Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 5, 2024)

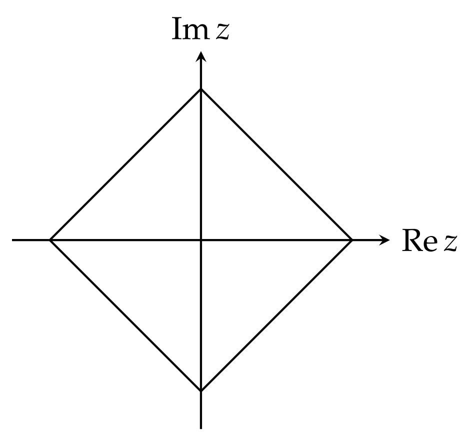
Aufgabe 1. (a) Skizzieren Sie die Menge

$$Q = \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w| = 1\}.$$

(b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Zeigen Sie, dass g in $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $g'(x_0)$.

(c) Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$. Zeigen Sie: Falls $|u(z)| + |v(z)| = 1$ für jedes $z \in G$, so ist f konstant auf G.

Beweis. (a)



(b) Für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Umgebung U um x_0, so dass entweder $g(x) = x$ oder $g(x) = -x$ gilt. Daher ist der Grenzwert, durch den die Ableitung definiert ist, immer gleich der Grenzwert mit x oder $-x$. Die Ableitung ist also

$$g'(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 > 0, \\ -1 & x_0 < 0. \end{cases}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(c) Das Bild in (a) enthält 4 Geraden. Wir betrachten zwei Fälle

(i) $f(G)$ enthält keine der Ecken

In diesem Fall ist $f(G)$ eine Teilmenge einer Strecke. Durch Verkettung mit einer linearen Funktion $g(x)$ können wir das Bild als Teilmenge der reellen Achse betrachten, $g(f(G)) \subseteq \mathbb{R}$. f ist genau dann holomorph, wenn $g \circ f$ holomorph ist.

Aber $g \circ f$ muss dann konstant sein.

Lemma 1. *Holomorphe funktionen $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sind konstant.*

Beweis.

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{z_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{h(x + iy_0) - h(x_0 + iy_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \\ h'(z_0) &= \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{z_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{h(x + iy) - h(x + iy_0)}{iy - iy_0} \in \{0\} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \end{aligned}$$

Das heißt: $h'(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ und h ist konstant. 🎉

(ii) $f(G)$ enthält mindestens eine der Ecken

Sei z_0, sodass $f(z_0)$ die Ecke ist. Wir zeigen: f ist nicht im z_0 differenzierbar. Es gibt eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$, so dass $z_0 \in \gamma((\alpha, \beta))$. Dann ist $f(\gamma(t))$ nicht differenzierbar, ein Widerspruch, weil f holomorph ist und deswegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\gamma(t))) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ gelten soll. 🎉

Aufgabe 2. (a) Es sei

$$g : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \log\left(\frac{1}{|1 + z|^2}\right).$$

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\partial g}{\partial z}$ eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion definiert.

(b) Es sei

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad g(z) = \log\left(\frac{1}{1 + |z|^2}\right).$$

Definiert auch in diesem Fall $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\partial g}{\partial z}$ eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion?

Beweis. (a) Definiere $z = x + iy$, also

$$
\begin{aligned}
|1+z|^2 =& |1+x+iy|^2 \\
=& (1+x)^2 + y^2
\end{aligned}
$$

Die partielle Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} =& \frac{\partial}{\partial x} \log\left(\frac{1}{(1+x)^2+y^2}\right) \\
=& ((1+x)^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(1+x)^2+y^2} \\
=& -\frac{2(1+x)}{(1+x)^2+y^2} \\
\frac{\partial g}{\partial y} =& -\frac{2y}{(1+x)^2+y^2} \\
\frac{\partial g}{\partial x} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\
=& -\left[\frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} - \frac{iy}{(1+x)^2+y^2}\right] \\
=& -\frac{1+x-iy}{1+2x+x^2+y^2} \\
=& -\frac{1+x-iy}{(1+x+iy)(1+x-iy)} \\
=& -\frac{1}{1+x+iy} \\
=& -\frac{1}{1+z}
\end{aligned}
$$

was offensichtlich holomorph ist.

