Stochastik 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: February 11, 2025)

1. LAPLACE-RÄUME

1.1. mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

$$\Omega_I^{k,n} = \{1, \ldots, n\}^k, \text{ card } \Omega_I^{k,n} = n^k$$

1.2. ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

$$\begin{aligned}\Omega_{II}^{k,n} = \{\omega =&(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \{1, \ldots, n\}^k \\ &|\omega_i \neq \omega_j, i \neq j\} \\ \text{card } \Omega_{II}^{k,n} =& \frac{n!}{(n-k)!} = (n)_k\end{aligned}$$

1.3. ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

$$\begin{aligned}\Omega_{III}^{k,n} &= \{A \subseteq \{1, \ldots, n\} | \text{card } A = k\} \\ \text{card } \Omega_{III}^{k,n} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

1.4. mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

$$\begin{aligned}\Omega_{IV}^{k,n} =&\{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \{1, \ldots, n\}^k \\ &|\omega_1 \leq \cdots \leq \omega_k\} \\ \text{card } \Omega_{IV}^{k,n} =& \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}\end{aligned}$$

2. WAHRSCHEINLICHKEITSRÄUME

2.1 (Einschluss-Ausschluss).

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

2.2 (Bedingte Wahrscheinlichkeit).

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

2.3 (Bayes-Formel).

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

2.4 (Unabhängige Ereignisse). $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ unabhängig, falls

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

für alle $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

2.5 (Diskret). Ein abzählbarer Maßraum mit

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

einem Wahrscheinlichkeitsmaß definiert auf der Potenzmenge heißt diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

2.6 (Wahrscheinlichkeitsfunktion)**.** Die Wahrscheinlichkeits funktion $p(x)$ ist $p(x) = \mathbb{P}(\{x\})$.

3. ZUFALLSVARIABLEN

3.1.

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(x))$$
$$\mathbb{P}(\{X \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

3.2 (Verteilung)**.** Die Verteilung ist definiert durch das Maß

$$\mathbb{P} \circ X^{-1}$$

auf $\mathbb{R}$.

3.3 (Transformationsformel)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(Y, \mathcal{C})$ ein Messraum. Sei $T : \Omega \to Y,\ f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist

$$\int_\Omega f \circ T \,\mathrm{d}\mu = \int_Y f \,\mathrm{d}(\mu \circ T^{-1})$$

3.4. Ist $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, dann existiert $\mathbb{E}[X]$ und $\mathsf{var}(X)$.

3.1. Beispiele

3.5 (Bernoulli-Verteilung)**.** Eine Verteilung $\mathbb{P}_X$ auf $\{0,1\}$ mit $\mathbb{P}_X(1) = p_X(1) = p \in [0,1]$ heißt bernoulli-Verteilung $\mathsf{Ber}(p)$.

3.6 (Binomialverteilung)**.**

$$X : \{0,1\}^n \to \{0,\dots,n\},\ X(\omega) = \sum_{j=1}^n \omega_j$$

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

3.7 (Hypergeometrische Verteilung)**.** N Kugeln, R davon rot, $n \leq N$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, wahrscheinlichkeit dass genau r rot sind

$$\mathsf{Hyp}(r; n, R, N) = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

mit Träger

$$r = \max(n + R - N, 0), \dots, \min(n, R).$$

3.8. Für $n \ll N$ ist die hypergeometrische Verteilung fast die binomische Verteilung.

3.9 (Geometrische Verteilung)**.**

$$p(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

mit Träger $k \in \mathbb{N}$. Die stellt die Wartezeit bis zum ersten Erfolg in einer Folge Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p dar.

3.10 (Poisson Verteilung)**.**

$$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Die Poisson Verteilung beschreibt die Anzahl von Ereignissen in einem festen Zeitraum

3.11. $\mathsf{Poi}(n \cdot p_n)$ ist eine gute Approximation der Binomialverteilung $\mathsf{Bin}(n, p_n)$ für große n und kleine p_n.

3.2. Verteilungsfunktionen

3.12 (Verteilungsfunktion)**.** Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ heißt Verteilungsfunktion, falls sie

1. monoton wachsend ist
2. rechtsseitig stetig ist
3. $\lim_{n\to\infty} F(n) = 1,\ \lim_{n\to\infty} F(-n) = 0$

Das Maß ist definiert durch

$$\mu((-\infty, a]) = F(a).$$

3.13. Quantilsfunktion $Q_p(F)$ definiert durch

$$Q_p(F) := F^{-1}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq p\}.$$

1. Hat F eine Sprungstelle, ist $Q_p(F)$ die Stelle, an der F den Wert p überspringt.
2. Ist F konstant, so ist $Q_p(F)$ die kleinste Stelle mit $F(x) = 0$.

