Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 13

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 27, 2024)

Problem 1. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von B direkt mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A einmal, indem Sie den Laplace'schen Entwicklungssatz direkt anwenden, und einmal, indem Sie vorher eine geschickte Zeilenumformung durchführen.

(c) Wie verhält es sich mit dem Aufwand jetzt gegenüber letzter Woche? Beschreiben Sie eine Strategie zum geschickten Berechnen von Determinanten bei Matrizen geeigneter Struktur.

Proof. (a) Laplaceentwicklung durch die vierte Spalte:

$$\begin{aligned} \det(B) &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2(1)(3-6) \\ &= 6 \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Laplaceentwicklung durch die dritte Zeile

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} -31 & -60 & 180 \\ 3 & -21 & 63 \\ -31 & -60 & 183 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 10 & -60 & 180 \\ 0 & -21 & 63 \\ 10 & -60 & 183 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -31 & -60 & 180 \\ 3 & -21 & 63 \\ -31 & -60 & 183 \end{vmatrix} &= (-31)\begin{vmatrix} -21 & 63 \\ -60 & 183 \end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix} 3 & 63 \\ -31 & 183 \end{vmatrix} + 180\begin{vmatrix} 3 & -21 \\ -31 & -60 \end{vmatrix} \\ &= (-31)(-63) + 60(2502) + 180(-311) \\ &= 2493 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 10 & -60 & 180 \\ 0 & -21 & 63 \\ 10 & -60 & 183 \end{vmatrix} &= 10\begin{vmatrix} -21 & 63 \\ -60 & 183 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} -60 & 180 \\ -21 & 63 \end{vmatrix} \\ &= -630 \end{aligned}$$

$$\det(A) = -54$$

Jetzt führen wir eine Zeilenumformung durch.

$$\begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laplaceentwicklung durch die dritte Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3\begin{vmatrix} 10 & -31 & -60 \\ 0 & 3 & -21 \\ 2 & -8 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3(10)\begin{vmatrix} 3 & -21 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} + 3(2)\begin{vmatrix} -31 & -60 \\ 3 & -21 \end{vmatrix} \\ &= -3(10)(21 \cdot 8) + 3(2)(31 \cdot 21 + 60 \cdot 3) \\ &= -54 \end{aligned}$$

(c) Die Arbeit ist einfacher. Man sollte, wenn möglich, die Zeilen bzw. Spalten umformen, bis eine Zeile bzw. Spalte so viel wie möglich null Einträge hat. $\square$

Problem 2. Es sei K ein Körper. Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $k \leq n$ bezeichnen wir mit $A[1 : k, 1 : k]$ die Untermatrix von A, die aus den ersten k Spalten der ersten k Zeilen besteht, dh. für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

wäre

$$A[1 : 2, 1 : 2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie: Sind $L, R, D \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ der Reihe nach eine linke untere Dreiecksmatrix mit ausschließlich Einsen auf der Diagonalen, eine rechte obere Dreiecksmatrix mit ausschließlich Einsen auf der Diagonalen und eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge alle $\neq 0$ sind, dann gilt für $A = LDR$ und alle $k = 1, \ldots, n$ $\det(A[1 : k, 1 : k]) \neq 0$.

(b) Beweisen Sie: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine Matrix, für die für alle $k \leq n$ $\det(A[1 : k, 1 : k]) \neq 0$ gilt, ann gibt es eine linke untere Dreiecksmatrix L mit ausschließlich Einsen auf der DIagonalen, eine rechte obere Dreiecksmatrix R mit ausschließlich Ensen auf der Diagonalen und eine Diagonalmatrix D, deren Diagonaleinträge alle $\neq 0$ sind, sodass $A = LDR$ gilt.

(c) Erklären Sie, was dieses Resultat mt elementaren Zeilenumformungen zu tun hat.

Problem 3. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) A ist invertierbar.

(b) $\det(A) \neq 0$.

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(d) Der Rang von A ist n.

(e) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(f) Die Abbildung $L_A : K^n \to K^n, x \to Ax$ ist surjektiv.

(g) Die Abbildung L_A ist injektiv.

(h) Die Abbildung L_A ist bijektiv.

(i) Es gilt $\ker(A) = \{0\}$.