(b) Wie üblich $z = x + iy$ und damit $1 + |z|^2 = 1 + x^2 + y^2$. Die partielle Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
g(x,y) =& \log\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right) \\
\frac{\partial g}{\partial x} =& -\frac{2x}{x^2+y^2+1} \\
\frac{\partial g}{\partial y} =& -\frac{2y}{x^2+y^2+1} \\
\frac{\partial g}{\partial z} =& -\left(\frac{x}{x^2+y^2+1} - i\frac{y}{x^2+y^2+1}\right) \\
f(x,y) =& -\frac{x-iy}{1+x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

Die partielle Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} =& \frac{-x^2+2ixy+y^2+1}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y} =& -\frac{i\left(x^2-2ixy-y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

gilt nicht, also f ist nicht holomorph.

Aufgabe 3. Gegeben sei $a \in \mathbb{D}$ und die Möbiustransformation

$$T_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \qquad T_a(z) = \frac{a+z}{1+\bar{a}z}.$$

Ferner bezeichne $\mathbb{D}^+ := \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass $T_a(\mathbb{D}^+) \subseteq \mathbb{D}^+$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{Im} a \geq 0$.

Beweis. “ $\implies$ ”

Wir beweisen: Wenn $\operatorname{Im} a < 0$, ist $T_a(\mathbb{D}^+) \nsubseteq \mathbb{D}^+$. Wenn $\operatorname{Im} a < 0$, ist $-a \in \mathbb{D}^+$. Damit gilt

$$T_a(-a) = 0 \notin \mathbb{D}^+.$$

Jetzt $\impliedby$. Die Umkehrabbildung ist

$$T_a^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Wir betrachten das Bild des Rands. Zuerst betrachten wir das Bild von $[-1,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}T_a(0) =& a \in \overline{\mathbb{D}^+}\\ T_a(1) =& \frac{1+a}{1+\bar{a}}\\ |T_a(1)| =& 1 && \text{siehe (1)}\\ \angle T_a(1) =& \angle(1+a) - \angle(1+\bar{a})\\ =& 2\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a + 1}\right)\\ \geq& 0 && \operatorname{Im} a > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_a(-1) &= \frac{a-1}{1-\overline{a}} \\
|T_a(-1)| &= 1 && \text{siehe (1)} \\
\angle T_a(-1) &= \angle(a-1) - \angle(1-\overline{a}) \\
&= 2\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a - 1}\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
|1+a| &= (1+a)(1+\overline{a}) \\
&= 1 + a + \overline{a} + |a|^2 \\
&= 1 + 2\operatorname{Re} a + |a|^2 \\
&= 1 + 2\operatorname{Re} \overline{a} + |\overline{a}|^2 \\
&= |1+\overline{a}| \qquad (1)
\end{aligned}$$

Daher sind $T_a(0)$, $T_a(1)$ und $T_a(-1)$ alle Elemente von $\mathbb{D}^+$. Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}
T_a(i) &= \frac{a+i}{1-i\overline{a}} \\
|T_a(i)| &= 1 && \text{auch ähnlich wie (1)}
\end{aligned}$$

Der Rand $\partial\mathbb{D}^+$ wird auf einer Teilmenge von $\mathbb{D}^+$ abgebildet, also $T_a(\partial\mathbb{D}^+) \subseteq \mathbb{D}^+$. Aus einer ähnliche Rechnung erhalten wir, dass $T_a(-i) \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}^+}$. Daher schließen wir, dass die Außenseite des $\overline{\mathbb{D}^+}$ wieder auf die Außenseite des $\overline{\mathbb{D}^+}$ abgebildet wird. Weil T_a bijektiv ist, muss das Innere des $\mathbb{D}^+$ nach $\mathbb{D}^+$ abgebildet werden, also $T_a(\mathbb{D}^+) \subseteq \mathbb{D}^+$. 🎉