# Kapitel 2

# Integrationstheorie

## 2.1 Messbare Funktionen

**Definition 2.1.** *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$. Dann heißt $f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar (oder kurz messbar), falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.*

Es reicht die Eigenschaft $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ nur für Mengen $B$ zu zeigen, die die $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}$ erzeugen.

**Lemma 2.2.** *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$, und sei $S \subseteq \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A}_\sigma(S) = \mathcal{B}$. Dann ist $f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar genau dann, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in S$.*

*Beweis.* "$\Leftarrow$" Wir verwenden $f_*(\mathcal{A})$, siehe Beispiel 1.4. Nach Voraussetzung gilt $S \subseteq f_*(\mathcal{A})$. Damit ist auch $\mathcal{B} \subseteq f_*(\mathcal{A})$, und $f$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar. □

Verknüpfungen stetiger und messbarer Funktionen sind messbar.

**Lemma 2.3.** *Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $Y$ und $Z$ metrische Räume. Weiter seien $g : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(Y)$-messbar und $f : Y \to Z$ stetig. Dann ist $f \circ g$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(Z)$-messbar.*

*Beweis.* Sei $O \subseteq Z$ offen. Dann ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(Y)$ und $(f \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathcal{A}$. □

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{A})$ immer ein messbarer Raum.

Definition 2.1 werden wir für die Spezialfälle $Y = \mathbb{R}$ und $Y = \bar{\mathbb{R}}$ verwenden, wobei die Bildräume mit der Borel-$\sigma$-Algebra versehen werden. Sei $\mathcal{T}$ die Menge der offenen Mengen auf $\mathbb{R}^1$. Dann ist die Borel-$\sigma$-Algebra von $\bar{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T} \cup \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}),$$

also $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra, die die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und die einelementigen Mengen $\{+\infty\}$, $\{-\infty\}$ enthält. Offensichtlich ist $\mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Mithilfe von Lemma 2.2 können wir die Anforderungen an eine messbare Funktion schon reduzieren.

**Definition 2.4.** *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn $f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^1$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$.*

*Analog heißt $f : X \to \mathbb{C}$ Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn $f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{C}$.*

*Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn $f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$.*

**Folgerung 2.5.** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ $\mathcal{L}(n)$-$\mathcal{B}^1$-messbar und $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}^1$-messbar.*

**Bemerkung 2.6.** *Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muss allerdings nicht $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{L}(1)$-messbar sein. Das ist der Grund, warum auf dem Bildbereich $\mathbb{R}$ die Borel-$\sigma$-Algebra verwendet wird. Eine stetige aber nicht $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{L}(1)$-messbare Funktion kann mit der Cantor-Menge konstruiert werden, wir verweisen auf [Tao11, Remark 1.3.10].*

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue messbar, dann ist $f$ auch messbar, wenn $f$ als Funktion nach $\bar{\mathbb{R}}$ angesehen wird.

**Definition 2.7.** *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere*

$$\{f < \alpha\} := \{x \in X : f(x) < \alpha\},$$

*analog $\{f \leq \alpha\}$, $\{f > \alpha\}$, $\{f \geq \alpha\}$.*

**Satz 2.8.** *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(2.9) *$f$ ist messbar,*

(2.10) *$\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.11) *$\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.12) *$\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.13) *$\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

*Beweis.* Wir beweisen nur die Äquivalenz von (2.9) und (2.10). Ist $f$ messbar, dann ist $\{f < \alpha\} = f^{-1}(\{-\infty\} \cup (-\infty, \alpha)) \in \mathcal{A}$. Sei nun $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle

$\alpha \in \mathbb{Q}$. Wir nutzen aus, dass $f_*(\mathcal{A})$, also die Menge aller Teilmengen $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ für die $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist, eine $\sigma$-Algebra ist, siehe Beispiel 1.4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge rationaler Zahlen $(\alpha_k)$ mit $\alpha_k \to \alpha$. Es folgt

$$\{f < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f < \alpha_k\} \in \mathcal{A}.$$

Damit ist auch $\{f \geq \alpha\} = \{f < \alpha\}^c \in \mathcal{A}$. Dann gilt für alle $\alpha < \beta$, dass $f^{-1}([\alpha, \beta)) \in \mathcal{A}$. Damit sind die Urbilder aller halboffenen Intervalle in $\mathcal{A}$. Damit ist auch $\mathcal{B}^1 \subseteq f_*(\mathcal{A})$. Weiter gilt

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f < -n\} \in \mathcal{A}.$$

Wegen $\{+\infty\} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^c$ ist auch $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$. Damit sind die Urbilder aller Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ in $\mathcal{A}$, und $f$ ist messbar. □

**Beispiel 2.14.** *Sei $A \subseteq X$. Definiere die charakteristische Funktion von $A$ durch*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in A, \\ 0 & \textit{falls } x \notin A. \end{cases}$$

*Dann ist $\chi_A$ messbar genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}$. Ist $B \subseteq X$, dann ist*

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B).$$

**Beispiel 2.15.** *Ist $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch die durch*

$$(\chi_A \cdot f)(x) := \begin{cases} f(x) & \textit{falls } x \in A, \\ 0 & \textit{falls } x \notin A \end{cases}$$

*definierte Funktion $\chi_A \cdot f$ messbar. Hier haben wir wieder die Konvention $0 \cdot \pm\infty := 0$ benutzt. Für $\alpha < 0$ ist*

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A \cap \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

*während für $\alpha \geq 0$ gilt*

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A^c \cup \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

*und $\chi_A \cdot f$ ist messbar.*

Nun wollen wir beweisen, dass Summen, Produkte, etc, von messbaren Funktionen messbar sind. Wir starten mit zwei Hilfsresultaten.

**Lemma 2.16.** *Sei $g : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ monoton wachsend, das heißt für alle $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $x \le y$ ist $g(x) \le g(y)$. Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist auch $g \circ f$ messbar.*

*Beweis.* Wir benutzen Satz 2.8. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{g < \alpha\}$ ein Intervall: Definiere $\beta := \sup\{x \in \bar{\mathbb{R}} : \ g(x) < \alpha\} \in \bar{\mathbb{R}}$. Ist $g(\beta) = \alpha$ dann ist $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta)$, ansonsten ist $g(\beta) < \alpha$ und $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta]$. In beiden Fällen ist $f^{-1}(\{g < \alpha\}) = \{g \circ f < \alpha\}$ messbar. □

Damit bekommen wir folgendes Resultat.

**Satz 2.17.** *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind die folgenden Funktionen messbar:*

(2.18) $c \cdot f$ *für alle* $c \in \bar{\mathbb{R}}$,

(2.19) $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := \min(f, 0)$,

(2.20) $\operatorname{sign}(f)$, *wobei*

$$\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \textit{falls } y > 0 \\ 0 & \textit{falls } y = 0 \\ -1 & \textit{falls } y < 0, \end{cases}$$

(2.21) $|f|^p$ *für alle* $p > 0$,

(2.22) $1/f$ *falls* $f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$.

*Beweis.* (2.18): Wir zeigen erst, dass $-f$ messbar ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{-f < \alpha\} = \{f > -\alpha\}$, also ist $-f$ messbar. Sei nun $c \in \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist $g(y) := |c| \cdot y$ monoton wachsend, und mit Lemma 2.16 ist $|c| \cdot f$ messbar, also auch $-|c| \cdot f$.

(2.19),(2.20): Die Funktionen $y \mapsto \max(y, 0)$, $y \mapsto \min(y, 0)$ und $y \mapsto \operatorname{sign}(y)$ sind monoton wachsend. Wegen Lemma 2.16 sind die Funktionen $\max(f, 0)$, $\min(f, 0)$ und $\operatorname{sign}(f)$ messbar.

(2.21): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{|f| < \alpha\} = \{f < \alpha\} \cap \{-f < \alpha\}$. Dies ist wegen (2.18) und Satz 2.8 in $\mathcal{A}$, also ist auch $|f|$ messbar. Die Abbildung $y \mapsto (\max(0, y))^p$ ist monoton wachsend, damit ist auch $|f|^p$ messbar.

(2.22): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{1/f < \alpha\} = (\{f < 0\} \cap \{\alpha f < 1\}) \cup (\{f > 0\} \cap \{\alpha f > 1\}) \in \mathcal{A},$$

also $1/f$ messbar. □

Desweiteren sind Summen, Produkte, Quotienten messbarer Funktionen wieder messbar.

**Satz 2.23.** *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und $f/g$ messbar, falls diese Funktionen für alle $x$ definiert sind. Die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\pm\infty / \pm\infty$, $c/0$ für $c \in \bar{\mathbb{R}}$ sind nicht definiert.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass $f+g$ messbar ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $f(x) + g(x) < \alpha$, woraus $f(x) < +\infty$ und $g(x) < +\infty$ folgt. Dann existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in (g(x), \alpha - f(x))$. Dann ist

$$\{f + g < \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < \alpha - q\} \cap \{g < q\}) \in \mathcal{A},$$

und $f+g$ ist messbar.

Seien zuerst $f$ und $g$ Abbildungen nach $\mathbb{R}$. Dann folgt die Messbarkeit von $f \cdot g$ aus $f \cdot g = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$. Seien nun $f$ und $g$ Abbildungen nach $\bar{\mathbb{R}}$. Wir definieren die messbare Menge

$$A := \{|f| < \infty\} \cap \{|g| < \infty\}$$

sowie die messbaren Funktionen (mit Wertebereich $\mathbb{R}$)

$$\tilde{f} := \chi_A f, \quad \tilde{g} := \chi_A g.$$

Dann ist $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ messbar. Außerdem gilt (beachte $0 \cdot \infty = 0$)

$$f \cdot g = \chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g} + \chi_{A^c} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g) \cdot \infty.$$

Beide Summanden sind messbar: $\chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ und $\chi_{A^c} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g)$ sind Produkte $\mathbb{R}$-wertiger messbarer Funktionen (Beispiel 2.15), Multipikation mit der Konstante $+\infty$ erhält Messbarkeit.

