Wintersemester 2024/2025 | 17.10.2024
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy | Andreas Schroll

1. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 21.10. und 22.10. gelöst.

Aufgabe P1.1

Welche der nachfolgenden Gleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen?

a) $\dot{x}(t) = t^2 x(t)$

b) $\dot{x}(t) = \int_0^1 e^{-ts} t x(t) \, \mathrm{d}s$

c) $\dot{x}(t) = \int_0^1 e^{-ts} t x(s) \, \mathrm{d}s$

Aufgabe P1.2

Sei $f(t, x(t)) := \frac{3t^2}{e^{x(t)}}$. Zeigen Sie, dass $x(t) = \ln(t^3 + C)$, $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ist. Bestimmen Sie anschließend C, sodass $x(0) = 1$ gilt.

Aufgabe P1.3

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = x^3(t), \quad x(0) = 1$$

Bestimmen Sie das maximale Intervall, auf dem die Lösung existiert.

Aufgabe P1.4

Eine Population von 6000 Bakterien auf einer Petrischale vermehrt sich über einen begrenzten Zeitraum so, dass ihre Anzahl pro Stunde um 25% zunimmt.

a) Warum betrachtet man die Vermehrung der Bakterienpopulation um 25% pro Stunde nur über einen begrenzten Zeitraum?

b) Geben Sie eine Formel für die Berechnung der Bakterienpopulation $P(t)$ zum Zeitpunkt t an.

c) Formulieren Sie ein Anfangswertproblem, dessen Lösung diesen Wachstumsprozess aus Teilaufgabe b) beschreibt.

Aufgabe P1.5

Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\begin{aligned} \dddot{x} + 2\dot{x} + x - 3\dot{y} + y &= 0 \\ \dddot{y} + \ddot{y} - 4\ddot{x} + 2y + 6x &= 0 \end{aligned}$$

Schreiben Sie dieses System um in ein System erster Ordnung in der Form $\dot{z}(t) = Az(t)$, $z(t), \dot{z}(t) \in \mathbb{R}^6$, $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$.

Wintersemester 2024/2025 17.10.2024
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy Andreas Schroll

1. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 24.10.2023 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H1.1 **(4 Punkte)**

Sei $f(t, x(t), \dot{x}(t)) := 3t - 4 + 4\dot{x}(t) - 3x(t)$. Zeigen Sie, dass $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t$ für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ ist. Bestimmen Sie anschließend C_1 und C_2 so, dass $x(0) = x(1) = 1$ gilt.

Aufgabe H1.2 **(2 + 2 + 4 = 8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $\dot{x}(t) = tx^2(t), \qquad x(1) = 1.$

b) $\dot{x}(t) = t(1 + x^2(t)), \qquad x(0) = 1.$

c) $\dot{x} = \frac{\sin(t)}{x+1}, \qquad x(0) = 1.$

Aufgabe H1.3 **(4 Punkte)**

Untersuchen Sie, für welchen Anfangswert $x(1) = C$ die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = e^t (x(t))^2$ eine Lösung hat und berechnen Sie diese.

Aufgabe H1.4 **(4 Punkte)**

Die Abnahme der Lichtintensität I mit zunehmender Meerestiefe erfolgt nach dem Gesetz

$$I'(x) = -\mu I(x),$$

wobei x die Meerestiefe in Meter angibt. Berechnen Sie, in welcher Tiefe die Oberflächenintensität auf

a) 50%

b) 20%

gefallen ist, wenn der Absorptionskoeffizient $\mu = 2,5m^{-1}$ beträgt.

Aufgabe H1.5 **(4 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\dddot{x} - 4\ddot{x} - \dot{x} - 3x - 9\ddot{y} - 5\dot{y} - y = 0$$
$$\dddot{y} - 8\ddot{y} - \ddot{x} - 8\dot{x} + 6\dot{y} + 7\ddot{x} + 8\ddot{y} + 9y - 9x = 0$$

Schreiben Sie dieses System um in ein System erster Ordnung in der Form $\dot{z}(t) = Az(t)$, $z(t), \dot{z}(t) \in \mathbb{R}^6$, $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$.

Wintersemester 2024/2025 17.10.2024
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy Andreas Schroll

1. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Freiwillige Aufgaben

Es werden immer mal wieder freiwillige Aufgaben gestellt werden, mit denen Sie zusätzlich üben können. F1.1 ist eine solche freiwillige Aufgabe. Geben Sie diese Aufgabe aber bitte nicht bei der Abgabe der Aufgaben H1.1 - H1.5 mit ab, da sie nicht für die Korrektur gedacht ist.

Aufgabe F1.1 **(freiwillige Aufgabe, keine Abgabe)**

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $\dot{x}(t) = t^2 x(t), \quad x(1) = 1.$

b) $\dot{x}(t) = \frac{e^t}{x(t)}, \quad x(0) = 2.$

c) $2t^2 \dot{x}(t) = x^2(t), \quad x(1) = 4.$