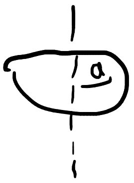
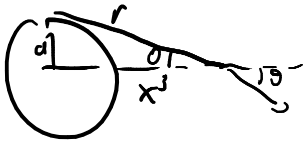
1. Geladener Draht vor kugelförmigen Leiter

In der Ebene $x^3 = 0$ befindet sich ein kreisförmiger Draht mit dem Radius a. Sein Mittelpunkt befindet sich am Ursprung des Koordinatensystems. Er ist homogen mit der Gesamtladung Q aufgeladen.

a) Bestimmen Sie das auf der x^3-Achse herrschende elektrische Feld $\vec{E}(x^1 = 0, x^2 = 0, x^3)$.



$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$$



$$r = \sqrt{a^2 + x_3^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x_3}{r}$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{x^3 \lambda \, d\varphi}{(a^2+(x^3)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{Q}{2\pi a}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,(2\pi)\,\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

In den Mittelpunkt des Drahtkreises wird nun eine dreidimensionale Kugel mit Radius r_0 platziert, mit $r_0 < a$, die ein geerdeter Leiter ist.

b) Zeigen Sie, dass die Green'sche Funktion für dieses Problem, mit Dirichlet-Randbedingungen auf der Kugeloberfläche, gegeben ist durch

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\frac{r_0}{|\vec{x}'|}}{4\pi\left|\vec{x} - \frac{r_0^2}{|\vec{x}'|^2}\vec{x}'\right|}. \qquad (1)$$

Randbedingungen

$G_D \to 0$ wenn $|\vec x| \to \infty$ (klar)

$G_D = 0$ wenn $\vec x \in \partial B_{r_0}(0)$

$\Leftrightarrow |\vec x| = r_0$

$$G_D(\vec x, \vec x') = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\left|\vec x - \frac{r_0^2}{|\vec x'|^2}\vec x'\right| - \frac{r_0}{|\vec x'|}|\vec x - \vec x'|}{|\vec x - \vec x'|\left|\vec x - \frac{r_0^2}{|\vec x'|^2}\vec x'\right|}\right]$$

Ziel: Wenn $|\vec x| = r_0$,

$$\left|\vec x - \frac{r_0^2}{|\vec x'|^2}\vec x'\right| - \frac{r_0}{|\vec x'|}|\vec x - \vec x'| = 0$$

$$\left|\vec x - \frac{r_0^2}{|\vec x'|^2}\vec x'\right| = \frac{r_0}{|\vec x'|}\left|\frac{|\vec x'|}{r_0}\vec x - \frac{r_0}{|\vec x'|}\vec x'\right|$$

$$= \frac{r_0}{|\vec x'|}\left||\vec x'|\hat x - |\vec x|\hat x'\right|$$

$$|\vec x - \vec x'| = \frac{r_0}{|\vec x'|}\left||\vec x'|\hat x - |\vec x|\hat x'\right|$$

also Randbedingung erfüllt

Wir betrachten

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$$

$$\partial_i f(\vec{x}) = -\frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \cancel{2} x_i$$

$$= - \frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}$$

$$\partial_i \partial_i f(\vec{x}) = - \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} + 3 \frac{x_i^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{5/2}}$$

$$\Delta_i f(\vec{x}) = 0 \quad \text{für} \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

Jetzt $\Delta_i f(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ durch integration

$$\iiint \Delta_i f(\vec{x}) \, d^3x$$

$$= \int \nabla f(\vec{x}) \, dA$$

$$= -\int \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^{3/2}} \cdot d\vec{A}$$

$$\neq 0$$

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\frac{r_0}{|\vec{x}'|}}{4\pi\left|\vec{x} - \frac{r_0{}^2}{|\vec{x}'|^2}\vec{x}'\right|}. \tag{1}$$

Zeigen Sie hierfür, dass die Differentialgleichung erfüllt ist, mit der die Green'sche Funktion definiert wird, und dass die Randbedingungen erfüllt sind.

c) Geben Sie das Potential $\phi(\vec{x})$ im Außenraum der Kugel in Form eines eindimensionalen Integrals an. Berechnen Sie dann das Potential auf der x^3-Achse, $\phi(x^1 = 0, x^2 = 0, x^3)$.

d) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(x^1 = 0, x^2 = 0, x^3)$ entlang der x^3-Achse außerhalb der Leiterkugel.

