Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 28, 2024)

Problem 1. Bestimmen Sie die Lösungen der Anfangswertprobleme

(a) $\dot{x} = (5t + 5x)^2, \qquad x(0) = 0$ und

(b) $\dot{x} = \frac{t^2 - x^2}{-5tx}, \qquad x(1) = 1.$

Proof. (a) Die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (t, x) \mapsto (t, x + t) =: (t, u)$ ist ein Diffeomorphismus. Damit ist die Ableitung

$$\dot{x} = \dot{u} - 1$$

und die Gleichung ist

$$\dot{u} - 1 = 25u^2.$$

Diese Gleichung ist separabel und besitzt Lösung

$$\int_0^u \frac{1}{1 + 25s^2}\, \mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{d}r\,,$$

also

$$\frac{1}{5}\tan^{-1}(5u) = t.$$

Setzt man $x = u - t$ wieder ein, so erhält man

$$x = \frac{1}{5}\tan(5t) - t.$$

(b) Man verifiziere einfach, dass die Gleichung homogen ist. Daher verwenden wir wie im Skript die Substitution $u = x/t$ bzw. der Diffeomorphismus

$$T : (t, x) \mapsto (t, x/t).$$

Wie im Skript ist die transformierte DGL

$$\dot{u} = \frac{\frac{1-u^2}{-5u} - u}{t}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

was nach Vereinfachung

$$\dot{u} = \frac{1}{t}\frac{1-u^2+5u^2}{-5u} = -\frac{1}{t}\frac{1+4u^2}{5u}$$

ist. Die Gleichung ist jetzt separabel mit Lösung gegeben durch

$$\int_1^u \frac{5s}{1+4s^2}\,\mathrm{d}s = \int_1^t -\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\,,$$

oder

$$\frac{5}{8}\ln\left[\frac{1}{5}\left(1+4u^2\right)\right] = -\ln t.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{5}(1+4u^2) = t^{-8/5}$$

und

$$x = t\sqrt{\frac{1}{4}\left(5t^{-8/5}-1\right)} = \frac{t}{2}\sqrt{5t^{-8/5}-1}.$$ □

Problem 2. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

(a) $\cos(t)+\sin(x)+(t\cos(x)+x)\dot{x} = 0 \qquad x(0)=0$ exakt ist und bestimmen Sie die Stammfunktion $F_0(t,x)$.

(b) $\frac{1}{4}t^4\dot{x}+3x+t^2\dot{x}+t^3x = -3t\dot{x}-5\dot{x}-2tx, \qquad x(0)=1$ exakt ist, bestimmen Sie Stammfunktion $F_0(t,x)$ und bestimmen Sie eine Lösung.

Proof. (a) Die Koeffizientenfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, was ein Rechteck ist. Daher betrachten wir wie im Skript

$$\frac{\partial(\cos t+\sin x)}{\partial x} = \cos t = \frac{\partial(t\cos x+x)}{\partial t}.$$

Die DGL ist also exakt. Eine mgliche Stammfunktion ist

$$F_0(t,x) = t\sin x + \frac{x^2}{2} + \sin t.$$

(b) Die Gleichung umgeformt ist

$$\underbrace{(3x+t^3x+2tx)}_{M(t,x)} + \underbrace{\left(t^2+3t+5+\frac{t^4}{4}\right)}_{N(t,x)}\dot{x} = 0.$$

Die Koeffizientenfunktionen sind wieder auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Daher betrachten wir

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 3 + t^3 + 2t = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Die DGL ist also exakt. Eine Stammfunktion ist

$$F_0(t,x) = 3xt + \frac{1}{4}t^4 x + t^2 x + 5x.$$

Dann setzen wir $F_0(t_0, x_0)$ ein und erhalten

$$F_0(0,1) = 5.$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$F_0(t,x) = x\left(3t + \frac{t^4}{4} + t^2 + 5\right) = F_0(0,1) = 5,$$

und die $x(t)$ ist

$$x(t) = \frac{5}{3t + \frac{t^4}{4} + t^2 + 5}. \qquad \square$$

Problem 3. Gegeben sei eine Differentialgleichung für $(t,x) \in U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Form

$$M(t,x) + N(t,x)\dot{x} = 0.$$

die der Exaktheitsbedingung $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ *nicht* genügt.

