Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 27, 2023)

Problem 1. Seien G, H Gruppen und $\Phi : G \to H$ ein Homomorphismus.

(a) Sei $g \in G$ ein Element mit Ordnung $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(\Phi(g))|n$ gilt.

(b) Sei $N \trianglelefteq G$. Ist dann stets auch $\Phi(N) \trianglelefteq H$?

Proof. (a) Es gilt

$$\Phi(g)^n = \Phi(g^n) = \Phi(1_G) = 1_H,$$

also $\operatorname{ord}(\Phi(g)) \leq n$. Wir beweisen die Aussage per Widerspruch. Sei $\operatorname{ord}(\Phi(g)) = p \nmid n$. Wir schreiben

$$n = qp + r, \qquad r < p$$

(Division mit Rest). Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\Phi(g)^n =& \Phi(g)^{qp+r} \\
=& \Phi(g)^{qp}\Phi(g)^r \\
=& \left(\Phi(g)^p\right)^q \Phi(g)^r \\
=& 1^q \Phi(g)^r \\
=& \Phi(g)^r \\
\neq& 1
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $r < p = \operatorname{ord}(\Phi(g))$, also $\Phi(g)^r \neq 1$, sonst wäre $\operatorname{ord}(\Phi(g)) = r$.

(b) Nein. Wir betrachten eine "Einbettung" $\mathrm{em} : S_n \to S_m$, wobei $m > n$. Sei $\sigma \in S_n$. Es gilt $\mathrm{em}(\sigma) = \sigma'$ genau dann, wenn

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \leq n \\ i & \text{sonst.} \end{cases}.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Es ist klar, dass Φ ein Homomorphismus ist. Sei $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, mit $\Phi(\sigma_1) = \sigma_1'$ und $\Phi(\sigma_2) = \sigma_2'$. Dann ist

$$\sigma_1'\sigma_2'(i) = \sigma_1'(i) = i \qquad n < i \leq m,$$

also $\sigma_1'\sigma_2'|_{\{1,2,\dots,n\}}$ ein Element von S_n, dessen Bild $\sigma_1'\sigma_2'$ ist.

Wir wissen, dass $A_n \trianglelefteq S_n$.

Konkretes Gegenbeispiel: Sei $n = 3, m = 5$. Wir betrachten em : $S_3 \to S_4$, und $\Phi(A_3)$, wobei $A_3 \trianglelefteq S_3$.

Dann ist $\Phi(A_3)$ kein Normalteiler von S_4. Unter Zweckentfremdung der Notation stellen wir A_3 und $\Phi(A_3)$ in Zykelnotation dar

$$A_3 = \Phi(A_3) = \{(123), (132)\}.$$

Es gilt auch $(14) \in S_4$ und $(14)^{-1} = (14)$.

Es gilt aber

$$(14)(123)(14) = (14)(1234) = (234) \notin \Phi(A_3),$$

also $\Phi(A_3) \ntrianglelefteq H$. $\square$

Problem 2. Seien G eine Gruppe und $M := \{x^2 | x \in G\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $N := \langle M \rangle$ ein Normailteiler von G ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes Element gN der Faktorgruppe G/N gilt: $\operatorname{ord}(gN) \leq 2$.

Proof. (a) Sei $x, y \in G$ beliebig. Es gilt $x^2 \in M$. Es ist $y^{-1}xy \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y^{-1}x^2y &= y^{-1}xxy \\ &= y^{-1}xyy^{-1}xy \\ &= (y^{-1}xy)^2 \\ &\in M, \end{aligned}$$

also M ist ein Normalteiler von G.

$\square$

Problem 3. Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe mit Untergruppen $A, B \leq G$ an, so dass

$$A \trianglelefteq B \qquad \text{und} \qquad B \trianglelefteq G$$

gelten, nicht jedoch $A \trianglelefteq G$.

Hinweis: Dies zeigt, dass das Normalteiler-Sein im Allgemeinen nicht transitiv ist.

Problem 4. Zeigen Sie, dass

$$S_n = \langle (12), (123\dots n) \rangle$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

Proof. Wir zeigen, dass Elemente mit bestimmte Formen Elemente von $\langle (12), (123\dots n) \rangle$ sind. Im Beweis begründen wir alle Schritte mit “Sonst wäre $\langle (12), (123\dots n) \rangle$ keine Gruppe, weil es nicht abgeschlossen wäre”.

Außerdem bedeutet hier Addition immer die Addition ähnlich zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $a + b = ((a-1) \oplus (b-1)) \oplus 1$, wobei $\oplus$ die “normale” Addition in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist. Wir bezeichnen $(12) = s$ und $(123\dots n) = T$.

(i) Alle Transpositionen $(i(i+1))$. Die Proposition ist

$$T^x s T^{n-x} = ((x+1)(x+2).$$

Es gilt

$$T^{n-x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1+(n-x) & 2+(n-x) & \dots & n-1+(n-x) & n+(n-x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$sT^{n-x} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+(n-x) & \dots & 2 & 1 & \dots & 2n-x \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} T^x s T^{n-x} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+(n-x)+x & \dots & 2+x & 1+x & \dots & 2n-x+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+n & \dots & 2+x & 1+x & \dots & 2n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1 & \dots & 2+x & 1+x & \dots & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Alle Transpositionen $(i(i+k))$, für alle $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ und $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

Wir beweise es per Induktion über k. Wir wissen es schon für $k=1$. Jetzt nehmen wir an, dass alle Transpositionen $i(i+k') \in \langle (12)(123\ldots n)\rangle$ für alle $i \in \{1,2,\ldots n\}$ und $k' \in \{1,2,\ldots,k-1\}$.

Wir betrachten $(i(i+k))$ für i beliebig. Ziel:

$$(i(i+k)) = (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1)). \tag{1}$$

Wir betrachten die Wirkung auf i, $i+k-1$ und $i+k$. Es ist klar, dass keine andere Zahlen nicht davon bewegt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
&(i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))i\\
&= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i+k-1)\\
&= (i(i+k-1))(i+k)\\
&= i+k\\
&(i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))(i+k)\\
&= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i+k)\\
&= (i(i+k-1))(i+k-1)\\
&= i\\
&(i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))(i+k-1)\\
&= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))i\\
&= (i(i+k-1))i\\
&= i+k-1,
\end{aligned}$$

also die Gleichheit in (1) gilt.

(iii) Alle Elemente $\sigma \in S_n$.

Wir schreiben ein beliebiges Element $\sigma \in S_n$ als Produkt von Transpositionen. Weil alle Transpositionen Elemente von $\langle (12)(123\ldots n)\rangle$ sind, müssen dann $\sigma \in \langle (12)(123\ldots n)\rangle$ auch. $\square$