Sei $g$ messbar, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x$. Dann ist $1/g$ messbar (2.22). Damit ist auch $f/g = f \cdot 1/g$ messbar. □

Aufgrund der Eigenschaften von $\sigma$-Algebren können wir recht einfach beweisen, dass punktweise Infima, Suprema und Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen wieder messbar sind.

**Satz 2.24.** *Seien $(f_n)$ messbare Funktionen von $X$ nach $\bar{\mathbb{R}}$. Dann sind auch $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ messbare Funktionen. Dabei ist $(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ punktweise definiert. Analog wird für die drei anderen Konstrukte verfahren.*

*Beweis.* Die Messbarkeit von Infimum und Supremum folgt aus Satz 2.8 und

$$\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \le \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \le \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Per Definition ist

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} f_k(x).$$

Wegen des gerade Gezeigten ist $x \mapsto \inf_{k\ge n} f_k(x)$ messbar für alle $n$, und damit auch $x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Analog folgt der Beweis für $\limsup$. □

**Folgerung 2.25.** *Seien $(f_n)$ messbare Funktionen von $X$ nach $\bar{\mathbb{R}}$. Weiter sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x$. Dann ist auch $f$ messbar.*

Wir zeigen nun, dass sich Lebesgue-messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren lassen.

**Definition 2.26.** *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann heißt $f$ einfache Funktion, wenn $f(X)$ eine endliche Menge ist.*

**Lemma 2.27.** *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ einfach, dann existieren $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte, messbare Mengen $A_1 \dots A_n$, so dass $\bigcup_{j=1}^n A_j = X$ und*

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}.$$

*Beweis.* Da $f$ einfach ist, ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Menge. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$ und $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ so, dass $f(X) = \{c_1 \dots c_n\}$. Mit $A_j := f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{A}$ folgt die Behauptung. □

Das heißt, eine Funktion ist einfach, wenn sie eine Linearkombination charakteristischer Funktionen ist.

**Folgerung 2.28.** *Sind $f, g$ einfache Funktionen, dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ einfache Funktionen.*

*Beweis.* Wegen Lemma 2.27 gibt es reelle Zahlen $c_i$ und $d_j$ sowie messbare Mengen $A_i$ und $B_j$, so dass

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$$

und $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$, wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Dann ist $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$, $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \chi_{A_i \cap B_j}$ und

$$f + g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Für das Produkt erhalten wir

$$f \cdot g = \left( \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \right) \left( \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i d_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

$\square$

**Satz 2.29.** *Sei $f : X \to [0, +\infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge $(f_n)$ nicht-negativer, einfacher Funktionen mit $f_n(x) \nearrow f(x)$ für alle $x$. Ist $f$ beschränkt, dann ist die Folge $(f_n)$ gleichmäßig beschränkt, und die Konvergenz $f_n \to f$ ist gleichmäßig.*

*Beweis.* Wir konstruieren die $f_n$ durch eine Unterteilung des Bildbereichs. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen das Intervall $[0, n)$ in $n2^n$-viele Intervalle der Länge $2^{-n}$. Setze für $j = 1 \dots n2^n$

$$A_{n,j} := f^{-1} \left( \left[ \frac{j-1}{2^n} \frac{j}{2^n} \right) \right).$$

Damit definieren wir die einfache Funktion

$$f_n(x) := n \chi_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=1}^{n2^n} \chi_{A_{n,j}} \cdot \frac{j-1}{2^n}.$$

Damit gilt $f_n(x) \leq f(x)$. Wegen

$$A_{n,j} = A_{n+1,2j-1} \cup A_{n+1,2j}$$

folgt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Es bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Ist $f(x) < n$ dann ist $x \in A_{n,j}$ für ein passendes $j$, und es gilt $f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$. Damit bekommen wir $f_n(x) \to f(x)$ falls $f(x) < +\infty$. Ist $f(x) = +\infty$, dann ist $f_n(x) = n$ für alle $n$, und die Konvergenz $f_n(x) \to f(x) = +\infty$ folgt.

Sei $f$ beschränkt. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < N$ für alle $x$. Daraus folgt $f_n(x) < N$ für alle $n$ und $x$. Für $n > N$ ist dann $f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$ für alle $x$, woraus die gleichmäßige Konvergenz folgt. $\square$

Im Folgenden werden wir die abkürzende Schreibweise

$$f_n \nearrow f \quad \Leftrightarrow \quad f_n(x) \nearrow f(x) \; \forall x \in X$$

benutzen.

**Folgerung 2.30.** *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann existiert eine Folge $(\phi_n)$ einfacher Funktionen mit $|\phi_n(x)| \leq |f(x)|$ und $\phi_n(x) \to f(x)$ für alle $x$.*

*Beweis.* Wir approximieren $|f|$ durch eine Folge nicht negativer, einfacher Funktionen $(\phi_n)$, Satz 2.29. Die Funktion $\operatorname{sign}(f)$ ist eine einfache Funktion. Die Funktionen $\operatorname{sign}(f) \cdot \phi_n$ haben dann die gewünschten Eigenschaften, wobei wir Folgerung 2.28 benutzt haben. □

## 2.2 Das Lebesgue-Integral

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

**Definition 2.31.** *Sei $f : X \to [0, +\infty)$ eine einfache Funktion mit $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ mit paarweise disjunkten Mengen $(A_i)$. Dann ist*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$$

*das Lebesgue Integral von $f$.*

Da $\mu(A_i) = +\infty$ sein kann, ist $\int f \, \mathrm{d}\mu$ im Allgemeinen in $\bar{\mathbb{R}}$. Um unbestimmte Ausdrücke zu vermeiden, haben wir das Integral nur für nicht negative Funktionen definiert.

**Lemma 2.32.** *Das Lebesgue-Integral für einfache Funktionen ist wohldefiniert: Gilt $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$ mit paarweise disjunkten Mengen $(A_i)$ und paarweise disjunkten Mengen $(B_j)$, dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).$$

*Beweis.* Wir können annehmen, dass $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$. Falls nicht setzen wir $A_{n+1} = (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$, $c_{n+1} = 0$.

Ist $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ dann folgt $c_i = d_j$: Sei $x \in A_i \cap B_j$, dann ist $f(x) = c_i = b_j$, da die Mengen $(A_i)$ und die Mengen $(B_j)$ paarweise disjunkt sind. Weiter ist $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ und $B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

□

Dieses Integral für einfache Funktionen hat folgende Eigenschaften.

**Satz 2.33.** *Seien $f, g : X \to [0, +\infty)$ einfache Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

*(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$,*

*(2) $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$,*

*(3) ist $f \leq g$, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$,*

*(4) $\int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*

*Beweis.* (1) folgt sofort aus der Definition. (2) Wegen Lemma 2.27 gibt es reelle Zahlen $c_i$ und $d_j$ sowie messbare Mengen $A_i$ und $B_j$, so dass

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j}$$

und $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$, wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Wie im Beweis von Folgerung 2.28 bekommen wir

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j) = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

(3) Sei $x \in A_i \cap B_j$. Dann gilt $f(x) = c_i \leq g(x) = d_j$. Mit Argumenten wie im Beweis von Lemma 2.32 bekommen wir

$$\begin{aligned} \int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) &= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j) = \int g \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

(4) $\chi_A = 1\cdot\chi_A + 0\cdot\chi_{A^c}$ ist eine einfache Funktion mit $\int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A) + 0\cdot\mu(A^c) = \mu(A)$. $\square$

Wir können messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren. Dies werden wir benutzen, um das Lebesgue-Integral für messbare Funktionen zu definieren. Wir beginnen mit dem Integral nicht-negativer Funktionen, damit wir die Monotonie der Konvergenz aus Satz 2.29 benutzen können. In den Beweis des nächsten Satzes geht entscheidend die Stetigkeit von Maßen auf monoton wachsenden Folgen messbarer Mengen (1.29) ein.

**Lemma 2.34.** *Sei $(f_n)$ eine Folge nichtnegativer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$, $f$ einfache Funktion. Dann gilt*

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

*Beweis.* Wir betrachten die beiden Fälle $\int f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ und $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. (1) Angenommen $\int f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Da $f$ eine einfache Funktion ist, existiert ein $c > 0$ und ein $A \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(A) = +\infty$ und $f \geq c$ auf $A$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $A_n := \{x : \ f_n(x) \geq c/2\}$. Da $(f_n(x))$ monoton wachsend ist, folgt $A_n \subseteq A_{n+1}$. Aus der punktweisen Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ folgt $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \supseteq A$. Dann folgt $\mu(A_n) \to \mu(A) = +\infty$ aus (1.29). Aus der Ungleichung $\chi_{A_n}\frac{c}{2} \leq f_n$ folgt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \mu(A_n)\frac{c}{2} \to +\infty$ (Satz 2.33).

(2) Sei nun $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge, also konvergent. Weiter ist $B := \{f > 0\} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \infty$. Da $f$ eine einfache Funktion ist, ist $f$ beschränkt, und es existiert $M > 0$ mit $f(x) \leq M$ für alle $x$. Sei $\epsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $B_n := B \cap \{f_n \geq f - \epsilon\}$. Dann folgt $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = B$, und wir bekommen $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus B_n) = 0$ aus (1.29) und (1.30). Wir schätzen nun das Integral der einfachen und nicht-negativen Funktion $f - f_n$ von oben ab. Auf $B_n$ ist $f - f_n \leq \epsilon$, auf $B \setminus B_n$ ist $f - f_n \leq f \leq M$, während auf $B^c$ gilt $f = f_n = 0$. Dann ist $f - f_n \leq \chi_{B_n}\epsilon + \chi_{B\setminus B_n}M$ und es folgt

$$0 \leq \int f - f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int \chi_{B_n}\epsilon + \chi_{B\setminus B_n}M \,\mathrm{d}\mu = \mu(B_n)\epsilon + \mu(B \setminus B_n)M \to \mu(B)\epsilon.$$

Da $\mu(B) < \infty$ und $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left( \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f - f_n \,\mathrm{d}\mu \right) = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Nun zeigen wir, dass der Grenzwert von $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ für $f_n \nearrow f$ nur vom

Grenzwert $f$ abhängt, und nicht von der konkreten Wahl der $(f_n)$. Dies ist ein wichtiger Schritt, um das Lebesgue-Integral definieren zu können.

