Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 12

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: February 3, 2024)

Problem 1. (Parametrisierung) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α und $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$. Außerdem existieren offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ und lokale Parameterdarstellungen $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von M mit $\varphi(U) \cup \psi(V) = M$ und $\varphi(U) = M \backslash A$, wobei $A = \psi(N)$ mit einer λ_k-Nullmenge $N \subseteq V$ gilt. Zeigen Sie, dass A messbar ist und

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_{M\backslash A} f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_k \,.$$

Problem 2. (Nullmengen) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(a) Sei $N \in \mathcal{L}_m$ mit $\lambda_M(N) = 0$. Dann gilt $\lambda_{M,V}(N) = 0$ für alle in M offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ für die eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$, mit $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, existiert.

(b) Zeigen Sie, dass M eine λ_n-Nullmenge ist.

Hinweis: Satz 3.5

Proof. (a) Sei (φ_j), $\varphi_j : T_j \to V_j$ eine abzählbare Atlas von M und V beliebig, aber wie in Aufgabenstellung. Da $\lambda_M(N) = 0$, gilt, für eine Folge von Mengen $(A_j), j \in 1, \dots,$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = 0.$$

Jetzt fügen wir die Menge V hinzu, mit $V_0 := V$, also jetzt ist (φ_j), $j = 0, \dots$ ein abzählbarer Atlas. Wir setzen $A_0' = A \cap V$ und $A_j' = A_j \cap V^c$ sonst, wobei die A_j hier die vorherigen A_j sind. Es gilt dann

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j')$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$=\lambda_{M,V}(A'_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{M,V_i}(A'_i)$$

Aber $A'_j \subset A_j$ für $j \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A'_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = 0.$$

Da das Maß positiv ist, muss der Ausdruck Null sein. Daraus folgt:

$$\lambda_{M,V}(A'_0) = \lambda_{M,V}(A \cap V) = 0.$$

(b) Wir brauchen zunächst ein

Lemma 1. *$\lambda_n(E_k) = 0$ für $k < n$.*

Proof. Sei $d = r - k$. Da E_k offensichtlich diffeomorph zu $\mathbb{R}^k$ ist, gibt es eine Überdeckung von Mengen $A_j \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $\lambda_k(A_j) < \infty$ und $A_j \times (a,b)^d \subseteq \mathbb{R}^n$. Weil $\mathbb{R}^p$ σ-endlich für alle $p \in \mathbb{N}$ ist, ist das Maß

$$\lambda_n(A_i \times (a,b)^d) = \lambda_k(A) \cdot (b-a)^d.$$

Sei jetzt $\epsilon > 0$. Wir betrachten die Folge von Mengen

$$B_j = \begin{cases} A_j \times (-1,1)^d & \lambda_k(A_j) = 0 \\ A_j \times \left(-\frac{\epsilon}{2^j \lambda_k(A_j)}, \frac{\epsilon}{2^j \lambda_k(A_j)}\right) & \lambda_k(A_j) > 0 \end{cases}.$$

Damit ist $\lambda_n(B_j) \leq \frac{2\epsilon}{2^j}$ und außerdem $E_k \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_n(E_k) \leq & \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) \\ \leq & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^i} \\ = & 2\epsilon \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig war, ist $\lambda_n(E_k) = 0$. □

Wir nutzen jetzt Satz 3.5, um eine abzählbare Überdeckung von Mengen U_j zu finden, so dass $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j \supseteq M$ und ein C^α Diffeomorphismus F existiert, so dass für jedes j eine $V_j \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $M \cap U_j = F(E_k \cap V_j)$

Daraus folgt für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\lambda_n(M \cap U_i) &= \int_{M \cap U_i} 1 \,\mathrm{d}\lambda_n \\
&= \int_{E_k \cap V_i} |\det F'| \,\mathrm{d}\lambda_n \\
&\leq \int_{E_l \cap V_i} \infty \,\mathrm{d}\lambda_n \\
&=\infty \int_{E_k \cap V_i} \mathrm{d}\lambda_k \\
&=\infty \lambda_n(E \cap V_i) \\
&\leq \infty \lambda_n(E_k) \\
&=\infty \cdot 0 \\
&=0
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\lambda_n(M) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(U_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} 0 \\
&=0
\end{aligned}$$

