Lehrstuhl für Mathematik VIII
Julius-Maximilians Universität Würzburg
Vorlesung Stochastik 1
Wintersemester 2024/25
Markus Bibinger / Adrian Grüber

Übungsblatt 5

Klausurübung 5.1

Seien X_1, X_2 und X_3 Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern p_1, p_2 und p_3, $p_j \in [0,1], 1 \leq j \leq 3$. Es gilt also $\mathbb{P}(X_j = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_j = 0) = p_j$, $1 \leq j \leq 3$. Ereignisse der Form $\{X_i = k\}$, $\{X_j = l\}$, $l, k \in \{0,1\}$, seien für alle $i \neq j$ unabhängig.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 + X_2 + X_3 = 1\}$.

(b) Leiten Sie die Verteilung der Zufallsvariable $S = X_1 + X_2 + X_3$ her. Geben Sie insbesondere an, um welche Art von Zufallsvariable es sich hier handelt.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 < X_3\}$.

(d) Wir definieren die Zufallsvariable $Y = \mathbb{1}\{X_1 < X_2\}$. Wie ist Y verteilt?

Übung 5.2

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{7}{20} + \frac{1}{5}x + \frac{1}{20}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

um eine Verteilungsfunktion handelt.

(b) Es handelt sich hier um eine Mischung aus diskreter und stetiger Verteilung, also ist F von der Form

$$F(x) = a\,F^d(x) + b\,F^s(x)\,,$$

mit positiven Zahlen a und b, $a + b = 1$, und F^d Verteilungsfunktion einer diskreten und F^s einer stetigen Verteilung.
Bestimmen Sie a, b, sowie F^d und F^s. Skizzieren Sie F^d, F^s und F. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Verteilung an.

(c) Ein Median m einer Verteilung wird häufig eingeführt als eine Zahl, für welche

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2, \text{ und } \mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2,$$

gilt. Bestimmen Sie einen so definierten Median zu der durch F charakterisierten Verteilung.

Aufgabe 5.3 (keine Abgabe)

Sie spielen im Casino Roulette (an einem Tisch mit 37 Feldern, davon 18 rot). Sie setzen in jeder Runde auf rot und beschließen zu gehen, nachdem Sie drei weitere Male gewonnen haben.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit können Sie spätestens nach 5 Runden gehen und mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie noch mindestens 6 Runden warten?

(b) Beschreiben Sie die Verteilung der Wartezeit in Runden $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$, durch eine Wahrscheinlichkeitsfunktion (Zähldichte).

(c) Zeigen Sie, dass für Parameter $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$, $\mathrm{p}\colon \mathbb{N}_0 \to (0,1)$, mit

$$\mathrm{p}(k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \,,$$

eine Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Verteilung ist. Sie können dazu die Binomialreihe verwenden.

Aufgabe 5.4 (keine Abgabe)

Ein deutscher Versicherer biete für 40-jährige Männer eine Risikolebensversicherung über 10 Jahre Laufzeit zu einem Monatsbeitrag von 25€ an, der jeden Monat über die 10 Jahre zu zahlen ist. Im Todesfall werden 150.000€ gezahlt. Wir entnehmen aktuellen Statistiken, dass die Wahrscheinlichkeit eines 40-jährigen Mannes im nächsten Jahr zu sterben bei etwa 0,131% liegt und eines 50-jährigen Mannes bei etwa 0,335%. Die Werte aller Altersstufen dazwischen können aus Tabelle 1 entnommen werden.[1]

(a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit eines Versicherungsfalls im Beispiel etwa 2,03% beträgt. Berechnen Sie zudem die Wahrscheinlichkeit eines Versicherungsfalls bei einer Frau mithilfe der Werte aus Tabelle 1.

(b) Der Versicherer verkauft 5000 dieser Verträge. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Einnahmen die zu zahlenden Leistungen übertreffen. Sie können dafür eine Binomialverteilung verwenden und die Wahrscheinlichkeit als den Wert der Verteilungsfunktion angeben. Versuchen Sie diesen auch numerisch auszurechnen.[2]

(c) Ein zweiter Versicherer verkauft 5000 ähnliche Lebensversicherungsverträge an Frauen mit einem Monatsbeitrag von 15€ und derselben Auszahlung von 150.000€ im Todesfall. Welche Wahrscheinlichkeit hat er, dass die Einnahmen Einnahmen die zu zahlenden Leistungen übertreffen? Sie können dafür erneut eine Binomialverteilung verwenden.

(d) Setzen Sie $\lambda = n \cdot p$, mit den Parametern der Binomialverteilung, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit aus (b) und (c) in einem Modell mit einer Poissonverteilung mit Parameter λ.

Bearbeitung bis Donnerstag, den 21.11.2024.

[1] Sterbetafeln Statistisches Bundesamt, siehe auch unten.
[2] In R kann dazu die Funktion `pbinom` verwendet werden.

Tabelle 1: Ausschnitt der Sterbetafel 2021/23 für Männer und Frauen zwischen dem 40. und 50. Altersjahr

Vollendetes Alter in Jahren	Männlich			Weiblich		
	Sterbe-	Überlebens-	Durchschnitt-liche Lebens-erwartung im Alter x in Jahren	Sterbe-	Überlebens-	Durchschnitt-liche Lebens-erwartung im Alter x in Jahren
	wahrscheinlichkeit vom Alter x bis $x+1$			wahrscheinlichkeit vom Alter x bis $x+1$		
x	$q_m(x)$	$p_m(x)$	$e_m(x)$	$q_w(x)$	$p_w(x)$	$e_w(x)$
40	0,00130981	0,99869019	39,24	0,00071263	0,99928737	43,73
41	0,00142864	0,99857136	38,29	0,00077836	0,99922164	42,76
42	0,00156076	0,99843924	37,34	0,00085107	0,99914893	41,79
43	0,00170846	0,99829154	36,40	0,00093194	0,99906806	40,82
44	0,00187351	0,9912649	35,46	0,00102207	0,99897793	39,86
45	0,00205784	0,99794216	34,53	0,00112276	0,99887724	38,90
46	0,00226355	0,99773645	33,60	0,00123549	0,99876451	37,95
47	0,00249294	0,99750706	32,67	0,00136197	0,99863803	36,99
48	0,00274858	0,99725142	31,75	0,00150414	0,99849586	36,04
49	0,00303388	0,99696612	30,84	0,00166362	0,99833638	35,10
50	0,00335310	0,99664690	29,93	0,00184180	0,99815820	34,15