_{T\setminus A} 1 \,\mathrm{d}\lambda_T \\ &= \int_U \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_M \,.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\varphi' = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \cdot (R + r\cos\beta) & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha \cdot (R + r\cos\beta) & -r\sin\alpha\sin\beta \\ 0 & r\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt: $\det(\varphi'^T\varphi') = r^2(R + r\cos\beta)^2$ und daher

$$\begin{aligned}\lambda_T(T) &= \int_U r(R + r\cos\beta) \,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\beta) \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi r(R + r\cos\beta) \,\mathrm{d}\beta \\ &= 2\pi r \left[R\beta + r\sin\beta\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r(2\pi R) \\ &= 4\pi^2 rR\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini benutzt haben, um das Integral als Doppelintegral zu schreiben, weil $\mathbb{R}^2$ σ-endlich ist. $\square$