Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 25, 2024)

Problem 1. Begründen Sie, warum die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung im Punkt $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche besondere Form nimmt $(D\det)(\mathrm{Id})$ an?

Problem 2. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so kann die zweite Ableitung $D^2 f$ in jedem Punkt $x \in U$ durch eine blineare Abbildung $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ darstellen. Für eine gegebene Basis auf dem $\mathbb{R}^n$-wir wählen die kanonische Basis hier - lassen sich bilineare Abbildungen durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ darstellen, die sog. Hesse-Matrix Hf mit

$$Hf(x, y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die partiellen Ableitungen nach dem Satz von Schwarz vertauschen, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch.

Es sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt genau dann besitzt, wenn die Hesse-Matrix von f (in (0,0)) positiv semi- negativ semi- bzw. indefinit ist.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für allgemeine Funktionen mit positiv (bzw. negativ) semidefiniter Hesse-Matrix im kritischen Punkt kein lokales Minimum (bzw. Maximum) vorliegen muss.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 3. Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F.

(b) In welchem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ existiert die Inverse von $JF(p)$?

(c) Finden Sie eine lokale inverse Abbildung F^{-1} von F in einer Umgebung von $p = (1,0) = F(1,0)$ und berechnen Sie die Ableitung von F^{-1} in p.

(d) Ist F auf dem ganzen Gebiet $\{p \in \mathbb{R}^2 | JF(p) \text{ invertierbar}\}$ global invertierbar?

Problem 4. Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen wir die Glattheit der Inversen-Abbildung $\text{inf} : GL(n) \to GL(n)$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Begründen Sie, dass die Abbildung $A \cdot B \to AB$ auf $\mathbb{R}^{(n \times n)^2}$ unendlich oft differenzierbar ist.

(b) Nutzen Sie dan Satz über implizite Funktionen, um $\text{inf} \in \mathcal{C}^\infty(GL(n), GL(n))$ zu beweisen.

Hinweis: Betrachten Sie $A \cdot B = Id$