Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 13, 2023)

Problem 1. (a) Seien $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $C \in A \otimes B$ und $a \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\{y \in Y | (a, y) \in C\} \in \mathcal{B}.$$

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann $K \times N$ eine λ_{m+n}-Nullmenge ist.

(c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine λ_m-Nullmenge und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann $M \times N$ eine λ_{m+n}-Nullmenge ist.

(d) Zeigen Sie Bemerkung 1.71, also dass $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n) \subsetneq \mathcal{L}(m + n)$.

Hinweis: Sie dürfen hierfür annehmen, dass $B \notin \mathcal{L}(n)$ tatsächlich existiert.

Proof. (a) Wir wissen, dass C eine abzählbare Vereinigung von Mengen $A_i \times B_i,\ A_i \in \mathcal{A},\ B_i \in \mathcal{B}$. Sei $\Pi_2 : X \times Y, \Pi_2 : (a, b) \to b$.

(b) Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, A_i \in \mathbb{J}(m)$ eine endliche Überdeckung von K, wobei jedes $\lambda_m(A_i) < \infty$.

> Das ist immer möglich, weil K kompakt ist. Wir können dann eine Überdeckung (A_i) von K wählen, und die Kompaktheit von K liefert eine endliche Teilüberdeckung.

Sei dann $A = \max(\lambda_m(A_1), \lambda_m(A_2), \ldots, \lambda_m(A_n))$. Per Definition (N ist eine λ_n-Nullmenge) gibt es eine abzählbare Überdeckung $(B_j), B_j \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) < \frac{\epsilon}{nA}.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Wir betrachten dann
$$M = \bigcup_{j=1}^{n} \{A_j \times B_i | i \in \mathbb{N}\},$$
was eine abzählbare Überdeckung von $K \times N$ ist, aber $\sum_{C \in M} \lambda_{n+m}(C) < \epsilon$, also $K \times N$ ist eine λ_{m+n}-Nullmenge.

(c) Wir haben, für alle Würfel $I_m \in \mathbb{R}^m$ und $I_n \in \mathbb{R}^n$, dass
$$\lambda^*_{n+m}(I_n \times I_m) = \lambda^*_n(I_n)\lambda^*_m(I_m).$$
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Per Definition gibt es eine Überdeckung $(B_i), B_i \in \mathbb{R}^n$ von N, sodass
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supseteq N \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_n(B_i) \leq 1.$$
Wir haben daher
$$\lambda^*_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_n(B_i) \leq 1.$$
Sei $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Es ist also $\lambda_n(B) \leq 1$. Sei $(A_i), A_i \in \mathbb{R}^m$ eine Überdeckung von M, für die gilt
$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_m(A_i) < \epsilon.$$
Jetzt ist $A_i \times B$ eine abzählbare Überdeckung von $N \times M$, und
$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_{n+m}(A_i \times B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_n(A_i) < \epsilon,$$
also $M \times N$ ist eine λ_{n+m}-Nullmenge.

$\square$

Problem 2. Sei $A \in \mathcal{L}(n)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gilt
$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(K) | K \supseteq A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

(b) Es gilt
$$\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(O) | O \subseteq A,\ O \text{ offen}\}.$$

Proof. (a) Falsch. Betrachten Sie $A = \mathbb{Q}$. Weil $\mathbb{Q}$ nicht beschränkt ist, gibt es keine kompakte Mengen K mit $K \supseteq A$. Deswegen ist

$$0 = \lambda_n(\mathbb{Q}) \neq \inf\{\lambda_n(K) | K \supseteq A,\ K \text{ kompakt}\} = \infty.$$

Bemerkung

Erinnern Sie sich daran, dass wir $\inf(\varnothing) = \infty$ definieren. Sonst kann man $\lambda_n(\mathbb{R})$ betrachten.

(b) Wahr.

$\square$

Problem 3. (Maße von Matrixbildern)

(a) Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und $\mu : \mathcal{B}^n \to [0, \infty]$ ein Maß. Zeigen Sie, dass $\mu_S : \mathcal{B}_n \to [0, \infty], \mu_S(A) := \mu(SA)$ wohldefiniert und ein Maß ist.

(b) Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht invertierbar. Zeigen Sie, dass $\lambda_n(SA) = 0$ für alle $A \in L(n)$ gilt.

Proof. Wir werden sehr oft einen Matriznorm brauchen:

Matriz ∞-Norm

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und $x \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \|x\| =& \|x\|_\infty, \text{ wie in der Vorlesung, und} \\ \|A\| =& \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \end{aligned}$$

(a) (i) (Wohldefiniert) Wir müssen nur zeigen, dass SA offen ist. Wir definieren die übliche Norm auf Matrizen $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$. Weil S invertierbar ist, muss $\|A\| > 0$ gelten. Sei $x \in A$ und eine r, sodass $B_r(x) \subseteq A$. Sei $y \in B_r(x)$. Es gilt

$$|Ay - Ax| \leq \|A\||y - x| \leq \|A\|r$$

also $B_{\|A\|r}(Sx) \subseteq SA$. Daraus folgt, dass SA offen ist, und μ_S wohldefiniert ist.

(ii) Wir haben auch, $\mu_S(\varnothing) = \mu(S\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

(iii) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{L}(n)$ eine Folge von messbare Mengen. Wir betrachten

$$\begin{aligned}\mu_S\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu\left(S\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\mu(SA_i) && (\sigma\text{-Additivität von } \mu)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\mu_S(A_i)\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass SA_i noch paarweise disjunkt ist, weil S bijektiv (insbesondere injektiv) ist.

(b) $\mu_S(A) := \mu(SA)$ ist noch Maß (vorherige Beweis gilt noch): Weil S nicht invertierbar ist, gibt es ein nichttriviales Kern. Wir entscheiden uns für ein Vektor $v_1 \in \ker(S)$. Dann machen wir ein Basisergänzung, um ein Basis zu konstruieren:

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Wir bezeichnen $[0,1)^n \in \mathcal{L}(n)$ als

$$[0,1)^n = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n | (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

für eine Menge M. Es gilt dann

$$\begin{aligned}S[0,1)^n &= \{a_1S(v_1) + a_2S(v_2) + \cdots + a_nS(v_n) | (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\}\\ &= \{a_2S(v_2) + \cdots + a_nS(v_n) | (a_1, a_2, \dots a_n) \in M\}\end{aligned}$$

$\{S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_n)\}$ ist kein Basis, weil die Nullvektor darin vorkommt (vielleicht mehr als einmal). Wir können jedoch ein Basisergänzung machen, die Nullvektoren einzusetzen. Sei das neue Basis

$$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Wir nehmen hier zum Beispiel an, dass $u_i = S(v_i) \forall i \geq 2$, also wir müssen nur $S(v_1) = 0$ einsetzen. Das Argument ist gleich, wenn das nicht stimmt. Sei $M = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Dann ist $\mu'(A) := \mu(M^{-1}SA)$ ein Maß, und

$$\mu'([0,1)^n) = \mu(\{\{0\} \times (a_2, a_3, \dots, a_n) | (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\}) = 0.$$

Also μ' ist ein Bewegungsinvariantes Maß mit $\mu'([0,1)^n) = 0$. Daraus folgt, dass

$$\mu(SA) = 0 \ \forall A \in \mathcal{L}(n). \qquad \square$$