

Universität Würzburg Übungsblätter  
Bachelor Mathematische Physik

Jun Wei Tan

May 27, 2024



---

# Contents

---

<b>1</b>	<b>Lineare Algebra 1</b>	<b>5</b>
1.1	Blatt 1 . . . . .	5
1.2	Blatt 2 . . . . .	10
1.3	Blatt 3 . . . . .	13
1.4	Blatt 4 . . . . .	18
1.5	Blatt 5 . . . . .	24
1.6	Blatt 6 . . . . .	29
1.7	Blatt 7 . . . . .	34
1.8	Blatt 8 . . . . .	39
1.9	Blatt 10 . . . . .	45
1.10	Blatt 11 . . . . .	54
1.11	Blatt 12 . . . . .	54
1.12	Blatt 13 . . . . .	60
<b>2</b>	<b>Analysis 2</b>	<b>67</b>
2.1	Blatt 1 . . . . .	67
2.2	Blatt 2 . . . . .	72
2.3	Blatt 3 . . . . .	77
2.4	Blatt 4 . . . . .	83
2.5	Blatt 5 . . . . .	89
2.6	Blatt 6 . . . . .	96
2.7	Blatt 8 . . . . .	102
2.8	Blatt 9 . . . . .	106
2.9	Blatt 10 . . . . .	108
2.10	Blatt 11 . . . . .	113
2.11	Blatt 12 . . . . .	116
<b>3</b>	<b>Vertiefung Analysis</b>	<b>121</b>
3.1	Blatt 1 . . . . .	121
3.2	Blatt 2 . . . . .	125
3.3	Blatt 3 . . . . .	128
3.4	Blatt 4 . . . . .	130
3.5	Blatt 5 . . . . .	135
3.6	Blatt 6 . . . . .	137
3.7	Blatt 7 . . . . .	142

3.8	Blatt 8 . . . . .	146
3.9	Blatt 9 . . . . .	149
3.10	Blatt 10 . . . . .	154
3.11	Blatt 11 . . . . .	159
3.12	Blatt 12 . . . . .	166
3.13	Blatt 13 . . . . .	171
<b>4</b>	<b>Einführung in die Algebra</b>	<b>177</b>
4.1	Blatt 1 . . . . .	177
4.2	Blatt 2 . . . . .	180
4.3	Blatt 3 . . . . .	183
4.4	Blatt 4 . . . . .	186
4.5	Blatt 5 . . . . .	189
4.6	Blatt 6 . . . . .	194
4.7	Blatt 7 . . . . .	197
4.8	Blatt 8 . . . . .	202
4.9	Blatt 9 . . . . .	204
4.10	Blatt 10 . . . . .	207
4.11	Blatt 11 . . . . .	210
4.12	Blatt 12 . . . . .	213
<b>5</b>	<b>Theoretische Mechanik</b>	<b>217</b>
5.1	Blatt 1 . . . . .	217
5.2	Blatt 2 . . . . .	222
5.3	Blatt 3 . . . . .	228

---

## Lineare Algebra 1

---

### 1.1 Blatt 1

**Definition 1.1.** Sind  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$  mit  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ , so bezeichnet man die Menge  $g := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}$  als Gerade.

**Satz 1.2.** Zu jeder Geraden gibt es  $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ , sodass die Gerade in der Form

$$\{(c_1, c_2) + t(d_1, d_2) : t \in \mathbb{R}\}$$

geschrieben werden kann. Weiterhin ist obige Menge im Fall  $(d_1, d_2) \neq (0, 0)$  immer eine Gerade

**Bemerkung 1.3.** Der Parameterform für Geraden und Ebenen ist in der Vorlesung bewiesen.

**Aufgabe 1.** Beweisen Sie folgende Aussage: Gegeben seien zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{R}^2$  mit  $p \neq q$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $g \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $p \in g$  und  $q \in g$ . Diese ist gegeben durch  $g_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(q_2 - p_2) - x_2(q_1 - p_1) = p_1 q_2 - p_2 q_1\}$ .

*Beweis.* Wir nutzen Def. 1.1. Weil  $p$  und  $q$  in der Gerade sind, können wir zwei Gleichungen schreiben. . .

$$\begin{aligned} a_1 p_1 + a_2 p_2 &= b \\ a_1 q_1 + a_2 q_2 &= b \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} a_1 p_1 + a_2 p_2 &= a_1 q_1 + a_2 q_2 \\ a_1(p_1 - q_1) &= a_2(q_2 - p_2) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} a_1 &= t \\ a_2 &= t \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} \end{aligned}$$

$$b = p_1 t + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t$$

Es ist klar, dass die gegebene Gerade eine Lösung zu die Gleichung ist, mit  $t = q_2 - p_2$ . Was passiert mit andere  $t$ ? Sei  $t = q_2 - p_2$  und  $t' \in \mathbb{R}$ . Vergleich dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 t + x_2 t \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1 t + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t \\ x_1 t' + x_2 t' \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1 t' + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t' \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die zweite Gleichung nur die erste Gleichung durch  $t'/t$  multipliziert ist. Deshalb habe die zwei Gleichungen die gleiche Lösungsmengen, dann sind die Gerade, die durch die Gleichungen definiert werden, auch gleich.

Wenn  $q_1 = q_2$  dürfen wir die Lösungsmenge nicht so schreiben. Aber wir können den Beweis wiederholen, aber mit  $a_2$  als das freie Parameter. Es darf nicht, dass  $(q_1 - p_1, q_2 - p_2) = (0, 0)$ , weil  $\vec{q} \neq \vec{0}$   $\square$

**Aufgabe 2.** In Beispiel 1.2.8 wurde der Schnitt von zwei Ebenen bestimmt. Er hatte eine ganz bestimmte Form, die wir für den Kontext dieser Aufgabe als Gerade bezeichnen wollen, formal:

Ist  $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  und  $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$  beliebig, dann ist die Menge

$$\{(p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2, p_3 + t \cdot v_3) | t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade.

- Finden Sie zwei Ebenen, deren Schnitt die Gerade  $g = \{(1+3t, 2+t, 3+2t) | t \in \mathbb{R}\}$  ist. Erläutern Sie, wie Sie die Ebenen bestimmt haben und beweisen Sie anschließend, dass Ihr Ergebnis korrekt ist.
- Ist der Schnitt von zwei Ebenen immer eine Gerade? Wenn ja, begründen Sie das, wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
- Zeigen Sie: Für den Schnitt einer Geraden  $g$  mit einer Ebene  $E$  gilt genau einer der folgenden drei Fälle:
  - $g \cap E = \emptyset$
  - $|g \cap E| = 1$
  - $g \cap E = g$

Geben Sie für jeden der Fälle auch ein Geraden-Ebenen-Paar an, dessen Schnitt genau die angegebene Form hat.

*Beweis.* (a) Wir suchen zwei Ebenen, also 6 Vektoren  $\vec{p}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{p}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ , die zwei Ebenen durch

$$E_1 = \{\vec{p}_1 + t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$E_2 = \{\vec{p}_2 + t'_1 \vec{v}_1 + t'_2 \vec{v}_2 | t'_1, t'_2 \in \mathbb{R}\}$$

definieren. Einfachste wäre, wenn  $p_1 = p_2 \in g$ . Sei dann  $p_1 = p_2 = (1, 2, 3)^T$ . Wenn  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (3, 1, 2)^T$ , ist es auch klar, dass der Schnitt  $g$  einschließt ( $t_2 = t'_2 = 0$ ). Dann müssen wir  $\vec{u}_2, \vec{v}_2$  finden, für die gelten,

$$(t, t'_2) \neq (0, 0) \implies t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 \neq t'_1 \underbrace{\vec{u}_1}_{\vec{u}_1 = \vec{v}_1} + t'_2 \vec{v}_2 \forall t_1, t'_1 \in \mathbb{R},$$

also

$$\xi_1 \vec{u}_1 \neq t'_2 \vec{v}_2 - t_2 \vec{u}_2 \quad (t_2, t'_2) \neq (0, 0), \forall \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0 : \vec{v}_2 &\neq k \vec{u}_2 \quad \forall k \in \mathbb{R} \\ \xi_1 \neq 0 : \vec{u}_1 &\notin \text{span}(\vec{v}_2, \vec{u}_2) \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.4.** Wir können uns einfach für solchen  $\vec{v}_2, \vec{u}_2$  entscheiden. Wir brauchen nur

$$\langle \vec{u}_2, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0.$$

Aber weil das innere Produkt nicht in der Vorlesung nicht diskutiert worden ist, müssen wir es nicht systematisch finden.

**Bemerkung 1.5.** Eigentlich braucht man keine spezielle Gründe, um  $\vec{u}_2$  und  $\vec{v}_2$  zu finden. Wenn man irgendeine normalisierte Vektoren aus einer Gleichverteilung auf  $\mathbb{R}^3$  nimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die eine Lösung sind, 1.

Daher entscheide ich mich ganz zufällig für zwei Vektoren...

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= (1, 0, 0)^T \\ \vec{u}_2 &= (0, 1, 0)^T \end{aligned}$$

Der Schnitt von der Ebenen kann berechnet werden...

$$\vec{p} + t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 = \vec{p} + t'_1 \vec{v}_1 + t'_2 \vec{v}_2,$$

$$\xi_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 = t'_2 \vec{v}_2.$$

Also

$$\xi_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t'_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ t_2 \\ t'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 1.6.** Hier ist es noch einmal klar, dass die einzige Lösung  $\xi_1 = t_2 = t'_2 = 0$  ist, weil  $\det(\dots) \neq 0$ . Aber wir müssen noch eine längere Beweis schreiben...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

also die einzige Lösung ist  $\xi_1 = t_2 = t'_2 = 0 \implies t_2 = t'_2 = 0, t_1 = t_2 \implies E_1 \cap E_2 = g$

(b) Nein.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

(c)

**Satz 1.7.** Sei  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $g$ , wofür gilt  $\vec{a} \in g, \vec{b} \in g$ . Es kann als

$$\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

*Beweis.* Es ist klar, dass

$$\begin{aligned} \vec{a} &\in g & (t = 0) \\ \vec{b} &\in g & (t = 1) \end{aligned}$$

Sei dann eine andere Gerade  $g'$ , wofür gilt  $\vec{a} \in g'$  und  $\vec{b} \in g'$ .  $g'$  kann als

$$\vec{u} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden, wobei  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Es existiert  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\begin{aligned} \vec{u} + t_1\vec{v} &= \vec{a} \\ \vec{u} + t_2\vec{v} &= \vec{b} \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\vec{u} = \vec{a} - t_1\vec{v}$$



$$\vec{a} - t_1 \vec{v} + t_2 \vec{v} = \vec{b}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{t_2 - t_1} (\vec{b} - \vec{a}) \quad t_1 \neq t_2 \text{ weil } \vec{a} \neq \vec{b}$$

Es gilt dann für  $g'$ :

$$\begin{aligned} g' &= \{\vec{u} + t\vec{v} | t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \vec{a} - \frac{t_1}{t_2 - t_1} (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{t}{t_2 - t_1} (\vec{b} - \vec{a}) | t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \vec{a} + \left( \frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1} \right) (\vec{b} - \vec{a}) | t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Wenn man  $t' = \frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}$  definiert, ist es dann klar, dass  $g' = g$  □

Es ist klar, dass maximal eines der Fälle gelten kann. Wir nehmen an, dass die erste zwei Fälle nicht gelten. Dann gilt

$$|g \cap E| \geq 2.$$

Es gibt dann mindestens zwei Punkte in  $g \cap E$ . Es ist auch klar, dass die Verbindungsgerade zwischen die beide Punkte  $g$  ist (Pr. 1)

**Satz 1.8.** Sei  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$ . Dann ist die Verbindungsgerade zwischen  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  auch in  $E$ .

*Beweis.* Sei

$$E = \{\vec{p}_1 + t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v} | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Es wird angenommen, dass  $a_1, a_2, b_1, b_2$  existiert, sodass

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{p} + a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} \\ \vec{v}_2 &= \vec{p} + b_1 \vec{u} + b_2 \vec{v} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (b_1 - a_1) \vec{u} + (b_2 - a_2) \vec{v},$$

also

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + t(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) &= \vec{p} + a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} + t[(b_1 - a_1) \vec{u} + (b_2 - a_2) \vec{v}] \\ &= \vec{p} + [a_1 + t(b_1 - a_1)] \vec{u} + [a_2 + t(b_2 - a_2)] \vec{v} \in E \end{aligned}$$

□

Deshalb ist  $g \subseteq g \cap E$ . Weil  $g \cap E \subseteq g$ , ist  $g = g \cap E$

□

## 1.2 Blatt 2

**Aufgabe 3.** Gegeben sei die Relation  $\sim \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  mit  $x \sim y$  genau dann, wenn es eine Gerade  $L \subseteq \mathbb{R}^2$  gibt, die  $0$ ,  $x$  und  $y$  enthält.

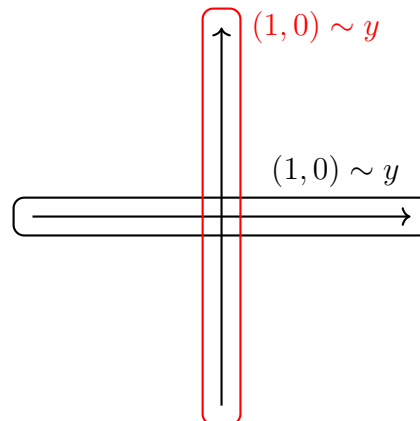
- (a) Bestimmen Sie alle  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  mit  $(0,1) \sim y$  bzw.  $(1,0) \sim y$  und skizzieren Sie die beiden Mengen in einem geeigneten Koordinatensystem.
- (b) Begründen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.
- (c) Bleibt  $\sim$  auch dann eine Äquivalenzrelation, wenn man sie als Relation in  $\mathbb{R}^2$  betrachtet?

*Beweis.* (a) Eine Gerade hat den Form

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}.$$

Weil  $(0,0)$  in der Gerade ist, gilt  $b = 0$ . Für die zwei Fälle:

- (i)  $(0,1)$  ist in der Gerade. Es gilt dann  $a_2 = 0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Die Gleichung der Gerade ist dann  $x_1 = 0$ , oder alle Punkte des Forms  $(0, y), y \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $(1,0)$  ist in der Gerade. Es gilt dann  $a_1 = 0, a_2 \in \mathbb{R}$ . Die Gerade enthält ähnlich alle Punkte des Forms  $(x, 0), x \in \mathbb{R}$ .



- (b) (i)  $x \sim x$  (Reflexivität)  
Es gibt immer eine Gerade zwischen  $0$  und  $x$ . Eine solche Gerade enthält  $x$  per Definition.
- (ii)  $x \sim y \iff y \sim x$  (Symmetrie)  
Es gibt eine Gerade, die  $0$ ,  $x$  und  $y$  enthält. Deswegen gilt die beide Richtung der Implikationen.
- (iii)  $x \sim y$  und  $y \sim z \implies x \sim z$  (Transitivität)  
Es gibt eine Gerade zwischen  $0, x$  und  $y$ , und eine Gerade zwischen  $0, y$  und  $z$ . Weil die beide Geraden zwischen  $y$  geht, sind die Geraden gleich, und enthält  $x$  und  $z$ , daher  $x \sim z$ .

(c) Nein.  $(1, 0) \sim (0, 0)$ ,  $(0, 1) \sim (0, 0)$ , aber  $(1, 0) \sim (0, 1)$  stimmt nicht.  $\square$

**Aufgabe 4.** Es sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$ ,  $s$  die Spiegelung in  $\mathbb{R}^2$ ,  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Translation um  $(1, 0)$  und  $em : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Einbettung.

- (a) Bilden Sie die Verkettungen  $f \circ em$ ,  $em \circ f$ ,  $s \circ f$ ,  $T \circ s$ ,  $s \circ T$  und  $em \circ s$ . Geben Sie dabei jeweils Argumentmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift an.
- (b) Untersuchen Sie die Funktionen aus der vorherigen Teilaufgabe auf Surjektivität, Injektivität bzw. Bijektivität.
- (c) Sei  $F = em \circ T \circ s \circ f$ . Bestimmen und skizzieren Sie das Bild bzw. Urbild von  $[0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$  unter  $F$ .

*Beweis.* (a) (i)  $f \circ em$

Argumentmenge:  $\mathbb{R}^2$

Zielmenge:  $\mathbb{R}^2$

Zuordnungsvorschrift:  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2) = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$

(ii)  $em \cdot f$

Argumentmenge + Zielmenge:  $\mathbb{R}^3$

Zuordnungsvorschrift:  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, 0)$

(iii)  $s \cdot f$

Argumentmenge:  $\mathbb{R}^3$

Zielmenge:  $\mathbb{R}^2$

Zuordnungsvorschrift:  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1)$

(iv)  $em \circ s$

Argumentmenge:  $\mathbb{R}^2$

Zielmenge:  $\mathbb{R}^3$

Zuordnungsvorschrift:  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1, 0)$

(b) (i)  $f \circ em$

Surjektive, injektiv und auch bijektiv

(ii)  $em \circ f$

Injektiv, aber nicht surjektiv (und deswegen nicht Bijektiv)

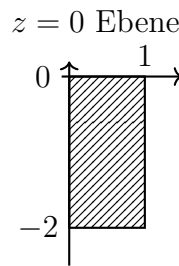
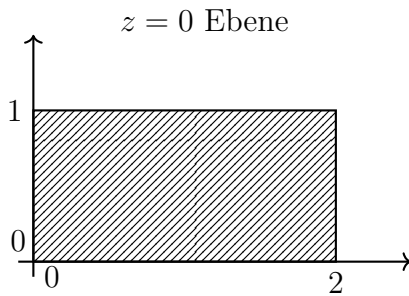
(iii)  $s \circ f$

Surjektive, aber nicht injektiv

(iv)  $em \circ s$

Injektiv, aber nicht surjektiv

(c)

Bild:  $[0, 2] \times [0, 1] \times \{0\}$ Urbild:  $[0, 1] \times [-2, 0] \times \mathbb{R}$ 

□

**Aufgabe 5.** Es sei  $M$  eine beliebige, nichtleere Menge und  $f : M \rightarrow M$  eine Abbildung. Wir definieren induktiv  $f^0 := id$  und für  $k \in \mathbb{N}$   $f^k := f \circ f^{k-1}$ .

- (a) Zeigen Sie:  $f^{k+l} = f^k \circ f^l$  für alle  $k, l \in \mathbb{N}_0$
- (b) Zeigen Sie: Gibt es  $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $l \in \mathbb{N}$  mit  $f^{k_0+l} = f^{k_0}$ , dann gilt  $f^{k+l} = f^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \geq k_0$ .
- (c) Geben Sie eine Funktion  $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  an, für die  $f^1 \neq f^3$ , aber  $f^{k+2} = f^k$  für alle  $k \geq 2$  gilt. Begründen Sie, dass Ihre Funktion diese Eigenschaft hat.

*Beweis.* (a) Wir beweisen es per Induktion auf  $k$ . Für  $k = 1$  gilt es per Definition (es wird in der Frage gegeben). Jetzt nehme an, dass es für ein beliebige  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
 f^{(k+1)+l} &= f \circ f^{k+l} \\
 &= f \circ f^k \circ f^l \\
 &= (f \circ f^k) \circ f^l \\
 &= f^{k+1} \circ f^l
 \end{aligned}$$

Deswegen gilt es auch für  $k + 1$ , und daher für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

- (b) Sei  $k = k_0 + k'$ . Es gilt

$$f^{k+l} = f^{k_0+k'+l} = f^{k_0} = f^{k_0+k'} = f^k.$$

- (c) Sei  $f$  definiert durch

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 1 \\
 f(2) &= 1 \\
 f(3) &= 2 \\
 f(4) &= 1 \\
 f(5) &= 4
 \end{aligned}$$

Es gilt dann

$x$	$f^1(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$f^5(x)$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	4	1	1	1	1

$f^1 \neq f^3$ , weil  $f^1(3) \neq f^3(3)$ . Aber  $f^k(x) = 1 \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, k \geq 2$ . Daher ist  $f^{k+2} = f^k, k \geq 2$ .  $\square$

**Aufgabe 6.** Es seien  $M, N$  Mengen,  $m, n$  natürliche Zahlen und die Abbildungen  $f : M \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}, g : N \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$  bijektiv. Finden Sie eine natürliche Zahl  $k$  und eine bijektive Abbildung  $F : M \times N \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ .

*Beweis.*  $k = nm$ , und

$$F(a, b) = a + (b - 1)m.$$

Das ist bijektiv. Sei  $x \in \{1, 2, \dots, nm\}$ . Es existiert eindeutige Zahlen  $p, q \in \mathbb{N}$ , so dass

$$x = pm + q, q < m.$$

Falls  $q = 0$ , sei  $b = p, a = m$ . Sonst definiert man  $b = p + 1, a = m$ . Per Definition ist  $a \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ . Außerdem ist  $1 \leq b \leq n$ , weil  $p \leq k/m = n$  ( $n$  teilt  $k = mn$ ).  $\square$

## 1.3 Blatt 3

**Aufgabe 7.** Entscheiden Sie zu jedem der folgenden Objekte, welche der Bezeichnungen aus Definition 2.3.3 darauf zutreffen

(a)  $(\mathbb{R}, *, -2)$ , wobei  $*$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $a * b := a + b + 2$  definiert ist.

(b)  $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$

(c)  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, -, 0)$ , wobei  $\bar{a} - \bar{b} := \bar{a} + (-\bar{b})$

(d)  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, *, 4)$  mit  $*$  :  $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \rightarrow ab^{-1}$

*Beweis.* (a) Eine abelsche Gruppe. Es ist assoziativ:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b + c + 2) + 2 \\ &= (a + b + 2) + c + 2 \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

Es gilt auch  $(-2) * x = (-2) + x + 2 = x$  und auch  $x * (-2) = x$  für alle  $x$ , also  $e = -2$  ist ein neutrales Element. Für jeder  $x$  gibt es auch  $y = -(x + 4) \in \mathbb{R}$ , damit

$$y * x = -(x + 4) + x + 2 = -2 = e.$$

- (b) Kommutatives Monoid. Per Definition ist 1 das neutrale Element, und für jeder  $0 \neq x \in \mathbb{R}$  gibt es  $1/x \in \mathbb{R}$ , und  $x(1/x) = 1$ . Aber es existiert keine  $x \in \mathbb{R}$ , so dass  $x0 = 1$ .
- (c) Magma. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{a} - (\bar{b} - \bar{c}) &= \bar{a} + [- (\bar{b} - \bar{c})] \\ &= \bar{a} + (-\bar{b}) + \bar{c} \\ (\bar{a} - \bar{b}) - \bar{c} &= \bar{a} + (-\bar{b}) + (-\bar{c}) \\ &\neq \bar{a} - (\bar{b} - \bar{c})\end{aligned}$$

Deswegen ist  $-$  nicht assoziativ.

- (d) Nichts.  $*$  ist keine Verknüpfung. □

**Aufgabe 8.** Es sei  $(M, \cdot)$  ein Magma,  $(H, \odot)$  eine Halbgruppe und  $\alpha : H \rightarrow M$  eine surjektive Abbildung, die die Bedingung  $\alpha(a \odot b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b)$  für alle  $a, b \in H$  erfüllt.

Zeigen Sie

- (a) Dann ist auch  $M$  eine Halbgruppe.
- (b) Ist  $H$  ein Monoid mit neutralem Element  $e$ , dann ist  $M$  ein Monoid mit neutralem Element  $\alpha(e)$ .
- (c) Ist  $(H, \odot, e)$  sogar eine Gruppe, dann ist  $(M, \cdot, \alpha(e))$  eine Gruppe.

*Beweis.* (a) Sei  $\beta, \gamma, \delta \in M$ . Weil  $\alpha$  surjektiv ist, gilt  $\beta = \alpha(a), \gamma = \alpha(b), \delta = \alpha(c), a, b, c \in H$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\beta \cdot (\gamma \cdot \delta) &= \alpha(a) \cdot (\alpha(b) \cdot \alpha(c)) \\ &= \alpha(a) \cdot (\alpha(b \odot c)) \\ &= \alpha(a \odot (b \odot c)) \\ &= \alpha((a \odot b) \odot c) \\ &= \alpha(a \odot b) \cdot \alpha(c) \\ &= (\alpha(a) \cdot \alpha(b)) \cdot \alpha(c) \\ &= (\beta \cdot \gamma) \cdot \delta\end{aligned}$$

- (b) Sei  $\beta \in M$ . Noch einmal haben wir  $\beta = \alpha(b), b \in H$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\beta \cdot \alpha(e) &= \alpha(b) \cdot \alpha(e) \\ &= \alpha(b \odot e) \\ &= \alpha(b) \\ &= \beta\end{aligned}$$

und ähnlich auch für  $\alpha(e) \cdot \beta = \beta$ .

- (c) Wir müssen nur zeigen, dass es ein Inverse gibt. Sei  $M \ni \beta = \alpha(a), a \in H$ . Weil  $H$  eine Gruppe ist, existiert  $a^{-1} \in H$ , so dass  $a \bullet a^{-1} = e$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\beta \cdot \alpha(a^{-1}) &= \alpha(a) \cdot \alpha(a^{-1}) \\ &= \alpha(a \bullet a^{-1}) \\ &= \alpha(e)\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 9.** Wir wollen die folgende Verknüpfungstabelle so vervollständigen, dass  $(\{\partial, \eta, L\}, \bullet, \eta)$  zu einer Gruppe wird.

$\bullet$	$\partial$	$\eta$	$L$
$\partial$			
$\eta$			
$L$			

- (a) Begründen Sie, dass es nur höchstens eine solche Verknüpfungstafel geben kann.  
 (b) Füllen Sie die Tafel so, dass eine Gruppe entsteht und begründen Sie, dass Sie die Verknüpfungstafel einer Gruppe gefunden haben.

*Beweis.* Notation: Ich schreibe  $ab$  statt  $a \bullet b$ , für  $a, b \in \{\partial, \eta, L\}$ . Weil  $\eta$  das neutrale Element ist, muss die Verknüpfungstabelle so aussehen:

$\bullet$	$\partial$	$\eta$	$L$
$\partial$		$\partial$	
$\eta$	$\partial$	$\eta$	$L$
$L$		$L$	

Wir brauchen Bedingungen, die mögliche Gruppe einzuschränken.

**Lemma 1.9.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $x, y, z \in G$ , und

$$zx = zy.$$

Es gilt dann  $x = y$

*Beweis.*

$$x = z^{-1}zx = z^{-1}zy = y.$$

□

**Korollar 1.10.** In jeder Zeile und Spalte kommt jedes Element nur einmal vor.

Leider ist es noch nicht genug, die Verknüpfungstabelle einzuschränken. Wir fangen deswegen an, und nehme an, dass  $\partial^2 = L$  ist. Wir betrachten die erste Spalte und Zeile, und kommen zu die Schlussfolgerung, dass  $\partial L = L\partial = \eta$ .

$\bullet$	$\partial$	$\eta$	$L$
$\partial$	$\eta$	$\partial$	$L$
$\eta$	$\partial$	$\eta$	$L$
$L$	$L$	$L$	$L$

Hier gibt es ein Problem:  $L\partial = L$ , und auch  $L\eta = L$ . Daraus folgt  $\partial = \eta$ , ein Widerspruch. Wir nehmen jetzt an,  $\partial^2 = L$ . Man kann die Verknüpfungstabelle ausfüllen.

$\bullet$	$\partial$	$\eta$	$L$
$\partial$	$L$	$\partial$	$\eta$
$\eta$	$\partial$	$\eta$	$L$
$L$	$\eta$	$L$	$\partial$

Das ist die einzige Lösung (es gibt keine Möglichkeiten mehr). Die Gruppe ist  $\cong C_3$ . Man kann beachten, dass  $\partial^2 = L, L^2 = \partial$ . Per Definition ist es abgeschlossen. Es gilt auch

$$\begin{aligned}\partial^{-1} &= \partial^2 = L \\ L^{-1} &= L^2 = \partial\end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir Assoziativität. Wir betrachten

$$a(bc) \stackrel{?}{=} (ab)c, \quad a, b, c \in \{\partial, \eta, L\}.$$

Im Fall, worin  $a, b$  oder  $c$  das neutrale Element  $\eta$  ist, folgt die Gleichung. Im Fall, worin nichts  $\eta$  ist, können wir  $L = \partial^2$  einsetzen. Jetzt ist die Gleichung

$$\partial^x (\partial^y \partial^z) = (\partial^x \partial^y) \partial^z, \quad x, y, z \in \{1, 2\},$$

was immer gilt, weil die beide Seite gleich  $\partial^{x+y+z}$  sind. Deswegen ist  $\bullet$  assoziativ.  $\square$

**Aufgabe 10.** Wir definieren die drei Abbildungen  $c_1, c_2, c_3 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  durch die Abbildungsvorschriften

$$\begin{array}{llll} c_1(1) = 2 & c_1(2) = 1 & c_1(3) = 4 & c_1(4) = 3 \\ c_2(1) = 3 & c_2(2) = 4 & c_2(3) = 1 & c_2(4) = 2 \\ c_3(1) = 4 & c_3(2) = 3 & c_3(3) = 2 & c_3(4) = 1 \end{array}$$

Zeigen Sie:  $U := \{\text{id}, c_1, c_2, c_3\}$  ist eine Untergruppe von  $S(\{1, 2, 3, 4\})$ .



*Beweis.* Die folgende Aussagen können durch direkte Verkettung bewiesen werden:

$$c_1 \circ c_2 = c_3$$

$$c_2 \circ c_3 = c_1$$

$$c_3 \circ c_1 = c_2$$

$$c_1 \circ c_1 = \text{id}$$

$$c_2 \circ c_2 = \text{id}$$

$$c_3 \circ c_3 = \text{id}$$

Deswegen ist jede Elemente invertierbar. Es folgt daraus auch, dass  $U$  abgeschlossen ist.  $\text{id}$  ist natürlich das neutrale Element.  $\square$

**Aufgabe 11.** Es sei

$\mathcal{L} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \text{ sodass für alle } x \in \mathbb{R} f(x) = ax + b\}.$

- (a) Zeigen Sie:  $(\mathcal{L}, \circ, \text{id})$  ist eine Gruppe, aber nicht abelsch.
- (b) Wir definieren die Relation  $\sim \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$  durch die Festlegung  $f \sim g$  genau dann, wenn  $f(x) - f(0) = g(x) - g(0)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die Menge aller Äquivalenzklassen von  $\sim$ .

*Beweis.* (a) Sei  $f, g \in \mathcal{L}$ ,  $f = ax + b$ ,  $g = cx + d$ ,  $a \neq 0 \neq c$ . Es gilt

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= a(cx + d) + b \\ &= acx + ad + b \end{aligned}$$

Weil  $a \neq 0 \neq c$ , gilt  $ac \neq 0$ . Deswegen gilt, für

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = acx + ad + b$$

$h \in \mathcal{L}$ .  $(\mathcal{L}, \circ, \text{id})$  ist dann unter  $\circ$  abgeschlossen. Die Verkettung von Abbildungen ist immer assoziativ. Sei jetzt  $e \in \mathcal{L}$ ,  $e(x) = 1x + 0 = x$ . Es gilt dann

$$e \circ f = f \circ e = f,$$

also  $e$  ist ein neutrales Element. Sei  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ . Weil  $a \neq 0$ , sind  $1/a$  und  $b/a$  wohldefiniert, und  $1/a \neq 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= a \left( \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \right) + b \\ &= x - b + b \\ &= x \\ (f^{-1} \circ f) &= \frac{1}{a} (ax + b) - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \\
&= x
\end{aligned}$$

Deswegen gilt  $f \circ f^{-1} = e = f^{-1} \circ f$ , also  $f^{-1}$  ist die Inverse von  $f$ .  $\mathcal{L}$  ist dann eine Gruppe.

(b) (i) (Reflexivität) Es gilt

$$f(x) - f(0) = f(x) - f(0)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) (Symmetrie) Falls gilt

$$f(x) - f(0) = g(x) - g(0)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ , gilt auch

$$g(x) - g(0) = f(x) - f(0), x \in \mathbb{R}.$$

(iii) (Transitivität) Sei  $f, g, h \in \mathcal{L}$ , für die gilt

$$\begin{aligned}
f \sim g &\iff f(x) - f(0) = g(x) - g(0), x \in \mathbb{R} \\
g \sim h &\iff g(x) - g(0) = h(x) - h(0), x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Es gilt, von die Transitivität der  $= \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dass

$$f(x) - f(0) = h(x) - h(0), x \in \mathbb{R},$$

also  $f \sim h$

Ich vermute, dass die Äquivalenzklassen sind  $f, g \in \mathcal{L}, f(x) = ax + b, g(x) = cx + d, a \neq 0 \neq c$ , so dass

$$f \sim g \iff a = c.$$

Wir beweisen es:  $f(0) = b, g(0) = d$ , und daher  $f(x) - f(0) - ax, g(x) - g(0) = cx$ . Falls

$$ax = cx \forall x \in \mathbb{R},$$

muss  $a = c$ . Für  $a \neq c$  gilt es, dass es mindestens ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  gibt, worauf  $ax_0 \neq cx_0$ . Deswegen sind die Äquivalenzklassen, für  $f, g \in \mathcal{L}, f = ax + b, g = cx + d$

$$f \sim g \iff a = c.$$

□

## 1.4 Blatt 4

### Aufgabe 12. Direktes Produkt

- (a) Zeigen Sie: Sind  $(G, *, e_G)$  und  $(H, \star, e_H)$  Gruppen, dann ist auch  $G \times H$  mit der Verknüpfung

$$\odot (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H, \quad (g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 \star h_2)$$

und dem neutralen Element  $(e_G, e_H)$  eine Gruppe. Diese Gruppe nennt man auch das *direkte Produkt* von  $G$  und  $H$ .

- (b) Zeigen Sie: Sind  $(R, +, \cdot)$  und  $(S, \star, *)$  Ringe, dann ist auch  $R \times S$  mit den Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$ , definiert durch  $(r_1, s_1) \oplus (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, s_1 \star s_2)$  bzw.  $(r_1, s_1) \odot (r_2, s_2) := (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2)$  ein Ring.
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist  $(K, +, \cdot)$  ein Körper, dann ist auch  $K \times K$  mit den Verknüpfungen wie in (b) ein Körper.

*Beweis.* (a) (i) (Assoziativität)

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) \odot ((g_2, h_2) \odot (g_3, h_3)) &= (g_1, h_1) \odot (g_2 * g_3, h_2 \star h_3) \\ &= (g_1 * (g_2 * g_3), h_1 \star (h_2 \star h_3)) \\ &= ((g_1 * g_2) * g_3, (h_1 \star h_2) \star h_3) \\ &= (g_1 * g_2, h_1 \star h_2) \odot (g_3, h_3) \\ &= ((g_1, h_1) \odot (g_2, h_2)) \odot (g_3, h_3) \end{aligned}$$

- (ii) (Neutrales Element)

$$(g_1, h_1) \odot (e_G, e_H) = (g_1, h_1) = (e_G, e_H) \odot (g_1, h_1).$$

- (iii) (Existenz des Inverses) Sei  $(g_1, h_1) \in G \times H$ . Weil  $G$  und  $H$  Gruppe sind, gibt es Elemente  $g_1^{-1} \in G, h_1^{-1} \in H$ , sodass  $g_1 * g_1^{-1} = e_G = g_1^{-1} * g_1$  und  $h_1 \star h_1^{-1} = e_H = h_1^{-1} \star h_1$ . Es gilt

$$(g_1, h_1) \odot (g_1^{-1}, h_1^{-1}) = (g_1 * g_1^{-1}, h_1 \star h_1^{-1}) = (e_G, e_H),$$

und ähnlich auch  $(g_1^{-1}, h_1^{-1}) \odot (g_1, h_1) = (e_G, e_H)$

Schluss:  $(G \times H, \odot, (e_G, e_H))$  ist eine Gruppe.

- (b) (i)  $(R \times S, \oplus, (0_R, 0_S))$  ist eine abelsche Gruppe.  
Folgt aus (a).

- (ii)  $\oplus$  ist assoziativ:

Beweis läuft ähnlich zu (a), die Behauptung folgt aus der Assoziativität von  $\cdot$  und  $\star$ .

- (iii) Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) \odot ((r_2, s_2) \oplus (r_3, s_3)) &= (r_1, s_1) \odot (r_2 + r_3, s_2 \star s_3) \\ &= (r_1 \cdot (r_2 + r_3), s_1 * (s_2 \star s_3)) \\ &= (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3, s_1 * s_2 \star s_1 * s_3) \\ &= (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2) \oplus (r_1 \cdot r_3, s_1 * s_3) \\ &= [(r_1, s_1) \odot (r_2, s_2)] \oplus [(r_1, s_1) \odot (r_3, s_3)] \end{aligned}$$

- (c) Falsch. Sei  $x, y \in K$  beliebige Elemente von  $K$ . Es ist klar, dass  $(0, 0)$  das Nullelement ist, weil

$$(x, y) \oplus (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

Sei jetzt  $x \neq 0 \neq y$ . Es gilt

$$(x, 0) \odot (0, y) = (x \cdot 0, 0 \cdot y) = (0, 0),$$

also es gibt Nullteiler. □

**Aufgabe 13.** Zeigen Sie: In einem Ring  $(R, +, \cdot)$  gilt genau dann die Kürzungsregel

$$\text{Falls } a \in R \setminus \{0\} \text{ und } x, y \in R \text{ beliebig sind, dann gilt } a \cdot x = a \cdot y \implies x = y$$

wenn  $R$  nullteilerfrei ist.

*Beweis.* 1.  $R$  hat Nullteiler  $\implies$  die Kürzungsregel gilt nicht.

Per Ausnahme gibt es  $x \in R \setminus \{0\}$  mit Nullteiler  $a \in R \setminus \{0\}$ , also  $a \cdot x = 0$ . Es gilt auch, dass  $a \cdot 0 = 0$ , daher

$$a \cdot x = a \cdot 0 = 0.$$

Aber  $x \neq 0$ , und die Kürzungsregel gilt nicht.

2.  $R$  nullteilerfrei  $\implies$  Kürzungsregel gilt.

Seien  $a \in R \setminus \{0\}$  und  $x, y \in R$  beliebig und

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \cdot y \\ a \cdot x + [-(a \cdot y)] &= a \cdot y + [-(a \cdot y)] \\ 0 &= a \cdot x - a \cdot y \\ &= a \cdot (x - y) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass entweder  $a = 0$  oder  $x - y = 0$ . Weil wir schon ausgenommen haben, dass  $a \neq 0$ , gilt  $x - y = 0$ , oder  $x = y$ . □

**Aufgabe 14. (Verknüpfungsverträglich)** Es seien  $(G, \cdot, e_G), (H, *, e_H)$  Gruppen und  $\alpha : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie

- (a)  $U = \{u \in G \mid \alpha(u) = e_H\}$  ist eine Untergruppe von  $G$ .  
 (b)  $\alpha(G)$  ist eine Untergruppe von  $H$ .  
 (c) Durch  $a \sim b \iff ab^{-1}$  wird eine verknüpfungsverträgliche Äquivalenzrelation auf  $G$  definiert.

*Beweis.* (a) (i) Neutrales Element.

$\alpha(e_G) = e_H$ , weil, für alle  $x \in G$  gilt

$$\alpha(x) = \alpha(x \cdot e_G) = \alpha(x) * \alpha(e_G).$$

(ii)  $U$  ist abgeschlossen.

Sei  $x, y \in U$ , also  $\alpha(x) = e_H = \alpha(y)$ . Es gilt

$$\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) * \alpha(y) = e_H * e_H = e_H$$

also  $x \cdot y \in U$ .

(iii) Existenz des Inverses

Sei  $x \in U$ , und  $x \cdot x^{-1} = e_G$ . Es gilt

$$e_H = \alpha(e_G) = \alpha(x \cdot x^{-1}) = \alpha(x) * \alpha(x^{-1}) = e_H * \alpha(x^{-1}) = \alpha(x^{-1}),$$

also  $x^{-1} \in U$ .

(b) (a) Neutrales Element

$\alpha(e_G) = e_H$ , der Beweis ist schon in (a) geschrieben.

(b)  $\alpha(G)$  ist abgeschlossen.

Sei  $\alpha(G) \ni y_1 = \alpha(x_1)$  bzw.  $\alpha(G) \ni y_2 = \alpha(x_2)$ , für  $x_1, x_2 \in G$ . Es gilt

$$y_1 * y_2 = \alpha(x_1) * \alpha(x_2) = \alpha(x_1 \cdot x_2) \in \alpha(G).$$

(c) Existenz des Inverses

Sei  $\alpha(G) \ni y = \alpha(x)$ . Sei auch  $x^{-1} \in G$ , sodass  $x \cdot x^{-1} = e_G = x^{-1} \cdot x$ . Es gilt

$$y * \alpha(x^{-1}) = \alpha(x) * \alpha(x^{-1}) = \alpha(x \cdot x^{-1}) = \alpha(e_G) = e_H,$$

also  $\exists \alpha(x^{-1}) \in \alpha(G)$ , für die gilt  $y * \alpha(x^{-1}) = e_H = \alpha(x^{-1}) * y$ .

(c) In (i) - (iii) beweisen wir, dass es eine Äquivalenzrelation ist. Dann beweisen wir, dass sie verknüpfungsverträglich ist. Sei im Beweis  $x, y, z, w \in G$  beliebige Elemente.

(i) (Reflexivität)  $x \sim x$ , weil  $x \cdot x^{-1} = e_G \in U$ .

(ii) (Symmetrie) Sei  $x \sim y$ , also  $xy^{-1} \in U$ . Es gilt dann,  $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}$ . Weil  $U$  eine Gruppe ist, gilt  $(xy^{-1})^{-1} \in U$ , also  $yx^{-1} \in U$ . Daraus folgt  $y \sim x$ .

(iii) (Transitivität) Sei  $x \sim y$  und  $y \sim z$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$  und  $y \cdot z^{-1} \in U$ . Es folgt

$$x \cdot z^{-1} = \underbrace{x \cdot y^{-1}}_{\in U} \cdot \underbrace{y \cdot z^{-1}}_{\in U} \in U,$$

also  $x \sim z$ .

(iv) Sei  $x \sim y$  und  $z \sim w$ , also  $x \cdot y^{-1} \in U$  und  $z \cdot w^{-1} \in U$ . Wir möchten zeigen, dass  $x \cdot z \sim y \cdot w$ , also

$$x \cdot z \cdot (y \cdot w)^{-1} = x \cdot z \cdot w^{-1} \cdot y^{-1} \in U.$$

Es gilt

$$\alpha(x \cdot z \cdot w^{-1} \cdot y^{-1}) = \alpha(x) * \alpha(z \cdot w^{-1}) * \alpha(y^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha(x) * e_H * \alpha(y^{-1}) \\
&= \alpha(x \cdot y^{-1}) \\
&= e_H
\end{aligned}$$

also  $x \cdot z \sim y \cdot w$ . □

### Aufgabe 15. (Rechnen in verschiedenen Ringen)

- (a) Bestimmen Sie das inverse Element von  $\bar{6}$  in  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$  oder weisen Sie nach, dass es nicht existiert.
- (b) Bestimmen Sie die Charakteristik von  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , wobei die beiden Teile des Produktes als Ringe interpretiert werden und die Verknüpfung wie in 12(b) definiert wird.
- (c) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$ , die die Gleichung  $z^2 + 2$  erfüllen.
- (d) Berechnen Sie  $(7 + i)(6 - i)^{-1}$  und geben Sie das Ergebnis als komplexe Zahl gemäß Definition 2.4.14 an.
- (e) Bestimmen Sie die Einerstelle von  $27^{101}$ .

*Beweis.* (a) (i)  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \bar{6} = \bar{2}$ , und es gibt kein inverse Element.

$$\begin{aligned}
\bar{2} \cdot \bar{0} &= \bar{0} \\
\bar{2} \cdot \bar{1} &= \bar{2} \\
\bar{2} \cdot \bar{2} &= \bar{4} = \bar{0} \\
\bar{2} \cdot \bar{3} &= \bar{6} = \bar{2}
\end{aligned}$$

(ii)  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \bar{6} = \bar{1}$ . Daher ist  $\bar{6} = \bar{6}^{-1}$ .

(iii)  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \bar{6} \cdot \bar{6} = \bar{36} = \bar{1}$ .

(iv)  $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}) \bar{6} \cdot \bar{6} = \bar{36} = \bar{1}$ .

- (b) Im Allgemeinen ist die Charakteristik von  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $a$  und  $b$ . Es gilt  $n \cdot 1_{\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}}$ , und auch  $n \cdot 1_{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}}$ . Für  $\mathbb{N} \ni n < \text{kgV}(a, b)$  kann die beides gleichzeitig per Definition nicht gelten. Die Antworten folgen:

(i)  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$  15

(ii)  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$  6

- (c)  $z^2 + 2 = 0, z^2 = -2$ . Wir haben  $|z|^2 = |2|$ , und  $|z| = \sqrt{2}$ . Daraus folgt:

$$z = \pm \sqrt{2}i.$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{7+i}{6-i} &= \frac{(7+i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} \\
&= \frac{42+13i-1}{36+1} \\
&= \frac{41+13i}{37} \\
&= \left( \frac{41}{37}, \frac{13}{37} \right)
\end{aligned}$$

(e)  $27^{101} = (3^3)^{101} = 3^{303}$ . Sei  $a$  die Einerstelle von  $3^{303}$ . Es gilt

$$3^{303} \equiv a \pmod{10}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
3^1 &= 3 \equiv 3 \pmod{10} \\
3^2 &= 9 \equiv 9 \pmod{10} \\
3^3 &= 27 \equiv 7 \pmod{10} \\
3^4 &\equiv 1 \pmod{10} \\
3^5 &\equiv 3 \pmod{10}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
3^{303} &= 3^{4 \times 75 + 3} \\
&\equiv 3^3 \pmod{10} \\
&\equiv 7 \pmod{10}
\end{aligned}$$

also die Einerstelle von  $27^{101}$  ist 7. □

**Aufgabe 16.** Wir können analog zur Konstruktion komplexer Zahlen vorgehen, um aus  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  größere Ringe zu konstruieren, d.h. für festes  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir auf  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  die Addition  $\oplus$  bzw. Multiplikation  $\odot$  durch

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

bzw.

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

für alle  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Entscheiden Sie, für welche  $n \in \{2, 3, 4\}$  mit dieser Konstruktion ein Körper entsteht.

*Beweis.* ( $n = 2$ ) Es ist kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist.

$$(\bar{1}, \bar{1}) \odot (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

( $n = 3$ ) Es ist ein Körper. Wir wissen, weil 3 eine Primzahl ist, dass  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ein Körper ist. Wir vermuten, dass das inverse Element

$$(a, b)^{-1} = \left( a (a^2 + b^2)^{-1}, -b (a^2 + b^2)^{-1} \right),$$

was wohldefiniert ist, weil  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ein Körper ist. Wir wissen (und werden benutzen), dass Multiplikation in der ganzen Zahlen kommutativ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} (a, b) \odot (a, b)^{-1} &= \left( a^2 (a^2 + b^2)^{-1} - b^2 (a^2 + b^2)^{-1}, 0 \right) \\ &= \left( (a^2 + b^2) (a^2 + b^2)^{-1}, 1 \right) \\ &= (1, 0), \end{aligned}$$

was das neutrale Element ist (beweise gleich wie der Beweis bzgl.  $\mathbb{C}$ ).

( $n = 4$ ) Es ist noch einmal kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist.

$$(\bar{2}, \bar{2}) \odot (\bar{2}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

□

## 1.5 Blatt 5

**Aufgabe 17.** Es sei  $K$  ein Körper. Ferner seien  $a, b \in K[t] \setminus \{0\}$  Polynome.

Wir definieren  $r_0 := a, r_1 := b$  und definieren für  $k \in \mathbb{N}$   $q_k$  und  $r_{k+1}$  als Polynome, die

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad \deg(r_{k+1}) < \deg(r_k)$$

erfüllen, falls  $r_k \neq 0$  und ansonsten definieren wir  $r_{k+1} = r_k = 0$ .

- (a) Zeigen Sie: Es gibt ein minimales  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $r_k = 0$  für alle  $k > k_0$ .
- (b) Zeigen Sie: Mit dieser Wahl ist  $r_{k_0} \neq 0$  und  $r_{k_0}$  ist ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .
- (c) Zeigen Sie: Ist  $s \in K[t]$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ , dann ist  $s$  auch ein Teiler von  $r_{k_0}$ .

*Beweis.* (a) Es gilt  $\deg(r_k) < \deg(r_k)$ , also die Folge  $\deg(r_k)$  ist streng monoton fallend. Weil es nur endliche Möglichkeiten  $k$  für den Grad eines Polynomes mit  $k < \deg(b)$  gibt, muss es eine Zahl  $k'_0$  geben, mit  $\deg(r_{k'_0}) = -\infty$ .

(Die Möglichkeiten sind  $\{-\infty, 0, 1, \dots, \deg(b)\}$ .)

$\deg(r_{k_0}) = -\infty$  genau dann, wenn  $r_{k_0} = 0$ . Es folgt per Definition,  $r_{k_0+1} = 0$  und  $r_k = 0 \forall k \geq k_0$  per Induktion.

Weil  $\{0, 1, \dots, k'_0\}$  endlich ist, gibt es ein minimales Zahl  $k_0$  mit der gewünschten Eigenschaft.

Mit dieser Wahl ist  $r_{k_0} \neq 0$ .

(b)



Sonst wäre es ein Widerspruch, weil  $k_0$  nicht die kleinste Zahl mit diese Eigenschaft wäre. Falls  $r_{k_0} = 0$ , wäre  $k_0 - 1$  eine kleine Zahl mit die gewünschte Eigenschaft.

- (i) Wir beweisen zuerst die folgende Behauptung:

Sei  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k+1}$ . Dann ist  $p$  auch ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$ .

Per Definition teilt  $p$   $r_k$ . Wir wissen auch, dass

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}.$$

Weil  $p$  teilt  $r_k$ , teilt  $p$   $q_k r_k$  auch. Da  $p$  teilt auch  $r_{k+1}$ , teilt  $p$   $q_k r_k + r_{k+1}$ , also  $p$  teilt  $r_{k-1}$ . Dann ist  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$ .

- (ii) Sei  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_{k-1}$  und  $r_k, k \leq k_0$ . Dann ist  $p$  auch ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .

Wir beweisen es per Induktion. Für  $k = 1$  ist es klar, dass alle gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  auch gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  sind.

Jetzt nehmen wir an, dass es für eine beliebige  $\mathbb{N} \ni k < k_0$  gilt, dass alle gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$  auch gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  sind.

Jetzt betrachten wir  $r_k$  und  $r_{k+1}$ . Sei  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k+1}$ . Aus (i) folgt, dass  $p$  auch ein Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$  ist. Per Induktionvoraussetzung ist  $p$  auch ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .

- (iii) Insbesondere gilt, dass alle gemeinsamer Teiler  $p$  von  $r_{k_0}$  und  $r_{k_0-1}$  auch gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  sind.
- (iv) In (a) haben wir schon bewiesen, dass  $r_{k_0}$  ein Teiler von  $r_{k_0-1}$  ist. Daraus folgt, dass  $r_{k_0}$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_{k_0}$  und  $r_{k_0-1}$  ist. Es folgt, dass  $r_{k_0}$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist.

- (c) Der Beweis läuft ähnlich:

- (i) Wir beweisen per Induktion:

Sei  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .  $p$  ist dann ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$  für alle  $k \in \{0, 1, \dots, k_0\}$ .

- (ii) Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass es für beliebige  $\mathbb{N} \ni k \leq k_0 - 1$ , dass alle gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  auch gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$  sind.
- (iii) Wir betrachten  $p$ , was ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist, also per Induktionsvoraussetzung ist  $p$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_k$  und  $r_{k-1}$ .

Es gilt  $r_{k+1} = r_{k-1} - q_k r_k$ , also weil  $p$   $r_k$  teilt, teilt  $p$   $q_k r_k$ . Es folgt, dass  $p$  teilt  $r_{k-1} - q_k r_k$ , und  $p$  teilt  $r_{k+1}$ . Also  $p$  ist ein gemeinsamer Teiler von  $r_{k+1}$  und  $r_k$ .

Insbesondere gilt, dass wenn  $s \in K[t]$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist, ist  $s$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_{k_0}$  und  $r_{k_0-1}$ , also  $s$  ist ein Teiler von  $r_{k_0}$ .  $\square$

**Aufgabe 18.** (a) Zeigen Sie: Ist  $K$  ein endlicher Körper, so gibt es ein Polynom  $p \neq 0$ , das alle  $x \in K$  als Nullstelle hat. Folgern Sie daraus, dass die Abbildung  $K[t] \rightarrow \text{Abb}(K, K), f \rightarrow (x \rightarrow f(x))$  in diesem Fall nicht injektiv ist.

(b) Zeigen Sie: Ist  $p \in K[t]$  ein Polynom vom Grad 0, 1, 2 oder 3, das keine Nullstelle in  $K$  hat, dann hat von zwei Polynomen  $f, g$  mit  $f \cdot g = p$  mindestens eines Grad 0.

(c) Bestimmen Sie mit dem vietaschen Nullstellensatz alle rationalen Nullstellen von

$$q = 99 \cdot t^3 - 63 \cdot t^2 - 44 \cdot t + 28 \in \mathbb{Q}[t].$$

(d) Beweisen Sie, dass das Polynom  $t^8 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$  keine rationalen Nullstellen hat.

(e) Es seien  $f = (2+3i)X^7 - 5$  und  $g = X^2 - 2i$  in  $\mathbb{C}[X]$  gegeben. Bestimmen Sie wie im Existenzbeweis von Satz 2.4.26 die Polynome  $q, r \in \mathbb{C}[X]$  mit  $\deg(r) < \deg(g)$  und

$$f = q \cdot g + r.$$

*Beweis.* (a) Wir beweisen es konstruktiv. Sei  $p = \prod_{r \in K} (x - r)$ . Es gilt, für alle  $x \in K$ , dass  $x - x = 0$ , also  $p(x) = 0$ . Aber  $p \neq 0$ , z.B. ist das Koeffizient  $a_n = 1$ , wobei  $n = |K|$ .

Wir wissen, dass die Abbildung das konstruierte Polynom auf die Nullfunktion abbildet. Aber die Abbildung bildet auch das Nullpolynom auf die Nullfunktion ab. Also wir haben  $K[t] \ni 0 \neq p \in K[t]$ , aber die Abbildung bildet 0 und  $p$  auf die gleiche Funktion, also es ist nicht injektiv.

(b) Es gilt

$$\deg(p) = \deg(f) + \deg(g),$$

also es gibt nur zwei Möglichkeiten für  $\deg(f)$  und  $\deg(g)$ : Entweder haben wir  $0 + 3 = 3$  oder  $1 + 2 = 3$ .

Sei  $\deg(f) = 1$  und  $\deg(g) = 2$ , mit  $p = f \cdot g$ . Per Definition ist  $f(t) = a_0 + a_1 t, a_0, a_1 \in K$ . Sei  $t = -a_1^{-1} a_0 \in K$ . Es gilt  $\tilde{f}(t) = a_0 - a_1 a_1^{-1} a_0 = 0$ , also  $t$  ist eine Nullstelle von  $f$ .

Es folgt daraus, dass  $t$  ist eine Nullstelle von  $p$ , ein Widerspruch zu die Annahme, dass  $p$  keine Nullstellen hat.

Jetzt bleibt nur eine Möglichkeit, dass von  $f, g$  mindestens eines (eigentlich genau eine) Grad 0 hat.

- (c) Für alle rationale Nullstellen  $a/b, a \in \mathbb{N} \cup \{0\}, b \in \mathbb{Z}, a, b$  teilerfremd gilt

$$a|28 \quad b|99.$$

Weil  $28 = 2^2 \times 7$  und  $99 = 3^2 \times 11$ , sind die Möglichkeiten dafür:

$$\begin{aligned} a &\in \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \\ b &\in \{1, 3, 9, 11, 33, 99\} \end{aligned}$$

Man kann alle 36 Kombinationen probieren, die rationale Nullstellen sind:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{7}{11}, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}.$$

- (d) Wir verwenden Satz 2.4.37. Sei  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$  teilerfremd, eine Nullstelle von  $t^8 - 2$ . Dann gilt

$$p|-2 \quad q|1,$$

also  $q = 1$  und  $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , dann  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Aber für keine mögliche  $x$  gilt  $x^8 - 2 = 0$ , also  $t^8 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$  hat keine rationale Nullstellen.

- (e)

$$\begin{aligned} (2+3i)X^7 - 5 &= (X^2 - 2i)((2+3i)X^5 - (6-4i)X^3 \\ &\quad - (8+12i)X) + \underbrace{(24-16i)X - 5}_r. \end{aligned} \quad \square$$

**Aufgabe 19.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

- (a)  $\mathbb{R}$  wird mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.
- (b)  $\mathbb{Z}$  wird mit der gewöhnlichen Addition und der Multiplikation  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : \bar{0} \cdot z = 0, \bar{1} \cdot z = z$  zu einem  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Vektorraum.
- (c) Der Ring  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  wird mit der Multiplikation  $a \cdot (z, r) = (az, ar)$  zu einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (d) Der Ring  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  wird mit der Multiplikation  $a \cdot (z, r) = (az, ar)$  zu einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.
- (e) Jeder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist mit der entsprechend eingeschränkten Multiplikation auch ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

*Beweis.* (a) Wahr. Wir wissen, dass  $(\mathbb{R}, +, 0)$  eine abelsche Gruppe ist.

Die andere Gruppenaxiome folgen aus die analoge Axiome für Addition und Multiplikation in  $\mathbb{R}$ , wenn man  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$  als Unterring von  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$  betrachtet.

- (b) Falsch. Das Distributivgesetz wird verletzt. Sei  $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$  und daher  $a+a \neq 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} a+a &= \bar{1} \cdot a + \bar{1} \cdot a \\ &\neq (\bar{1} + \bar{1})a \\ &= \bar{0} \cdot a \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (c) Wahr. Es folgt ähnlich zu (a):

Wir haben  $+, \cdot : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir wissen, dass  $(\mathbb{R}, +|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}, \cdot|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}, 0, 1)$  ein Unterring ist. Daraus folgt, dass  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  mit der Multiplikation  $a \cdot (z, r) = (az, ar)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

- (d) Falsch. Es gilt, z.B.  $(1, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}$ , aber

$$i \cdot (1, 1) = (i, i) \notin \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

□

**Aufgabe 20.** Es sei  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

- (a) Die Menge  $\text{End}(V)$  aller Homomorphismen von  $V \rightarrow V$  bildet mit den Verknüpfungen

$$\oplus : \text{End}(V) \times \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V), f \oplus g := (V \rightarrow V, x \rightarrow f(x) + g(x))$$

und  $\circ$  der gewöhnlichen Hintereinanderausführung von Abbildungen, einen Ring mit 1.

