Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 7

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 22, 2023)

Problem 1. (a) Eine Gruppe G der Ordnung 21 operiere auf einer Menge M mit 11 Elementen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Bahn der Länge 1 besitzt.

(Ist $\{m\} \subseteq M$ eine solche einelementige Bahn, dann gilt $g.m = m$ für alle $g \in G$. Jedes $g \in G$ fixiert also m. Man nennt m daher auch einen Fixpunkt der Operation.)

(b) Sei $G := \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen (2×2)-Matrizen und M die Menge aller komplexen (2×2)-Matrizen, die nur reelle Eigenwerte besitzen. Dann operiert G per Konjukation auf M. (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation an)

Proof. (a) Wir schreiben die Klassengleichung

$$|M| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_m].$$

Jeder Term im Summe ist eine Teiler von 21, also $1, 3, 7$ oder 21. Die Operation besitzt eine Bahn der Länge 1 genau dann, wenn 1 zumindest einmal vorkommt. Wir schreiben die mögliche Summen:

$$\begin{aligned}
11 &= 1 \times 11 \\
11 &= 3 + 1 \times 8 \\
11 &= 3 \times 2 + 1 \times 5 \\
11 &= 3 \times 3 + 1 \times 2 \\
11 &= 7 + 1 \times 4 \\
11 &= 7 + 3 + 1
\end{aligned}$$

Weil 1 immer vorkommt, gibt es immer eine Bahn der Länge 1.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Konjukation ist genau eine Ähnlichkeitstransformation. Trotz der Aufgabenstellung brauchen wir noch die Eigenschaften.

Lemma 1. *Sind zwei Matrizen A und B ähnlich, dann haben sie dieselben Eigenwert.*

Proof. Sei $A = Q^{-1}BQ$. Sei außerdem v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Es gilt $QA = BQ$ und

$$\begin{aligned} QAv =& Q\lambda v = \lambda(Qv) \\ =& BQv = B(Qv) \end{aligned}$$

also Qv ist ein Eigenvektor von B mit Eigenwert λ. Wir können die Rollen von A und B vertauschen, um die andere Richtung zu zeigen. □

Remark 2. *Die Umkehrrichtung gilt nicht immer. Es gilt wenn die Matrizen diagonalisierbar sind.*

Es folgt sofort: Wenn zwei Matrizen in der gleichen Bahn liegen, haben die die gleichen Eigenwerte. Wenn die Matrizen nicht diagonaliserbarsind, schreiben wir die in Jordan-Normalform. Daraus ergibt sich ein Repräsentantensystem der Bahnen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Problem 2. Von der endlichen Gruppe G sei bekannt, dass sie nicht abelsch ist und zu jedem positiven Teiler t von $|G|$ mindestens eine Untergruppe der Ordnung t besitzt. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist. (Hinweis: Sei p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt, und U eine Untergruppe von G vom Index p. Lassen Sie G auf den Nebenklassen von U operieren und betrachten Sie den Kern des zugehörigen Homomorphismus.)

Proof. Wie im Hinweis: Sei p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt und U eine Untergruppe von G vom Index p. G operiere auf den Linksnebenklassen von U operieren. Sei xU eine beliebige Linksnebenklasse von U. Ein Element $g \in G$ liegt im Kern des Homomorphismus genau dann, wenn $gxU = xU\ \forall x \in G$. Dann wäre $x^{-1}gxU = U$ oder $x^{-1}gx \in U\ \forall x \in G$. □

Problem 3. Benutzen Sie die Beweisidee aus Korollar 2.79, um folgende Aussage zu zeigen: Seien p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}^*$, G eine Gruppe der Ordnung p^n und $\{e\} < N \trianglelefteq G$ ein nicht-trivialer Normalteiler von G. Dann gilt $|Z(G) \cap N| > 1$.

Proof. Als Normalteiler (insbesondere Untergruppe) teilt der Ordnung von N den Ordnung von G, also $|N| = p^m$, $0 < m \leq n$. 0 ist ausgeschlossen, weil N nicht trivial ist. Dann ist p ein Teiler von $|N|$. Wir schreiben noch einmal die Klassengleichung:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : C_G(x_i)].$$

Als Normalteiler ist N per Definition eine Vereinigung von Konjugationsklassen, sonst wäre N unter Konjugation nicht abgeschlossen. Eine solche Konjukationsklasse ist $\{e\}$, weil N eine Untergruppe ist. Der Ordnung von Konjugationsklassen sind Teiler von p^n, also Potenzen von p. Dann ist der Ordnung von N eine Summe

$$|N| = \sum_{m=1}^{k} [G : G_m] = 1 + p^{m_1} + p^{m_2} + \cdots + p^{m_k}.$$

Es ist nicht möglich, dass alle $m_1, \ldots, m_k > 0$ sind, weil dann p ein Teiler von alle p^{m_i} und $|N|$ wäre, jedoch kein Teiler von 1 und daher kein Teiler von die rechte Seite. Dann muss es für eine m_i gelten, dass $m_i = 0$. Dann enthält N Konjugationsklassen der größe 1 bzw. Elememente im Zentrum, die nicht e sind, also $N \cap Z(G) \neq \{e\}$. □

Problem 4. Die Gruppe G operiere auf einer Menge M. Sei $\Phi : G \to \mathrm{Sym}(M)$ der zugehörige Homomorphismus und K sein Kern. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$G/K \times M \to M, \qquad gK.m := g.m$$

eine treue Operation von G/K auf M gegeben ist.

Proof. Wir zeigen zuerst, dass es wohldefiniert ist. Sei $k_1, k_2 \in K$ und $m \in M$. Es gilt

$$\begin{aligned} gk_1.m =& \Phi(gk_1)(m) \\ =& \Phi(g)(\Phi(k_1)(m)) \\ =& \Phi(g)(e(m)) \\ =& \Phi(g)(m) \\ =& g.m \end{aligned}$$

und ähnlich für $gk_2.m = g.m$. Sei jetzt $g_1, g_2 \in G$, so dass $g_1K.m = g_2K.m$ für alle $m \in M$. Dann ist

$$g_2^{-1}g_1.m = m$$

für alle $m \in M$ oder $g_2^{-1}g_1 \in K$. Daraus folgt: g_1 und g_2 liegen in der gleichen Nebenklasse. $\square$