**Lemma 2.35.** *Seien $(f_n)$, $(g_n)$ Folgen nichtnegativer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$, $f$ messbar. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

*Beweis.* Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Für $m \in \mathbb{N}$ definiere

$$h_m := \min(f_n, g_m).$$

Dies ist eine einfache Funktion. Aus der Voraussetzung folgt $h_m \nearrow f_n$ für $m \to \infty$. Aus Lemma 2.34 bekommen wir dann

$$\lim_{m\to\infty} \int h_m \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Da $h_m \le g_m$ folgt mit der Monotonie des Integrals $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \int g_m \,\mathrm{d}\mu$. Grenzübergang auf beiden Seiten der Ungleichung ergibt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{m\to\infty} \int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int g_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Für $n \to \infty$ bekommen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int g_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Vertauschen wir in dieser Argumentation die Rollen von $f_n$ und $g_m$ erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Daraus folgt, dass die Grenzwerte existieren und gleich sind. $\square$

**Definition 2.36.** *Sei $f : X \to [0, +\infty]$ messbar. Sei $(f_n)$ eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen mit $f_n \nearrow f$. Dann ist das Lebesgue-Integral von $f$ definiert als*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen Lemma 2.35 ist das Lebesgue-Integral von $f$ wohldefiniert: der Wert $\int f \,\mathrm{d}\mu$ hängt nicht von der konkreten Wahl der approximierenden, einfachen Funktionen $(f_n)$ ab.

**Satz 2.37.** *Seien $f, g : X \to [0, +\infty]$ messbare Funktionen. Dann gilt*

*(1)* $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ *für alle* $c \ge 0$

*(2)* $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$,

*(3) ist* $f \le g$, *dann ist* $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$,

*(4) sind* $(f_m)$ *messbare Funktionen von* $X$ *nach* $[0, +\infty]$ *mit* $f_m \nearrow f$, *dann gilt* $\int f_m \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$.

*Beweis.* (1)–(3) Seien $(f_n)$ und $(g_n)$ Folgen einfacher, nichtnegativer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ und $g_n \nearrow g$. (1) und (2) folgen nun direkt aus Satz 2.33. Für (3) benutzen wir $\min(f_n, g_n) \nearrow f$ und $\int \min(f_n, g_n) \,\mathrm{d}\mu \le \int g_n \,\mathrm{d}\mu$.

(4) Für jedes $m$ existiert eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen $(f_{m,n})$ mit $f_{m,n} \nearrow f_m$ für $n \to \infty$. Definiere die einfache Funktion $h_m$ durch

$$h_m(x) := \max_{i,j \le m} f_{i,j}(x).$$

Dann ist $(h_m(x))$ monoton wachsend. Für $i, j \le m$ ist $f_{i,j} \le f_i \le f_m$. Dann ist $h_m \le f_m \le f$, und es folgt $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \int f_m \,\mathrm{d}\mu \le \int f \,\mathrm{d}\mu$. Wir zeigen $h_m \nearrow f$.

Seien $x \in X$ und $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s < f(x)$. Dann existiert $m$, so dass $s \le f_m(x)$. Weiter existiert ein $n$, so dass $r \le f_{m,n}(x)$. Daraus folgt $r \le h_{\max(m,n)}(x)$ und $r \le \lim_{m \to \infty} h_m(x)$. Da $r < f(x)$ beliebig war, folgt $h_m(x) \to f(x)$. Damit folgt $h_m \nearrow f$ und $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$, woraus die Behauptung folgt. □

## 2.3 Integrierbarkeit

Wir wollen nun messbare Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ integrieren. Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$$f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \min(f, 0).$$

Dann ist $f = f^+ + f^-$.

**Definition 2.38.** *Sei* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *messbar. Es sei eines der Integrale* $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$ *endlich. Dann ist das Lebesgue-Integral von* $f$ *definiert als*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu.$$

*Sind beide Integrale* $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$ *endlich, dann heißt* $f$ *integrierbar.*

Alternative Schreibweisen für dieses Integral sind

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int f(x) \mu(\,\mathrm{d}x).$$

**Satz 2.39.** *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist $f$ integrierbar genau dann, wenn $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.*

*Beweis.* Sei $f$ integrierbar. Wegen $|f| = f^+ + (-f^-)$ ist $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, wobei wir Satz 2.37 benutzt haben. Sei nun $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Da $f^+ \le |f|$ und $0 \le -f^- \le |f|$ folgt die Behauptung mit der Monotonie des Integrals aus Satz 2.37. □

**Lemma 2.40.** *Seien $f_1, f_2 : X \to [0, +\infty]$ messbar, so dass $f := f_1 - f_2$ definiert ist und $\int f_i \,\mathrm{d}\mu < \infty$ für $i = 1, 2$. Dann ist $f$ integrierbar, und es gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$

*Beweis.* Es gilt $|f| \le f_1 + f_2$, und mit Satz 2.37 folgt $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Wegen Satz 2.39 ist $f$ integrierbar. Aufgrund der Konstruktion ist $f_1 \ge f^+$. Definiere die nichtnegative Funktion $g$ durch

$$g := f_1 - f^+ = f - f^+ + f_2 = f^- + f_2.$$

Da $|g| \le |f_1|$ ist $g$ integrierbar. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu &= \int (g + f^+) \,\mathrm{d}\mu - \int (g - f^-) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int g \,\mathrm{d}\mu + \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \left( \int g \,\mathrm{d}\mu + \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu \right) \\
&= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir Satz 2.37 benutzt. □

Die Schwierigkeit des Beweises war, dass wir die Additivität des Integrals bisher nur für nichtnegative Funktionen haben.

**Satz 2.41.** *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

*(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}$.*

*(2) Ist $f + g$ definiert, dann ist $f + g$ integrierbar, und es gilt $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.*

*(3) Ist $f \le g$, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$.*

*(4) $\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \le \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.*

*Beweis.* Wegen $|cf| \le |c| \cdot |f|$ und $|f + g| \le |f| + |g|$ folgt die Integrierbarkeit von $cf$ und $f + g$ aus Satz 2.39 und Satz 2.37. Sei $c \ge 0$. Dann ist $(cf)^+ = cf^+$

und $(cf)^- = cf^-$, und es folgt (1). Analog wird der Fall $c < 0$ bewiesen. Wegen Lemma 2.40 bekommen wir aus $f + g = (f^+ + g^+) - (-f^- - g^-)$

$$\begin{aligned}\int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \int f^+ + g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^- - g^-) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu - \int (-g^-) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Additivität aus Satz 2.37 benutzt haben. Damit ist (2) bewiesen. Zu (3): ist $f \le g$ dann ist $f^+ \le g^+$ und $f^- \le g^-$, woraus mit der Monotonie aus Satz 2.37

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu \le \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-g^-) \le \int g \,\mathrm{d}\mu$$

folgt. (4) bekommen wir aus $-|f| \le f \le |f|$ und (3), (1). $\square$

**Definition 2.42.** *Es sei $\mathcal{L}^1(\mu)$ die Menge aller integrierbaren Funktionen von $X$ nach $\mathbb{R}$.*

Die Menge $\mathcal{L}^1(\mu)$ versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum wegen Satz 2.41.

**Lemma 2.43.** *Die Abbildung*

$$f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} := \int |f| \,\mathrm{d}\mu$$

*ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$, d.h., es gilt:*

*(1) $\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ für alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$,*

*(2) $\|cf\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le |c|\ \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $c \in \mathbb{R}$.*

Im Allgemeinen folgt aus $\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = 0$ nicht, dass $f = 0$.

**Beispiel 2.44.** *Dazu betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$. Setze $f := \chi_{\mathbb{Q}}$. Dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$ aber $f \ne 0$.*

**Satz 2.45.** *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

*(1) $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow \{f \ne 0\}$ ist eine $\mu$-Nullmenge.*

*(2) Ist $f$ integrierbar, dann ist $\{f = \pm\infty\}$ eine $\mu$-Nullmenge.*

*(3) Sei $\{f \ne g\}$ eine $\mu$-Nullmenge. Dann ist $f$ integrierbar genau dann, wenn $g$ integrierbar ist. In diesem Falle gilt $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.*

*Beweis.* (1) Setze $A := \{f \neq 0\}$. Sei $\int |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $A_k := \{\frac{1}{k} \leq |f|\}$. Dann ist $\frac{1}{k}\chi_{A_k} \leq \chi_{A_k}|f| \leq |f|$, woraus mit Satz 2.37 $\frac{1}{k}\mu(A_k) \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$ folgt. Damit ist $\mu(A_k) = 0$ für alle $k$ und $\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$. Sei $\mu(A) = 0$. Wegen $|f| \leq \infty \cdot \chi_A$ folgt $\int |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \infty \cdot \mu(A) = 0$.

(2) Setze $A := \{|f| = +\infty\}$. Dann ist $\infty \cdot \mu(A) \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ (Satz 2.37), also $\mu(A) = 0$.