3.3. Absolutstetige Verteilungen

3.14 (Uniforme Verteilung)**.** Verteilung $\mathcal{U}([a,b])$: Dichte

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x).$$

3.15 (Exponentialverteilung)**.** Verteilung Exp(λ): Dichte

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x).$$

3.16 (Normalverteilung)**.** Dichte

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

4. MASSINTEGRAL

4.1 (Absolutstetig)**.** $\nu \ll \mu$ (ν absolutstetig bzgl μ), falls $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$

4.2 (Radon-Nikodym)**.** Falls μ, ν σ-endlich, $\nu \ll \mu$ genau dann wenn f messbar nicht negative existiert mit

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu\,.$$

5. PRODUKTRÄUME

5.1 (Kovarianz)**.**

$$\mathsf{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[x])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

5.2.

1. $\mathsf{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
2. $\mathsf{Cov}(X,Y) = \mathsf{Cov}(Y,X),\ \mathsf{Cov}(X,X) = \mathsf{Var}(X)$
3. $\mathsf{Cov}(aX + b, Y) = a\mathsf{Cov}(X,Y)$
4. $\mathsf{Cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_i \mathsf{Cov}(X_i, Y_j)$
5. $\mathsf{Var}(X_1 + \cdots + X_m) = \sum_{i=1}^{m} \mathsf{Var}(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq m} \mathsf{Cov}(X_i, X_j).$

5.3 (Korrelationskoeffizient)**.**

$$\rho(X,Y) := \frac{\mathsf{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X)\mathsf{Var}(Y)}}.$$

5.4 (Cauchy-Schwarz)**.**

$$(\mathsf{Cov}(X,Y))^2 \leq \mathsf{Var}(X)\mathsf{Var}(Y).$$

5.5 (Unabhängig Mengensysteme)**.** Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ sind unabängig, falls für alle $A_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}_n$ die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig sind.

5.6. Sind $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ unabhängige Mengensysteme und ist jedes $\mathcal{E}_i$ $\cap$-stabil, also der Schnitt zwei Ereignisse aus $\mathcal{E}_i$ ist wieder in $\mathcal{E}_i$, sind $\sigma(\mathcal{E}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{E}_n)$ unabhängig.

5.7 (Unabhängige Zufallsvariablen)**.** Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, falls die erzeugten σ-Algebren $X_k^{-1}(\mathcal{B})$ unabhängig sind.

5.8 (Faltung)**.** Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt für $A, B \in \mathcal{B}^d$

$$\mathbb{P}(X+Y \in B, Y \in A) = \int_A P_X(B-y)\,\mathrm{d}P_Y(y),$$

insbesondere

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y \in B) &= \int_{\mathbb{R}^d} P_X(B-y)\,\mathrm{d}P_Y(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} P_Y(B-x)\,\mathrm{d}P_X(x)\,.\end{aligned}$$

Beweis. Nach der Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X+Y \in B, Y \in A) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} 1_B(x+y) 1_A(y)\,\mathrm{d}(P_x \otimes P_y) \\ &= \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^d} 1_{B-y}(x)\,\mathrm{d}P_X \right) \mathrm{d}P_y \\ &= \int_A P_X(B-y)\,\mathrm{d}P_y\,.\end{aligned}$$ □

5.9. In 1-dim mit Verteilungsfunktionen F, G und Dichten f und g:

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(z-t) g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t) f(z-t)\end{aligned}$$

5.10. Sind die Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ unabhängig, so gilt

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j).$$

5.11. Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}_0$ unabhängig, so ist

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j).$$

5.12. Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, reellwertige und absolutstetige Zufallsvariablen mit den Dichten f und g. Dann ist auch $X+Y$ absolutstetig mit der Dichte

$$(f \star g)(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z-t) g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

5.13 (Abhängige Zufallsvariablen)**.**

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Wenn X und Y unabhängig sind, ist $f_{XY} = f_X(x) f_Y(y)$ und die obere Formel folgt.

