Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

# 4. Übungsblatt

**Hinweis:**
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Mittwoch (15.11.2023) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Die Symmetrische Gruppe (6 + 8 Pkte)**

   Wir definieren mit $S_n$ die Menge der bijektiven Abbildungen

   $$\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}.$$

   Dann ist bekannterweise $(S, \circ)$ mit

   $$\sigma_2 \circ \sigma_1(i) = \sigma_2(\sigma_1(i))$$

   eine Gruppe. Wir führen für gewöhnlich eine Abbildungstabelle

   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix},$$

   mit $i_1, ..., i_n$ paarweise verschieden, um zu signalisieren $\sigma(k) = i_k$ für $k = 1, ..., n$.

   (a) Eine übliche Darstellung bei Elementen aus $S_n$ ist die Zyklenschreibweise. Ein Zyklus der Länge $k$ mit $k \leq n$ hat die Form

   $$\sigma = (i_1 \; i_2 \; ... \; i_k),$$

   und signalisiert $i_1 \mapsto i_2$, $i_2 \mapsto i_3$, usw. $i_k \mapsto i_1$ unter $\sigma$. Ist die Zahl $i_j$ nicht im Zyklus vertreten, so wird sie unter $\sigma$ auf sich selbst abgebildet. Speziell für $k = 1$ erhalten wir die Identität und schreiben

   $$\sigma = (1)$$

   Geben Sie an, wie viele **unterschiedliche** Abbildungen $\sigma$ durch ein Zyklus der Länge $k$ realisiert werden können! Kann jedes Element in $S_3$ ($S_4$) als ein Zyklus geschrieben werden?

   (b) Wir definieren die Menge der (Permutations-)Matrizen

   $$P_n := \{P \in \mathbb{K}^{n \times n} \; : \; P = \left(e_{i_1}, ..., e_{i_n}\right), \text{ mit } 1 \leq i_k \leq n \text{ und alle } i_k \text{ paarweise verschieden}\},$$

   mit $e_i$ der i-te Einheitsvektor. Verifizieren Sie: $(P_n, \cdot)$ ist mit der herkömmlichen Matrixmultiplikation eine Gruppe! Bestimmen Sie weiterhin einen bijektiven Gruppenmorphismus

   $$\Phi \; : \; (S_n, \circ) \to (P_n, \cdot),$$

   sodass gilt

   $$\Phi(\sigma)e_i = e_j \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(i) = j.$$

   Beweisen Sie, dass sich jedes $P$ aus $P_n$ schreiben lässt als

   $$P = \prod_{k=1}^{n-1} V_{i_k j_k},$$

   mit $V_{ij}$ definiert wie in Lemma 5.56.

2. **Permutation (4 + 2 Pkte)**

   Gegeben sei die Permutation

   $$S_9 \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 7 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Stellen sie $\sigma$ als Produkt von Transpositionen dar.

(b) Berechnen Sie das Signum von $\sigma$.

3. **Symmetrische und Schiefsymmetrische Matrizen (2 + 3 + 4 + 1 Pkte)**

   Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch* bzw. *antisymmetrisch*, wenn $A^{\mathrm{T}} = A$ bzw. $A^{\mathrm{T}} = -A$ gilt. Seien $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ die Untermengen von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, die aus allen symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen bestehen.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SM}_n(\mathbb{R}), \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ Untervektorräume von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sind.

   (b) Zeigen Sie, dass
   $$A + A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R}), \quad A - A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R}), \quad \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$
   Folgern Sie, dass $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SM}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{SM}_n(\mathbb{R}))$ und $\dim(\mathrm{AS}_n(\mathbb{R}))$

   (d) Seien $A, B \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ antisymmetrische Matrizen. Zeigen Sie, dass der *Kommutator* $[A, B] := AB - BA$ wieder antisymmetrisch ist.

4. **Parameterabhängige Matrizen (6 + 4 Pkte)**

   Gegeben sind die Matrizen $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1-t \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}$, $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Bestimmen Sie $\mathrm{rang}(A(t))$ und $\mathrm{rang}(B(t))$ in Abhängigkeit von $t$.

   (b) Berechnen Sie die Inversen $(A(0))^{-1}$ und $(B(1))^{-1}$.