(3) Sei $N := \{f \neq g\}$. Wegen (1) haben wir

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu = \int (\chi_N + \chi_{N^c})|f| \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|f| \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|g| \, \mathrm{d}\mu = \int |g| \, \mathrm{d}\mu.$$

Damit ist $f$ integrierbar genau dann, wenn $g$ integrierbar ist. Sind $f$ und $g$ integrierbar, bekommen wir mit einer analogen Begründung, dass $\int f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int g^+ \, \mathrm{d}\mu$ und $\int -f^- \, \mathrm{d}\mu = \int -g^+ \, \mathrm{d}\mu$. □

**Definition 2.46.** *Sei $P : X \to \{wahr, falsch\}$ eine Abbildung (ein einstelliges Prädikat auf $X$ im Sinne der Logik). Dann gilt $P$ $\mu$-fast überall (oder $P(x)$ gilt für $\mu$-fast alle $x \in X$) genau dann, wenn es eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gibt, so dass $P(x)$ für alle $x \in N^c$ gilt.*

Damit lassen sich die Aussagen von Satz 2.45 wie folgt ausdrücken:

(1) $\int |f| \, \mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ $\mu$-fast überall.

(2) Ist $f$ integrierbar, dann ist $f \notin \{\pm\infty\}$ $\mu$-fast überall.

(3) Ist $f = g$ $\mu$-fast überall, dann ist $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$.

**Lemma 2.47.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben, so dass $f$ messbar und $f = g$ $\mu$-fast überall ist. Dann ist $g$ messbar.*

*Beweis.* Sei $N$ eine $\mu$-Nullmenge, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in N^c$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$g^{-1}((-\infty, \alpha]) = \left(N^c \cap f^{-1}((-\infty, \alpha])\right) \cup \left(N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])\right).$$

Da $N$ eine Nullmenge ist, und der Maßraum vollständig ist, ist $N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])$ als Teilmenge einer Nullmenge messbar. Es folgt, dass $g$ messbar ist. □

**Definition 2.48.** *Es sei $A \in \mathcal{A}$, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, so dass $\chi_A f$ messbar ist. Dann ist das Integral von $f$ über $A$ definiert als*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int \chi_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

**Aufgabe 2.49.** *Es sei $f \in X \to [0,+\infty]$ messbar. Dann ist die Abbildung $\nu$ definiert durch*

$$\nu(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

*ein Maß auf $\mathcal{A}$. Die Funktion $f$ heißt Dichtefunktion von $\nu$.*

**Definition 2.50.** *Sei $f : X \to \mathbb{C}$ messbar. Dann heißt $f$ integrierbar, falls* $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *integrierbar sind, und wir definieren*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + i \int \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Bei der Integration komplexwertiger Funktionen entstehen keine neuen Effekte: Die Abbildung $f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu$ ist $\mathbb{C}$-linear für komplexwertige Funktionen. Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist. Die Menge aller solcher integrierbarer Funktionen ist wieder ein Vektorraum.

## 2.4 Konvergenzsätze

Es sei $(f_n)$ eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise gegen $f$ konvergiert. Wir wollen nun untersuchen, wann gilt

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Dies ist eine nicht-triviale Frage, denn das Integral haben wir über einen Grenzwert definiert.

**Beispiel 2.51.** *Im Maßraum* $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ *definieren wir die folgenden Funktionenfolgen*

- $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$,
- $g_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x)$,
- $h_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x)$.

*Dann konvergieren $(f_n)$, $(g_n)$ und $(h_n)$ punktweise gegen Null, aber die Integrale nicht: $\int f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int g_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int h_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = 1$. Hier kann man Grenzwertbildung und Integral nicht vertauschen.*

**Satz 2.52** (Monotone Konvergenz)**.** *Seien $(f_n)$ integrierbare Funktionen von $X$ nach $\mathbb{R}$ mit $f_n \nearrow f$ punktweise. Dann gilt $\int f_n \, \mathrm{d}\mu \nearrow \int f \, \mathrm{d}\mu$. Existiert ein $M > 0$, so dass $\int f_n \, \mathrm{d}\mu < M$ für alle $n$ gilt, dann ist $f$ integrierbar.*

*Beweis.* Definiere $g_n := f_n - f_1 \geq 0$, $g := f - f_1 \geq 0$. Dann gilt $g_n \nearrow g$, $\int g_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int g \,\mathrm{d}\mu$ (Satz 2.37). Da $f_1$ integrierbar ist, folgt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int f_1 \,\mathrm{d}\mu.$$

Ist $\int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$, dann ist $f - f_1$ integrierbar, und es folgt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$ aus der Linearität des Integrals (Satz 2.41). Wegen $0 \geq f^- \geq f_1$ ist $f^-$ integrierbar, und aus $+\infty = \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ + f^- - f_1 \,\mathrm{d}\mu$ folgt

$$+\infty = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu = \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int f_1 \,\mathrm{d}\mu.$$

Weiter folgt

$$0 \leq \int g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq M - \int f_1 \,\mathrm{d}\mu,$$

also ist $g$ integrierbar und damit auch $f$. $\square$

**Beispiel 2.53.** *Die Funktionenfolgen $f_n = -\chi_{[n,+\infty)}$ und $g_n = \chi_{[0,n]}$ im Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ zeigen, dass monotone Konvergenz alleine nicht reicht für die Aussagen des Satzes.*

**Satz 2.54** (Lemma von Fatou)**.** *Es sei $(f_n)$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, +\infty]$. Dann gilt*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

*Beweis.* Definiere $g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x)$. Dann sind die Funktionen $g_n$ nichtnegativ und messbar. Weiter gilt $g_n \leq f_n$ und $g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$. Also bekommen wir aus Satz 2.37

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

$\square$

**Beispiel 2.55.** *Gleichheit gilt in Satz 2.54 im Allgemeinen nicht, siehe $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}$ aus Beispiel 2.51. Auf die Nichtnegativität kann nicht verzichtet werden: für $f_n(x) = -n\chi_{(0,1/n)}$ gilt die Behauptung nicht.*

**Satz 2.56** (Dominierte Konvergenz)**.** *Es sei $(f_n)$ eine Folge messbarer Funktionen von $X$ nach $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, $g : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Gilt $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n$ und $\mu$-fast alle $x$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.*

*Beweis.* (1) Wir nehmen zuerst an, dass $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n$ und alle $x$ gilt. Daraus folgt $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x$. Damit sind die

Funktionen $f$ und $f_n$ integrierbar. Wir setzen $g_n := 2g - |f_n - f| \geq 0$. Nach Satz 2.54 ist

$$\begin{aligned} 2\int g \,\mathrm{d}\mu &= \int (\liminf_{n\to\infty} g_n(x))\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int 2g - |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \\ &= 2\int g\,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \leq 2\int g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Damit ist $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$, woraus mit Satz 2.41 die Behauptung folgt.

(2) Sei nun $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n$ und $\mu$-fast alle $x$. Dann existiert eine $\mu$-Nullmenge $N$, so dass $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n$ und alle $x \in N^c$. Die Funktionen $\chi_{N^c} f_n$, $\chi_{N^c} f$ erfüllen dann die Voraussetzungen von Beweisteil (1). Es folgt also $\lim_{n\to\infty} \int \chi_{N^c}|f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$. Da $\chi_{N^c}|f_n - f|$ und $|f_n - f|$ sich nur auf der Nullmenge $N$ unterscheiden, gilt $\int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0$. □

**Beispiel 2.57.** *Auf die Existenz der integrierbaren gemeinsamen oberen Schranke kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden, wie Beispiel 2.51 zeigt.*

**Satz 2.58** (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(\mu)$)**.** *Es sei $(f_n)$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ ist, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N$, so dass $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon$ für alle $n, m > N$.*

*Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. Weiter existiert ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und eine Teilfolge, so dass $f_{n_k}(x) \to f(x)$ und $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ für alle $k$ und $\mu$-fast alle $x$.*

*Beweis.* (1) Wir nehmen zuerst an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$. Definiere die messbaren Funktionen

$$g_m := |f_1| + \sum_{n=1}^{m} |f_{n+1} - f_n|, \quad g := |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|.$$

Dann gilt $g_m \nearrow g$. Weiter ist $\int g_m\,\mathrm{d}\mu = \|f_1\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \sum_{n=1}^{m} \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$, woraus mit der monotonen Konvergenz $\int g\,\mathrm{d}\mu < \infty$ folgt. Dann ist (Satz 2.45) $g < +\infty$ fast überall, und es folgt $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| < +\infty$ fast überall. Damit ist $(f_n(x))$ für fast alle $x$ eine Cauchyfolge, also konvergent. Wir definieren $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ falls der Grenzwert existiert, sonst setzen wir $f(x) := 0$. Da $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $x$, folgt $|f| \leq g$ fast überall. Mit dominierter Konvergenz Satz 2.56 bekommen wir $\int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0$.

(2) Sei $m_k$ die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$, für die $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < 2^{-k}$ für alle $n, m \geq m_k$. Dann ist $(m_k)$ monoton wachsend, und $(n_k)$ definiert durch $n_k :=$

$m_k+k$ ist streng monoton wachsend. Definiere $\tilde{f}_k := f_{n_k}$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$. Wegen Teil (1) existiert $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so dass $\|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$ gilt und die Teilfolge $(f_{n_k}) = (\tilde{f}_k)$ alle weitere Behauptungen erfüllt.

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $k$ so, dass $\|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon/2$ und $2^{-k} < \epsilon/2$. Sei $n \geq n_k$. Dann ist $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f_n - \tilde{f}_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon$. □

**Beispiel 2.59.** *Man bekommt im Allgemeinen die punktweise Konvergenz nur für eine Teilfolge. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$. Definiere $f_n := 2^{j/2}\chi_{[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]}$ für $n = 2^j+k$, $0 \leq k < 2^j$. Dann ist $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_1)} = 2^{-j/2} \to 0$. Aber die Folge $f_n$ ist nicht punktweise konvergent, und es existiert auch keine integrierbare gemeinsame obere Schranke.*

## 2.5 Vergleich mit Riemann-Integral

Sei $I = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Eine Abbildung $\phi : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ existieren mit $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b$ und $\phi|_{(a_i,a_{i+1})} = \phi_i$. Das Riemann-Integral von $\phi$ ist definiert durch

$$R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^{n} \phi_i(a_{i+1} - a_i).$$

Der Vektorraum aller solcher Treppenfunktionen sei $\mathcal{T}(I)$.