- (b) Enthält  $\text{End}(V)$  einen Körper  $K$ , dann ist  $(V, +)$  mit der skalaren Multiplikation  $k \cdot v := k(v)$  ein  $K$ -Vektorraum.

*Beweis.* (a) (i) Wir wissen, weil  $(V, +)$  abelsch ist, dass  $(\text{End}(V), \oplus)$  auch eine abelsche Gruppe ist.

(ii) Wir wissen auch, dass Verkettung von Funktionen assoziativ ist.

(iii) Distributivgesetz: Sei  $f, g, h \in \text{End}(V)$ . Es gilt, für beliebige  $x \in V$ ,

$$\begin{aligned} [f \circ (g \oplus h)](x) &= f(g(x) + h(x)) \\ &= f(g(x)) + f(h(x)) && f \text{ ist ein Homomorphismus} \\ &= (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) \\ &= [(f \circ g) \oplus (f \circ h)](x) \end{aligned}$$

Weil  $x$  beliebig war, ist  $f \circ (g \oplus h) = (f \circ g) \oplus (f \circ h)$

- (iv) Sei  $1 \in \text{End}(V), x \rightarrow x$ . Sei außerdem  $f \in \text{End}(V)$ , und  $x \in V$  beliebig. Es gilt

$$f \circ 1 = 1 \circ f = f,$$

also  $\text{End}(V)$  ist ein Ring mit 1.

(b)  $V$  ist eine abelsche Gruppe (das haben wir vorausgesetzt). Wir müssen nur die andere Axiome betrachten. In folgendes Sei  $\lambda, \mu \in K$  beliebiger Elemente von der Körper und  $v, w \in V$ . Weil  $K$  ein Körper ist, enthält  $K$  1.

- (i)  $(\lambda \oplus \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$  folgt per Definition von  $\oplus$ .
- (ii)  $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$  gilt, weil  $\lambda$  ein Homomorphismus ist.
- (iii)

$$\begin{aligned} (\lambda \circ \mu) \cdot v &= \lambda(\mu(v)) \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot v) \end{aligned}$$

(iv) Es gilt  $1 \cdot v = 1(v) = v$  per Definition von 1. □

## 1.6 Blatt 6

**Aufgabe 21.** Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum des jeweils angegebenen Vektorraums sind.

- (a)  $\{p \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(p) \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}[t]$ .
- (b)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.
- (c)  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  mit  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (d)  $\{p \in \mathbb{Q}[t] \mid \forall a \in \mathbb{Q} : \tilde{p}(-a) = \tilde{p}(a)\}$ , wobei  $\tilde{p}$  die zu  $p$  gehörige Polynomfunktion bezeichnet, als Teilmenge von  $\mathbb{Q}[t]$ .
- (e)  $\{(1, 2, 3) + t \cdot (4, 5, 6) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

*Beweis.* (a) Ja. Sei  $p_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$  und  $p_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$ . Es gilt

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t \\ &\quad + (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 + b_3)t^3 + (a_4 + b_4)t^4 \end{aligned}$$

was auch ein Polynom mit Grad  $\leq 4$  ist.

Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$xp_1 = xa_0 + xa_1 t + xa_2 t^2 + xa_3 t^3 + xa_4 t^4,$$

noch ein Polynom mit Grad  $\leq 4$ .

- (b) Nein. Es ist sogar kein Vektorraum, weil  $0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
- (c) Nein. Sei  $z \in B$  mit  $|z| = a < 1$ . Dann ist

$$\left| \frac{1}{a^2} z \right| = \frac{1}{a^2} |z| = \frac{1}{a} > 1,$$

also  $B$  ist nicht unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

- (d) Ja. Sei  $p_1, p_2$  beliebige Elemente von der Menge, und  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Es gilt  $p_1 \tilde{+} p_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$ , und per Definition

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1(a) &= \tilde{p}_1(-a) \\ \tilde{p}_2(a) &= \tilde{p}_2(-a)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$p_1 \tilde{+} p_2(a) = \tilde{p}_1(a) + \tilde{p}_2(a) = \tilde{p}_1(-a) + \tilde{p}_2(-a) = p_1 \tilde{+} p_2(-a).$$

Außerdem ist  $x\tilde{p}_1 = x\tilde{p}_1$ , und

$$x\tilde{p}_1(a) = x\tilde{p}_1(a) = x\tilde{p}_1(-a) = x\tilde{p}_1(-a).$$

- (e) Nein. Wir wissen, dass  $(1, 2, 3)$  ein Element von unserer Menge ist. Dann sollte  $2(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$  auch ein Element sein. Wir würden dann schreiben

$$(1, 2, 3) + t(4, 5, 6) = (2, 4, 6),$$

also

$$t(4, 5, 6) = (1, 2, 3).$$

Aus  $6t = 3$  haben wir  $t = \frac{1}{2}$ . Dann ist  $5t = \frac{5}{2} \neq 2$ , ein Widerspruch, also es ist kein Untervektorraum.  $\square$

**Aufgabe 22.** Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien im jeweiligen Vektorraum linear unabhängig sind

- (a)  $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 6))$  in  $\mathbb{R}^3$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (b)  $((1, i), (i, -1))$  im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}^2$ .
- (c)  $((1, i), (i, -1))$  im  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}^2$ .
- (d)  $(1, 1 + t, 1 + t + t^2)$  im  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Vektorraum  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$ .
- (e)  $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 7))$  in  $\mathbb{R}^3$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.

*Beweis.* (a) Nein, weil

$$(1, 2, 3) + (5, 4, 3) + (-1)(6, 6, 6) = 0.$$

- (b) Ja. Sei  $a, b \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$a(1, i) + b(i, -1) = (a + bi, ai - b).$$

Wir würden  $a + bi = 0$  und  $ai - b = 0$ . Aber wir wissen, dass das nur möglich ist, wenn  $a = b = 0$ , also  $(1, i)$  und  $(i, -1)$  sind linear unabhängig.

(c) Nein, weil

$$i(1, i) + (-1)(i, -1) = (i, -1) - (i, -1) = 0,$$

und wir haben  $i \neq 0$ .

(d) Ja. Sei  $a, b, c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , sodass

$$a(1 + t + t^2) + b(1 + t) + c(1) = at^2 + (a + b)t + (a + b + c) = 0.$$

Per Definition der Nullpolynom gilt  $a = 0$ . Dann ist  $b + a = 0$ , oder  $b = 0$ .  
Zuletzt gilt  $a + b + c = 0$ , also  $c = 0$  weil  $a = b = 0$ .

(e) Ja. Sei  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , sodass  $a(1, 2, 3) + b(5, 4, 3) + c(6, 6, 7) = 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} -6c &= a + 5b \\ -6c &= 2a + 4b \\ -7c &= 3a + 3b \end{aligned}$$

Aus den zweiten und ersten Gleichungen folgt

$$a + 5b = 2a + 4b,$$

also  $a = b$ . Aus der ersten oder zweiten Gleichung folgt  $c = -a$ . Aus der dritten Gleichung folgt

$$-7(-a) = 7a = 3a + 3b = 6a.$$

Weil  $7a = 6a$  muss  $a = 0$  sein. Dann ist  $b = c = 0$ . Also die Vektoren sind linear unabhängig.  $\square$

**Aufgabe 23.** Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums sind

- (a)  $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 6))$  in  $\mathbb{R}^3$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (b)  $(\exp it)_{t \in \mathbb{Q}}$  in  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (c)  $(1 + t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in  $\mathbb{Q}[t]$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.
- (d)  $(\tilde{p})_{p \in \mathbb{R}[t]}$  für den Vektorraum aller Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (e)  $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 7))$  in  $\mathbb{R}^3$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.

*Beweis.* (a) Nein. Wir betrachten  $(6, 6, 5)$ . Wir hoffen, dass es als Summe

$$(6, 6, 5) = a(1, 2, 3) + b(5, 4, 3) + c(6, 6, 6)$$

dargestellt werden kann, wobei  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Weil  $(6, 6, 6)$  als linear Kombination der anderen 2 Vektoren geschrieben werden kann, können wir oBdA schreiben

$$(6, 6, 5) = a'(1, 2, 3) + b'(5, 4, 3) + (6, 6, 6),$$

oder einfach

$$(0, 0, -1) = a'(1, 2, 3) + b'(5, 4, 3).$$

wobei  $a', b' \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $a' + 5b' = 0$ , oder  $a = -5b'$ . Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= 2a' + 4b' \\ &= 2(-5b') + 4b' \\ &= -6b' \end{aligned}$$

also  $b' = 0$ . Daraus folgt  $a' = 0$ . Aber

$$0(1, 2, 3) + 0(5, 4, 3) = (0, 0, 0) \neq (0, 0, -1).$$

(b) Nein. Wir können komplexe Zahlen mit nicht rationale Winkel nicht erreichen.

(c) Ja. Sei  $v_n = 1 + t^n$   $n \in \mathbb{N}_0$  der Erzeugendensystem. Es ist  $v_0 = 1 + 1 = 2$ . Dann ist  $v_n - \frac{1}{2}v_0 = t^n$   $n \in \mathbb{N}$ . Weil wir wissen, dass  $t^n$  ein Erzeugendensystem ist, ist dann auch  $(1 + t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein Erzeugendensystem.

(d) Nein. Alle solche Funktionen  $\tilde{p}$  sind stetig, also lineare Kombinationen davon  $a_1\tilde{p}_1 + a_2\tilde{p}_2 + \dots$  sind auch stetig. Aber es gibt unstetige Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}.$$

(e) Ja. Es gilt

$$\begin{aligned} (0, 0, 1) &= (6, 6, 7) - (5, 4, 3) - (1, 2, 3) \\ (1, 0, 0) &= -2(1, 2, 3) + (5, 4, 3) + 3(0, 0, 1) \\ (0, 1, 0) &= \frac{1}{2} [(1, 2, 3) - (1, 0, 0) - 3(0, 0, 1)] \end{aligned}$$

Weil alle Elemente der Standardbasis als Linearkombination von unserem System geschrieben werden können, können alle Elemente in  $\mathbb{R}^3$  auch. Dann ist es ein Erzeugendensystem. Weil es linear unabhängig ist, ist es eine Basis.  $\square$

**Aufgabe 24.** (a) Zeigen Sie: Ist  $(b_i)_{i \in B}$  eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$  und  $i_0 \in B$ , dann ist auch  $(b_i - 2b_{i_0})_{i \in B}$  eine Basis von  $V$ .

(b) Zeigen Sie: Ist  $K$  ein unendlicher Körper und sind  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  Elemente von  $K$  mit  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$ , so ist  $(b_k)_{k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}}$  mit

$$b_k = \frac{\left(\prod_{i=0}^{k-1} (t - x_i)\right) \left(\prod_{i=k+1}^n (t - x_i)\right)}{\left(\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)\right) \left(\prod_{i=k+1}^n (x_k - x_i)\right)}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  eine Basis von  $K_{\leq n}[t] = \{p(t) \in K[t] \mid \deg(p) \leq n\}$ .



- (c) Geben Sie mit Hilfe der Basis aus der vorigen Teilaufgabe ein rationales Polynom vom Grad höchstens 4 an, dessen Polynomfunktion die Funktionswerte  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 9$ ,  $f(4) = 17$ ,  $f(5) = 6000$  hat.

*Beweis.* (a)  $(b_i - 2b_{i_0})_{i \in B}$  ist...

- (i) Linear unabhängig

Sei  $(a_k)_{k \in B}$ ,  $a_k \in R$ , nicht alle 0, sodass

$$\sum_{i \in B} a_i (b_i - 2b_{i_0}) = 0.$$

Es ist dann

$$\sum_{B \ni i \neq i_0} a_i b_i + 2 \left( \sum_{B \ni i \neq i_0} a_i \right) b_{i_0} - a_{i_0} b_{i_0} = 0.$$

Die Koeffizienten sind nicht alle null, also  $(b_i)_{i \in B}$  ist nicht linear unabhängig, ein Widerspruch, weil es ist dann kein Basis.

- (ii) Ein Erzeugendesystem

Sei  $v \in V$  beliebig und  $a_i \in \mathbb{R}$ , sodass

$$v = \sum_{i \in B} a_i b_i,$$

was immer möglich ist, weil  $(b_i)_{i \in B}$  eine Basis ist. Sei dann

$$c_i = \begin{cases} a_i & i \neq i_0 \\ -2 \sum_{B \ni i \neq i_0} a_i - a_{i_0} & i = i_0 \end{cases}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} c_i (b_i - 2b_{i_0}) &= \sum_{B \ni i \neq i_0} c_i (b_i - 2b_{i_0}) + c_{i_0} (b_{i_0} - 2b_{i_0}) \\ &= \sum_{B \ni i \neq i_0} c_i b_i - 2 \sum_{B \ni i \neq i_0} b_{i_0} - c_{i_0} b_{i_0} \\ &= \sum_{B \ni i \neq i_0} a_i b_i + a_{i_0} b_{i_0} \\ &= \sum_{i \in B} a_i b_i \\ &= v \end{aligned}$$

Weil  $v$  beliebig war, haben wir einen Erzeugendesystem. Die Behauptung folgt.

- (b) Wir betrachten die Wirkung der Polynomfunktion  $\tilde{b}_k$  auf ein Punkt  $x_i$ . Es gilt, für  $i \neq k$ ,  $\tilde{b}_k(x_i) = 0$ . Für  $i = k$  ist

$$\tilde{b}_k(x_k) = \frac{\left(\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)\right) \left(\prod_{i=k+1}^n (x_k - x_i)\right)}{\left(\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)\right) \left(\prod_{i=k+1}^n (x_k - x_i)\right)} = 1.$$

Sei  $p \in K[t]$  ein Polynom mit  $\text{Grad} \leq n$ . Wir wissen, dass nachdem wir  $\tilde{p}(x_i)$  für alle  $1 \leq i \leq n$  wissen, ist das Polynom eindeutig. Sei jetzt  $p(x_i) = a_i$  für alle  $i$ . Es ist  $p' = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ . Dann gilt  $\tilde{p}'(x_i) = a_i$  für alle  $i$ , also  $p' = p$ , also  $(b_k)$  ist ein Erzeugendensystem.

Weil wir genau  $\dim(K_{\leq n}[t]) = n+1$   $b_k$  haben, ist es ein Basis, sonst wäre die Dimension nicht eindeutig.

- (c) Sei  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5$ . Wir betrachten zuerst

$$c_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)\right) \left(\prod_{i=k+1}^n (x_k - x_i)\right)$$

für  $k =$

- (0)  $c_0 = 24$
- (1)  $c_1 = -6$
- (2)  $c_2 = 4$
- (3)  $c_3 = -6$
- (4)  $c_4 = 24$

Dann betrachten wir die Polynomfunktion:

$$\tilde{p} = \sum_{i=0}^4 \left( \frac{1}{c_i} \prod_{i \neq k=0}^4 (t - x_i) \right).$$

$p$  ist dann ein Polynom mit die gewünschte Nullstellen. Nach Vereinfachung ist

$$\frac{5971x^4}{24} - \frac{9951x^3}{4} + \frac{208985x^2}{24} - \frac{49751x}{4} + 5970.$$

□

## 1.7 Blatt 7

**Aufgabe 25.** Wir betrachten den Unterraum  $U$  von  $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}[t]$ , der von

$$B = (\bar{1}, t^2 + t, t^3 - t^2, t + t^3, t^7, t^6 + t^5 + t^3, t^4 - \bar{5})$$

erzeugt wird.

- (a) Entscheiden Sie, ob  $B$  eine Basis von  $U$  ist. Finden Sie andernfalls eine Basis  $B'$  von  $U$ , die nur aus Elementen von  $B$  besteht.
- (b) Zeigen Sie: Die Polynome

$$(t^7 - t^3 - t - \bar{5}, \bar{2}t^7 - \bar{27}, t^6 + t^5 - t^4 + t^3 + \bar{5})$$

liegen alle in  $U$  und sie sind linear unabhängig.

- (c) Bestimmen Sie eine Umnummerierung von  $B'$ , die die Aussage des Austauschsatzes 2.6.8 mit  $(w_1, w_2, w_3) = (t^7 - t^3 - t - \bar{5}, \bar{2}t^7 - \bar{27}, t^6 + t^5 - t^4 + t^3 + \bar{5})$  erfüllt.

*Beweis.* (a) Nein. Per Definition ist  $B$  ein Erzeugendensystem. Es bleibt nur zu zeigen, dass es linear unabhängig ist.

Es ist aber nicht linear unabhängig. Es gilt

$$-(t^3 + t) + (t^2 + t) + (t^3 - t^2) = 0,$$

also es ist nicht linear unabhängig. Eine Basis  $B'$  ist

$$B' = \{\bar{1}, t^2 + t, t^3 + t, t^7, t^6 + t^5 + t^3, t^4 - \bar{5}\}$$

(also  $B$  ohne  $t^3 - t^2$ .)

- (b) Es gilt

$$\begin{aligned} t^7 - t^3 - t - \bar{5} &= t^7 - (t^3 + t) - \bar{5}(\bar{1}) \\ \bar{2}t^7 - \bar{27} &= \bar{2}t^7 - \bar{27}(\bar{1}) \\ t^6 + t^5 - t^4 + t^3 + \bar{5} &= (t^6 + t^5 + t^3) - (t^4 - \bar{5}) \end{aligned}$$

also die liegen alle in  $U$ . Sei  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ , so dass

$$\begin{aligned} x_1(t^7 - t^3 - t - \bar{5}) + x_2(\bar{2}t^7 - \bar{27}) \\ + x_3(t^6 + t^5 - t^4 + t^3 + \bar{5}) = 0 \end{aligned}$$

Aus Vergleich des Koeffizienten von  $t$  gilt  $x_1 = \bar{0}$ . Dann vergleicht man den Koeffizienten von  $t^7$  und erhält  $x_2 = \bar{0}$ . Dann muss  $x_3 = \bar{0}$ , also sind sie linear unabhängig.

- (c)

$$B' = \{t^3 + t, t^7, t^4 - \bar{5}, \bar{1}, t^2 + t, t^6 + t^5 + t^3\}.$$

□

**Aufgabe 26.** Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Vektorräume.

- (a)  $V_1 = \{p \in \mathbb{Q}[x] \mid p(0) = 0 \wedge \deg(p) \leq 6\}$
- (b)  $V_2 = \{p \in \mathbb{Q}[x] \mid \forall a \in \mathbb{Q} : p(-a) = -p(a)\}$
- (c)  $V_3 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} : v_i - v_{n-i+1} = 0\}$

*Beweis.* (a) Sei  $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$ . Es gilt  $p(0) = a_0$ .

Also wir müssen  $a_0 = 0$ . Dann ist  $V_1$  spannte durch

$$B_1 = \{t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6\}.$$

Die Vektoren sind linear unabhängig, also ist  $\dim(V_1) = 6$ .

- (b) Ein Polynom in  $V_2$  muss dann nur gerade Potenzen enthalten. Dann ist ein Basis für  $V_2$

$$B_2 = \{x^{2n}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

also  $\dim(B_2)$  ist abzählbar.

- (c) Ein Basis für  $V_3$  ist  $\{(1, 0, \dots, 0, 1), (0, 1, \dots, 1, 0), \dots, (0, \dots, 1, \dots, 0)\}$ , also die Dimension ist

$$\dim(V_3) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

□

**Aufgabe 27.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} & \bar{8} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^{3 \times 4}.$$

- (a) Bringen Sie  $A$  mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Lesen Sie anschließend den Zeilenrang von  $A$  ab.
- (b) Bringen Sie  $B = A^T$  mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Lesen Sie anschließend den Zeilenrang von  $B$  ab.

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} & \bar{8} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + \bar{6}R_1} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{3} & \bar{10} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \bar{7}R_1} \\ & \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{3} & \bar{10} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{1} & \bar{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \bar{8}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{1} & \bar{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also der Zeilenrang von  $A$  ist 2.

- (b)

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{7} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{8} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + \bar{9}R_1} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{6} \\ \bar{3} & \bar{7} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{8} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \bar{8}R_1}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{8} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 + \bar{7}R_1} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{10} & \bar{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \bar{8}} \\
& \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{10} & \bar{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \bar{8}R_2} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{10} & \bar{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 + R_2} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

also der Zeilenrank von  $A^T$  ist 2.  $\square$

**Aufgabe 28.** Wir betrachten  $U = \text{span}((1, 2, 5, 6), (5, 4, 3, 2), (4, 3, 6, 5)) \subseteq \mathbb{Q}^4$ .

(a) Bringen Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Die entstandenen Zeilenvektoren nennen wir ab jetzt  $b_1, b_2, b_3$ .

(b) Begründen Sie, dass  $b_1, b_2, b_3$  linear unabhängig sind.

(c) Begründen Sie, dass  $b_1, b_2, b_3$  in  $U$  liegen.

(d) Folgern Sie mit Hilfe der vorigen beiden Aussagen, dass sowohl  $((1, 2, 4, 5), (5, 4, 3, 2), (4, 3, 6, 5))$  als auch  $(b_1, b_2, b_3)$  eine Basis von  $U$  bilden.

(e) Nutzen Sie die Basis  $(b_1, b_2, b_3)$ , um herauszufinden, welche der Vektoren  $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0, 0)$  bzw.  $u_3 = (1, 2, 3, 4)$  in  $U$  enthalten sind. Geben Sie in diesem Fall zudem die Koeffizienten der Linearkombination

$$\lambda_i(1, 2, 5, 6) + \mu_i(5, 4, 3, 2) + \tau_i(4, 3, 6, 5) = u_i$$

an.

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -22 & -28 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4R_1} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -22 & -28 \\ 0 & -5 & -14 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & -5 & -14 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Sei  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}$ , so dass

$$q_1 b_1 + q_2 b_2 + q_3 b_3 = 0.$$

Wir betrachten zuerst die erste Komponent. Weil die erste Komponent nur in  $b_1$  ungleich 0 ist, muss  $q_1 = 0$ . Die zweite Komponent ist nur in  $b_2$  ungleich 0, also  $q_2 = 0$ . Daraus folgt, weil  $b_3 \neq 0$ , dass  $q_3 = 0$ , also  $b_1, b_2, b_3$  sind linear unabhängig.

- (c) Durch elementare Zeilenoperationen arbeiten wir immer nur mit linear Kombinationen von Zeilen, also das Ergebnis muss eine lineare Kombination sein.

Wir berechnen es explizit, weil wir es später brauchen werden:

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, 2, 5, 6) \\ b_2 &= \frac{5}{6}(1, 2, 5, 6) - \frac{1}{6}(5, 4, 3, 2) \\ b_3 &= \frac{1}{6}(1, 2, 5, 6) - \frac{5}{6}(5, 4, 3, 2) + (4, 3, 6, 5) \end{aligned}$$

- (d) Wir wissen aus Satz 2.4.18, dass die Erzeugendensysteme sind. Dann ist es nur zu zeigen: Die Systeme sind linear unabhängig. Wir wissen, dass  $b_1, b_2, b_3$  linear unabhängig sind.

Wir nehmen an, dass es Zahlen  $x, y, z \in \mathbb{Q}$  gibt, nicht alle null, so dass

$$x(1, 2, 4, 5) + y(5, 4, 3, 2) + z(4, 3, 6, 5) = (0, 0, 0, 0).$$

Dann können wir  $x(1, 2, 4, 5) + y(5, 4, 3, 2) + z(4, 3, 6, 5)$  als Summe von  $b_1, b_2, b_3$  schreiben. Dann haben wir ein linear Kombination von  $b_1, b_2, b_3$  mit Koeffizienten nicht alle 0, aber das Kombination ist 0, also  $b_1, b_2, b_3$  wären dann nicht linear unabhängig.

- (e) (1) Es gilt

$$x_1(1, 2, 5, 6) + y_1(0, 1, \frac{11}{3}, \frac{14}{3}) + z_1(0, 0, \frac{13}{3}, \frac{13}{3}) = (1, 1, 1, 1).$$

Daraus folgt:  $x_1 = 1$  und  $y_1 = -1$ , also

$$z_1(0, 0, \frac{13}{3}, \frac{13}{3}) + (1, 1, 4/3, 4/3) = (1, 1, 1, 1).$$

Wir entscheiden uns für  $z_1 = -\frac{1}{13}$  und die Behauptung folgt.

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1) &= (1, 2, 5, 6) - (0, 1, 11/3, 14/3) - \frac{1}{13}(0, 0, 13/3, 13/3) \\ &= (1, 2, 5, 6) - \left[ \frac{5}{6}(1, 2, 5, 6) - \frac{1}{6}(5, 4, 3, 2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{13} \left[ \frac{1}{6}(1, 2, 5, 6) - \frac{5}{6}(5, 4, 3, 2) + (4, 3, 6, 5) \right] \\ &= \frac{2}{13}(1, 2, 5, 6) + \frac{3}{13}(5, 4, 3, 2) - \frac{1}{13}(4, 3, 2, 5) \end{aligned}$$

(2) Es würde gelten

$$(1, 1, 0, 0) = x_2(1, 2, 5, 6) + y_2 \left( 0, 1, \frac{11}{3}, \frac{14}{3} \right) + z_2 \left( 0, 0, \frac{13}{3}, \frac{13}{3} \right).$$

Daraus folgt:  $x_2 = 1$  und  $y_2 = -1$ , also

$$\left( 1, 1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right) + z_2 \left( 0, 0, \frac{13}{3}, \frac{13}{3} \right) = (1, 1, 0, 0).$$

Wir entscheiden uns für  $z_2 = -4/13$ , und die Gleichung ist erfüllt, also  $(1, 1, 0, 0)$  liegt in  $U$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1) &= (1, 2, 5, 6) - (0, 1, 11/3, 14/3) - \frac{4}{13}(0, 0, 13/3, 13/3) \\ &= (1, 2, 5, 6) - \left[ \frac{5}{6}(1, 2, 5, 6) - \frac{1}{6}(5, 4, 3, 2) \right] \\ &\quad - \frac{4}{13} \left[ \frac{1}{6}(1, 2, 5, 6) - \frac{5}{6}(5, 4, 3, 2) + (4, 3, 6, 5) \right] \\ &= \frac{3}{26}(1, 2, 5, 6) + \frac{11}{26}(5, 4, 3, 2) - \frac{4}{13}(4, 3, 2, 5) \end{aligned}$$

(3) Es würde gelten

$$(1, 2, 3, 4) = x_3(1, 2, 5, 6) + y_3 \left( 0, 1, \frac{11}{3}, \frac{14}{3} \right) + z_3 \left( 0, 0, \frac{13}{3}, \frac{13}{3} \right).$$

Daraus folgt:  $x_3 = 1$  und  $y_3 = 0$ , also

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2, 5, 6) + z_3 \left( 0, 0, \frac{13}{3}, \frac{13}{3} \right).$$

Dann sei  $z_3 = -\frac{6}{13}$ , und die Gleichung wurde erfüllt, also es liegt in  $U$ .  
Dann ist

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4) &= (1, 2, 5, 6) - \frac{6}{13} \left( 0, 0, \frac{13}{3}, \frac{13}{3} \right) \\ &= (1, 2, 5, 6) - \frac{6}{13} \left( \frac{1}{6}(1, 2, 5, 6) \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{6}(5, 4, 3, 2) + (4, 3, 6, 5) \right) \\ &= \frac{12}{13}(1, 2, 5, 6) + \frac{5}{13}(5, 4, 3, 2) - \frac{6}{13}(4, 3, 6, 5). \quad \square \end{aligned}$$

## 1.8 Blatt 8

**Aufgabe 29.** Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind.

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \rightarrow x \cdot y$
- (b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \rightarrow x + y$
- (c)  $h : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t] \quad p(t) \rightarrow p(t^2)$
- (d)  $k : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $k(t) = t + 2$
- (e)  $l : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $l(z) = \bar{z}$  mit  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum
- (f)  $l$ , aber mit  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

*Beweis.* (a) Nein.  $f((1, 1)) = 1 \cdot 1 = 1$ , aber  $f(2(1, 1)) = f((2, 2)) = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2(1)$ .

- (b) Ja. Sei  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= f((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ &= f((x_1, x_2)) + f((y_1, y_2)) \end{aligned}$$

Sei außerdem  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, x_2)) &= f((\lambda x_1, \lambda x_2)) \\ &= \lambda x_1 + \lambda x_2 \\ &= \lambda(x_1 + x_2) \\ &= \lambda f((x_1, x_2)) \end{aligned}$$

- (c) Ja. Sei  $p, q \in \mathbb{Q}[t]$ ,  $p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_n t^n$  und  $q = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_n t^n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} h(p(t)) &= p_0 + p_1 t^2 + p_2 t^4 + \dots + p_n t^{2n} \\ h(q(t)) &= q_0 + q_1 t^2 + q_2 t^4 + \dots + q_n t^{2n} \\ h(p(t)) + h(q(t)) &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) t^2 + \dots + (p_n + q_n) t^{2n} \\ &= h(p + q) \end{aligned}$$

Sei außerdem  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} h(\lambda p(t)) &= \lambda p_0 + \lambda p_1 t^2 + \lambda p_2 t^4 + \dots + \lambda p_n t^{2n} \\ &= \lambda (p_0 + p_1 t^2 + \dots + p_n t^{2n}) \\ &= \lambda h(p(t)) \end{aligned}$$

- (d) Nein. Es gilt  $k(2) = 4$ , aber  $k(2 \cdot 2) = k(4) = 6 \neq 2k(2) = 8$ .

- (e) Ja. Sei  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , Es gilt  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

Sei außerdem  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Es gilt dann

$$\overline{\lambda z_1} = \bar{\lambda} \bar{z}_1 = \lambda \bar{z}_1.$$



- (f) Nein. Die erste Eigenschaft bleibt wie in (e), aber die zweite nicht. Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Es gilt

$$\overline{\lambda z_1} = \bar{\lambda} \bar{z}_1 \neq \lambda \bar{z}_1$$

solange  $\lambda \notin \mathbb{R}$ . Sei z.B.  $\lambda = i$ ,  $z_1 = i$ . Dann gilt  $\lambda z_1 = -1$  und  $\overline{\lambda z_1} = -1$ . Das ist aber ungleich  $\lambda \bar{z}_1 = i(\bar{i}) = i(-i) = 1$ .  $\square$

**Aufgabe 30.** Entscheiden Sie, welche der folgenden linearen Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

- (a)  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow Ax$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b)  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \rightarrow Ax$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c)  $\mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t], p(t) \rightarrow p'(t)$

- (d)  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  mit  $(z, w) \rightarrow (z + w, z - \bar{w})$ , wobei wir  $\mathbb{C}^2$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum auffassen.

- (e)  $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}$  mit  $f \rightarrow \text{Re}(f|_{\mathbb{R}}) + \text{Im}(f|_{\mathbb{R}})$ , wobei  $f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f|_{\mathbb{R}}(x) := f(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $\text{Re}$  bzw.  $\text{Im}$  den Real bzw. Imaginärteil bezeichnen.

*Beweis.* (a) Nicht injektiv, weil die Spalten nicht linear unabhängig sind. Insbesondere gilt

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist surjektiv, weil die erste zwei Spalten eine Basis sind.

- (b)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4R_1} \\ & \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times 18} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & -42 & -84 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & -84 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also es ist injektiv und surjektiv, daher bijektiv.

- (c) Nicht injektiv. Sei  $p = x + 1$  und  $q = x + 2$ . Dann ist  $p' = q' = 1$ , aber  $p \neq q$ .

Es ist aber surjektiv. Sei  $\mathbb{Q}[t] \ni p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ . Dann ist  $q = a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$  ein Polynom, dessen Bild  $p$  ist.

- (d) Es ist nicht injektiv. Sei  $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $z_1 = 0, z_2 = i, w_1 = 2 + 3i, w_2 = 2 + 2i$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned}(z_1 + w_1, z_1 - \bar{w}_1) &= (2 + 3i, -2 + 3i) \\ (z_2 + w_2, z_2 - \bar{w}_2) &= (2 + 3i, -2 + 3i)\end{aligned}$$

Es ist auch nicht surjektiv. Es gilt

$$\operatorname{Im}(z_1 + w_1) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(w_1)$$

und

$$\operatorname{Im}(z_1 - \bar{w}_1) = \operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(\bar{w}_1) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2).$$

Dann gilt für alle  $(z, w)$  im Bild, dass  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z)$ . Da es gibt Punkte in  $\mathbb{C}^2$ , die das nicht erfüllen, ist die Abbildung nicht surjektiv.

- (e) Es ist nicht injektiv. Sei  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x$ . Dadurch definieren wir zwei Abbildungen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= h(x) \\ g(x) &= ih(x)\end{aligned}$$

Dann gilt  $f \neq g$ . Aber

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(f) &= \operatorname{Im}(g) = h \\ \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Re}(g) = 0\end{aligned}$$

also die zwei Funktionen werden auf die gleiche Funktion abgebildet.

Es ist aber surjektiv. Für jede  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g = f$ . Dann wird  $g$  auf  $f$  abgebildet.  $\square$

**Aufgabe 31.** Geben Sie je eine lineare Abbildung mit den folgenden Eigenschaften an. Sie müssen Ihre Aussagen ausnahmsweise nicht beweisen.

- (a)  $L_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $L(x) = x$  nur für  $x = (0, 0)$ .
- (b)  $L_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sodass  $L_2((1, 1, 1)) = L_2((1, 1, 0))$ .
- (c)  $L_3 : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t]$ , sodass  $\deg(L_3(p(t))) \geq 3\deg(p(t))$  für alle  $p \in \mathbb{Q}[t]$ .
- (d)  $L_3 : V \rightarrow V$ , die injektiv, aber nicht surjektiv ist, für einen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum Ihrer Wahl.
- (e)  $L_5 : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ , sodass es genau drei verschiedene Elemente  $x, y, z \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$  mit  $L_5(x) = L_5(y) = L_5(z) = (1, 0)$  gibt.

*Beweis.* (a)  $L_1((x, y)) = (2x, 2y)$  ist linear, aber  $L(x) = x$  nur für  $x = (0, 0)$ .

- (b) Projektor:  $L_2((x, y, z)) = (x, y)$ .

(c)  $p(t) \rightarrow p(t^3)$  (wie in 29)

(d) Für  $V = \mathbb{Q}[t]$ :  $L_5 : p(t) \rightarrow p(t)t$ . □

**Aufgabe 32.** Die folgenden linearen Abbildungen können jeweils auch in der Form  $x \rightarrow Ax$  mit einer Matrix  $A$  geschrieben werden. Bestimmen Sie für jede der Abbildungen eine geeignete Matrix.

(a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}.$$

(b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(c)  $f \circ g$ .

(d)  $g \circ f$ .

*Beweis.* (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir verifizieren es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Noch einmal können wir direkt verifizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(c) Die Matrixdarstellung ist nur das Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Noch einmal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Aufgabe 33.** Wir betrachten die Abbildung  $S_n : \mathbb{Q}[t]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$  mit  $p(t) \rightarrow p'(t) + \tilde{p}(0)t^n$ .

- (a) Beweisen Sie:  $S_n$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  linear.
- (b) Untersuchen Sie  $S_n$  auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.
- (c) Beweisen Sie:  $S_n^k(t^k) = k!$  und  $S_n^{n-k}(t^n) = n!/k!t^k$  für  $k = 0, \dots, n$ .
- (d) Folgern Sie:  $S_n^{n+1}(p(t)) = n!p(t)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p(t) \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ .

*Beweis.* (a) Sei  $q, p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} S_n(q+p) &= (q+p)'(t) + \widetilde{q+p}(0)t^n \\ &= q'(t) + p'(t) + \tilde{q}(0)t^n + \tilde{p}(0)t^n \\ &= (q'(t) + \tilde{q}(0)t^n) + (p'(t) + \tilde{p}(0)t^n) \\ &= S_n(q) + S_n(p). \end{aligned}$$

Sei außerdem  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} S_n(\lambda q) &= (\lambda q)'(t) + \widetilde{\lambda q}(0)t^n \\ &= \lambda q'(t) + \lambda \tilde{q}(0)t^n \\ &= \lambda (q'(t) + \tilde{q}(0)t^n) \\ &= \lambda S_n(q) \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben die Wirkung von  $S_n$  auf einem Polynom:

$$S_n : (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, a_0).$$

Daraus folgt die Injektivität und Surjektivität: Sei  $p = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  und  $q = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ . Wann ist  $S_n(p) = q$ ? Es gilt genau dann, wenn

$$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, a_0) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Dann ist es klar:  $a_1 = b_0, 2a_2 = b_1, \dots$ . Weil alle Koeffizienten noch rational sind, ist  $p$  in  $\mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ . Es folgt auch daraus, dass  $p$  eindeutig ist, also es ist injektiv.

(c) Wir zeigen es per Induktion: Sei  $k = 0$ . Dann ist  $t^0 = 1 = 0!$ . Wir nehmen jetzt an, dass für beliebiges  $\mathbb{N} \ni k < n$  gilt

$$S_n^k(t^k) = k!.$$

Dann betrachten wir

$$S_n^{k+1}(t^{k+1}) = S_n^k(S_n(t^{k+1}))$$

$$\begin{aligned}
&= S_n^k((k+1)t^k) \\
&= (k+1)S_n^k(t^k) \\
&= (k+1)k! \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

Wie beweisen die andere Behauptung per Rückwärtsinduktion. Es gilt, für  $k = n$ :

$$S_n^{n-n}(t^n) = S_n^0(t^n) = t^n = n!/k!t^k.$$

Dann nehmen wir an, dass es für  $1 \leq k \leq n$  gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
S_n^{n-(k-1)}(t^n) &= S_n(S_n^{n-k}(t^n)) \\
&= S_n(n!/k!t^k) \\
&= \frac{n!}{k!}S_n(t^k) \\
&= \frac{n!}{k!}kt^{k-1} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!}t^{k-1}
\end{aligned}$$

- (d) Wir schreiben ein beliebiges Polynom  $p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$  als Linearkombination von Potenzen von  $t$ . Für  $0 \leq k \leq n$  gilt

$$\begin{aligned}
S_n^{n+1}(t^k) &= S_n^{n-k}(S_n(S_n^k(t^k))) \\
&= S_n^{n-k}(S_n(k!)) \\
&= S_n^{n-k}(k!t^n) \\
&= k!S_n^{n-k}(t^n) \\
&= \frac{k!n!}{k!}t^k \\
&= n!t^k
\end{aligned}$$

Daraus folgt, für ein beliebiges Polynom  $p \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ :

$$\begin{aligned}
S_n^{n+1}p &= S_n^{n+1}(a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) \\
&= S_n^{n+1}(a_0) + S_n^{n+1}(a_1t) + \cdots + S_n^{n+1}(a_nt^n) \\
&= n!a_0 + n!a_1t + \cdots + n!a_nt^n \\
&= n!(a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) \\
&= n!p.
\end{aligned}$$

□

## 1.9 Blatt 10

**Aufgabe 34.** Die Fibonacci-Folge ist definiert durch  $f_0 := 0, f_1 := 1$  und  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Per Definition gilt

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Dann beweisen wir die Behauptung per Induktion. Weil  $M^0 = E_2$  für alle 2x2 Matrizen, gilt die Behauptung für  $n = 0$ . Jetzt nehmen wir an, dass es für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt. □

**Aufgabe 35.** Es sei  $A \in K^{n \times n}$  eine Matrix mit  $A^m = 0$ . Zeigen Sie: Dann gilt  $(E_n - A)(E_n + A + A^2 + \dots + A^{m-1}) = E_n$ .

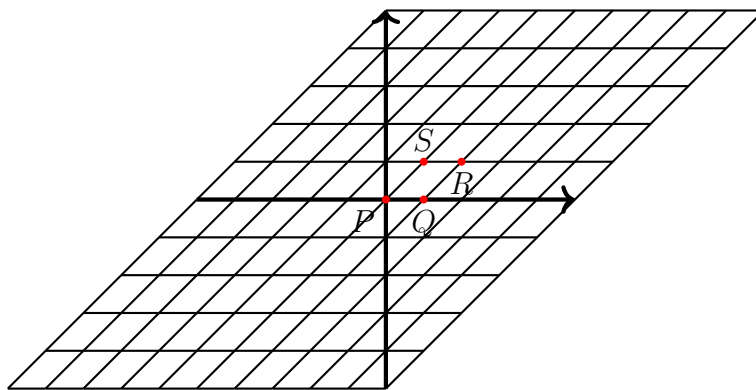
*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} (E_n - A)(E_n + A + \dots + A^{m-1}) &= E_n + A + \dots + A^{m-1} \\ &\quad - A - A^2 - \dots - A^m \\ &= E_n. \end{aligned} \quad \square$$

**Aufgabe 36.** Entscheiden Sie jeweils, ob es eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt, die die gegebenen Eigenschaften erfüllt. Entscheiden Sie zudem, ob diese eindeutig ist. Falls es genau eine solche Abbildung gibt, skizzieren Sie das Bild des Quadrates mit den Eckpunkten  $P = (0, 0)$ ,  $Q = (1, 0)$ ,  $R = (1, 1)$ ,  $S = (0, 1)$  unter dieser Abbildung in einem geeigneten Koordinatensystem. Sie müssen Ihre Skizze nicht begründen.

- (a) *fro* mit  $fro((1, 0)) = (1, 0)$  und  $fro((0, 1)) = (1, 1)$ .
- (b) *pa* mit  $pa((3, 6)) = (1, 1)$ ,  $pa((4, 7)) = (3, 4)$  und  $pa((7, 13)) = (9, 3/4)$ .
- (c) *hewe* mit  $hewe((1, 3)) = (2, 6)$ ,  $hewe((2, 3)) = (8, 12)$  und  $hewe((3, 6)) = (10, 18)$ .
- (d) *ihn* mit  $ihn((2, 4)) = (6, 16)$  und  $ihn((-1, 2)) = (-3, 4)$ .
- (e) *un* mit  $un((2, 3)) = (3, 4)$  und  $un((4, 6)) = (6, 8)$ .
- (f) *ach* mit  $ach((1, 0)) = (1, 0)$  und  $ach(3/5, -1/5) = (12/25, -4/25)$ .
- (g) *ten* mit  $ten((2, 4)) = (1, 2)$  und  $ten((1, 1)) = (2, 4)$

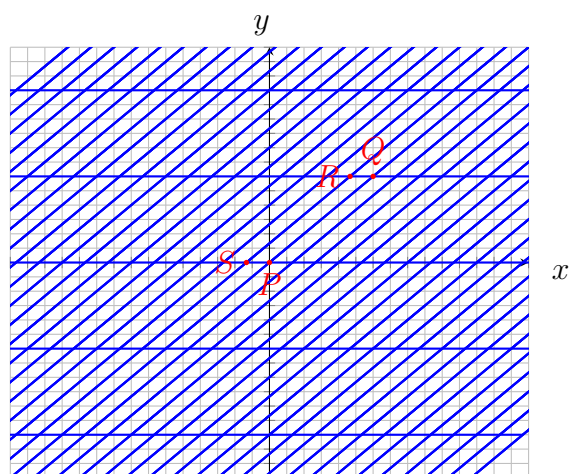
*Beweis.* (a) Es existiert und ist eindeutig.



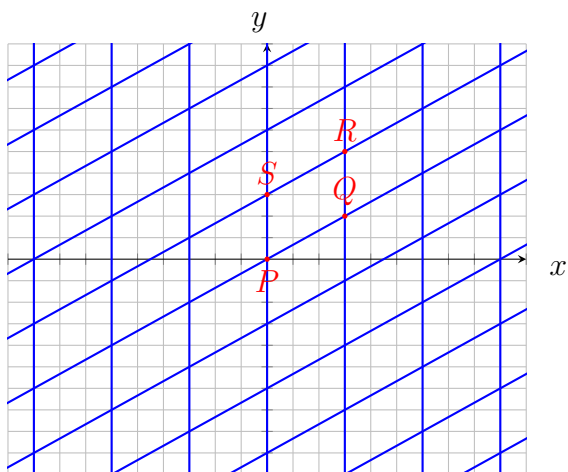
(b) Existiert nicht, weil

$$\begin{aligned}
 pa((3, 6)) &= (1, 1) \\
 pa((4, 7)) &= (3, 4) \\
 pa((3, 6) + (4, 7)) &= pa((7, 13)) \\
 &= (9, 3/4) \\
 &\neq (1, 1) + (3, 4) \\
 &= pa((3, 6)) + pa((4, 7))
 \end{aligned}$$

(c) Existiert und ist eindeutig

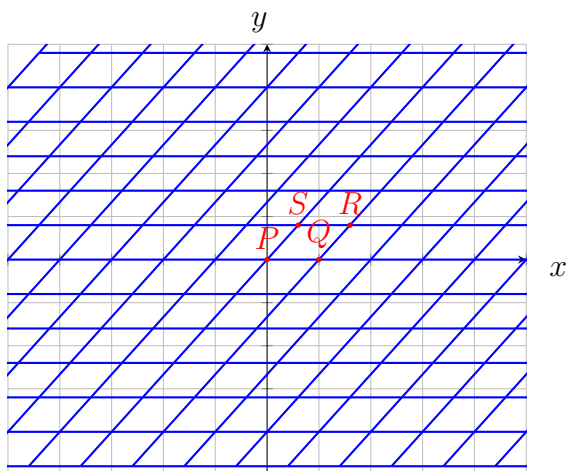


(d) Existiert und ist eindeutig.



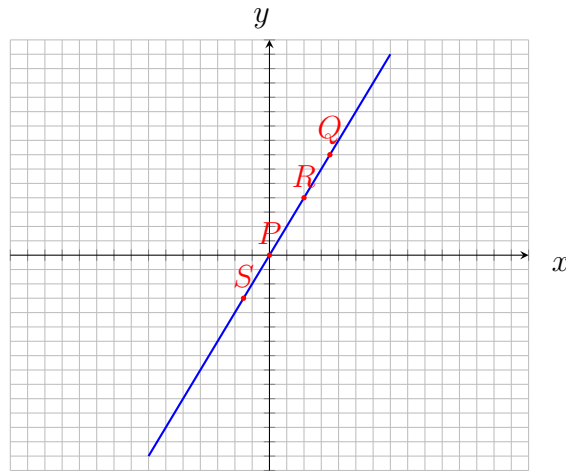
(e) Existiert, ist aber nicht eindeutig, weil die Wirkung auf einem 1-Dimensionalen Unterraum definiert ist.

(f) Existiert und ist eindeutig.



(g) Existiert und ist eindeutig





□

**Aufgabe 37.** Für einen Körper  $K$  und zwei quadratische, gleich große Matrizen  $A, B \in K^{n \times n}$  definieren wir den Kommutator  $[A, B]$  von  $A$  und  $B$  als  $[A, B] := AB - BA \in K^{n \times n}$ .

- (a) Berechnen Sie  $[A, B]$  für  $K = \mathbb{R}$ ,  $n = 3$  und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Finden Sie ein Beispiel für  $A \neq B$  mit  $[A, B] = 0$ , wobei  $A$  und  $B$  keine skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix sein sollen.

Es definiert also  $[\cdot, \cdot] : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K^{n \times n}$  eine Verknüpfung auf  $K^{n \times n}$ . Zeigen Sie:

- (c) Die Verknüpfung hat für kein  $n \in \mathbb{N}$  ein Linksneutrales, d.h. es existiert für kein  $E \in K^{n \times n}$  mit  $[E, A] = A$  für alle  $A \in K^{n \times n}$ .
- (d) Zeigen Sie für die Matrizen  $A, B$  aus Teilaufgabe (a)  $[[A, B], B] \neq 0$  und folgern Sie: Die Verknüpfung  $[\cdot, \cdot]$  ist für  $n = 3$  nicht assoziativ.

*Beweis.* (a) Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 8 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 10 & 9 & -14 \\ 5 & 4 & -8 \\ 8 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

- (b) Irgendeine skalare Vielfache gilt: Wenn  $A = kB$ , ist  $AB = kB^2 = BA$  und  $AB - BA = 0$ . Ein konkretes Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Sei  $A = E_n$ . Für alle Matrizen  $E \in K^{n \times n}$  gilt:

$$\begin{aligned} [E, E_n] &= EE_n - E_nE \\ &= E - E = 0 \neq E_n \end{aligned}$$

- (d) Es gilt

$$\begin{aligned} [A, B]B &= \begin{pmatrix} 11 & -14 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \\ 2 & -22 & 0 \end{pmatrix} \\ B[A, B] &= \begin{pmatrix} 35 & 31 & -50 \\ 20 & 17 & -30 \\ 35 & 30 & -52 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt ist es klar, dass  $[[A, B], B] \neq 0$ , weil die Matrizen ungleich sind.

Aber  $[A, [B, B]] = 0$ , weil  $[B, B] = B^2 - B^2 = 0$ . □

**Aufgabe 38.** Sind  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^m$ , dann nennen wir

$$P(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

das von  $v_1, \dots, v_n$  aufgespannte  $n$ -Parallelotop.

- (a) Zeigen Sie: Jedes Rechteck  $[0, a] \times [0, b] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  ist ein 2-Parallelotop und jeder Quader  $[0, a] \times [0, b] \times [0, c] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$  ist ein 3-Parallelotop.
- (b) Es sei  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch die Matrix

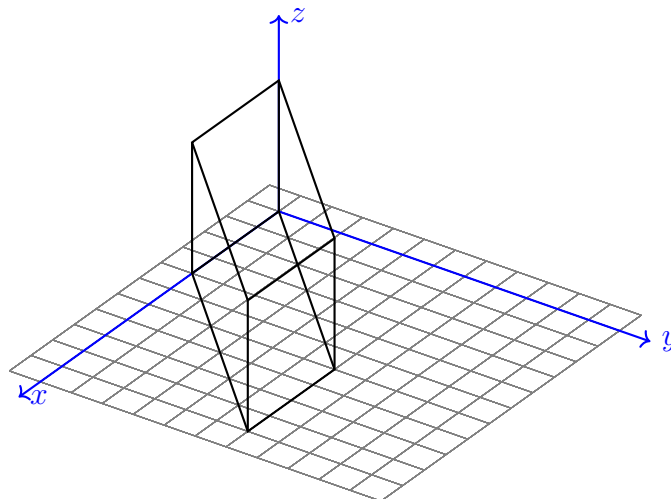
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie  $L([0, 2] \times [0, 3] \times [0, 1])$  in einem geeigneten Koordinatensystem. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

- (c) Zeigen Sie: Ist  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine bijektive lineare Abbildung und  $P(v_1, \dots, v_n)$  ein  $n$ -Parallelotop, dann ist  $\phi(P(v_1, \dots, v_n)) = P(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))$  und dies ist ein  $n$ -Parallelotop.
- (d) Es sei  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $p(x, y, z) = (x, y)$ . Bestimmen und skizzieren Sie  $p(P((1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 2, 1)))$ . Begründen Sie, dass dies kein Parallelotop ist.

*Beweis.* (a) Per Definition ist  $[0, 1] \times [0, 1] = P((a, 0), (0, 1))$  und  $[0, a] \times [0, b] \times [0, c] = P((a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c))$ .

(b)



(c) Es gilt wegen Linearität

$$\phi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \phi(v_1) + \dots + \lambda_n \phi(v_n),$$

also

$$\phi(P(v_1, \dots, v_n)) = P(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)).$$

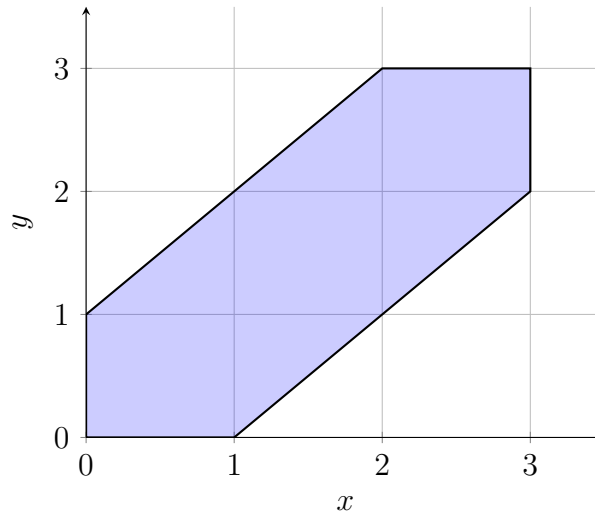
Es bleibt linear Unabhängigkeit zu zeigen. Per Definition müssen  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig sein. Alle  $v_1, \dots, v_n$  sind unterschiedlich und ungleich null, weil  $\phi$  bijektiv (insbesondere injektiv) ist. Falls  $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$  linear abhängig wäre, wäre

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \phi(v_1) + \dots + a_n \phi(v_n) \\ &= \phi(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \end{aligned} \quad \text{Linearität}$$

Weil  $\phi$  bijektiv ist, ist deren Kern trivial und  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ , was nur möglich ist, wenn  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . Daraus folgt:  $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$  sind linear unabhängig und die Behauptung folgt.

(d) Sei  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (2, 2, 1)$ . Weil  $p$  linear ist, ist

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_3 v_3) &= \lambda_1 p(v_1) + \dots + \lambda_3 p(v_3) \\ &= \lambda_1 (1, 0) + \lambda_2 (0, 1) + \lambda_3 (2, 2) \end{aligned}$$



Es ist klar, dass die Menge entweder ein 1 oder 2-Parallelotop sein kann, weil es keine 3 linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^2$  gibt. Ein 1-Parallelotop ist eine Teilmenge  $P(v) \subseteq \text{span}v$ , also die Menge ist kein 1-Parallelotop.

Dann muss es ein 2-Parallelotop sein. Aber das ist auch unmöglich, weil 2-Parallelotops Dreiecke sind, also die Menge ist kein Parallelotop.  $\square$

**Aufgabe 39.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Wir betrachten den Vektorraum  $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$ .

- (a) Zeigen Sie: Ist  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$ , dann wird für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  durch  $b_i^*(b_j) := \delta_{ij}$  für  $j = 1, \dots, n$  eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung festgelegt.
- (b) Zeigen Sie:  $(b_1^*, \dots, b_n^*)$  ist ein Erzeugendensystem von  $V^*$ ,
- (c) Zeigen Sie:  $(b_1^*, \dots, b_n^*)$  ist linear unabhängig.

Sei  $W$  ein weiterer endlich dimensionaler Vektorraum mit Basis  $(\beta_1, \dots, \beta_m)$  und  $L : V \rightarrow W$  linear.

- (d) Zeigen Sie: Die Abbildung  $L^* : W^* \rightarrow V^*$  mit  $\omega \rightarrow \omega \circ L$  ist linear.
- (e) Die Abbildung  $L$  habe bezüglich der Basen  $(b_1, \dots, b_n)$  und  $(\beta_1, \dots, \beta_m)$  die Darstellungsmatrix  $A$ . Zeigen Sie, dass  $L^*$  bezüglich der Basen  $(\beta_1^*, \dots, \beta_m^*)$  und  $(b_1^*, \dots, b_n^*)$  die Darstellungsmatrix  $A^T$  hat.

*Beweis.* (a) Die Wirkung auf einem Vektor ist eindeutig bestimmt. Sei  $v \in V$  mit Basisdarstellung  $v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 b_i^*(v) &= b_i^*(v_1 b_1 + \dots + v_n b_n) \\
 &= v_1 b_i^*(b_1) + \dots + v_n b_i^*(b_n) && \text{Linearität} \\
 &= v_i
 \end{aligned}$$

(b) Sei  $v^* \in V^*$ , also eine lineare Abbildung  $V \rightarrow K$ .

Wir setzen  $a_i = v^*(b_i) \in K$ . Das Ziel ist:

$$v^* = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*.$$

Sei  $V \ni v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i^* \right) (v) &= \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i^* \right) \left( \sum_{j=1}^n v_j b_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i v_j b_i^*(b_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i v_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^n v_i v^*(b_i) \\ &= v^* \left( \sum_{i=1}^n v_i b_i \right) \\ &= v^*(v). \end{aligned}$$

Weil  $v$  beliebig war, ist  $v^* \in \text{span}(b_1^*, \dots, b_n^*)$ . Weil  $v^*$  beliebig war, ist es ein Erzeugendensystem.

(c) Sei  $\lambda_1 b_1^* + \dots + \lambda_n b_n^* = 0$ . Wir wenden die Gleichung auf einem Basisvektor  $b_i$  an. Die rechte Seite ist natürlich 0. Die linke Seite ist

$$(\lambda_1 b_1^* + \dots + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \lambda_i = 0.$$

Daraus folgt:  $\lambda_i = 0$  für alle  $i$ .

(d) Sei  $k \in K$ ,  $\omega \in W^*$  und  $v \in V$ . Es gilt

$$\begin{aligned} (L^*(a\omega))v &= a\omega(L(v)) \\ &= a(\omega(L(v))) \\ &= a(L^*(\omega)(v)) \end{aligned}$$

Weil  $v$  beliebig war, ist

$$L^*(a\omega) = aL^*(\omega).$$

Sei jetzt  $\omega_1, \omega_2 \in W^*$ . Es gilt

$$L^*(\omega_1 + \omega_2)(v) = (\omega_1 + \omega_2)(L(v))$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_1(L(v)) + \omega_2(L(v)) \\
&= (L^*(\omega_1) + L^*(\omega_2))(v)
\end{aligned}$$

also

$$L^*(\omega_1 + \omega_2) = L^*(\omega_1) + L^*(\omega_2).$$

- (e) Es gilt  $L^*(\beta_i^*) = \beta_i^* \circ L$ . Wir möchten diese als linear Kombination von  $b_j^*$  darstellen. Sei die Matrixdarstellung von  $L^*$   $B$ , also

$$\beta_i^* \circ L = \sum_{j=1}^n B_{ji} b_j^*.$$

Wir wenden die Gleichung auf  $b_k$  an und erhalten, weil  $b_j^*(b_k) = \delta_{jk}$

$$\beta_i^*(L(b_k)) = B_{ki}.$$

Aus der Matrixdarstellung erhalten wir  $L(b_k) = \sum_{i=1}^m A_{ik} \beta_i$ . Daraus folgt:

$$\beta_i^* \left( \sum_{j=1}^m A_{jk} \beta_j \right) = A_{ik} = B_{ki}.$$

Weil für die Komponente der Matrizen  $A$  und  $B$  gilt  $A_{ik} = B_{ki}$ , ist  $B = A^T$ .  $\square$

## 1.10 Blatt 11

## 1.11 Blatt 12

**Aufgabe 40.** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Determinante von  $A$  und  $B$  mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.
- Bestimmen Sie die Determinante von  $A$  und  $B$  direkt mit der Leibnizformel.
- Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Methoden. Welche würden Sie bevorzugen? Hängt Ihre Antwort von der Struktur der Matrix ab?

