Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 5, 2024)

Problem 1. (a) Eine Riccati-Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2, \tag{1}$$

wobei $a, b, c : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ offen, stetige Funktionen sind. Zeigen Sie:

Kennt man eine Lösung $\varphi(t)$ von (1), so kann man (1) mit der Transformation $y = x - \varphi(t)$ in eine Bernoullische Differentialgleichung umwandeln.

(b) Kreuzen Sie bei der folgenden Tabelle an, welche Differentialgleichungen linear, nicht linear, homogen, inhomogen, bernoullisch oder riccatisch sind.

DGL	linear	nichtlinear	homogen	inhomogen	bernoullisch	riccatisch
$\sin(4t)x + 3\dot{x} + \sqrt{t} = 0$						
$t\dot{x} - 2x + 2tx^2 = 0$						
$\dot{x} - 2e^{2t}x + 3x^2 = 1 + e^{2t}$						
$\dot{x} + 3x = 0$						
$\dot{x} + 2x - tx^4 = 0$						

Proof. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} x &= y + \varphi(t) \\ \dot{x} &= \dot{y} + \dot{\varphi}(t). \end{aligned}$$

Daher ist nach Einsetzen

$$\begin{aligned} \dot{y} + \varphi'(t) &= a(t) + b(t)(y + \varphi(t)) + c(t)(y^2 + 2y\varphi(t) + \varphi(t)^2) \\ \dot{y} + {\color{blue}\varphi'(t)} &= {\color{blue}a(t)} + b(t)y + {\color{blue}b(t)\varphi(t)} + c(t)y^2 + 2y\varphi(t) + {\color{blue}c(t)\varphi(t)^2} \\ \dot{y} &= [b(t) + 2\varphi(t)]y + c(t)y^2 \end{aligned}$$

wobei wir die blauen Terme kürzen dürfen, da φ bekanntermaßen eine Lösung der DGL ist. Die Gleichung am Ende ist offensichtlich eine bernoullische DGL.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b)

DGL	linear	nichtlinear	homogen	inhomogen	bernoullisch	riccatisch
$\sin(4t)x + 3\dot{x} + \sqrt{t} = 0$	$\times$			$\times$		$\times$
$t\dot{x} - 2x + 2tx^2 = 0$		$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
$\dot{x} - 2e^{2t}x + 3x^2 = 1 + e^{2t}$		$\times$		$\times$		$\times$
$\dot{x} + 3x = 0$	$\times$		$\times$		$\times$	$\times$
$\dot{x} + 2x - tx^4 = 0$		$\times$		$\times$	$\times$	

$\square$

Problem 2. In der Literatur findet man den *Potenzreihenansatz* zur Lösung von Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen. Um die Vorgehensweise dieses Ansatzes zu verstehen, betrachten wir die Differentialgleichung des Federpendels

$$m\ddot{x} + Dx = 0, \tag{2}$$

wobei $m > 0$ (Masse) und $D > 0$ (Federkonstante) gilt.

(a) Ermitteln Sie mit dem Ansatz

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\ \ a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

durch gliedweises Differenzieren, Einsetzen in (2) und Koeffizientenvergleich eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten a_n.

(b) Leiten Sie mit Hilfe der Rekursionsgleichung aus Teil (a)

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{D}{m}\right)^k t^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{D}{m}\right)^k t^{2k+1}$$

her.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\varphi(t) = a_0 \cos \omega t + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega t,\ \ \omega := \sqrt{\frac{D}{M}}$$

gilt.

(d) Lösen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes das Anfangswertproblem

$$\dot{x} + x = t, \qquad x(0) = x_0.$$

(Hinweis: Falls Sie Probleme haben die entstehende Potenzreihe zu erkennen, dann lösen Sie für sich die Differentialgleichung mit dem Ansatz der Variation der Konstanten und vergleichen Sie Ihre Lösung mit der Potenzreihe.)