**Definition 2.60.** *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Riemann integrierbar, wenn gilt*

$$\begin{aligned} s := \sup \left\{ R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x : \ \phi \in \mathcal{T}(I),\ \phi \leq f \right\} \\ = \inf \left\{ R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x : \ \phi \in \mathcal{T}(I),\ f \leq \phi \right\}. \end{aligned}$$

*In diesem Fall setzen wir*

$$R\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := s.$$

Wir arbeiten hier im Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$.

**Satz 2.61.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Dann ist $f$ $\lambda_1$-integrierbar und es gilt*

$$R\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

*Beweis.* Sei $\phi$ eine Treppenfunktion. Dann ist $\phi$ $\mathcal{B}^1 - \mathcal{B}^1$-messbar, und damit auch $\mathcal{L}(1) - \mathcal{B}^1$-messbar. Außerdem ist $R\text{–}\int_a^b \phi\,\mathrm{d}x = \int_I \phi\,\mathrm{d}\lambda_1$.

Aus der Riemann-Integrierbarkeit von $f$ bekommen wir für jedes $n$ die Existenz von Treppenfunktionen $\phi_n$ und $\psi_n$ mit $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ und $R\text{-}\!\int_a^b (\psi_n - \phi_n)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$. Daraus folgt $\|\psi_n - \phi_n\|_{L^1(\lambda_1)} = R\text{-}\!\int_a^b (\psi_n - \phi_n)\,\mathrm{d}x \to 0$.

Wegen Satz 2.58 gibt es eine Teilfolgen, so dass $\psi_{n_k} - \phi_{n_k} \to 0$ fast überall. Da $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ folgt daraus $\lim_{k\to\infty} \psi_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \phi_{n_k} = f(x)$ für fast alle $x \in [a, b]$. Da der Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ vollständig ist, folgt daraus die Messbarkeit von $f$. Aus der Integrierbarkeit von $\phi_n$ und $\psi_n$ folgt die Integrierbarkeit von $f$. Grenzübergang in

$$R\text{-}\!\int_a^b \phi_n\,\mathrm{d}x = \int_I \phi_n\,\mathrm{d}\lambda_1 \leq \int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1 \leq \int_I \psi_n\,\mathrm{d}\lambda_1 = R\text{-}\!\int_a^b \psi_n\,\mathrm{d}x$$

liefert die Gleichheit von Riemann- und Lebesgue-Integral. □

**Bemerkung 2.62.** *Ein ähnliches Resultat gilt auch für den Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, \lambda_1)$: Nach Änderung auf einer $\lambda_1$-Nullmenge ist die Riemann-integrierbare Funktion $f$ dann auch messbar und integrierbar, und die Integrale stimmen überein.*

**Beispiel 2.63.** *Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist $\lambda_1$-integrierbar aber nicht Riemann integrierbar.*

**Beispiel 2.64.** *Sei $s > 1$ und $f(x) = x^{-s}$ für $x > 1$. Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral*

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-s}(t^{1-s} - 1) = \frac{1}{s-1}.$$

*Ähnlich argumentieren wir das Lebesgue-Integral*

$$\int_{(1,\infty)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{(1,\infty)} \chi_{(1,n)} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^1 = \frac{1}{s-1}.$$

*Hier haben wir die monotone Konvergenz benutzt.*

**Beispiel 2.65.** *Das uneigentliche Riemann-Integral $R\text{-}\!\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existiert und ist endlich, während die Funktion $f$ definiert durch $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nicht auf dem Intervall $[1, +\infty)$ $\lambda_1$-integrierbar ist, und das Integral $\int_{[1,\infty)} f\,\mathrm{d}\lambda_1$ ist nicht definiert.*

Da Lebesgue- und Riemann-Integral gleich sind, kann man auch für das Lebesgue-Integral die Riemann-Integral-Schreibweise verwenden, also

$$\int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $f : (a, b) \to \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar schreiben.

## 2.6 Produktmaße und Satz von Fubini

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Auf $X \times Y$ können wir ein äußere Maß definieren:

$$\lambda^*(M) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) : \ A_n \in \mathcal{A}, \ B_n \in \mathcal{B}, \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \supseteq M \right\}. \tag{2.66}$$

Wegen Satz 1.37 ist dies tatsächlich ein äußeres Maß.

**Definition 2.67.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma$-endliche Maßräume. Wir definieren das durch $\mu$ und $\nu$ auf $X \times Y$ erzeugte Produktmaß $\mu \otimes \nu$ als das durch Satz 1.60 aus dem obigen äußeren Maß (2.66) erzeugte Maß. Die Menge der $\lambda^*$-messbaren Mengen nennen wir $\Lambda$.*

Dann ist $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$ ein vollständiger Maßraum. Wir zeigen, dass $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$.

**Lemma 2.68.** *Es gilt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$. Weiter ist*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

*für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.*

*Beweis.* [Fre03, Proposition 251E] Wir zeigen, dass $A \times Y$ und $X \times B$ in $\Lambda$ sind. Wegen $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ und der Definition von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist dies ausreichend, vergleiche Lemma 1.18.

Sei $A \in \mathcal{A}$ und $D \subseteq X \times Y$ mit $\lambda^*(D) < \infty$. Sei $\epsilon > 0$. Dann existieren Folgen $(A_j)$ und $(B_j)$ in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \times B_j) \supseteq D$ und $\lambda^*(D) + \epsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$. Dann ist

$$D \cap (A \times Y) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} ((A_j \cap A) \times B_j), \quad D \cap (A \times Y)^c \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} ((A_j \cap A^c) \times B_j).$$

Aus der $\sigma$-Subadditivität folgt

$$\begin{aligned} &\lambda^*(D \cap (A \times Y)) + \lambda^*(D \cap (A \times Y)^c) \\ &\qquad \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A)\nu(B_j) \right) + \left( \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A^c)\nu(B_j) \right) \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) \leq \lambda^*(D) + \epsilon, \end{aligned}$$

also ist $A \times Y$ in $\Lambda$. Analog folgt $X \times B \in \Lambda$ für $B \in \mathcal{B}$.

Seien nun $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Dann gilt $\lambda^*(A \times B) \leq \mu(A)\nu(B)$. Es bleibt, die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Seien also Folgen $(A_j)$ und $(B_j)$ mit $\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \times B_j) \supseteq A \times B$ gegeben. Definiere $S := \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) \in [0, +\infty]$. Wir zeigen $\mu(A)\nu(B) \leq S$.

Dazu reicht es, den Fall $S < +\infty$ zu betrachten. Setze

$$I := \{j : \ \mu(A_j) = 0\}, \quad J := \{j : \nu(B_j) = 0\}, \quad K := \mathbb{N} \setminus (I \cup J).$$

Definiere

$$A' := A \setminus (\bigcup_{j \in I} A_j), \quad B' := B \setminus \bigcup_{j \in J} B_j.$$

Dann ist $\mu(A \setminus A') = \nu(B \setminus B') = 0$. Außerdem gilt

$$A' \times B' \subseteq \bigcup_{j \in K} A_j \times B_j.$$

Weiter ist $S = \sum_{j \in K} \mu(A_j)\nu(B_j)$ und $\mu(A_j), \nu(B_j) \in \mathbb{R}$ für alle $j \in K$. Definiere $f_j : X \to \mathbb{R}$ durch $f_j := \chi_{A_j}\nu(B_j)$ falls $j \in K$, sonst $f_j := 0$. Dann ist $f_j$ eine einfache Funktion. Die Folge $\sum_{j=1}^{n} f_j$ ist monoton wachsend, und wir setzen $g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$. Da $\int_X \sum_{j=1}^{n} f_j \, \mathrm{d}\mu \leq S$ für alle $n$ folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz Satz 2.37

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{j=1}^{n} f_j \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\nu(B_j) = S.$$

Sei $x \in A'$ und setze $K_x := \{j \in K : \ x \in A_j\}$. Wegen $\{x\} \times B' \subseteq \bigcup_{j \in K} A_j \times B_j$ folgt $B' \subseteq \bigcup_{j \in K_x} B_j$ und

$$\nu(B) = \nu(B') \leq \sum_{j \in K_x} \nu(B_j) = \sum_{j \in K_x} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j) \leq g(x).$$

Also ist $\chi_{A'}\nu(B) \leq g$ und

$$\mu(A)\nu(B) = \mu(A')\nu(B) = \int_X \chi_{A'}\nu(B) \, \mathrm{d}\mu$$

$$\leq \int_X g(x) \, \mathrm{d}\mu = S = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

Daraus folgt $\lambda^*(A \times B) \geq \mu(A)\nu(B)$. □

Ein anderer Beweis findet sich zum Beispiel in [Tao11, Proposition 1.7.11].

**Folgerung 2.69.** *Sind $\mu$ und $\nu$ $\sigma$-endlich, dann ist der Maßraum $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ $\sigma$-endlich.*

**Folgerung 2.70.** *Sei $\mu\otimes\nu$ $\sigma$-endlich. Für jede Menge $C \in \Lambda$ gibt es $D \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und eine $\mu\otimes\nu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $C \cup N = D$.*

*Beweis.* Sei $(\mu\otimes\nu)(C) < \infty$. Dann folgt aus der Konstruktion von $\lambda^*$, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Menge $D_k \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ existiert mit $C \subseteq D_k$ und $\lambda^*(D_k) \leq \lambda^*(C) + \frac{1}{k}$. Dann ist $\tilde{D} := \bigcap_{k=1}^\infty D_k \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $(\mu\otimes\nu)(C) = (\mu\otimes\nu)(\tilde{D})$, und $\tilde{N} := \tilde{D}\setminus C \in \Lambda$ ist eine $\mu\otimes\nu$-Nullmenge. Wenden wir diese Argumentation auf $\tilde{N}$ an, dann bekommen wir die Existenz einer $\mu\otimes\nu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $\tilde{N} \subseteq N$. Die Behauptung folgt mit $D = \tilde{D}\cup N$.

