Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 23, 2023)

Problem 1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum des jeweils angegebenen Vektorraums sind.

(a) $\{p \in \mathbb{R}[t] | \deg(p) \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}[t]$.

(b) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(c) $B = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) $\{p \in \mathbb{Q}[t] | \forall a \in \mathbb{Q} : \tilde{p}(-a) = \tilde{p}(a)\}$, wobei $\tilde{p}$ die zu p gehörige Polynomfunktion bezeichnet, als Teilmenge von $\mathbb{Q}[t]$.

(e) $\{(1,2,3) + t \cdot (4,5,6) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Proof. (a) Ja. Sei $p_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$ und $p_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$. Es gilt

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 = &(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t \\ &+ (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 + b_3)t^3 + (a_4 + b_4)t^3 \end{aligned}$$

was auch ein Polynom mit Grad ≤ 4 ist.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$xp_1 = xa_0 + xa_1 t + xa_2 t^2 + xa_3 t^3 + xa_4 t^4,$$

noch ein Polynom mit Grad ≤ 4.

(b) Nein. Es ist sogar kein Vektorraum, weil $0 \notin \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(c) Nein. Sei $z \in B$ mit $|z| = a < 1$. Dann ist

$$\left|\frac{1}{a^2}z\right| = \frac{1}{a^2}|z| = \frac{1}{a} > 1,$$

also B ist nicht unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

(d) Ja. Sei p_1, p_2 beliebige Elemente von der Menge, und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt $p_1 \tilde{+} p_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$, und per Definition

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1(a) =& \tilde{p}_1(-a)\\ \tilde{p}_2(a) =& \tilde{p}_2(-a)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$p_1 \tilde{+} p_2(a) = \tilde{p}_1(a) + \tilde{p}_2(a) = \tilde{p}_1(-a) + \tilde{p}_2(-a) = p_1 \tilde{+} p_2(-a).$$

Außerdem ist $x\tilde{p}_1 = x\tilde{p}_1$, und

$$x\tilde{p}_1(a) = x\tilde{p}_1(a) = x\tilde{p}_1(-a) = x\tilde{p}_1(-a).$$

(e) Nein. Wir wissen, dass $(1, 2, 3)$ ein Element von unserer Menge ist. Dann sollte $2(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$ auch ein Element sein. Wir würden dann schreiben

$$(1, 2, 3) + t(4, 5, 6) = (2, 4, 6),$$

also

$$t(4, 5, 6) = (1, 2, 3).$$

Aus $6t = 3$ haben wir $t = \frac{1}{2}$. Dann ist $5t = \frac{5}{2} \neq 2$, ein Widerspruch, also es ist kein Untervektorraum.

□

Problem 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien im jeweiligen Vektorraum linear unabhängig sind

(a) $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $((1, i), (i, -1))$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$.

(c) $((1, i), (i, -1))$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$.

(d) $(1, 1+t, 1+t+t^2)$ im $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$.

(e) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Proof. (a) Nein, weil

$$(1,2,3)+(5,4,3)+(-1)(6,6,6)=0.$$

(b) Ja. Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$a(1,i)+b(i,-1)=(a+bi, ai-b).$$

Wir würden $a+bi=0$ und $ai-b=0$. Aber wir wissen, dass das nur möglich ist, wenn $a=b=0$, also $(1,i)$ und $(i,-1)$ sind linear unabhängig.

(c) Nein, weil

$$i(1,i)+(-1)(i,-1)=(i,-1)-(i,-1)=0,$$

und wir haben $i \neq 0$.

(d) Ja.

$\square$

Problem 3. Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums sind

(a) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $(\exp it)_{t\in\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) $(1+t^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(d) $(\tilde{p})_{p\in\mathbb{R}[t]}$ für den Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(e) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Proof. (a) Nein. Wir betrachten $(6,6,5)$. Wir hoffen, dass es als Summe

$$(6,6,5)=a(1,2,3)+b(5,4,3)+c(6,6,6)$$

dargestellt werden kann, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$. Weil $(6,6,6)$ als linear Kombination der anderen 2 Vektoren geschrieben werden kann, können wir oBdA schreiben

$$(6,6,5)=a'(1,2,3)+b'(5,4,3)+(6,6,6),$$

oder einfach

$$(0,0,-1) = a'(1,2,3) + b'(5,4,3).$$

wobei $a', b' \in \mathbb{R}$. Dann ist $a' + 5b' = 0$, oder $a = -5b'$. Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 =& 2a' + 4b' \\ =& 2(-5b') + 4b' \\ =& -6b' \end{aligned}$$

also $b' = 0$. Daraus folgt $a' = 0$. Aber

$$0(1,2,3) + 0(5,4,3) = (0,0,0) \neq (0,0,-1).$$

(b) Nein. Wir betrachten $i = \exp(i\pi/2) \in \mathbb{C}$. Es sollte eine lineare Kombination von Vektoren $(\exp it)_{t \in \mathbb{Q}}$ sein.

$\square$