Theoretische Mechanik Hausaufgaben Blatt Nr. 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 7, 2023)

Problem 1. Die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen lautet:

$$\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t) + \omega^2 \vec{\mathbf{x}} = 0 \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Entwickeln Sie den Ortsvektor $x(t)$ und seine zeitlichen Ableitungen in der Polarkoordinatenbasis $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\phi\}$ und überzeugen Sie sich, dass die so aus (1) folgenden Differentialgleichungen den Bewegungsgleichungen entsprechen, die Sie wie in der Vorlesung mittels der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

direkt aus der Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $q_i = r, \phi$ erhalten.

Proof.

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}} =& \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \\
\dot{\vec{\mathbf{x}}} =& \dot{r} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + r\dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \\
\ddot{\vec{\mathbf{x}}} =& \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} + r\dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix} \\
=& (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right) \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Weil $(\cos\phi, \sin\phi)^T$ und $(\sin\phi, \cos\phi)^T$ linear unabhängig (sogar orthogonal) sind, kann die Gleichung $\ddot{\vec{\mathbf{x}}} + \omega^2 \vec{\mathbf{x}}(t)$ als

$$\begin{aligned}
\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r =& 0 \\
2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} =& 0
\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Man schreibt auch direkt die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$\begin{aligned}
r :& m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + m\omega^2 r = 0 \\
& \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r = 0 \\
\phi :& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\phi}\right) = 0 \\
& 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = 0 \\
& 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0.
\end{aligned}$$

□

Problem 2. Eine Punktmasse m rotiere reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen gespannten Faden der Länge l ($l = r + s$) sei sie durch ein Loch in der Platte mit einer anderen Masse M verbunden (s. Skizze). Wie bewegt sich M unter dem Einfluss der Schwerkraft?

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen.

2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten s und φ auf und ermitteln Sie daraus die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \equiv C$ gilt.

3. Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2, um die φ-Abhängigkeit in der Differentialgleichung für s zu eliminieren. Betrachten Sie nun den Gleichgewichtsfall $s(t) = \text{const}$ und finden Sie einen Ausdruck für die resultierende Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t) = \text{const} \equiv \omega_0$ der Masse m. Ausgehend vom Gleichgewichtsfall, unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?

4. Diskutieren Sie das Ergebnis für die Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(t_0) = 0$.

Proof. 1. $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 0$.

2.

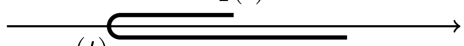
$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + Mg(l - r).$$

Weil $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, gilt aus der Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$, also $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \equiv C$.

3. Weil $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \equiv C$, gilt

□

Problem 3. Eine einmal gefaltete Schnur mit Gesamtlänge l und konstanter Masse pro Länge ρ bewegt sich auf der x-Achse. Die Endpunkte der Schnur seien mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet. Die Stelle, an der die Schnur gefaltet ist, sei mit $y(t)$ bezeichnet.



1. Geben Sie die Zwangsbedingungen des Systems an.

2. Geben Sie eine Langrangefunktion des Systems an.

   Betrachten Sie für die kinetische Energie T die Endpunkte x_1 und x_2, deren "Masse" durch die integrierte Masse des Schnurstücks zwischen x_1 und y bzw. x_2 und y gegeben ist.

3. Die Lagrangefunktion kann in den Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = x_1 - x_2 \text{ und } X = \frac{1}{2l}\left[(x_1 - y)(x_1 + y) + (x_2 - y)(x_2 + y)\right]$$

   zu

$$L = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\xi}^2$$

   umgeschrieben werden, wobei M und μ Funktionen von X und ξ sind. Bestimmen Sie M und μ durch den Vergleich der Lagrangefunktionen in Koordinaten (x_1, x_2) und (X, ξ).

Proof. 1. $l = x_2(t) - y(t) + x_1(t) - y(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2y(t)$

2. Wir betrachten eine Koordinate $0 \leq \xi \leq l$, die ab x_1 anfängt und steigt monoton, bis die andere Seite. Die Position eine kleine Masselemente ist:

$$x(\xi) = y + |\xi - (x_2 - y)|.$$

   Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =& \dot{y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\xi - (x_2 - y)| \\ =& \dot{y} + \operatorname{sgn}(\xi - (x_2 - y))\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

Wir integrieren die Geschwindigkeit, um die kinetische Energie zu bekommen:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho\int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}\xi =& \frac{1}{2}\rho\left[\int_0^{x_2-y} (\dot{y}-(\dot{y}-\dot{x}_2))^2 \,\mathrm{d}\xi + \int_{x_2-y}^{l} (\dot{y}+(\dot{y}-\dot{x}_2))^2 \,\mathrm{d}\xi\right] \\
=& \frac{1}{2}\rho\left[(x_2-y)\dot{x_2}^2 + (l-x_2+y)(2\dot{y}-\dot{x}_2)^2\right]
\end{aligned}
$$

□