(j) Jedes Gleichungssystem der Form $Ax = b$ mit $b \in K^n$ ist eindeutig lösbar.

(k) Es gilt $Ax = 0$ nur für $x = 0$.

Proof. Hier ist der Plan

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{(b)} \arrow[ddll, Rightarrow] & & \\
 & & \text{(f)} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{(c)} \arrow[ull, Rightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow] \\
\text{(a)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(h)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{(d)} \arrow[ur, Rightarrow] & \\
 & \text{(j)} & \text{(g)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & & \text{(e)} \\
 & \text{(k)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(i)} & &
\end{tikzcd}
$$

1. Per Definition ist A invertierbar genau dann, wenn die Abbildung invertierbar ist. Abbildungen sind invertierbar genau dann, wenn die bijektiv sind.

2. Bijektive Abbildungen sind sowohl injektiv als auch surjektiv.

3. Per Definition ist der Rang die Dimension des Bildraums. Sei jetzt die Abbildung surjektiv. Dann ist $\text{Bild}(L_A) = K^n$ mit dimension n, also (f) $\implies$ (d).

4. Sei jetzt L_A injektiv. Dann ist $\dim(L_A(K^n)) = \dim(K^n) = n$, also Dimension des Bilds ist gleich Dimension des Definitionsbereiches.

5. Rang ist n genau dann, wenn die Spalten linear unabhängig sind (Zeilenstufenform).

6. Spalten sind linear unabhängig genau dann wenn Zeilen linear unabhängig sind (Zeilenrang = Spaltenrang, im Skript).
7. Per letzte Übungsblatt: Linear unabhängige Spalten $\implies$ $\det(A) \neq 0$.
8. (g) $\iff$ (i) per Satz 5.3.10 (Homomorphiesatz).
9. (i) $\iff$ (k) per Definition des Kerns.
10. Bijektivität liefert eine eindeutige Lösung. Surjektivität liefert eine Lösung, Injektivität liefert Eindeutigkeit. □

Problem 4. Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind $U, V \subseteq V$ Unterräume mit $U \nsubseteq W$ und $W \nsubseteq U$, dann ist $U \cup W$ kein Unterraum von V.

(b) Sind $U, W \subset V$ Unterräume mit $\dim(U) = \dim(W) = 2$ und gilt $\dim(V) = 3$, dann gilt $U = W$ oder $\dim(U \cap W) = 1$.

(c) Sind U, W Unterräume von V und sind $\phi : U \to K, \psi : W \to K$ lineare Abbildungen, dann gibt es eine lineare Abbildung $\Psi : U + W \to K$ mit $\Psi(u) = \phi(u)$ für alle $u \in U$ und $\Psi(w) = \psi(w)$ für $w \in W$.

(d) Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann gibt es genau einen Unterraum $W \subseteq V$ mit $U \oplus W = V$.

Proof. (a) Wahr. Per Definition gibt es $u \in U$, aber $u \notin W$ und $w \in W$, aber $w \notin U$. Falls $U \cup W$ ein Unterraum wäre, würde $u + w \in U \cup W$, also entweder $u + w \in U$ oder $u + w \in W$. Sei $u + w = v \in U$. Dann gilt $w = v - u \in U$, also $w \in U$, ein Widerspruch. Analog bekommt man ein Widerspruch falls $u + v \in W$.

(b) Wahr. Aus $U \cap W \subseteq U$ gilt $\dim(U \cap W) \leq 2$. Wenn es 2 wäre, ist $U = U \cap W$. Daraus folgt: $U = W$.

Wir müssen daher nur den Fall $\dim(U \cap W) = 0$ ausschließen. In diesem Fall: Sei u_1, u_2 eine Basis von U sowie w_1, w_2 eine Basis von W. Da $\dim(U \cap W) = 0$, st $U \cap W = \{e\}$ und $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ ist linear unabhängig. Dadurch haben wir 4 linear unabhängige Vektoren in einem Raum mit Dimension 3, ein Widerspruch.

(c) Falsch. Sei $U = W$ und $U \ni V \in W$. Sei jetzt $\phi(u) \neq \psi(u)$. Dann kann nicht gleichzeitig $\phi(u) = \Psi(u)$ und $\psi(u) = \Psi(u)$ gelten.

