

Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 30, 2024)

Problem 1. Begründen Sie, warum die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung im Punkt $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welche besondere Form nimmt $(D\det)(\text{Id})$ an?

Proof. Per Definition ist

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) X_{1\sigma(1)} X_{2\sigma(2)} \dots X_{n\sigma(n)}.$$

Da dies eine Summe von Produkte der Komponenten sind, ist \det unendlich oft differenzierbar.

Es gilt $\det' : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R})$. Wir betrachten eine parameterabhängige Matrix $A(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}(t) \dots A_{n\sigma(n)}(t) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \left[(A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \sum_{j=1}^n \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} \left[(A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right] \end{aligned}$$

Für festes j kann dieser Ausdruck so vorgestellt werden: Wir setzen in der j -te Zeile A' statt A , also

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A'_{j1}(t) & A'_{j2}(t) & \dots & A'_{jn}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad j\text{-te Zeile}$$

und berechnen deren Determinante. Wir führen eine Laplaceentwicklung um die j -te Zeile durch und erhalten, mit $A^\#$ die adjugierte Matrix

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A'_{jk}(t) A^\#_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A^\#_{kj} A'_{jk}(t) \\ &= \sum_{k=1}^n (A^\# A')_{kk} \\ &= \text{tr}(A^\# A') \end{aligned}$$

Also die Ableitung \det' im Punkt A ist die Abbildung, die B nach $\text{tr}(A^\# B)$ abbildet.

Im Punkt I : Es gilt $I^\# = I$, also $D\det(I) = \text{tr}$. □

Problem 2. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so kann die zweite Ableitung $D^2 f$ in jedem Punkt $x \in U$ durch eine bilineare Abbildung $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ darstellen. Für eine gegebene Basis auf dem \mathbb{R}^n -wir wählen die kanonische Basis hier - lassen sich bilineare Abbildungen durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ darstellen, die sog. Hesse-Matrix Hf mit

$$Hf(x, y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die partiellen Ableitungen nach dem Satz von Schwarz vertauschen, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch.

Es sei nun $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt genau dann besitzt, wenn die Hesse-Matrix von f (in $(0,0)$) positiv semi- negativ semi- bzw. indefinit ist.
- (b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für allgemeine Funktionen mit positiv (bzw. negativ) semidefiniter Hesse-Matrix im kritischen Punkt kein lokales Minimum (bzw. Maximum) vorliegen muss.

Proof. (a) Offensichtlich ist A die Hesse-Matrix und $f(0) = 0$. Wir drücken $f(x)$ als $\frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle$ aus.

Dann per Definition: Falls A positiv semidefinit ist, ist $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle \geq 0$ für alle x , also f besitzt ein Minimum in $(0,0)$. Die Umkehrrichtung gilt auch per Definition. Sei U eine Umgebung. Für $x \in U$ ist $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ per Definition eines Minimums.

Das gleiche Argument (per Definition) gilt für f ein Maximum in $(0,0)$.

- (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ besitzt in 0 Ableitung 0. 0 ist sowohl positiv als auch negativ definit. Die Funktion besitzt aber weder ein Maximum noch ein Minimum in 0.

□

Problem 3. Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T.$$

- (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F .
- (b) In welchem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ existiert die Inverse von $JF(p)$?
- (c) Finden Sie eine lokale inverse Abbildung F^{-1} von F in einer Umgebung von $p = (1, 0) = F(1, 0)$ und berechnen Sie die Ableitung von F^{-1} in p .
- (d) Ist F auf dem ganzen Gebiet $\{p \in \mathbb{R}^2 | JF(p) \text{ invertierbar}\}$ global invertierbar?

Proof. (a)

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

(b) $\det(JF) = 4x^2 + 4y^2$. Dies ist genau dann Null, wenn $x = y = 0$. Sonst ist JF invertierbar.

(c) Wir lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \xi \\ 2xy &= \zeta \\ y &= \frac{\zeta}{2x} \\ x^2 - \left(\frac{\zeta}{2x}\right)^2 &= \xi \\ x^4 - \frac{\zeta^2}{4} &= \xi x^2 \\ x^4 - \xi x^2 - \frac{\zeta^2}{4} &= 0 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \left[\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} \right] \end{aligned}$$

Beim Punkt $(x, y) = (1, 0)$ ist $(\xi, \zeta) = (1, 0)$. In einer genug kleinen Umgebung nehmen wir daher die positive Nullstelle und danach positive Würzel.

$$x = \left[\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{2} \right]^{1/2}.$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{\zeta}{2} \left[\frac{2}{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \right]^{1/2}.$$

Dies ist die Umkehrabbildung.

(d) Nein, weil sie nicht injektiv ist. Es gilt $F(1, 1) = (0, 2)$ und $F(-1, -1) = (0, 2)$, aber $(1, 1) \neq (-1, -1)$. \square

Problem 4. Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen wir die Glattheit der Inversen-Abbildung $\inf : GL(n) \rightarrow GL(n)$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Begründen Sie, dass die Abbildung $A \cdot B \rightarrow AB$ auf $\mathbb{R}^{(n \times n)^2}$ unendlich oft differenzierbar ist.

- (b) Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um $\inf \in \mathcal{C}^\infty(GL(n), GL(n))$ zu beweisen.

Hinweis: Betrachten Sie $A \cdot B = Id$