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\vec{x}, \vec{x}')\, \rho(\vec{x}')\, d^3x'$$

$$\rho(\vec{x}) = \frac{\lambda}{a}\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\delta(r - a)$$ in Kugelkoordinaten

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\vec{x}, \vec{x}')\, \rho(\vec{x}')\, d^3x'$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} G(\vec{x}, r', \theta', \varphi')\, \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)\delta(r' - a)\, \underset{\hat{=}\, r'^2 \sin\theta'}{dr\, d\theta\, d\varphi}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\int_0^{2\pi} a^2\, G\left(\vec{x}, a, \frac{\pi}{2}, \varphi'\right) d\varphi$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} a\cos\varphi' \\ a\sin\varphi' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$ einsetzen usw

d) $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\frac{r_0}{|\vec{x}'|}}{4\pi\left|\vec{x} - \frac{r_0{}^2}{|\vec{x}'|^2}\vec{x}'\right|}.$$

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$\left|\vec{x} - \frac{r_0^2}{a^2}\vec{x}'\right| = \sqrt{z^2 + \frac{r_0^4}{a^2}}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\lambda}{a} \int_0^{2\pi} a^2 \, G(\vec{x}, a, \tfrac{\pi}{2}, \varphi') \, d\varphi$$

2. Elektromagnetische Wellen

a) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum (keine Ladungen oder Ströme vorhanden) die homogenen Wellengleichungen für die Felder $\vec{E}(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x})$ her.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \cancel{\nabla(\nabla \cdot \vec{E})} - \nabla^2 \vec{E}$$

$$= -\nabla^2 E = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t}$$

$$= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{E} = 0$$

b) Betrachten Sie eine ebene Welle, gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}, \qquad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Lösungen der homogenen Wellengleichung sind.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = |\vec{k}|^2 \vec{E}$$

Lösungen, falls $-\omega^2 + \frac{|k|^2}{\mu_0 \varepsilon_0} = 0$

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega^2}{|k|^2} = c^2$$

(Definition)

c) Zeigen Sie, dass die Welle transversal ist, d.h. $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$. Drücken Sie $\vec{B}_0$ durch $\vec{E}_0$ aus.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

$$= E_x k_x \dots = 0$$

$$\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$$

Analog für $\vec{B}$

$$(\nabla \times \vec{E})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k$$

$$= \varepsilon_{ijk} \partial_j \left(E_{0,k} e^{i(k_e x_e - \omega t)} \right)$$

$$= \varepsilon_{ijk} k_j E_k$$

$$= \vec{k} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B} \parallel \vec{B}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

Betragsmäßig ist $\quad |\vec{k}||\vec{E}| = |\vec{B}|$

d) Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Energiedichte $\langle w \rangle$ und den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor $\langle \vec{S} \rangle$. Schreiben Sie die Ergebnisse als Funktion nur von $\vec{E}_0$.

$$\langle w \rangle = \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

einsetzen usw.

e) Die Welle trifft senkrecht auf einen Leiter. Berechnen Sie die Eindringtiefe δ, d.h. die Länge, nach der die Amplitude der Welle auf $1/e$ des Wertes der transmittierten Welle an der Oberfläche abgefallen ist. Der komplexe Brechungskoeffizient n erfüllt dabei $k = (\omega/c)n$, mit k der komplexen Wellenzahl.