*Beweis.* (a)

$$\begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times 5} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 10 & -40 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & -9 & 60 & -180 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & -9 & 60 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{R_3+3R_2} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Als obere Dreiecksmatrix hat die Matrix am Ende die Determinante  $10(3)(-3)(3) = -270$ . Weil wir im ersten Schritt durch 5 multipliziert haben, ist das genau 5 mal die gewünschte Determinante, also  $\det A = -270/5 = -54$ .

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{R_4+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ähnlich ist die Determinante der Matrix am Ende  $1(-3)(-1)(2) = 6$ . Da wir keine Operationen gemacht haben, die die Determinante verändern, ist das die gewünschte Determinante.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\det A = & A_{1,4}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,1} - A_{1,3}A_{2,4}A_{3,2}A_{4,1} \\
& - A_{1,4}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,1} + A_{1,2}A_{2,4}A_{3,3}A_{4,1} \\
& + A_{1,3}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,1} - A_{1,2}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,1} \\
& - A_{1,4}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,2} + A_{1,3}A_{2,4}A_{3,1}A_{4,2} \\
& + A_{1,4}A_{2,1}A_{3,3}A_{4,2} - A_{1,1}A_{2,4}A_{3,3}A_{4,2} \\
& - A_{1,3}A_{2,1}A_{3,4}A_{4,2} + A_{1,1}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,2} \\
& + A_{1,4}A_{2,2}A_{3,1}A_{4,3} - A_{1,2}A_{2,4}A_{3,1}A_{4,3} \\
& - A_{1,4}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,3} + A_{1,1}A_{2,4}A_{3,2}A_{4,3} \\
& + A_{1,2}A_{2,1}A_{3,4}A_{4,3} - A_{1,1}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,3} \\
& - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}A_{4,4} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,4} \\
& + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,4} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,4} \\
& - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3}A_{4,4} + A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + 0 - 307440 + 0 + 302400 \\
&\quad + 0 + 0 + 0 + 238266 + 0 - 234360 \\
&\quad + 0 + 0 + 0 + 65880 + 0 + 234360 \\
&\quad - 302400 + 0 + 0 - 64800 + 0 \\
&\quad - 234360 + 302400 = -54
\end{aligned}$$

Ähnlich für  $B$ , aber weil in der letzten Zeile eine nicht null Zahl nur im dritten Spalte entsteht, trägt nur Permutationen  $\sigma$  mit  $\sigma(4) = 4$  bei. Dann gibt es nur zwei Terme in der Summe, die die Permutationen  $(3, 4)$  und  $(1, 2)(3, 4)$  entsprechen.

$$\det B = 12 - 6 = 6.$$

- (c) Für  $A$  habe ich mehr Arbeit gebraucht, durch die Leibnizformel die Determinante zu berechnen. Für  $B$  ist es anders.

Für Matrizen mit vielen null Elementen würde ich daher mit der Leibnizformel die Determinante zu berechnen, sonst würde ich Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden.  $\square$

**Aufgabe 41.** E sei  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch  $x \rightarrow Ax$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ -96 & 268 & -63 \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix}$$

sowie  $B := (b_1, b_2, b_3) := ((13, 6, 4), (10, 6, 10), (6, 8, 24))$ .

- Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante, dass  $B$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  ist.
- Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix  $C = T_B^E$ , wobei  $E$  die Standardbasis ist (Notation wie in 3.5.2)
- Bestimmen Sie  $C^{-1}$  und berechnen Sie  $CAC^{-1}$ .
- Geben Sie die Darstellungsmatrix von  $L$  bezüglich der Basis  $B$  an.
- Bestimmen Sie  $\det(A)$ ,  $\det(C)$ ,  $\det(C^{-1})$  und  $\det(CAC^{-1})$ , ohne den Determinantenmultiplikationssatz zu verwenden. Verifizieren Sie damit für diesen Spezialfall Folgerung 4.3.6 und Satz 4.3.7.

*Beweis.* (a) Die Vektoren  $(b_1, b_2, b_3)$  sind linear unabhängig genau dann, wenn  $\det B \neq 0$ . Wir berechnen die Determinante

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{7}{3}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 14 & 14 & \frac{56}{3} \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \\
&\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times \frac{7}{2}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 14 & 35 & 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1}
\end{aligned}$$



$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 0 & 25 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{25}{4}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 25 & \frac{475}{6} \\ 0 & 25 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 25 & \frac{475}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

deren Determinante ungleich null ist. Daher ist  $\det B \neq 0$ , und die Vektoren sind linear unabhängig. Da wir 3 linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^3$  haben, wobei  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ , sind die Vektoren eine Basis.

(b) Es gilt

$$C^{-1} := T_E^B = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix}.$$

Da  $T_B^E = (T_E^B)^{-1}$ , berechnen wir die inverse Matrix.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 14 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \times \frac{1}{14}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 6R_1} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 4R_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{156}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times \frac{25}{6}} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{7} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{156}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{7} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{10}R_2} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{7} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times \frac{7}{50}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \times -3} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - \frac{19}{6}R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + \frac{11}{6}R_3} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

also

$$C = \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

(c)  $C^{-1}$  wurde schon in (b) gegeben. Durch direkte Rechnung erhalten wir

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Darstellungsmatrix ist genau  $CAC^{-1}$ .

(e)  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ -96 & 268 & -63 \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{96}{7}R_1} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ -400 & 1110 & -263 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 + \frac{400}{7}R_1} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ 0 & \frac{1770}{7} & \frac{159}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{885}{218}R_2} \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ 0 & \frac{436}{7} & \frac{39}{7} \\ 0 & 0 & \frac{21}{218} \end{pmatrix}$$

also  $\det(A) = 7(436/7)(21/218) = 42$ . Für  $C$  gilt:

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \times 3} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 7} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 42 & 42 & 56 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times \frac{21}{2}} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 42 & 105 & 252 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 0 & 75 & 234 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times 4} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 12 & 38 \\ 0 & 300 & 936 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 25} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 300 & 950 \\ 0 & 300 & 936 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 42 & 30 & 18 \\ 0 & 300 & 950 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

also  $\det(C) = -8$ . Für  $C^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{7}{4}R_1} \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{9}{16}R_1} \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{5}{32} & \frac{3}{32} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \frac{5}{12}R_2} \begin{pmatrix} -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

also  $\det(C^{-1}) = -1/8$ . Zuletzt ist  $\det(CAC^{-1}) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ .  $\square$ 

**Aufgabe 42.** In dieser Aufgabe sei stets  $D : \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow K$  eine Abbildung, die linear in jeder Spalte ist, d.h. Eigenschaft 1 von Definition 4.2.1 erfüllt.

- (a) Zeigen Sie: Ist die Charakteristik von  $K$  nicht 2, dann ist  $D$  genau dann alternierend, wenn für  $D$  die Aussage 3 von Satz 4.2.2, also

“Entsteht  $B$  aus  $A$  durch Vertauschung zweier Spalten, so ist  $D(B) = -D(A)$ .”

gilt. Diese Eigenschaft nennt man auch “schiefsymmetrisch”

- (b) Zeigen Sie: Die Abbildung  $D_1 : \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  mit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow ab + cd$  ist linear in jeder Spalte und schiefsymmetrisch, aber nicht alternierend.

- (c) Zeigen Sie: Für jedes  $k \in K$  gibt es genau eine Abbildung  $D : \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow K$ , die linear in jeder Spalte und alternierend ist und zusätzlich  $D(E_n) = k$  erfüllt. Diese ist gegeben durch die Abbildungsvorschrift  $D(A) = k \det(A)$ .

*Beweis.* (a) Die Rückrichtung ist trivial. Angenommen  $A$  hat zwei gleiche Spalten.  $B$  entstehe aus  $A$  durch die Vertauschung dieser Spalten. Deswegen gilt  $B = A$ . Aber  $D(B) = D(A) = -D(A)$ , oder  $2D(A) = 0$ . Da die Charakteristik nicht 2 ist, impliziert dies  $D(A) = 0$ .

Sei jetzt  $D$  alternierend. Sei  $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$ .  $B$  entstehe aus  $A$  durch die Vertauschung zweier Spalten. Sei die Spalten  $v_1, v_2$ . Da die anderen Spalten fest sind, bezeichnen wir  $f(v_1, v_2) := D(\dots, v_1, v_2, \dots)$ .  $f$  ist auch linear in  $v_1$  und  $v_2$ . Außerdem ist  $D(A) = f(v_1, v_2)$  und  $D(B) = f(v_2, v_1)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2, v_1 + v_2) &= 0 && D \text{ ist alternierend} \\ &= f(v_1, v_1) + f(v_1, v_2) + f(v_2, v_1) + f(v_2, v_2) && \text{Linearität} \\ &= f(v_1, v_2) + f(v_2, v_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$D(A) = f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1) = -D(B).$$

- (b) Linearität: Es gilt

$$D_1 \left( \begin{pmatrix} ka & b \\ kc & d \end{pmatrix} \right) = k(ab + cd) = D_1 \left( \begin{pmatrix} a & kb \\ c & kd \end{pmatrix} \right).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &D_1 \left( \begin{pmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{pmatrix} \right) \\ &= (a + a')b + (c + c')d \\ &= (ab + cd) + (a'b + c'd) \\ &= D_1 \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) + D_1 \left( \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &D_1 \left( \begin{pmatrix} a & b + b' \\ c & d + d' \end{pmatrix} \right) \\ &= a(b + b') + c(d + d') \\ &= (ab + cd) + (ab' + cd') \\ &= D_1 \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) + D_1 \left( \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

also  $D_1$  ist linear.  $D_1$  ist auch schiefssymmetrisch, da

$$D \left( \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \right) = ab - cd.$$

Aber  $ab - cd = -(ab - cd)$ , weil es nur 2 Elemente in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  gibt, und für alle Elemente  $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  gilt  $x + x = 0$ . Dann ist  $D_1$  schiefsymmetrisch.  $D_1$  ist jedoch nicht alternierend.

$$D_1 \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

□

## 1.12 Blatt 13

**Aufgabe 43.** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Determinante von  $B$  direkt mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz
- Bestimmen Sie die Determinante von  $A$  einmal, indem Sie den Laplace'schen Entwicklungssatz direkt anwenden, und einmal, indem Sie vorher eine geschickte Zeilenumformung durchführen.
- Wie verhält es sich mit dem Aufwand jetzt gegenüber letzter Woche? Beschreiben Sie eine Strategie zum geschickten Berechnen von Determinanten bei Matrizen geeigneter Struktur.

*Beweis.* (a) Laplaceentwicklung durch die vierte Spalte:

$$\begin{aligned} \det(B) &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2(1)(3 - 6) \\ &= 6 \end{aligned}$$

(b) Laplaceentwicklung durch die dritte Zeile

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \begin{vmatrix} -31 & -60 & 180 \\ 3 & -21 & 63 \\ -31 & -60 & 183 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 10 & -60 & 180 \\ 0 & -21 & 63 \\ 10 & -60 & 183 \end{vmatrix} \\ &= (-31) \begin{vmatrix} -21 & 63 \\ -60 & 183 \end{vmatrix} + 60 \begin{vmatrix} 3 & 63 \\ -31 & 183 \end{vmatrix} + 180 \begin{vmatrix} 3 & -21 \\ -31 & -60 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-31)(-63) + 60(2502) + 180(-311) \\
&= 2493
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 10 & -60 & 180 \\ 0 & -21 & 63 \\ 10 & -60 & 183 \end{vmatrix} &= 10 \begin{vmatrix} -21 & 63 \\ -60 & 183 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} -60 & 180 \\ -21 & 63 \end{vmatrix} \\
&= -630
\end{aligned}$$

$$\det(A) = -54$$

Jetzt führen wir eine Zeilenumformung durch.

$$\begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laplaceentwicklung durch die dritte Zeile:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 3 \begin{vmatrix} 10 & -31 & -60 \\ 0 & 3 & -21 \\ 2 & -8 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 3(10) \begin{vmatrix} 3 & -21 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} + 3(2) \begin{vmatrix} -31 & -60 \\ 3 & -21 \end{vmatrix} \\
&= -3(10)(21 \cdot 8) + 3(2)(31 \cdot 21 + 60 \cdot 3) \\
&= -54
\end{aligned}$$

- (c) Die Arbeit ist einfacher. Man sollte, wenn möglich, die Zeilen bzw. Spalten umformen, bis eine Zeile bzw. Spalte so viel wie möglich null Einträge hat.  $\square$

**Aufgabe 44.** Es sei  $K$  ein Körper. Für eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$  und  $k \leq n$  bezeichnen wir mit  $A[1 : k, 1 : k]$  die Untermatrix von  $A$ , die aus den ersten  $k$  Spalten der ersten  $k$  Zeilen besteht, dh. für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

wäre

$$A[1 : 2, 1 : 2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

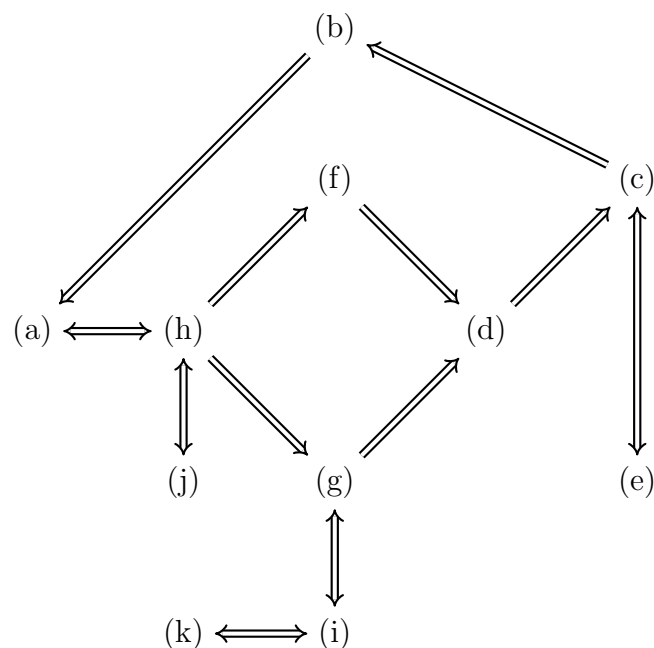
- (a) Beweisen Sie: Sind  $L, R, D \in \text{Mat}(n \times n, K)$  der Reihe nach eine linke untere Dreiecksmatrix mit ausschließlich Einsen auf der Diagonalen, eine rechte obere Dreiecksmatrix mit ausschließlich Einsen auf der Diagonalen und eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge alle  $\neq 0$  sind, dann gilt für  $A = LDR$  und alle  $k = 1, \dots, n$   $\det(A[1 : k, 1 : k]) \neq 0$ .

- (b) Beweisen Sie: Ist  $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$  eine Matrix, für die für alle  $k \leq n$   $\det(A[1 : k, 1 : k]) \neq 0$  gilt, dann gibt es eine linke untere Dreiecksmatrix  $L$  mit ausschließlich Einsen auf der Diagonalen, eine rechte obere Dreiecksmatrix  $R$  mit ausschließlich Einsen auf der Diagonalen und eine Diagonalmatrix  $D$ , deren Diagonaleinträge alle  $\neq 0$  sind, sodass  $A = LDR$  gilt.
- (c) Erklären Sie, was dieses Resultat mit elementaren Zeilenumformungen zu tun hat.

**Aufgabe 45.** Es sei  $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$  eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (a)  $A$  ist invertierbar.  
 (b)  $\det(A) \neq 0$ .  
 (c) Die Spalten von  $A$  sind linear unabhängig.  
 (d) Der Rang von  $A$  ist  $n$ .  
 (e) Die Zeilen von  $A$  sind linear unabhängig.  
 (f) Die Abbildung  $L_A : K^n \rightarrow K^n, x \rightarrow Ax$  ist surjektiv.  
 (g) Die Abbildung  $L_A$  ist injektiv.  
 (h) Die Abbildung  $L_A$  ist bijektiv.  
 (i) Es gilt  $\ker(A) = \{0\}$ .  
 (j) Jedes Gleichungssystem der Form  $Ax = b$  mit  $b \in K^n$  ist eindeutig lösbar.  
 (k) Es gilt  $Ax = 0$  nur für  $x = 0$ .

*Beweis.* Hier ist der Plan



1. Per Definition ist  $A$  invertierbar genau dann, wenn die Abbildung invertierbar ist. Abbildungen sind invertierbar genau dann, wenn die bijektiv sind.
2. Bijektive Abbildungen sind sowohl injektiv als auch surjektiv.
3. Per Definition ist der Rang die Dimension des Bildraums. Sei jetzt die Abbildung surjektiv. Dann ist  $\text{Bild}(L_A) = K^n$  mit dimension  $n$ , also (f)  $\implies$  (d).
4. Sei jetzt  $L_A$  injektiv. Dann ist  $\dim(L_A(K^n)) = \dim(K^n) = n$ , also Dimension des Bilds ist gleich Dimension des Definitionsbereiches.
5. Rang ist  $n$  genau dann, wenn die Spalten linear unabhängig sind (Zeilenstufenform).
6. Spalten sind linear unabhängig genau dann wenn Zeilen linear unabhängig sind (Zeilenrang = Spaltenrang, im Skript).
7. Per letzte Übungsblatt: Linear unabhängige Spalten  $\implies \det(A) \neq 0$ .
8. (g)  $\iff$  (i) per Satz 5.3.10 (Homomorphiesatz).
9. (i)  $\iff$  (k) per Definition des Kerns.
10. Bijektivität liefert eine eindeutige Lösung. Surjektivität liefert eine Lösung, Injektivität liefert Eindeutigkeit.  $\square$

**Aufgabe 46.** Es sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Sind  $U, V \subseteq V$  Unterräume mit  $U \not\subseteq W$  und  $W \not\subseteq U$ , dann ist  $U \cup W$  kein Unterraum von  $V$ .
- (b) Sind  $U, W \subset V$  Unterräume mit  $\dim(U) = \dim(W) = 2$  und gilt  $\dim(V) = 3$ , dann gilt  $U = W$  oder  $\dim(U \cap W) = 1$ .
- (c) Sind  $U, W$  Unterräume von  $V$  und sind  $\phi : U \rightarrow K, \psi : W \rightarrow K$  lineare Abbildungen, dann gibt es eine lineare Abbildung  $\Psi : U + W \rightarrow K$  mit  $\Psi(u) = \phi(u)$  für alle  $u \in U$  und  $\Psi(w) = \psi(w)$  für  $w \in W$ .
- (d) Ist  $U \subseteq V$  ein Unterraum, dann gibt es genau einen Unterraum  $W \subseteq V$  mit  $U \oplus W = V$ .

*Beweis.* (a) Wahr. Per Definition gibt es  $u \in U$ , aber  $u \notin W$  und  $w \in W$ , aber  $w \notin U$ . Falls  $U \cup W$  ein Unterraum wäre, würde  $u + w \in U \cup W$ , also entweder  $u + w \in U$  oder  $u + w \in W$ . Sei  $u + w = v \in U$ . Dann gilt  $w = v - u \in U$ , also  $w \in U$ , ein Widerspruch. Analog bekommt man ein Widerspruch falls  $u + v \in W$ .

- (b) Wahr. Aus  $U \cap W \subseteq U$  gilt  $\dim(U \cap W) \leq 2$ . Wenn es 2 wäre, ist  $U = U \cap W$ . Daraus folgt:  $U = W$ .

Wir müssen daher nur den Fall  $\dim(U \cap W) = 0$  ausschließen. In diesem Fall: Sei  $u_1, u_2$  eine Basis von  $U$  sowie  $w_1, w_2$  eine Basis von  $W$ . Da  $\dim(U \cap W) = 0$ , ist  $U \cap W = \{e\}$  und  $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$  ist linear unabhängig. Dadurch haben wir 4 linear unabhängige Vektoren in einem Raum mit Dimension 3, ein Widerspruch.

- (c) Falsch. Sei  $U = W$  und  $U \ni V \in W$ . Sei jetzt  $\phi(u) \neq \psi(u)$ . Dann kann nicht gleichzeitig  $\phi(u) = \Psi(u)$  und  $\psi(u) = \Psi(u)$  gelten.
- (d) Falsch. Sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $U = \text{span}((1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T)$ . Wir betrachten  $V = \text{span}((0, 0, 1)^T)$  und  $V' = \text{span}((0, 1, 1)^T)$ .

Es ist klar, dass  $V \cap U = V' \cap U = \{(0, 0, 0)\}$ , also die direkte Summe ist wohldefiniert. Per Definition ist  $\mathbb{R}^3 = V \oplus U$ . Jedoch gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V'} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in V}$$

also  $(0, 0, 1)^T \in V' \oplus U$ . Daraus folgt, dass  $V \oplus U \subseteq V' \oplus U$ . Dann ist  $V' \oplus U = \mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Aufgabe 47.** Es sei  $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ .

- (a) Bestimmen Sie alle eindimensionalen Unterräume von  $V$ .
- (b) Bestimmen Sie anschließend für alle eindimensionalen Unterräume  $U, W \subseteq V$  mit  $U \neq W$  den Rang  $U \oplus W$ .
- (c) Begründen Sie, dass Sie nun alle ein- und zweidimensionalen Unterräume von  $V$  gefunden haben.
- (d) Visualisieren Sie die Struktur der Unterräume, indem Sie für jeden Unterraum einen Punkt in der Ebene festlegen und zwei Unterräume  $U, V$  genau dann mit einem Pfeil  $U \rightarrow W$  verbinden, wenn  $U \subset W$  gilt.
- (e) Wie können Sie anhand Ihres Bildes  $U \cap W$  bzw.  $U + W$  ablesen?

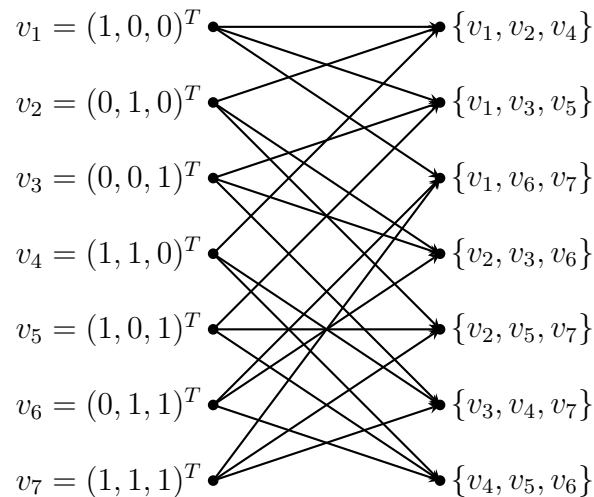
*Beweis.* (a) So ein Unterraum enthält zumindest ein Vektor, der nicht null ist. Weiter muss der Unterraum gleich der Span des Vektors sein. Da der Körper  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist, enthält er nur 2 Elemente, 1 und 0. Sei  $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . Dann ist  $1v = v$  und  $0v = 0$ , also ein 1-dimensionaler Unterraum enthält ein Vektor und der Nullvektor.

Dann gibt es, für alle  $v \in V$ , ein Unterraum  $\{0, v\}$  der Dimension 1.

- (b) Wir betrachten  $v, w \in V$  mit  $v \neq 0$  und die entsprechenden Unterräume  $V$  bzw.  $W$ . Der Unterraum enthält  $v+w$ , also er enthält mindestens  $\{0, v, w, v+w\}$ . Dies ist aber alles. Die Vektoren erzeugen keine neuen Vektoren, da  $v+v = w+w = 0$  und daraus  $(v+w) + v = v + v + w = w$  usw.



- (c) In (a) wurde es schon begründet, warum alle eindimensionale Unterräume hier sind. Die zweidimensionalen Unterräume müssen durch 2 Vektoren gespannt werden, z.B.  $u$  und  $w$ . Wir können dann den Unterraum als direkte Summe von den entsprechenden Unterräumen konstruieren.
- (d) In der Legende schreiben wir nur die nicht null Vektoren, es versteht sich also, dass die Unterräume den Nullvektor enthalten.



- (e)  $U \cap W$ : Wir suchen die Punkte, die einen auf sowohl  $U$  als auch  $W$  gerichteten Pfeil haben.
- $U + W$ : Wir suchen Pfeile von  $U$  und  $W$ , die sich auf dem gleichen Punkt richten. Das Punkt ist also  $U + W$ .  $\square$



## Analysis 2

Ich habe die Übungen für Analysis 2 mit Lukas Then gemacht.

### 2.1 Blatt 1

**Aufgabe 48.** Berechnen Sie Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)  $f(x) = \frac{\arctan \sin x^2}{e^{1-x}}$  für  $x \in \mathbb{R}$

(b)  $g(x) = x^{(x^x)}$  für  $x > 0$

(a)

$$f(x) = e^{x-1} \arctan \sin x^2.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} \frac{d}{dx} \arctan \sin x^2 + (\arctan \sin x^2) \frac{d}{dx} e^{x-1} \\ &= \frac{e^{x-1}}{1 + \sin^2 x^2} \frac{d}{dx} \sin x^2 + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \frac{d}{dx} (x - 1) \\ &= \frac{e^{x-1}}{1 + \sin^2 x^2} (\cos x^2)(2x) + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \\ &= \frac{2x \cos x^2 e^{x-1}}{1 + \sin^2 x^2} + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{(x^x)} \\ \ln g(x) &= x^x \ln x \end{aligned}$$

**Lemma 2.1.**

$$\begin{aligned} h(x) &:= x^x \\ h'(x) &= x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

*Beweis.*

$$\ln h(x) = x \ln x.$$

$$\frac{d}{dx} \ln h(x) = \frac{d}{dx} (x \ln x)$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \ln x + 1$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= h(x) (1 + \ln x) \\ &= x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

□

Man kann  
auch  
 $x^x = e^{x \ln x}$   
verwenden  
und  
Kettenregeln  
benutzen.

Dann gilt

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{d}{dx} (x^x \ln x)$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} x^x + (\ln x) \frac{d}{dx} (x^x)$$

$$= \frac{x^x}{x} + (\ln x) x^x (1 + \ln x)$$

$$g'(x) = g(x) x^x \left[ \frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]$$

$$= x^{x^x+x} \left[ \frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]$$

$$= x^{x^x+x-1} [1 + x \ln x + x \ln^2 x]$$

**Aufgabe 49.** Untersuchen Sie, für welche Argumente des Definitionsbereiches die folgenden Funktionen differenzierbar sind:

(a)  $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

(b)  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(c)  $h(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$

- (a) Für  $x_0 \neq 0$  gibt es eine Umgebung auf  $x_0$ , worin  $|x| = x$  oder  $|x| = -x$ . Dann ist die Ableitung von  $|x|$  gleich mit die Ableitung von entweder  $x$  oder  $-x$ , also  $f'(x_0)$  existiert für  $x_0 \neq 0$ .

Für  $x_0 = 0$  gilt  $|0| = 0$ , und auch

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

Weil die beide ungleich sind, existiert die Grenzwert und daher auch die Ableitung nicht.

- (b) Sei  $x_0 \neq 0$  und  $y_0 = x_0^2$ . Dann für  $0 < \epsilon < y_0$  existiert keine  $\delta > 0$ , sodass  $|x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$ .

Beweis: Es gibt zwei Fälle:

- (i)  $x_0 \in \mathbb{Q}$ . Dann in jeder offenen Ball  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  gibt es ein Zahl  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , also  $|g(x) - g(x_0)| = g(x) = y_0 > \epsilon$
- (ii) Sei  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann in jeder offenen Ball  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  gibt es ein Zahl  $x \in \mathbb{Q}$ , also  $|g(x) - g(x_0)| = g(x) > y_0 > \epsilon$

Sei  $x_0 = 0$ . Dann gilt  $g(x_0) = 0$ , und auch:

- (i)  $x \in \mathbb{Q}$ , also

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x$$

- (ii) oder  $x \notin \mathbb{Q}$ , also

$$g(x) - g(0) = 0 - 0 = 0 \implies \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

Deshalb ist

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

- (c) Zu berechnen:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Sei  $z = z_0 + x, x \in \mathbb{R}$ . Dann, falls die Grenzwert existiert, ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + x - z_0}}{z_0 + x - z_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sei jetzt  $z = z_0 + ix, x \in \mathbb{R}$ . Falls die Grenzwert existiert ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + ix - z_0}}{z_0 + ix - z_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{ix}}{ix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ix}{ix} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Weil das Grenzwert, wenn durch zwei Richtungen berechnet wurde, ungleich ist, existiert das Grenzwert nicht (für alle  $z \in \mathbb{C}$ )

**Aufgabe 50.** Man zeige, dass die Gleichung

$$x = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

auf  $[0, 1]$  genau eine Lösung besitzt.

Sei  $f(x) = x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ . Dann ist die Gleichung gleich  $f(x) = 0$ .  $f(x)$  ist auf  $[0, 1]$  stetig, und auf  $(0, 1)$  differenzierbar.

$$f(0) = 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 1 - 0 = 1$$

Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es mindestens eine Lösung zu der Gleichung  $f(x) = 0$ . Dann

$$f'(x) = 1 + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0 \text{ für } x \in [0, 1].$$

$f$  ist dann monoton wachsend, und es gibt maximal eine Lösung zu  $f(x) = 0$ .

Deswegen besitzt die Gleichung genau eine Lösung.

**Aufgabe 51.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{k \rightarrow \infty} k \ln \frac{k-1}{k}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}$

(a)

$$k \ln \frac{k-1}{k} = \frac{\ln(k-1) - \ln k}{1/k}.$$

Weil  $\ln x$  und  $1/x$  auf  $x \in (0, \infty)$  differenzierbar sind, kann man den Satz von L'Hopital verwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk} [\ln(k-1) - \ln k] &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \\
\frac{d}{dk} \frac{1}{k} &= -\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k(k-1)}}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{k}{k-1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Weil das Grenzwert auf  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  existiert, ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \ln \left( \frac{k-1}{k} \right) = -1.$$

(b)

$$\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \frac{(e^{\ln x})^{\ln x}}{e^x} = \frac{e^{\ln^2 x}}{e^x} = e^{\ln^2 x - x} = e^{x \left( \frac{\ln^2 x}{x} - 1 \right)}.$$

**Lemma 2.2.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^p x}{x^q} = 0, \quad p, q > 0.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^p x}{x^q} &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{p/q}} \right)^q \\
&= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(x^{p/q})} \right)^q && \text{L'Hopital} \\
&= 0^q = 0
\end{aligned}$$

□

**Korollar 2.3.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( \frac{\ln^2 x}{x} - 1 \right) \right] = -\infty.$$

Deswegen ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left( \frac{\ln^2 x}{x} - 1 \right)} = 0.$$

**Aufgabe 52.** Überprüfen Sie die Funktion  $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{8}{\pi} \arctan \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

auf lokale und globale Extrema.

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & -1 < x < 1 \\ \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left( -\frac{1}{x^2} \right) & x > 1 \end{cases}.$$

Es ist klar, dass  $x = 0$  eine Lösung zu  $f'(x) = 0$  ist. Weil  $f''(0) = 2 > 0$ , ist es ein lokales Minimum. Es gibt auch  $a, b \in \mathbb{R}, a < 1 < b$ , wofür gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 & x &\in (a, 1) \\ f'(x) &< 0 & x &\in (1, b) \end{aligned}$$

Falls  $f(1) \geq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , ist  $f(1)$  ein lokales Maximum (sogar wenn  $f$  nicht auf 1 stetig ist). Weil

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$$

und

$$f(1) = \frac{8}{\pi} \arctan 1 = \frac{8}{\pi} \frac{\pi}{4} = 2$$

ist  $f(1)$  ein lokales Maximum. Weil  $f(x) < 2$  für  $x > 1$  kann kein Punkt  $x > 1$  ein globales Maximum sein. Es gilt auch, dass

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Außer  $x \in \{-1, 0, 1\}$  gibt es keine Möglichkeiten für ein globales Maximum. Daher sind die globale Maxima auf  $x \in \{-1, 1\}$

Für  $x \in [1, 1)$  gilt  $f(x) \geq 1$ . Dennoch ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\pi} \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Deswegen gibt es *keine* globales Maximum auf  $\mathbb{R}$ . Wenn man  $f(\infty)$  definiert durch  $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , ist  $f(\infty)$  das globale Maximum.

Tipfehler -  
Maximum  
sollte  
Minimum  
sein.

## 2.2 Blatt 2

**Aufgabe 53.** Es seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbare Funktionen für  $n \in \mathbb{N} \setminus 0$  und  $D \subset \mathbb{K}$  offen. Zeigen Sie, dass  $f \cdot g$  ebenfalls  $n$ -mal differenzierbar ist und weiterhin

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für jedes  $x \in D$  gilt.

*Beweis.* Wir zeigen es per Induktion, für  $n = 1$  ist es das Produktregel. Nehme jetzt an, dass  $f, g$   $(n + 1)$ -mal differenzierbar Funktionen sind und

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

gilt (weil alle  $(n + 1)$ -mal differenzierbar Funktionen sind auch  $n$ -mal differenzierbar). Dann ist  $(f \cdot g)^{(n)}(x)$  differenzierbar, weil die rechte Seite eine Linearkombination von Produkte aus (zumindest) einmal differenzierbar Funktionen. Es gilt auch,

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)) \quad n = 1 \text{ Fall} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}(x)
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 54.** i) Betrachten Sie die Funktionenfolge  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 x^2 + 1}.$$

Beweisen Sie, dass  $(f_n), n \in \mathbb{N}$  gegen eine zu bestimmende Grenzfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig konvergiert, diese jedoch nicht differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  ist. Warum ist das kein Widerspruch zu Proposition 5.5.2?

ii) Untersuchen Sie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, x \in \mathbb{R}.$$

auf Differenzierbarkeit.

*Beweis.* i)

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Es ist klar, dass  $f_n(x)$  konvergiert gegen  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Sei dann  $r(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|$ . Für  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned}
r(x) &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - x \\
r'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1 \\
&\leq \frac{x}{\sqrt{x^2}} - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Deswegen ist  $r(x)$  monoton fallend auf  $(0, \infty)$ . Ähnlich beweist man, dass  $r(x)$  monoton wachsend auf  $(-\infty, 0)$  ist. Deswegen ist  $x = 0$  ein globales Maximum, und  $r(x) \leq r(0) = \frac{1}{n}$ . Daher konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig.

Man berechnet:

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Die Folge der Ableitungen konvergiert gegen  $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)$ , falls  $x \neq 0$ , und 0, falls  $x = 0$ . Es konvergiert aber nicht lokal gleichmäßig in eine Umgebung  $U$  auf 0.

Sei  $1 > \epsilon > 0$  gegeben, und nehme an, dass existiere  $N \in \mathbb{N}$ , für die gilt,

$$|f'_n(x) - g(x)| \leq \epsilon \quad n > N, x \in U,$$

wobei

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Nehme eine solche Abbildung  $f'_n(x)$ . Weil  $f'_n$  stetig ist, und  $f'_n(0) = 0$ , gibt es eine Umgebung  $0 \in V$ , in der gilt, dass  $|f'_n(x) - f'_n(0)| = f'_n(x) \leq 1 - \epsilon$ ,  $x \in V$ . Sei dann  $0 \neq x \in V$ , und  $|1 - f'_n(x)| > \epsilon$ , also die Folge  $f'_n$  konvergiert nicht lokal gleichmäßig.

Man kann auch beachten, dass  $f'_n(x)$  stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R}$  ist. Wenn die Folge lokal gleichmäßig in eine Umgebung auf 0 konvergiert, wäre das Grenzwert auch stetig. Weil das Grenzwert nicht stetig ist, kann die Folge nicht lokal gleichmäßig konvergieren.

Deswegen ist es kein Widerspruch zu den Korollar, weil die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

- ii) Es gilt  $\left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ . Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig (Weierstraßsches Majorantenkriterium).

Jetzt ist  $\frac{d}{dx} \frac{\cos(nx)}{n^3} = -\frac{\sin(nx)}{n^2}$ . Weil  $\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right|$  gleichmäßig. Deswegen ist  $f$  differenzierbar, mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]. \quad \square$$

**Aufgabe 55.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \max\{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

*Beweis.* Wir wissen schon, dass es  $q_n(x)$  existiert,  $q_n(x)$  Polynome, und  $q_n(x) \rightarrow |x|$  gleichmäßig. Es gilt auch

$$f(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{x}{2}.$$

Daher konvergiert gleichmäßig

$$\frac{q_n(x)}{2} + \frac{x}{2} \rightarrow f(x). \quad \square$$

**Aufgabe 56.** i) Es seien  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  und  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbare Funktionen mit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie, dass auch  $g \circ f$   $n$ -mal differenzierbar ist.

ii) Zeigen Sie, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert ist. Bestimmen Sie zudem  $f^{(n)}(0)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

*Beweis.* i)

**Satz 2.4.** Die Ableitung von ein Produkt  $f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$  ist

$$\sum_{i=1}^n f_1(x)f_2(x)\dots \frac{df_i(x)}{dx} \dots f_n(x).$$

*Beweis.* Wir beweisen es per Induktion. Für  $n = 2$  ist es das Produktregel. Jetzt nehme an, dass es für eine  $n \in \mathbb{N}$  richtig ist, und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f_1(x)f_2(x)\dots f_{n+1}(x)) &= \frac{d}{dx}(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x))f_{n+1}(x) \\ &\quad + (f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x))\frac{df_{n+1}}{dx} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n f_1(x)f_2(x)\dots \frac{df_i(x)}{dx} \dots f_n(x)\right) \\ &\quad + (f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x))f'_n(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} f_1(x)f_2(x)\dots \frac{df_i(x)}{dx} \dots f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.5.** Alle Monome von differenzierbare Funktionen sind differenzierbar, und die Ableitung ist noch eine lineare Kombination von Monome.

**Korollar 2.6.** Sei  $f$   $k$ -mal differenzierbar. Dann alle Monome von

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$$

sind differenzierbar.

**Satz 2.7.**  $\frac{d^k}{dx^k}(f \circ g)$  ist ein Monom von Ableitungen von  $f$  und  $g$  (höchstens die  $k$ -ste Ableitung), sofern  $f$  und  $g$ ,  $n$ -mal differenzierbar sind.

*Beweis.* Für  $k = 1$  gilt

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Nehme an, dass es für ein  $k \in \mathbb{N}, k < n$  gilt. Dann per Korollar 2.5 gilt es auch für  $k + 1$ . Per Induktion ist die Verkettung dann  $n$ -mal differenzierbar,  $\square$

ii)

**Lemma 2.8.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0, k > 0.$$

*Beweis.* Wir beweisen es per Induktion auf  $p$ . Für  $p = 1$  verwenden wir den Satz von L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{kx^{k-1}(k)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{kx^k} = 0. \quad \square$$

Jetzt nehme an, dass es für  $p$  gilt. Wir zeigen, dass es für  $p \rightarrow p + 1$  auch gilt.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(\ln x)^p}{kx^{k-1}(x)} = \frac{p+1}{k} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0.$$

**Lemma 2.9.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-kx} = 0, k > 0.$$

*Beweis.* Nimm  $x = e^\xi$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k} (\ln x)^p = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-k\xi} \xi^p = 0. \quad \square$$

Die Ableitungen  $f^{(n)}(x), x \neq 0$  haben den Form  $p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , wobei  $p_n(x)$  eine Polynome ist.

**Proposition 1.**  $f^{(n)}(0) = 0$

*Beweis.* Wir beweisen es per Induktion.  $f^{(0)}(0) = 0$  per Definition.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (f^{(n-1)}(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x p_n(x) e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Deswegen ist  $f$  überall (inkl. 0) differenzierbar, mit alle Ableitungen  $f^{(n)}(0) = 0$   $\square$

□

**Aufgabe 57.** Es seien  $K_1, K_2 \subset \mathbb{K}$  nichtleere, kompakte Mengen und die Folgen stetiger Funktionen  $f_n : K_1 \rightarrow K_2$  sowie  $g_n : K_2 \rightarrow K$  seien gleichmäßig konvergent gegen  $f : K_1 \rightarrow K_2$  bzw.  $f : K_2 \rightarrow K$ . Beweisen Sie, dass auch

$$g_n \circ f_n \rightarrow g \circ f$$

gleichmäßig auf  $K_1$  gilt.

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann per Definition existiert  $n_2 \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}, x \in K_2, n \geq n_2 \quad (2.1)$$

Weil  $g$  stetig und auf eine kompakte Menge definiert ist, ist  $g$  gleichmäßig stetig, und es existiert  $\delta > 0$ , für die gilt

$$|g(a) - g(b)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |a - b| < \delta \quad (2.2)$$

Es gibt auch  $n_1 \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x) - f(x)| < \delta, x \in K_1, n \geq n_1$ . Für  $n > n_1$  gilt daher auch

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \frac{\epsilon}{2}, n > n_1, x \in K_1 \quad (2.3)$$

Sei  $N = \max(n_1, n_2)$ . Für  $n \geq N$  gilt Eq. (2.1) und Eq. (2.3) auch, weil  $N \geq n_1$  und  $N \geq n_2$ . Dann für  $n \geq N$  gilt.

$$\begin{aligned} |g(f(x)) - g_n(f_n(x))| &= |g(f(x)) - g(f_n(x)) + g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))| \\ &\leq \underbrace{|g(f(x)) - g(f_n(x))|}_{< \epsilon/2 \text{ (2.3)}} + \underbrace{|g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))|}_{< \epsilon/2 \text{ (2.1)}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Also  $g_n \circ f_n \rightarrow g \circ f$  gleichmäßig. □

## 2.3 Blatt 3

**Aufgabe 58.** (a) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x) \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt  $x_0 = 0$  mit Konvergenzradius  $R = +\infty$  dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht durch ihre Taylorreihe um  $x = 0$  dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9?

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \sin(x) \cosh(x) \\
 &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4i} (e^{(i+1)x} + e^{(i-1)x} - e^{(1-i)x} - e^{-(i+1)x}) \\
 &= \frac{i}{4} [e^{-(i+1)x} + e^{(1-i)x} - e^{(i+1)x} - e^{(i-1)x}] \\
 g^{(n)}(x) &= \frac{i}{4} [(-(i+1))^n e^{-(i+1)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x} \\
 &\quad - (1+i)^n e^{(i+1)x} - (i-1)^n e^{(i-1)x}] \\
 |g^{(n)}(x)| &\leq \frac{1}{4} (\sqrt{2})^n [|e^{-(i+1)x}| + |e^{(1-i)x}| + |e^{(i+1)x}| + |e^{(i-1)x}|]
 \end{aligned}$$

Die Bedingungen sind jetzt erfüllt: Sei  $B_r(0)^{cl}$  ein abgeschlossenes Ball für beliebige  $r > 0$ . Sei außerdem

$$\begin{aligned}
 c &= \sup_{x \in B_r(0)^{cl}} \frac{1}{4} [|e^{-(i+1)x}| + |e^{(1-i)x}| + |e^{(i+1)x}| + |e^{(i-1)x}|] \\
 \alpha &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Es gilt  $c \neq \infty$ , weil die Abbildung in den Klammern stetig ist, und ist daher auf eine eingeschränkte Menge auch eingeschränkt. Es folgt:

$$\|g^{(n)}\|_{B_r(0)^{cl}} \leq c\alpha^n \quad (5.6.23)$$

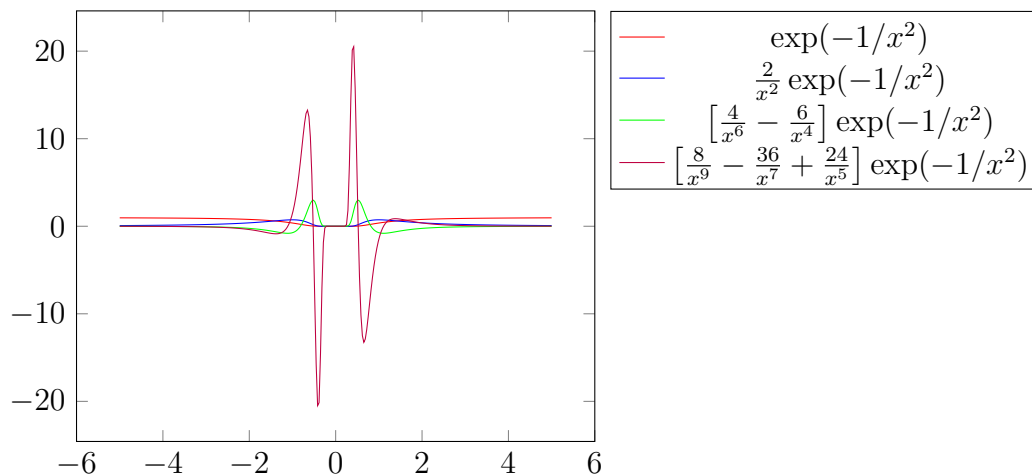
Also die formale Taylorreihe hat einen Konvergenzradius  $R > r$  und konvergiert gegen auf  $B_r(0)^{cl}$  gegen  $g$ . Weil das für alle  $r > 0$  gilt, konvergiert die Taylorreihe gegen  $f$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und die Konvergenzradius  $R = +\infty$ .

- (b) Es ist klar, dass es nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Die Taylorreihe ist  $0 + 0x + 0x^2 + \dots = 0$ , aber  $f(x) \neq 0$  für  $x \neq 0$ .

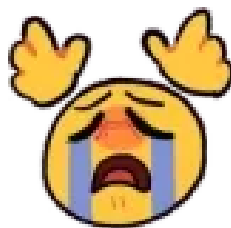
Wir berechnen jetzt  $f^{(n)}(a)$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \exp(-1/a^2) \\
 f'(x) &= \frac{2}{x^2} \exp(-1/x^2) \\
 f''(x) &= \left[ \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right] \exp(-1/x^2) \\
 f'''(x) &= \left[ \frac{8}{x^9} - \frac{36}{x^7} + \frac{24}{x^5} \right] \exp(-1/x^2) \quad \square
 \end{aligned}$$

Aber das Supremum ist nicht nur durch die Koeffizienten beeinflusst, sondern auch das Maximumpunkt...



Also



**Aufgabe 59.** Es sei  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Geben Sie das Taylorpolynom  $P_2$  von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$  an und schätzen Sie den maximalen Fehler von  $|f(x) - P_2(x)|$  auf dem Intervall  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  ab.

*Beweis.* Es gilt  $f(x) = x^{1/3}$ , und daher

$$f^{(n)}(x) = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] x^{\frac{1}{3}-n},$$

also

$$f^{(n)}(1) = \prod_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right).$$

Es gilt daher

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2.$$

Wir wissen schon

$$|R_{n,x_0}(f)(h)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \quad (5.6.20)$$

Hier ist  $n = 2$ , und  $|h| \leq \frac{1}{2}$ .

## Vereinfachung

(Nur in diesem Problem, falsch im Allgemeinen) Der maximale Fehler ist gleich  $\sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}$ , wobei  $h = \frac{1}{2}$ ,  $n = 2$ , und  $x_0 = 1$ .

*Beweis.* Wir betrachten zuerst  $R_{n,x_0}(f)(\xi)$  für  $0 \leq \xi \leq h$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in [0,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) &\leq \sup_{\xi \in [0,h]} \left[ \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + t\xi) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|\xi|^n}{(n-1)!} \right] \\ &= \sup_{\xi \in [0,h]} \left[ \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + t\xi) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \right] \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Ähnlich gilt auch

$$\sup_{\xi \in [-h,0]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t \in [-1,0]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}.$$

Weil wir den maximalen Fehler auf dem ganzen Intervall schätzen möchten, ist die gewünschte Antwort daher

$$\sup_{\xi \in [-h,h]} R_{n,x_0}(f)(\xi) = \sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \frac{|h|^n}{(n-1)!}. \quad \square$$

Wir betrachten deswegen

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(x_0 + th) - f^{(n)}(x_0)| \\ &= \sup_{t \in [-1,1]} \left| \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] (x_0 + th)^{\frac{1}{3}-n} - \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right] \right| \\ &= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| \sup_{t \in [-1,1]} \left| \left( 1 + \frac{t}{2} \right)^{-5/3} - 1 \right| \\ &= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| \left| \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{-5/3} - 1 \right| \\ &= \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| (2^{5/3} - 1) \end{aligned}$$

Also der maximale Fehler ist

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{|0.5|^2} \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{3} - i \right) \right| (2^{5/3} - 1) = \frac{1}{18} (2^{5/3} - 1). \quad \square$$



**Aufgabe 60.** Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in  $x_0$ .

(a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  im Punkt  $x_0 = 2$ .

(b)  $g(x) = \sin^2(\pi x)$  in  $x_0 = 3$ .

(c)  $h(x) = \sin^{-1}(x)$  in  $x_0 = 0$ .

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 3(2)^2 + 3(2) + 2 = 4 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\ f'(2) &= 3 \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f''(2) &= 6 \\ f'''(x) &= 6 = f(2) \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom ist dann

$$4 + 3(x - 2) + 3(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

(b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi x)) \\ g(3) &= 0 \\ g'(x) &= \pi \sin(2\pi x) \\ g^{(n)}(x) &= (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} \sin(2\pi x) & n \text{ ungerade} \\ \cos(2\pi x) & n \text{ gerade} \end{cases} & n \geq 1 \\ g^{(n)}(3) &= (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} & n \geq 1 \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom vom Grad 30 ist

$$\sum_{n=1}^{15} \left[ (-1)^{\lfloor (2n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} (x - 3)^{2n} \right].$$

(c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin^{-1} x \\ h(0) &= 0 \\ h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$h'(0) = 1$$

Sei  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Wir wissen, dass die Taylorreihe von  $(1+x)^\alpha$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (5.6.41)$$

ist, wobei  $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} [\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)]$ . Die Taylorreihe von  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  folgt:

$$\begin{aligned} T_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n \quad b_n = 0, n \text{ ungerade} \end{aligned}$$

Es gilt daher, für die Koeffizienten der Taylorreihe von  $\sin^{-1}(x)$

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dass  $a_n = b_{n-1}/n$ , für  $n \geq 1$ . Es ist dann

$$T_0(\sin^{-1}(x))(x) = \sum_{n=0}^{14} \frac{1}{2n+1} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n+1}). \quad \square$$

**Aufgabe 61.** Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von  $\exp : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für die markierten Zerlegungen  $(J_n, \Xi_n)$  mit der Auswahl  $\Xi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

*Beweis.*

Wir werden später die folgende Lemma brauchen:

**Lemma 2.10.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-1/n}) = 1.$$

*Beweis.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-1/n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-1/n}}{1/n}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-x}}{x} && x = 1/n \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{1} && \text{L'Hopital} \\
&= 1 && \square
\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{n} \exp \left( \frac{k+1}{n} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left( \frac{k+1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{(e-1)e^{1/n}}{e^{1/n} - 1} \\
&= \frac{1}{n} \frac{e-1}{1 - e^{-1/n}}
\end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n(1 - e^{-1/n})} = e-1.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{n} \exp \left( \frac{k}{n} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left( \frac{k}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{1/n} - 1} \\
&= \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{1/n}(1 - e^{-1/n})}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n(e^{1/n}(1 - e^{-1/n}))} = e-1. \quad \square$$

## 2.4 Blatt 4

**Aufgabe 62.** In dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Verknüpfung zweier Riemann-integrierbarer Funktionen i.A. nicht Riemann-integrierbar ist. Dazu gehen wir wie folgt vor:

- (a) Es sei  $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , d.h. eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Weiterhin sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & x = q_n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist.

- (b) Weiterhin sei

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ 1 & x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $g$  Riemann-integrierbar ist, die Verknüpfung  $g \circ f$  mit der Funktion  $f$  jedoch nicht.

*Beweis.* (a) Wir betrachten eine uniforme Zerlegung

$$\mathcal{J}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\},$$

und die Intervalle

$$I_n(k) = \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right].$$

Es gilt  $\inf_{x \in I_n(k)} f(x) = 0$ . Wir müssen daher nur beweisen

**Ziel**

Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $\mathcal{J}_n$ , sodass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}(n)} < \epsilon.$$

Die wichtigste Bemerkung ist: jedes  $q_x$  kommt maximal zweimal vor (das passiert im Fall wenn  $q_x = k/n$  für eine  $k \in \{0, \dots, n\}$ ). Es folgt dann für  $n = 2p$  gerade,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathcal{J}(n)} &\leq \sum_{j=1}^p \frac{1}{2p} \frac{2}{j} \\ \int_0^1 f(x) dx &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \frac{1}{2p} \frac{2}{j} \\ &< \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} (1 + \ln p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also  $f$  ist integrierbar mit  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .

(b) Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Wir definieren für jedes  $n \in \mathbb{N}$  so eine Zerlegung:

Sei  $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}$ . Außer  $[x_0, x_1]$  gibt es dann nur endlich viele  $x = \frac{1}{n}$  (eigentlich gibt es genau  $n - 1$ ). Sei dann

$$\mathcal{J}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} - \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \frac{1}{n-1} + \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \frac{1}{n-2} - \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \right. \\ \left. \frac{1}{n-2} + \frac{\epsilon}{2^{n-2}}, \frac{1}{n-3} - \frac{\epsilon}{2^{n-3}}, \dots, 1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 \right\}$$

**Bemerkung:** In der Intervall  $\left[ \frac{1}{n-p} + \frac{\epsilon}{2^{n-p}}, \frac{1}{n-p-1} - \frac{\epsilon}{2^{n-p-1}} \right]$  gibt es keine Zahlen mit der Form  $1/n, n \in \mathbb{Z}$ , also  $\sup f = 0$  auf solchen Intervalle. Es gilt dann

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}_n} = \frac{2}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^j} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}_{\mathcal{J}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^j} \right] \\ = \epsilon$$

Weil  $\epsilon$  beliebig war, ist dann

$$\int_0^1 g(x) dx = 0,$$

also  $g$  ist integrierbar mit

$$\int_0^1 g(x) dx = 0.$$

(c) Es gilt

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Sei  $h := g \circ f$ .  $h$  ist nicht auf  $[0, 1]$  integrierbar. Sei  $\mathcal{J} = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_N = 1\}$ . Es gibt, für alle Intervalle  $[a, b] \subseteq [0, 1]$ , zwei Punkte

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q} \ni x_0 \in [a, b] & \text{dichtheit von } \mathbb{Q} \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ni x_1 \in [a, b] & \mathbb{Q} \text{ ist nur abzählbar} \end{array}$$

Also gilt

$$\sup (h|_{[a,b]}) = 1 \tag{2.4}$$

$$\inf (h|_{[a,b]}) = 0 \tag{2.5}$$

Daraus folgt, für jede Zerlegung  $\mathcal{J}$  von  $[0, 1]$ , dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) = 1$$

$$\mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) = 0$$

also  $h$  ist nicht auf  $[0, 1]$  integrierbar. □

**Aufgabe 63.** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar auf dem echten Intervall  $[a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) \, dx > 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein echtes Intervall  $J \subset [a, b]$  gibt, auf dem  $f$  strikt positiv ist, d.h. mit  $f(x) > 0$  für alle  $x \in J$ .

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, die Charakterisierung der Darboux-Integrierbarkeit zu benutzen und Untersummen zu betrachten.

*Beweis.* Wir beweisen es per Widerspruch. Nehme an, dass in jedem Intervall es mindestens ein Punkt  $x_0$  gibt, für die  $f(x_0) \leq 0$ . Insbesondere gilt das für alle abgeschlossen Intervalle  $[c, d] \subseteq [a, b]$ .

Sei jetzt  $\mathcal{J}$  eine beliebige Zerlegung von  $[a, b]$ ,  $\mathcal{J} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ , mit die übliche Voraussetzung  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathcal{J}} &= \sum_{i=1}^N \inf(f|_{[t_{i-1}, t_i]}) (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (0)(t_i - t_{i-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Weil  $\mathcal{J}$  beliebig war, gilt das für alle Zerlegungen, und

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq 0,$$

also

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq 0,$$

ein Widerspruch. □

**Aufgabe 64.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $|f|$  integrierbar auf  $[a, b]$ , so ist es auch  $f$ .
- (b) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $f(x) \geq \delta$  für alle  $x \in [a, b]$  und ein  $\delta > 0$ , so ist auch  $\frac{1}{f}$  über  $[a, b]$  integrierbar.
- (c) Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so gilt

$$\int_a^b (f \cdot g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(x) \, dx.$$

*Beweis.* (a) Falsch. Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Dann ist  $|f| = 1$  integrierbar (Proposition 6.1.6). Wir müssen jetzt nur beweisen, dass  $f$  nicht integrierbar ist. Der Beweis ist gleich zu der Beweis in der vorherigen Aufgabe. Wir müssen nur statt (2.5) schreiben

$$\inf (h|_{[a,b]}) = -1$$

(b) Wahr.

#### Bemerkung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq \delta$  für ein  $\delta > 0$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\inf(f)} &= \sup \left( \frac{1}{f} \right) \\ \frac{1}{\sup(f)} &= \inf \left( \frac{1}{f} \right) \end{aligned}$$

wegen der Monotonie von  $x \rightarrow 1/x$ .

Wir haben auch

#### Korollar

**(Korollar aus Proposition 6.2.3(vi))**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathcal{J} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_N\}$  von  $I$  gibt, sodass

$$\sum_{i=1}^N [\sup (f|_{[a,b]}) - \inf (f|_{[a,b]})] (t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Wir arbeiten mit dem Korollar. Sei  $\mathcal{J} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_N\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[ \sup \left( \frac{1}{f} \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \right) - \inf \left( \frac{1}{f} \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \right) \right] (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{\inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})} - \frac{1}{\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]})} \right] (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]}) - \inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})}{\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]}) \inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})} \right] (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^N [\sup (f|_{[t_{i-1}, t_i]}) - \inf (f|_{[t_{i-1}, t_i]})] (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Per Hypothese gibt es eine Zerlegung  $\mathcal{J}$  von  $[a, b]$ , für die gilt

$$\sum_{i=1}^N [\sup(f|_{[t_{i-1}, t_i]}) - \inf(f|_{[t_{i-1}, t_i]})] < \epsilon \delta^2.$$

Dies ist genau die gewünschte Zerlegung, also nach dem Korollar ist  $f$  integrierbar.

