Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 19, 2024)

Problem 1. Was ist beim 7-fachen Wurf eines fairen Wurfels die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) mindestens zwei Sechsen geworfen werden?

(b) jede Augenzahl 1, . . . , 6 unter den Wurfergebnissen erscheint?

(c) mindestens eines der beiden obigen Ereignisse eintritt?

Geben Sie zu den Lösungen auch einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum an, in welchem Sie die Ereignisse modellieren.

Proof. Der Wahrscheinlichkeitsraum ist $\{0, \cdots, 6\}^7$ mit dem diskreten Maß.

(a) Wir betrachten die Möglichkeit, dass weniger als 2 Sechsen geworfen werden. Daraus ergeben sich 2 Fälle: Genau ein 6 wurde geworfen und kein 6 wurden geworfen.

Wenn kein 6 geworfen werden soll, gibt es für jedes Wurf 5 Möglichkeiten, also die Wahrscheinlichkeit dieses Fälles ist $(5/6)^7$.

Wenn genau ein 6 geworfen werden soll, ist ein Wurf festgelegt. Es gibt 5^6 Möglichkeiten für die andere Würfe. Aber mit Berücksichtigung der Reihenfolge müssen wir dieses Ergebnis mit 7 multiplizieren, da das 6 bei jedem Wurf erscheinen kann. Damit ist die gesamte Wahrscheinlichkeit $7 \cdot (5/6)^6 \cdot (1/6)$.

Maßtheoretisch haben wir dieses Ereignis in 7 Ereignisse geteilt, also dass das 6 in dem n-ten Wurf erscheint. Da diese Ereignisse disjunkt sind, können wir die Summe der Wahrscheinlichkeiten als die gesamte Wahrscheinlichkeit betrachten. Aus der Symmetrie sind deren Wahrscheinlichkeiten gleich, also wir multiplizieren einfach mit 7.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir weniger als 2 6 bekommen

$$\frac{15625}{23328}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass wir mindestens 2 6 bekommen ist

$$\frac{7703}{23328}.$$

(b) Es gibt 6 mögliche Ereignisse ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: Die 6 Augenzahlen erscheinen, und das 7te Wurf ist beliebig. Mit Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es $\frac{7!}{2!}$ Ereignisse, da genau eine Augenzahl zweimal auftaucht.

Daher gibt es insgesamt $6 \cdot 7!/2!$ mögliche Ereignisse. Da jedes Ereignis gleich wahrscheinlich ist, ist die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{6 \cdot 7!/2!}{6^7} = \frac{35}{648}.$$

(c) Wir betrachten

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Jetzt betrachten wir $A \cap B$. Dabei müssen die Würfe $1, \ldots, 6, 6$ sein. Daher ist die gesamte Anzahl von Möglichkeiten $7!/2$ und die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{35}{3888}$. Damit ist

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{8753}{23328}.$$

□

Problem 2. Unter 33 Schülern werden 3 Fußballmannschaften mit jeweils 11 Spielern ausgelost. Hierzu zieht jeder Schüler (ohne Zurücklegen) einen Zettel aus einer Urne, welche jeweils 11 Zettel mit den Buchstaben A, B und C enthält.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum zur Modellierung an.

(b) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten der Auslosung gibt es?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei bestimmte Schüler derselben Mannschaft zugelost?

Proof. (a) Wir betrachten den Laplace-Raum

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{33}) \in \{0,1,2\} : \sum_{j=1}^{33} 1_{\omega_j=0} = \sum_{j=1}^{33} 1_{\omega_j=1} = 11 \right\}.$$

(b) Wir können die Reihenfolge betrachten, in der die Zettel rausgenommen werden. Da es 33 Zettel gibt, können alle Zettel in 33! unterschiedlichen Reihenfolgen rausgenommen werden. Die Zettel mit dem gleichen Buchstaben können aber beliebig getauscht werden, was zu einem ununterscheidbaren Ergebnis führen würde. Daher gibt es nur $33!/(11!^3)$ Möglichkeiten der Auflösung.

(c) Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Schlüler der Mannschaft A zugelost. Dann können die andere 31 Schüler frei wählen, was zu $31!/(11!^2 9!)$ Möglichkeiten führen würde.

Damit ist die gesamte Anzahl von Möglichkeiten $3 \cdot 31!/(11!^2 \cdot 9!)$ und die Wahrscheinlichkeit $5/16$. $\square$