□

Problem 3. Seien $0 < r < R$ und

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 = 0 \right\}$$

die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit aus Präzenzaufgabe 10.1. Definiere außerdem die Funktion

$$\varphi : U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \varphi(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot (R + r\cos\beta) \\ \sin\alpha \cdot (R + r\cos\beta) \\ r\sin\beta \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subseteq T$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$, ein Homömorphismus $\psi : V \to \psi(V) \subseteq T$ und eine λ_2-Nullmenge $N \subseteq V$ existiert, sodass $\varphi : U \to T \setminus A$ ein Homömorphismus ist und $\psi(N) = A$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_T(T) = 4\pi^2 Rr$ gilt.

Proof. (a) Sei $x, y, z \in T$. Es gilt

$$\begin{aligned}(R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2-r^2 =&0\\ \frac{(R-\sqrt{x^2+y^2})^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2} =&0\end{aligned}$$

Da das Punkt

$$\left(\frac{(R-\sqrt{x^2+y^2})}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

auf dem Einheitskreis liegt, gibt es bekanntermaßen genau eine Winkel $\beta \in (0, 2\pi)$, so dass

$$\begin{aligned}z =&r\sin\beta\\ R-\sqrt{x^2+y^2} =&r\cos\beta.\end{aligned}$$

Da $0 \neq \beta \neq 2\pi$, ist der Fall $(1, 0)$ ausgeschlossen, also der Fall

$$\begin{aligned}R-\sqrt{x^2+y^2} =&r\\ z =&0\end{aligned}$$

ist ausgeschlossen. Sei jetzt β fest. Es gilt

$$x^2+y^2=(R-r\cos\beta)^2.$$

Daher liegt das Punkt

$$\left(\frac{x}{R-r\cos\beta}, \frac{y}{R-r\cos\beta}\right)$$

auch auf dem Einheitskreis, und noch einmal gibt es *genau eine* $\alpha \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}x =&\cos\alpha\cdot(R+r\cos\beta)\\ y =&\sin\alpha\cdot(R+r\cos\beta)\end{aligned}$$

Noch einmal ist der Fall $\alpha = 0$, also ist

$$\begin{aligned}x =&R+r\cos\beta\\ y =&0\end{aligned}$$

ausgeschlossen. Wir definieren dann

$$A=\left\{\begin{pmatrix}R+r\cos\beta\\ 0\\ r\sin\beta\end{pmatrix}, \beta\in(0,2\pi)\right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot (R+r) \\ \sin\alpha \cdot (R+r) \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in (0, 2\pi) \right\}$$

Jetzt definieren wir den gewünschten Homöomorphmus ψ ähnlich wie φ

(b) Nach 2 gilt

$$\begin{aligned} \lambda_T(T) &= \int_T 1 \,\mathrm{d}\lambda_T \\ &= \int_{T\setminus A} 1 \,\mathrm{d}\lambda_T \\ &= \int_U \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_M \,. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\varphi' = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \cdot (R + r\cos\beta) & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha \cdot (R + r\cos\beta) & -r\sin\alpha\sin\beta \\ 0 & r\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt: $\det(\varphi'^T\varphi') = r^2(R + r\cos\beta)^2$ und daher

$$\begin{aligned} \lambda_T(T) &= \int_U r(R + r\cos\beta) \,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\beta) \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi r(R + r\cos\beta) \,\mathrm{d}\beta \\ &= 2\pi r \left[R\beta + r\sin\beta\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r(2\pi R) \\ &= 4\pi^2 rR \end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini benutzt haben, um das Integral als Doppelintegral zu schreiben, weil $\mathbb{R}^2$ σ-endlich ist.

$\square$