(c) Falsch. Sei  $f$  und  $g$  Treppenfunktionen,  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0.5 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt  $(f \cdot g)(x) = 0$ , und daher  $\int_0^1 (f \cdot g)(x) dx = 0$ . Jetzt sei  $\mathcal{J} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) &\geq \sup(f|_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &= 1(1/4) = 1/4 \\ \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(g) &\geq \sup(g|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}) \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 1(1/4) = 1/4 \end{aligned}$$

Also  $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{4} > 0$ , und gleich für  $\int_0^1 g(x) dx$ . Daher ist

$$\int_0^1 (f \cdot g)(x) dx = 0 \neq \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx. \quad \square$$

**Aufgabe 65. (Wanderdüne)** Man gebe eine Folge von nicht-negativen Funktionen  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  an, sodass

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$ ,
- $f_n \not\rightarrow 0$  für jedes  $x \in [0, 1]$ .

*Beweis.* Sei

$$g_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\int_0^1 g_{a,b}(x) dx = (b - a).$$

Sei jetzt  $n \in \mathbb{N}$ , und  $k(n)$  das Zahl, sodass

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

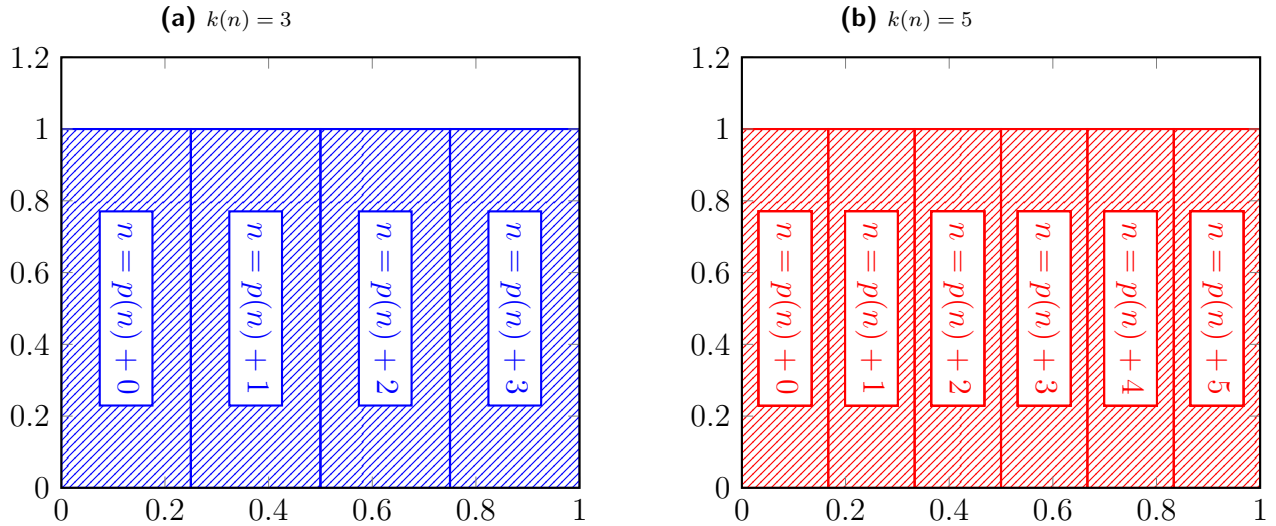


gilt. Das ist immer möglich, weil  $x \rightarrow x(x+1)/2$  monoton wachsend ist. Sei

$$p(k(n)) := \frac{k(n)(k(n)+1)}{2}$$

$$f_n(x) = g_{\frac{n-p(n)}{k(n)+1}, \frac{n-p(n)+1}{k(n)+1}}(x)$$

Wir beweisen die gewünschte Eigenschaften:



**Figure 2.1:** Im Allgemeinen ergibt sich für  $p(k) \leq n < p(k+1)$  eine Überdeckung von  $[0, 1]$  mit Treppen mit Länge  $1/(k(n)+1)$ .

(i) Es gilt  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{k(n)+1}$ . Weil  $k(n)$  wachsend ist, und  $k(n) \rightarrow \infty$  gilt, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

(ii) Sei  $x \in [0, 1]$  und  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Sei auch  $q = \lfloor x(k(n)+2) \rfloor$ . Es gilt dann

$$f_{p(k(n)+1)+q}(x) \neq 0,$$

also  $f_n(x) \not\rightarrow 0$  für jedes  $x \in [0, 1]$ . □

## 2.5 Blatt 5

**Aufgabe 66. (Stückweise Integrierbarkeit)** Zeigen Sie: ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar auf  $[a, c]$  und  $[c, b]$  für ein  $c \in (a, b)$ , so auch auf  $[a, b]$ .

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Weil  $f$  auf sowohl  $[a, c]$  als auch  $[c, b]$  integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung  $\mathcal{J}_1 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = c\}$  bzw.  $\mathcal{J}_2 = \{x_n = c, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}$  von  $[a, c]$  bzw.  $[c, b]$ , so dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}_1} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}(f) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\mathcal{O}_{J_2} - \mathcal{U}_{J_2} < \frac{\epsilon}{2}$$

Dann ist  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}} < \epsilon.$$

Weil  $\epsilon$  beliebig war, ist  $f$  integrierbar. □

**Aufgabe 67. (Bestimmte Integrale)** Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale :

(a)  $\int_1^4 \sin(\sqrt{x}) \, dx,$

(b)  $\int_0^{1/2} \arcsin(x) \, dx,$

(c)  $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx,$

(d)  $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx.$

*Beweis.* (a)  $u = \sqrt{x}, du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ , also  $dx = 2u \, du$ . Wenn  $x = 1$  ist  $u = 1$ , und  $x = 4$  ist  $u = 2$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^4 \sin(\sqrt{x}) \, dx &= \int_1^2 \sin(u)(2u \, du) \\ &= 2 \int_1^2 u \sin u \, du \\ &= 2 \left[ u(-\cos u)|_1^2 + \int_1^2 \cos u \, du \right] \quad \text{partielle Integration} \\ &= 2 \left[ (\cos(1) - 2\cos(2)) + [\sin u]_1^2 \right] \\ &= 2 \cos 1 - 4 \cos 2 + 2 \sin 2 - 2 \sin 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \arcsin(x) \, dx &= x \arcsin(x) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ u &= 1 - x^2, \quad du = -2x \, dx. \end{aligned}$$

Wenn  $x = 0$ , ist  $u = 1$ .

Wenn  $x = 1/2$ , ist  $u = 3/4$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \arcsin(x) \, dx &= \frac{\pi}{2} - \int_1^0 \frac{1}{(-2)\sqrt{u}} \, du \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_1^{3/4} u^{-1/2} \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \int_{3/4}^1 u^{-1/2} du \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} [2u^{1/2}]_{3/4}^1 \\
&= \frac{\pi}{12} - 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \\
&= -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

(c) Substitution:  $x = \tan \theta$ ,  $dx = \sec^2 \theta d\theta$ , für  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Es gilt  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{1}{(1+\tan^2 \theta)^2} (\sec^2 \theta d\theta) \\
&= \int \frac{1}{\sec^4 \theta} \sec^2 \theta d\theta \\
&= \int \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]
\end{aligned}$$

Es gilt auch  $\sin \theta = \sin \tan^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  und  $\cos \theta = \cos \tan^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . Daraus folgt

$$\sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta = \frac{x}{1+x^2}.$$

Dann ist

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2} \right).$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{x^2}{2} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx \\
&= 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&\quad u = 1-x^2 \quad du = -2x dx \\
x^3 dx &= \frac{1}{-2} x^2 (-2x dx) \\
&= -\frac{1}{2} x^2 du \\
&= -\frac{1}{2} (1-u) du
\end{aligned}$$

Wenn  $x=0$  ist  $u = 1$

Wenn  $x=1$  ist  $u = 0$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx &= +\frac{1}{2} \int_1^0 \left( -\frac{1}{2} \frac{1-u}{\sqrt{u}} \right) du \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1-u}{\sqrt{u}} \, du \\
 &= \frac{1}{4} \left[ 2\sqrt{u} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} \left[ 2 - \frac{2}{3} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 68. (Der Hauptsatz)** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Eine integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt eine Stammfunktion.
- (b) Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt eine Stammfunktion.
- (c) Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche eine Stammfunktion auf  $[a, b]$  besitzt, ist integrierbar.

*Hinweis:*  $F(x) = \sqrt{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  für  $x \neq 0$

*Beweis.* (a) Falsch. Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Es gilt dann

$$\int_0^x f(x) \, dx = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(b) Ja (Proposition 6.4.1 und Definition 6.4.2).

(c) Nein. Sei  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F = \begin{cases} \sqrt{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und

$$F' = f = -x^{-1/2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3\sqrt{x}}{2} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dann ist  $f$  nicht integrierbar, weil es nicht auf  $[0, 1]$  eingeschränkt ist ( $x^{1/2} \rightarrow \infty$  wenn  $x \rightarrow 0$ ). □

**Aufgabe 69. (Riemann-Lemma)** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx = 0 \quad (5.1)$$

gilt. Verifizieren Sie dazu:

- (i) Zeigen Sie, dass zu jedem  $\epsilon > 0$  eine stückweise konstante Funktion  $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

$$\int_a^b |f(x) - T(x)| \, dx \leq \epsilon.$$

- (ii) Zeigen Sie (5.1) für beliebige, stückweise konstante Funktionen.

- (iii) Folgern Sie die Behauptung.

*Beweis.* (i) Weil  $f$  integrierbar ist, können wir eine Zerlegung  $\mathcal{J} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  finden, so dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) - \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \leq \epsilon.$$

Wir definieren zwei stückweise konstante Funktionen:

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \begin{cases} \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} & x_i \leq x < x_{i+1}, 0 \leq i < n-1 \\ \sup_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \\ \sigma(x) &= \begin{cases} \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} & x_i \leq x < x_{i+1}, 0 \leq i < n-1 \\ \inf_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \end{aligned}$$

Dann sind  $\tau$  und  $\sigma$  Treppenfunktionen mit  $\sigma \leq f \leq \tau$  auf  $[a, b]$ . Es gilt außerdem per Definition

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) - \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) - \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\tau(x_i) - \sigma(x_i)) (x_{i+1} - x_i) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} (\tau(x_i) - f(x_i)) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(\tau - \sigma) \\ &\geq \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(\tau - f) \\ &\geq \int_a^b (\tau - f)(x) \, dx \\ &= \int_a^b |\tau(x) - f(x)| \, dx \end{aligned}$$

(ii) Wir beweisen es zuerst für konstante Funktionen

$$\int_a^b k \sin nx \, dx = \frac{k}{n} (-\cos nx)|_a^b,$$

also

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b k \sin nx \, dx \right| &= \left| \frac{k}{n} (\cos nb - \cos na) \right| \\ &\leq \frac{k}{n} (|\cos nb| + |\cos na|) \\ &\leq \frac{k}{n} (2) \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b k \sin nx \, dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{n} = 0.$$

Statt eine stückweise konstante Funktion integrieren wir dann mehrere Male eine konstante Funktion. Danach summieren wir die Ergebnisse. Weil alle Ergebnisse gegen 0, geht die Summe auch gegen 0, also die Behauptung gilt für stückweise konstante Funktionen.

(iii) Sei

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - \tau(x) + \tau(x)] \sin nx \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_a^b (f(x) - \tau(x)) \sin nx \, dx + \int_a^b \tau(x) \sin nx \, dx \right] \\ \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left| \int_a^b (f(x) - \tau(x)) \sin nx \, dx \right| + \left| \int_a^b \tau(x) \sin nx \, dx \right| \right] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_a^b |f(x) - \tau(x)| \, dx + \int_a^b |\tau(x)| \, dx \right] \end{aligned}$$

Wir nehmen dann  $N \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, so dass für alle  $n > N$  gilt

$$\int_a^b \tau(x) \sin nx \, dx \leq \frac{\epsilon}{2}$$

(Möglich wegen (b)). Dann ist

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| \leq \epsilon.$$

Weil  $\epsilon$  beliebig war, gilt die Behauptung.  $\square$

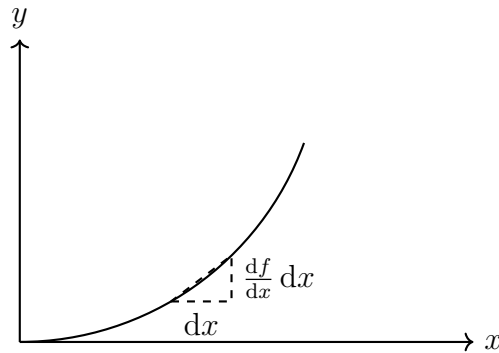
**Aufgabe 70.** Für eine gegebene Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kann unter bestimmten Voraussetzungen (z.B.  $f \in C^1([a, b])$ , wir kommen in der Vorlesung darauf zurück) die Länge des Funktionsgraphen durch

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} \, dx$$

bestimmt werden.

- (i) Begründen Sie kurz anschaulich, warum diese Formel wahr sein kann. *Hinweis: Pythagoras.*
- (ii) Bestimmen Sie über obige Identität den Umfang eines Einheitskreises.

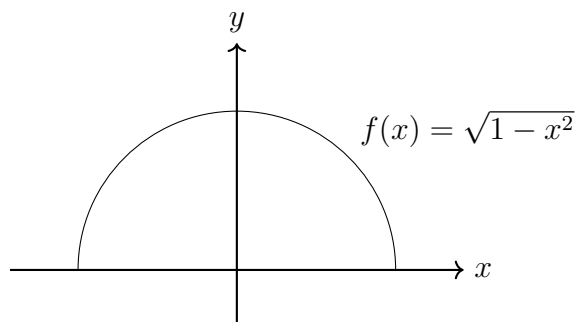
*Beweis.* (i)



also intuitiv wäre

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{df}{dx} dx\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- (ii) Wir berechnen zuerst die Länge eines Hälftes des Kreises, also



Es gilt

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

und

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \arcsin(x) \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,
\end{aligned}$$

also der Umfang ist  $2\pi$ . □

## 2.6 Blatt 6

**Aufgabe 71.** Im Folgenden ist  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Sind  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar, so auch  $f + g$ .
- (b) Sind  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar, so auch  $f \cdot g$ .
- (c) Sind  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so auch  $g \circ f$ .
- (d) Es sei  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, nicht-negativ und uneigentlich integrierbar. Dann konvergiert

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)} \, dx.$$

*Beweis.* (a) Wahr. Sei  $a < c < b$ . Wir wissen, dass  $f + g$  auf  $[a, c]$  integrierbar für alle solchen  $c$  ist und außerdem

$$\int_a^c (f + g)(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_a^c g(x) \, dx.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c (f + g)(x) \, dx &= \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c g(x) \, dx \\
&= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx
\end{aligned}$$

also  $f + g$  ist integrierbar.

- (b) Falsch. Sei  $f, g : [-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ . Das uneigentliche Integral existiert:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} \, dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = & \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_{x_0}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \\
&= \lim_{x_0 \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{x_0}^1 \\
&= \lim_{x_0 \rightarrow 0} (2 - \sqrt{x_0}) \\
&= 2
\end{aligned}$$



Aber  $fg = \frac{1}{-x}$  und

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{-x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow 0} \ln x|_{x_0}^1 \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow 0} (-\ln x_0)\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert nicht.

- (c) Falsch. Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$  und  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{-\sqrt{x}}$ . Dann ist  $g \circ f = \frac{1}{-x}$ .

Wir haben schon gezeigt, dass  $f$  integrierbar ist,  $g \circ f$  aber nicht.

- (d) Wir betrachten nur das Fall, in dem  $f \geq 1$ . Sonst können wir  $f + 1$  betrachten. Weil die konstante Funktion 1 uneigentlich (sogar eigentlich) auf  $[0, 1]$  integrierbar ist, konvergiert das uneigentliche Integral  $\int_0^1 f(x) dx$  genau dann, wenn  $\int_0^1 f(x) + 1 dx$  konvergiert.

Wir betrachten der Grenzwert, durch den das uneigentliche Riemann-Integral definiert ist. Weil  $f$  nichtnegativ ist, ist

$$I(x_0) = \int_{x_0}^1 \sqrt{f(x)} dx$$

ein Monoton fallend Funktion von  $x_0$ . Der Grenzwert existiert also genau dann, wenn  $I(x_0)$  von oben beschränkt ist.

Wir definieren außerdem:

$$J(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x) dx.$$

Weil  $f$  integrierbar ist, ist  $J(x_0)$  von oben beschränkt. Weil  $\sqrt{f} \leq f$  gilt, ist  $I(x_0) \leq J(x_0) \forall x_0 \in (0, 1]$ . Daraus folgt, dass  $I$  beschränkt ist, also  $\sqrt{f}$  ist uneigentlich Riemann-integrierbar.  $\square$

**Aufgabe 72.** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Riemannintegrale auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

- (a)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$
- (b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$
- (c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx.$

*Beweis.* (a) Wir betrachten zuerst  $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ . Weil  $e^{-x^2}$  monoton fallend ist, konvergiert das Integral genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$$

konvergiert. Es gilt  $e^{-k^2} \geq e^{-k}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$$

konvergiert, weil es eine geometrische Reihe ist.

Nachdem wir gezeigt haben, dass  $\int_{-\infty}^1 f(x) dx$  existiert, existiert auch das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ . Es gilt, für  $c \leq -1$ , dass

$$\int_c^1 f(x) dx = \int_c^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx$$

und

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^1 f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Weil  $\exp(-x^2)$  auf  $\mathbb{R}$  stetig ist, ist  $\exp(-x^2)$  auf  $[-1, 1]$  integrierbar, also der Grenzwert  $\int_{-\infty}^1 e^{-x^2} dx$  existiert genau dann, wenn  $\int_c^{-1} e^{-x^2} dx$ . Aber wir wissen, weil  $\exp(-(-x)^2) = \exp(-x^2)$ , dass

$$\int_c^{-1} e^{-x^2} dx = \int_1^c e^{-x^2} dx,$$

also

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^{-1} e^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c e^{-x^2} dx.$$

Weil der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, existiert der Grenzwert auf der linken Seite, also  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  existiert.

Weil  $e^{-x^2} > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , konvergiert das Integral genau dann, wenn es absolut konvergiert, also es konvergiert absolut.

(b) Es steht schon im Skript, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert. Aus

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

existiert auch  $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx$ , daher auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Wir untersuchen es also für absolut Konvergenz. Es gilt

$$\int_0^{2\pi N} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi(j+1)} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\sin x| \, dx \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2}{\pi(j+1)}
\end{aligned}$$

Dann nehmen wir die Limes  $N \rightarrow \infty$ . Weil die Summe divergent ist, ist das Integral auch divergent.

- (c) Wie vorher ist  $\sin((-x)^2) = \sin x$ , also wir müssen nur zeigen, dass  $\int_0^\infty \sin(x^2)$  konvergiert bzw. absolut konvergiert.

Sei  $u = x^2$ ,  $du = 2x \, dx = 2\sqrt{u} \, dx$  und  $\mathbb{R} \ni a, b, 0 < a < b$ . Es folgt:

$$\int_a^b \sin x^2 \, dx = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} \, du.$$

Dann machen wir partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \, du &= \left. \frac{-\cos u}{\sqrt{u}} \right|_{a^2}^{b^2} - \int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos u}{2u^{\frac{3}{2}}} \, du \\
\left| \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \, du \right| &\leq \left| \frac{-\cos u}{\sqrt{u}} \right|_{a^2}^{b^2} + \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2u^{3/2}} \, du \\
&\geq \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_{a^2}^{b^2} \\
&= \frac{2}{a},
\end{aligned}$$

was unabhängig von der oberen Grenze ist. Also  $\int_a^\infty x^2 \sin(x^2)$  konvergiert für alle  $a$ . Da  $\sin(x^2)$  überall in  $\mathbb{R}$  definiert und stetig ist, ist auch

$$\int_0^\infty \sin(x^2) \, dx$$

konvergent. Daraus folgt, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \sin(x^2) \, dx$$

konvergent ist. Wir untersuchen es dann für absolut Konvergenz. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi N} \left| \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \right| \, dx &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \, dx \\
&\geq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2\sqrt{2\pi j}} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\sin x| \, dx
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{j}}$$

Weil die Summe divergent ist, divergiert auch das Integral.  $\square$

**Aufgabe 73.** Beweisen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

*Beweis.* Es gilt, für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \ln 2n - \ln n \\ &= \int_1^{2n} \frac{1}{x} dx - \int_1^n \frac{1}{x} dx \\ &= \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

also wir brauchen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j}.$$

Es gilt

$$\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j+1}$$

weil  $\frac{1}{x}$  auf  $(0, \infty)$  monoton fallend ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j+1} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

also wenn wir die Limes gegen  $\infty$  nehmen, konvergiert die beide Summen gegen den gleichen Wert, also das Integral.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx.$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

**Aufgabe 74.** Wir zeigen die Irrationalität von  $\pi$  durch einen Widerspruch. Angenommen, es gälte  $\pi = \frac{a}{b}$  für  $a, b \in \mathbb{N}$ . Außerdem seien  $f, F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \frac{(a - bx)^n}{n!}, \\ F(x) &= f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x). \end{aligned}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $f^{(k)}(0), f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{N}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

(b) Zeigen Sie

$$f(x) \sin x = (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)'.$$

Folgern Sie anschließend, dass  $F(\pi) + F(0)$  ebenfalls eine natürliche Zahl ist, was allerdings nicht mit den Eigenschaften von  $x \rightarrow f(x) \sin x$  für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  vereinbar ist.

*Beweis.* (a) Wir leiten es ab. Sei  $g(x) = x^n$ ,  $h(x) = (a - bx)^n$ . Es gilt

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} g^{(k)}(x) h^{(p-k)}(x).$$

Es gilt außerdem

$$g^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)x^{n-k},$$

also  $g^{(k)}(0) \neq 0$  genau dann, wenn  $k = n$  und in diesem Fall ist  $g^{(n)}(0) = n!$ . Ähnlich ist  $h^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)(-b)^k(a-bx)^{n-k}$ , also  $h^{(k)}(0) \in \mathbb{N}$ . Dann in Summe müssen wir nur den Fall  $k = n$  betrachten, also

$$f^{(p)}(0) = \binom{p}{n} h^{(p-n)}(0) \in \mathbb{N}.$$

Ähnlich bei  $\pi$  gilt  $g^{(k)}(\pi) = n(n-1) \dots (n-k+1)\pi^{n-k}$  und

$$\begin{aligned} g^{(k)}(\pi) &= n(n-1) \dots (n-k+1)(-b)^k(a-b\pi)^{n-k} \\ &= n(n-1) \dots (n-k+1)(-b)^k(a-b(a/b))^{n-k} \\ &= \begin{cases} 0 & k \neq n \\ n!(-b)^n & k = n \end{cases} \\ &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

also wir betrachten in Summe nur den Fall  $p - k = n$ , also

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{n!} \binom{p}{p-n} g^{(p-n)}(\pi) h^{(n)}(\pi) = \binom{p}{p-n} g^{(p-n)}(\pi) (n!) (-b)^n \in \mathbb{N}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)' &= F''(x) \sin x + F'(x) \cos x - F'(x) \cos x + F(x) \sin x \\ &= [F''(x) + F(x)] \sin x \\ &= \sin(x) [\cancel{f^{(2)}(x)} - \cancel{f^{(4)}(x)} + \cancel{f^{(6)}(x)} - \dots + (-1)^n \cancel{f^{(2n+2)}(x)} \\ &\quad + f(x) - \cancel{f^{(2)}(x)} + \cancel{f^{(4)}(x)} - \dots + \cancel{(-1)^n f^{(2n)}(x)}] \\ &= f(x) \sin x + (-1)^n f^{(2n+2)}(x). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen:  $f^{(2n+2)}(x) = 0$ . Wir wissen:  $g^{(n+1)}(x) = h^{(n+1)}(x) = 0$ . Aus

$$f^{(2n+2)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{2n+2} g^{(k)}(x) h^{(2n+2-k)}(x).$$

Weil entweder  $k$  oder  $2n+2-k \geq n+1$  ist, sind alle Terme in Summe 0, also  $f^{(2n+2)} = 0$  und

$$f(x) \sin x = (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)'.$$

- (c)  $F(x)$  und  $F(\pi)$  sind natürliche Zahlen, weil sie Summen von Ableitungen von  $f$  sind, und wir wissen, dass alle Ableitungen bei 0 oder  $\pi$  ganze Zahlen sind.

Wir integrieren die beide Seite

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx &= \int_0^\pi (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)' \, dx \\ &= [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^\pi \\ &= -F(\pi) \cos \pi + F(0) \cos 0 \\ &= F(0) + F(\pi) \end{aligned}$$

Wir wissen auch, dass  $f(x)$  und  $\sin x \geq 0$  für  $x \in [0, \pi]$  sind, also  $F(0) + F(\pi) \geq 0$  und  $F(0) + F(\pi)$  ist eine natürliche Zahl. Aber:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \right| &\leq \int_0^\pi |f(x) \sin x| \, dx \\ &\leq \int_0^\pi |f(x)| \, dx \\ &\leq \pi \sup_{x \in [0, \pi]} f(x) \end{aligned}$$

Weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x^n} = 0$  für alle  $x > 0$ , können wir  $f(x)$  beliebig klein machen. Insbesondere gilt für hinreichend groß  $n$   $f(x) \leq 1$ . Dann ist das Integral keine ganze Zahl, ein Widerspruch.  $\square$

## 2.7 Blatt 8

**Aufgabe 75.** Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit:

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(b) \quad g : (\mathcal{C}^1((a, b)), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}(a, b), \|\cdot\|_\infty) \text{ mit}$$

$$g(u(x)) := u'(x).$$

- (c) Eine beliebige Funktion  $h : (X, d_{\text{disk}}) \rightarrow (Y, d)$ , wobei  $d_{\text{disk}}$  die diskrete Metrik und  $(Y, d)$  ein beliebiger metrischer Raum ist.

*Beweis.* (a) Nicht stetig. Wir betrachten eine Folge  $(y_n), y_n \in \mathbb{R}, y_n \searrow 0$  und die Folge  $(1, y_n) \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $(1, y_n) \rightarrow (1, 0)$  und

$$f(1, 0) = 0.$$

Aber

$$\begin{aligned} f(1, y_n) &= \frac{y_n^2}{1 + y_n^4} \\ &= \frac{1}{y_n^{-2} + y_n^2} \\ &\geq \frac{1}{y_n^2} = y_n^{-2} \end{aligned}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(1, y_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{-2} = \infty \neq 0.$$

- (b) Nicht stetig. Sei  $f_n$  die Funktionfolge

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp(-nx^2).$$

Weil  $\exp(-nx^2) \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$  konvergiert  $f_n \rightarrow 0$  mit Ableitung  $0' = 0$ .

Aber

$$f'_n(x) = -2x\sqrt{n} \exp(-nx^2).$$

Wir berechnen das Maximumpunkt:

$$f''_n(x) = 2\sqrt{n} \exp(-nx^2)(2nx^2 - 1) = 0$$

also  $x^2 = \frac{1}{2n}$  und

$$f'_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right) = -\sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Daraus folgt, dass  $g(f_n)$  keine konvergente Folge ist, obwohl  $f_n$  eine konvergente Folge ist, also  $g$  kann nicht stetig sein.

- (c) Wir brauchen hier: Alle Mengen sind bzgl. der diskreten Metrik offen. Wegen  $\{x_0\} = B_{1/2}(x_0)$  sind alle Punktmengen in der Topologie. Weil beliebige Vereinigungen von offene Mengen auch offen sind, sind alle Mengen in der Topologie, also die Topologie ist einfach die Potenzmenge.

Sei  $U \subseteq Y$  offen.  $h^{-1}(U) \subseteq X$ , aber wir haben schon gezeigt, dass alle Teilmengen offen sind, also  $h^{-1}(U)$  ist offen. Daraus folgt:  $h$  ist stetig.  $\square$

**Aufgabe 76.** Untersuchen Sie die folgenden metrischen Räume auf Vollständigkeit:

- (a)  $(X, d)$ , wobei  $X \neq \emptyset$  und  $d$  die diskrete Metrik darstellt.
- (b)  $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$ .
- (c)  $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_p)$  für  $1 \leq p < \infty$ .

Hinweis: Finden Sie stetige Funktionen, welche eine Treppenfunktion approximieren.

*Beweis.* (a) Vollständig. Sei  $(a_n), a_n \in X$  eine Cauchy-folge, also es gibt  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a_m| < 1/2 \forall n, m > N$ . Aus der Definition folgt, dass  $a_n = a_m \forall n, m > N$ . Dann ist  $a_n, n > N$  (egal welche  $N$ ) der Grenzwert, weil  $a_n$  nach  $N$  eine konstante Folge ist.

- (b) Vollständig. (Hier ist es angenommen, dass  $\mathcal{P}$  die Menge der Polynome ist).

Sei  $p, q$  Polynome. Dann ist  $p - q$  ein Polynom. Alle Polynome sind bei  $\pm\infty$  divergent, also  $\|p - q\| = \infty$ . Daraus folgt, dass wenn  $(a_n), a_n \in \mathcal{P}$  eine Cauchy-folge ist, ist  $(a_n)$  nach einer Zahl eine konstante Folge, also es konvergiert gegen ein Polynom (das Konstant).

- (c) Nicht vollständig. Wir betrachten die Funktionfolge  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq -1/n \\ nx & -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Sei  $x > 0$ . Es gibt dann  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $1/N < x$ . Dann ist  $f_n(x) = 1$  für alle  $n \geq N$ , also  $f_n(x) \rightarrow 1$ . Ähnlich ist  $f_n(x) \rightarrow -1$  für alle  $x < 0$ . Außerdem ist  $f_n(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (eine konstante Folge), also  $f_n(0) \rightarrow 0$ . Dann ist die Grenzfunktion

$$f = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

was offenbar nicht stetig ist. Es bleibt zu zeigen: Die Folge ist eine Cauchyfolge. Wir betrachten  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $M = \min(n, m)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \int_{-1}^1 |f_n - f_m| dx \\ &= \left[ \int_{-1}^{-1/M} |f_n - f_m|^p dx \right]^{1/p} + \left[ \int_{-1/M}^{1/M} |f_n - f_m|^p dx \right]^{1/p} \\ &\quad + \left[ \int_{1/M}^1 |f_n - f_m|^p dx \right]^{1/p} \\ &= \left[ \int_{-1/M}^{1/M} |f_n - f_m|^p dx \right]^{1/p} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \left[ \int_{-1/M}^{1/M} 2^p \, dx \right]^{1/p} \\
&= 2 \left( \frac{2}{M} \right)^{1/p} \\
&\rightarrow 0 \quad M \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

also die Folge ist eine Cauchyfolge.  $\square$

**Aufgabe 77.** Wir beweisen den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf für Anfangswertprobleme. Er besagt (vereinfacht): Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig (mit Konstante  $L$ ), so besitzt die Gleichung

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(a) = x_0, \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.6)$$

für jedes  $b > a$  eine eindeutige Lösung (dies ist eine Differentialgleichung, die Lösung ist also eine Funktion  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche stetig differenzierbar ist). Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Es sei

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(x(s)) \, ds, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (2.7)$$

Zeigen Sie für  $x \in \mathcal{C}^1([a, b])$ :

$$x \text{ erfüllt (2.6)} \iff x \text{ erfüllt (2.7)}.$$

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung  $F : (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  definiert durch

$$F(y(t)) = y_0 + \int_a^t f(y(s)) \, ds$$

eine Lipschitz-stetige Selbstabbildung ist mit Lipschitz-Konstante  $L(b-a)$  ist.

(c) Folgern Sie mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes die Existenz einer eindeutigen Lösung zu (2.6), in dem Sie zunächst  $b-a$  klein genug wählen. Anschließend iterieren Sie das Argument endliche Male (warum?), um eine Lösung für ein beliebiges  $b > a$  zu konstruieren. Begründen Sie außerdem, warum die Lösung  $x \in \mathcal{C}^1([a, b])$  erfüllt.

*Beweis.* Keine Zeit T-T  $\square$

**Aufgabe 78.** Zur Wiederholung: Der Rang  $\partial A$  einer Menge  $A \subset X$  ist definiert als die Menge der Punkte in  $X$ , welche sowohl Berührungspunkte von  $A$  als auch  $A^c$  sind.

Es seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $x_0 \in X$  und  $r > 0$ . Zeigen Sie, dass für  $B_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$  die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned}
\partial B_r(x_0) &\subset S_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) = r\} \\
B_r(x_0)^{cl} &\subset K_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.
\end{aligned}$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Es gelten auch die umgekehrten Inklusionen.

*Beweis.* Sei  $x \in X, d(x, x_0) > r$ . Sei  $\epsilon = (d(x, x_0) - r)/2$ . Wir behaupten, dass  $B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0) = \emptyset$ . Sei  $y \in B_r(x_0)$ . Es folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x, x_0) &\leq d(x_0, y) + d(y, x) \\ d(y, x) &\geq d(x, x_0) - d(x_0, y) \\ &\geq d(x, x_0) - r \\ &= 2\epsilon \end{aligned}$$

also  $x$  ist kein Berührungspunkt von  $B_r(x_0)$  und

$$B_r(x_0)^{cl} \subset K_r(x_0).$$

Jetzt sei  $x \in B_r(x_0)$ . Es gilt  $B_r(x_0)^c = \{x \in X : d(x, x_0) > r\}$ . Sei noch einmal  $\epsilon = \frac{r-d(x, x_0)}{2}$ . Wir zeigen:  $x$  ist kein Berührungspunkt von  $B_r(x_0)^c$ , also  $B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0)^c = \emptyset$ . Sei  $y \in B_r(x_0)^c$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, x) + d(x, y) \\ d(y, x) &\geq d(y, x_0) - d(x_0, x) \\ &\geq r - d(x_0, x) \\ &= 2\epsilon \end{aligned}$$

also alle solche Punkte sind keine Berührungspunkte von  $B_r(x_0)^c$  und es folgt daraus:

$$\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0).$$

Die Umkehrrichtung ist falsch. Sei  $X = \{a, b\}$  und die Metrik definiert:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) = (a, b) \text{ oder } (x, y) = (b, a) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten  $B_1(a) = \{a\}$ . Dann ist  $b$  kein Berührungspunkt von  $B_1(a)$ , weil  $B_1(b) = \{b\}$  und  $\{b\} \cap \{a\} = \emptyset$ . Dann ist  $b$  in weder  $\partial B_r(x_0)$  noch  $B_r(x_0)^{cl}$ , obwohl  $d(a, b) = 1 \leq 1$ .  $\square$

## 2.8 Blatt 9

**Aufgabe 79.** Sei  $M$  eine Menge mit  $\#M = \infty$ . Eine Menge  $A \subset M$  sei als offen definiert, falls  $M = \emptyset$  oder  $M \setminus A$  endlich ist. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Topologie definiert. Ist diese Topologie metrisierbar?

*Beweis.* (i)  $\emptyset$  ist per Definition offen.

(ii)  $M \setminus M = \emptyset$ , was endlich ist, also  $M$  ist offen.

(iii) Sei  $A_i, i \in I$  offene Mengen. Es gilt

$$M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq M \setminus A_j$$

für alle  $j \in I$ . Da  $M \setminus A_j$  endlich ist, ist auch  $\bigcup_{i \in I} A_i$  offen.

(iv) Sei  $A_i, i \in \{1, \dots, n\} := I$  offene Mengen. Es gilt

$$M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i).$$

Weil  $I$  endlich ist, und alle Mengen  $M \setminus A_i$  endlich sind, ist  $\bigcap_{i \in I} A_i$  offen.

Es ist aber nicht metrisierbar, weil es nicht Hausdorff ist. Sei  $x, y \in M$ ,  $x \neq y$ . Wir nehmen an, dass es offene Mengen  $U, V$  gibt, so dass  $U \cap V = \emptyset$  und  $x \in U, y \in V$ . Weil  $U \cap V = \emptyset$ , ist  $V \subseteq M \setminus U$ , also  $V$  ist endlich. Aber  $M \setminus V$  ist dann unendlich, also  $V$  ist nicht offen, ein Widerspruch.  $\square$

**Aufgabe 80.** Zeigen Sie, dass

$$M = \left\{ \left( x, \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right)^T \mid x \in (0, 1) \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend in  $\mathbb{R}^n$  ist.

*Beweis.* Sei

$$M_1 = \left\{ \left( x, \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right)^T \mid x \in (0, 1) \right\}$$

$$M_2 = \{0\} \times [-1, 1]$$

$M_1$  und  $M_2$  sind offenbar wegzusammenhängend (und daher zusammenhängend). Wir fahren per Widerspruch fort: Nehme an, dass es  $U, V$  offen gibt, so dass  $U \cup V = M$ . Es muss gelten, dass  $M_1$  und  $M_2$  Teilmengen von entweder  $U$  oder  $V$  sind, sonst wäre  $M_1$  oder  $M_2$  nicht zusammenhängend. Die beide müssen in unterschiedliche Mengen sein, also oBdA  $M_1 \subseteq U$  und  $M_2 \subseteq V$ , sonst wäre die andere Menge leer.

Wir betrachten  $(0, 0) \in M_2 \subseteq V$ . Weil  $V$  offen ist, gibt es einen Kugel  $B_r((0, 0)) \subseteq V$ . Per Definition von  $U$  und  $V$  ist  $B_r((0, 0)) \cap M_1 = \emptyset$ . Wir zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

Es gilt

$$M_1 = \left\{ \left( \frac{1}{x}, \sin x \right)^T \mid x \in (1, \infty) \right\}.$$

Es gibt  $N$ , so dass  $\frac{1}{N} < r$ . Weil  $\sin x$  unendlich viele Nullstellen hat, gibt es einen Nullstelle nach  $N$ , also es gibt ein Punkt  $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x < r$ , also  $(x, 0) \in B_r((0, 0))$ , ein Widerspruch.

Jetzt zeigen wir:  $M$  ist nicht wegzusammenhängend. Wir zeigen, dass es keinen Weg zwischen  $M_2$  und  $(1, \sin 1)$  gibt. Falls es einen solchen Weg gibt, gibt es  $t_1 \geq 0$ , so dass  $\gamma(t) \notin M_2 \forall t \geq t_1$ , also wir nehmen oBdA an, dass  $\gamma(0) \in M_2$  und  $\gamma(t) \in M_1 \forall t \in (0, 1]$ . Sei  $\gamma(0) = (0, a)$ .

Weil  $\text{im}(\gamma) \subseteq M$ , muss dann gelten, dass  $\gamma((0, 1]) = M_1$ . Sei  $B_r((0, a))$  ein offener Kugel um  $(0, a)$  bzw.  $\gamma(0)$ , mit  $r$  hinreichend klein, so dass  $|1 - a| > r$  oder  $|r| < |a|$  gilt (also der Kugel enthält keine Punkte von der Form  $(x, 1)$  oder  $(x, 0)$ ).

Sei  $[0, x)$  ein offener Kugel von  $[0, 1]$  um 0. Wie vorher gibt es dann mindestens ein Punkt (eigentlich unendlich viel)  $t$ , so dass  $\gamma(t) = (x, 1)$  bzw.  $(x, 0)$  für  $x \in [0, 1]$ , also  $f(B_x(0)) \not\subseteq B_r((0, a))$ , wobei  $f(x) = \sin(1/x)$ . Dann kann  $K$  nicht wegzusammenhängend sein.  $\square$

**Aufgabe 81.** Es seien  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  sowie  $r > 0$ . Wir betrachten die Menge  $K := \{x_0\} \cup K_r(x_1)$  und die konvexe Hülle dieser Menge ist gegeben durch

$$\text{conv}K := \{tx_0 + (1-t)x \mid t \in [0, 1], x \in K_r(x_1)\}.$$

Zeigen Sie, dass  $\text{conv}K$  kompakt ist.

*Hinweis: Wählen Sie geschickt eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge.*

*Beweis.* Wir betrachten  $K' \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$  mit

$$K' = \{(x, x_0, t) \mid x \in K_r(x_1) \text{ und } t \in [0, 1]\}.$$

Als Produkt kompakte Mengen ist  $K'$  kompakt. Sei  $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$f(x, x_0, t) = tx_0 + (1-t)x.$$

$f$  ist stetig und das Bild von  $K'$  ist  $K$ . Daraus folgt:  $K$  ist kompakt.  $\square$

## 2.9 Blatt 10

**Aufgabe 82. (Stetigkeit, partielle und totale Differenzierbarkeit)** Sind die Funktionen mit den Funktionswerten

$$(a) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/4},$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig, partiell oder total differenzierbar in  $(0, 0)$ ?

*Beweis.* (a) Die Funktion ist stetig. Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Sei  $\delta = \epsilon^2$ . Dann für alle  $r \in \mathbb{R}^2$ , so dass  $\|r - 0\| = \|r\| < \delta$  gilt  $f(x, y) = (\|r\|^2)^{1/4} = \|r\|^{1/2} < \epsilon$ .

Die Funktion ist nicht partiell differenzierbar. Für die Gerade  $x = 0$  gilt  $f(0, y) = (y^2)^{1/4} = \sqrt{|y|}$ . Aber  $g(y) = \sqrt{|y|}$  ist nicht bei 0 differenzierbar. Ähnlich ist sie auch nicht durch  $x$  partiell differenzierbar.

Weil die Funktion nicht partiell differenzierbar ist, ist sie auch nicht total differenzierbar.

(b) Die Funktion ist stetig. Es gilt

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right| \leq (x^2 + y^2).$$

Da  $x^2 + y^2 \rightarrow 0$  wenn  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , gilt es auch für  $f(x, y)$  und  $f(x, y)$  ist in  $(0, 0)$  stetig.

Sie ist nicht partiell differenzierbar. z.B. Für die Gerade  $y = 0$  ist  $f(x, 0) = x^2 \sin(1/|x|)$ , was nicht differenzierbar bei 0 ist. Ähnlich existiert auch  $\frac{\partial f}{\partial y}$  nicht.

Weil  $f$  nicht partiell differenzierbar ist, ist  $f$  nicht total differenzierbar.

(c) Die Funktion ist stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2} \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}} \end{aligned}$$

Da  $\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \rightarrow \infty$  wenn  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , geht die Funktion  $f(x, y) \rightarrow 0$ . Dann ist  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ , also die Funktion ist stetig.

Sie ist auch partiell differenzierbar. Da  $f(x, 0) = 0$ , ist  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ . Es gilt

$$f(0, y) = \frac{y(y^2)^{3/2}}{y^4 + y^2}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y^2)^{3/2}}{y^4 + y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|^3}{y^4 + y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Da  $\frac{1}{y^2 + 1}$  stetig ist und  $\frac{1}{y^2 + 1} \rightarrow 0$  wenn  $y \rightarrow 0$ , existiert der Grenzwert. Der Grenzwert ist auch 0.

Sie ist aber nicht total differenzierbar. Falls eine Ableitung existiere, kann die Ableitung durch die partielle Ableitungen dargestellt werden. Diese Darstellung liefert eine totale Ableitung von 0. Es würde also gelten:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Es gilt aber

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2 + y^2}$$

was nicht existiert.  $\square$

**Aufgabe 83. (Tangenten von Kurven)** Für eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $t \in [a, b]$  ein regulärer Punkt, falls  $\gamma'(t) \neq 0$ . Andernfalls nennen wir  $t$  ein singulären Punkt.

Bestimmen Sie die Menge der regulären/singulären Punkte folgender Kurven:

- (a)  $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma_1(t) = (t^2, t^3)^T$ ,
- (b)  $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\gamma_2(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))^T$ ,
- (c)  $\gamma_3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\gamma_3(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$ .

*Beweis.* (a)  $\gamma_1(t) = (2t, 3t^2)^T$ .

Singulären Punkte:  $\{0\}$ .

Regulären Punkte:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

- (b)  $\gamma_2'(t) = (3 \cos^2(t)(-\sin t), 2 \sin^2(t) \cos t)$ , also

Singulären Punkte:  $S = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$

Regulären Punkte:  $[0, 2\pi] \setminus S$ .

- (c)  $\gamma_3'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t - t \cos t, 1)^T$

Die Ableitung ist nie der Nullvektor, also

Singulären Punkte:  $\emptyset$

Regulären Punkte:  $[0, 2\pi]$ .  $\square$

**Aufgabe 84. (Rechnen mit der Kettenregel)** Der reellwertigen Funktionen  $f(u_1, \dots, u_n)$  und  $u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m)$  seien auf den offenen Mengen  $U \subset \mathbb{R}^n$  bzw.  $G \subset \mathbb{R}^m$  erklärt, und die Funktion

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) := f(u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m))$$

existiere auf  $G$ .

Im Folgenden ist jeweils die Ableitung  $D\varphi$  der Funktion  $\varphi$  zu berechnen:

- (a)  $f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2$ ;  $u(t) = e^t \cos t$ ,  $v(t) = e^t \sin t$ ,  $w(t) = e^t$ ,
- (b)  $f(u, v) = \ln(u^2 + v^2)$  für  $(u, v) \neq (0, 0)$ ;  $u(x, y) = xy$ ,  $v(x, y) = \sqrt{x}/y$  für  $x, y > 0$ ,
- (c)  $f(u, v, w) = uv + vw - uw$ ;  $u(x, y) = x + y$ ,  $v(x, y) = x + y^2$ ,  $w(x, y) = x^2 + y$ .

*Beweis.* (a) Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow (u(t), v(t), w(t))^T$ . Es gilt

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(t) &= Df(g(t))Dg(t) \\ &= (2u, 2v, 2w)(u'(t), v'(t), w'(t))^T \\ &= 2uu'(t) + 2vv'(t) + 2ww'(t) \\ &= 2(e^t \cos t)(e^t \cos t - e^t \sin t) \\ &\quad + 2(e^t \sin t)(e^t \sin t + e^t \cos t) + 2e^{2t} \\ &= 4e^{2t}. \end{aligned}$$

(b) Sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))^T$ . Es gilt

$$\begin{aligned} Df &= \left( \frac{2u}{u^2 + v^2}, \frac{2v}{u^2 + v^2} \right) \\ Dg &= \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} & \sqrt{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(x, y) &= Df(g(x, y))Dg(x, y) \\ &= \left( \frac{2xy}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}, \frac{2\sqrt{x}/y}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \right) \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} & \sqrt{x} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1 + 2xy^4}{x + x^2y^4}, \frac{2y(1 + xy^2)}{1 + xy^4} \right) \end{aligned}$$

(c) Sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y), w(x, y))^T$ . Es gilt

$$\begin{aligned} Df(u, v, w) &= (v - w, u + w, v - u) \\ Dg(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(x, y) &= Df(g(x, y))Dg(x, y) \\ &= (x + y^2 - x^2 - y, x^2 + x + 2y, y^2 - y) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \\ &= (y(1 + y) + 2x(1 - y + y^2), \\ &\quad x + 2xy + x^2(2y - 1) + 2y(3y - 1)). \quad \square \end{aligned}$$

**Aufgabe 85.** Beweisen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und geben Sie die Ableitung an:

- (a)  $f(x) = x^T A x$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  und ein  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  
 (b)  $f(X, Y) = XY$  für  $(X, Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times k}$ .

*Beweis.* (a) Wir berechnen  $f'(x_0)$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + \delta x) &= (x_0 + \delta x)^T A (x_0 + \delta x) \\
 &= x_0^T A x_0 + (\delta x)^T A x_0 + (x_0)^T A (\delta x) \\
 &\quad + (\delta x)^T A (\delta x) \\
 &= f(x_0) + ((x_0)^T A^T \delta x)^T + (x_0)^T A (\delta x) \\
 &\quad + (\delta x)^T A (\delta x) \\
 &= f(x_0) + x_0^T A^T (\delta x) + (x_0)^T A (\delta x) \quad (x_0)^T A^T \delta x \in \mathbb{R} \\
 &\quad + (\delta x)^T A (\delta x) \\
 &= f(x_0) + x_0^T (A^T + A) (\delta x) + (\delta x)^T A (\delta x)
 \end{aligned}$$

Wir identifizieren  $Df(x_0) = x_0^T (A^T + A)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $(\delta x)^T A (\delta x)$  eigentlich die Restabbildung ist. Da

$$\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} \left| \frac{(\delta x)^T}{\|\delta x\|} A \delta x \right| \leq \lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} \|A\| \|\delta x\| = 0,$$

gilt die Behauptung.

- (b) Ähnlich berechnen wir  $f'(X_0, Y_0)$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(X_0 + \delta X, Y_0 + \delta Y) &= (X_0 + \delta X)(Y_0 + \delta Y) \\
 &= X_0 Y_0 + (\delta X) Y_0 + X_0 (\delta Y) + (\delta X)(\delta Y)
 \end{aligned}$$

Da  $\frac{(\delta X)(\delta Y)}{\|(\delta X, \delta Y)\|} \rightarrow 0$  wenn  $\|(\delta X, \delta Y)\| \rightarrow 0$ , ist die Ableitung

$$J_f((\delta X, \delta Y)) = (\delta X) Y_0 + X_0 (\delta Y).$$

□

**Aufgabe 86.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x, y) = xy$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  einen kritischen Punkt in  $(x, y) = (0, 0)$  besitzt, aber kein Extremum.

*Beweis.*

$$f'(x, y) = (y, x)^T$$

und  $f'(0, 0) = (0, 0)$ . Die Funktion besitzt in  $(0, 0)$  daher einen kritischen Punkt. Es ist aber kein Extremum. Es gilt  $f(0, 0) = 0$ . Es ist kein Maximum, weil auf der Gerade  $x = y = t$  gilt  $f(t, t) = t^2 > 0$  für  $t \neq 0$ , also in jede offene Menge bzw. offenem Kugel gibt es mindestens ein Punkt  $(x, y) = (t, t)$ , so dass  $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ . Ähnlich gilt, auf der Gerade  $(x, y) = (t, -t)$ ,  $f(t, -t) = -t^2 < 0$ , also  $f(0, 0)$  ist kein Minimum. Dann besitzt  $f$  kein Extremum in  $(0, 0)$ . □



## 2.10 Blatt 11

**Aufgabe 87.** Der Laplace-Operator  $\Delta$  ist für  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  definiert durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f.$$

Allgemeiner ist ein (homogener) Differentialoperator  $P$  zweiter Ordnung für  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  definiert durch

$$Pf = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j f.$$

Zeigen Sie, dass die einzigen rotationsinvarianten Differentialoperatoren, d.h. solche, welche

$$P(f(Qx)) = (Pf)(Qx).$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle orthogonalen Matrizen  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  erfüllen, Vielfache des Laplace-Operators darstellen.

*Beweis.* Sei  $Q$  orthogonal und beliebig mit Elemente  $Q_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Sei auch  $x \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Die Voraussetzung ist dann Es gilt (Kettensregel)

$$\partial_i f(Qx) = \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(Qx) Q_{ji}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j f(Qx) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \left( \sum_{k=1}^n (\partial_k f)(Qx) Q_{kj} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} (\partial_l \partial_k f)(Qx) Q_{kj} Q_{li} \\ &= \sum_{k,l=1}^n (\partial_l \partial_k f) \sum_{i,j=1}^n Q_{li} a_{ij} Q_{kj} \\ &= \sum_{k,l=1}^n (\partial_l \partial_k f) \sum_{i,j=1}^n Q_{li} a_{ij} (Q^T)_{jk} \\ &\stackrel{?}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\partial_i \partial_j f)(Qx) \end{aligned}$$

Sei  $B := Q A Q^T$ . Offensichtlich muss dann, für alle orthogonale Matrizen  $Q$ ,  $Q A Q^T = A$  gelten.  $\square$

**Aufgabe 88.** Beweisen Sie: Ist  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , so existiert für jedes  $\epsilon > 0$  ein Polynom  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\|f - p\|_\infty \leq \epsilon.$$

Die Menge der Polynome auf dem Intervall  $[a, b]$  ist also dicht im Raum der stetigen Funktionen bzgl. der Supremumsnorm.

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) (Hutfunktionen) Es sei

$$h_{a,b}(x) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{|x-a|}{b} \right\}, x \in \mathbb{R}$$

für  $a \in \mathbb{R}, b > 0$ . Begründen Sie, dass auf jedem kompakten Intervall  $I$  für jedes  $\epsilon$  ein Polynom  $p$  existiert mit  $\|h_{a,b} - p\|_{\infty, I} \leq \epsilon$ .

(b) (Lineare Interpolante) Zu einer gegebenen Partition von  $[a, b]$  mit Stützstellen  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$  definieren wir die lineare Interpolante von  $f$  durch

$$H(x) = \sum_{i=0}^N h_{x_i, \Delta x_i}(x) f(x_i),$$

wobei  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\Delta x_0 = x_1 - a$ . Bestimmen Sie zu gegebenem  $\epsilon > 0$  eine Partition von  $[a, b]$ , sodass  $\|H - f\|_{\infty} \leq \epsilon$  gilt.

(c) Beweisen Sie den Approximationssatz von Weierstraß.

*Beweis.* (a) Wir brauchen hier die Aufgaben

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \max \{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

□

**Aufgabe 89.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in  $(0, 0)$  zweimal partiell differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

gilt. Ist  $f$  in  $\mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar?

*Beweis.* Wir berechnen die Ableitung auf der Gerade  $(x, 0)$ , also  $y = 0$ . Es gilt  $f(x, 0) = 0$ . Daraus folgt

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} f(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\
&= x
\end{aligned}$$

Dies ist genug, um die partielle Ableitung  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  zu berechnen. Es gilt  $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ , also

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = 1.$$

Ähnlich berechnen wir die Ableitung auf der Gerade  $(0, y)$ , also  $x = 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} f(x, y) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\
&= -y
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right|_{(0,0)} = -1.$$

Die sind ungleich, also  $f$  kann in  $(0, 0)$  nicht stetig differenzierbar sein, sonst wären die Ableitungen gleich.  $\square$

**Aufgabe 90.** Betrachten Sie die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Zeigen Sie:

- (a) Für jede Richtung  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nimmt  $f_v(t) = f(tv)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ein striktes lokales Minimum in  $t = 0$  an.
- (b) Die Funktion  $f$  besitzt in  $(0, 0)$  kein lokales Minimum

*Beweis.* (a) Sei  $v = (a, b)^T$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
f_v(t) &= f(tv) \\
&= (bt - a^2t^2)(bt - 2a^2t^2) \\
&= b^2t^2 + 2a^4t^4 - 2ba^2t^3 - ba^2t^3 \\
&= b^2t^2 + 2a^4t^4 - 3ba^2t^3 \\
&= t^2(2a^4t^2 - 3ba^2t + b^2)
\end{aligned}$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
f'_v(t) &= t(8a^4t^2 - 9a^2bt + 2b^2) \\
f'_v(0) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_v''(t) &= 2(12a^4t^2 - 9a^2bt + b^2) \\f_v''(0) &= 2b^2 > 0\end{aligned}$$

Da  $f_v''(0) > 0$  und  $f_v'(0) = 0$ , ist  $f_v'(0)$  ein lokales Minimum. Weil  $f_v(t)$  ein Polynom vom Grad 4 ist, besitzt  $f_v(t)$  maximal 4 Nullstellen, also  $f_v(0)$  ist ein strikt lokales Minimum.

(b) Offensichtlich ist  $f(0, 0) = 0$ . Sei  $x$  fest. Wir wählen  $x^2 < y < 2x^2$ . Damit ist

$$f(x, y) = \underbrace{(y - x^2)}_{>0} \underbrace{(y - 2x^2)}_{<0} < 0,$$

also  $f(x, y) < 0$ . Da

$$\begin{aligned}\|(x, y)\| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\&\leq \sqrt{x^2 + (2x^2)^2} \\&= \sqrt{x^2 + 4x^4} \\&= |x|\sqrt{1 + 4x^2}\end{aligned}$$

was wir beliebig klein wählen kann, gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein Punkt  $p \in B_\epsilon((0, 0))$  so dass  $f(p) < f((0, 0))$ , also  $f$  besitzt kein lokales Minimum in  $(0, 0)$ .  $\square$

## 2.11 Blatt 12

**Aufgabe 91.** Begründen Sie, warum die Determinante  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung im Punkt  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Welche besondere Form nimmt  $(D\det)(\text{Id})$  an?

*Beweis.* Per Definition ist

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) X_{1\sigma(1)} X_{2\sigma(2)} \dots X_{n\sigma(n)}.$$

Da dies eine Summe von Produkte der Komponenten sind, ist  $\det$  unendlich oft differenzierbar.

Es gilt  $\det' : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R})$ . Wir betrachten eine parameterabhängige Matrix  $A(t)$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \det A(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}(t) \dots A_{n\sigma(n)}(t) \\&= \sum_{\sigma \in S_n} \left[ (A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \sum_{j=1}^n \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right] \\&= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} \left[ (A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right]\end{aligned}$$

Für festes  $j$  kann dieser Ausdruck so vorgestellt werden: Wir setzen in der  $j$ -te Zeile  $A'$  statt  $A$ , also

$$\begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A'_{j1}(t) & A'_{j2}(t) & \dots & A'_{jn}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{\textit{j-te Zeile}}$$

und berechnen deren Determinante. Wir führen eine Laplaceentwicklung um die  $j$ -te Zeile durch und erhalten, mit  $A^\#$  die adjugierte Matrix

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A'_{jk}(t) A^\#_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A^\#_{kj} A'_{jk}(t) \\ &= \sum_{k=1}^n (A^\# A')_{kk} \\ &= \text{tr}(A^\# A') \end{aligned}$$

Also die Ableitung  $\det'$  im Punkt  $A$  ist die Abbildung, die  $B$  nach  $\text{tr}(A^\# B)$  abbildet.

Im Punkt  $I$ : Es gilt  $I^\# = I$ , also  $D\det(I) = \text{tr}$ .  $\square$

**Aufgabe 92.** Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar, so kann die zweite Ableitung  $D^2f$  in jedem Punkt  $x \in U$  durch eine bilineare Abbildung  $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  darstellen. Für eine gegebene Basis auf dem  $\mathbb{R}^n$ -wir wählen die kanonische Basis hier - lassen sich bilineare Abbildungen durch eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  darstellen, die sog. Hesse-Matrix  $Hf$  mit

$$Hf(x, y) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die partiellen Ableitungen nach dem Satz von Schwarz vertauschen, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch.

