Prof. Dr. Thorsten Ohl
Manuel Kunkel, Christopher Schwan

13. Übung zur Klassischen Mechanik
22. Januar 2024

Hamiltonformalismus

13.1 Legendretransformationen

Bestimmen Sie die Legendre-Transformierten

1. $g : \mathbf{R} \ni u \mapsto g(u) \in \mathbf{R}$ der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = \alpha\,(x+\beta)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

2. $g : \mathbf{R}^2 \ni (u_1, u_2) \mapsto g(u_1, u_2) \in \mathbf{R}$ der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto f(x_1, x_2) = \alpha x_1^3 x_2^5 \end{aligned} \tag{2}$$

($\alpha, \beta = \text{const.}$). Führen Sie zur Kontrolle die Rücktransformation durch.

13.2 Hamiltonformalismus für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen der Masse m mit Ladung e im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - e\varphi \tag{3}$$

1. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion durch Legendretransformation.

2. Betrachten Sie im folgenden den Spezialfall mit verschwindendem elektrischem Feld (d. h. $\varphi = 0$) und konstantem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$, welches durch das Vektorpotential in der Form $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ beschrieben wird. Für ein gegebenes $\vec{B}$ ist die Wahl von $\vec{A}$ nicht eindeutig, und Eichtransformationen $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ lassen das Magnetfeld und damit

auch die Bewegungsgleichungen invariant. Zeigen Sie, dass die beiden Vektorpotentiale

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -x_2 B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{A}_2 = \tfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x} \tag{4}$$

äquivalent sind, also durch Eichtransformationen ineinander übergehen, und bestimmen Sie die zugehörigen Hamiltongleichungen.

3. Zeigen Sie, dass die Hamiltongleichungen für $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ äquivalent sind, also zu den gleichen Lösungen führen.

13.3 Hamilton'sche Vektorfelder

Sei $T^*Q = \mathbf{R}^{2n}$ ein kanonischer Phasenraum mit globalen Koordinaten

$$x = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\,.$$

Für jede Funktion $f : T^*Q \to \mathbf{R}$ kann man ein Vektorfeld definieren

$$X_f := \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}, -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial q_n} \right)\,. \tag{5}$$

das man das *Hamilton'sche Vektorfeld* der Funktion f nennt. Von besonderer Interesse ist das Hamilton'sche Vektorfeld der Hamiltonfunktion H, da es die kanonischen Gleichungen bestimmt und somit die Tangentenvektoren an die Trajektorien im Phasenraum darstellt:

$$(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = X_H\,. \tag{6}$$

Wir wollen nun die Hamilton'schen Vektorfelder von bekannten Hamiltonfunktionen besser verstehen. Dazu sollen Sie X_H der folgenden Systemen berechnen und skizzieren. Für die Skizzen dürfen Sie Mathematica oder ähnliches verwenden. (Hinweis: verwenden Sie den Befehl *VectorPlot*)

1. **Freies Teilchen in 1D:**

$$H_1 = \frac{1}{2m} p^2 \tag{7a}$$

2. **Harmonischer Oszillator in 1D:**

$$H_2 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\,\omega^2}{2} q^2 \tag{7b}$$

3. **Mathematisches Pendel in 1D:**

$$H_3 = \frac{1}{2m} p^2 - \alpha \cos q \ , \quad \alpha > 0 \tag{7c}$$

4. **Keplerproblem bei festem Drehimpuls:** ($q = r > 0$)

$$H_4 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{\beta}{r^2} - \frac{\alpha}{r} \ , \quad \alpha, \beta > 0 \tag{7d}$$

5. **3D harmonischer Oszillator bei festem Drehimpuls:** ($q = r > 0$)

$$H_5 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{\beta}{r^2} + \frac{m\,\omega^2}{2} r^2 \ , \quad \beta > 0 \tag{7e}$$

Die Phasenraum-Trajektorie des Teilchens ist gegeben als die Integralkurve der Hamilton'schen Vektorfelder X_{H_i}. Skizzieren Sie typische Trajektorien und indentifizieren Sie Bereiche periodischer und nicht-periodischer Bewegung.