6. KONVERGENZBEGRIFFE

6.1. Eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Zufallsvariable $X_n \xrightarrow{d} X$, falls die Verteilung in alle Stetigkeitsstellen konvergiert, also für alle $x \in \mathbb{R}$ in denen $F(x)$ stetig ist, gilt

$$F_n(x) \to F(x)$$

6.2 (Beispiel)**.** Sei $X_n \in \mathcal{U}((0, 1/n))$. Dann gilt $F_n(x) \xrightarrow{d} x$ für alle $x \neq 0$, jedoch nicht in

$x = 0$, wobei $F_n(0) = 0$ und $F(0) = 1$, weil die Zufallsvariablen gegen die konstante Variable 1 konvergieren.

6.3. Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertiger Zufallsvariablen konvergiert $\mathbb{P}$-stochastisch gegen eine Zufallsvariable X, falls für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

6.4 (Fast sichere Konvergenz)**.** Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\mathbb{P}$-fast sicher, kurz $\mathbb{P}$-f.s. gegen eine Zufallsvariable X, falls eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $A \in \mathcal{A}$ existiert, sodass

$$X_n(\omega) \to X(\omega)\ \forall \omega \in A^c.$$

Dies entspricht $\mathbb{P}$-fast überall Konvergenz.

7. ASYMPTOTISCHE GESETZE

7.1 (Markov-Ungleichung)**.** Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $p, c > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| \geq c) &\leq \frac{1}{c^p}\mathbb{E}[|X|^p \cdot 1_{|X|\geq c}] \\ &\leq \frac{1}{c^p}\mathbb{E}[|X|^p]\end{aligned}$$

7.2 (Tschebyschev-Ungleichung)**.** Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\epsilon > 0$, so ist

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\text{Var}(X).$$

7.3 (Schwaches Gesetz der Großen Zahlen)**.** Sind $X_1, \dots, X_n$ uiv mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

in anderen Wörter: Die Summe X_n konvergiert stochastisch gegen den Erwartungswert.

7.4. Sei $S_n \in \text{Bin}(n, p)$. Bezeichne $S_n^\star = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Dann gilt für alle $a < b$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq S_n^\star \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

7.5 (Stetigkeitskorrektur)**.**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(k \leq S_n \leq l) \approx &\Phi\left(\frac{l - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &- \Phi\left(\frac{k - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\end{aligned}$$

7.6 (Zentraler Grenzwertsatz)**.** Sei $X_1, \dots, X_n$ uiv mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) > 0$ und $S_n = \sum_{k=1}^n S_k$. Bezeichne $S_n^\star = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$. Dann gilt für alle $a < b$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n^\star \leq b) = \Phi(b)$$

7.7 (Terminales Ereignis)**.** Seien $X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und

$$\mathcal{F}'_n = \sigma(X_k, k \geq n)$$

die σ-Algebra der Zukunft ab dem Zeitpunkt n, und

$$\mathcal{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n$$

7.8 (Unendlich oft)**.** Seien $B_n \in \mathcal{B}$, dann gilt

$$\begin{aligned}&\{X_n \in B_n \text{ unendlich oft (u.o.)}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}\{X_k \in B_k\} \in \mathcal{J}\end{aligned}$$

7.9 (Kolmorogov 0-1 Gesetz)**.** Sind $X_1, \dots$ unabhängig, so gilt für alle $A \in \mathcal{J}$

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ oder } \mathbb{P}(A) = 1$$

7.10 (Borel-Cantelli I)**.** Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, so ist $\mathbb{P}(A_n$ u.o.$) = 0$.

7.11 (Borel-Cantelli II)**.** Sind (A_n) unabhängig und $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, so ist $\mathbb{P}(A_n$ u.o.$) = 1$.

7.12. Sind $X_1, \ldots$ uiv mit $\mathbb{E}[|X_1|] = \infty$, dann gilt für $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \text{ existiert in } \mathbb{R}\right) = 0$$

7.13 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.** Sind $X_1, \ldots$ uid mit $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, so gilt für $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, dass

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}[X_1]$$

fast sicher.

7.14 (Empirische Verteilungsfunktion)**.** Seien $X_1, \ldots$ uiv

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(X_k) \\ &= \frac{1}{n} \#\{k | X_k \leq x\} \end{aligned}$$

7.15 (Glivenko-Cantelli)**.** Seien $X_1, \ldots$ uiv mit Verteilungsfunktion F, so gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$$

fast sicher.