Es sei nun  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  in  $(0, 0)$  ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt genau dann besitzt, wenn die Hesse-Matrix von  $f$  (in  $(0, 0)$ ) positiv semi- negativ semi- bzw. indefinit ist.
- (b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für allgemeine Funktionen mit positiv (bzw. negativ) semidefiniter Hesse-Matrix im kritischen Punkt kein lokales Minimum (bzw. Maximum) vorliegen muss.

*Beweis.* (a) Offensichtlich ist  $A$  die Hesse-Matrix und  $f(0) = 0$ . Wir drücken  $f(x)$  als  $\frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle$  aus.

Dann per Definition: Falls  $A$  positiv semidefinit ist, ist  $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle \geq 0$  für alle  $x$ , also  $f$  besitzt ein Minimum in  $(0, 0)$ . Die Umkehrrichtung gilt auch per Definition. Sei  $U$  eine Umgebung. Für  $x \in U$  ist  $\langle x, Ax \rangle \geq 0$  per Definition eines Minimums.

Das gleiche Argument (per Definition) gilt für  $f$  ein Maximum in  $(0, 0)$ .

Die Eigenschaft des Sattelpunkts folgt durch ein Eliminationsverfahren: Falls  $A$  indefinit ist, ist sie weder positiv noch negativ. Dann besitzt  $f$  weder ein Maximum noch ein Maximum in  $(0, 0)$ . Da die Ableitung noch 0 ist, muss  $f$  ein Sattelpunkt im Ursprung besitzen.

- (b) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^3$  besitzt in 0 Ableitung 0. 0 ist sowohl positiv als auch negativ definit. Die Funktion besitzt aber weder ein Maximum noch ein Minimum in 0.  $\square$

**Aufgabe 93.** Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T.$$

- (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von  $F$ .
- (b) In welchem Punkt  $p \in \mathbb{R}^2$  existiert die Inverse von  $JF(p)$ ?
- (c) Finden Sie eine lokale inverse Abbildung  $F^{-1}$  von  $F$  in einer Umgebung von  $p = (1, 0) = F(1, 0)$  und berechnen Sie die Ableitung von  $F^{-1}$  in  $p$ .
- (d) Ist  $F$  auf dem ganzen Gebiet  $\{p \in \mathbb{R}^2 | JF(p) \text{ invertierbar}\}$  global invertierbar?

*Beweis.* (a)

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

- (b)  $\det(JF) = 4x^2 + 4y^2$ . Dies ist genau dann Null, wenn  $x = y = 0$ . Sonst ist  $JF$  invertierbar.

(c) Wir lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= \xi \\2xy &= \zeta \\y &= \frac{\zeta}{2x} \\x^2 - \left(\frac{\zeta}{2x}\right)^2 &= \xi \\x^4 - \frac{\zeta^2}{4} &= \xi x^2 \\x^4 - \xi x^2 - \frac{\zeta^2}{4} &= 0 \\x^2 &= \frac{1}{2} \left[ \xi \pm \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} \right]\end{aligned}$$

Beim Punkt  $(x, y) = (1, 0)$  ist  $(\xi, \zeta) = (1, 0)$ . In einer genug kleinen Umgebung nehmen wir daher die positive Nullstelle und danach positive Würzel.

$$x = \left[ \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{2} \right]^{1/2}.$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{\zeta}{2} \left[ \frac{2}{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \right]^{1/2}.$$

Dies ist die Umkehrabbildung.

(d) Nein, weil sie nicht injektiv ist. Es gilt  $F(1, 1) = (0, 2)$  und  $F(-1, -1) = (0, 2)$ , aber  $(1, 1) \neq (-1, -1)$ .  $\square$

**Aufgabe 94.** Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen wir die Glattheit der Inversen-Abbildung  $\inf : GL(n) \rightarrow GL(n)$ . Gehen Sie wie folgt vor:

- (a) Begründen Sie, dass die Abbildung  $A \cdot B \rightarrow AB$  auf  $\mathbb{R}^{(n \times n)^2}$  unendlich oft differenzierbar ist.
- (b) Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um  $\inf \in \mathcal{C}^\infty(GL(n), GL(n))$  zu beweisen.

*Hinweis: Betrachten Sie  $A \cdot B = \text{Id}$*

*Beweis.* (a) Das Produkt  $AB$  besitzt Komponente  $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$ . Dann sind alle Komponenten von  $AB$  nach alle Komponenten von  $A$  und  $B$  unendlich stetig differenzierbar, da die lineare Kombinationen von Produkten von  $AB$  sind.

- (b) Wir betrachten  $g : \mathbb{R}^{(n \times n)^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $g(A, B) \rightarrow AB - I$ . Falls die Ableitung  $(D_2g)(A, B)$  invertierbar ist, ist die Abbildung  $\text{inv} : A \mapsto B$  glatt.

Da  $I$  konstant ist, leiten wir also das Produkt  $AB$  nach  $B$  ab. Dies ist aber bekanntermaßen glatt, also nach dem Satz von inverse Funktionen ist  $\text{inv}$  glatt.  $\square$



## Vertiefung Analysis

Ich habe die Übungen für Vertiefung Analysis mit Lucas Wollman gemacht.

### 3.1 Blatt 1

**Aufgabe 95.** Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $\mathcal{A}, \mathcal{S}$   $\sigma$ -Algebren über  $X$  sowie  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $Y$ . Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a)  $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .
- (b)  $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .
- (c)  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .
- (d)  $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B \in \mathcal{B}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .
- (e)  $f(\mathcal{A}) = \{f(A) \subseteq Y \mid A \in \mathcal{A}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $Y$ .

*Beweis.* (a) Falsch. Sei

$$\begin{aligned} X &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{A} &= \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\} \\ \mathcal{S} &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}.$$

keine  $\sigma$ -Algebra, weil

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{S}.$$

(b) Richtig.

$$(1) X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$$

(2) Sei  $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ . Dann  $A \in \mathcal{A}$  und  $A \in \mathcal{S}$ .

Daraus folgt:  $A^c \in \mathcal{A}$  und  $A^c \in \mathcal{S}$ . Deswegen ist  $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ .

(3) Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ . Dann gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$$

Daraus folgt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}.$$

(c) Falsch.  $X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \notin \mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$

(d) Richtig.

(1)  $f^{-1}(Y) = X \in f^{-1}\mathcal{B}$

(2) Sei  $A = f^{-1}(B)$

$$X - A = f^{-1}(\underbrace{Y - B}_{\in \mathcal{B}}) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

(3) Es folgt aus

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = f^{-1} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \right).$$

(e) Falsch. Sei  $a \in Y$  und  $f$  die konstante Abbildung  $f(x) = a \forall x \in X$ . Dann gilt

$$f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

was keine  $\sigma$ -Algebra ist, solange  $Y \neq \{a\}$ .

□

**Aufgabe 96.** (a) Sei  $X := \mathbb{Q}$  und  $\mathcal{A}_\sigma(M)$  die von  $M := \{(a, b] \cap \mathbb{Q} | a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}_\sigma(M) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  gilt.

(b) Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Zeigen Sie: Für  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$  gilt

$$f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})) = \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})).$$

Das Urbild von  $\mathcal{M}$  ist hierbei analog zum Urbild einer  $\sigma$ -Algebra definiert durch

$$f^{-1}(\mathcal{M}) := \{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{M}\}.$$

*Beweis.* (a)  $\{q\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) \forall q \in \mathbb{Q}$ , weil

$$\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( q - \frac{1}{n}, q \right] \in \mathcal{A}_\sigma(M).$$

Weil  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, sind alle Teilmenge  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  abzählbar, daher

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\{\{q\} \mid q \in \mathbb{Q}\}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(M)$$

Es ist klar, dass

$$\mathcal{A}_\sigma(M) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}).$$

(b) Sei  $P = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}\}$ . Per Definition ist  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}$ . Dann ist es zu beweisen:

$$f^{-1} \left( \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A} \right) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})).$$

Jeder  $\sigma$ -Algebra  $f^{-1}(\mathcal{A})$  enthält  $f^{-1}(\mathcal{M})$ . Daraus folgt, dass

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})) \subseteq \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

Jetzt betrachten wir

$$\mathcal{M}' := f_* (\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}))).$$

Es ist schon in der Vorlesung bewiesen, dass  $\mathcal{M}'$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, die  $\mathcal{M}$  und daher auch  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})$  enthält. Weil  $f^{-1}(\mathcal{M}')$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist  $f^{-1}(\mathcal{M}') = \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}'))$ . Daraus folgt:

$$f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}') = \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})). \quad \square$$

**Aufgabe 97.** Wir betrachten  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardmetrik, also ausgestattet mit der Euklidischen Norm  $\|\cdot\|$ . Für  $r > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  sei  $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$ . Definiere außerdem  $B_{\mathbb{Q}} := \{B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n \mid \exists r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$  und  $B_{\mathbb{R}} := \{B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \mid r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$

(a) Zeigen Sie: Für jeder offene Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt  $A = \bigcup_{B_r(q) \in B_{\mathbb{Q}}} B_r(q)$  mit

$$M := \{B_r(q) \in B_{\mathbb{Q}} \mid B_r(q) \subseteq A\}.$$

(b) Folgern Sie nun  $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$

*Beweis.* (a) Es genügt zu beweisen, dass jeder offene Ball eine Vereinigung von  $\mathbb{Q}$ -Bälle sind.

Sei  $B_p(x)$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  eine offene Ball. Sei auch  $(a_i)$ ,  $a_i \in \mathbb{Q}^n$  eine Folge, für die gilt

$$\|x - a_i\| < r \forall i$$

Es sollte den Schnitt mit  $\mathbb{Q}$  geben, also  $(q - \frac{1}{n}, q] \cap \mathbb{Q}$  statt  $(q - \frac{1}{n}, q]$

$$f^{-1} \left( \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A} \right) =$$

stimmt nicht. Es gilt zu sagen, weil  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})$ , gilt auch

$$f^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{M})).$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = x$$

Sei dann

$$M_i = B_{r-\|x-a_i\|}(a_i) \in B_{\mathbb{Q}}.$$

Es ist klar, dass jeder  $M_i \subseteq B_r(x)$  ist. Wir beweisen auch, dass  $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = B_r(x)$ .

Sei  $y \in B_r(x)$ . Es gilt  $\|y - x\| = r_0 < r$ . Sei  $\xi = r - r_0$ . Weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ , gibt es ein Zahl  $a_k$ , wofür gilt

$$\|a_k - x\| < \frac{\xi}{2}.$$

(Eigentlich existiert unendlich viel, aber die brauchen wir nicht). Es gilt dann

$$\|y - a_k\| \leq \|y - x\| + \|x - a_k\| \leq r_0 + \frac{\xi}{2} < r - \frac{\xi}{2} < r - \|x - a_i\|,$$

also  $y \in B_{r-\|x-a_k\|}(a_k)$ . Jetzt ist die Ergebnis klar: Weil jeder offene Menge eine Vereinigung von offene Bälle ist, gilt

$$A = \bigcup B_p(x) = \bigcup \bigcup B_r(q),$$

wobei  $p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$  und  $r \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}^n$

(b)  $\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$  per Definition.

Aus  $B_{\mathbb{Q}} \subseteq B_{\mathbb{R}}$  folgt  $\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{R}})$

Aus (a) folgt, dass

$$B_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}}).$$

Dann

$$\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}_{\sigma}(\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}})) = \mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}}).$$

Deswegen

$$\mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_{\sigma}(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n. \quad \square$$

**Aufgabe 98.** Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$  und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  eine Mengenfunktion.

(a) Sei  $\mu$   $\sigma$ -subadditiv,  $B \in \mathcal{A}$  und definiere  $\mu_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \mu_B(A) := \mu(A \cap B)$ . Zeigen Sie, dass  $\mu_B$  wohldefiniert und eine  $\sigma$ -subadditive Mengenfunktion ist.

(b)  $\mu$  erfülle die beiden Eigenschaften

(1)  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \cap B = \emptyset$ .

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$  für alle  $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$  mit  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ .

Zeigen Sie, dass  $\mu$   $\sigma$ -additiv ist.

Leider ist  
der Beweis  
hier falsch,  
weil es sein  
kann, dass  
 $r - \|x - a_i\| \notin \mathbb{Q}$ . Man  
muss eine  
durch  
 $r - \|x - a_i\|$   
beschränkte  
Folge  
betrachten.

*Beweis.* (a) Weil  $B \in \mathcal{A}$ , ist  $B \cap A \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A}$ .  $\mu_B$  ist daher wohldefiniert.

Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{A}, \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ . Sei auch  $B_j = A_j \cap B \in \mathcal{A}$ . Dann gilt

$$\mu_B \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \mu \left( B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \mu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_B(A_j)$$

(b) Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$  paarweise disjunkter Menge. Dann definiere  $B_j = \bigcup_{i=1}^j A_j$ . Für  $k$  endlich ist es klar,

$$\mu(B_k) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i).$$

Weil  $B_i \subseteq B_{i+1}$ , (2) gilt auch:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right). \quad \square$$

## 3.2 Blatt 2

**Aufgabe 99.** (Maß über  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  definiere

$$\mu_{\lambda} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mu_{\lambda}(A) := \sum_{k \in A} \exp(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bestimmen Sie jeweils alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , für die

- (a)  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\lambda})$  ein Maßraum ist.
- (b)  $\mu_{\lambda}$  ein endliches Maß ist.
- (c)  $\mu_{\lambda}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

*Beweis.* (a)  $\mu_{\lambda}$  ist auf jedem Fall für endliche Teilmengen von  $\mathbb{N}$  wohldefiniert. Weil  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$  konvergiert (absolut) für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , konvergiert absolut alle Teilfolge.  $\mu_{\lambda}$  ist auch trivialerweise additiv, weil es eine Summe ist.

(b) Das passt für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , weil

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)(\exp(\lambda) - 1) < \infty.$$

(c) Wir brauchen

$$\exp(\lambda)(\exp(\lambda) - 1) = 1.$$

oder

$$\exp(\lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Weil  $\exp(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  immer positiv ist, gibt es nur eine reelle Lösung:

$$\lambda = \ln \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \right].$$

□

**Aufgabe 100.** (vollständiger Maßraum) Sei  $X$  eine nichtleere Menge,  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $B \in \mathcal{A}$ . Definiere  $\mu_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\mu_B(A) := \mu(A \cap B)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mu_B$  ein Maß über  $\mathcal{A}$  ist.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist  $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$  ein vollständiger Maßraum, dann auch  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ .
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum, dann auch  $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ .

*Beweis.* (a) In der Übungsblatt 1. haben wir schon bewiesen, dass es wohldefiniert und eine Mengenfunktion ist.

Sei dann  $(A_j)$ ,  $A_j \in \mathcal{A}$  eine Folge disjunkte Menge. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu_B \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) &= \mu \left( B \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \\ &= \underbrace{\mu \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B \cap A_i) \right)}_{\sigma\text{-additivität von } \mu} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B \cap A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_B(A_i) \end{aligned}$$

$\mu_B$  ist dann  $\sigma$ -additiv, und daher Maß.

- (b) Ja. Sei  $\mu(A) = 0$ . Weil  $A \cap B \subseteq A$  ist, gilt auch  $\mu_B(A) = 0$ . Weil  $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$  vollständig ist, ist jede Teilmenge  $\mathcal{A} \ni A' \subseteq A$ .  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ist dann vollständig.

Das ist keine  
 $\sigma$ -Algebra,  
weil  $x \notin \mathcal{A}$ .

- (c) Nein. Sei  $X = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{a\}$ ,  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ .

Sei auch  $\mu(\{b, c\}) \neq 0$ ,  $\mu(X) \neq 0$ ,  $\mu(\{a\}) \neq 0$ . Sei außerdem  $\mu_B(A) = \mu(\{a\} \cap A)$ . Dann ist  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  vollständig (es gibt keine Nullmengen), aber  $\mu_B(\{b, c\}) = \mu(\{a\} \cap \{b, c\}) = \mu(\emptyset) = 0$ . Deswegen ist  $\{b, c\}$  eine Nullmenge in  $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ , aber  $\{b\} \subseteq \{b, c\} \notin \mathcal{A}$ . □

**Aufgabe 101.** (a) Seien  $K_1, K_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\emptyset \in K_i$  für  $i = 1, 2$  und  $\nu_i : K_i \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\nu_i(\emptyset) = 0$  für  $i = 1, 2$ . Bezeichne nun mit  $\mu_i^*$  die analog zu Satz 1.37 von  $\nu_i$  induzierten äußeren Maße. Es existiere ein  $\alpha > 0$ , so dass

$$\forall I_1 \in K_1 \exists I_2 \in K_2 : I_1 \subseteq I_2 \text{ und } \alpha \nu_2(I_2) \leq \nu_1(I_1).$$

Zeigen Sie: Für alle  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt  $\alpha \mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$ .

(b) Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 1.55: Zeigen Sie, dass

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ und } \lambda_a^*(A) \leq \lambda_r^*(A) \leq \lambda_n^*(A)$$

für alle  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt.

*Beweis.* (a) Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es eine Überdeckung  $(A_{1,j}), A_{1,j} \in K_1$ , für die gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1,k} \supseteq A$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{1,k}) \leq \mu_1^*(A) + \epsilon$$

Es gibt auch per Hypothese eine Folge  $(A_{2,k}), A_{2,k} \in K_2, A_{2,k} \supseteq A_{1,k}, \alpha \nu_2(A_{2,k}) \leq \nu_2(A_{1,k})$ . Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2,k} \supseteq A$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \nu_2(A_{2,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{2,k}) < \mu_1^*(A) + \epsilon$$

Weil das für alle  $\epsilon$  gilt, ist  $\alpha \mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$

(b) Es existiert, für jede Elemente  $(a, b) = J \in \mathbb{J}(n)$ , ein Element  $[a, b] \in \mathbb{J}_l(n) \supseteq (a, b)$ , und es gilt  $\text{vol}_n([a, b]) \leq \text{vol}_n((a, b))$ . Für jede Elemente  $[a, b] \in \mathbb{J}_l$  existiert auch  $\mathbb{J}(n) \ni [a, b] \supseteq (a, b)$ , für die gilt  $\text{vol}_n([a, b]) \leq \text{vol}_n((a, b))$ . Daraus folgt die Behauptung:

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ für alle } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ähnlich folgt die andere Teil. Man muss nur  $(a, b]$  statt  $[a, b)$  einsetzen, und alle Aussagen bleiben richtig.  $\square$

**Aufgabe 102.** Zeigen Sie folgende Aussagen über das äußere Lebesgue-Maß:

(a) Es gilt  $\lambda_n^*(A) = 0$  für alle abzählbaren Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

(b) Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\lambda_n^*(B) = 0$ . Dann gilt  $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A)$ .

(c) Es ist  $\lambda_1^*([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$ .

(d) Es ist  $\lambda_2^*(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$

*Beweis.* (a) Sei  $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Sei auch

$$M_\epsilon = \left\{ \left( x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) \mid i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Für jede  $\epsilon > 0$  ist  $M_\epsilon$  eine Überdeckung von  $A$ . Es gilt auch:

$$\begin{aligned} \sum_{B \in M_\epsilon} \text{vol}_n(B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_n \left( \left( x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Weil dann  $\lambda_n^*(A) \leq \epsilon \forall \epsilon > 0$ , ist  $\lambda_n^*(A) = 0$ .

(b) Weil äußere Maße  $\sigma$ -subadditiv sind, gilt

$$\lambda_n^*(A \cup B) \leq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) = \lambda_n^*(A).$$

Weil  $A \subseteq A \cup B$ , gilt  $\lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(A \cup B)$ . Daraus folgt:

$$\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A).$$

(c) Weil  $\{[0, 1]\}$  eine Überdeckung von  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  ist, ist  $\lambda_1^*([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \leq 1$ . Wegen subadditivität gilt  $\lambda_1^*([0, 1]) = 1 \leq \lambda_1^*([0, 1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \leq \lambda_1^*([0, 1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q})$ . Weil  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, gilt  $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$  und daraus folgt  $1 \leq \lambda_1^*([0, 1])$ . Daher gilt  $\lambda_1^*([0, 1]) = 1$ .

(d) Sei für jeder  $\epsilon > 0$   $M_\epsilon$  die Überdeckung.

$$M_\epsilon = \left\{ \left( \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} \right) \times \left( -\frac{\epsilon}{2^n}, \frac{\epsilon}{2^n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1 \right) \times \left( -\frac{\epsilon}{2^n}, \frac{\epsilon}{2^n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es gilt  $\sum_{A \in M_\epsilon} \text{vol}_2(A) = 2\epsilon$ . Weil  $M_\epsilon$  für alle  $\epsilon > 0$  eine Überdeckung von  $\mathbb{R} \times \{0\}$  ist, gilt  $\lambda_2^*(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$ .  $\square$

### 3.3 Blatt 3

**Aufgabe 103.** Sei  $\lambda_n^*$  das äußere Lebesgue-Maß und  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a)  $A$  ist  $\lambda_n^*$  messbar.
- (b) Es gilt  $\lambda_n^*(A \cap Q) + \lambda_n^*(A^c \cap Q) = \lambda_n^*(Q)$  für alle  $Q \in \mathbb{J}(n)$ .

*Beweis.*

**Definition 3.1.** Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Eine Menge  $A \subseteq X$  heißt  $\mu^*$ -messbar, falls gilt

$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \quad \forall D \subseteq X.$$



Weil alle Teilmengen  $I \in \mathbb{J}(n)$  solche Teilmengen  $D \subseteq X$  sind, gilt natürlich (a)  $\implies$  (b). Jetzt bleibt (b)  $\implies$  (a) zu zeigen. Es gibt, für jede  $\epsilon > 0$ , eine abzählbare Überdeckung  $M = \{Q_i, i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{J}$  aus offene Intervalle von  $D$ , für die gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) = \lambda_n^*(D) + \epsilon$ . Für jede  $Q_i \in M$  gilt

$$\lambda_n^*(A \cap Q_i) + \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \lambda_n^*(Q_i).$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) = \lambda_n^*(D) + \epsilon.$$

Weil  $A \cap Q_i$  bzw.  $A^c \cap Q_i$  eine abzählbare Überdeckung von  $A$  bzw.  $A^c$  ist, gilt für  $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ :

$$\lambda_n^*(A \cap D) \leq \lambda_n^*(A \cap Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i),$$

und ähnlich

$$\lambda_n^*(A^c \cap D) \leq \lambda_n^*(A^c \cap Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(A \cap D) + \lambda_n^*(A^c \cap D) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) \leq \lambda_n^*(D) + \epsilon \end{aligned}$$

Weil  $\epsilon > 0$  beliebig war, ist

$$\lambda_n^*(A \cap D) + \lambda_n^*(A^c \cap D) \leq \lambda_n^*(D). \quad \square$$

**Aufgabe 104.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  ein Maßraum und  $\mu^*$  das von  $(\mathcal{A}, \nu)$  induzierte äußere Maß auf  $X$ , d.h. in Satz 1.37 ist  $K = \mathcal{A}$  und  $\nu = \nu$ . Nach Satz 1.59 induziert  $\mu^*$  ein Maß  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}(\mu^*)$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $\mu$  eine sogenannte Erweiterung von  $\nu$  ist, also dass

- (1)  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mu^*)$  und
- (2)  $\mu(A) = \nu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt.

(b) Gilt sogar  $\mu = \nu$ , also  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mu^*)$ ?

*Beweis.* (a) Wir beweisen zuerst  $\mu(A) = \nu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ . Es genügt zu beweisen, dass  $\nu(A) = \mu^*(A)$ . Es ist klar, dass  $\{A\}$  eine abzählbare Überdeckung von  $A$  ist, und daher  $\mu^*(A) \leq \nu(A)$ . Wir betrachten dann eine abzählbare Überdeckung  $(Q_i), Q_i \in \mathcal{A}, \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \supseteq A$ .  $\mu^*(A)$  ist die Infimum von solchen Folgen von

Mengen. Es gilt wegen der Monotonie von  $\mu^*$  und der  $\sigma$ -Additivität von  $\nu$ :  $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(Q_i) \geq \nu(A)$ . Daraus folgt

$$\mu(A) = \nu(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Jetzt beweisen wir (1). Sei  $A \in \mathcal{A}$ . Wir müssen zeigen, dass für alle  $D \subseteq X$ , gilt

$$\mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) = \mu^*(D).$$

Sei  $(Q_i), Q_i \in \mathcal{A}$  eine abzählbare Überdeckung von  $D$ , für die gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(Q_i) \leq \mu^*(D) + \epsilon, \epsilon > 0$  beliebig. Betrachten Sie

$$\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i).$$

Weil sowohl  $A$  als auch  $Q_i$  in  $\mathcal{A}$  sind, gilt

$$\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i) = \mu^*(Q_i).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) &\leq \mu^*(A \cap Q) + \mu^*(A^c \cap Q) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(A \cap Q_i) + \mu^*(A^c \cap Q_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q_i) \leq \mu^*(D) + \epsilon \end{aligned}$$

Weil  $\epsilon > 0$  beliebig war, gilt

$$\mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \leq \mu^*(D),$$

also  $A$  ist messbar.

- (b) Nein. Sei zum Beispiel  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\sigma}(\mathbb{J}(n))$ , und  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  das eingeschränkte Lebesgue-Maß. Dann ist  $\mu^* = \lambda_n^*$ , und daher  $\mu$  das Lebesgue-Maß. Es gilt aber

$$\{q\} \notin \mathcal{A}_{\sigma}(\mathbb{J}(n)), \quad q \in \mathbb{R},$$

obwohl jede Punktmenge  $\lambda_n^*$  messbar ist. □

### 3.4 Blatt 4

**Aufgabe 105.** (a) Seien  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  messbare Räume,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  und  $a \in X$ . Zeigen Sie, dass

$$\{y \in Y \mid (a, y) \in C\} \in \mathcal{B}.$$

- (b) Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  kompakt und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann  $K \times N$  eine  $\lambda_{m+n}$ -Nullmenge ist.

- (c) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  eine  $\lambda_m$ -Nullmenge und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann  $M \times N$  eine  $\lambda_{m+n}$ -Nullmenge ist.
- (d) Zeigen Sie Bemerkung 1.71, also dass  $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n) \subsetneq \mathcal{L}(m+n)$ .

Hinweis: Sie dürfen hierfür annehmen, dass  $B \notin \mathcal{L}(n)$  tatsächlich existiert.

*Beweis.* (a) Zuerst betrachten wir den Fall, in dem  $C = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Es gilt dann

$$\{y \in Y | (a, y) \in C\} = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}.$$

Weil sowohl  $\emptyset$  als auch  $B$  Elemente von  $\mathcal{B}$  sind, gilt die Aussage für solche Mengen  $C \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

Jetzt beweisen wir die Aussage im Allgemeinen: Sei  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Dann gilt entweder:

- (i)  $C$  ist eine abzählbare Vereinigung von Mengen  $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$ , wobei  $A_i \times B_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .
- (ii)  $C$  ist eine abzählbare Schnitt von Mengen  $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$ , wobei  $A_i \times B_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

Sei dann  $M \subseteq \mathbb{N}$  die Zahlen, sodass  $a \in A_i \iff i \in M$ . Es gilt, in der beiden Fälle

$$\{y \in Y | (a, y) \in C\} = \begin{cases} \bigcup_{i \in M} B_i & (i), \\ \bigcap_{i \in M} B_i & (ii). \end{cases}$$

was immer ein Element von  $\mathcal{B}$  ist.

- (b) Sei  $\epsilon > 0$  gegeben, und  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ,  $A_i \in \mathbb{J}(m)$  eine endliche Überdeckung von  $K$ , wobei jedes  $\lambda_m(A_i) < \infty$ .

Das ist immer möglich, weil  $K$  kompakt ist. Wir können dann eine Überdeckung  $(A_i)$  von  $K$  wählen, und die Kompaktheit von  $K$  liefert eine endliche Teilüberdeckung.

Sei dann  $A = \max(\lambda_m(A_1), \lambda_m(A_2), \dots, \lambda_m(A_n))$ . Per Definition ( $N$  ist eine  $\lambda_n$ -Nullmenge) gibt es eine abzählbare Überdeckung  $(B_j)$ ,  $B_j \subseteq \mathbb{R}^n$ , sodass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) < \frac{\epsilon}{nA}.$$

Wir betrachten dann

$$M = \bigcup_{j=1}^n \{A_j \times B_i | i \in \mathbb{N}\},$$

was eine abzählbare Überdeckung von  $K \times N$  ist, aber  $\sum_{C \in M} \lambda_{n+m}(C) < \epsilon$ , also  $K \times N$  ist eine  $\lambda_{m+n}$ -Nullmenge.

(c) Wir haben, für alle Würfel  $I_m \in \mathbb{R}^m$  und  $I_n \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$\lambda_{n+m}^*(I_n \times I_m) = \lambda_n^*(I_n) \lambda_m^*(I_m).$$

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Per Definition gibt es eine Überdeckung  $(B_i), B_i \in \mathbb{R}^n$  von  $N$ , sodass

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supseteq N \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(B_i) \leq 1.$$

Wir haben daher

$$\lambda_n^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(B_i) \leq 1.$$

Sei  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ . Es ist also  $\lambda_n(B) \leq 1$ . Sei  $(A_i), A_i \in \mathbb{R}^m$  eine Überdeckung von  $M$ , für die gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m^*(A_i) < \epsilon.$$

Jetzt ist  $A_i \times B$  eine abzählbare Überdeckung von  $N \times M$ , und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n+m}^*(A_i \times B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_i) < \epsilon,$$

also  $M \times N$  ist eine  $\lambda_{n+m}$ -Nullmenge.

(d) Wie im Skript betrachten wir  $\{0\} \times B, B \notin \mathcal{L}(n)$ . Es gilt  $\{0\} \times B \in \mathcal{L}(m+n)$ , weil  $\{0\} \times B$  eine  $\lambda_{n+m}$ -Nullmenge ist.

Jetzt versuchen wir,  $\{0\} \times B$  als eine abzählbare Schnitt

$$\{0\} \times B \stackrel{?}{=} \bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{A_i \times B_i}_{\in \mathcal{L}(m) \times \mathcal{L}(n)}$$

darzustellen. Aber

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right),$$

und wir wissen schon, dass es keine Folgen von Mengen  $(B_i), B_i \in \mathcal{B}$  existiert, sodass  $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B$ , also  $\{0\} \times B \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ .  $\square$

**Aufgabe 106.** Sei  $A \in \mathcal{L}(n)$ . Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \inf \{ \lambda_n(K) \mid K \supseteq A, K \text{ kompakt} \}.$$

(b) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \sup \{ \lambda_n(O) \mid O \subseteq A, O \text{ offen} \}.$$

*Beweis.* (a) Falsch. Betrachten Sie  $A = \mathbb{Q}$ . Weil  $\mathbb{Q}$  nicht beschränkt ist, gibt es keine kompakte Mengen  $K$  mit  $K \supseteq A$ . Deswegen ist

$$0 = \lambda_n(\mathbb{Q}) \neq \inf \{ \lambda_n(K) \mid K \supseteq A, K \text{ kompakt} \} = \infty.$$

**Bemerkung**

Erinnern Sie sich daran, dass wir  $\inf(\emptyset) = \infty$  definieren. Sonst kann man  $\lambda_n(\mathbb{R})$  betrachten.

(b) Falsch. Die Intuition dafür ist, dass

$$\lambda_n(A) = \sup \{ \lambda_n(K) \mid K \subseteq A, K \text{ kompakt} \}$$

Wenn wir eingeschränkte Mengen betrachten, gilt dass, nur wenn  $K$  abgeschlossen ist. Die meistens abgeschlossenen Mengen  $K$  sind der Abschluss einer offenen Menge  $K = \bar{U} = U \cup \partial U$ . Wir müssen daher nur eine offene Menge finden, sodass  $\partial U$  Maß  $> 0$  hat.

Konkretes Gegenbeispiel: Smith-Volterra-Cantor-Menge.

Wir definieren  $S_0 = [0, 1]$  und weiter induktiv

$$S_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left( \left[ a_k, \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}} \right] \cup \left[ \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}, b_k \right] \right),$$

wobei  $0 < a_1 < b_1 < \dots, a_{2^{n-1}}, b_{2^{n-1}}$  durch

$$S_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [a_k, b_k]$$

definiert sind. Sei jetzt  $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_n$ . Wir beweisen jetzt die Eigenschaften der Menge:

(i) Alle Intervalle, aus denen  $S_n$  besteht, haben die gleiche Länge.

Wir beweisen es per Induktion. Für  $S_0$  ist es trivial, weil es nur ein Intervall gibt. Jetzt nehmen wir an, dass es für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  gilt, also  $b_k - a_k = \Delta_n \forall k \in 2^{n-1}$ . Es gilt:

$$\frac{a_k + b_k}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}} = a_k + \frac{\Delta_{n-1}}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}},$$

und auch

$$\frac{a_k + b_k}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}} = a_k + \frac{\Delta_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Also alle Intervalle haben die Länge

$$\Delta_n = \frac{\Delta_{n-1}}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Die Lösung ist

$$\Delta_n = 2^{-(2n+1)}(1 + 2^n).$$

(ii) Das Innere von  $S$  ist leer.

Wir nehmen an, dass eine offene Intervall  $(a, b) \subseteq S$  gibt. Das Intervall hat Länge  $b - a$ . Aber, weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$  gilt, muss es ein  $S_n$  geben, für das gilt, dass die Intervalle Länge  $< b - a$  haben, also  $(a, b) \not\subseteq S$ .

(iii) Also  $\{U | U \subseteq S, U \text{ offen}\} = \{\emptyset\}$ .

(iv)  $\sup \{\lambda_n(O) | O \subseteq S, O \text{ offen}\} = \sup \{0\} = 0$ .

(v)  $\lambda_n(S) \neq 0$ . In jedem Schritt nehmen wir Intervalle mit Maß

$$\frac{2^n}{2^{2n+2}},$$

also insgesamt nehmen wir Maß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2}$$

raus. Daraus folgt  $\lambda_n(S) = \frac{1}{2} \neq 0$ . □

**Aufgabe 107.** (Maße von Matrixbildern)

- (a) Sei  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine invertierbare Matrix und  $\mu : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß. Zeigen Sie, dass  $\mu_S : \mathcal{B}_n \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\mu_S(A) := \mu(SA)$  wohldefiniert und ein Maß ist.
- (b) Sei  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nicht invertierbar. Zeigen Sie, dass  $\lambda_n(SA) = 0$  für alle  $A \in L(n)$  gilt.

*Beweis.* (a) (i) (Wohldefiniert) Wir müssen nur zeigen, dass  $SA$  offen ist. Wir definieren die übliche Norm auf Matrizen  $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$ . Weil  $S$  invertierbar ist, muss  $\|A\| > 0$  gelten. Sei  $x \in A$  und eine  $r$ , sodass  $B_r(x) \subseteq A$ . Sei  $y \in B_r(x)$ . Es gilt

$$|Ay - Ax| \leq \|A\| |y - x| \leq \|A\| r$$

also  $B_{\|A\|r}(Sx) \subseteq SA$ . Daraus folgt, dass  $SA$  offen ist, und  $\mu_S$  wohldefiniert ist.

(ii) Wir haben auch,  $\mu_S(\emptyset) = \mu(S\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ .

(iii) Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{L}(n)$  eine Folge von messbare Mengen. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \mu_S \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &= \mu \left( S \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(SA_i) && (\sigma\text{-Additivität von } \mu) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_S(A_i) \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass  $SA_i$  noch paarweise disjunkt ist, weil  $S$  bijektiv (insbesondere injektiv) ist.

- (b)  $\mu_S(A) := \mu(SA)$  ist noch Maß (vorherige Beweis gilt noch): Weil  $S$  nicht invertierbar ist, gibt es einen nichttrivialen Kern. Wir entscheiden uns für ein Vektor  $v_1 \in \ker(S)$ . Dann machen wir eine Basisergänzung, um eine Basis zu konstruieren:

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Wir bezeichnen  $[0, 1]^n \in \mathcal{L}(n)$  als

$$[0, 1]^n = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

für eine Menge  $M$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} S[0, 1]^n &= \{a_1 S(v_1) + a_2 S(v_2) + \dots + a_n S(v_n) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\} \\ &= \{a_2 S(v_2) + \dots + a_n S(v_n) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\} \end{aligned}$$

$\{S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_n)\}$  ist keine Basis, weil der Nullvektor darin vorkommt (vielleicht mehr als einmal). Wir können jedoch eine Basisergänzung machen, die Nullvektoren einzusetzen. Sei die neue Basis

$$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Wir nehmen hier zum Beispiel an, dass  $u_i = S(v_i) \forall i \geq 2$ , also wir müssen nur  $S(v_1) = 0$  einsetzen. Das Argument ist gleich, wenn das nicht stimmt. Sei  $M = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Dann ist  $\mu'(A) := \mu(M^{-1}SA)$  ein Maß, und

$$\mu'([0, 1]^n) = \mu(\{\{0\} \times (a_2, a_3, \dots, a_n) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M\}) = 0.$$

Also  $\mu'$  ist ein Bewegungsinvariantes Maß mit  $\mu'([0, 1]^n) = 0$ . Daraus folgt, dass

$$\mu(SA) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{L}(n). \quad \square$$

## 3.5 Blatt 5

**Aufgabe 108.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  nicht-negativ und messbar. Es existiere eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) > 0$  und  $f(x) > 0$  für alle  $x \in A$ . Zeigen Sie, dass ein  $\epsilon > 0$  und eine Menge  $B \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(B) > 0$  existieren, sodass  $f(x) > \epsilon$  für alle  $x \in B$  gibt.

*Beweis.* Wir beweisen es per Widerspruch. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Dann für jedes  $\epsilon > 0$  ist  $\{f > \epsilon\}$  eine Nullmenge. (Wir wissen, dass die Menge messbar ist, weil  $f$  messbar ist.)

Insbesondere gilt es für alle  $\mathbb{Q} \ni \epsilon > 0$ . Wir bezeichnen  $\mathbb{Q}^+ := \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ . Es gilt

$$A \subseteq \{f > 0\} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^+} \{f > x\},$$

also

$$\mu(A) \leq \mu(\{f > 0\})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} \{f > x\} \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Q}^+} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

also  $A$  ist eine Nullmenge, ein Widerspruch zu die Annahme, dass  $\mu(A) > 0$ .  $\square$

**Aufgabe 109.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum und  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem sei  $(f_n)$  punktweise  $\mu$ -fast überall konvergent, d.h. es existiert ein  $\mu$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$  und eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$  gilt. Zeigen Sie, dass  $f$  messbar ist.

*Beweis.* Wir wissen, dass sowohl

$$\begin{aligned}
f_s &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ als auch} \\
f_l &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n
\end{aligned}$$

messbar sind. Es gilt auch  $f_s(x) = f_l(x)$ ,  $\forall x \in X \setminus N$ . Sei jetzt  $U \subseteq \mathbb{R}$  messbar. Es gilt  $f^{-1}(U) = [f^{-1}(U) \cap N^c] \cup [f^{-1}(U) \cap N]$ .

Es ist  $f^{-1}(U) \cap N \in \mathcal{A}$ , weil  $f^{-1}(U) \cap N \subset N$ ,  $N$  ist eine Nullmenge und  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ist vollständig. Es gilt auch

$$f^{-1}(U) \cap N^c = f_{l/s}^{-1}(U) \cap N^c,$$

wobei  $f_{l/s}$  bedeutet, dass entweder  $f_l$  oder  $f_s$  funktioniert (hier möchten wir betonen, dass die beide Funktionen auf  $X \setminus N$  gleich sind). Aber weil  $f_{l/s}$  messbar sind, ist

$$f^{-1}(U) \cap N^c = \underbrace{f_{l/s}^{-1}(U)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{N^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

Es ist dann

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \quad \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ messbar},$$

also  $f$  ist messbar.  $\square$

**Aufgabe 110.** Sei  $A \subsetneq \mathbb{R}$  nichtleer. Bestimmen Sie alle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche bezüglich der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^c, \mathbb{R}\}$  messbar sind.

*Beweis.* Es gilt immer  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ . Außerdem wissen wir aus der Mengentheorie, dass  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A^c) = \emptyset$ , und das Bild von einer nichtleeren Menge ist immer nichtleer. Die unterschiedliche Funktionen sind

$$\begin{array}{lll}
f(A) = A & f(A^c) = A^c & f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \\
f(A) = A^c & f(A^c) = A & f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.
\end{array} \quad \square$$



**Aufgabe 111.** Der Beweis von Lemma 1.83 funktioniert anstelle von  $[0, 1]$  auch analog für jede beliebige Lebesgue-messbare Menge in  $\mathbb{R}$ , die keine Nullmenge ist. Das heißt für jede solche Menge existiert eine Teilmenge, die nicht Lebesgue-messbar ist. Sei nun  $f$  die Cantor-Funktion aus Präsenzübung 3 und definiere  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 2], x \rightarrow x + f(x)$ .

Wir definieren die Funktionenfolge  $(f_n)$  durch  $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x$  und

$$f_{n+1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x - 2) & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}.$$

Dann konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $g$  bijektiv und die Umkehrfunktion  $g^{-1}$  messbar ist.  
 (b) Zeigen Sie nun, dass der Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda_1|_{\mathcal{B}^1})$  nicht vollständig ist.

*Hinweis:* Nutzen Sie eine geeignete nicht Lebesgue-messbare Menge.

*Beweis.* (a) Wir wissen, dass  $f$  stetig und monoton wachsend ist. Daraus folgt, dass  $s \mapsto s + f(s)$  stetig und *streng* monoton wachsend ist. Es gilt auch  $g(0) = 0$  und  $g(1) = 2$ .

Das  $g$  surjektiv ist folgt aus dem Zwischenwertsatz.  $g$  ist auch injektiv. Sei  $x > y$ . Dann gilt  $g(x) > g(y)$ , insbesondere  $g(x) \neq g(y)$ .

Es gilt  $(g^{-1})^{-1} = g$ , also wir betrachten eine messbare Teilmenge von  $[0, 1]$ . □

## 3.6 Blatt 6

**Aufgabe 112.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $\alpha > 0$  und  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Zeigen Sie:

- (a) Ist  $f$  nichtnegativ so gilt

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f \, d\mu.$$

- (b) Ist  $f$  integrierbar, so haben  $\{f \geq \alpha\}$  und  $\{f \leq -\alpha\}$  endliches Maß.

*Beweis.* (a) Sei  $A = \{f \geq \alpha\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \int (f\chi_A + f\chi_{A^c}) \\ &= \int_A f \, d\mu + \int_{A^c} f \, d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_A f \, d\mu && \int_{A^c} f \, d\mu \geq 0, \text{ weil } f \text{ nichtnegativ ist.} \\
&\geq \int_A \alpha \, d\mu && f(x) \geq \alpha \, \forall x \in A \\
&= \alpha \mu(A)
\end{aligned}$$

Also

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f \, d\mu.$$

- (b) Wir beweisen es per Kontraposition, also wir nehmen an, dass  $\{f \geq \alpha\}$  oder  $\{f \leq -\alpha\}$  unendliches Maß hat. (Der Fall, in dem die beide unendliches Maß haben ist nicht ausgeschlossen.)

Wir nehmen an, dass  $\{f \geq \alpha\}$  unendliches Maß hat. Sei  $A = \{f \geq \alpha\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\int f^+ \, d\mu &= \int_A f^+ \, d\mu + \int_{A^c} f^+ \, d\mu \\
&\geq \int_A f^+ \, d\mu \\
&\geq \int_A \alpha \, d\mu \\
&= \alpha \mu(A) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Dann ist  $\int f^+ \, d\mu = \infty$ , also  $f$  ist nicht integrierbar. Sei jetzt ähnlich  $A = \{f \leq -\alpha\}$ . Wenn  $A$  unendliches Maß hat, ist

$$\begin{aligned}
\int f^- \, d\mu &= \int_A f^- \, d\mu + \int_{A^c} f^- \, d\mu \\
&\leq \int_A f^- \, d\mu \\
&\leq \int_A (-\alpha) \, d\mu \\
&= (-\alpha) \mu(A) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Also  $\int f^- \, d\mu = -\infty$ , und  $f$  ist noch einmal nicht integrierbar.  $\square$

**Aufgabe 113.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $N, A, B \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(N) = 0 = \mu(A \cap B)$  und  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar. Sei außerdem  $(f_j)$  eine Folge integrierbarer Funktionen von  $X$  nach  $\overline{\mathbb{R}}$  mit  $f_j \geq 0$   $\mu$ -fast überall und  $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$  integrierbar. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Integrals:

- (a)  $\int_N f \, d\mu = 0$   
(b)  $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$

$$(c) \int \left( \sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j d\mu.$$

*Beweis.* (a) Es gilt  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ . Sei dann  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  die konstante Funktion mit  $g(x) = \infty \forall x \in X$ . Weil es konstant ist, ist  $g$  messbar. Es ist klar, dass  $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in X$ , insbesondere für alle  $x \in N$ . Dann ist

$$\left| \int_N f d\mu \right| \leq \int_N |f| d\mu \leq \int_N g d\mu.$$

Wir müssen nur zeigen, dass  $\int_N g d\mu = 0$ . Sei  $g_j$  eine Folge einfache Funktionen, mit

$$g_j(x) = j \forall x \in X.$$

Dann konvergiert  $g_j$  gegen  $g$ , und für alle  $j$  gilt

$$\int_N g_j d\mu = j\mu(N) = j(0) = 0.$$

Per Definition gilt dann

$$\int_N g d\mu = 0,$$

und die Behauptung folgt.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} f d\mu &= \int \chi_{A \cup B} f d\mu \\ &= \int (\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}) f d\mu \\ &= \int_A f d\mu + \int_B f d\mu - \int_{A \cap B} f d\mu \\ &= \int_A f d\mu + \int_B f d\mu \end{aligned} \tag{a}$$

(c) Für endliche Summe wissen wir schon

$$\int \sum_{j=1}^n f_j d\mu = \sum_{j=1}^n \int f_j d\mu.$$

Sei  $p_n = \sum_{i=1}^n f_i$ .  $p_n$  konvergiert gegen eine Funktion  $p$ , weil  $f_i$  nichtnegativ sind, also die Reihe  $\sum_{i=1}^n f(x)$  ist für alle  $x$  monoton wachsend und in  $\overline{\mathbb{R}}$  konvergent. Dann gilt

$$\int p_n d\mu \nearrow \int p d\mu,$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

□

**Aufgabe 114.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  integrierbar. Definiere die Abbildung

$$\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \nu(A) := \int_A f \, d\mu.$$

Zeigen Sie:

- (a)  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  ist ein endlicher Maßraum.
- (b) Jede  $\mu$ -Nullmenge ist auch eine  $\nu$ -Nullmenge.
- (c) Gilt  $f > 0$   $\mu$ -fast überall, so ist jede  $\nu$ -Nullmenge auch eine  $\mu$ -Nullmenge.
- (d) Sei  $f > 0$   $\mu$ -fast überall. Dann ist eine messbare Funktion  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  genau dann bezüglich  $\nu$  integrierbar, wenn  $gf$  bezüglich  $\mu$  integrierbar ist und in diesem Fall gilt  $\int gf \, d\mu = \int g \, d\nu$ .

*Beweis.* (a) (i) Alle  $\mu$ -messbare Mengen sind auch  $\nu$ -messbar.

Hier müssen wir nur beobachten, dass das Integral über alle  $\mu$ -messbare Mengen definiert ist, also  $\nu$  ist zumindest wohldefiniert.

$\nu(A) \geq 0$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ , weil  $f \geq 0$  und daher ist

$$\int_A f \, d\mu \geq 0.$$

(ii)  $\sigma$ -Additivität

Sei  $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$  eine Folge paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \nu(A_j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_{A_j} f \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int \chi_{A_i} f \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left[ \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \right] f \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f \, d\mu \\ &= \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} f \, d\mu \\ &= \nu \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right). \end{aligned}$$

Also  $\nu$  ist  $\sigma$ -additiv.

(iii) Endlich

Es gilt

$$\int_X f \, d\mu = \underbrace{\int_X f^+ \, d\mu}_{< \infty} < \infty,$$

also  $\nu(X)$  ist endlich, und  $\nu$  ist ein endlicher Maßraum.(b) Sei  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge. Es gilt (mit Hilfe von 113(a))

$$\nu(N) = \int_N f \, d\mu = 0.$$

(c) Sei  $N$  eine  $\nu$ -Nullmenge, also

$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

Jetzt nehmen wir an, dass  $\mu(N) > 0$ . Wir betrachten  $g = \chi_N f$ . In der letzten Übungsblatt haben wir schon bewiesen, dass es  $\epsilon > 0$  und eine Menge  $B \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(B) > 0$  gibt, sodass  $g(x) > 0 \, \forall x \in B$ . Es ist klar, dass  $B \subseteq N$ , weil  $g$  außerhalb  $N$  null ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_N f \, d\mu &\geq \int_B f \, d\mu \\ &\geq \int_B \epsilon \, d\mu \\ &= \epsilon \mu(B) \\ &> 0 \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zu die Annahme ist. Also wenn  $\nu(N) = 0$  ist auch  $\mu(N) = 0$ .(d) Sei  $s$  eine einfache Funktion mit Darstellung  $s = \sum x_i A_i$ ,  $A_i \in \mathcal{A}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int s \, d\nu &= \sum x_i \nu(A_i) \\ &= \sum x_i \int_{A_i} f \, d\mu \\ &= \int \sum x_i \chi_{A_i} f \, d\mu \\ &= \int s f \, d\mu \end{aligned}$$

Sei  $(g_j^+)$  eine Folge einfache Funktionen, die gegen  $g^+$  konvergiert. Es gilt

$$\int g^+ \, d\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j^+ \, d\nu$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j^+ f \, d\mu$$

Ähnlich gilt, für  $g_j^- \searrow g^-$ , dass

$$\int g^- \, d\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j^- f \, d\mu.$$

Also ist  $\int g^+ \, d\nu$  bzw.  $\int g^- \, d\nu$  endlich genau dann, wenn  $\int g^+ f \, d\mu$  bzw.  $\int g^- f \, d\mu$  endlich ist. Dann ist  $g$  bzgl.  $\nu$  integrierbar genau dann, wenn  $gf$  bzgl.  $\mu$  integrierbar ist und in diesem Fall ist das Integral

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu. \quad \square$$

### 3.7 Blatt 7

**Aufgabe 115.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Zeigen Sie:

- (a) Für  $(E_j) \subseteq \mathcal{A}$  paarweise disjunkt mit  $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$  gilt

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, d\mu.$$

- (b) Sei nun  $X := \mathbb{R}$  und  $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq n\} = (-\infty, -n] \cup [n, \infty)$ . Für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\left| \int_{A_n} f \, d\mu \right| < \epsilon$$

für alle  $n \geq N$  gilt.

*Beweis.* (a) Wir wissen (Satz 2.39), dass  $|f|$  integrierbar ist mit Integral  $\int |f| \, d\mu < \infty$ .

Wir betrachten dann die Funktionfolge

$$f_n = \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} f.$$

$f_n$  konvergiert gegen  $f$ , und es gilt  $|f_n(x)| \leq |f(x)|$  für alle  $x$ , also die Folge ist durch  $|f(x)|$  dominiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_E f_n \, d\mu \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{E_j} \sum_{j=1}^n f \, d\mu \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_{E_j} f \, d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, d\mu.
\end{aligned}$$

- (b) Es gilt  $\left| \int_{A_n} f \, d\mu \right| \leq \int_{A_n} |f| \, d\mu$ , also wir müssen es nur für  $|f|$  beweisen. Wir betrachten die Funktionfolge  $g_n = \chi_{A_n} |f|$ .  $g_n$  konvergiert gegen 0 für alle  $x$ . Außerdem gilt  $|g_n| \leq |f|$  für alle  $n$ . Wir verwenden dann den dominierte Konvergenz Satz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

Aus dem Definition von Konvergenz einer Folge bekommen wir für jedes  $\epsilon > 0$  eine ganze Zahl  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\int_{A_n} |f| \, d\mu < \epsilon$$

für alle  $n \geq N$ . □

**Aufgabe 116.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein endlicher Maßraum,  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge integrierbare Funktionen, die gleichmäßig gegen ein Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert.

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  integrierbar ist mit

$$\int f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, d\mu.$$

- (b) Zeigen Sie, dass auf Voraussetzung  $\mu(X) < \infty$  im Allgemein nicht verzichtet werden kann.

*Beweis.* (a)  $f$  ist messbar (Folgerung 2.25).

Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Wir bezeichnen mit  $\epsilon$  gleichzeitig eine Zahl und die konstante Funktion  $\epsilon(x) = \epsilon \, \forall x \in X$ .

$\epsilon$  ist integrierbar, weil  $\int \epsilon \, d\mu = \epsilon \mu(X) < \infty$ . Dann ist  $|f| + \epsilon := g$  integrierbar. Weil  $f_k$  gleichmäßig konvergiert, gibt es  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$  für alle  $n \geq N$ . Das heißt, dass

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + \epsilon.$$

Dann ist die Funktionfolge für alle  $n \geq N$  durch  $g$  dominiert:  $|f_n| \leq g$ . Weil nur das Verhalten für  $n$  groß wichtig für Konvergenz ist, können wir den Satz von dominierte Konvergenz verwenden, also

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

- (b) Wir betrachten  $(1, \infty)$  mit den eingeschränkten Lebesgue  $\sigma$ -Algebra und Maß. Sei  $\epsilon_j$  eine Folge,  $\epsilon_j \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon_j \searrow 0$  und die Funktionfolge

$$f_j(x) = \frac{1}{x^{1+\epsilon_j}}.$$

Die Folge  $f_j$  konvergiert gegen  $f(x) = 1/x$ . Wir zeigen die Eigenschaften:

- (i) Die Funktionfolge konvergiert gleichmäßig.

Wir berechnen den Fehler für beliebiges  $\epsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\epsilon}} \\ &= \frac{x^\epsilon - 1}{x^{1+\epsilon}} \\ \frac{d\Delta(x)}{dx} &= -x^{-2} + (1+\epsilon)x^{-(2+\epsilon)} = 0 \\ -1 + (1+\epsilon)x^{-\epsilon} &= 0 \\ x^{-\epsilon} &= \frac{1}{1+\epsilon} \\ x^\epsilon &= 1+\epsilon \\ x &= (1+\epsilon)^{1/\epsilon} \\ \Delta(x) &\leq \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} \\ &= \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{1+1/\epsilon}}, \end{aligned}$$

also der Fehler ist durch eine streng monoton fallende Funktion eingeschränkt, und die Folge konvergiert gleichmäßig.

- (ii)  $f_j$  ist integrierbar für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

Dies folgt nicht aus Satz 2.61, weil wir nicht über einem kompakten Intervall integrieren. Wir wissen nur, dass das Riemann-integral konvergent ist. Sei  $j$  fest und definiere

$$f_{j,n} = \chi_{[1,n]} f_j.$$

Dann stimmt das Lebesgue-integral mit das Riemann-Integral für alle  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Die Funktionfolge ist auch durch  $f_j$  dominiert, also

$$\begin{aligned} \int f_j d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{j,n} d\mu && \text{dominierte Konvergenz} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} R - \int_1^n f_j(x) dx && \text{Satz 2.61} \\ &= R - \int_1^\infty f_j(x) dx && \text{Definition} \end{aligned}$$

Weil wir wissen, dass das uneigentliche Riemann-Integral existiert, ist  $f_j$  auch integrierbar für alle  $j \in \mathbb{N}$ .



(iii) Ähnlich haben wir

$$\int \frac{1}{x} d\mu = R - \int_1^\infty \frac{1}{x} dx.$$

Weil das Riemann-Integral auf der rechten Seite nicht existiert, ist  $\frac{1}{x}$  auch nicht Lebesgue-integrierbar.  $\square$

**Aufgabe 117.** (a) Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum mit  $\mu(X) > 0$ . Zeigen Sie, dass dann eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  existiert mit  $f > 0$  auf  $X$  und  $0 < \int |f| d\mu < \infty$ .

(b) Geben Sie einen Maßraum an, für den  $\mathcal{L}^1(\mu) = \{0\}$  gilt.

*Beweis.* (a) Per Definition gibt es eine Folge  $(A_j)$ ,  $A_j \in \mathcal{A}$ , so dass alle  $A_j$  endliche Maß haben und  $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = X$ . Wir definieren  $f = \sum_{j=1}^\infty \frac{2^{-j}}{\mu(A_j)} \chi_{A_j}$ . Per Definition als eine Reihe von einfachen Funktionen gilt ( $f$  ist positiv, also wir müssen kein Betrag schreiben):

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^\infty \frac{2^{-j}}{\mu(A_j)} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}.$$

Die Summe konvergiert und ist endlich.

(b)  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$ , wobei

$$\mu(X) = \begin{cases} 0 & X = \emptyset \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Sei  $f \neq 0$ , also es gibt ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so dass  $|f(x_0)| > 0$ . Es gilt  $|f| \geq |f(x_0)| \chi_{\{x_0\}}$ . Es gilt auch

$$\int |f(x_0)| \chi_{\{x_0\}} d\mu = |f(x_0)| \mu(\{x_0\}) = \infty,$$

also  $f$  ist nicht in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .  $\square$

**Aufgabe 118.** (a) Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) < \infty$  und  $\mu(B) < \infty$ . Zeigen Sie, dass dann  $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$  gilt.

(b) Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  messbare Räume und  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sei  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar. Zeigen Sie, dass dann für jedes  $x \in X$  die Funktion  $f_x(y) := f(x, y)$   $\mathcal{B}$ -messbar ist.

*Beweis.* (a) Es gilt  $\mu(A \triangle B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$ . Wir nehmen oBdA an, dass  $\mu(A) \geq \mu(B)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |\mu(A) - \mu(B)| &\leq \mu(A) - \mu(B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(B) \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B) \end{aligned}$$

da  $A \supseteq A \cap B \subseteq B$  und daher  $\mu(A) \geq \mu(A \cap B) \leq \mu(B)$ .

- (b) Wir betrachten  $C = \{f \leq k\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  (weil  $f$  messbar ist). Sei  $x \in X$  beliebig. Es gilt

$$\{f_x \leq k\} = \{y | f(x, y) \leq k\} = \{y | (x, y) \in C\}.$$

Aber wir wissen aus Übungsblatt 4, Aufgabe 1(a), dass die Menge  $\{y | (x, y) \in C\}$   $\mathcal{B}$ -messbar ist, also  $f_x$  ist messbar für alle  $x \in X$ .  $\square$

### 3.8 Blatt 8

**Aufgabe 119.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  und  $(Z, \mathcal{C}, \eta)$   $\sigma$ -endliche Maßräume. Definiere  $A \otimes B \otimes C := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{C})$ . Zeigen Sie:

- (a) Es gilt  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \mathcal{C} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ .

