

Wintersemester 2023/24

8. Übung zur Vertiefung Analysis

6. Dezember 2023

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 13. Dezember 2023* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

Hinweis: Bearbeiten Sie die Aufgaben auf diesem Blatt bitte so, dass gut erkenntlich ist, wann/wo/wie Sie Resultate aus Kapitel 2.6 benutzen.

Aufgabe 8.1 (Assoziativität, 6 Punkte) Seien (X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) und (Z, \mathcal{C}, η) σ -endliche Maßräume. Definiere $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} := \mathcal{A}_\sigma \boxtimes \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{C}$. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$.

Hinweis: Betrachten Sie $\Pi_(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ mit*

$$\Pi : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y, \quad \Pi(x, y, z) := (x, y).$$

- (b) Es gilt $(\mu \otimes \nu) \otimes \eta = \mu \otimes (\nu \otimes \eta)$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$.

Aufgabe 8.2 (Kugeln, 4 Punkte) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $a < b \in \mathbb{R}$, $r : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion und

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < r(z)^2, z \in [a, b]\}.$$

- (a) Bestimmen Sie $\lambda_2(B_R(x_0))$ für $R > 0$ mittels dem Satz von Fubini.
(b) Zeigen Sie

$$\lambda_3(A) = \pi \int_a^b r(z)^2 \, dz.$$

Aufgabe 8.3 (Zylinder, 4 Punkte) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq |a| + |b|$. Definiere

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, 0 \leq z \leq ax + by + c\}.$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(E)$.

Aufgabe 8.4 (Kugelschnitte, 3 Punkte) Seien $B_1 := B_1(0, 0, 0) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $B_2 := B_1(0, 0, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$ die offenen Kugeln mit Radius 1 um die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Bestimmen Sie $\lambda_3(B_1 \cap B_2)$.