Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Wachsmuth
Bastian Dittrich

Wintersemester 2023/24

1. Übung zur Vertiefung Analysis

18. Oktober 2023

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 25. Oktober 2023* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

Aufgabe 1.1 (Beweisen oder Widerlegen, 6 Punkte) Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ σ-Algebren über X sowie $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra über Y. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(c) $\mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(d) $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B \in \mathcal{B}\}$ ist eine σ-Algebra über X.

(e) $f(\mathcal{A}) = \{f(A) \subseteq Y \mid A \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Aufgabe 1.2 (erzeugte σ-Algebra, 7 Punkte)

(a) Sei $X := \mathbb{Q}$ und $\mathcal{A}_\sigma(M)$ die von $M := \{(a, b] \cap \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_\sigma(M) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie $\{q\} \in \mathcal{A}_\sigma(M)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

(b) Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ gilt

$$f^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right).$$

Das Urbild von $\mathcal{M}$ ist hierbei analog zum Urbild einer σ-Algebra definiert durch

$$f^{-1}(\mathcal{M}) := \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B \in \mathcal{M}\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie an geeigneter Stelle $f_*\left(\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right)\right)$.

Aufgabe 1.3 (Borelmengen, 4 Punkte) Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik, also ausgestattet mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Für $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$. Definiere außerdem $B_\mathbb{Q} := \{B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n \mid \mathbb{Q} \ni r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$ und $B_\mathbb{R} := \{B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \mid r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$.

(a) Zeigen Sie: Für jede offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $A = \bigcup_{B_r(q) \in M} B_r(q)$ mit

$$M := \{B_r(q) \in B_\mathbb{Q} \mid B_r(q) \subseteq A\}.$$

(b) Folgern Sie nun $\mathcal{A}_\sigma(B_\mathbb{Q}) = \mathcal{A}_\sigma(B_\mathbb{R}) = \mathcal{B}^n$.

Aufgabe 1.4 (Mengenfunktionen, 4 Punkte) Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion.

(a) Sei μ σ-subadditiv, $B \in \mathcal{A}$ und definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty], \mu_B(A) := \mu(A \cap B)$. Zeigen Sie, dass μ_B wohldefiniert und eine σ-subadditive Mengenfunktion ist.

(b) μ erfülle die beiden Eigenschaften

1. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$,
2. $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)$ für alle $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$.

Zeigen Sie, dass μ σ-additiv ist.