*Hinweis: Betrachten Sie  $\Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$  mit*

$$\Pi : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y, \quad \Pi(x, y, z) := (x, y).$$

- (b) Es gilt  $(\mu \otimes \nu) \otimes \eta = \mu \otimes (\nu \otimes \eta)$  auf  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ .

*Beweis.* (a) Per Hinweis betrachten wir  $\Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ . Sei  $P \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .  $P \in \Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$  genau dann, wenn  $P \times Z \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ .  $\square$

**Aufgabe 120.** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $r : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  eine stetige Funktion und

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < r(z)^2, z \in [a, b]\}.$$

- (a) Bestimmen Sie  $\lambda_2(B_R(x_0))$  für  $R > 0$  mittels dem Satz von Fubini.  
 (b) Zeigen Sie:

$$\lambda_3(A) = \pi \int_a^b r(z)^2 dz.$$

*Beweis.* (a) Aus Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes genügt es,  $B_R(0)$  zu betrachten. Per Definition ist es definiert durch

$$x^2 + y^2 < R^2.$$

Insbesondere ist, für jedes  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\{y | (x, y) \in B_R(0)\} = [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}].$$

Aus Satz 2.81 folgt

$$\begin{aligned} \lambda_2(B_R(0)) &= \int_{-R}^R \lambda_1([- \sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]) dx \\ &= \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Die Funktion ist Riemann-integrierbar, also wir dürfen Sätze vom Riemann-Integral verwenden. Hier integrieren wir es per Substitution. Sei  $x = R \sin \theta$ ,  $dx = R \cos \theta d\theta$ . Wenn  $x = -R$ , ist  $\theta = -\pi/2$  und wenn  $x = R$  ist  $\theta = \pi/2$ .

$$\begin{aligned}
 \lambda_2(B_R(0)) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R \sqrt{1 - \sin^2 \theta} R \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta \\
 &= 2R^2 \left[ \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= 2R^2 \left[ \sin \pi - \sin 0 + \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= \pi R^2 \\
 &= \lambda_2(B_R(x_0))
 \end{aligned}$$

- (b) Wir vorher ist  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$   $\sigma$ -endlich. Das Innere der Menge  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < r(z)^2, z \in (a, b)\}$  ist offen und daher messbar. Da  $A$  das Innere mit eine Nullmenge hinzugefügt ist, ist  $A$  auch messbar. Wir können daher das Maß als Integral schreiben:

$$\begin{aligned}
 \lambda_3(A) &= \int_{[a,b]} A_z d\lambda_1 \\
 &= \int_{[a,b]} \pi r(z)^2 d\lambda_1 \\
 &= \pi \int_a^b r(z)^2 dz. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 121.** Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $c \geq |a| + |b|$ . Definiere

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, 0 \leq z \leq ax + by + c\}.$$

Bestimmen Sie  $\lambda_3(E)$ .

*Beweis.* Ähnlich betrachten wir  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, 0 < z < ax + by + c\}$ . Da die Menge offen ist, ist sie messbar. Weil  $E$  gleich die Menge mit eine Nullmenge hinzugefügt ist, ist  $E$  auch messbar. Wir schreiben dann das Maß als Doppel bzw. Tripelintegral. Hierbei nutzen wir, dass  $x^2 \leq 1$ , also  $x \in (-1, 1)$  aus die Gleichung  $x^2 + y^2 < 1$ . Sei  $x$  fest. Dann ist  $y^2 < 1 - x^2$ , also  $y \in (-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2})$ .

$$\begin{aligned}
 \lambda_3(E) &= \int_{-1}^1 \lambda_2(E_x) d\lambda_1(x) && \text{Satz 2.81} \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \lambda_1([0, ax + by + c]) d\lambda_1(y) d\lambda_1(x) && \text{Satz 2.81}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ax + by + c \, d\lambda_1(y) \, d\lambda_1(x) \\
&= \int_{-1}^1 [axy + by^2/2 + cy]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} d\lambda_1(x) \\
&= \int_{-1}^1 2ax\sqrt{1-x^2} + 2c\sqrt{1-x^2} \, d\lambda_1(x) \\
&= 2 \int_{-1}^1 (ax + c)\sqrt{1-x^2} \, d\lambda_1(x) \\
&= 2 \left[ \int_{-1}^1 (ax)\sqrt{1-x^2} \, dx + c \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \right] \\
&= 2c \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \qquad x\sqrt{1-x^2} \text{ ist ungerade} \\
&= c\pi. \qquad \square
\end{aligned}$$

**Aufgabe 122.** Seien  $B_1 := B_1(0, 0, 0) \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $B_2 := B_1(0, 0, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$  die offenen Kugeln mit Radius 1 um die Punkte  $(0, 0, 0)$  und  $(0, 0, 1)$ . Bestimmen Sie  $\lambda_3(B_1 \cap B_2)$ .

*Beweis.* Per Definition ist

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \\
B_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 < 1\}
\end{aligned}$$

Weil  $\lambda_1$  bzw. das Lebesgue-Maß  $\sigma$ -endlich ist, werden wir das Maß als Integral gemäß Satz 2.81 schreiben. Daher betrachten wir  $(B_1 \cap B_2)_z$  für beliebiges  $z \in [0, 1]$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
(B_1 \cap B_2)_z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \min(1 - (z-1)^2, 1 - z^2)\} \\
&= B_{\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})}(0) \subseteq \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Offenbar ist

$$\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2}) = \begin{cases} \sqrt{1-z^2} & z \geq 1/2, \\ \sqrt{1-(z-1)^2} & z \leq 1/2. \end{cases}$$

Aus 120 ist  $\lambda_2(B_R(0)) = \pi R^2$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\lambda_3(B_1 \cap B_2) &= \int_0^1 \lambda_2(B_{\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})}(0)) \, d\lambda_1(z) \\
&= \int_0^1 \pi \min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})^2 \, d\lambda_1(z) \\
&= 2 \int_{1/2}^1 \pi(1-z^2) \, d\lambda_1(z) \\
&= 2\pi(z - z^3/3)|_{1/2}^1 \\
&= \frac{5\pi}{12}. \qquad \square
\end{aligned}$$

## 3.9 Blatt 9

**Aufgabe 123.** Sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \frac{x^2}{y^2},$$

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2, xy \geq 1\}.$$

Bestimmen Sie  $\int_A f \, d\lambda_2$ .

*Beweis.* Zuerst zeigen wir:  $f$  ist messbar. Wir betrachten dazu  $\{f < \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$  (Wenn  $\alpha \leq 0$  ist die Menge die Leermenge, weil  $f \geq 0$  stets). Es gilt dann

$$x^2 < \alpha y^2$$

$$|x| < \sqrt{\alpha} |y|$$

Dann ist  $\{f < \alpha\}$  eine Borelmenge, also  $f$  ist messbar.

Ähnlich wie in Übungen 8.2 ist  $A$  eine Borelmenge. Die dritte Voraussetzung kann umgeformt werden:

$$y \geq 1/x$$

$$x \geq y \geq 1/x$$

was nur möglich ist, wenn  $2 \geq x \geq 1$  und in diesem Fall ist der Schnitt  $\{y \mid (x, y) \in A\}$  nichtleer. Also wir berechnen das Integral über die Teilmenge nach der Präsenzübung

$$\begin{aligned} \int_A f \, d\lambda_2 &= \int_{[1,2]} \int_{A_x} f \, d\lambda_1 \\ &= \int_1^2 \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} \, d\lambda_1(y) \, d\lambda_1(x) \\ &= \int_1^2 -x^2 y^{-1} \Big|_{1/x}^x \, d\lambda_1(x) \\ &= \int_1^2 x^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) \, d\lambda_1(x) \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \\ &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 124.** Sei

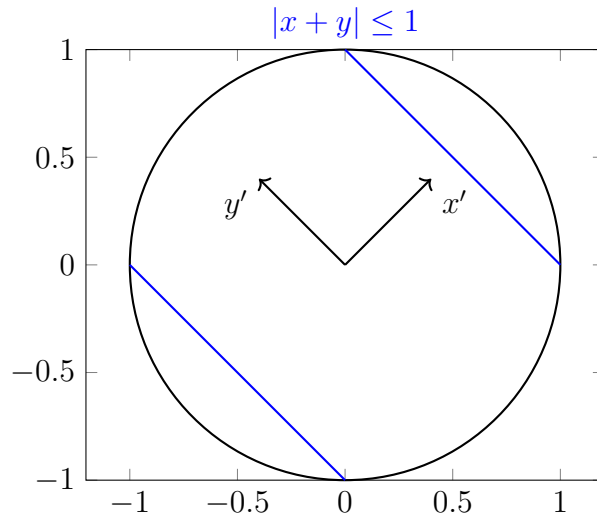
$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie  $\lambda_3(A)$ .

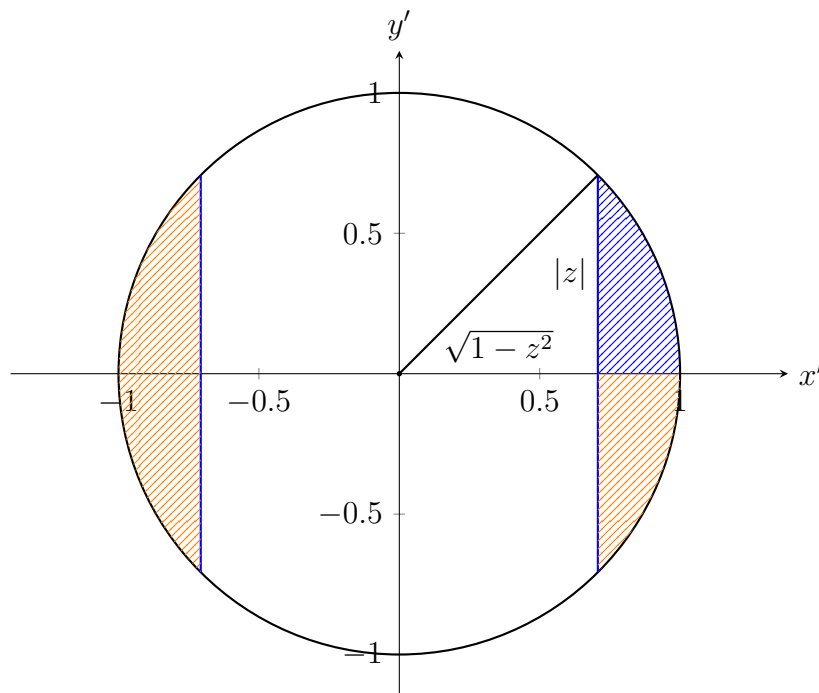
*Hinweis: Rotation*

*Beweis.*  $A$  ist eine Borelmenge und daher messbar. Wir schreiben  $A_z$ . Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \\ 2(1-z^2) &\geq (x+y)^2 \\ |x+y| &\leq \sqrt{2}\sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$



Wir rotieren dann das Koordinatensystem wie im Diagramm.



Das Maß der blauen Region ist

$$\frac{1}{2} \sin^{-1} |z| - \frac{1}{2} |z| \sqrt{1-z^2},$$

also das Maß von  $A_z$  ist

$$\begin{aligned}\lambda_2(A_z) &= \pi(1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \left( \sin^{-1} |z| - |z| \sqrt{1 - z^2} \right) \\ &= \pi - 2 \left( \sin^{-1} |z| - |z| \sqrt{1 - z^2} \right)\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda_3(A) &= \int_{-1}^1 \pi - 2(\sin^{-1} |z| - |z| \sqrt{1 - z^2}) dz \\ &= 2 \int_0^1 \pi - 2(\sin^{-1} |z| - |z| \sqrt{1 - z^2}) dz \\ &= 2 \int_0^1 \pi - 2(\sin^{-1} z - z \sqrt{1 - z^2}) dz \\ &= 2 \left[ \int_0^1 \pi dz - 2 \int_0^1 \sin^{-1} z dz + 2 \int_0^1 z \sqrt{1 - z^2} dz \right] \\ &= 2 \left[ \pi - 2 \int_0^1 \sin^{-1} z dz + 2 \int_0^1 z \sqrt{1 - z^2} dz \right].\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin^{-1} z dz &= z \sin^{-1} z \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} dz \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} dz \\ u &= 1 - z^2, \quad du = -2z dz \\ \int_0^1 \sin^{-1} z dz &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{\pi}{2} + \sqrt{u} \Big|_1^0 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \\ \int_0^1 z \sqrt{1 - z^2} dz &= -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\lambda_3(A) = 2 \left[ \pi - 2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{2}{3} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi - 4 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{4}{3} \\
&= 2\pi - 2\pi + 4 + \frac{4}{3} \\
&= \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 125.** Sei  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ein invertierbare Matrix und  $a \in \mathbb{R}^n$ . Definiere damit die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \rightarrow a + Sx$ . Sei außerdem  $A \in \mathcal{L}(n)$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{L}(n) - B^1$  messbar, sodass  $\chi_{\varphi(A)} f$   $\lambda_n$  integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann  $\chi_A(f \circ \varphi)$   $\lambda_n$ -integrierbar ist mit

$$\int_{\varphi(A)} f \, d\lambda_n = |\det(S)| \int_A (f \circ \varphi) \, d\lambda_n.$$

*Hinweis: Lemma 2.92*

*Beweis.* Nach Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz ist  $\varphi(A)$  messbar mit Maß  $\lambda_n(\varphi(A)) = |\det(S)|\lambda_n(A)$ .  $\chi_{\varphi(A)}$  ist dann messbar. Weil  $\varphi$  affin ist, ist  $\varphi$  stetig und daher messbar. Dann ist  $f \circ \varphi$  messbar, und als Produkt von messbare Funktionen ist  $\chi_A(f \circ \varphi)$   $\lambda_n$ -messbar.

Wir verwenden Lemma 2.93 und betrachten  $f^+$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} f^+ \, d\mu &= \int f^+ \chi_{\varphi(A)} \, d\mu \\
&= \int_{(0, +\infty)} \mu(\{x : f^+(x) \chi_{\varphi(A)} > t\}) \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x : x \in \varphi(A) \wedge f^+(x) > t\}) \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(x) > t\} \cap \varphi(A)) \, d\lambda_1(t)
\end{aligned}$$

Weil  $\varphi$  bijektiv ist, gibt es für jedes Punkt  $x \in \varphi(A)$ ,  $f^+(x) > t$  auch ein Punkt  $y := \varphi^{-1}(x)$ ,  $y \in A$ ,  $f^+(\varphi(y)) > t$  und andersherum. Daher ist

$$\{x : x \in \varphi(A) \wedge f^+(x) > t\} = \varphi(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\}).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} f^+ \, d\mu &= \int_0^\infty \mu(\varphi(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\})) \\
&= \int_0^\infty |\det(S)| \mu(\{x : x \in A \wedge f^+(\varphi(x)) > t\}) \, d\lambda_1(t) \\
&\quad (\text{Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz}) \\
&= |\det(S)| \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(\varphi(x)) > t\} \cap A)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= |\det(S)| \int_0^\infty \mu(\{x : f^+(\varphi(x))\chi_A(x) > t\}) d\lambda_1(t) \\
&= |\det(S)| \int (f^+ \circ \varphi)\chi_A d\lambda_n \\
&= |\det(S)| \int_A (f^+ \circ \varphi) d\lambda_n
\end{aligned}$$

Ähnlich gilt es auch für  $-f^-$  und aus

$$\int_{\varphi(A)} f d\mu = \int_{\varphi(A)} f^+ d\mu - \int_{\varphi(A)} (-f^-) d\mu$$

auch für  $f$ . □

**Aufgabe 126.** Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ . Für  $h \in \mathbb{R}^n$  definiere die Funktion  $f_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f_h(x) := f(x + h)$ . Definiere außerdem die Abbildung

$$T_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}^1(\lambda_n), \quad h \rightarrow f_h.$$

Zeigen Sie:

- (a)  $T_f$  ist wohldefiniert.
- (b)  $T_f$  ist stetig.

*Hinweis:* Approximieren Sie die Funktion  $f$

*Beweis.* (a) Hier zeigen wir:  $f_h(x) \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$  für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ . Wir brauchen zuerst:  $f_h$  ist messbar.

$$\{f_h < \alpha\} = \{f < \alpha\} + h,$$

was messbar ist, was sonst ein Widerspruch zu der Bewegungsinvarianz wäre. Weil  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$   $\sigma$ -endlich ist, verwenden wir Satz 2.93:

$$\begin{aligned}
\int |f| d\lambda_n &= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f_h(x)| > t\}) d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f(x)| > t\} + h) d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda_n(\{x : |f(x)| > t\}) d\lambda_1(t) && \text{Bewegungsinvarianz} \\
&= \int |f| d\lambda_n < \infty && \text{Voraussetzung}
\end{aligned}$$

also  $f_h \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ .

- (b) Nach Satz 2.101 gibt es eine stetige Funktion mit kompaktem Support  $f_\epsilon$ , so dass

$$\|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \epsilon.$$

Dann beweisen wir die Behauptung für stetige Funktionen mit kompaktem Träger, also sei  $f$  eine solche Abbildung. Weil  $f$  stetig auf einer kompakten Menge ist, ist  $f$  gleichmäßig stetig. Sei  $A$  der Träger von  $f$ . Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann gibt es ein  $\delta < 0$ , so dass  $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Daraus folgt:

$$\|f - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \leq \int \epsilon \, d\lambda_n = \epsilon \lambda_n(A).$$

Weil  $A$  kompakt ist, hat  $A$  endliches Maß. Die Behauptung folgt.

Jetzt sind wir fertig, die Behauptung für beliebiges  $f$  zu beweisen. Wir definieren außerdem  $f_{\epsilon,h} = f_\epsilon(x+h)$ , was auch messbar, stetig und mit kompaktem Support ist. Aus Bewegungsinvarianz gilt

$$\|f_h - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} = \|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \epsilon.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} &= \|f - f_\epsilon + f_\epsilon - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\ &= \|f - f_\epsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} + \|f_\epsilon - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\ &\leq \epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h} + f_{\epsilon,h} - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\ &\leq \epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} + \|f_{\epsilon,h} - f_h\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\ &\leq 2\epsilon + \|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \\ &\leq 3\epsilon \quad |h| < \delta \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wir die vorherigen Gezeigten benutzt haben, um  $\delta$  hinreichend klein zu wählen, damit  $\|f_\epsilon - f_{\epsilon,h}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \epsilon$  für alle  $|h| < \delta$ .  $\square$

### 3.10 Blatt 10

**Aufgabe 127.** Sei  $R > 0$  und  $a < b$ . Definiere  $Z := B_R(0) \times (a, b) \subseteq \mathbb{R}^3$ , wobei  $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2$  die (offene) Kreisscheibe um 0 mit Radius  $R$  ist. Definiere außerdem die Abbildung

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit  $U := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (a, b)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^3$  existiert, sodass  $\Phi(U) = Z \setminus N$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $\Phi : U \rightarrow Z \setminus N$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist mit  $\det(\Phi'(r, \varphi, z)) = r$ .
- (c) Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}$ . Bestimmen Sie  $\int_Z f \, d\lambda_3$ .

*Beweis.* (a) Hypothese:  $N = [0, R) \times \{0\} \times (a, b)$ .

Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Z.$$

Wir finden die  $(x, y, z)$ , für die die Gleichungen keine Lösung haben. Es ist klar, dass die dritte Gleichung trivialerweise immer erfüllt werden kann.

Jetzt betrachten wir  $(x, y, z) \in N$ . Weil  $y = 0$ , ist  $\sin \varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  ( $\varphi = 0$  ist keine Lösung in  $U$ ). Dann ist  $x = r \cos \varphi = -r$ . Weil  $r > 0$ , ist dann  $x < 0$ , also  $\Phi(U) \subseteq Z \setminus N$ .

Sei jetzt  $(x, y, z)^T \notin N$ . Die (eindeutige) Lösungen sind

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= y/x \end{aligned}$$

Man verifiziere sofort, dass  $r$  und  $\varphi$  Lösungen sind und außerdem in  $U$  liegen, insofern  $(x, y, z)^T \notin N$ . Daraus folgt:

$$\Phi(U) = Z \setminus N.$$

Jetzt zeigen wir:  $N$  ist eine Nullmenge. Da  $N \subseteq [0, R) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (a, b)$  für alle  $\epsilon > 0$ , ist  $N$  eine Nullmenge.

(b) Die Ableitung ist

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Komponente alle stetig sind, ist  $\Phi'$  stetig, und  $\Phi$  ist stetig differenzierbar. Die Determinante ist

$$\det \Phi' = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_Z f \, d\lambda_3 &= \int_{Z \setminus N} f \, d\lambda_3 && N \text{ Nullmenge} \\ &= \int_U |\det \Phi'| (f \circ \Phi) \, d\lambda_3 \\ &= \int_U r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \, d\lambda_3 \\ &= \int_U r z \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} \\ &= \int_U r^2 z \, d\lambda_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{U_z} \int_a^b r^2 z \, dz \, d\lambda_2 \\
&= \int_{U_z} r^2 (b-a) \, d\lambda_2 \\
&= \int_{(U_z)_\theta} \int_0^{2\pi} r^2 (b-a) \, d\lambda_2 \\
&= \int_{(U_z)_\theta} 2\pi r^2 (b-a) \, d\lambda_2 \\
&= \int_0^R 2\pi r^2 (b-a) \, d\lambda_2 \\
&= 2\pi(b-a) \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \\
&= \frac{2}{3}\pi(b-a)R^3. \quad \square
\end{aligned}$$

**Aufgabe 128.** Sei  $R > 0$  und  $K := B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ . Definiere die Abbildung

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit  $U := (0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^3$  existiert, sodass  $\Phi(U) = K \setminus N$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $\Phi : U \rightarrow K \setminus N$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist mit  $\det(\Phi'(r, \theta, \varphi)) = r^2 \sin \theta$ .
- (c) Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}$  und

$$H := B_R(0) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}.$$

Bestimmen Sie  $\int_H f \, d\lambda_3$ .

*Beweis.* (a) Ähnlich ist die Nullmenge  $\{(0, 0, R), (0, 0, -R), (0, 0, 0)\}$ . Wir lösen die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

für  $(x, y, z)^T \in B_R(0)$ . Ähnlich ist  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\tan \theta = (\sqrt{x^2 + y^2})/z$  und  $\tan \varphi = y/x$  eine Lösung, solange  $z \neq \pm R$  (sonst wäre  $\theta = 0$  oder  $\pi$ , welche nicht in  $U$  sind. Das Punkt  $(0, 0, 0)$  ist auch ausgeschlossen, weil  $r$  nicht null sein darf. Als endliche Menge ist  $N$  eine Nullmenge.

(b) Es gilt

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Weil alle Komponente stetig sind, ist auch  $\Phi'$  stetig, und  $\Phi$  ist stetig differenzierbar. Für die Determinante führen wir eine Laplaceentwicklung mit der dritten Spalte durch:

$$\begin{aligned} \det \Phi' &= \cos \theta (r^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) \\ &\quad + r \sin \theta (r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \sin^3 \theta \\ &= r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

(c) Sei  $U = (0, R) \times (0, \pi/2) \times (0, 2\pi)$ . Es gilt  $\Phi(U) = H \setminus N$ .

$$\begin{aligned} \int_H f \, d\lambda_3 &= \int_{H \setminus N} f \, d\lambda_3 \\ &= \int_U |\det \Phi'| (f \circ \Phi) \, d\lambda_3 \\ &= \int_U (r^2 \sin \theta) r \cos \theta \sqrt{(r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta \sin \varphi)^2} \\ &= \int_U (r^2 \sin \theta) r \cos \theta (r \sin \theta) \\ &= \int_U r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\lambda_3 \\ &= \int_{U_\varphi} \int_0^{2\pi} r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\varphi \, d\lambda_2 \\ &= \int_{U_\varphi} 2\pi r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\lambda_2 \\ &= \int_{(U_\varphi)_\theta} \int_0^{\pi/2} 2\pi r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \, d\lambda_1 \\ &= \int_0^R 2\pi r^4 (1/3) \, dr \\ &= \frac{2}{15} \pi r^5 \Big|_0^R \\ &= \frac{2\pi}{15} R^5. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 129.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp(-x^T A x) \, d\lambda_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

*Beweis.* Da  $A$  symmetrisch ist, ist  $A$  orthogonal diagonalisierbar, also  $A = P^{-1}DP$  bzw.  $A = P^TDP$ , wobei  $P$  orthogonal ist. Die Matrix  $D$  besitzt nur positive Einträge, weil  $A$  positiv definit ist. Dann besitzt  $A$  (mehr als) eine quadratische Würzel. Sei  $A = P^TSSP = P^TS^TSP$ , wobei  $S^2 = D$ .

Es gilt

$$\exp(-x^T Ax) = \exp(-x^T P^T S^T SPx) = \exp(-(SPx)^T SPx).$$

Dann betrachten wir  $\Phi : x \rightarrow SPx$ , was offenbar ein Diffeomorphismus ist, weil es linear ist. Es gilt (Transformationssatz):

$$\begin{aligned} \int \exp(-x^T x) d\lambda_3 &= \int |\det \Phi| \exp(-(SPx)^T (SPx)) d\lambda_3 \\ &= \int |\det S| |\det P| \exp(-(SPx)^T (SPx)) d\lambda_3 \\ &= \sqrt{\det A} \int \exp(-(SPx)^T (SPx)) d\lambda_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Wobei wir die folgende benutzt haben: Als orthogonale Matrix ist  $\det P = 1$ . Da  $S$  eine quadratische Würzel von  $A$  ist, ist  $(\det S)^2 = \det A \geq 0$  und  $|\det S| = \sqrt{\det A}$ . Es genügt also,  $\int \exp(-x^T x) d\lambda_3 = \int \exp(-(x^2 + y^2 + z^2)) d\lambda_3$  zu berechnen.

Wir berechnen das Integral in Kugelkoordinaten. Sei alle Definitionen wie in Aufgabe 128 mit  $R = \infty$ . Hier ist  $N = \{0\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} &\int \exp(-(x^2 + y^2 + z^2)) d\lambda_3 \\ &= \int_{R \setminus N} \exp(-(x^2 + y^2 + z^2)) d\lambda_3 \\ &= \int_U (r^2 \sin \theta) \exp(-r^2) d\lambda_3 \\ &= \int_{U_\theta} \int_0^\pi r^2 \exp(-r^2) \sin \theta d\theta d\lambda_2 \\ &= 2 \int_{U_\theta} r^2 \exp(-r^2) d\lambda_2 \\ &= 2 \int_{(U_\theta)_\varphi} \int_0^{2\pi} r^2 \exp(-r^2) d\varphi d\lambda_1 \\ &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \exp(-r^2) dr \\ &= 4\pi \left[ -\frac{r}{2} \exp(-r^2) \Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-r^2) dr \right] \\ &= 2\pi \int_0^\infty \exp(-r^2) dr \end{aligned} \quad (3.2)$$

Jetzt berechnen wir:

$$\left( \int_0^\infty \exp(-r^2) dr \right)^2 = \left( \int_0^\infty \exp(-x^2) dx \right) \left( \int_0^\infty \exp(-y^2) dy \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-(x^2 + y^2)) \, dy \, dz \\
&= \int_{(0,\infty)^2} \exp(-(x^2 + y^2)) \, d\lambda_2 \\
&\quad \text{Satz von Fubini} \\
&= \int_{(0,\infty) \times (0,\pi/2)} r \exp(-r^2) \, d\lambda_2 \\
&\quad \text{Folgerung 2.121 (Polarkoordinaten)} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r \exp(-r^2) \, d\phi \, dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r \exp(-r^2) \, dr \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \exp(-u) \, du \\
&\quad u = r^2 \text{ ist Diffeomorphismus mit Ableitung } 2r \\
&= -\frac{\pi}{4} \exp(-u) \Big|_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Da  $\exp(-r^2)$  immer positiv ist, ist auch  $\int_0^\infty \exp(-r^2) \, dr$  positiv, also wir nehmen das positive Wurzel:

$$\int_0^\infty \exp(-r^2) \, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Durch Einsetzen in alle den vorherigen Gleichungen erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp(-x^T x) \, d\lambda_3 = \pi^{3/2} \quad (3.2)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp(-x^T A x) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\det A}} \quad (3.1)$$

□

## 3.11 Blatt 11

**Aufgabe 130. (Hyperbelfunktion)** Sei  $d \in \{1, 2, 3\}$ ,  $R > 0$ ,  $1 \leq p < \infty$  und  $\alpha > 0$ . Definiere

$$B_R(d; 0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < R\}, \quad f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{1}{\|x\|^\alpha} & x \neq 0. \end{cases}$$

- (a) Sei zunächst  $d = 1$ . Für welche  $\alpha, p$  ist die Funktion  $\chi_{B_R(1;0)} f$  in  $L^p(\lambda_1)$ ? Für welche  $\alpha, p$  ist die Funktion  $\chi_{\mathbb{R} \setminus B_R(1;0)} f$  in  $L^p(\lambda_1)$ ?

- (b) Welche Bedingungen müssen in den Fällen  $d = 2, 3$  für  $\alpha, p$  gelten, damit  $\chi_{B_R(d;0)} f \in L^p(\lambda_d)$  ist?
- (c) Sei  $1 < p < r < q < \infty$ . Geben Sie eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an mit  $g \in L^r(\lambda_1)$ ,  $g \notin L^p(\lambda_1)$ ,  $g \notin L^q(\lambda_1)$ .
- (d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  an, sodass  $g \in L^p(\lambda_1)$  für alle  $p \in [1, \infty)$  gilt, aber  $g \notin L^\infty(\lambda_1)$ .

*Beweis.* (a) Die Funktion  $\chi_{B_R(1;0)} f$  ist in  $L^p(\lambda_1)$  genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \int \chi_{B_R(1;0)} |f|^p d\lambda_1 &= \int_{B_R(1;0)} |f|^p d\lambda_1 \\ &= \int_{B_R(1;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} d\lambda_1 \\ &= \int_0^R \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} d\lambda_1 + \int_{-R}^0 \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} d\lambda_1 \end{aligned}$$

Weil die Funktionen positiv sind, sind sie Lebesgue-Integrierbar genau dann, wenn sie (uneigentlich) Riemann-Integrierbar sind. Wir wissen aber auch, dass

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} d\lambda_1 &= \int_0^R \frac{1}{x^{\alpha p}} d\lambda_1 & x > 0 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^R \frac{1}{x^{\alpha p}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{x^{-\alpha p + 1}}{1 - \alpha p} \right] \end{aligned}$$

was existiert genau dann, wenn  $-\alpha p + 1 \geq 0$ . Das Ergebnis stimmt nicht für  $\alpha p = 1$ . In diesem Fall ist

$$\int_a^R \frac{1}{x} dx = [\ln x]_a^R$$

und der Grenzwert existiert nicht. Aus der Symmetrie von  $x \rightarrow -x$  gilt genau die gleiche für  $\int_{-R}^0 \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} dx$ . Insgesamt ist die Funktion genau dann integrierbar, wenn  $-\alpha p + 1 > 0$ .

Ähnlich berechnen wir das Riemann-Integral für  $\chi_{\mathbb{R} \setminus B_R(1;0)}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_R^\infty \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} &= \int_R^\infty \frac{1}{x^{\alpha p}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_R^a \frac{1}{x^{\alpha p}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-\alpha p + 1}}{1 - \alpha p} \right] \end{aligned}$$



was genau dann existiert, wenn  $-\alpha p + 1 \leq 0$ . Ähnlich stimmt das Ergebnis nicht für  $-\alpha p = 1$  nicht. In diesem Fall ist

$$\int_R^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln x|_R^a,$$

was nicht existiert. Also es ist genau dann integrierbar, wenn  $-\alpha p + 1 < 0$ .

- (b)  $d = 2$ : Wir berechnen das Integral in Polarkoordinaten. Da die Funktion positiv ist, ist das Integral wohldefiniert. Sie ist genau dann integrierbar, wenn die transformierte Funktion integrierbar ist. Wir wissen, dass  $\|x\| = r$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_{B_R(2;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} d\lambda_2 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha p}} d\theta r dr \\ &= 2\pi \int_0^R \frac{1}{r^{\alpha p-1}} dr \end{aligned}$$

Aus dem Argument in (a) ist das Integral endlich genau dann, wenn

$$-(\alpha p - 1) + 1 = -\alpha p + 2 > 0.$$

Ähnlich für  $d = 3$  berechnen die das Integral in Kugelkoordinaten. Die Funktion ist integrierbar genau dann, wenn die transformierte Funktion integrierbar ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{B_R(3;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} d\lambda_3 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^{\alpha p}} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha p-2}} d\varphi dr \\ &= 4\pi \int_0^R \frac{1}{r^{\alpha p-2}} dr \end{aligned}$$

Das Integral ist endlich genau dann, wenn

$$-(\alpha p - 2) + 1 = -\alpha p + 3 > 0.$$

- (c) Sei  $p = 1, r = 2, q = 3$ . Sei außerdem

$$g(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & |x| < 1 \\ 1/x & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Wir zeigen alle drei Eigenschaften.

$$\int |g| d\lambda_1 \geq \int_{\mathbb{R} \setminus B_1(1;0)} |g| d\lambda_1$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R} \setminus B_1(1;0)} \frac{1}{|x|} d\lambda_1 \\
&= \infty
\end{aligned} \tag{a}$$

also  $g \notin L^1(\lambda_1)$ . Jetzt ist

$$\begin{aligned}
\int |g|^3 d\lambda &\geq \int_{B_1(1;0)} |g|^3 d\lambda_1 \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{|x|} d\lambda_1 \\
&= \infty
\end{aligned} \tag{a}$$

also  $g \notin L^3(\lambda_1)$ . Zuletzt ist

$$\begin{aligned}
\int |g|^2 d\lambda_1 &= \int_{B_1(1;0)} |g|^2 d\lambda_1 + \int_{\mathbb{R} \setminus B_1(1;0)} |g|^2 d\lambda_1 \\
&= \underbrace{\int_{B_1(1;0)} x^{-2/3} d\lambda_1}_{< \infty} + \underbrace{\int_{\mathbb{R} \setminus B_1(1;0)} \frac{1}{x^2} d\lambda_1}_{< \infty} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

wobei die zwei Integrale weniger als unendlich aus (a) sind, also  $g \in L^2(\lambda_1)$ .

- (d) Sei  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) = \ln x$ . Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| = \infty$ , also  $g \notin L^\infty(\lambda_1)$ .  $g$  ist jedoch ein Element von  $L^p(\lambda_1)$  für alle  $p \in [1, \infty)$ .

Wir zeigen es zunächst für all  $p \in \mathbb{N}$  per Induktion. Außerdem berechnen wir das Integral über  $(0, 1]$ , was das Ergebnis nicht verändert, weil  $\{1\}$  eine Nullmenge ist. Da  $\ln x$  entweder  $> 0$  oder  $< 0$  für alle  $x \in (1, 0]$  ist, schreiben wir  $|\ln x| = k \ln x$ , wobei  $k \in \{-1, 1\}$ .

$p = 1$  Fall:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x d\lambda_1 &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \ln x d\lambda_1 \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ x \ln x \Big|_a^1 - \int_a^1 d\lambda_1 \right] \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} [a \ln a - (1 - a)] \\
&= -1
\end{aligned}$$

also

$$\int_0^1 |\ln x| d\lambda_1 = 1.$$

Wir nehmen jetzt an, dass es für beliebiges  $p \in \mathbb{N}$  gilt.

$$\int_0^1 |\ln x|^p d\lambda_1 = k^{p+1} \int_0^1 (\ln x)^{p+1} d\lambda_1$$

$$\begin{aligned}
&= k^{p+1} \left[ x(\ln x)^{p+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 x(p+1)(\ln x)^p \frac{1}{x} \right] \\
&= k^{p+1} \left[ -(p+1) \int_0^1 (\ln x)^p d\lambda_1 \right]
\end{aligned}$$

Per Voraussetzung ist das Integral von  $|\ln x|^p$  endlich, also das Integral von  $|\ln x|^{p+1}$  ist auch endlich. Insgesamt ist  $\ln x \in L^p(\lambda_1)$  für alle  $p \in \mathbb{N}$ .

Sei jetzt  $p$  beliebig. Es gilt

$$\int_0^1 |\ln x|^p d\lambda_1 = \int_0^{1/e} |\ln x|^p d\lambda_1 + \int_{1/e}^1 |\ln x|^p d\lambda_1.$$

Da  $|\ln x|^p$  auf  $(1/e, 1)$  stetig für alle  $p$  ist, existiert das Integral von  $1/e$  bis 1 stets. Also wir vergleichen  $|\ln x|^p$  für  $x \in (0, 1/e)$ .

Weil  $|\ln x| > 1$  für alle  $x \in (0, 1/e)$ , ist

$$\int_0^{1/e} |\ln x|^p d\lambda_1 \leq \int_0^{1/e} |\ln x|^{[p]} d\lambda_1.$$

Per Definition ist  $[p] \in \mathbb{N}$  und  $|\ln x|^{[p]}$  integrierbar. Dann ist  $|\ln x|^p$  auch integrierbar und  $\ln x \in L^p(\lambda_1) \forall p \in [1, \infty)$ .  $\square$

**Aufgabe 131.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $1 \leq p < q \leq \infty$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu)$  für alle  $r \in (p, q)$  gilt und außerdem

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}^\theta \|f\|_{L^q(\mu)}^{1-\theta}$$

für alle  $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$  und  $\theta \in (0, 1)$  mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

(b) Sei der Maßraum  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  nun endlich. Zeigen Sie, dass dann  $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$  und

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mu)}$$

für alle  $f \in L^q(\mu)$  gilt.

*Hinweis:* Betrachten Sie den Raum  $L^r(\mu)$  für  $r := \frac{q}{p}$ .

*Beweis.* (a) Sei  $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ . Das Ziel ist:  $f \in L^r(\mu)$  für alle  $r \in (p, q)$ . Sei

$$\begin{aligned}
A &= \{x \mid x \in X, |f(x)| < 1\} \\
B &= \{x \mid x \in X, |f(x)| \geq 1\} = X \setminus A
\end{aligned}$$

Weil  $|f|^p$  bzw.  $|f|^q$  auf der ganzen Menge  $X$  integrierbar sind, sind  $|f|^p$  bzw.  $|f|^q$  auf  $A$  und  $B$  integrierbar. Es gilt, für alle  $x \in A$ ,

$$|f|^q \leq |f|^r \leq |f|^p$$

also  $|f|^r$  ist auf  $A$  integrierbar. Ähnlich ist für alle  $x \in B$

$$|f|^p \leq |f|^r \leq |f|^q$$

und das Integral von  $|f|^r$  auf  $B$  existiert. Da

$$\int |f|^r d\mu = \int_A |f|^r d\mu + \int_B |f|^r d\mu,$$

ist  $|f|^r$  integrierbar und  $f \in L^r(\mu)$ . Aus der Höldersche Ungleichung folgt, für  $1/p + 1/q = 1, p, q \in [1, \infty]$

$$\|f^2\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|f\|_{\mathcal{L}^q(\mu)}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r(\mu)} &= \left[ \int |f|^r d\mu \right]^{1/r} \\ &= \left[ \int |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} d\mu \right]^{1/r} \\ &= \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} &= \int |f| d\mu \\ &= \int |f|^\theta |f|^{1-\theta} d\mu \\ &\leq \|f^\theta\|_{\mathcal{L}^q(\mu)} \|f^{1-\theta}\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \\ &= \left[ \int |f|^{q\theta} d\mu \right]^{1/q} \left[ \int |f|^{p(1-\theta)} d\mu \right]^{1/p} \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 132.** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y, z) := |xyz|$  und

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen Sie  $\int_A f d\lambda_3$ .

*Beweis.* Weil  $f$  stetig auf einer kompakten Menge definiert ist, ist  $f$  auf  $A$  integrierbar. Für den Schnitt  $A_z$  gilt

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}.$$

Dann verwenden wir den Satz von Fubini, um das Integral als Doppelintegral zu schreiben.  $z$  muss in  $(1/2, 1)$  sein, damit  $A_z$  nichtleer ist.  $z \geq 1/2$  per Definition und

$z \leq 1$ , weil sonst  $x^2 + y^2 \leq 1 - z^2 \leq 0$ . Da  $x^2 + y^2$  positiv ist, wäre der Schnitt dann leer.

$$\int_A f \, d\lambda_3 = \int_{1/2}^1 \int_{A_z} |xy||z| \, d\lambda_2 \, dz.$$

Wir berechnen jetzt das Integral

$$\int_{A_z} |xy| \, d\lambda_2$$

in Polarkoordinaten. Das Integral existiert zumindest für fast alle  $z \in (1/2, 1)$ , weil  $|xyz|$  integrierbar in  $\mathbb{R}^3$  ist, also wir verwenden den Transformationssatz

$$\begin{aligned} \int_{A_z} |xy| \, d\lambda_2 &= \int_{(0, \sqrt{1-z^2})} \int_{(0, 2\pi)} |r^2 \cos \varphi \sin \varphi| r \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{1-z^2}} 2r^3 \, dr \\ &= \frac{1}{2} (1 - z^2)^2 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin \varphi \cos \varphi| \, d\varphi &= 4 \int_0^{\pi/2} |\sin \varphi \cos \varphi| \, d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left| \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right| \, d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi \\ &= 2 \left[ -\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= (1 - (-1)) = 2 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_A f \, d\lambda_3 &= \int_{1/2}^1 \frac{|z|}{2} (1 - z^2)^2 \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 z(1 - z^2)^2 \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 z(1 - 2z^2 + z^4) \, dz \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{6} \right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{9}{256}. \end{aligned}$$

□

### 3.12 Blatt 12

**Aufgabe 133.** Seien  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$   $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse  $C^\alpha$  sowie  $P \subseteq \mathbb{R}^m$  eine  $l$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\alpha$ . Zeigen Sie:

- (a)  $M \times P \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  ist eine  $(k+l)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\alpha$ .
- (b) Gilt  $M \cap \overline{N} = \emptyset = \overline{M} \cap N$ , so ist  $M \cup N$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\alpha$ .
- (c) Die Mengen

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1, 1), y = x^2\},$$

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1, 0) \cup (0, 1), y = -|x|\},$$

sind jeweils 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse  $C^1$ .

- (d) Die Aussage aus (b) ist unter der schwächeren Voraussetzung  $M \cap N = \emptyset$  im Allgemeinen nicht richtig.

*Beweis.* (a) Sei  $(m, p) \in M \times P$ . Per Definition gibt es offene Mengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $f$  und  $g$   $\alpha$ -mal differenzierbare Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-l}$ , so dass

$$\begin{aligned} m &\in U, \quad p \in V \\ M \cap U &= \{x \in U : f(x) = 0\} \\ \text{Rang}(f'(m)) &= n - k \\ P \cap V &= \{x \in V : g(x) = 0\} \\ \text{Rang}(g'(p)) &= m - l \end{aligned}$$

Dann ist  $U \times V \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$  offen. Sei außerdem  $h : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{n+m-(n+k)}$  definiert durch  $h(x, y) = (f(x), g(y))$ , wobei  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $y \in \mathbb{R}^m$ .

Dann ist  $h(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $f(x) = 0$  und  $g(y) = 0$ . Außerdem ist

$$h' = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}.$$

Da  $h'$  eine Blockmatrix ist, ist  $\text{Rang}(h'(m, p)) = \text{Rang}(f'(m)) + \text{Rang}(g'(p))$ . (Man kann das beweisen, indem man das Gauss-Algorithmus durchführt, bis  $f'$  und  $g'$  in Zeilenstufenform sind.)

Weil  $f$  und  $g$   $\alpha$ -mal stetig differenzierbar sind, ist  $h$  auch  $\alpha$ -mal stetig differenzierbar

Es gilt dann

$$\begin{aligned} (U \times V) \cap (M \times P) &= \{x \in U \times V : h(x) = 0\} \\ \text{Rang}(h'(m, p)) &= n + m - (k + l) \end{aligned}$$

- (b) Sei  $x \in M \cup N$ , also  $x \in M$  oder  $x \in N$ . OBdA betrachten wir den Fall,  $x \in M$ . Per Definition gibt es  $U \in \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$   $\alpha$ -mal stetig differenzierbar, so dass

$$\begin{aligned} M \cap U &= \{y \in U : f(y) = 0\} \\ \text{Rang}(f'(x)) &= n - k \end{aligned}$$

Da  $M \cap \overline{N} = \emptyset$ , ist  $M \subseteq \overline{N}^c$ . Per Definition ist  $\overline{N}^c$  offen. Seien  $V := U \cap \overline{N}^c$  und  $g := f|_V$ . Weil  $f$   $\alpha$ -mal stetig differenzierbar ist, ist  $g$  auch  $\alpha$ -mal stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} (M \cup N) \cap V &= M \cap V = \{y \in V : g(y) = 0\} \\ \text{Rang}(g'(x)) &= n - k \end{aligned}$$

Ähnlich gilt für  $x \in N$ . Dann ist  $M \cup N$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\alpha$ .

- (c) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 - y$ . Sei  $p \in A$  und  $U$  offen, so dass  $p \in U$ . Per Definition ist

$$A \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Außerdem ist  $f$  mindestens einmal stetig differenzierbar, mit Ableitung  $f' = (2x, -1)$ . Da  $f'$  eine  $1 \times 2$ -Matrix ist, ist  $f$  vom höchstens Rang 1. Weil die zweite Komponente konstant  $-1 \neq 0$  ist, ist  $f$  nie von Rang 0. Dann ist  $f$  immer vom Rang 1, also  $A$  ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^1$ .

Sei jetzt  $p \in B$ . Wir betrachten den Fall,  $\pi_1(p) > 0$ , wobei  $\pi_1((x, y)) = x$ . Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f((x, y)) = x + y$  und  $U$  offen mit  $p \in U$ . OBdA ist  $\pi_1(U) \subseteq (0, \infty)$ , sonst ist  $(0, \infty) \times \mathbb{R} \cap U$  offen mit gleiche Eigenschaften.

Dann ist

$$\begin{aligned} U \cap B &= \{x \in U : f(x) = 0\} \\ f'(p) &= (1, 1) \\ \text{Rang}(f'(p)) &= 1 \end{aligned}$$

und analog für  $p$  mit  $\pi_1(p) < 0$ . Weil  $x \neq 0$ , ist  $\pi_1(p)$  nie 0. Also wir sind fertig, und  $B$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^1$ .

- (d) Wir betrachten  $A \cap B$ . Es gilt  $A \cap B = \emptyset$ , weil  $x^2 = |x|$  nur wenn  $|x| = 0$  oder  $|x| = 1$ , aber die beide Fälle sind ausgeschlossen.

Es gilt  $(0, 0) \in A \cup B$ , weil  $(0, 0) \in A$ . Wir fahren per Widerspruch fort. Wir nehmen an, dass  $M \cup N$  eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^1$  ist.

Dann gibt es eine offene Menge  $U$  mit  $(0, 0) \in U$  sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$(A \cup B) \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$$

und  $\text{Rang}(f'((0, 0))) = 1$ . Wir zeigen, dass der Rang eigentlich 0 ist. Wir wissen, entlang der Kurve  $y = x^2$  ist  $f = 0$ . Sei  $\gamma(t) = (t, t^2)^T$ . Weil  $f \circ \gamma = 0$  in einer offenen Umgebung um 0, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= D(f \circ \gamma) \\ &= (Df)(\gamma') \\ D(f \circ \gamma)(0) &= (Df)(\gamma'(0)) \\ &= Df((1, 0)^T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ähnlich gilt, weil  $f$  entlang  $y = -|x|$  ist, definieren wir die Kurve  $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, -t)$  für ein  $a > 0$ . Daraus folgt, weil  $\gamma'(t) = (1, -1)$ .

$$\begin{aligned} D(f \circ \gamma)(0) &= (Df)(\gamma'(0)) \\ &= (Df)((1, -1)^T) \end{aligned}$$

also sowohl  $(1, 0)^T$  als auch  $(1, -1)$  liegen in  $\ker Df(0)$ . Da diese linear unabhängig sind, ist  $\ker D = 2$  und wegen des Rangsatzes ist  $\text{Rang}(f'((0, 0))) = 0$ , ein Widerspruch.  $\square$

**Aufgabe 134.** Sei  $a < b, \alpha \in \mathbb{N}$  und  $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $\alpha$ -mal stetig differenzierbar mit  $r(z) > 0$  für alle  $z \in (a, b)$ . Definiere

$$R := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a, b), \sqrt{x^2 + y^2} = r(z) \right\}.$$

Dann ist  $R$  durch die Abbildung

$$\varphi : (a, b) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(z, \alpha) := \begin{pmatrix} r(z) \cos \alpha \\ r(z) \sin \alpha \\ z \end{pmatrix}$$

parametrisiert.

- (a) Zeigen Sie, dass  $R$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\alpha$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $R$  eine  $\lambda_3$ -Nullmenge ist.
- (c) Bestimmen Sie das Integral

$$I := \int_{(a,b) \times (0,2\pi)} \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\lambda_2(z, \alpha)$$

in Abhängigkeit der Funktion  $r$ .

- (d) Bestimmen Sie das Integral  $I$  in (c) für den Fall  $r(z) := \cosh(z)$  und  $(a, b) := (0, 1)$ .



*Beweis.* (a) Sei  $p \in R$ .

**Lemma**

**Lemma 3.2.** Ist  $p \in \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ , so ist  $p \notin R$ .

*Beweis.* Es gälte dann  $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ , also  $0 > r(z)$ , was unmöglich ist, weil  $r(z) > 0$  per Definition.  $\square$

Sei jetzt  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f((x, y, z)) = \sqrt{x^2 + y^2} - r(z)$ . Sei jetzt  $p \in R$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen mit  $p \in U$ . Per Definition ist

$$R \cap U = \{q \in U : f(q) = 0\}. \quad (3.3)$$

Außerdem ist  $f$  stetig differenzierbar mit

$$f' = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, r'(z) \right),$$

solange  $(x, y, z) \notin \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ . Dies ist aber kein Problem wegen des Lemmas. Als Verkettung von elementäre Funktionen sind die ersten zwei Komponenten unendlich mal stetig differenzierbar.  $r(z)$  ist bekanntermaßen  $\alpha$ -mal stetig differenzierbar.

Wenn  $f'$  Null ist, muss  $x = y = 0$  gelten, da  $(x^2 + y^2)^{-1/2} > 0$ . Dies ist noch einmal wegen des Lemmas ausgeschlossen, also  $f'$  ist immer vom Rang 1.

Zusammen mit Eq. (3.3) ist  $R$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\alpha$ .

(b)  $R$  ist messbar, weil  $R$  abgeschlossen (und daher eine Borelmenge) ist.

Da  $(\mathbb{R}^3, \lambda_3, \mathcal{L}(3))$   $\sigma$ -endlich ist (oder weil es in der Vorlesung bewiesen wurde), schreiben wir das Maß als Integral.

$$\lambda_3(R) = \int_a^b \lambda_2(R_z) dz.$$

Jetzt betrachten wir  $R_z$  und schreiben das Maß aus dem gleichen Grund noch einmal als Integral.

$$R_z = \{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} = r(z)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Weil  $\sqrt{\cdot}$  monoton wachsend ist, muss  $|x| < r(z)$  gelten, sonst kann die Bedingung nicht erfüllt werden. Sei jetzt  $x$  fest. Es gilt  $y^2 = r(z)^2 - x^2$ , oder

$$y = \pm \sqrt{r(z)^2 - x^2}.$$

also  $(R_z)_x = \{(x, \sqrt{r(z)^2 - x^2}, z), (x, -\sqrt{r(z)^2 - x^2}, z)\}$ . Als endliche Menge ist  $\lambda_1((R_z)_x) = 0$ . Daraus folgt:

$$\lambda_3(R) = \int_a^b \lambda_2(R_z) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \int_{-r(z)}^{r(z)} \lambda_1((R_z)_x) \, dx \, dz \\
&= \int_a^b \int_{-r(z)}^{r(z)} 0 \, dx \, dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) Als offene Menge ist  $(a, b) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$  eine messbare Menge. Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \begin{pmatrix} r'(z) \cos \alpha & -r(z) \sin \alpha \\ r'(z) \sin \alpha & r(z) \cos \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\varphi'^T &= \begin{pmatrix} r'(z) \cos \alpha & r'(z) \sin \alpha & 1 \\ -r(z) \sin \alpha & r(z) \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \\
\varphi'^T \varphi' &= \begin{pmatrix} r'(z)^2 \cos^2 \alpha + r'(z)^2 \sin^2 \alpha + 1 & 0 \\ 0 & r(z)^2 \sin^2 \alpha + r(z)^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r'(z)^2 + 1 & 0 \\ 0 & r(z)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\det(\varphi'^T \varphi') = (r'(z)^2 + 1)(r(z)^2)$ . Weil  $\mathbb{R}^2$   $\sigma$ -endlich ist, dürfen wir den Satz von Fubini verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{(a,b) \times (0,2\pi)} \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\lambda_2(z, \alpha) \\
&= \int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\alpha \, dz \\
&= \int_a^b \int_0^{2\pi} r(z) \sqrt{1 + r'(z)^2} \, d\alpha \, dz \\
&= 2\pi \int_a^b r(z) \sqrt{1 + r'(z)^2} \, dz
\end{aligned}$$

(d) In diesem Fall ist  $r(z) := \cosh z$  und  $(a, b) = (0, 1)$ . Das Integral ist

$$\begin{aligned}
&2\pi \int_a^b r(z) \sqrt{1 + r'(z)^2} \, dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \cosh z \sqrt{1 + \sinh^2 z} \, dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \cosh^2 z \, dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 \, dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^{2z} + 2 + e^{-2z}) \, dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{2z} - \frac{1}{2} e^{-2z} + 2z \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^{-2} + 2 \right] \\
&= \frac{\pi}{4} [e^2 - e^{-2} + 4]. \quad \square
\end{aligned}$$

### 3.13 Blatt 13

**Aufgabe 135. (Parametrisierung)** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\alpha$  und  $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_M)$ . Außerdem existieren offene Mengen  $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$  und lokale Parameterdarstellungen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $M$  mit  $\varphi(U) \cup \psi(V) = M$  und  $\varphi(U) = M \setminus A$ , wobei  $A = \psi(N)$  mit einer  $\lambda_k$ -Nullmenge  $N \subseteq V$  gilt. Zeigen Sie, dass  $A$  messbar ist und

$$\int_M f \, d\lambda_M = \int_{M \setminus A} f \, d\lambda_M = \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \, d\lambda_k.$$

*Beweis.*  $\varphi(U)$  ist messbar, weil für jedes Punkt in  $\varphi(U)$  eine offene Umgebung  $\varphi(U)$  gibt, deren Urbild  $\mathcal{L}(n)$  als offene Menge noch messbar ist. Weil  $\mathcal{L}_M$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist  $A = M \setminus \varphi(U)$  messbar.

Wir betrachten den endlichen Atlas  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ,  $\psi : V \rightarrow \psi(V)$  mit passender Zerlegung der Eins  $\chi_{\varphi(U)}, \chi_A$ . Diese ist eine Zerlegung der Eins, da die Mengen messbar sind.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_M f \, d\lambda_M &= \int_U (f \cdot \chi_{\varphi(U)}) \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\lambda_k \\
&\quad + \int_V (f \cdot \chi_A) \circ \psi \sqrt{\det(\psi'^T \psi')} \, d\lambda_k \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\lambda_k \\
&\quad + \int_N f \circ \psi \cdot \sqrt{\det(\psi'^T \psi')} \, d\lambda_k \\
&\leq \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\lambda_k \\
&\quad + \int_N \infty \, d\lambda_k \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\lambda_k + \infty \lambda_k(N) \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\lambda_k + \infty \cdot 0 \\
&= \int_U f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')} \, d\lambda_k
\end{aligned}$$

$$= \int_{M \setminus A} f \, d\lambda_M. \quad \square$$

**Aufgabe 136. (Nullmengen)** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

- (a) Sei  $N \in \mathcal{L}_m$  mit  $\lambda_M(N) = 0$ . Dann gilt  $\lambda_{M,V}(N) = 0$  für alle in  $M$  offenen Mengen  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  für die eine lokale Parameterdarstellung  $\varphi : T \rightarrow V$ , mit  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen, existiert.
- (b) Zeigen Sie, dass  $M$  eine  $\lambda_n$ -Nullmenge ist.

