

Theoretische Mechanik Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 20, 2023)

Problem 1. Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in einer Dimension, d. h. das Anfangswertproblem

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x(t)) = -kx(t)$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \in \mathbb{R}$$

1. Zeigen Sie, daß wenn eine komplexwertige Funktion $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ mit $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ die Differentialgleichung (1a) löst, ihr Realteil $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ zur Lösung des reellen Anfangswertproblems (1) benutzt werden kann.
2. Was ist die allgemeinste Form der rechten Seite der Differentialgleichung (1a), für die der Realteil einer komplexen Lösung selbst eine Lösung ist? Geben Sie Gegenbeispiele an.
3. Machen Sie den üblichen Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten...

Proof. 1. Sei $x(t) = x_r(t) + ix_i(t)$, $x_r, x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$m \left(\frac{d^2 x_r}{dt^2} + i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = -k(x_r + ix_i).$$

Weil das eine Gleichung von zwei komplexe Zahlen ist, gilt auch

$$m \frac{d^2 x_r}{dt^2} = -kx_r.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

2. Das passt für alle reelle lineare Kombinationen der Ableitungen von $x(t)$.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x}{dt^i} = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

a. Gegenbeispiele

(i) Irgendeine $a_i \notin \mathbb{R}$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -ikx(t), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Hier ist es klar, dass *keine* Abbildung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung sein kann, weil die linke Seite reelle wird, aber die rechte Seite nicht reelle wird.

Daraus folgt: Das Realteil der Lösung ist kein Lösung.

(ii) Nichtlineare Gleichung, z.B.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

3.

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 \alpha e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} m \alpha \lambda^2 e^{\lambda t} &= -k \alpha e^{\lambda t} \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\ \lambda &= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Daraus folgt, für $z_1(t)$:

$$\begin{aligned}
 z_1(0) &= \alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = x_0 \\
 z_1'(0) &= -i\omega\alpha_{1,+} + i\omega\alpha_{1,-} = v_0 \\
 &\quad -\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = -\frac{iv_0}{\omega} \\
 2\alpha_{1,-} &= x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \\
 2\alpha_{1,+} &= x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \\
 z_1(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} + \left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} \right]
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die andere Formen der Lösungen:

(i) $x_2(t)$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} + \left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + i(\dots) \right] \\
 &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t
 \end{aligned}$$

(ii) $x_3(t)$ (R-Formula)

$$\begin{aligned}
 x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t &= \alpha_3 \sin(\omega t + \delta_3) \\
 \alpha_3 &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2} \\
 \delta_3 &= \arctan \frac{v_0}{x_0 \omega}
 \end{aligned}$$

(iii) $x_4(t)$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_4 = \alpha_3 \quad \delta_4 = \delta_3 + \frac{\pi}{2}.$$

□

Problem 2. ...*Proof.* 1.

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = \alpha \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \alpha \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Daraus folgt

$$m\lambda^2 \alpha e^{\lambda t} = -k\alpha e^{\lambda t} - 2m\gamma\lambda\alpha e^{\lambda t}$$

$$0 = m\lambda^2 + 2m\gamma\lambda + k$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}$$

Falls $\gamma^2 \neq \frac{k}{m}$:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[A e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right],$$

$$\begin{aligned} x'(t) = & -\gamma e^{-\gamma t} \left[A e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right] \\ & + e^{-\gamma t} \left[A \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} - B \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right] \end{aligned}$$

und

$$x(0) = A + B = x_0$$

$$x'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} (A - B) = v_0$$

$$2A = x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}}$$

$$2B = x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}}$$

Es ist zu beachten, dass es möglich ist, dass $\gamma^2 < \frac{k}{m}$. In diesem Fall ist $\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}$, aber der Form der Lösung bleibt.

Für $\gamma^2 = \frac{k}{m}$ ist die Lösung

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}.$$

Es gilt

$$x'(t) = -\gamma A e^{-\gamma t} + B e^{-\gamma t} - B t \gamma e^{-\gamma t}.$$

Dann

$$x(0) = A = x_0$$

$$x'(0) = -\gamma A + B = v_0$$

$$B = v_0 + \gamma x_0$$

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} + (v_0 + \gamma x_0) t e^{-\gamma t}$$

2. Wir suchen eine Partikularlösung für die Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 e^{-i\omega_0 t}$$

mit dem Form

$$x(t) = A e^{-i\omega_0 t}.$$

Es gilt

$$x'(t) = -i\omega_0 A e^{-i\omega_0 t}$$

$$x''(t) = -\omega_0^2 A e^{-i\omega_0 t}$$

Dann ist

$$-\omega_0^2 A m e^{-i\omega_0 t} - 2m\gamma i\omega_0 A e^{-i\omega_0 t} + A k e^{-i\omega_0 t} = F_0 e^{-i\omega_0 t},$$

$$A = \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k}.$$

3. für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ und äußere Kraft $F_{\text{ext}} \equiv 0$ ist die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Wir berechnen

$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= \frac{m}{2} (-x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t)^2 \\
 &= \frac{m}{2} (x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t - 2x_0 v_0 \omega \sin \omega t \cos \omega t + v_0^2 \cos^2 \omega t) \\
 &= \frac{m}{2\omega^2} \left(x_0^2 \sin^2 \omega t - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t \right) \\
 &= \frac{k}{2} \left(x_0^2 (1 - \cos^2 \omega t) - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} (1 - \sin^2 \omega t) \right)
 \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{k}{2} x(t)^2 = \frac{k}{2} \left(x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right)$$

folgt

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \frac{k}{2} \left(x_0^2 (1 - \cos^2 \omega t) - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} (1 - \sin^2 \omega t) \right) \\
 &\quad + \frac{k}{2} \left(x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right) \\
 &= \frac{k}{2} x_0^2 + \frac{k v_0^2}{2\omega^2},
 \end{aligned}$$

was nicht abhängig von t ist.

Wir untersuchen jetzt die Energie für eine harmonische äußere Kraft. Wenn die Dämpfung $\neq 0$ ist, ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_h(t) + x_p(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t).$$

Daher muss man nur die Energie der Partikularlösung berechnen:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t} \\
 \dot{x}(t) &= - \frac{iF_0\omega_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

Wenn $\gamma = 0$, kann $x(t) \rightarrow \infty$, wenn

$$-m\omega_0^2 + k = 0 \quad (\text{Resonanz}).$$

Das bedeutet $E(t) \rightarrow \infty$ auch.

□