(a) Seien N, M stetig differenzierbare Funktionen auf $\tilde{D} \to \mathbb{R}$, wobei $M(t,x) \neq 0$ für alle $(t,x) \in \tilde{D}$ für ein offenes Rechteck $\tilde{D} \subseteq U$. Zeigen Sie: Hängt $\beta(t,x) := \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)$ allein von x ab, so ist $\mu(x) := \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \beta(x)\,\mathrm{d}s\right)$ für $(t_0, x_0) \in \tilde{D}$ ein integrierende Faktor von der Gleichung.

(b) Überprüfen Sie die Differentialgleichung

$$-2tx + (3t^2 - x^2)\dot{x} = 0, \qquad x(1) = 1$$

auf Exaktheit und bestimmen Sie dann eine Stammfunktion $F_0(t,x)$ im Falle der Exaktheit. Falls sie nicht exakt ist, finden Sie einen integrierenden Faktor und bestimmen Sie dann eine Stammfunktion $F_0(t,x)$.

Proof. (a) Da $\tilde{D}$ ein Rechteck ist, ist die DGL exakt genau dann, wenn

$$\frac{\partial M(t,x)\mu(x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)\mu(x)}{\partial t}.$$

Dann berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M(t,x)\mu(x)}{\partial x} &= M(t,x)\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} + \mu(x)\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} \\
&= M(t,x)\mu(x)(-\beta(x)) + \mu(x)\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} \\
\frac{\partial(N(t,x)\mu(x))}{\partial t} &= \mu(x)\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}
\end{aligned}$$

Die beide sind genau dann gleich, wenn

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = \beta(x)M(t,x),$$

was per Definition von $\beta(x)$ erfüllt ist.

(b) Da die Koeffizientenfunktionen auf $\mathbb{R}^2$ definiert sind, ist die DGL genau dann exakt, falls

□

Problem 4. (a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} - \frac{3t^2+4}{t^3+4t}x = t \qquad x(2) = 0.$$

(b) Für welche Anfangswerte $x(1) = x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}$, hat die Differentialgleichung

$$t\dot{x} = x + 2t^3$$

eine Lösung? Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen des Anfangswertproblems.

Proof. (a) Wir verwenden Variation der Konstante. Zunächst lösen wir die homogene DGL

$$\dot{x} - \frac{3t^2+4}{t^3+4t}x = 0.$$

Die Koeffizientfunktion hat Stammfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|t^3+4t| = \frac{3t^2+4}{t^3+4t}$$

und die Lösung ist damit

$$x(t) = C|t^3+4t|.$$

Da $[t^3 + 4t]_{t=2} > 0$, können wir eine offene Umgebung finden, sodas $t^3 + 4t$ in dieser Umgebung positiv ist. Daher schreiben wir einfach

$$x(t) = C(t^3 + 4t).$$

Für die Methode ersetzen wir die Konstante C durch eine Funktion $C(t)$. Mit diesem Ansatz ergibt sich eine Gleichung für $C(t)$:

$$C'(t)(t^3 + 4t) = t.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich einfach durch Integration:

$$C(t) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + A$$

und die Lösung für $x(t)$ ist

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + A\right)(t^3 + 4t).$$

Nun wird $t = 2$ eingesetzt, um A zu bestimmen. Die Lösung ist

$$A = -\frac{\pi}{8}$$

und

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)(t^3 + 4t).$$

(b) Wieder durch Variationen der Konstanten: Zunächst lösen wir die homogene DGL

$$t\dot{x} = x$$

und erhalten als allgemeine Lösung

$$x = Ct,\ C \in \mathbb{R}.$$

Dann setzen wir als Ansatz $x = c(t)t$ ein und erhalten eine Gleichung für $c(t)$:

$$t^2 c'(t) = 2t^3$$

mit Lösung

$$c(t) = t^2 + A.$$

Die allgemeine Lösung für $x(t)$ ist also

$$x(t) = \left(t^2 + A\right) t.$$

Die Gleichung $x(1) = x_0$ ist

$$x_0 = 1 + A,$$

was immer eine Lösung für A besitzt. Daher gibt es eine Lösung für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. $\square$