*Hinweis: Satz 3.5*

*Beweis.* (a) Sei  $(\varphi_j)$ ,  $\varphi_j : T_j \rightarrow V_j$  eine abzählbare Atlas von  $M$  und  $V$  beliebig, aber wie in Aufgabenstellung. Da  $\lambda_M(N) = 0$ , gilt, für eine Folge von Mengen  $(A_j)$ ,  $j \in 1, \dots$ ,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = 0.$$

Jetzt fügen wir die Menge  $V$  hinzu, mit  $V_0 := V$ , also jetzt ist  $(\varphi_j)$ ,  $j = 0, \dots$  ein abzählbarer Atlas. Wir setzen  $A'_0 = A \cap V$  und  $A'_j = A_j \cap V^c$  sonst, wobei die  $A_j$  hier die vorherigen  $A_j$  sind. Es gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A'_j) \\ &= \lambda_{M,V}(A'_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{M,V_i}(A'_i) \end{aligned}$$

Aber  $A'_j \subset A_j$  für  $j \in \mathbb{N}$ , also

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A'_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = 0.$$

Da das Maß positiv ist, muss der Ausdruck Null sein. Daraus folgt:

$$\lambda_{M,V}(A'_0) = \lambda_{M,V}(A \cap V) = 0.$$

- (b) Wir brauchen zunächst ein

**Lemma 3.3.**  $\lambda_n(E_k) = 0$  für  $k < n$ .

*Beweis.* Sei  $d = r - k$ . Da  $E_k$  offensichtlich diffeomorph zu  $\mathbb{R}^k$  ist, gibt es eine Überdeckung von Mengen  $A_j \subseteq \mathbb{R}^k$  mit  $\lambda_k(A_j) < \infty$  und  $A_j \times (a, b)^d \subseteq \mathbb{R}^n$ . Weil  $\mathbb{R}^p$   $\sigma$ -endlich für alle  $p \in \mathbb{N}$  ist, ist das Maß

$$\lambda_n(A_i \times (a, b)^d) = \lambda_k(A_i) \cdot (b - a)^d.$$

Sei jetzt  $\epsilon > 0$ . Wir betrachten die Folge von Mengen

$$B_j = \begin{cases} A_j \times (-1, 1)^d & \lambda_k(A_j) = 0 \\ A_j \times \left(-\frac{\epsilon}{2^j \lambda_k(A_j)}, \frac{\epsilon}{2^j \lambda_k(A_j)}\right)^d & \lambda_k(A_j) > 0 \end{cases}.$$

Damit ist  $\lambda_n(B_j) \leq \frac{2\epsilon}{2^j}$  und außerdem  $E_k \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_n(E_k) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(B_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^i} \\ &= 2\epsilon \end{aligned}$$

Da  $\epsilon$  beliebig war, ist  $\lambda_n(E_k) = 0$ . □

Wir nutzen jetzt Satz 3.5, um eine abzählbare Überdeckung von Mengen  $U_j$  zu finden, so dass  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j \supseteq M$  und ein  $C^\alpha$  Diffeomorphismus  $F$  existiert, so dass für jedes  $j$  eine  $V_j \subseteq \mathbb{R}^n$  existiert mit  $M \cap U_j = F(E_k \cap V_j)$

Daraus folgt für alle  $i \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_n(M \cap U_i) &= \int_{M \cap U_i} 1 \, d\lambda_n \\ &= \int_{E_k \cap V_i} |\det F'| \, d\lambda_n \\ &\leq \int_{E_k \cap V_i} \infty \, d\lambda_n \\ &= \infty \int_{E_k \cap V_i} d\lambda_k \\ &= \infty \lambda_n(E \cap V_i) \\ &\leq \infty \lambda_n(E_k) \\ &= \infty \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda_n(M) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 137.** Seien  $0 < r < R$  und

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 = 0 \right\}$$

die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit aus Präzenzaufgabe 10.1. Definiere außerdem die Funktion

$$\varphi : U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot (R + r \cos \beta) \\ \sin \alpha \cdot (R + r \cos \beta) \\ r \sin \beta \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine Menge  $A \subseteq T$ , eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^2$ , ein Homöomorphismus  $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subseteq T$  und eine  $\lambda_2$ -Nullmenge  $N \subseteq V$  existiert, sodass  $\varphi : U \rightarrow T \setminus A$  ein Homöomorphismus ist und  $\psi(N) = A$  gilt.

(b) Zeigen Sie, dass  $\lambda_T(T) = 4\pi^2 Rr$  gilt.

*Beweis.* (a) Sei  $x, y, z \in T$ . Es gilt

$$\begin{aligned}(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 &= 0 \\ \frac{(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} &= 0\end{aligned}$$

Da das Punkt

$$\left( \frac{(R - \sqrt{x^2 + y^2})}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

auf dem Einheitskreis liegt, gibt es bekanntermaßen genau einen Winkel  $\beta \in (0, 2\pi)$ , so dass

$$\begin{aligned}z &= r \sin \beta \\ R - \sqrt{x^2 + y^2} &= r \cos \beta.\end{aligned}$$

Da  $0 \neq \beta \neq 2\pi$ , ist der Fall  $(1, 0)$  ausgeschlossen, also der Fall

$$\begin{aligned}R - \sqrt{x^2 + y^2} &= r \\ z &= 0\end{aligned}$$

ist ausgeschlossen. Sei jetzt  $\beta$  fest. Es gilt

$$x^2 + y^2 = (R - r \cos \beta)^2.$$

Daher liegt das Punkt

$$\left( \frac{x}{R - r \cos \beta}, \frac{y}{R - r \cos \beta} \right)$$

auch auf dem Einheitskreis, und noch einmal gibt es *genau eine*  $\alpha \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha \cdot (R + r \cos \beta) \\ y &= \sin \alpha \cdot (R + r \cos \beta) \end{aligned}$$

Noch einmal ist der Fall  $\alpha = 0$ , also ist

$$\begin{aligned} x &= R + r \cos \beta \\ y &= 0 \end{aligned}$$

ausgeschlossen. Wir definieren dann

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{pmatrix} R + r \cos \beta \\ 0 \\ r \sin \beta \end{pmatrix}, \beta \in (0, 2\pi) \right\} \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot (R + r) \\ \sin \alpha \cdot (R + r) \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in (0, 2\pi) \right\} \end{aligned}$$

Jetzt definieren wir den gewünschten Homöomorphismus  $\psi$  ähnlich wie  $\varphi$

(b) Nach 136 gilt

$$\begin{aligned} \lambda_T(T) &= \int_T 1 \, d\lambda_T \\ &= \int_{T \setminus A} 1 \, d\lambda_T \\ &= \int_U \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \, d\lambda_M. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\varphi' = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cdot (R + r \cos \beta) & -r \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot (R + r \cos \beta) & -r \sin \alpha \sin \beta \\ 0 & r \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:  $\det(\varphi'^T \varphi') = r^2(R + r \cos \beta)^2$  und daher

$$\lambda_T(T) = \int_U r(R + r \cos \beta) \, d\lambda_2$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \beta) \, d\alpha \, d\beta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi r(R + r \cos \beta) \, d\beta \\ &= 2\pi r [R\beta + r \sin \beta]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r(2\pi R) \\ &= 4\pi^2 r R \end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini benutzt haben, um das Integral als Doppelintegral zu schreiben, weil  $\mathbb{R}^2$   $\sigma$ -endlich ist.  $\square$



---

## Einführung in die Algebra

---

### 4.1 Blatt 1

**Aufgabe 138.** Sei  $G := 2\mathbb{N}^* := \{2n | n \in \mathbb{N}^*\}$  die Menge der positiven geraden Zahlen. Wir nennen  $a \in G$  *zerlegbar*, falls sich  $a$  als Produkt zweier Elemente aus  $G$  schreiben lässt. Ansonsten nennen wir  $a$  unzerlegbar. Beispielsweise sind 4 zerlegbar und 6 unzerlegbar. Zeigen Sie:

- (a)  $G$  ist multiplikativ abgeschlossen.
- (b) Jedes  $a \in G$  lässt sich als Produkt unzerlegbarer Elemente aus  $G$  schreiben.
- (c) Selbst wenn man die Reihenfolge der Faktoren nicht berücksichtigt, so ist die Zerlegung nach (b) im Allgemeinen nicht eindeutig.

*Beweis.* (a)  $2n \times 2n' = 4nn' = 2(nn')$

- (b) Wir beweisen es per Induktion. Nehme an, dass jede Elemente  $2n, n < k$  entweder unzerlegbar ist, oder als Produkt unzerlegbare Elemente aus  $G$  geschrieben werden kann. Für  $2(1) = 2$  ist es klar - 2 ist unzerlegbar.

Sei  $M_k \subseteq G = \{m \in G | \exists n \in G, mn = 2k\}$

Entweder ist  $M = \emptyset$ , also  $k$  ist unzerlegbar, oder es existiert  $m, n \in G, mn = 2k$ . Weil  $m$  und  $n$  ein Produkt unzerlegbarer Elemente aus  $G$  sind, ist  $2k$  auch ein Produkt unzerlegbarer Elemente.

- (c) Gegenbeispiel:

$$G \ni 1020 = 30 \times 34 = 102 \times 10.$$

□

**Aufgabe 139.** In dieser Aufgabe stellen wir den Euklidischen Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers vor. Seien hierzu zwei natürliche Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $b \neq 0$  vorgelegt. Wir setzen  $r_0 := a, r_1 := b$  und rekursiv für alle  $i \in \mathbb{N}^*$  mit  $r_i \neq 0$ .

$$r_{i+1} := \text{Rest von } r_{i-1} \text{ bei der Division durch } r_i$$

- (a) Zeigen Sie, dass es ein  $n \geq 2$  mit  $r_n = 0$  gibt.

Da die Rekursionsformel für  $i = n$  nicht mehr anwendbar ist, bricht die Folge  $(r_i)$  der Reste beim Index  $n$  ab. Daher gibt es nur genau einen Index  $n \geq 2$  mit  $r_n = 0$ . Beweisen Sie nun:

- (b) Für alle  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  gilt  $ggT(a, b) = ggT(r_{i-1}, r_i)$ .
- (c) Es ist  $ggT(a, b) = r_{n-1}$ .
- (d) Berechnen Sie  $ggT(210, 45)$  mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus.

*Beweis.* (a)

$$r_{i-1} = qr_i + r_{i+1} \quad 0 \leq r_{i+1} < r_i$$

per Definition. Weil  $r_{i-1} < r_i$ , ist die Folge monoton fallend. Da es endlich viele natürliche Zahlen  $k < b$  gibt, muss  $r_n = 0$ .

- (b) Wir beweisen:

$$ggT(r_{i-1}, r_i) = ggT(r_i, r_{i+1}).$$

Die gewünschte Ergebnisse folgt daraus per Induktion.

Es gilt  $r_{i-1} - qr_i = r_{i+1}$ . Dann folgt:  $ggT(r_{i-1}, r_i)$  teilt  $r_{i-1}$  und  $r_i$  und daher auch  $r_{i-1} - qr_i$ . Deshalb ist  $ggT(r_{i-1}, r_i)$  auch einen Teiler von  $r_{i+1} \implies ggT(r_{i-1}, r_i) \leq ggT(r_i, r_{i+1})$ .

Weil  $r_{i-1} = qr_i + r_{i+1}$ , ist  $ggT(r_i, r_{i+1})$  einen Teiler von  $r_i$  und  $r_{i+1}$  und daher auch von  $qr_i + r_{i+1}$ . Deshalb ist es auch einen Teiler von  $r_{i-1}$ , und  $ggT(r_i, r_{i+1}) \leq ggT(r_{i-1}, r_i)$ .

- (c) Es gilt

$$r_{n-2} = qr_{n-1} + r_n,$$

also  $r_{n-1}$  teilt  $r_{n-2}$ . Daraus folgt

$$ggT(r_{n-1}, r_{n-2}) = r_{n-1} = ggT(a, b).$$

- (d)

$$210 = 4 \times 45 + 30$$

$$45 = 1 \times 30 + 15$$

$$30 = 2 \times 15 + 0$$

$$15$$

$$0$$

$$ggT(210, 45) = 15.$$

□

**Aufgabe 140.** (Bonus Problem) Wir wissen von dem Lemma von Bezout, dass für jeder  $x, y, \in \mathbb{N}$  es  $a, b \in \mathbb{Z}$  gibt, so dass

$$ax + by = \text{ggT}(x, y).$$

Zum Beispiel ist  $-210 + 5 \times 45 = 15$ . Kann man von das Euklidische Algorithmus die Zahlen  $a, b$  rechnen?

*Beweis.* Wir berechnen zuerst eine andere Beispiel

$$427 = 1 \times 264 + 163$$

$$264 = 1 \times 163 + 101$$

$$163 = 1 \times 101 + 62$$

$$101 = 1 \times 62 + 39$$

$$62 = 1 \times 39 + 23$$

$$39 = 1 \times 23 + 16$$

$$23 = 1 \times 16 + 7$$

$$16 = 2 \times 7 + 2$$

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

Wir kehren zurück:

$$7 - 1 = 3 \times 2$$

$$\begin{aligned} 3 \times 16 &= 6 \times 7 + 3 \times 2 \\ &= 6 \times 7 + (7 - 1) \\ &= 7 \times 7 - 1 \end{aligned}$$

$$6 \times 16 = 14 \times 7 - 1$$

$$6 \times 16 + 1 = 14 \times 7$$

$$\begin{aligned} 14 \times 23 &= 14 \times 16 + 14 \times 7 \\ &= 14 \times 16 + (6 \times 16 + 1) \\ &= 20 \times 16 + 1 \end{aligned}$$

In der letzte Gleichung bleibt  $\text{ggT}(427, 264) = 1$ . Wir setzen immer wieder ein, bis zu wir eine Gleichung des Forms  $427a + 264b = 1$  haben  $\square$

**Aufgabe 141.** Sei  $k \in \mathbb{N}$  gegeben. Für welche Zahlen  $\mathbb{N} \ni a, b < k$  braucht das Euklidische Algorithmus die meiste Schritte?

*Beweis.* Wir möchten, dass die Folge  $r_n \rightarrow 0$  nicht so schnell.

$$13 = 1 \times 8 + 5$$

$$8 = 1 \times 5 + 3$$

$$5 = 1 \times 3 + 2$$

$$\begin{array}{r}
3 = 1 \times 2 + 1 \\
2 = 1 \times 2 + 0 \\
1 \\
0
\end{array}$$

ist die Fibonacci Folge. □

**Aufgabe 142.** Seien  $p$  und  $q$  zwei ungerade und aufeinanderfolgende Primzahlen, so dass also zwischen  $p$  und  $q$  keine weiteren Primzahlen existieren. Zeigen Sie, dass  $p + q$  ein Produkt von mindestens drei (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen ist.

*Beweis.* Sei obdA  $p < q$ . Weil  $p$  und  $q$  ungerade sind, ist  $p + q$  gerade, also  $p + q = 2k, k \in \mathbb{N}$ . Nehme an, dass  $p + q$  ein Produkt von zwei Primzahlen ist, also  $k \in \mathbb{P}$ . Dann gilt

$$p < k < q, \quad k \in \mathbb{P},$$

ein Widerspruch. Deshalb ist  $k \notin \mathbb{P}$  und  $k$  ist ein Produkt von mindestens zwei Primzahlen, also  $p + q$  ist ein Produkt von mindestens drei Primzahlen. □

**Aufgabe 143.** Seien  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $a \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass es genau dann ein  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $ax \equiv 1 \pmod{n}$  gibt, wenn  $\text{ggT}(a, n) = 1$  gilt.

*Beweis.*  $ax \equiv 1 \pmod{n} \iff ax - 1 = kn, k \in \mathbb{Z}$ , also  $ax - kn = 1$ .

Weil  $\text{ggT}(a, n) = 1$ , gibt es so zwei Zahlen  $a, -k$ , so dass  $ax - kn = 1$  (Lemma von Bezout) □

## 4.2 Blatt 2

**Aufgabe 144.** Sei  $G$  eine Gruppe mit neutralem Element 1. Für jedes Element  $g \in G$  gelte  $g^2 = 1$ . Zeigen Sie, dass  $G$  dann abelsch ist.

*Beweis.*

**Lemma 4.1.** Sei  $a, b \in G$ . Dann gilt  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

*Beweis.*

$$abb^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1. \quad \square$$

Es gilt, für jede  $g \in G$ , dass  $g = g^{-1}$ , weil  $gg = 1$  (per Definition). Deswegen gilt

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba. \quad \square$$

**Aufgabe 145.** Sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $q \in \mathbb{N}^*$  Elementen.

- (a) Zeigen Sie, dass es genau  $\prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k)$  geordnete Basen des  $K$ -Vektorraums  $K^n$  gibt. Unter einer geordneten Basis des  $K$ -Vektorraums  $K^n$  verstehen wir hierbei ein  $n$ -Tupel  $(b_1, \dots, b_n)$  linear unabhängiger Vektoren  $b_1, \dots, b_n \in K^n$ .

- (b) Nutzen Sie Teilaufgabe (a), um nachzuweisen, dass die Gruppe  $GL_n(K)$  aus Beispiel 2.4 (d) die Ordnung  $\prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k)$  besitzt.

*Beweis.* (a) Wir versuchen, ein  $p$ -Tupel linear unabhängiger Vektoren zu finden. Ich zeige, dass es genau  $\prod_{k=0}^{p-1} (q^n - q^k)$  solche Vektoren gibt. Für  $p = n$  ist das natürlich die gewünschte Behauptung.

Für  $p = 1$  müssen wir  $n$  Elemente aus  $K$  finden. Es gibt  $q^n$  Möglichkeiten dafür. Jedoch ist  $(0, 0, \dots, 0)$  verboten. Deswegen gibt es genau  $q^n - 1$  Vektoren, die nicht  $(0, 0, \dots, 0)$  sind.

Jetzt nehmen wir an, dass es genau  $\prod_{k=0}^{p-1} (q^n - q^k)$  Tupel von  $p$  linear unabhängigen Vektoren gibt (wenn man die Reihenfolge berücksichtigt), für eine beliebige  $p < n$ . Sei  $v_1, v_2, \dots, v_p$  ein solches  $p$ -Tupel. Wir möchten einen anderen Vektor  $v_{p+1}$  finden, der linear unabhängig von  $v_1, v_2, \dots, v_p$  ist. Das bedeutet:

$$v_{p+1} \neq a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p$$

für **alle**  $a_1, a_2, \dots, a_p \in K$ . Es gibt  $q^p$  Kombinationen für  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ . Weil  $v_1, v_2, \dots, v_p$  linear unabhängig sind, gilt für jede  $(a_1, a_2, \dots, a_p) \neq (a'_1, a'_2, \dots, a'_p)$  auch  $a_1 v_1 + \dots + a_p v_p \neq a'_1 v_1 + \dots + a'_p v_p$ . Deswegen gibt es für jede  $v_1, v_2, \dots, v_p$  genau  $q^n - q^p$  Möglichkeiten für  $v_{p+1}$ .

Es gibt daher

$$\prod_{k=0}^{p-1} (q^n - q^k)$$

$p$ -Tupel von linear unabhängigen Vektoren. Für  $p = n$  ist die Behauptung bewiesen.

- (b) Sei  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eine Basis von  $K^n$ , und  $T$  eine lineare Abbildung  $T : K^n \rightarrow K^n$ . Wenn man  $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$  weiß, ist  $T$  eindeutig.  $T$  ist invertierbar genau wenn  $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$  linear unabhängig sind. Es gibt dadurch eine bijektive Funktion

$$f : GL_n(K) \rightarrow \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in K^{n \times n} \mid v_1, \dots, v_n \text{ sind linear unabhängige Vektoren}\}.$$

Aber wir wissen, dass es genau  $\prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k)$  solche  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in K^{n \times n}$  gibt. Daraus folgt:

$$|GL_n(K)| = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k). \quad \square$$

**Aufgabe 146.** Wir betrachten die komplexen  $(2 \times 2)$ -Matrizen

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge  $Q_8 := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$  zusammen mit der Matrixmultiplikation eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8 bildet. Man nennt  $Q_8$  auch die *Quaternionengruppe* der Ordnung 8.

**Hinweis:** Ein paar konkrete Matrixmultiplikationen werden Sie bei dieser Aufgabe ausrechnen müssen. Versuchen Sie, deren Anzahl gering zu halten und möglichst viel aus Ihren bereits durchgeführten Rechnungen zu schließen.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass  $Q_8$  unter  $\cdot$  abgeschlossen ist. Wir wissen von der Linearen Algebra, dass  $EM = M$  für alle Matrizen  $M$ . Das heißt, dass  $E$  ein neutrales Element ist. Wir wissen auch, dass  $(-E)M = -M$ . Ich betrachte einige wichtige Matrixmultiplikationen:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E.$$

Daraus folgt, dass  $x^{-1} = -x$ , für  $Q_8 \ni x \neq \pm E$ . Für  $x = -E$  ist  $x^{-1} = x$ . Jede  $x \in G$  ist daher invertierbar. Es gilt auch

$$\begin{aligned} IJ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = K \\ JK &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = I \\ KI &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \end{aligned}$$

Von daraus folgt, dass  $Q_8$  unter Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Deswegen ist  $Q_8$  eine Gruppe. Es ist nicht abelsche. Sei  $a, b \in \{\pm I, \pm J, \pm K\}$ ,  $a \neq \pm b$ , und daher  $ab \in \{\pm I, \pm J, \pm K\}$

$$ab = -(ab)^{-1} = -b^{-1}a^{-1} = -(-b)(-a) = -ba. \quad \square$$

**Aufgabe 147.** Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 4. Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.

*Beweis.* Sei  $G = \{1, a, b, c\}$ . Nehme an, dass  $G$  nicht abelsch ist. ObdA können wir annehmen, dass  $ab \neq ba$ . Wir betrachten dann drei Fälle:

1.  $ab = a$  oder  $ab = b$  (obdA nehme an,  $ab = a$ ).

Es gilt dann

$$(ba)b = b(ab) = ba.$$

Daraus folgt  $b = 1$ , ein Widerspruch.

2.  $ab = 1$ . Es folgt aus die Eindeutigkeit des Inverses, dass  $ba = 1$ , auch ein Widerspruch.
3.  $ab = c$ . Erinnern Sie sich daran, dass  $ba \neq 1$ , sonst gibt es ein Widerspruch wie im vorherigen Fall. Es gilt auch  $ba \neq c$ , weil  $ab \neq ba$ . Nehme obdA an, dass  $ba = a$ . Es gilt dann

$$bab = ab = bc.$$

Es gilt auch

$$bc = bab = b^2c.$$

Deswegen ist  $b = 1$ , noch ein Widerspruch.  $\square$

**Aufgabe 148.** Wie viele Gruppe der Ordnung 1/2/3/4 gibt es?

*Beweis.* Ordnung:

(a) 1:  $G = \{1\}$

(b) 2:  $G = \{1, a\}, a^2 = 1$

(c) 3:  $G = \{1, a, b\}$

Jede element muss invertierbar sind, und 1 kann nicht die Inverse sein. Wir betrachten  $a^{-1}$  :

(i)  $a^{-1} = a$ . Es gilt  $b^{-1} = b$ , sonst ist  $b^{-1} = a \implies a^{-1} = b$ . Es gilt dann entweder  $ab = a$  oder  $ab = b$ . Sei  $ab = a$ . Es gilt

$$b = (aa)b = aab = aa = 1,$$

ein Widerspruch. Das Fall ist leider unmöglich.

(ii) Es gilt  $ab = 1$ , daher auch  $ba = 1$ . Dann muss es gelten,  $a^2 = b, b^2 = a$ . Das Fall ist möglich.

Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 3.

(d) 4: Wir haben schon bewiesen, dass es abelsch sein muss. Wir zeichnen die Tabelle

1	a	b	c
a			
b			
c			

Es muss symmetrisch sein. Weil alle Elemente in alle Zeilen und Spalten vorkommen muss, gilt entweder

□

## 4.3 Blatt 3

**Aufgabe 149.** Wir ändern die Gruppdefinition aus Definition 2.3 ab, indem wir für eine Menge  $G$  mit einer zweistelligen Verknüpfung  $\cdot$  und einem Element  $e \in G$  fordern:

(a) Es gilt  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  für alle  $a, b, c \in G$ .

(b) Es gilt  $a \cdot e = a$  für alle  $a \in G$ .

(c') Zu jedem  $a \in G$  gibt es ein Element  $b \in G$  mit  $b \cdot a = e$

Ist dann  $G$  stets eine Gruppe?

*Beweis.* Nein. Sei  $x \cdot y = x$ . Es ist assoziativ, weil  $x \cdot (y \cdot z) = x = (x \cdot y) \cdot z$ . Es gilt auch  $x \cdot e = x \forall x$ . Außerdem gilt  $e \cdot x = e \forall x \in G$ . Aber es gilt für alle  $e \neq x \in G$ , dass  $x \cdot y = x \neq e \forall y \in G$ .  $G$  ist dann keine Gruppe.  $\square$

**Aufgabe 150.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  fixiert. Wir setzen  $\alpha := \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$  und definieren die folgenden zwei Abbildungen:

$$s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \rightarrow \bar{z} \quad \text{sowie} \quad r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \rightarrow \alpha z.$$

Das neutrale Element der Gruppe  $\text{Sym}(\mathbb{C})$  bezeichnen wir mit  $e$  und mit  $\cdot$  die Verkettung von Funktionen.

- (a) Zeigen Sie, dass  $s^2 = e$  und  $r \cdot s \cdot r = s$  gelten.
- (b) Zeigen Sie, dass für  $k \in \mathbb{N}$  genau dann  $r^k = e$  gilt, wenn  $n|k$  ist.
- (c) Zeigen Sie, dass  $r$  und  $s$  Elemente der symmetrischen Gruppe  $\text{Sym}(\mathbb{C})$  sind.
- (d) Zeigen Sie, dass  $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.
- (e) Zeigen Sie, dass zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $t \in \mathbb{N}$  mit  $r^{-k} = r^t$  existiert.
- (f) Beschreiben Sie das Abbildungsverhalten von  $r$  und  $s$  geometrisch.
- (g) Folgern Sie aus (a)–(e), dass  $\{r^a \cdot s^b | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$  gilt.
- (h) Zeigen Sie, dass  $D_n := \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$  eine Gruppe ist.
- (i) Beweisen Sie, dass  $|D_n| = 2n$  gilt.
- (j) Zeigen Sie, dass  $D_n$  nicht abelsch ist.

*Beweis.* (a)  $s^2 = e$  folgt aus  $\bar{\bar{z}} = z$ . Es gilt

$$\begin{aligned} (r \cdot s \cdot r)(z) &= (r \cdot s)(\exp(2\pi i/n)z) \\ &= r(\exp(-2\pi i/n)\bar{z}) \\ &= \exp(2\pi i/n) \exp(-2\pi i/n)\bar{z} \\ &= \bar{z} \end{aligned}$$

Also  $r \cdot s \cdot r = s$ .

- (b) Wir wissen,  $r^k(z) = \exp(2\pi i k/n)z$ .  $r^k = e$  genau dann, wenn  $\exp(2\pi i k/n) = 1$ , also  $n|k$ .
- (c) Sie sind bijektiv. Wir schreiben einfach die Umkehrfunktion.

$$s^{-1} = s \tag{a}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(-2\pi i/n)x \\ r \circ f &= e = f \circ r \end{aligned}$$



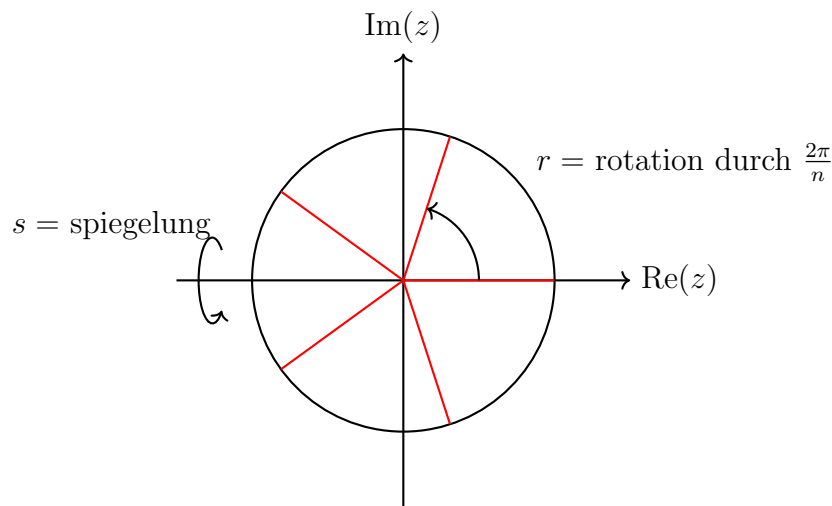
(d)

$$\begin{aligned}
 (s \cdot r^k)(z) &= s(\exp(2\pi i k/n) z) \\
 &= \exp(-2\pi i k/n) \bar{z} \\
 (r^{-k} \cdot s)(z) &= (r^{-k})(\bar{z}) \\
 &= \exp(-2\pi i k/n) \bar{z} \\
 &= (s \cdot r^k)(z)
 \end{aligned}$$

(e) Sei  $t = -k + pn, p \in \mathbb{N}$ , für  $p$  hinreichend groß, damit  $t > 0$  und daher  $p \in \mathbb{N}$ .  
Es gilt

$$s^t = s^{-k+pn} = s^{-k} s^{pn} = s^{-k} (s^n)^p = s^{-k}.$$

(f)



(g) Sei  $y = 2n + b, b \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$s^y = s^{2n+b} = s^{2n} \cdot s^b = e \cdot s^b = s^b.$$

(h) (i)  $D_n$  ist abgeschlossen

$$r^a \cdot s^b \cdot r^{a'} \cdot s^{b'} = r^a \cdot r^{-a'} \cdot s^b \cdot s^{b'} \quad (d)$$

$$= r^{a-a'} s^{b+b'}$$

$$\in D_n \quad (g)$$

(ii)  $D_n$  ist assoziativ wegen der Assoziativität von Funktionverkettung.

(iii) Neutrales Element

$$a = 0, b = 0, r^0 \cdot s^0 = e \in D_n.$$

(iv) Inverses Element

$$s^{-b} \cdot r^{-a} \cdot r^a \cdot s^b = s^{-b} \cdot (r^{-a} \cdot r^a) \cdot s^b = s^{-b} \cdot s^b = e.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} s^{-b} \cdot r^{-a} &= r^a \cdot s^{-b} & (d) \\ &= r^a \cdot s^c, \quad 0 \leq c < 2 & (a) \end{aligned}$$

- (i) Es gibt genau  $n$  Möglichkeiten für  $a$ , und 2 Möglichkeiten für  $b$ . Daraus folgt  $|D_n| = 2n$ .
- (j) Wir haben  $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$  (d), und müssen nur  $k$  finden, sodass  $r^k \neq r^{-k}$ .  $k = 1$  ist ein Gegenbeispiel.  $\square$

## 4.4 Blatt 4

**Aufgabe 151.** Seien  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T$  die Menge der positiven Teiler von  $n$  und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $n$ . Für  $t \in T$  definieren wir die Mengen

$$M_t := \{g \in G \mid \text{ord}(g) = t\} \subseteq G.$$

- (a) Zeigen Sie, dass jedes  $g \in G$  in genau einer der Mengen  $M_t$  mit  $t \in T$  liegt.
- (b) Sei nun zudem  $G$  zyklisch. Zeigen Sie, dass dann  $|M_t| = \varphi(t)$  für alle  $t \in T$  gilt.
- (c) Folgern Sie: Für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt  $n = \sum_{t \mid n, t > 0} \varphi(t)$ .

*Beweis.* (a) Sei  $g \in G$  beliebig und  $H = \langle g \rangle$ .  $H$  ist eine Untergruppe von  $G$ . Es gilt auch, dass  $|H| = \text{ord}(g)$ . Wir wissen, dass  $|H|$  teilt  $|G|$ . Daraus folgt, dass  $\text{ord}(g)$  teilt  $|G|$ , und  $g$  liegt in genau einer der Mengen  $M_t$  mit  $t \in T$ .

- (b) Weil  $G$  zyklisch ist, gibt es für jede Teiler  $t \mid n$  eine Untergruppe der Ordnung  $t$ . Diese Untergruppe hat genau  $\varphi(t)$  Erzeuger. Für alle Erzeuger  $p$  gilt  $\text{ord}(p) = |\langle p \rangle| = t$ . Es gilt daher, für jedes  $t \in T$ ,  $|M_t| \geq \varphi(t)$ .

Außerdem ist die Untergruppe der Ordnung  $t$  eindeutig. Deswegen ist genau  $|M_t| = \varphi(t)$ . Wir nehmen an, dass es  $p \in G$  gibt, sodass  $\text{ord}(p) = t$ , also  $|\langle p \rangle| = t$ . Weil die zyklische Untergruppe der Ordnung  $t$  eindeutig ist, ist die erzeugte Gruppe genau die Gruppe, die wir vorher diskutiert haben, also  $p$  ist einer der vorherigen  $\varphi(t)$  Erzeuger.

Daraus folgt, dass  $|M_t| = \varphi(t)$  für alle  $t \in T$ .

- (c) Es gibt für jedes  $n$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ , z.B.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Alle Element sind in einer der Mengen  $M_t$ . Die Zahl der Elemente ist einfach  $\sum_{t \in T} |M_t| = \varphi(t) = n$

$\square$

**Aufgabe 152.** Zeigen Sie, dass für eine Gruppe  $G$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}^*$  äquivalent sind:

- (a)  $G$  ist zyklisch.
- (b)  $G$  besitzt zu jedem positiven Teiler  $t$  von  $n$  genau eine Untergruppe der Ordnung  $t$ .

*Beweis.* (a)  $\implies$  (b) ist schon in der Vorlesung bewiesen. (Satz 2.18). Es bleibt (b)  $\implies$  (a) zu zeigen. Wir betrachten dann ein Element  $a \in G$  und die erzeugte zyklische Gruppe  $\langle a \rangle$ . Falls  $\langle a \rangle = G$  sind wir fertig. Also nehmen wir an,  $\langle a \rangle \neq G$ . Sei  $\text{ord}(a) = k$ , und  $\langle a \rangle = k$ . Diese Gruppe besitzt genau  $\varphi(k)$  Erzeuger.

Dann wählen wir ein anderes  $b$  Element aus, das kein Erzeuger von  $\langle a \rangle$  ist. Wir betrachten  $\langle b \rangle$ . Es muss gelten, dass  $\text{ord}(b) = |\langle b \rangle| \neq k$ . Sonst wäre  $\langle b \rangle = \langle a \rangle$ , weil es nur *eine* Untergruppe der Ordnung  $k$  gibt. Wir nehmen noch an, dass  $\langle b \rangle \neq G$ .

Ähnlich fahren wir fort. Wir wählen ein Element aus, das kein Erzeuger von der vorherigen betrachteten zyklischen Gruppen sind. Weil es für jeder Teiler von  $n$  nur eine Untergruppe der Ordnung gibt, gilt  $|M_t| = \varphi(t)$ .

Sei  $T$  die Menge der positiven Teiler von  $n$ . Wir berechnen

$$\sum_{n \neq t \in T} \varphi(t) < n,$$

also wir haben Elemente, deren Ordnung kein positiver Teiler von  $n$ , das weniger als  $n$  ist. Weil die Ordnung ein Teiler von  $n$  sein muss, muss die Ordnung  $n$  sein, also solche Elemente sind Erzeuger der Gruppe  $G$ , und  $G$  ist zyklisch.  $\square$

**Aufgabe 153.** (a) Bestimmen Sie die Ordnungen der Elemente für jede der Diedergruppen  $D_n$  mit  $n \geq 3$ .

- (b) Zeigen Sie, dass Satz 2.23 für nicht-abelsche Gruppen im Allgemeinen falsch ist.

(Satz 2.23) Sei  $n$  die größte Elementordnung in einer abelschen Gruppe  $G$ . Dann gilt  $g^n = e$  für alle  $g \in G$ .

*Beweis.* (a) Wir betrachten zuerst Elemente mit der Form  $r^k s^0 = r^k$ . Wir haben per die letzte Übungsblatt

Zeigen Sie, dass für  $k \in \mathbb{N}$  genau dann  $r^k = e$  gilt, wenn  $n|k$  ist.

also wir brauchen die kleinste Zahl  $\text{ord}(r^k)$ , sodass  $(r^k)^{\text{ord}(r^k)} = r^{k \cdot \text{ord}(r^k)} = r^{pn}, p \in \mathbb{N}$ . Per Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfaches ist

$$\text{ord}(r^k) = \frac{\text{kgV}(k, n)}{k} = \frac{n}{\text{ggT}(k, n)}.$$

Wir wissen auch, dass  $s^2 = e$ , also  $\text{ord}(s) = 2$ .

Jetzt betrachten wir alle Elemente mit dem Form  $r^k s$ . Es gilt

$$r^k s r^k s = r^k r^{-k} s s = e e = e,$$

also alle Elemente mit dem Form  $r^k s$  haben Ordnung 2.

- (b) Wir betrachten  $D_3$ . Die größte Elementordnung ist 3, weil  $\text{ggT}(3, 2) = 1$ , und  $\frac{3}{\text{ggT}(3, 2)} = 3$ , also  $r^2$  hat Ordnung 3.

Keine größere Elementordnung ist möglich, weil  $\frac{n}{\text{ggT}(n, k)} \leq n = 3$ , und  $2 \leq 3$ .

Es gilt aber

$$s^3 = (s^2)s = es = s,$$

also  $s^3 \neq e$ , ein Widerspruch. □

**Aufgabe 154.** Sei  $n \geq 3$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge  $R := \{r^0, r^1, \dots, r^{n-1}\}$  ein Normalteiler von  $D_n$  ist.

- (b) Zeigen Sie, dass die Gruppe  $\langle x \rangle$  für kein  $x \in D_n \setminus R$  ein Normalteiler von  $D_n$  ist.

*Beweis.* (a) Wir betrachten  $x^{-1}Rx$ :

- (i)  $x = r^p$ :

Es gilt  $x^{-1} = r^{-p}$ . und

$$r^{-p} r^k r^p = r^k,$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , also  $r^{-p} R r^p = R$ , insbesondere  $r^{-p} R r^p \subseteq R$ .

- (ii)  $x = s$ :

Es gilt  $s^{-1} = s$ , und

$$s r^k s = r^{-k} s s = r^{-k} \in S,$$

(Die Behauptung, dass  $r^{-k} \in S$ , war im letzten Übungsblatt bewiesen).

- (iii)  $x = r^p s$ :

Wir haben schon bewiesen, dass  $x^{-1} = r^p s$ . Es gilt

$$r^p s r^k r^p s = r^p s r^{k+p} s = r^p r^{-(k+p)} s s = r^{-k} \in R.$$

Insgesamt gilt  $x^{-1}Rx \subseteq R$  für alle  $x \in D_n$ , also  $R$  ist ein Normalteiler.

- (b) Noch einmal betrachten wir die unterschiedlichen Fälle

- (i)  $x = s$ , also  $\langle x \rangle = \{e, s\}$ :

Es gilt

$$r^{-1} s r = r^{-1} r^{-1} s = r^{-2} s \neq s.$$

(Es gilt  $r^{-2} \neq r^0 = e$  wenn  $n \geq 3$ ).

(ii)  $x = r^p s$ , also  $\langle x \rangle = \{e, r^p s\}$ .

Es gilt

$$r^{-k} r^p s r^k = r^{-k} r^p r^{-k} s = r^{p-2k} s,$$

was nur ein Element von  $\langle x \rangle$  ist, wenn  $p-2k \equiv p \pmod{n}$ . Sei zum Beispiel  $k = 1$ . Weil  $n \geq 3$ , gilt die Gleichung nie.

**Lemma 4.2.** Für  $n \geq 3$  kann

$$p-2 \equiv p \pmod{n}$$

nicht gelten, für alle  $p \in \mathbb{Z}$

*Beweis.* Die Gleichung  $p-2 \equiv p \pmod{n}$  genau dann, wenn es  $k \in \mathbb{Z}$  existiert, sodass

$$p - p - 2 = kn,$$

aber das impliziert

$$2 = kn,$$

was unmöglich ist, weil  $n \geq 3 > 2$ . □

Also  $r^{-1} \langle x \rangle r \not\subseteq \langle x \rangle$

Die Gruppe  $\langle x \rangle$  ist dann keine Gruppe für  $x \in D_n \setminus R$ . □

## 4.5 Blatt 5

**Aufgabe 155.** (a) Begründen Sie, dass die Permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 9 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_9$  in der alternierenden Gruppe  $A_9$  liegt.

(b) Finden Sie  $i$  und  $k$ , so dass die Permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix} \in S_9$  gerade ist.

*Beweis.* (a) Wir schreiben zuerst  $\sigma$  als Zyklus

$$\sigma = (176)(259)(384).$$

Dann stellen wir die Zyklus als Produkte von Transpositionen dar, wie im Beweis von 2.44

$$\sigma = (17)(76)(25)(59)(38)(84).$$

Es gibt 6 Transpositionen, also  $\sigma$  ist gerade, und  $\sigma \in A_9$ .

(b) Weil jede Zahl nur einmal vorkommen darf, gibt es nur zwei Möglichkeiten

$$\begin{array}{ll} i = 3 & j = 8, \\ i = 8 & j = 3. \end{array}$$

Wir betrachten die zwei Fälle:

(i)  $i = 3, j = 8$  :

Wir schreiben es als Zyklus, und dann von Transpositionen

$$(3765) = (37)(76)(65),$$

also es ist ungerade.

(ii)  $i = 8, j = 3$  wir machen ähnlich

$$(37658) = (37)(76)(65)(58),$$

also es ist in diesem Fall gerade. □

**Aufgabe 156.** Es sei  $n \in \mathbb{N}^*$ . Die Permutationen  $\sigma, \tau \in S_n$  seien disjunkt.

(a) Beweisen Sie Lemma 2.41: Es gilt  $\sigma\tau = \tau\sigma$ .

(b) Folgern Sie: Es ist  $\text{ord}(\sigma\tau) = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ .

*Beweis.* (a) Kurze Erinnerung an Definition von disjunkte Permutationen:

**Definition 4.3.** Zwei Permutationen  $\sigma, \tau \in S_n$  heißen *disjunkt*, falls gilt

$$\begin{aligned}\sigma(i) \neq i &\implies \tau(i) = i, \text{ und} \\ \tau(i) \neq i &\implies \sigma(i) = i\end{aligned}$$

Wir brauchen außerdem eine Ergebnis

**Lemma 4.4.** Sei  $\sigma(i) = j \neq i$ . Es gilt dann  $\sigma(j) \neq j$ .

*Beweis.* Sonst wäre es ein Widerspruch zu die Definition, dass  $S_n$  die Gruppe alle bijektive funktionen  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  ist. Die Permutation wäre dann nicht injektiv, weil  $\sigma(i) = \sigma(j)$ , aber per Annahme  $i \neq j$  gilt. □

**Korollar 4.5.** Sei  $\sigma, \tau \in S_n$  disjunkte Permutationen. Falls  $\sigma(i) \neq i$  gilt  $\tau\sigma(i) = \sigma(i)$ .

**Bemerkung 4.6.** Alle Aussagen here gelten natürlich noch, wenn man die Rollen von  $\sigma$  und  $\tau$  vertauschen.

Die Ergebnis folgt jetzt fast sofort. Wir betrachten drei Fälle:

(i)  $\sigma(i) \neq i$ , also  $\tau(i) = i$ .

Es gilt dann

$$\sigma\tau(i) \stackrel{4.3}{=} \sigma(i) \stackrel{4.5}{=} \tau\sigma(i).$$

(ii)  $\tau(i) \neq i$ , also  $\sigma(i) = i$ .

$$\tau\sigma(i) \stackrel{4.3}{=} \tau(i) \stackrel{4.5}{=} \sigma\tau(i).$$

(iii)  $\tau(i) = i$  und  $\sigma(i) = i$ .

$$\tau\sigma(i) = i = \sigma\tau(i).$$

Insgesamt gilt  $\tau\sigma = \sigma\tau$ .

(b) Es gilt

$$(\sigma\tau)^n = \sigma^n \tau^n$$

wegen (a), weil  $\sigma$  und  $\tau$  kommutiert, und wir können die Reihenfolge im Produkt

$$\underbrace{\sigma\tau\sigma\tau \dots \sigma\tau}_{n \text{ Mal}}$$

verändern, sodass die  $\sigma$  alle an einer Seite liegen, und die  $\tau$  an der anderen Seite. Sei  $N \ni p \leq \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ . Sei  $p = n_1 \text{ord}(\sigma) + a = n_2 \text{ord}(\tau) + b$ ,  $a, b, n_1, n_2 \in \mathbb{N}, 0 \leq a < \text{ord}(\sigma)$  und  $0 \leq b < \text{ord}(\tau)$ .

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)^p &= \sigma^p \tau^p \\ &= \sigma^{n_1 \text{ord}(\sigma) + a} \tau^{n_2 \text{ord}(\tau) + b} \\ &= \sigma^{n_1 \text{ord}(\sigma) + a} \tau^{n_2 \text{ord}(\tau) + b} \\ &= \sigma^{n_1 \text{ord}(\sigma)} \sigma^a \tau^{n_2 \text{ord}(\tau)} \tau^b \\ &= \sigma^a \tau^b \end{aligned}$$

Per Definition, wenn  $p = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ , ist  $a = b = 0$  und

$$(\sigma\tau)^{\text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))} = \sigma^0 \tau^0 = 1.$$

Für  $p < \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$  kann die beide nicht gleichzeitig gelten. Wir betrachten dann  $\sigma^a \tau^b$ . Per Definition können  $a$  und  $b$  nicht gleichzeitig 0 sein. Sei zum Beispiel  $a \neq 0$ . Dann haben wir nie das neutrale Element (es ist egal, was  $b$  ist). Sei  $i_k$  von  $\sigma$  bewegt (hier nehmen wir an, dass  $\sigma \neq 1$ ). Dann ist  $i_k$  nicht von  $\tau$  bewegt, weil  $\sigma$  und  $\tau$  disjunkt sind.

$$\sigma^a \tau^b i_k = \sigma^a i_k.$$

Per Definition ist  $\sigma^a i_k \neq i_k$  für alle mögliche  $i_k$ , sonst wäre  $\text{ord}(\sigma) = i_k$ . Dann ist  $(\sigma\tau)^p \neq 1$  für alle  $p < \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ . Ähnlich für  $b \neq 0$  betrachten wir alle Elemente, die nicht von  $\sigma$  bewegt sind. Für entweder  $\sigma = 1$  oder  $\tau = 1$  ist die Behauptung klar. Sei  $\sigma = 1$ . Dann gilt  $\text{ord}(1) = 1$ , und  $\text{ord}(\sigma\tau) = \text{ord}(\tau) = \text{kgV}(1, \text{ord}(\tau))$ . Schluss:

$$\text{ord}(\sigma\tau) = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau)). \quad \square$$

**Aufgabe 157.** (a) Zeigen Sie: Für jeden  $m$ -Zykel  $\sigma$  gilt  $\text{ord}(\sigma) = m$ .

(b) Bestimmen Sie das kleinste  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $S_n$  ein Element der Ordnung 20 enthält.

*Beweis.* (a) Sei  $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_m)$ , mit die  $i_j$  paarweise unterschiedlich. Es gilt, für  $\mathbb{N} \ni x \leq m$

$$\sigma^x i_k = i_p,$$

wobei  $1 \leq p \leq m$  und  $p \equiv k + x \pmod{m}$ .  $\sigma^x = 1$  genau dann, wenn  $\sigma^x i_k = i_k$  für alle  $k$ , also  $p = k$ . Für  $x = m$  ist es dann klar,  $p = k$ , also  $\sigma^x = 1$ .

Für  $x < m$  kann das nicht sein. Das Kongruenz gilt genau dann, wenn

$$k + x - rx = k, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Aber per Definition, wenn  $r = 1$  ist  $k + x - x = k$ . Wenn  $r = 0$  ist  $k + x \neq k$ , weil  $x \geq 1 > 0$ . Also  $\sigma^x \neq 1$  für alle  $1 < x < m$ .

- (b) Mit Hilfe von 156 können wir einfach eine solche  $S_n$  konstruieren. Sei  $n = 9$ . Dann haben wir 2 disjunkter Zyklus

$$(12345) \quad \text{und} \quad (6789).$$

mit Ordnung 4 und 5 (a). Dann hat das Produkt  $(12345)(6789)$  der Ordnung 20, weil 4 und 5 Teilerfremd sind, und daher  $\text{kgV}(4, 5) = 4 \times 5 = 20$ .

Jetzt betrachten wir die Aufgabe im Allgemeinen. Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig und  $\sigma$  ein Element von  $S_n$  mit der Ordnung 20. Wir können  $\sigma$  als Produkt von  $k$  disjunkter Zykel. Die Zykel haben Länge  $l_i$ ,  $2 \leq l_i \leq k \quad \forall i$  und

$$l_1 + l_2 + \dots + l_k \leq n.$$

Der Ordnung von  $\sigma$  ist

$$\text{ord}(\sigma) = l_1 l_2 \dots l_k = 20 = 2^2 \times 5.$$

Weil 5 eine Primzahl ist, muss mindestens ein  $l_i$  5 sein. Also oBdA können wir für beliebiges  $n$  so versuchen, ein solches Element so konstruieren: Wir nehmen 5 Elemente raus, und versuchen weiter, ein disjunkter Zyklus mit Länge 4 oder 2 disjunkte Zykel mit Länge 2 zu finden. Das heißt, dass wir mindestens 9 Elemente brauchen. Dann ist 9 genau die gewünschte Zahl.  $\square$

**Aufgabe 158.** (a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$V_4 := \{\sigma \in A_4 \mid \text{ord}(\sigma) \leq 2\}$$

eine Untergruppe der Ordnung 4 von  $A_4$  (und daher auch  $S_4$ ) ist.

- (b) Zeigen Sie, dass  $V_4$  ein Normalteiler von  $S_4$  (und daher auch  $A_4$ ) ist.

*Hinweis:*  $V_4$  heißt auch Kleinsche Vierergruppe.

*Beweis.* (a) Wir schreiben ein beliebiges Element  $\sigma \in V_4$  als Produkt von disjunkten Zykeln und nutzen die Eigenschaften:



(i)  $\sigma \in A_4$ .

Dann kann das Produkt keine Zykeln der Ordnung 4 enthalten, weil  $\sigma$  ist dann genau das Zyklus und lässt sich als Produkt von 3 Transpositionen schreiben, also  $(i_1 i_2 i_3 i_4) = (i_1 i_4)(i_1 i_3)(i_1 i_2)$ .

(ii)  $\text{ord}(\sigma) \leq 2$ .

Also das Produkt enthält nur Zykeln der Länge 2.

(iii) Dann können alle  $\sigma \in V_4$  als Produkt von 0 oder 2 Zykeln der Länge 2 bzw. Transpositionen geschrieben werden. Wie viele solchen Zykeln gibt es? Wir schreiben alle Möglichkeiten

(12)

(23)

(34)

(13)

(24)

(14)

Dann können wir alle Elemente von  $V_4$  schreiben:

$1 = ()$

$(12)(34)$

$(13)(24)$

$(14)(23)$

(iv) Wir müssen keine Assoziativgesetz oder Existenz des Inverses beweisen, die folgen alle aus den Eigenschaften der Gruppe  $A_4$ .

(v)  $V_4$  ist abgeschlossen:

Wir schreiben die Verknüpfungstafel

$$\begin{pmatrix} () & (12)(34) & (13)(24) & (14)(23) \\ (12)(34) & () & (14)(23) & (13)(24) \\ (13)(24) & (14)(23) & () & (12)(34) \\ (14)(23) & (13)(24) & (12)(34) & () \end{pmatrix}.$$

(vi) Alle Elemente in  $V_4$  sind invertierbar, weil  $\text{ord}(\sigma)$  ist entweder 1, also  $\sigma = 1$  und  $\sigma^2 = 1$ , oder  $\text{ord}(\sigma) = 2$ , also  $\sigma^2 = 1$ . In beiden Fällen ist  $\sigma = \sigma^{-1}$ .

(b) Sei  $(v_1 v_2)(v_3 v_4) = v \in V_4$  und  $\sigma \in S_4$ . Sei  $f = \sigma^{-1}$ . Das Ziel ist

$$\sigma^{-1} v \sigma = (f(v_1) f(v_2)) (f(v_3) f(v_4)).$$

Wir betrachten die Wirkung  $f v f^{-1} u$ . Weil sowohl  $\sigma$  als auch  $f$  bijektiv sind, können wir statt  $u$   $f(x)$  schreiben. Sei  $v(x) = y$ . Es gilt dann

$$f v f^{-1} f(x) = f v(x) = f(y).$$

Weil  $f$  bijektiv ist, ist  $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , also wir haben ein Produkt von 2 disjunkte Zykeln der Länge 2 bzw. Permutationen, also  $\sigma^{-1} v \sigma \in V_4$ .  $\square$

## 4.6 Blatt 6

**Aufgabe 159.** Seien  $G, H$  Gruppen und  $\Phi : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus.

- (a) Sei  $g \in G$  ein Element mit Ordnung  $n \in \mathbb{N}^*$ . Zeigen Sie, dass  $\text{ord}(\Phi(g)) \mid n$  gilt.  
 (b) Sei  $N \trianglelefteq G$ . Ist dann stets auch  $\Phi(N) \trianglelefteq H$ ?

*Beweis.* (a) Es gilt

$$\Phi(g)^n = \Phi(g^n) = \Phi(1_G) = 1_H,$$

also  $\text{ord}(\Phi(g)) \leq n$ . Wir beweisen die Aussage per Widerspruch. Sei  $\text{ord}(\Phi(g)) = p \nmid n$ . Wir schreiben

$$n = qp + r, \quad r < p$$

(Division mit Rest). Es gilt dann

$$\begin{aligned} \Phi(g)^n &= \Phi(g)^{qp+r} \\ &= \Phi(g)^{qp} \Phi(g)^r \\ &= (\Phi(g)^p)^q \Phi(g)^r \\ &= 1^q \Phi(g)^r \\ &= \Phi(g)^r \\ &\neq 1 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass  $r < p = \text{ord}(\Phi(g))$ , also  $\Phi(g)^r \neq 1$ , sonst wäre  $\text{ord}(\Phi(g)) = r$ .

- (b) Nein. Wir betrachten eine “Einbettung”  $\text{em} : S_n \rightarrow S_m$ , wobei  $m > n$ . Sei  $\sigma \in S_n$ . Es gilt  $\text{em}(\sigma) = \sigma'$  genau dann, wenn

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \leq n \\ i & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Es ist klar, dass  $\Phi$  ein Homomorphismus ist. Sei  $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ , mit  $\Phi(\sigma_1) = \sigma'_1$  und  $\Phi(\sigma_2) = \sigma'_2$ . Dann ist

$$\sigma'_1 \sigma'_2(i) = \sigma'_1(i) = i \quad n < i \leq m,$$

also  $\sigma'_1 \sigma'_2|_{\{1,2,\dots,n\}}$  ein Element von  $S_n$ , dessen Bild  $\sigma'_1 \sigma'_2$  ist.

Wir wissen, dass  $A_n \trianglelefteq S_n$ .

**Konkretes Gegenbeispiel:** Sei  $n = 3, m = 5$ . Wir betrachten  $\text{em} : S_3 \rightarrow S_4$ , und  $\Phi(A_3)$ , wobei  $A_3 \trianglelefteq S_3$ .

Dann ist  $\Phi(A_3)$  kein Normalteiler von  $S_4$ . Unter Zweckentfremdung der Notation stellen wir  $A_3$  und  $\Phi(A_3)$  in Zykelnotation dar

$$A_3 = \Phi(A_3) = \{(123), (132)\}.$$

Es gilt auch  $(14) \in S_4$  und  $(14)^{-1} = (14)$ .

Es gilt aber

$$(14)(123)(14) = (14)(1234) = (234) \notin \Phi(A_3),$$

also  $\Phi(A_3) \not\trianglelefteq H$ . □

**Aufgabe 160.** Seien  $G$  eine Gruppe und  $M := \{x^2 | x \in G\}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $N := \langle M \rangle$  ein Normalteiler von  $G$  ist.  
 (b) Beweisen Sie, dass für jedes Element  $gN$  der Faktorgruppe  $G/N$  gilt:  $\text{ord}(gN) \leq 2$ .

*Beweis.* (a) Sei  $x, y \in G$  beliebig. Es gilt  $x^2 \in M$ . Es ist  $y^{-1}xy \in G$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} y^{-1}x^2y &= y^{-1}xyxy \\ &= y^{-1}xyy^{-1}xy \\ &= (y^{-1}xy)^2 \\ &\in M, \end{aligned}$$

also  $M$  ist ein Normalteiler von  $G$ .

- (b) Wir betrachten das Quadrat einer Linksnebenklasse. Sei  $a \in G$  beliebig, also  $aN$  ist eine beliebige Linksnebenklasse.

$$aN \cdot aN = (a^2)N.$$

Wir wissen aber, dass  $a^2 \in N$  (per Definition). Weil  $N$  ein Normalteiler ist, gilt dann  $a^2N = N$ . Es folgt, dass  $\text{ord}(aN) \leq 2$ . □

**Aufgabe 161.** Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe mit Untergruppen  $A, B \leq G$  an, so dass

$$A \trianglelefteq B \quad \text{und} \quad B \trianglelefteq G$$

gelten, nicht jedoch  $A \trianglelefteq G$ .

**Hinweis:** Dies zeigt, dass das Normalteiler-Sein im Allgemeinen nicht transitiv ist.

*Beweis.* Wir betrachten  $G = D_4$ ,  $B = \langle r^2, s \rangle$  und  $A = \langle s \rangle$ . Wir zeigen die Eigenschaften

- (i)  $B \trianglelefteq G$ .

Es gilt  $|D_4| = 8$  und  $B = \{1, r^2, s, r^2s\}$ , also  $|B| = 4$ ,  $[G : B] = 2$ . Dann ist  $B$  stets ein Normalteiler (Bsp 2.35).

- (ii)  $A \trianglelefteq B$ .

Wir betrachten  $x^{-1}Ax$  für  $x \in B$ . Für  $x \in \{1, s\}$  ist es klar. Für  $x \in \{r^2, r^2s\}$  muss wir direkt das Produkt mit  $x^{-1}sx$  berechnen.

Es gilt

$$r^{-2}sr^2 = sr^4 = s,$$

$(r^2s)^{-1} = sr^2$  (man kann das durch direktes Multiplikation verifizieren)

$$sr^2ssr^2 = sr^4 = s.$$

Insgesamt ist  $A \leq B$ .

(iii)  $A \not\leq G$ .

Es gilt  $r^{-1}sr = r^{-2}s = r^2s \neq 0$ . Wenn wir  $D_4 \subseteq S_{\mathbb{C}}$  betrachten, ist  $r^2s(1_C) = -1$ , wobei  $1_C$  das 1 in  $\mathbb{C}$  ist (also nicht das neutrale Element in  $\text{Sym}_{\mathbb{C}}$ ).

□

**Aufgabe 162.** Zeigen Sie, dass

$$S_n = \langle (12), (123 \dots n) \rangle$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt.

*Beweis.* Wir zeigen, dass Elemente mit bestimmte Formen Elemente von  $\langle (12), (123 \dots n) \rangle$  sind. Im Beweis begründen wir alle Schritte mit “Sonst wäre  $\langle (12), (123 \dots n) \rangle$  keine Gruppe, weil es nicht abgeschlossen wäre”.

Außerdem bedeutet hier Addition immer die Addition in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , aber durch 1 verschoben, also die mögliche Ergebnisse sind  $1, 2, \dots, n$  statt  $0, 1, \dots, n-1$ . Wir bezeichnen  $(12) = s$  und  $(123 \dots n) = T$ .