(d) Falsch. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}((1,0,0)^T, (0,1,0)^T)$. Wir betrachten $V = \text{span}((0,0,1)^T)$ und $V' = \text{span}((0,1,1)^T)$.

Es ist klar, dass $V \cap U = V' \cap U = \{(0,0,0)\}$, also die direkte Summe ist wohldefiniert. Per Definition ist $\mathbb{R}^3 = V \oplus U$. Jedoch gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V'} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in V}$$

also $(0,0,1)^T \in V' \oplus U$. Daraus folgt, dass $V \oplus U \subseteq V' \oplus U$. Dann ist $V' \oplus U = \mathbb{R}^3$. $\square$

Problem 5. Es sei $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

(a) Bestimmen Sie alle eindimensionalen Unterräume von V.

(b) Bestimmen Sie anschließend für alle eindimensionalen Unterräum $U, W \subseteq V$ mit $U \neq W$ den Rang $U \oplus W$.

(c) Begründen Sie, dass Sie nun alle ein- und zweidimensionalen Unterräume von V gefunden haben.

(d) Visualisieren Sie die Struktur der Unterräume, in dem sie für jeden Unterraum einen Punkt in der Ebene festlegen und zwei Unterräume U, V genau dann mit einem Pfeil $U \to W$ verbinden, wenn $U \subset W$ gilt.

(e) Wie können Se anhand Ihres Bildes $U \cap W$ bzw. $U + W$ ablesen?

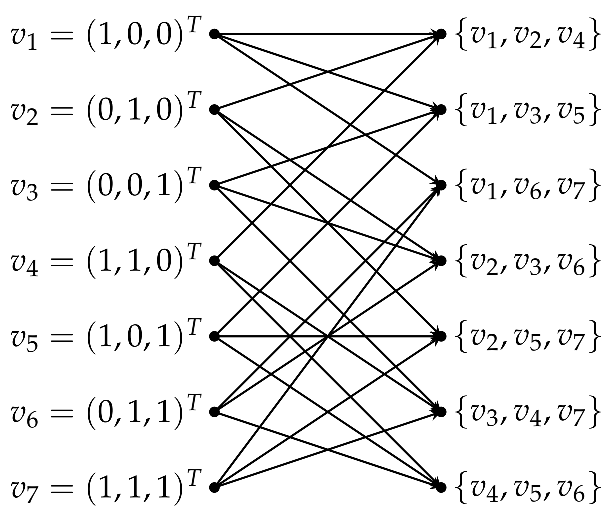
Proof. (a) So ein Unterraum enthält zumindest ein Vektor, der nicht null ist. Weiter muss der Unterraum gleich der Span des Vektors sein. Da der Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist, enthält er nur 2 Elemente, 1 und 0. Sei $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Dann ist $1v = v$ und $0v = 0$, also ein 1-dimensionaler Unterraum enthält ein Vektor und der Nullvektor.

Dann gibt es, für alle $v \in V$, ein Unterraum $\{0, v\}$ der Dimension 1.

(b) Wir betrachten $v, w \in V$ mit $v \neq 0$ und die entsprechenden Unterräume V bzw. W. Der Unterraum enthält $v + w$, also er enthält mindestens $\{0, v, w, v + w\}$. Dies ist aber alles. Die Vektoren erzeugen keine neuen Vektoren, da $v + v = w + w = 0$ und daraus $(v + w) + v = v + v + w = w$ usw.

(c) In (a) wurde es schon begründet, warum alle eindimensionale Unterräume hier sind. Die zweidimensionale Unterräme müssen durch 2 Vektoren gespannt werden, z.B u und w. Wir können dann der Unterraum als direkte Summe von die entsprechenden Unterraume konstruieren.

(d) In der Legende schreiben wir nur die nicht null Vektoren, es versteht sich also, dass die Unterräme der Nullvektor enthalten.



(e) $U \cap W$: Wir suchen die Punkte, die einen auf sowohl U als auch W richteten Pfeil haben.

$U + W$: Wir suchen Pfeile von U und W, die sich auf dem gleichen Punkt richtet. Das Punkt ist also $U + W$. $\square$