

# Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan\*

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: January 11, 2024)

**Problem 1.** Betrachten Sie die folgenden  $3 \times 3$ -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ -1+i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die adjungierten Abbildungen  $A^*$  und  $B^*$ .
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$  und  $B$ .
- (c) Überprüfen Sie, dass sich aus den Eigenvektoren der Matrix  $A$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^3$  mit Standardskalarprodukt bauen lässt. Führen Sie das selbe auch mit Matrix  $B$  durch.
- (d) Bestimmen Sie unitäre Matrizen  $U, V \in M_3(\mathbb{C}^3)$ , sodass  $UAU^*$  und  $VBV^*$  diagonal sind. Können Sie zudem erreichen, dass  $U$  und  $V$  orthogonal sind?

*Proof.* (a)

$$A^* = A, \quad B^* = \begin{pmatrix} 1-i & -1-i & 0 \\ 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

(b)  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

---

\* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}
&= (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) - (1 - \lambda) + (\lambda - 1) \\
&= (2 - \lambda)^3 - (2 - \lambda) - 2 + 2\lambda \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\lambda = 1$  ein Nullstelle des Polynoms. Es gilt

$$\begin{aligned}
-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4) \\
&= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)
\end{aligned}$$

also die Eigenwerte von  $A$  sind 1 und 4.

Ähnlich für  $B$ :

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - i - \lambda & -1 - i & 0 \\ 1 + i & 1 - i - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 3(1 - i)\lambda^2 + 4i\lambda \\
&= -\lambda(\lambda - (1 - i))(\lambda - (2 - 2i))
\end{aligned}$$

also die Eigenwerte sind 0,  $1 - i$  und  $2 - 2i$ .

(c) Wir berechnen die Eigenvektoren:

Für  $A$ :

$$\begin{aligned}
\text{EW} = 4 &: (1, 1, 1)^T \\
\text{EW} = 1 &: (-1, 0, 1)^T \\
\text{EW} = 1 &: (-1, 1, 0)^T
\end{aligned}$$

Die Eigenräume für die Eigenwerte 4 und 1 sind schon orthogonal. Im Eigenraum  $\text{EW}=1$  können wir den Gram-Schmidt-Algorithmus durchführen, da lineare Kombinationen von Eigenvektoren mit gleichen Eigenwerte noch Eigenvektoren sind. Eine Orthonormalbasis ist dann

$$\begin{aligned}
\text{EW} = 4 &: \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T \\
\text{EW} = 1 &: \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T \text{ und}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^T$$

Die Eigenvektoren von  $B$  sind

$$\text{EW} = 0 : (i, 1, 0)^T$$

$$\text{EW} = 1 - i : (0, 0, 1)^T$$

$$\text{EW} = 2 - 2i : (-i, 1, 0)^T$$

Die Vektoren sind schon orthogonal, also wir normalisieren die Vektoren, um eine Orthonormalbasis zu bekommen.

$$\text{EW} = 0 : \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1, 0)^T$$

$$\text{EW} = 1 - i : (0, 0, 1)^T$$

$$\text{EW} = 2 - 2i : \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1, 0)$$

- (d) Wir schreiben die Orthonormalbasis von Eigenvektoren von  $A$  als die Zeilen der Matrix  $U$ .

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ähnlich für  $V$ :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

$U$  ist schon orthogonal.  $V$  ist unitär und kann nicht orthogonal werden. □

**Problem 2.** Betrachten Sie die reelle Matrix

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $P$  ein Orthogonalprojektor bezüglich des Standardskalarprodukts ist.
- (b) Bestimmen Sie den Rang von  $P$ .

- (c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Bildes und des Kerns von  $P$  sowie den Basiswechsel  $O$  von der Standardbasis auf diese Basis.
- (d) Verifizieren Sie, dass  $O$  orthogonal ist, Können Sie einen solchen orthonormalen Basiswechsel finden, dass  $\det O = 1$  gilt?

*Proof.* (a) Schritt 1:  $P$  ist ein Projektor. Durch direktes Rechnen:

$$P^2 = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = P.$$

Da  $P^* = P$ , ist  $P$  ein Orthogonalprojektor nach Proposition 7.79.

(b)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 5} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_3 \times 5} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Rang ist 2.

- (c) Eine Basis des Bildes ist die erste 2 Spalten, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus ergibt sich eine Orthonormalbasis durch den Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir entscheiden uns für einen Vektor, der senkrecht auf den vorherigen beiden Vektoren liegt.

□

**Problem 3.** Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Jede Matrix  $P \in M_n(\mathbb{C})$  mit  $P^2 = P$  ist ein Orthogonalprojektor bezüglich eines *geeigneten* Skalarprodukts auf  $V$ .
- (b) Eine invertierbare Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ist orthogonal für ein geeignet gewähltes Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Problem 4.** Seien  $V, W$  euklidische Vektorräume und  $A$  eine lineare Abbildung  $V \rightarrow W$ .

- (a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:
  - i. Für alle  $v_1, v_2 \in V$  gilt:  $\langle v_1, v_2 \rangle_V = 0 \implies \langle Av_1, Av_2 \rangle_W = 0$ .
  - ii. Für alle  $v_1, v_2 \in V$  gilt:  $\|v_1\|_V = \|v_2\|_V \implies \|Av_1\|_W = \|Av_2\|_W$ .
  - iii. Es existieren eine Konstante  $\alpha > 0$  und eine Isometrie  $\Phi : V \rightarrow W$  mit  $A = \alpha\Phi$ .
- (b) Zeigen Sie, dass es genau dann Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  gibt, sodass

$$C_1 \langle v_1, v_2 \rangle_V \leq \langle Av_1, Av_2 \rangle_W \leq C_2 \langle v_1, v_2 \rangle_V$$

für alle  $v_1, v_2 \in V$  gilt, wenn  $A = \alpha\Phi$  für eine Konstante  $\alpha > 0$  und eine Isometrie  $\Phi : V \rightarrow W$  erfüllt ist. Bestimmen Sie die bestmöglichen Parameter  $C_1$  und  $C_2$ .