Sei nun $C \in \Lambda$ beliebig. Da das Produktmaß $\sigma$-endlich ist, existiert eine Folge $(C_j)$ in $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $(\mu\otimes\nu)(C_j) < \infty$ und $\bigcup_{j=1}^\infty C_j = X \times Y$. Für jedes $j$ existieren dann $D_j, N_j \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $(\mu\otimes\nu)(N_j) = 0$ und $(C\cap C_j)\cup N_j = D_j$. Dann folgt die Behauptung mit $D := \bigcup_{j=1}^\infty D_j$ und $N := \bigcup_{j=1}^\infty N_j$. □

Damit ist dann $(X\times Y, \Lambda, \mu\otimes\nu)$ die Vervollständigung von $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, (\mu\otimes\nu)|_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}})$.

Im Folgenden werden wir mit der symmetrischen Differenz $A\triangle B$ arbeiten, definiert durch

$$A\triangle B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B).$$

**Aufgabe 2.71.** *[Bog07, Lemma 1.5.5] Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sind $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$ dann gilt $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A\triangle B)$.*

Für die Eindeutigkeit des Produktmaßes ist die $\sigma$-Endlichkeit von $\mu$ und $\nu$ entscheidend.

**Satz 2.72.** *Es seien $\mu$ und $\nu$ $\sigma$-endlich. Sei $\lambda : \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}$ ein Maß mit $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ und $\lambda(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Dann gilt $\lambda = \mu\otimes\nu$ auf $\mathcal{C}\cap\Lambda \supseteq \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.*

*Beweis.* Sei $\lambda^*$ das durch $\mu$ und $\nu$ auf $X\times Y$ erzeugte äußere Maß aus (2.66). Dann gilt $\lambda^*(A\times B) = \mu(A)\nu(B) = \lambda(A\times B)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ nach Lemma 2.68. Aus der Definition von $\lambda^*$ als Infimum folgt $\lambda(C) \leq \lambda^*(C)$ für alle $C \in \mathcal{C}$.

Wir zeigen zuerst $\lambda(\bigcup_{j=1}^n A_j\times B_j) = \lambda^*(\bigcup_{j=1}^n A_j\times B_j)$ für $A_j \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{B}$. Wir benutzen die Additivität der beiden Maße auf $\mathcal{C}\cap\Lambda \supseteq \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Für $I \subseteq \{1\dots n\}$ definieren wir

$$A_I := \{x \mid \forall i = 1\dots n:\ x \in A_i \ \Leftrightarrow i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{i\notin I} A_i^c.$$

Ist $I' \subseteq \{1\dots n\}$ mit $I' \neq I$ dann ist $A_I \cap A_{I'} = \emptyset$. Analog definieren wir $B_I$.

Dann gilt

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j = \bigcup_{\substack{I,J\subseteq\{1\dots n\}\\ I\cap J\neq\emptyset}} A_I \times B_J,$$

wobei die Vereinigung auf der rechten Seite eine disjunkte Vereinigung ist, und

$$\begin{aligned}\lambda(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j) &= \sum_{\substack{I,J\subseteq\{1\dots n\}\\ I\cap J\neq\emptyset}} \lambda(A_I \times B_J)\\ &= \sum_{\substack{I,J\subseteq\{1\dots n\}\\ I\cap J\neq\emptyset}} \lambda^*(A_I \times B_J) = \lambda^*(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j).\end{aligned}$$

Sei nun $C \in \mathcal{C} \cap \Lambda$ mit $\lambda^*(C) < \infty$. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Folge $(C_j)$ mit $C_j \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, $C_\epsilon := \bigcup_{j=1}^\infty C_j \supseteq C$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda^*(C_j) \le \lambda^*(C) + \epsilon/6$. Dann folgt $\lambda^*(C_\epsilon \setminus C) \le \epsilon/6$. Da die Folge $n \mapsto C \setminus \bigcup_{j=1}^n C_j$ monoton fällt mit $\lambda^*(C \setminus \bigcup_{j=1}^\infty C_j) = 0$ gibt es ein $N$, so dass

$$\lambda^*(C \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j) \le \frac{\epsilon}{6}.$$

Setze $C_N := \bigcup_{j=1}^N C_j$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda^*(C_N \triangle C) = \lambda^*(C \triangle \bigcup_{j=1}^{N} C_j) &= \lambda^*(\bigcup_{j=1}^{N} C_j \setminus C) + \lambda^*(C \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j)\\ &\le \lambda^*(C_\epsilon \setminus C) + \frac{\epsilon}{6} \le \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Weiter gibt es eine Folge $(D_j)$ mit $D_j \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ mit $\bigcup_{j=1}^\infty D_j \supseteq C_N \triangle C$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda^*(D_j) \le \frac{2}{3}\epsilon$. Dann ist

$$\lambda(C_N \triangle C) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(D_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(D_j) \le \frac{2}{3}\epsilon.$$

Aus dem oben Gezeigten folgt $\lambda^*(C_N) = \lambda(C_N)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}|\lambda^*(C) - \lambda(C)| &\le |\lambda^*(C) - \lambda^*(C_N)| + |\lambda(C_N) - \lambda(C)|\\ &\le \lambda^*(C \triangle C_N) + \lambda(C_N \triangle C) \le \epsilon.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist $\lambda^*(C) = \lambda(C)$. Für allgemeines $C \in \mathcal{C} \cap \Lambda$ folgt $\lambda^*(C) = \lambda(C)$ aus der $\sigma$-Endlichkeit von $\mu$ und $\nu$. $\square$

Der Beweis ist eine Kombination von Argumenten aus den Beweisen von [Bog07, Theorem 1.11.8, Theorem 1.5.6(iii)]. Eine andere Beweisvariante ist [Els05, Satz II.5.6].

**Satz 2.73.** *Es gilt* $\lambda_m \otimes \lambda_n = \lambda_{m+n}$ *auf* $\mathcal{L}(m+n)$.

*Beweis.* [Fre03, Theorem 251N] Es sei $\lambda^*$ das durch $\lambda_m$ und $\lambda_n$ erzeugte äußere Maß auf $\mathbb{R}^{m+n}$. Wir zeigen $\lambda^* = \lambda^*_{m+n}$. Da $\mathbb{J}(m+n) = \mathbb{J}(m) \boxtimes \mathbb{J}(n) \subseteq \mathcal{L}(m) \boxtimes \mathcal{L}(n)$ ist $\lambda^* \le \lambda^*_{m+n}$.

Wir zeigen, dass gilt $\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \lambda^*(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$ für alle $A \in \mathcal{L}(m)$ und $B \in \mathcal{L}(n)$. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda_m(A) < \infty$, $\lambda_n(B) < \infty$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es Überdeckungen $(A_i)$ und $(B_j)$ von $A$ und $B$ durch Quader des $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i) \le \lambda_m(A) + \epsilon$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j) \le \lambda_n(B) + \epsilon$. Dann ist $(A_i \times B_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $A \times B$ und es folgt mit dem Doppelreihensatz Satz 1.38

$$\begin{aligned}\lambda^*_{m+n}(A \times B) &\le \sum_{i,j=1}^\infty \lambda_m(A_i)\lambda_n(B_j) = \left(\sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i)\right)\left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j)\right)\\ &\le (\lambda_m(A)+\epsilon)(\lambda_n(B)+\epsilon).\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda_m(A) = 0$ und $\lambda_n(B) = +\infty$. Dann gibt es eine Überdeckung von $B$ durch eine Folge $(B_j)$ mit $\lambda_n(B_j) < \infty$. Wegen der $\sigma$-Subadditivität von $\lambda^*_{m+n}$ und dem gerade Bewiesenen ist

$$\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda^*_{m+n}(A \times B_j) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda_m(A)\lambda_n(B_j) = 0.$$

Damit ist die Ungleichung $\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \lambda^*(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$ für alle $A \in \mathcal{L}(m)$, $B \in \mathcal{L}(n)$ bewiesen.

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. Weiter seien Folgen $(A_i)$ und $(B_i)$ in $\mathcal{L}(m)$ und $\mathcal{L}(n)$ mit $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \times B_i \supseteq C$ gegeben. Es folgt mit der $\sigma$-Subadditivität von $\lambda^*_{m+n}$

$$\lambda^*_{m+n}(C) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda^*_{m+n}(A_i \times B_i) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i)\lambda_n(B_i).$$

Damit ist $\lambda^*_{m+n} \le \lambda^*$, da $\lambda^*$ als Infimum über solche Überdeckungen definiert ist. □

Nun wollen wir das Lebesgue-Integral bezüglich des Produktmaßes betrachten. Hier wollen wir beweisen, dass

$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_Y \left( \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

Angewandt auf den Spezialfall $\mu = \nu = \lambda_1$ bekommen wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \right) \mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) \right) \mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Wir beginnen mit einem Hilfsresultat aus der Mengenlehre.

**Definition 2.74.** *Sei $X \neq \emptyset$. Eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt monotone Klasse, wenn gilt:*

*(1) Für $(A_j)$ mit $A_j \in \mathcal{M}$ und $A_j \subseteq A_{j+1}$ folgt $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$.*

*(2) Für $(A_j)$ mit $A_j \in \mathcal{M}$ und $A_j \supseteq A_{j+1}$ folgt $\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$.*

**Beispiel 2.75.** *Jede $\sigma$-Algebra ist eine monotone Klasse. Da Durchschnitte von monotonen Klassen wieder monotone Klassen sind, existiert für jedes $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste monotone Klasse, die $S$ enthält.*

**Satz 2.76.** *Sei $\mathcal{A}$ eine (boolesche oder Mengen–) Algebra, d.h. es gilt*

*(1) $X \in \mathcal{A}$,*

*(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,*

*(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.*

*Dann ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$ gleich der kleinsten monotonen Klasse, die $\mathcal{A}$ enthält.*

*Beweis.* Es sei

$$\mathcal{M} := \bigcap \{\mathcal{M}' : \ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}', \ \mathcal{M}' \text{ monotone Klasse}\}.$$

Da $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, folgt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$. Außerdem ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ und damit $X \in \mathcal{M}$. Wir zeigen $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.

