Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 1

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 25, 2024)

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie

(a) Die Funktion

$$f : \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < 1\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ist beschränkt.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f \in H(U)$ nicht konstant. Dann ist die Funktion $z \to f(\overline{z})$ holomorph auf $U^* := \{z \in C | \overline{z} \in U\}$.

(c) Seien $f, g : K_1(0) \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Sei außerdem die Funktion

$$h : K_1(0) \to \mathbb{C}, \qquad h(z) = f(z) \cdot g(z)$$

holomorph. Dann ist auch f oder g holomorph auf $K_1(0)$.

(d) Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in H(G)$ mit $\operatorname{Re}(f(z)) = 1$ für alle $z \in G$. Dann ist f konstant.

Beweis. (a) Falsch. Man betrachte einfach $x \to -1$ (sogar eingeschränkt auf der reellen Achse). Da

$$\lim_{z \to -1} \frac{1}{1+z^2} = \infty,$$

ist f nicht beschränkt.

(b) Falsch. Beweis wie: $z \mapsto \overline{z}$ ist nicht differenzierbar.

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 - iy) - f(x_0 - iy_0)}{iy_0} = i\frac{\partial f}{\partial y} = -f'(z_0)$$

also $f(\overline{z})$ ist nicht differenzierbar.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(c) Falsch. Sei $f = 0$ und g irgendeine nicht holomorphe Funktion, z.B. die Konjugationsabbildung. Dann ist $f(z) \cdot g(z) = 0$ und somit konstant und auch holomorph.

(d) Wahr. Schreibe $f = u + iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$. Es gilt $u = 1$. Es gilt auch die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad 0 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Da f holomorph ist, verwenden wir die Wirtinger-Ableitung

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Dann ist f konstant.

Aufgabe 2. (a) Es seien U, V offene Menge in $\mathbb{C}$ sowie $f : U \to V$ eine stetige und $g : V \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner sei $g'(w) \neq 0$ für alle $w \in V$ und es gelte $g(f(z)) = z$ für alle $z \in U$. Zeigen Sie, dass f holomorph auf U ist und $f'(z) = 1/(g'(f(z))$ für alle $z \in U$.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und nullstellenfrei. Zeigen Sie, dass aus $f^2 \in H(U)$ bereits $f \in H(U)$ folgt.

Beweis. (a) $g(f(z))$ ist differenzierbar. Insbesondere

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0}$$

existiert, da f stetig ist, und sogar

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z \to f(z_0)} \frac{g(z) - g(f(z_0))}{z - f(z_0)} = g'(f(z_0)).$$

D.h. der andere Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

existiert auch (f ist holomorph), und

$$1 = g'(f(z_0)) \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

Die Behauptung folgt.

(b)

🎉

Aufgabe 3. Es sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}.$$

Ferner sei $z_0 = 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion f ist in z_0 partiell differenzierbar.

(b) Die Funktion erfüllt in z_0 die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung.

(c) Es sei $t \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann besitzt f einen radialen Grenzwert in z_0, also es existiert folgender Grenzwert

$$\lim_{r \to 0, r > 0} \frac{f(e^{it} r) - f(0)}{e^{it} r}.$$

(d) Die Funktion f ist in z_0 *nicht* complex differenzierbar. Begründen Sie außerdem, warum dies nicht im Widerspruch zu Korollar 2.10 steht.

Beweis. (a) Als Produkt bzw. Quotient differenzierbare Funktonen (von x bzw. y) ist f partiell differenzierbar. (Sogar überall, nicht nur in z_0)

(b)

$$f = \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^2} - i \frac{x^4 y}{x^6 + y^2}.$$

Wir schreiben wie üblich $f = u + iv$. Die Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{-\frac{3x^8 y^2}{(x^6 + y^2)^2} + \frac{3x^2 y^4}{(x^6 + y^2)^2}}_{\partial u / \partial x} + i \underbrace{\left(\frac{2x^9 y}{(x^6 + y^2)^2} - \frac{4x^3 y^3}{(x^6 + y^2)^2} \right)}_{\partial v / \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\frac{2x^9 y}{(x^6 + y^2)^2}}_{\partial u / \partial y} + i \underbrace{\left(\frac{x^4 y^2}{(x^6 + y^2)^2} - \frac{x^{10}}{(x^6 + y^2)^2} \right)}_{\partial v / \partial y}$$

Offensichtlich ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Damit ist $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$ und die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind erfüllt.

(c)

$$f(e^{it}r) = \frac{(r\cos t)^3(r\sin t)(r\sin t - ir\cos t)}{r^6\cos^6 t + r^2\sin^2 t}.$$

Da $f(0) = 0$, ist

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left|\frac{f(e^{it}r) - f(0)}{e^{it}r}\right| &= \lim_{r\to 0}\left|\frac{f(e^{it}r)}{e^{it}r}\right| \\ &= \lim_{r\to 0} e^{-it}\frac{r^2\cos^3 t\sin t(\sin t - i\cos t)}{r^4\cos^6 t + \sin^2 t} \\ &\leq e^{-it}\frac{r^2\cos^3 t\sin t(\sin t - i\cos t)}{\sin^2 t}\end{aligned}$$