Proof. (a) Da Potenzreihen gleichmäßig konvergieren, ist

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n\end{aligned}$$

Setzt man diesen Ansatz in (2) ein, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[m(n+2)(n+1)a_{n+2} + Da_n\right] t^n = 0.$$

Da dies für alle t verschwinden muss, muss die Koeffizienten verschwinden, also

$$m(n+2)(n+1)a_{n+2} + Da_n = 0.$$

(b) Aus der Rekursionsgleichung bekommt man zwei Folgen $(a_n)_{n \text{ gerade}}$ und $(a_n)_{n \text{ ungerade}}$. Die Lösungen sind:

$$\begin{aligned}a_{2k+1} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{D}{m}\right)^k a_1, \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{D}{m}\right)^k a_0.\end{aligned}$$

Da eine Potenzreihe innerhalb der Konvergenzkreisscheibe absolut konvergiert, können wir die Reihe umordnen bzw. in dieser zwei Reihen zerlegen.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{k \text{ gerade}} a_k t^k + \sum_{k \text{ ungerade}} a_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}t^{2k+1} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{D}{m}\right)^k t^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{D}{m}\right)^k t^{2k+1}\end{aligned}$$

(c) Wir können die Gleichung umschreiben als

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\omega^{2k}t^{2k} + \frac{a_1}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\omega^{2k+1}t^{2k+1} \\ &= a_0 \cos \omega t + \frac{a_1}{\omega}\sin \omega t.\end{aligned}$$

(d) Wir verwenden wieder den Potenzreiheansatz:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

und

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n \end{aligned}$$

Eingesetz ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t_n = t \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + a_n\right] t^n = t \end{aligned}$$

Die Rekursionsgleichung ist also

$$(n+1) a_{n+1} + a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sei $a_0 \in \mathbb{R}$ fest. Dann ist $a_1 = -a_0$. Danach gilt

$$2a_2 + a_1 = 1,$$

also

$$a_2 = \frac{1 - a_1}{2} = \frac{1 + a_0}{2}.$$

Umgekehrt ist $a_0 = 2a_2 - 1$. Für die weitere Koeffizienten ist

$$a_n = (-1)^n \frac{2}{n!} a_2, \qquad n \geq 2.$$

Insgesamt ist die Potenzreihe

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (2a_2 - 1) + (1 - 2a_2)t + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k!} a_2 t^k \\ &= (2a_2 - 1) + (1 - 2a_2)t + 2a_2(-1 + e^{-t} + t) \\ &= -1 + t + 2a_2 e^{-t} \end{aligned}$$

Nun setzen wir die Initialbedingungen ein:

$$\varphi(0) = x_0 = -1 + 2a_2$$

mit Lösung

$$2a_2 = x_0 + 1.$$

Damit ist die Lösung der DGL

$$\varphi(t) = -1 + t + (x_0 + 1)e^{-t}. \qquad \square$$

Problem 3. Sei $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = |x|^a, \qquad x(0) = 0$$

genau im Fall $a \geq 1$ eine eindeutige Lösung für $t \geq 0$ besitzt.

Proof. Offensichtlich ist $x(t) = 0$ eine Lösung für alle $a > 0$. Jetzt betrachten wir Lipschitz-Stetigkeit: Da $|x|^a = x^a$ für alle $x \geq 0$, was stetig differenzierbar in $[0, \infty)$ für alle $a \geq 1$ ist, ist $|x|^a$ lokal lipschitz stetig und die Lösung ist somit eindeutig.

Jetzt betrachten wir den Fall $a < 1$. Sei $t_0 > 0,\ \varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq t_0, \\ [(1-a)(t-t_0)]^{\frac{1}{1-a}} & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Es ist klar, dass die DGL in sowohl $[0, t_0)$ als auch in (t_0, ∞) erfüllt ist. Dann bleibt es nur die Ableitung in t_0 zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \searrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (1-a)^{\frac{1}{1-a}} (t - t_0)^{\frac{1}{1-a}} \\ &= \lim_{t \searrow t_0} (1-a)^{\frac{1}{1-a}} (t - t_0)^{\frac{a}{1-a}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

da

$$\frac{a}{1-a} = \frac{1}{\frac{1}{a} - 1} > 0.$$

Es ist klar, dass $\lim_{t \nearrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = 0$. $\varphi(t)$ ist damit in t_0 differenzierbar mit Ableitung 0. Die DGL ist also erfüllt. Da $\varphi(t)$ eine Lösung für alle $x_0 > 0$ ist, ist die Lösung nicht eindeutig. $\square$