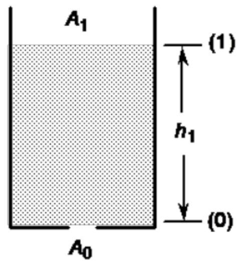
Aufgabe 11.4: *Auslaufgefäß* .... (4 Punkte)

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

Ein rechteckiger Becher mit Querschnittsfläche A_1 hat im Boden einen Auslauf mit Querschnittsfläche A_0. Diese Öffnung wird zunächst verschlossen und der Becher mit Wasser (Dichte ρ_w) gefüllt. Im gesamten Außenraum herrscht der atmosphärische Luftdruck p_L. Der geringe Luftdruckunterschied zwischen Niveau (1) und (0) sei vernachlässigbar. Nehmen Sie das Wasser als inkompressibel und reibungsfrei an.

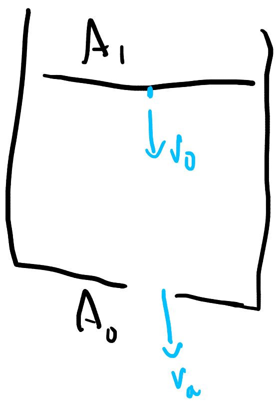


(2 P) a) Nach dem Öffnen des Auslaufs strömt Wasser mit der Geschwindigkeit v_a aus dem Gefäß. Bestimmen Sie diese Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der momentanen Wasserhöhe h_1 und den Gefäßabmessungen.

(1 P) b) Wie groß ist der Betrag der Rückstoßkraft auf das Gefäß? Nehmen Sie dazu an, dass $A_1 \gg A_0$.

(1 P) c) Sie füllen nun kontinuierlich Wasser in das Gefäß von oben mit einem Volumenstrom I_e. Berechnen sie die konstante Höhe h_2, die der Wasserpegel im Gefäß nach einiger Zeit annimmt.

a) Kontinuitätgleichung



$$v_a A_0 = v_0 A_1$$

Bernoulli Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho_w v_0^2 + \rho_w g h_1 = \frac{1}{2}\rho_w v_a^2$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho_w}\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 v_a^2 + \cancel{\rho_w} g h_1 = \frac{1}{2}\cancel{\rho_w} v_a^2$$

$$v_a^2\left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2\right) = 2gh_1$$

$$v_a = \sqrt{2gh_1}\left(1 - \frac{A_0^2}{A_1^2}\right)^{-1/2}$$

b)

$$v_a \approx \sqrt{2gh_1}$$

$$v_a A_0 = v_0 A_1$$

$$v_0 = v_a \frac{A_0}{A_1} = \frac{dh_1}{dt}$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \sqrt{2gh_1}\,\frac{A_0}{A_1}$$

$$\text{Impuls des Wassers} = (\rho_w A_1 h_1)\sqrt{2gh_1}\,\frac{A_0}{A_1} =: p$$

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{2g}\,\rho_w A_0 \frac{d}{dt} h_1^{3/2}$$

$$= \sqrt{2g}\,\rho_w A_0 \left[\frac{3}{2}\sqrt{h_1}\right] \frac{dh_1}{dt}$$

$$= \sqrt{2g}\,\rho_w A_0 \left[\frac{3}{2}\sqrt{h_1}\right] \sqrt{2gh_1}\,\frac{A_0}{A_1}$$

$$= 2g\rho_w \frac{A_0^2}{A_1}\left[\frac{3}{2}h_1\right]$$

$$= 3g\rho_w \frac{A_0^2}{A_1} h_1$$

$$= (\rho_w A_1 h_1)\,g - N \quad \text{(Newtonsche Gesetz)}$$

$$N = \rho_w A_1 h_1 g - 3g\rho_w \frac{A_0^2}{A_1} h_1$$

c) Wasser nach innen = Wasser nach draußen

$$I_e = V_a A_0$$

$$= \sqrt{2gh_2}\left(1 - \frac{A_0^2}{A_1^2}\right)^{-1/2} A_0$$

$$\frac{I_e}{A_0}\left(1 - \frac{A_0^2}{A_1^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2gh_2}$$

$$2gh_2 = \frac{I_e^2}{A_0^2}\left(1 - \frac{A_0^2}{A_1^2}\right)$$

$$h_2 = \frac{I_e^2}{2gA_0^2}\left(1 - \frac{A_0^2}{A_1^2}\right)$$