Aufgabe 1 *Thermodynamische Potentiale: magnetisches System* **8 P.**

Betrachten Sie ein magnetisches System, welches aus N nicht wechselwirkenden lokalen Dipolen m_i besteht. Bei einem reversiblen Prozess ändert sich die innere Energie E des Systems gemäß

$$dE(S, M, N) = T\,dS + B\,dM + \mu\,dN\,,$$

wobei B das magnetische Feld (z.B. in z-Richtung) ist und $M = \sum \langle m_i \rangle$ die totale Magnetisierung (in z-Richtung) des Systems ist.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von E die Freie Energie $F(T, M, N)$, sowie die Enthalpie $H(S, B, N)$ und die Freie Enthalpie $G(T, B, N)$ in differentieller Form. *3 P.*

$$F = E - TS$$

$$dF = dE - T\,dS - S\,dT$$

$$= T\,dS + B\,dM + \mu\,dN - T\,dS - S\,dT$$

$$= -S\,dT + B\,dM + \mu\,dN$$

$$H = E - BM$$

$$dH = dE - B\,dM - M\,dB$$

$$= T\,dS + B\,dM + \mu\,dN - B\,dM - M\,dB$$

$$= T\,dS - M\,dB + \mu\,dN$$

$$G = H - TS$$

$$dG = T\,dS - M\,dB + \mu\,dN - T\,dS - S\,dT$$

$$= -S\,dT - M\,dB + \mu\,dN$$

b) In einem paramagnetischen System, für welches die lokalen Dipole nur zwei Werte $m_i = \pm m$ annehmen können gilt *3 P.*

$$G(T, B, N) = -Nk_BT\,\ln\left[2\cosh\left(\frac{mB}{k_BT}\right)\right].$$

Bestimmen Sie daraus mittels Differenzieren die Magnetisierung M. Invertieren Sie den Ausdruck um B als Funktion von M, N und T zu erhalten. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Legendre Transformation von $G(T, B, N)$, bezüglich B, die Freie Energie $F(T, M, N)$.

$$M = \left(\frac{\partial G}{\partial B}\right)_{T,N} = \frac{-Nk_B\cancel{T}}{\cancel{2}\cosh\frac{mB}{k_BT}}\left(\cancel{2}\sinh\left(\frac{mB}{k_BT}\right)\frac{m}{k_B\cancel{T}}\right)$$

$$= -Nm\tanh\frac{mB}{k_BT}$$

$$F = G + MB$$

$$= -Nk_BT\ln\left[2\cosh\frac{mB}{k_BT}\right] - BNm\tanh\frac{mB}{k_BT}$$

$\square$

c) Berechnen Sie die Wärmekapazität dieses paramagnetischen Systems in einem konstanten magnetischen Feld *2 P.*

$$C_B = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{B,N},$$

sowie die magnetische Suszeptibilität bei konstanter Temperatur

$$\chi_T = \mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_{T,N}.$$

Hinweis: Hier ist es wichtig, dass die geeigneten thermodynamischen Potentiale und die richtigen unabhängigen Variablen gewählt werden.

$$G = G(T, B, N)$$

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{B,N}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{B,N} = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{B,N}$$

$$G = -N k_B T \ln\left[2\cosh\frac{mB}{k_B T}\right]$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{B,N} = \frac{B^2 m^2 N \operatorname{sech}^2\left(\frac{Bm}{k_B T}\right)}{k_B T^3}$$

und daher

$$C_B = \frac{B^2 m^2 N \operatorname{sech}^2\left(\frac{Bm}{k_B T}\right)}{k_B T^2}$$

$$M = -\left(\frac{\partial G}{\partial B}\right)_{T,N}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial B^2}\right)_{T,N}$$

$$= \frac{m^2 N \operatorname{sech}^2\frac{mB}{k_B T}}{k_B T}$$

$$\chi_T = \frac{\mu_0 m^2 N \operatorname{sech}^2\frac{mB}{k_B T}}{k_B T}$$

#

Aufgabe 2 *Ideales Gas* **3 P.**

Betrachten Sie ein ideales Gas mit Zustandsgleichung $Nk_BT = pV$ und innerer Energie $E = 3/2\,Nk_BT$, sowie konstanter Teilchenzahl N. Zeigen Sie dass bei einem adiabatischen Prozess ($\delta Q = 0$) die Adiabatengleichung

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad \text{mit} \quad \gamma - 1 = \frac{Nk_B}{C_V}$$

gilt. Hierbei bezeichnet C_V die Wärmekapazität bei konstantem Volumen.

Nach Zustandsgleichung:

$$N k_B\, dT = p\,dV + V\,dp$$

$$dE = C_V\,dT = -p\,dV \quad \text{(adiabatisch)}$$

$$N k_B \left(-\frac{p\,dV}{C_V}\right) = p\,dV + V\,dp$$

$$p\left(1 + \frac{N k_B}{C_V}\right)dV + V\,dp = 0$$

$$0 = \gamma p\,dV + V\,dp$$

$$= \gamma p V^{\gamma-1}\,dV + V^{\gamma}\,dp$$

$$= d\left(pV^{\gamma}\right)$$

dann gilt auch

$$d\left(TV^{\gamma-1}\right) = 0$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

Aufgabe 3 *Thermodynamische Relationen bei konstanter Teilchenzahl* **4 P.**

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Maxwell-Relation *2 P.*

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T ,$$

indem Sie die freie Energie F, als Funktion von T und V schreiben.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Relation, dass bei konstanter Teilchenzahl *2 P.*

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\frac{\partial p}{\partial T} - p$$

gilt.
Hinweis: Benutzen Sie

$$dE = T\,dS + p\,dV$$

und schreiben Sie S als Funktion von T und V.

Bei konstanter Teilchenzahl

$$dE = TdS - pdV$$

$$F = E - TS$$

$$dF = -SdT - pdV$$

exaktes differential!

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V , \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} = -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

gottem lmao

b)

$$TdS = dE + pdV$$

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV$$

Daher $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E = \frac{p}{T}$, $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T}$

$$S = S(E(T,V), V)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p$$

$$= T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

wwwww "Which Was What We Wanted"