Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 8, 2023)

Problem 1. Wir definieren mit S_n die Menge der bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} .$$

Dann ist bekannterweise $(S, \circ)$ mit

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(i) = \sigma_2(\sigma_1(i))$$

eine Gruppe. Wir führen für gewöhnlich eine Abbildungstabelle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

mit $i_1, \dots, i_n$ paarweise verschieden, um zu signalisieren $\sigma(k) = i_k$ für $k = 1, \dots, n$.

(a) Eine übliche Darstellung bei Elementen aus S_n ist die Zyklenschreibweise. Ein Zyklus der Länge k mit $k \leq n$ hat die Form

$$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$$

und signalisiert $i_1 \to i_2, i_2 \to i_3$, usw. $i_k \to i_1$ under σ. Ist die Zahl i_j nicht im Zyklus vertreten, so wird sie unter σ auf sich selbst abgebildet. Speziell für $k = 1$ erhalten wir die Identität und schreiben

$$\sigma = (1).$$

Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Abbildungen σ durch ein Zyklus der Länge k realisiert werden können! Kann jedes Element in S_3 (S_4) als ein Zyklus geschriebeb werden?

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Wir definieren die Menge der (Permutations-)Matrizen

$P_n := \left\{ P \in \mathbb{K}^{n \times n} : P = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}, \text{ mit } i \leq i_k \leq n \text{ und alle } i_k \text{ paarweise verschieden} \right\},$

mit e_i der i-te Einheitsvektor. Verifizieren Sie: $(P_n, \cdot)$ ist mit der herkömmlichen Matrixmultiplikation eine Gruppe! Bestimmen Sie weiterhin einen bijektiven Gruppenmorphismus

$$\Phi : (S_n, \circ) \to (P_n, \cdot),$$

sodass gilt

$$\Phi(\sigma) e_i = s_j \iff \sigma(i) = j.$$

Beweisen Sie, dass sich jedes P aus P_n schreiben lässt als

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} V_{i_k j_k},$$

mit V_{ij} definiert wie in Lemma 5.56.

Proof. (a) Es gibt $n!$ Möglichkeiten für eine Folge $(i_1 i_2 \ldots i_k)$, aber wir können die zyklisch permutieren und σ verändert sich nicht. Deswegen gibt es $n!/n = (n-1)!$ unterschiedliche Abbildungen, die durch ein Zyklus der Länge k realisiert werden können.

Ja, jedes Element in S_3 kann als ein Zyklus geschrieben werden. Das können wir explizit machen:

$$\begin{array}{cc} (1) & (12)(23) \\ (13) & (132)(123) \end{array}$$

Weil wir 6 Elemente haben, und $|S_3| = 3! = 6$, haben wir alle Elemente.

Das stimmt aber nicht für S_4. Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Falls es als Zyklus geschreiben werden kann, muss das Zyklus den Länge 4 haben, weil $\sigma(i) \neq i$ für alle i.

□