Innerhalb des Leiters

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{(Ohmsche Gesetz)}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cancel{(\nabla \cdot \vec{E})} - \nabla^2 \vec{E}$$

$$= -\left(\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla^2 \vec{E} = 0$$

Ansatz $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$

($\vec{k}$ in x-richtung, $|\vec{k}| = k = k_x$)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 + i \mu_0 \sigma \omega + k^2 = 0$$

$\omega \in \mathbb{R}$ ist ω_{ein}

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma \omega$$

$$= \sqrt{\mu_0^2 \varepsilon_0^2 \omega^4 + \mu_0^2 \sigma^2 \omega^2}\, e^{-i \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right)}$$

Amplitude geht wie $e^{-|Im(k)|x}$

$$|Im(k)| = \frac{\sqrt{\mu_0^2 \varepsilon_0^2 \omega^4 + \mu_0^2 \sigma^2 \omega^2}}{2} \sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right)}{2}\right)$$

Spezielle Relativitätstheorie

a) Geben Sie die Lorentz-Transformation in eine Raum- und einer Zeitdimension an, und leiten Sie daraus die Längenkontraktion und die Zeitdilatation her.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Zeitdilation: $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ ist invariant

Wähle Bezugssystem, sodass $(\Delta x) = 0$. In diesem Bezugssystem nennen wir die Zeit $\Delta\tau$

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2(\Delta\tau)^2$$

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x)^2$$

$$= (\Delta t)^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right)$$

$$= (\Delta t)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= (\Delta t)^2/\gamma^2$$

$$\Delta\tau = \Delta t/\gamma$$

Längenkontraktion: Messung einer Länge bei gleichen Zeit

OBdA Messung bei $t' = 0$

Koordinaten x_2', x_1',

Länge $l' = x_2' - x_1'$

Transformation $x_2 - x_1$

$$= \gamma(x_2' - x_1')$$

(x_2 und x_1 werden nicht bei gleichen Zeit gemessen, aber in diesem Bezugssystem bewegt sich das Objekt nicht)

b) Geben Sie die Lorentz-Transformarion des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ in Matrixschreibweise (d.h. mit. $\Lambda^\mu{}_\nu$) an. Leiten Sie daraus, zusammen mit der expliziten Darstellung von $\Lambda^\mu{}_\nu$ für die Transformation aus Teil a), das Transformationsverhalten der Felder $\vec{E}(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x})$ her.

$$F = dA = d\left(\varphi\, dt + A_i\, dx^i\right)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dt + \frac{\partial A_i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^i$$

Wir betrachten die $\alpha = 0$, $dx^0 = dt$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$= \Lambda^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta} (\Lambda^T)_\beta{}^\nu$$

$$= \Lambda^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta (\Lambda^T)^{\beta\nu}$$

$$(F')^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta (\Lambda^T)^\beta{}_\nu$$

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F')^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & \gamma(E_y/c - \beta B_z) & \gamma(E_z/c + B_y\beta) \\ E_x/c & 0 & \gamma(B_z - \frac{E_y\beta}{c}) & -\gamma(B_y + E_z\beta/c) \\ \gamma(E_y/c - \beta B_z) & \gamma(-B_z + E_y\beta/c) & 0 & B_x \\ \gamma(E_z/c + B_y\beta) & \gamma(B_y + E_z\beta/c) & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -\gamma(E_y/c - \beta B_z) & -\gamma(E_z/c + B_y\beta) \\ E_x/c & 0 & -\gamma(B_z - \frac{E_y\beta}{c}) & \gamma(B_y + E_z\beta/c) \\ \gamma(E_y/c - \beta B_z) & -\gamma(-B_z + E_y\beta/c) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z/c + B_y\beta) & -\gamma(B_y + E_z\beta/c) & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_x' = E_x$$

$$E_y' = \gamma(E_y + vB_z)$$

$$E_z' = \gamma(E_z + vB_y)$$

$$B_x' = B_x$$

$$B_y' = \gamma(B_y + E_z\beta/c)$$

$$B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{E_y\beta}{c}\right)$$

c) Zeigen Sie, dass die Wirkung

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3}$$

invariant ist unter Lorentz-Transformationen.

klar, da $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ invariant ist

und $d^4x' = \det(\Lambda)\, d^4x$

$= d^4x$

d) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen der angegebenen Wirkung $\mathcal{S}$. Schreiben Sie dafür den Feldstärketensor mit Hilfe des Viererpotentials A^μ. Diskutieren Sie die Beziehung zwischen den erhaltenen Gleichungen und den Maxwell-Gleichungen.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

$$= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\Big[(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\beta A_\alpha) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta) + (\partial_\nu A_\mu)(\partial_\beta A_\alpha)\Big]$$