Für $A \subseteq X$ definieren wir

$$\mathcal{M}(A) := \{B \subseteq X : \ A \cup B, \, A \setminus B, \, B \setminus A \in \mathcal{M}\}.$$

Die Definition ist symmetrisch in $A$ und $B$, damit ist $B \in \mathcal{M}(A)$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{M}(B)$.

Sei nun $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(A)$. Weiter ist $\mathcal{M}(A)$ eine monotone Klasse: Sei $(B_j)$ eine Folge in $\mathcal{M}(A)$ mit $B_j \subseteq B_{j+1}$. Dann ist $A \cup B_j \in \mathcal{M}$, $A \cup B_j \subseteq A \cup B_{j+1}$ und $A \cup (\bigcup_{j=1}^\infty B_j) = \bigcup_{j=1}^\infty (A \cup B_j) \in \mathcal{M}$. Also ist $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{M}$. Die restlichen Eigenschaften folgen analog, und es gilt $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{M}(A)$. Daraus folgt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Aus der Symmetrie folgt $A \subseteq \mathcal{M}(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{A}$. Damit ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(M)$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}$. Weil $X \in \mathcal{M}$ ist, ist $\mathcal{M}$ eine Algebra.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine $\sigma$-Algebra ist. Sei $(A_j)$ eine Folge in $\mathcal{M}$. Definiere $B_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$. Da $\mathcal{M}$ eine Algebra ist, folgt $B_k \in \mathcal{M}$ für alle $k$. Weiter ist $B_k \subseteq B_{k+1}$. Da $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist, folgt $\bigcup_{k=1}^\infty B_k = \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$, also ist $\mathcal{M}$ eine $\sigma$-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält, und damit $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$. □

**Aufgabe 2.77.** *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann ist $C_x := \{y : \ (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$ und $C^y := \{x : \ (x, y) \in C\} \in \mathcal{A}$ für alle $y \in Y$.*

**Aufgabe 2.78.** *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar. Dann ist für jedes $x \in X$ die Funktion $f_x(y) := f(x, y)$ $\mathcal{B}$-messbar. Analog ist für jedes $y \in Y$ die Funktion $f_y(x) := f(x, y)$ $\mathcal{A}$-messbar.*

Wir betrachten zuerst Integrale nicht-negativer Funktionen. Wir beginnen mit Integralen charakteristischer Funktionen. Außerdem zeigt der folgende Satz eine Alternative, um ein Produktmaß zu definieren.

**Satz 2.79.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume, $\nu$ sei $\sigma$-endlich. Dann ist für jedes $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die Abbildung $x \mapsto \nu(C_x)$ $\mathcal{A}$-messbar, und*

$$\rho(C) := \int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

*ist ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit*

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}.$$

*Beweis.* (1) Wir betrachten erst den Fall, dass $\nu$ endlich ist. Der Beweis folgt dem Prinzip der guten Mengen: Wir definieren

$$\mathcal{M} := \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \ x \mapsto \nu(C_x) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist. Ist $(C_j)$ eine monoton fallende Folge in $\mathcal{M}$ mit $C := \bigcap_{j=1}^\infty C_j$, dann gilt $\nu(C_x) = \lim_{j\to\infty} \nu(C_{j,x})$ wegen (1.30). Und damit ist $C \in \mathcal{M}$. Für eine monoton wachsende Folge $(C_j)$ in $\mathcal{M}$ bekommen wir analog $\bigcup_{j=1}^\infty C_j \in \mathcal{M}$.

Wir betrachten nun die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j : \ n \in \mathbb{N},\ A_j \in \mathcal{A},\ B_j \in \mathcal{B} \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{C}$ eine Algebra: aus $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ folgt $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$. Wegen $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ ist

$$\left( \bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^n ((A_j^c \times Y) \cup (X \times B_j^c)) = \bigcup_{J \subseteq \{1 \dots n\}} \left( \bigcap_{j \in J} A_j^c \times \bigcap_{j \notin J} B_j^c \right),$$

und $\mathcal{C}$ ist eine Algebra.

Wir zeigen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Wie im Beweis von Satz 2.72 argumentiert, kann jede Vereinigung von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ als endliche, disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ geschrieben werden. Sei $C := \bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j \in \mathcal{C}$ mit disjunkten Mengen $A_j \times B_j$. Dann ist

$$\nu(C_x) = \sum_{j=1}^n \nu((A_j \times B_j)_x)$$

eine messbare Funktion, und $C \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Nach Satz 2.76 ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C})$ die kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{C}$ enthält, also folgt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

(2) Sei nun $\nu$ $\sigma$-endlich. Dann gibt es eine aufsteigende Folge $(Y_j)$ mit $Y_j \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{j=1}^\infty Y_j = Y$ und $\nu(Y_j) < \infty$. Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Wegen (1) ist $x \mapsto \nu(C_x \cap Y_j)$ $\mathcal{A}$-messbar für alle $j$. Wegen der Konvergenz $\nu(C_x \cap Y_j) \to \nu(C_x)$ ist auch $x \mapsto \nu(C_x)$ $\mathcal{A}$-messbar.

(3) Es bleibt zu zeigen, dass $\rho$ die behaupteten Eigenschaften hat. Sind $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ dann ist

$$\rho(A \times B) = \int_X \chi_A \nu(B) \,\mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\nu(B).$$

Sei $(C_j)$ eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Setze $C := \bigcup_{j=1}^\infty C_j$. Dann ist $\nu(C_x) = \nu(\bigcup_{j=1}^\infty C_{j,x}) = \sum_{j=1}^\infty \nu(C_{j,x})$. Mithilfe der monotonen Konvergenz (Satz 2.37) folgt

$$\begin{aligned}
\int_X \nu(C_x) \,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \sum_{j=1}^\infty \nu(C_{j,x}) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \nu(C_{j,x}) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{j=1}^n \nu(C_{j,x}) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \rho(C_j) = \sum_{j=1}^\infty \rho(C_j),
\end{aligned}$$

und $\rho$ ist ein Maß. $\square$

**Bemerkung 2.80.** *Der Umweg über die Menge $\mathcal{C}$ war nötig, denn man kann nicht zeigen, dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen gegenüber Durchschnittsbildung ist. In diesem Fall wäre $\mathcal{M}$ eine Algebra: Wegen (1.27) folgt aus $C_1 \subseteq C_2$ mit $C_1, C_2 \in \mathcal{M}$, dass $C_2 \setminus C_1 \in \mathcal{M}$ ist, damit ist $\mathcal{M}$ abgeschlossen gegenüber Komplementbildung.*

**Satz 2.81.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma$-endliche Maßräume. Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann sind die Abbildungen $x \mapsto \nu(C_x)$ und $y \mapsto \mu(C^y)$ $\mathcal{A}$- und $\mathcal{B}$-messbar, und es gilt*

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(C^y) \,\mathrm{d}\nu(y).$$

*Beweis.* Folgt aus Satz 2.79 und Satz 2.72. □

**Folgerung 2.82** (Prinzip von Cavalieri)**.** *Seien $A, B \in \mathcal{L}(m+n)$. Gilt $\lambda_m(A_y) = \lambda_m(B_y)$ für $\lambda_n$-fast alle $y \in \mathbb{R}^n$, dann folgt $\lambda^{m+n}(A) = \lambda^{m+n}(B)$.*

*Beweis.* Folgt aus Satz 2.81 und Satz 2.73. □

**Beispiel 2.83.** *Ohne $\sigma$-Endlichkeit ist die Behauptung von Satz 2.81 falsch. Sei $X = Y = \mathbb{R}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}^1$ und $\mu = \lambda_1$ sowie $\nu = \mathcal{H}^0$ (Zählmaß). Sei $D := \{(x,x) : x \in [0,1]\}$. Dann ist $D$ abgeschlossen und gehört zu $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1$.*

*Wir beweisen zuerst, dass $\lambda^*(D) = +\infty$ mit dem äußeren Maß $\lambda^*$ aus (2.66). Seien $(A_j)$ und $(B_j)$ Folgen in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$. Wir zeigen, dass $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \times B_j$ keine Überdeckung von $D$ sein kann.*

*Damit $\mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$ ist, muss $B_j$ eine endliche Menge oder $A_j$ eine $\lambda_1$-Nullmenge sein. Wir setzen $A := \bigcup_{\lambda_1(A_j)=0} A_j$ und $B := \bigcup_{\mathcal{H}^0(B_j)<\infty} B_j$. Dann ist $A$ eine $\lambda_1$-Nullmenge und $B$ eine abzählbare Menge.*

*Weiter ist $A_j \times B_j \subseteq (A \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times B)$ für alle $j$, und damit $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \times B_j \subseteq (A \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times B)$. Sei $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ die Projektion auf die erste Koordinate. Dann ist $\pi_1(D \cap (A \times \mathbb{R})) = A$ und $\pi_1(D \cap (\mathbb{R} \times B)) = B$. Da $\pi_1(D) = [0,1]$ ist $\lambda_1(\pi_1(D)) = 1$. Weil aber $\lambda_1(\pi(A \cup B)) = 0$ ist, kann $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \times B_j$ keine Überdeckung von $D$ sein. Damit folgt $\lambda^*(D) = (\mu \otimes \nu)(D) = +\infty$.*

*Wertet man die Integrale in Satz 2.81 aus bekommt man allerdings andere Werte: es ist $\nu(D_x) = \chi_{[0,1]}(x)$ und $\mu(D^y) = 0$, so dass*

$$\int_X \nu(D_x) \,\mathrm{d}\mu(x) = 1, \quad \int_Y \mu(D^y) \,\mathrm{d}\nu(y) = 0.$$

*Außerdem zeigt dieses Beispiel, dass das Produktmaß nicht mehr eindeutig im Sinne von Satz 2.72 sein kann. Denn wegen Satz 2.79 ist $D \mapsto \int_Y \mu(D^y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ ein weiteres, von $\mu \otimes \nu$ verschiedenes Maß auf $X \times Y$.*

Den folgenden Satz (Satz von Fubini) beweisen wir in vier Varianten: jeweils für nicht-negative Funktionen und integrierbare Funktionen, und $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbare und $\Lambda$-messbare Funktionen.

**Satz 2.84.** *Seien* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma$*-endliche Maßräume. Sei* $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-messbar.*

*Dann sind die Funktionen* $x \mapsto \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ *und* $y \mapsto \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{A}$*- und* $\mathcal{B}$*-messbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left( \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_Y \left( \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

*Beweis.* Wegen Satz 2.81 gilt die Behauptung des Satzes für einfache Funktionen $f : X \times Y \to [0, +\infty)$. Hier benötigen wir, dass jede einfache Funktion eine Linearkombination von charakteristischen Funktionen disjunkter Mengen ist (Lemma 2.27).

Sei nun $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar. Dann gibt es wegen Satz 2.29 eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen $(f_n)$ mit $f_n \nearrow f$. Dann ist die Funktion $x \mapsto \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ als punktweiser Grenzwert der messbaren Funktionen $x \mapsto \int_Y f_n(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Analog ist $y \mapsto \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{B}$-messbar. Mit monotoner Konvergenz Satz 2.37 bekommen wir

$$\int_Y f_n(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \nearrow \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y)$$

für alle $x$ und

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) &= \lim_{n\to\infty} \int_X \left( \int_Y f_n(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \left( \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \left( \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Analog bekommen wir die zweite Gleichung. □

**Satz 2.85.** *Seien* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma$*-endliche Maßräume. Sei* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-messbar und integrierbar bezüglich* $\mu \otimes \nu$*.*

*Dann sind die Funktionen* $x \mapsto \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ *und* $y \mapsto \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ *für* $\mu$*-fast alle* $x$ *und* $\nu$*-fast alle* $y$ *integrierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left( \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_Y \left( \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Diese Schreibweise birgt eine kleine Unsauberkeit: die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ muss nicht für alle $x$ $\nu$-integrierbar sein. Die Doppelintegrale sind deshalb wie folgt zu verstehen: Die Menge $N := \{x : \int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}\nu(y) = +\infty\}$ ist eine $\mu$-Nullmenge nach der Behauptung von Satz 2.85, und wir setzen

$$\int_X \left( \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) := \int_{N^c} \left( \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x). \tag{2.86}$$

Analog verfahren wir mit dem zweiten Doppelintegral.

*Beweis von Satz 2.85.* Wegen Satz 2.39 ist $|f|$ bezüglich $\mu \otimes \nu$ integrierbar, und Satz 2.84 ergibt $\int_{X \times Y} |f| \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x)$. Nach Satz 2.45 ist die Menge $N := \{x : \int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}\nu(y) = +\infty\}$ eine $\mu$-Nullmenge. Ist $x \in N^c$ dann gilt

$$\int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y f^+(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) + \int_Y -f^-(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y).$$

Die Funktionen auf der rechten Seite sind $\mathcal{A}$-messbar und $\mu$-integrierbar wegen Satz 2.84. Weiter ist $N \times Y$ eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge. Durch Integration und Anwenden von Satz 2.84 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{N^c} \left( \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{N^c} \left( \int_Y f^+(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) - \int_{N^c} \left( \int_Y -f^-(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{X \times Y} \chi_{N^c \times Y} f^+ \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) - \int_{X \times Y} \chi_{N^c \times Y} \cdot (-f^-) \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) \\
&= \int_{X \times Y} f^+ \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) - \int_{X \times Y} -f^- \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) \\
&= \int_{X \times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu).
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Da $\mu(N) = 0$ ist nach der Definition in (2.86)

$$\int_X \left( \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{N^c} \left( \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt analog. □

Wir wollen nun noch Sätze analog zu Satz 2.84 und Satz 2.85 formulieren, für Funktionen, die $\Lambda$-messbar sind. Wegen $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ ist das eine schwächere Voraussetzung als $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-Messbarkeit.

**Lemma 2.88.** *Sei $\mu \otimes \nu$ $\sigma$-endlich. Sei $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\Lambda$-messbar. Dann existiert eine Menge $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$ und eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbare*

*Funktion $\tilde{f}$, so dass $f = \tilde{f}$ auf $N^c$.*

*Beweis.* Sei zunächst $f = \chi_C$ mit $C \in \Lambda$. Nach Folgerung 2.70 existieren $D, N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $C \cup N = D$ und $(\mu \otimes \nu)(D) = (\mu \otimes \nu)(C)$. Die Behauptung folgt mit $\tilde{f} = \chi_D$. Dann gilt die Behauptung auch für einfache Funktionen. Sei nun $f$ $\Lambda$-messbar. Wir approximieren $f$ durch eine Folge $(f_n)$ einfacher Funktionen, die $\Lambda$-messbar sind (Folgerung 2.30). Dann gibt es für jedes $n$ eine Nullmenge $N_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und eine (einfache) $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbare Funktion $\tilde{f}_n$ mit $\tilde{f}_n = f_n$ auf $N_n^c$. Setze $N := \bigcup_{n=1}^\infty N_n$. Dann ist $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$. Die Behauptung folgt mit $\tilde{f} = \chi_{N^c} f$. □

**Satz 2.89.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma$-endliche und vollständige Maßräume mit Produkt $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$. Sei $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\Lambda$-messbar.*

*Dann gilt:*

*(1) Für $\mu$-fast alle $x$ ist $y \mapsto f(x, y)$ $\mathcal{B}$-messbar. Weiter ist die (für fast alle $x$ definierte) Abbildung $x \mapsto \int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar.*

*(2) Für $\nu$-fast alle $y$ ist $x \mapsto f(x, y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Weiter ist die (für fast alle $y$ definierte) Abbildung $y \mapsto \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{B}$-messbar.*

*(3)*

$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_Y \left( \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

*Beweis.* Aus Lemma 2.88 bekommen wir eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbare Funktion $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}$ auf $N^c$. Dann ist $\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_{X\times Y} \tilde{f} \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)$. Satz 2.84 angewandt auf $\chi_N$ ergibt

$$0 = (\mu \otimes \nu)(N) = \int_X \nu(N_x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(N^y) \,\mathrm{d}\nu(y).$$

Damit ist $N_x$ ein $\nu$-Nullmenge für $\mu$-fast alle $x$, und $N^y$ ist ein $\mu$-Nullmenge für $\nu$-fast alle $y$.

Sei $M := \{x : \ \nu(N_x) > 0\}$. Sei $x \in M^c$, also $\nu(N_x) = 0$. Dann ist $f(x, y) = \tilde{f}(x, y)$ für alle $y \in (N_x)^c$. Nun ist $y \mapsto \tilde{f}(x, y)$ $\mathcal{B}$-messbar, $\nu(N_x) = 0$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständig, also $y \mapsto f(x, y)$ ist $\mathcal{B}$-messbar, und damit ist das Integral $\int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ definiert. Und es gilt $\int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \tilde{f}(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)$, weil sich $f(x, \cdot)$ und $\tilde{f}(x, \cdot)$ nur auf der Nullmenge $N_x$ unterscheiden.

Da die Abbildung $x \mapsto \int_Y \tilde{f}(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar (Satz 2.84), $\mu(M) = 0$ und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig ist, ist auch $x \mapsto \int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Integrieren bezüglich $x$ gibt

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_{M^c} \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{M^c} \left(\int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Analog argumentieren wir für $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$. Die Behauptung folgt mit Satz 2.84 angewandt auf $\tilde f$. □

**Satz 2.90.** *Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ $\sigma$-endliche und vollständige Maßräume mit Produkt $(X\times Y,\Lambda,\mu\otimes\nu)$. Sei $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ $\Lambda$-messbar und integrierbar.*

*Dann gilt:*

*(1) Für $\mu$-fast alle $x$ ist $y\mapsto f(x,y)$ $\nu$-integrierbar. Weiter ist die (für fast alle $x$ definierte) Abbildung $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mu$-integrierbar.*

*(2) Für $\nu$-fast alle $y$ ist $x\mapsto f(x,y)$ $\mu$-integrierbar. Weiter ist die (für fast alle $y$ definierte) Abbildung $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ $\nu$-integrierbar.*

*(3)*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis ist ähnlich zu Satz 2.85. Da $f$ integrierbar ist, sind auch $f^+$ und $-f^-$ integrierbar. Wir wenden Satz 2.89 auf $|f|$, $f^+$ und $-f^-$ an. Dann gibt es eine $\mu$-Nullmenge $N$, so dass gilt: $y\mapsto f(x,y)$ ist $\mathcal{B}$-messbar und integrierbar für alle $x\in N^c$, und die Abbildungen $x\mapsto \chi_{N^c}\int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)$, $x\mapsto \chi_{N^c}\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$, $x\mapsto\chi_{N^c}\int_Y -f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ sind $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Wir können nun wie in (2.87) argumentieren. □

**Beispiel 2.91.** *[Els05, Beispiel V.2.3] Für die Funktion*

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

*sind die iterierten Integrale*

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4},\quad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = +\frac{\pi}{4},$$

*also kann $f$ nicht $\lambda_1$-integrierbar auf $(0,1)^2$ sein.*

**Lemma 2.92.** *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$*-endlich und* $f : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ *messbar. Definiere*

$$A_f := \{(x, t) : \ 0 \le t < f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}.$$

*Dann ist*

$$(\mu \otimes \lambda_1)(A^f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

*Beweis.* Wegen

$$A_f = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} (\{x : \ f(x) > t\} \times [0, t])$$

ist $A_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Da $\lambda_1((A_f)_x) = f(x)$, folgt die Behauptung mit Satz 2.81.

$\square$