(i) Alle Transpositionen  $(i(i+1))$ . Die Proposition ist

$$T^x s T^{n-x} = ((x+1)(x+2)).$$

Es gilt

$$T^{n-x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1+(n-x) & 2+(n-x) & \dots & n-1+(n-x) & n+(n-x) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$sT^{n-x} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+(n-x) & \dots & 2 & 1 & \dots & 2n-x \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} T^x s T^{n-x} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+(n-x)+x & \dots & 2+x & 1+x & \dots & 2n-x+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1+n & \dots & 2+x & 1+x & \dots & 2n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1+x & 2+x & \dots & n \\ 1 & \dots & 2+x & 1+x & \dots & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (ii) Alle Transpositionen  $(i(i+k))$ , für alle  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

Wir beweisen es per Induktion über  $k$ . Wir wissen es schon für  $k = 1$ . Jetzt nehmen wir an, dass alle Transpositionen  $i(i+k') \in \langle (12)(123 \dots n) \rangle$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $k' \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ .

Wir betrachten  $(i(i+k))$  für  $i$  beliebig. Ziel:

$$(i(i+k)) = (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1)). \quad (4.1)$$

Wir betrachten die Wirkung auf  $i$ ,  $i+k-1$  und  $i+k$ . Es ist klar, dass keine andere Zahlen nicht davon bewegt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} & (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))i \\ &= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i+k-1) \\ &= (i(i+k-1))(i+k) \\ &= i+k \\ & (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))(i+k) \\ &= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i+k) \\ &= (i(i+k-1))(i+k-1) \\ &= i \\ & (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))(i(i+k-1))(i+k-1) \\ &= (i(i+k-1))((i+k-1)(i+k))i \\ &= (i(i+k-1))i \\ &= i+k-1, \end{aligned}$$

also die Gleichheit in (4.1) gilt.

- (iii) Alle Elemente  $\sigma \in S_n$ .

Wir schreiben ein beliebiges Element  $\sigma \in S_n$  als Produkt von Transpositionen. Weil alle Transpositionen Elemente von  $\langle (12)(123 \dots n) \rangle$  sind, müssen dann  $\sigma \in \langle (12)(123 \dots n) \rangle$  auch.  $\square$

## 4.7 Blatt 7

**Aufgabe 163.** Sei  $G$  eine Gruppe.

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Automorphismen von  $G$  zusammen mit der Verkettung von Funktionen als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Man nennt diese Gruppe die *Automorphismengruppe* von  $G$  und schreibt  $\text{Aut}(G)$  für sie.

- (b) Zeigen Sie, dass für jedes  $g \in G$  durch

$$k_g : G \rightarrow G \quad x \rightarrow gxg^{-1}$$

ein Automorphismus von  $G$  gegeben ist.

Dies zeigt, dass die Konjugation mit einem beliebigen Gruppenelement  $g$  einen Automorphismus von  $G$  liefert.

*Beweis.* (a) Wir beweisen die Eigenschaften

(i) Neutrales Element:

Sei  $1 : G \rightarrow G$ ,  $1(x) = x \ \forall x \in G$ . Es ist klar, dass  $1$  bijektiv ist. Außerdem ist

$$1(xy) = xy = 1(x)1(y),$$

also  $1$  ist ein Automorphismus. Außerdem gilt für alle  $f \in \text{Aut}(G)$  :

$$f1(x) = f(x) \ \forall x \in G,$$

also  $1$  ist das neutrale Element.

(ii) Existenz des Inverses: Sei  $f \in \text{Aut}(G)$ . Weil  $f$  bijektiv ist, gibt es auch eine bijektive inverse Abbildung  $f^{-1}$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $f^{-1}$  ein Homomorphismus ist. Sei  $x, y \in G$  beliebig. Weil  $f$  bijektiv ist, gibt es Elemente  $a, b \in G$ , so dass  $x = f(a)$  und  $y = f(b)$  gilt. Per Definition eine inverse Abbildung ist  $f^{-1}(x) = a$ ,  $f^{-1}(y) = b$ .

Es folgt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(xy) &= f^{-1}(f(a)f(b)) \\ &= f^{-1}(f(ab)) && f \text{ ist ein Homomorphismus} \\ &= ab = f^{-1}(x)f^{-1}(y) \end{aligned}$$

also  $f^{-1} \in \text{Aut}(G)$ .

(iii) Assoziativität

Folgt sofort aus der Assoziativität von Funktionverknüpfungen.

(iv) Abgeschlossenheit

Die Verkettung bijektive Abbildungen ist noch einmal bijektiv. Die Verkettung ist auch ein Homomorphismus (Definition 2.58), also  $\text{Aut}(G)$  ist abgeschlossen.

(b) Noch einmal zeigen wir alle Eigenschaften. Sei  $g \in G$  beliebig. Wir betrachten die Abbildung  $k_g$ .

(i) Sie ist ein Homomorphismus.

Sei  $x, y \in G$ . Es gilt  $k_g(x) = gxg^{-1}$  und  $k_g(y) = gyg^{-1}$ . Daraus folgt:

$$k_g(x)k_g(y) = gxg^{-1}gyg^{-1} = gxyg^{-1} = k_g(xy).$$

(ii) Sie ist injektiv.

Wir zeigen, dass  $\text{Ker}(k_g) = \{1\}$ . Wir nehmen an, dass es  $1 \neq x \in G$  gibt, so dass  $k_g(x) = 1$ . Dann ist

$$gxg^{-1} = 1 \implies gx = g.$$

Aus der Kurzungsregel folgt  $x = 1$ , ein Widerspruch.

(iii) Sie ist surjektiv. Sei  $y \in G$  und  $x = g^{-1}yg$ . Dann gilt

$$k_g(x) = gxg^{-1} = gg^{-1}ygg^{-1} = y,$$

also sie ist surjektiv.

Dann ist  $k_g$  ein bijektiver Homomorphismus, also ein Automorphismus.  $\square$

**Aufgabe 164.** Unter dem *Zentrum*  $Z(G)$  einer Gruppe  $G$  versteht man die Menge aller Elemente von  $G$ , die mit allen Elementen von  $G$  vertauschen, also die Menge  $Z(G) = \{g \in G \mid \text{es gilt } gxg^{-1} = x \text{ f\"ur alle } x \in G\}$ . Wir definieren die Menge der *inneren Automorphismen* von  $G$  durch

$$\text{Inn}(G) := \{k_g \mid g \in G\} \quad \text{mit } k_g \text{ wie in 163(b).}$$

Zeigen Sie, dass  $Z(G) \trianglelefteq G$ ,  $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}(G)$  und  $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$  gelten.

*Beweis.* Wir schreiben zuerst einen alternativen Definition:

$$Z(G) = \{g \in G \mid \text{es gilt } gx = xg \text{ f\"ur alle } x \in G\}.$$

Dann ist auch  $1 \in Z(G)$ , weil  $1x = x1 = x$  f\"ur alle  $x \in G$  gilt.

(a)  $Z(G) \leq G$  bzw.  $Z(G)$  ist eine Gruppe.

Sei  $g, h \in Z(G)$ . Dann gilt, f\"ur alle  $x \in G$ :

$$\begin{aligned} ghx(gh)^{-1} &= ghxh^{-1}g^{-1} \\ &= gxg^{-1} & h \in Z(G) \\ &= x & g \in Z(G), \end{aligned}$$

also  $Z(G)$  ist abgeschlossen.

Sei jetzt  $g \in Z(G)$  mit Inverse  $g^{-1}$  (momentan nicht angenommen, dass es in  $Z(G)$  ist). Das Ziel ist:

$$g^{-1}xg = x \quad \forall x \in G.$$

Weil  $G$  eine Gruppe ist, k\"onnen wir  $x$  als  $y^{-1}$  schreiben f\"ur ein  $y \in G$ . Es gilt

$$\begin{aligned} g^{-1}y^{-1}g &= (g^{-1}yg)^{-1} \\ &= y^{-1} & g \in Z(G). \end{aligned}$$

Das hei\ss t:  $g^{-1}xg = x$  f\"ur alle  $x \in G$ , und alle Elemente in  $Z(G)$  sind invertierbar.

(b)  $Z(G) \trianglelefteq G$ .

Folgt fast sofort per Definition: Wir betrachten die Nebenklassen. Sei  $x \in G$ . Es gilt

$$\begin{aligned} xZ(G) &= \{xg \mid g \in Z(G)\} \\ &= \{gx \mid g \in Z(G)\} \\ &= Z(G)x \end{aligned}$$

(c)  $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}(G)$

Sei  $f_1, f_2 \in \text{Inn}(G)$ , also es gibt  $g_1, g_2 \in Z(G)$ , so dass

$$f_1(x) = g_1 x g_1^{-1}$$

$$f_2(x) = g_2 x g_2^{-1}$$

Dann ist  $(f_1 \circ f_2)(x) = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 g_2 x (g_1 g_2)^{-1}$ , also  $f_1 \circ f_2 \in \text{Inn}(G)$ .

Die Abbildung  $f : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x = 1x1^{-1}$  ist auch ein Element von  $\text{Inn}(G)$ . Es ist klar, dass es das neutrale Element ist.

Sei jetzt

$$f_1(x) = g_1 x g_1^{-1}$$

$$f_1^{-1}(x) = g_1^{-1} x g_1$$

$f_1^{-1} \in \text{Inn}(G)$ , weil  $g_1^{-1} \in G$  und  $f_1 = k_{g_1^{-1}}$ . Es gilt für alle  $x \in X$ , dass

$$(f_1 \circ f_1^{-1})(x) = g_1 g_1^{-1} x g_1 g_1^{-1} = x$$

Also  $\text{Inn}(G)$  ist eine Gruppe.

$G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$ .

Per Definition ist  $\Lambda : g \rightarrow k_g$  eine surjektive Abbildung. Weiter ist  $\Lambda$  ein Homomorphismus: Sei  $g, h \in G$ . Dann ist  $\Lambda(gh) = k_{gh}$ , wobei  $k_{gh}(x) = (gh)x(gh)^{-1}$  für alle  $x \in G$ . Es gilt

$$\begin{aligned} k_{gh}(x) &= (gh)x(gh)^{-1} \\ &= (gh)xh^{-1}g^{-1} \\ &= g(hxh^{-1})g^{-1} \\ &= (k_g \circ k_h)(x) \end{aligned}$$

Was ist der Kern des Homomorphismus?  $k_g = 1$  genau dann, wenn

$$k_g(x) = gxg^{-1} = x \quad \forall x \in G.$$

Der Kern ist per Definition genau das Zentrum. Dann folgt  $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$  aus dem Homomorphiesatz.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g \mapsto k_g} & \text{Inn}(G) \\ \downarrow & \nearrow \cong & \\ G/Z(G) & & \end{array}$$

□

**Aufgabe 165.** (a) Nach Beispiel 2.71 operiert  $S_n$  auf sich selbst per Konjugation. Beschreiben Sie die Bahnen dieser Operation.



- (b) Wir nennen eine Transposition der  $S_3$  *schön*, wenn Sie von der Form  $(1x)$  mit  $x \in \{2, 3\}$  ist. Sei das Neutrale von  $S_3$  als Produkt schöner Transpositionen dargestellt. Kommen in diesem Produkt die einzelnen schönen Transpositionen dann stets in gerader Anzahl vor?

*Beweis.* (a) Wir brauchen hier

**Satz 2.52**

Sei  $\varphi = (a_1 a_2 \dots)(b_1 b_2 \dots) \dots \in S_n$  in Zykelnotation und  $\psi \in S_n$ . Dann

$$\psi \varphi \psi^{-1} = (\psi(a_1) \psi(a_2) \dots) (\psi(b_1) \psi(b_2) \dots) \dots$$

Per Definition sind die Bahnen definiert durch

$$\{\sigma' \sigma \sigma'^{-1} \mid \sigma' \in S_n\}.$$

Zu jedem  $\sigma \in S_n$  gehört eine (vielleicht nicht eindeutige) Bahn. Wir schreiben  $\sigma$  als Produkt disjunkter Zykeln (im Sinne von Satz 2.41)

Dann zeigen wir zwei Richtungen

- (i) Wenn zwei Permutationen die gleiche Zykellänge haben, sind sie konjugiert (Satz 2.53)

Dies zeigt, dass sie in der gleichen Bahn sind.

- (ii) Wenn zwei Permutationen bzw. Elemente in  $S_n$  unterschiedliche Darstellungen als Produkt disjunkter Zykeln haben, wobei unterschiedliche heißt *nicht* bis auf die Reihenfolge der Faktoren), sind die Permutation nicht konjugiert.

Dies folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung von  $\sigma$  als Produkt von disjunkten Zykeln.

Insgesamt gilt: Zwei Elemente liegen in der gleichen Bahn genau dann, wenn die Elemente die gleiche Darstellung als Produkt disjunkter Zykeln haben.

- (b) Nein. Es gilt  $(12)(23) = (123)$ , ein Zyklus der Länge 3. Also gilt  $[(12)(23)]^3 = (123)^3 = 1$ , aber die einzelnen Transpositionen kommen in ungerade Zahlen (3) vor.  $\square$

**Aufgabe 166.** Die Gruppe  $G$  operiere auf der Menge  $M$ . Weiter sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$ , so dass die auf  $U$  eingeschränkte Operation transitiv auf  $M$  sei.

Zeigen Sie, dass dann  $G = U \cdot G_m$  für alle  $m \in M$  gilt.

*Beweis.* Sei  $m \in M$  fest, aber beliebig. Sei  $U' \subseteq U$  eine minimale Teilmenge von  $U$ , so dass  $\{xm \mid x \in U'\} = M$  (möglich weil die Operation transitiv ist). Wir können eine solche Teilmenge konstruieren, indem wir das Ergebnis der Operation  $xm$  betrachten und alle andere Elemente mit dem gleichen Ergebnis wegwerfen.

- (i) Sei  $a, b \in G_m$ ,  $a \neq b$  und  $x \in U'$ . Dann gilt  $xa \neq xb$  (Kürzungsregel)

- (ii) Sei  $x, y \in U'$ ,  $x \neq y$  und  $a, b \in G_m$ . Dann gilt  $xa \neq yb$ , weil  $xam = xm$  und  $ybm = ym$ , aber  $xm \neq ym$  per Definition von  $U'$  als minimale Teilmenge.
- (iii) Dann betrachten wir alle Elemente von der Form  $xa, x \in U', a \in G_m$ . Wir haben schon gezeigt, dass alle solche Elemente unterschiedlich sind. Wie viele Elemente gibt es?  $|U'| = |M|$  per Konstruktion und  $|G_m| = |G|/|M|$  (Satz 2.71). Daraus folgt, dass

$$|U \cdot G_m| \geq |M|(|G|/|M|) = |G|,$$

also  $G \subseteq U \cdot G_m$ . Weil wir offenbar per Definition keine Elemente außerhalb  $G$  erreichen können, haben wir also  $U \cdot G_m \subseteq G$  und daher Gleichheit.  $\square$

## 4.8 Blatt 8

**Aufgabe 167.** (a) Eine Gruppe  $G$  der Ordnung 21 operiere auf einer Menge  $M$  mit 11 Elementen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Bahn der Länge 1 besitzt.

(Ist  $\{m\} \subseteq M$  eine solche einelementige Bahn, dann gilt  $g.m = m$  für alle  $g \in G$ . Jedes  $g \in G$  fixiert also  $m$ . Man nennt  $m$  daher auch einen Fixpunkt der Operation.)

- (b) Sei  $G := \text{GL}(2, \mathbb{C})$  die Gruppe der invertierbaren komplexen  $(2 \times 2)$ -Matrizen und  $M$  die Menge aller komplexen  $(2 \times 2)$ -Matrizen, die nur reelle Eigenwerte besitzen. Dann operiert  $G$  per Konjugation auf  $M$ . (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation an)

*Beweis.* (a) Wir schreiben die Klassengleichung

$$|M| = \sum_{i=1}^r [G : G_m].$$

Jeder Term in Summe ist eine Teiler von 21, also 1, 3, 7 oder 21. Die Operation besitzt eine Bahn der Länge 1 genau dann, wenn 1 zumindest einmal vorkommt. Wir schreiben die möglichen Summen:

$$11 = 1 \times 11$$

$$11 = 3 + 1 \times 8$$

$$11 = 3 \times 2 + 1 \times 5$$

$$11 = 3 \times 3 + 1 \times 2$$

$$11 = 7 + 1 \times 4$$

$$11 = 7 + 3 + 1$$

Weil 1 immer vorkommt, gibt es immer eine Bahn der Länge 1.

- (b) Konjugation ist genau eine Ähnlichkeitstransformation. Wir brauchen:

Zwei Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie die gleichen Jordan-Normalform haben.

Daraus ergibt sich ein Repräsentantensystem der Bahnen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die erste diagonalisierbare Matrizen darstellt und die zweite nicht diagonalisierbare Matrizen darstellt.  $\square$

**Aufgabe 168.** Von der endlichen Gruppe  $G$  sei bekannt, dass sie nicht abelsch ist und zu jedem positiven Teiler  $t$  von  $|G|$  mindestens eine Untergruppe der Ordnung  $t$  besitzt. Zeigen Sie, dass  $G$  nicht einfach ist. (Hinweis: Sei  $p$  die kleinste Primzahl, die  $|G|$  teilt, und  $U$  eine Untergruppe von  $G$  vom Index  $p$ . Lassen Sie  $G$  auf den Nebenklassen von  $U$  operieren und betrachten Sie den Kern des zugehörigen Homomorphismus.)

*Beweis.* Wie im Hinweis: Sei  $p$  die kleinste Primzahl, die  $|G|$  teilt und  $U$  eine Untergruppe von  $G$  vom Index  $p$ .  $G$  operiere auf den Linksnebenklassen von  $U$ . Die Operation ist ein Homomorphismus  $G \rightarrow S_p$ . Deren Kern  $K$  ist eine Untergruppe von  $U$ , weil  $xU \neq U$  für  $x \notin U$ . Das Ziel ist: Der Kern ist nicht trivial.

Die Faktorgruppe  $G/K$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $S_p$ , also teilt  $|S_p| = p!$ . Als Faktorgruppe teilt  $|G/K|$  die Ordnung von  $G$  auch. Weil  $p \neq 1$ , ist  $U$  eine echte Untergruppe, also  $|G/K| \neq 1$ . Dann ist die einzige Zahl, die sowohl  $p!$  als auch  $|G|$  teilt,  $p$ . Daraus folgt:  $|K| = |U|$ . Weil  $K \subseteq U$ , ist  $K = U$ , also  $U$  ein Normalteiler.  $\square$

**Aufgabe 169.** Benutzen Sie die Beweisidee aus Korollar 2.79, um folgende Aussage zu zeigen: Seien  $p$  eine Primzahl,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p^n$  und  $\{e\} < N \trianglelefteq G$  ein nicht-trivialer Normalteiler von  $G$ . Dann gilt  $|Z(G) \cap N| > 1$ .

*Beweis.* Als Normalteiler (insbesondere Untergruppe) teilt der Ordnung von  $N$  die Ordnung von  $G$ , also  $|N| = p^m$ ,  $0 < m \leq n$ .  $0$  ist ausgeschlossen, weil  $N$  nicht trivial ist. Dann ist  $p$  ein Teiler von  $|N|$ . Wir schreiben noch einmal die Klassengleichung:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r [G : C_G(x_i)].$$

Als Normalteiler ist  $N$  per Definition eine Vereinigung von Konjugationsklassen, sonst wäre  $N$  unter Konjugation nicht abgeschlossen. Eine solche Konjugationsklasse ist  $\{e\}$ , weil  $N$  eine Untergruppe ist. Der Ordnung von Konjugationsklassen sind Teiler von  $p^n$ , also Potenzen von  $p$ . Dann ist der Ordnung von  $N$  eine Summe

$$|N| = \sum_{m=1}^k [G : G_m] = 1 + p^{m_1} + p^{m_2} + \cdots + p^{m_k}.$$

Es ist nicht möglich, dass alle  $m_1, \dots, m_k > 0$  sind, weil dann  $p$  ein Teiler von alle  $p^{m_i}$  und  $|N|$  wäre, jedoch kein Teiler von  $1$  und daher kein Teiler von der rechten Seite. Dann muss es für eine  $m_i$  gelten, dass  $m_i = 0$ . Dann enthält  $N$  Konjugationsklassen der Größe  $1$  bzw. Elemente im Zentrum, die nicht  $e$  sind, also  $N \cap Z(G) \neq \{e\}$ .  $\square$

**Aufgabe 170.** Die Gruppe  $G$  operiere auf einer Menge  $M$ . Sei  $\Phi : G \rightarrow \text{Sym}(M)$  der zugehörige Homomorphismus und  $K$  sein Kern. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$G/K \times M \rightarrow M, \quad gK.m := g.m$$

eine treue Operation von  $G/K$  auf  $M$  gegeben ist.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass es wohldefiniert ist. Sei  $k_1, k_2 \in K$  und  $m \in M$ . Es gilt

$$\begin{aligned} gk_1.m &= \Phi(gk_1)(m) \\ &= \Phi(g)(\Phi(k_1)(m)) \\ &= \Phi(g)(e(m)) \\ &= \Phi(g)(m) \\ &= g.m \end{aligned}$$

und ähnlich für  $gk_2.m = g.m$ . Sei jetzt  $g_1, g_2 \in G$ , so dass  $g_1K.m = g_2K.m$  für alle  $m \in M$ . Dann ist

$$g_2^{-1}g_1.m = m$$

für alle  $m \in M$  oder  $g_2^{-1}g_1 \in K$ . Daraus folgt:  $g_1$  und  $g_2$  liegen in der gleichen Nebenklasse.  $\square$

## 4.9 Blatt 9

**Aufgabe 171.** (a) Beweisen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung 15 zyklisch sind.

(b) Funktioniert die Schlussweise aus Aufgabenteil (a) auch bei Gruppen der Ordnung 45?

*Beweis.* (a)  $15 = 3 \times 5$ , zwei Primzahlen, also die Teiler von 15 sind 1, 3, 5 und 15. Da 3 teilt 15,  $3^2 = 9$  aber nicht, gibt es mindestens eine 3-Sylowgruppe  $G_3$ . Für die Zahl der 3-Sylowgruppen  $n_3$  gilt:

$$\begin{aligned} n_3 &\equiv 1 \pmod{3} \\ n_3 &| [G : G_3] = 5 \end{aligned}$$

Aus den ersten Gleichung folgt:  $n_3$  ist 1 oder 4. Da  $4 \nmid 5$ , ist  $n_3 = 1$ , also es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 3. Ähnlich gibt es genau eine Gruppe der Ordnung 5. Es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 1, die triviale Gruppe und genau eine Gruppe der Ordnung 15, die ganze Gruppe.

Da es für jeder Teiler  $t$  von 15 genau eine Untergruppe der Ordnung  $t$  gibt, sind alle solche Gruppen zyklisch.

(b) Nein. Es kann mehr als eine Gruppe der Ordnung 5 geben, weil für die Zahl der 5-Sylowgruppen  $n_5$  gilt:

$$n_5 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$n_5 | 9$$

Eine Möglichkeit ist  $n_5 = 6$ , also wir dürfen den Fall, in dem mehr als eine Untergruppe der Ordnung 5 gibt, nicht ausschließen.  $\square$

**Aufgabe 172.** (a) Seien  $p$  eine Primzahl,  $G$  eine Gruppe,  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  und  $n_p$  die Anzahl der  $p$ -Sylowgruppen von  $G$ . Zeigen Sie, dass  $P \trianglelefteq G$  genau dann gilt, wenn  $n_p = 1$  ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 12 nicht einfach ist.

*Beweis.* (a) Sei  $n_p \neq 1$ , also  $n_p > 1$ . Dann gibt es eine andere  $p$ -Sylowgruppe  $U$ . Weil alle Sylowgruppen konjugiert sind, gibt es  $x \in G$ , so dass  $x^{-1}Px = U \neq P$ , also  $x^{-1}Px \neq P$  für alle  $x \in G$ , und  $P$  ist kein Normalteiler.

Sei umgekehrt  $P$  kein Normalteiler. Es gibt dann  $x \in G$ , so dass  $x^{-1}Px = U \neq P$ . Weil die Abbildung  $p \rightarrow x^{-1}px$  injektiv ist, ist  $U$  auch eine  $p$ -Sylowgruppe, also  $n_p > 1$ .

(b)  $12 = 2^2 \times 3$ . Für die Zahlen der 3 bzw. 2-Sylowgruppen gilt

$$n_2 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$n_2 | 3$$

$$n_3 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$n_3 | 4$$

Falls irgendeine Zahl  $n_2$  oder  $n_3$  1 ist, sind wir nach (a) fertig. Also wir nehmen an, dass weder  $n_2$  noch  $n_3$  1 sind. Die einzige Lösung ist dann  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 4$ .

Die 3-Sylowgruppen sind außer das Neutrale disjunkt. In andere Worte: Sei  $H'$  und  $H$  3-Sylowgruppen. Dann ist  $H' \cap H = \{e\}$ . Beweis: Wir beweisen es per Widerspruch. Weil  $H = H'$  angenommen ist, ist  $|H \cap H'| = 2$ . Alle Elemente in  $H$  bzw.  $H'$  haben die Ordnung 3, weil die Ordnung ein Teiler von der Gruppenordnung (3) ist, was nicht 1 ist, wenn das Element nicht das Neutrale ist. Dann ist  $H \cap H' = \{e, p\}$ , wobei  $p$  die Ordnung 3 hat. Das ist aber ein Widerspruch, weil 3 teilt 2 nicht.

Das heißt: Aus 4 3-Sylowgruppen bekommen wir 8 unterschiedliche Elemente, die nicht  $e$  sind. Es gibt eine 2-Sylowgruppe der Ordnung 4, z.B.  $H$ . Da Sylowgruppen von unterschiedliche Ordnung einen trivialen Schnitt haben, bekommen wir daraus 3 neue Elemente. Es gibt aber mehr als eine 2-Sylowgruppe, z.B.  $H'$ . Da  $H \neq H'$ , bekommen wir zumindest ein neues Element. Aus dem gleichen Argument ist dies nicht in den 8 Elemente aus der 3-Sylowgruppen enthalten.

Insgesamt: Die Gruppe besitzt ein neutrales Element. Aus den 3-Sylowgruppen bekommen wir 8 nicht neutrale Elementen. Aus den 2-Sylowgruppen bekommen wir mindestens 4 Elemente. Alle diese Elemente sind unterschiedlich. Dann hat die Gruppe mindestens 13 Elemente, ein Widerspruch.  $\square$

**Aufgabe 173.** Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $392 = 2^3 \cdot 7^2$ . Zeigen Sie, dass  $G$  nicht einfach ist.

*Beweis.* Es gibt Sylow-Untergruppen der Ordnung  $7^2$  und  $2^3$ . Für die Zahl solche Untergruppen  $n_7$  und  $n_2$  gilt:

$$n_2 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$n_2 | 49$$

$$n_7 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$n_7 | 8$$

Angenommen  $n_2 \neq 1 \neq n_7$ , sonst wären wir nach 172(a) fertig. Also es gilt  $n_7 = 8$ . Die Gruppe  $G$  operiere auf die Menge der 7-Sylowgruppen per Konjugation. Die Operation ist ein Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow S_8$ , dessen Kern ein Normalteiler ist. Wir zeigen, dass der Kern nicht trivial und nicht die ganze Gruppe ist.

Wenn der Kern die ganze Gruppe wäre, gibt es eine 7-Sylowgruppe  $H$ , so dass  $gHg^{-1} = H$  für alle  $g \in G$ . Dann sind die 7-Sylowgruppen nicht konjugiert, ein Widerspruch. (Außerdem wäre  $H$  ein Normalteiler.)

Wenn der Kern trivial wäre, wäre das Bild  $\varphi(G)$  eine Untergruppe von  $S_8$ . Weil  $\varphi$  injektiv wäre, hätte diese der Ordnung 392. Die Ordnung aller Untergruppen teilt die Ordnung der ganzen Gruppe, also

$$392 | 8!.$$

Aber 7 kommt nur einmal in der Primfaktorzerlegung von  $8!$  vor, während es zweimal in der Primfaktorzerlegung von 392 zweimal vorkommt. Das heißt:  $392 \nmid 8!$ , ein Widerspruch.  $\square$

**Aufgabe 174.** (a) Sei  $G$  eine endliche Gruppe mit zyklischer Zentrumsfaktorgruppe  $Z/Z(G)$ . Zeigen Sie, dass dann  $G = Z(G)$  gilt.

(b) Zeigen Sie: Sind  $p \in \mathbb{P}$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p^2$ , so ist  $G$  abelsch.

(c) Sind auch Gruppen der Ordnung  $p^3$  (mit primem  $p \in \mathbb{P}$ ) stets abelsch?

*Beweis.* (a) Die Zentrumsfaktorgruppe ist zyklisch genau dann, wenn es ein Element  $x \in G$  gibt, so dass die Potenzen  $x^n Z(G)$  alle Elemente erreichen können. Das heißt, dass für jedes  $y \in G$  ein  $p \in Z(G)$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $y = x^n p$ . Sei  $y' \in G$  beliebig. Ähnlich gibt es  $p' \in Z(G)$  und  $n' \in \mathbb{N}$ , so dass  $y' = x^{n'} p'$ . Wir betrachten die Menge

$$\{p, x^n, p', x^{n'}\}.$$

Da  $p \in Z(G)$  ist, kommutiert  $p$  mit allen Elementen aus  $G$ , insbesondere  $x$  und daher  $x^n$  und  $x^{n'}$ . Das gilt auch für  $p'$ . Weil  $x^n$  und  $x^{n'}$  Potenzen von  $x$  sind, kommutiert die miteinander. Also alle Elemente sind paarweise kommutativ und

$$yy' = x^n p x^{n'} p' = x^{n'} p' x^n p = y'y.$$

Da  $y$  und  $y'$  beliebig waren, kommutiert jedes beliebige  $y \in G$  mit allen anderen Elementen  $y' \in G$ , also  $G = Z(G)$ .

- (b) Das Zentrum ist eine Untergruppe. Weil  $Z(G)$  nicht trivial ist (Korollar 2.78), ist  $Z(G)$  entweder  $p$  oder  $p^2$ . Falls  $|Z(G)| = p^2$ , wäre  $G = Z(G)$  und wir sind dann fertig.

Falls  $|Z(G)| = p$ , hat die Faktorgruppe  $G/Z(G)$  Ordnung  $p$ . Nach der Satz von Cauchy gibt es ein Element der Ordnung  $p$  in  $G/Z(G)$ , also das Element ist ein Erzeuger von  $G/Z(G)$ , und  $G/Z(G)$  ist zyklisch. Daraus folgt:  $G = Z(G)$ , und  $G$  ist abelsch.

- (c) Nein.  $2^3 = 8$  und es gibt eine Diedergruppe  $D_4$  der Ordnung 8. Die Diedergruppe ist aber nicht abelsch.  $\square$

## 4.10 Blatt 10

**Aufgabe 175.** Bestimmen Sie alle Isomorphietypen für Gruppen der Ordnung  $45 = 3^2 \cdot 5$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Zahl der 3- bzw. 5-Sylowgruppen  $n_3$  bzw.  $n_5$ . Es gilt

$$\begin{aligned} n_3 &\equiv 1 \pmod{3} \\ n_3 &| 5 \\ n_5 &\equiv 1 \pmod{5} \\ n_5 &| 9 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist  $n_3 = 1$  und  $n_5 = 1$ . Da die Zahlen 1 sind, sind die Untergruppen normal. Sei  $A$  die 3-Sylowgruppe und  $B$  die 5-Sylowgruppe. Die Gruppen müssen sich trivial schneiden, weil die Ordnung alle Elemente darin ein Teiler von der Gruppenordnung sein müssen.

Da  $9 \times 5 = 45$ , ist  $|AB| = 45$ , also  $AB$  ist einfach die ganze Gruppe. Da  $n_3 = n_5 = 1$ , sind die Untergruppen normal. Es folgt daraus, dass die ganze Gruppe (isomorph zu)  $A \times B$  ist.

Also ist jetzt die Frage: Wie viele Gruppen der Ordnung 5 und 9 gibt es?

Es gibt nur eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Gruppe der Ordnung 5, weil 5 eine Primzahl ist, also es enthält ein Element der Ordnung 5, was ein Erzeuger ist. Daher ist die Gruppe  $C_5$ .

Wir wissen aus der vorherigen Übungsblatt, dass eine Gruppe der Ordnung  $3^2$  abelsch ist. Dann ist eine Gruppe der Ordnung 9 ein direktes Produkt von zyklische Gruppen von Primpotenzordnung. Die einzige Möglichkeit ist  $C_3 \times C_3$ . Natürlich ist  $C_9$  auch eine Gruppe der Ordnung 9.

Insgesamt gibt es nur zwei Gruppen der Ordnung 45:  $C_5 \times C_9$  und  $C_5 \times C_3 \times C_3$ .  $\square$

**Aufgabe 176.** Seien  $N$  und  $U$  zwei Gruppen. Zeigen Sie: Genau dann gilt  $N \rtimes_{\phi} U = N \times U$ , wenn  $\phi_u = \text{id}_N$  für alle  $u \in U$  gilt.

*Beweis.* Die beide Gruppen sind auf der Menge  $N \times U$  (kartesisches Produkt von Mengen) definiert. Jetzt die Rückrichtung: Falls  $\phi_u = \text{id}_N$  für alle  $N$  gilt, ist das Produkt

$$(n_1, u_1) \circ (n_2, u_2) = (n_1 \phi_{u_1}(n_2), u_1 u_2) = (n_1 n_2, u_1 u_2)$$

für alle  $n_1, n_2 \in N, u_1, u_2 \in U$ . Dann bekommen wir per Definition das direkte Produkt.

Sei jetzt  $N \rtimes_\phi U = N \times U$ . Dann stimmen alle Produkte überein. Sei  $u_1, u_2 \in U$  und  $n_1, n_2 \in N$ . Es gilt

$$(n_1 \phi_{u_1}(n_2), u_1 u_2) = (n_1 n_2, u_1 u_2)$$

insbesondere

$$n_1 \phi_{u_1}(n_2) = n_1 n_2.$$

Aus der Kurzungsregel folgt

$$\phi_{u_1}(n_2) = n_2.$$

Da  $u_1, u_2, n_1, n_2$  beliebig waren, muss dies für alle  $u_1, n_2$  gelten, also  $\phi_{u_1} = \text{id}_N$  für alle  $u_1 \in U$ .  $\square$

**Aufgabe 177.** Von einer Gruppe  $G$  seien bekannt:

- (1) Sie habe Ordnung  $p^2 \cdot q^2$  mit zwei verschiedenen Primzahlen  $p, q \in \mathbb{P}$ .
- (2) Die  $q$ -Sylowgruppe  $Q$  von  $G$  sei normal.
- (3)  $p$  sei kein Teiler von  $|\text{Aut}(Q)|$ .

Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.

(Hinweis: Denken Sie an semidirekte Produkte. Verwenden Sie an geeigneter Stelle Übung 176.)

*Beweis.* Sei die  $p$ -Sylowgruppe bzw.  $q$ -Sylowgruppe von  $G$   $P$  bzw.  $Q$ . Weil  $p$  und  $q$  teilerfremd sind, schneiden die Sylowgruppen trivial. Daher gilt  $|P||Q| = |G|$ , also  $G = PQ$ . Da  $Q$  normal ist, ist  $G \cong Q \rtimes P$ .

Als quadratische Primordnung sind sowohl  $Q$  als auch  $P$  abelsch. Falls wir zeigen könnten, dass  $G \cong Q \times P$ , wären wir dann fertig.

Aus 176 und Transitivität ist es zu zeigen

$$Q \rtimes P \cong Q \times P \iff k_u(v) = v \quad \forall u \in P, v \in Q,$$

wobei wir hier mit  $k_u(\cdot)$  die Konjugation  $k_u(p) = upu^{-1}$  bezeichnen. Dies induziert den Homomorphismus  $\varphi : P \rightarrow \text{Aut}(Q)$ . Das Bild  $\varphi(P)$  ist eine Untergruppe von  $\text{Aut}(Q)$ , deren Ordnung auch ein Teiler von  $|P|$  wegen  $\varphi(P) \cong P/\ker\varphi$  ist.

Die Teiler von  $|P|$  sind  $1, p$  und  $p^2$ . Aber  $p$  teilt  $|\text{Aut}(Q)|$  nicht. Daher teilt  $p^2$   $|\text{Aut}(Q)|$  auch nicht. Dann muss  $|\varphi(P)| = 1$ , also  $\varphi(P) = \{e\}$ . Dann ist  $k_u = \text{id}_Q$  für alle  $u \in P$ , also

$$G \cong Q \rtimes P = Q \times P.$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

**Aufgabe 178.** (a) Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 100 ein Element der Ordnung 10 enthält



- (b) Zeigen Sie, dass  $A_4$  keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt (vgl. auch Bemerkung 2.29 im Skript).

*Beweis.* (a) Als abelsche Gruppe ist die Gruppe isomorph zu ein Produkt zyklische Gruppen von Primpotenzordnung. Da  $100 = 5^2 \cdot 2^2$ , sind die möglichen Gruppen

$$\begin{aligned} C_{5^2} \times C_{2^2} \\ C_5 \times C_5 \times C_{2^2} \\ C_{5^2} \times C_2 \times C_2 \\ C_5 \times C_5 \times C_2 \times C_2 \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass alle diese Gruppen ein Element der Ordnung 10 enthalten.

- (1)  $C_{5^2} \times C_{2^2}$ :

Da 25 und 4 teilerfremd sind, ist  $C_{5^2} \times C_{2^2} \cong C_{100}$ . Da 10 ein Teiler von 100 ist, und die zyklische Gruppe  $C_{100}$  für jede Teiler  $t$  von 100 eine zyklische Untergruppe der Ordnung  $t$  besitzt, gibt es ein Element der Ordnung 10.

- (2)  $C_5 \times C_5 \times C_{2^2}$ :

Wir ziehen  $C_5$  und  $C_4$  zusammen, weil 5 und 4 teilerfremd sind. Also  $C_5 \times C_4 \cong C_{20}$ , was auch ein Element der Ordnung 10 besitzt, weil 10 ein Teiler von 20 ist. Sei das Element  $g$ . Dann ist

$$(e, g) \in C_5 \times C_{20}$$

ein Element der Ordnung 10.

- (3) Es gilt

$$C_{5^2} \times C_2 \times C_2 \cong C_{50} \times C_2$$

da 25 und 2 teilerfremd sind. Ähnlich gibt es  $g \in C_{50}$  der Ordnung 10. Dann ist

$$(g, e) \in C_{50} \times C_2$$

ein Element der Ordnung 10.

- (4) Gleich ist

$$C_5 \times C_5 \times C_2 \times C_2 = C_5 \times C_{10} \times C_2.$$

Sei  $g$  ein Erzeuger von  $C_{10}$ . Dann ist

$$(e, g, e') \in C_5 \times C_{10} \times C_2$$

ein Element der Ordnung 10.

- (b)  $|A_4| = 4!/2 = 12 = 3 \times 2^2$ .

Da  $6 = 12/2$ , wäre eine Untergruppe der Ordnung 6 ein Normalteiler. Wir bezeichnen diese mit  $H$ .

$e$

$$\left. \begin{array}{l} (12)(34) \\ (13)(24) \\ (14)(23) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Produkt von disjunkte} \\ \text{Transpositionen} \end{array}$$

3-Zykeln (genau 8)

Das Ziel ist: Alle 3-Zykeln sind in  $H$  enthalten. Bemerkung (oder Erinnerung): 3-Zykeln haben alle die Ordnung 3. Sei ein beliebiges 3-Zyklus  $x$ . Es gilt  $(xH)^3 = x^3H = H$ . Außerdem gilt in der Faktorgruppe  $G/H$  der Ordnung 2:  $(xH)^2 = H$ . Aus der Kurzungsregel folgt  $xH = H$ , also  $x \in H$ .

Dann hat  $H$  mehr als 8 Elemente, ein Widerspruch.  $\square$

## 4.11 Blatt 11

**Aufgabe 179.** Seien  $p, q$  zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Primzahlen und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $pq$ . Zeigen Sie, dass  $G$  auflösbar ist.

*Beweis.* Sei  $p = q$ . Dann ist  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p^2$ . Wir wissen, dass solche Gruppen abelsch ist, also  $G' = \{e\}$  und  $G$  ist auflösbar.

Sei jetzt  $p \neq q$ . ObdA nehmen wir an,  $p > q$ . Nach den Sylowsätze gibt es Untergruppen der Ordnung  $p$ , für deren Anzahl  $n_p$  gilt:

$$\begin{aligned} n_p &\equiv 1 \pmod{p} \\ n_p &| q \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert  $n_p = 1, p+1, \dots$ . Da  $n_p | q$ , ist die einzige Möglichkeit 1. Sei  $P$  die Untergruppe der Ordnung  $p$ . Als Gruppe einer Primzahlordnung ist  $P$  zyklisch, insbesondere abelsch und daher auflösbar. Da  $n_p = 1$ , ist  $P$  ein Normalteiler und  $G/P$  ist wohldefiniert.  $|G/P| = q$ , also  $|G/P|$  ist zyklisch, abelsch und auflösbar.

Dann ist  $G$  auflösbar.  $\square$

**Aufgabe 180.** Zeigen Sie, dass jede Gruppe  $G$  der Ordnung 12 auflösbar ist.

*Beweis.*  $12 = 3 \times 2^2$ , also es gibt nach den Sylowsätze Gruppen der Ordnung 4 und 3 von Anzahl  $n_2$  bzw.  $n_3$ . Aus den vorherigen Übungsblätter wissen wir, dass  $n_2 = 1$  oder  $n_3 = 1$  gilt.

1.  $n_2 = 1$ . Sei  $H$  die Untergruppe der Ordnung 4. Als Gruppe der Ordnung  $4 = 2^2$  ist  $H$  abelsch und auflösbar. Weil  $|G/H| = 3$ , ist  $G/H$  zyklisch, abelsch und auflösbar. Da sowohl  $H$  als auch  $G/H$  auflösbar sind, und  $H$  ein Normalteiler ist, ist  $G$  auflösbar.
2.  $n_3 = 1$ . Sei  $H$  die Untergruppe der Ordnung 3. Als Gruppe von Primordnung ist  $H$  zyklisch, abelsch und auflösbar. Da  $|G/H| = 4 = 2^2$ , ist  $G/H$  abelsch und daher auflösbar. Da  $H$  normal ist und sowohl  $H$  als auch  $G/H$  auflösbar sind, ist  $G$  auflösbar.  $\square$

**Aufgabe 181.** Sei  $R$  ein Ring, und seien  $a, b \in R$ . Es gelte  $ab = 1$  und  $ba \neq 1$ . Ein Element  $x \in R$  heißt *nilpotent*, falls es ein  $s \in \mathbb{N}$  mit  $x^s = 0$  gibt. Ein Element  $x \in R$  heißt *idempotent*, falls  $x^2 = x$  gilt.

- (a) Zeigen Sie, dass das Element  $1 - ba$  idempotent ist.
- (b) Zeigen Sie, dass das Element  $b^n(1 - ba)$  für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  nilpotent ist.
- (c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele nilpotente Elemente in  $R$  gibt.

*Beweis.* (a)

$$\begin{aligned}
 (1 - ba)^2 &= (1 - ba)(1 - ba) \\
 &= 1 - ba - ba + (-ba)(-ba) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= 1 - 2(ba) + baba && \text{Lemma 3.1} \\
 &= 1 - 2(ba) + b(ab)a \\
 &= 1 - 2ba + ba \\
 &= 1 - ba
 \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
 [b^n(1 - ba)b^n(1 - ba)] &= b^n(b^n - bab^n)(1 - ba) \\
 &= b^n(b^n - \cancel{ba}b\overset{1}{b^{n-1}})(1 - ba) \\
 &= b^n(b^n - b^n)(1 - ba) \\
 &= b^n 0(1 - ba) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- (c) Falls wir zeigen könnten, dass  $b^n(1 - ba)$  für unterschiedliche  $n$  unterschiedlich sind, wäre wir schon fertig.

Wir betrachten  $b^{n_1}(1 - ba)$  und  $b^{n_2}(1 - ba)$  mit  $n_2 > n_1$  und  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ . Wir nehmen dann an, dass  $b^{n_1}(1 - ba) = b^{n_2}(1 - ba)$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 b^{n_1}(1 - ba) &= b^{n_2}(1 - ba) \\
 a^{n_1}b^{n_1}(1 - ba) &= a^{n_1}b^{n_2}(1 - ba) \\
 (1 - ba) &= b^{n_2-n_1}(1 - ba) \\
 [(1 - ba)]^2 &= [b^{n_2-n_1}(1 - ba)]^2 \\
 \underbrace{(1 - ba)}_{(a)} &= 0 \quad (b)
 \end{aligned}$$

ein Widerspruch, weil  $ba \neq 1$  und daher  $1 - ba \neq 0$ . □

**Aufgabe 182.** (a) Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (1) Für alle  $r, s \in R$  gilt  $(r + s)^4 = r^4 + s^4$ .  
 (2) In  $R$  gilt  $2 = 0$ .
- (b) Geben Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring an, der den Bedingungen aus (a) genügt, aber kein Körper ist.

*Beweis.* (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
 (r + s)^2 &= (r + s)(r + s) \\
 &= r^2 + sr + rs + s^2 \\
 (r + s)^4 &= (r + s)^2(r + s)^2 \\
 &= (r^2 + sr + rs + s^2)(r^2 + sr + rs + s^2) \\
 &= r^4 + r^2sr + r^3s + r^2s^2 \\
 &\quad + sr^3 + sr sr + srrs + sr s^2 \\
 &\quad + r sr^2 + r s sr + r s rs + r s^3 \\
 &\quad + s^2r^2 + s^3r + s^2rs + s^4 \\
 &= r^4 + r^3s + r^3s + r^2s^2 \\
 &\quad + sr^3 + s^2r^2 + s^2r^2 + s^3r \\
 &\quad + r^3s + r^2s^2 + r^2s^2 + rs^3 \\
 &\quad + s^2r^2 + s^3r + s^3r + s^4 \quad \text{Kommutativgesetz} \\
 &= r^4 + 4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 + s^4
 \end{aligned}$$

Die Behauptung  $(s + r)^4 = r^4 + s^4$  ist dann äquivalent zu

$$4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 = 0 \quad \forall s, r \in R.$$

Die Rückrichtung ist jetzt klar: Falls  $2 = 0$ , ist

$$2r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 = \overset{0}{\cancel{2}}(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 0.$$

Die andere Richtung: Wir nehmen an, dass

$$2(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 0 \quad \forall r, s \in R.$$

Insbesondere betrachten wir  $r = -1$  und  $s = 1$ . Dann ist  $r^3 = 1$  und  $r^2 = 1$ . Alle Potenzen von  $s$  sind 1. Es gilt

$$2(2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^3) = 2(-1) = 0.$$

Aber  $-1 \neq 0$ , also  $2 = 0$ .

- (b) Wir konstruieren die “komplexe Zahlen” auf der Menge  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ , also wenn  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  definieren wir

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Als Eigenschaft der komplexen Zahlen haben wir das neutrale Element  $(\bar{1}, \bar{0})$  bzgl. Multiplikation und  $(\bar{0}, \bar{0})$  bzgl. Addition. Kommutativität folgt auch aus der entsprechenden Eigenschaft der komplexen Zahlen. Es gilt  $2 = 0$ , weil  $(\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$ . Es ist aber kein Körper, weil es nicht nullteilerfrei ist. Es gilt

$$(\bar{1}, \bar{1}) \times (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{0}). \quad \square$$

## 4.12 Blatt 12

**Aufgabe 183.** Sei  $R := K^{n \times n}$  der Ring der  $n \times n$ -Matrizen über einem Körper  $K$ . Zeigen Sie, dass  $\{0\}$  und  $R$  die einzigen Ideale von  $R$  sind, vgl. Bemerkung 3.13.

*Beweis.* Sei  $I \neq \{0\}$  ein Ideal von  $R$ . Wir nehmen an, dass  $m \in I$  gibt mit  $m$  invertierbar. Dann ist  $m^{-1} \in R$  und  $1 = mm^{-1} \in I$ . Sei jetzt  $m \in R$  beliebig. Da  $1 \in I$ , ist  $1m = m \in I$ , also  $I = R$ .

Deswegen nehmen wir an, dass  $I$  nur nichtinvertierbare Elemente enthält. Sei  $m \in I$ . Aus dem Spektralsatz bzw. Jordannormalform haben wir eine Zerlegung  $m = m_d + m_n$  mit  $[m_d, m_n] = 0$ ,  $m_d$  diagonalisierbar und  $m_n$  nilpotent. Da  $m^n = m_d + m_n \in I$  für alle  $n \in \mathbb{N}^*$ , enthält  $I$  ein diagonalisierbares Element.

Wir diagonalisieren das Element, also  $I$  enthält ein diagonales Element, z.B.  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in I$ . Wir wissen, dass Zeilenumformungen durch Matrixmultiplikationen dargestellt werden kann. Durch diese Zeilenumformungen erhalten wir für jedes Diagonalelement zumindest ein Element, das keine Nullstelle in diesem Eintrag besitzt.

Wir addieren alle solche Elemente und erhalten daher eine diagonale Matrix, mit alle diagonale Elemente ungleich Null. Dies ist invertierbar, und die Behauptung folgt.  $\square$

**Aufgabe 184.** Seien  $R$  ein kommutativer Ring und  $g \in R[x]$  ein normiertes Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}^*$ . Sei  $I := gR \trianglelefteq R[X]$  das von  $g$  erzeugte Ideal von  $R[X]$ . Zeigen Sie:

(a) Jedes Element des Faktorrings  $R[X]/I$  lässt sich in der Form

$$r_0 + r_1 X + \dots + r_{n-1} X^{n-1} + I \quad \text{mit gewissen } r_i \in R$$

darstellen. Es gilt also  $R[X]/I = \{r_0 + r_1 X + \dots + r_{n-1} X^{n-1} \mid r_0, \dots, r_{n-1} \in R\}$ .

(b) Die Elemente  $\sum_{i=0}^{n-1} r_i X^i + I$  aus der Menge in Teil (a) sind paarweise verschieden, d.h. für beliebige  $r_0, \dots, r_{n-1}, s_0, \dots, s_{n-1}$  gilt

$$(r_0, \dots, r_{n-1}) \neq (s_0, \dots, s_{n-1}) \implies \sum_{i=0}^{n-1} r_i X^i + I \neq \sum_{i=0}^{n-1} s_i X^i + I.$$

*Beweis.* (a) Per Definition können wir die Elemente als  $p + I, p \in R[X]$ . Es ist einfach zu zeigen, dass wir oBdA  $\text{grad}(p) < n$ . Wir betrachten  $p + I$  mit  $\text{grad } p \geq n$ . Dann führen wir Division mit Rest durch und erhalten

$$p = gq + r, \quad g, r \in R[x], \text{grad } r < n.$$

Es gilt deswegen

$$p + I = (gq + r) + I.$$

Weil  $gq \in I$  per Definition, ist  $gq + I = I$  und

$$p + I = r + I,$$

also wir dürfen oBdA annehmen, dass  $\text{grad } p < n$ .

- (b) Sei die Polynome  $r = (r_0, \dots, r_{n-1})$  und  $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$ . Falls  $r + I = s + I$ , wäre  $r - s \in I$ . Da  $\text{grad } r$  und  $\text{grad}(s) < n$  sind, ist  $\text{grad}(r - s) < n$ .  $r - s \in I$  liefert dann  $r - s = gq$ . Aber  $g$  ist vom Grad  $n$  und  $gq$  ist daher vom Grad  $\geq n$ , ein Widerspruch.  $\square$

**Aufgabe 185.** Zur Abkürzung schreiben wir  $\mathbb{Z}_n$  für den Ring  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass die vier Ringe

$$R_1 := \mathbb{Z}_4, \quad R_2 := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad R_3 := \mathbb{Z}_2[X]/X^2\mathbb{Z}_2[X], \quad R_4 := \mathbb{Z}_2[X]/(X^2 + X + 1)\mathbb{Z}_2[X]$$

paarweise nicht isomorph sind.

*Beweis.* Die Elemente sind

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_4 &: \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &: (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}) \\ &(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}) \\ \mathbb{Z}_2[X]/X^2 &: 0 + X^2, 1 + X^2 \\ &X + X^2, X + 1 + X^2 \\ \mathbb{Z}_2[X]/(X^2 + X + 1) &: 0 + (X^2 + X + 1), \\ &1 + (X^2 + X + 1), \\ &X + (X^2 + X + 1), \\ &X + 1 + (X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

Es gilt  $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2} \neq \bar{0}$  in  $\mathbb{Z}_4$ , aber das additive Neutrale hat immer die Ordnung 2 in die letzte drei.  $\square$

**Aufgabe 186.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Ein Element  $a \in R$  heißt *nilpotent*, falls  $a^n = 0$  für ein  $n \geq 1$  gilt.

- (a) Begründen Sie, warum Null in einem Körper das einzige nilpotente Element ist.  
 (b) Zeigen Sie, dass das *Nullradikal*  $N := \{a \in R \mid a \text{ ist nilpotent}\}$  ein Ideal ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Nilradikal in jedem Primideal  $P$  von  $R$  enthalten ist.

*Beweis.* (a) Sei  $K$  ein Körper mit  $K \ni a \neq 0$ . Da  $K \setminus \{0\}$  multiplikativ abgeschlossen sein sollte, wäre  $a^k \in K \setminus \{0\}$ , also  $a^k \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}^*$

(b)  $N$  ist eine additive Untergruppe:

- (i) 0 ist nilpotent (siehe oben)
- (ii) Sei  $a$  nilpotent mit  $a^n = 0$ . Es gilt dann  $(-a)^n = (-1)^n a^n = (-1)^n 0 = 0$ .
- (iii) Sei  $a, b$  nilpotent mit  $a^n = b^m = 0$ . Da  $R$  kommutativ ist, dürfen wir den Binomialsatz verwenden. Wir betrachten

$$(a + b)^{n+m} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+m-k}.$$

Falls  $k \geq n$  wäre, gälte dann  $a^k = 0$  und  $a^k b^{n+m-k} = 0$ . Falls  $k \leq n$  wäre, gälte  $n + m - k \geq m$  und  $b^{n+m-k} = 0$ , daher  $a^k b^{n+m-k} = 0$ . Dann ist  $(a + b)^{n+m} = 0$ , und  $a + b$  ist nilpotent.

Sei jetzt  $a \in N, b \in R$  mit  $a^n = 0$ . Es gilt  $(ab)^n = a^n b^n = 0 b^n = 0$ .

(c) Sei  $P$  ein Ideal von  $R$  mit  $N \not\subseteq P$ . Wir zeigen, dass  $P + N \supseteq P \cup N$  ein Ideal ist, also  $P$  ist nicht maximal.

Die additive Eigenschaften folgen, da sowohl  $P$  als auch  $N$  Untergruppen sind. Da die additive Gruppe abelsch ist, ist  $P + N = N + P$ , also  $P + N$  ist eine abelsche Untergruppe der additiven Gruppe.

Sei jetzt  $p \in P, a \in N, r \in R$ , also  $p + a \in P + N$ . Da sowohl  $P$  als auch  $N$  Ideale sind, ist

$$r(p + a) = \underbrace{rp}_{\in P} + \underbrace{ra}_{\in N} \in P + N.$$

$P + N$  ist also ein Ideal. Da  $N \not\subseteq P$ , ist  $P \subsetneq P + N$ , also  $P$  ist nicht maximal.  $\square$





---

Theoretische Mechanik

---

## 5.1 Blatt 1

**Aufgabe 187.** Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in einer Dimension, d. h. das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F(x(t)) = -kx(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, daß wenn eine komplexwertige Funktion  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  die Differentialgleichung (1a) löst, ihr Realteil  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$  zur Lösung des reellen Anfangswertproblems (1) benutzt werden kann.
2. Was ist die allgemeinste Form der rechten Seite der Differentialgleichung (1a), für die der Realteil einer komplexen Lösung selbst eine Lösung ist? Geben Sie Gegenbeispiele an.
3. Machen Sie den üblichen Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. . .

*Beweis.* 1. Sei  $x(t) = x_r(t) + ix_i(t)$ ,  $x_r, x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann gilt

$$m \left( \frac{d^2 x_r}{dt^2} + i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = -k(x_r + ix_i).$$

Weil das eine Gleichung von zwei komplexe Zahlen ist, gilt auch

$$m \frac{d^2 x_r}{dt^2} = -kx_r.$$

2. Das passt für alle reelle lineare Kombinationen der Ableitungen von  $x(t)$ .

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x}{dt^i} = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

**Gegenbeispiele**(i) Irgendeine  $a_i \notin \mathbb{R}$ 

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -ikx(t), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Hier ist es klar, dass *keine* Abbildung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung sein kann, weil die linke Seite reelle wird, aber die rechte Seite nicht reelle wird.

Daraus folgt: Das Realteil der Lösung ist kein Lösung.

(ii) Nichtlineare Gleichung, z.B.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

3.

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 \alpha e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} m \lambda^2 \alpha e^{\lambda t} &= -k \alpha e^{\lambda t} \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\ \lambda &= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Daraus folgt, für  $z_1(t)$ :

$$\begin{aligned} z_1(0) &= \alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = x_0 \\ z_1'(0) &= -i\omega \alpha_{1,+} + i\omega \alpha_{1,-} = v_0 \\ -\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} &= -\frac{iv_0}{\omega} \\ 2\alpha_{1,-} &= x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \\ 2\alpha_{1,+} &= x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \\ z_1(t) &= \frac{1}{2} \left[ \left( x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} + \left( x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} \right] \end{aligned}$$

Daraus folgt die andere Formen der Lösungen:

(i)  $x_2(t)$ 

$$\frac{1}{2} \left[ \left( x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} + \left( x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left[ \left( x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[ \left( x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \right) (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[ x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + i(\dots) \right] \\
&= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t
\end{aligned}$$

(ii)  $x_3(t)$  (R-Formula)

$$\begin{aligned}
x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t &= \alpha_3 \sin(\omega t + \delta_3) \\
\alpha_3 &= \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega} \right)^2} \\
\delta_3 &= \arctan \frac{v_0}{x_0 \omega}
\end{aligned}$$

(iii)  $x_4(t)$ 

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_4 = \alpha_3 \quad \delta_4 = \delta_3 + \frac{\pi}{2}.$$

□

**Aufgabe 188.** Betrachten Sie den gedämpften und getriebenen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F(x(t), \dot{x}(t), t) = -kx(t) - 2m\gamma \frac{dx}{dt} + F_{ext}(t) \\
x(0) &= x_0 \in \mathbb{R} \\
\frac{dx}{dt} &= v_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem zunächst für verschwindende äußere Kraft  $F_{ext} \equiv 0$ . Machen Sie dazu wieder den üblichen Exponentialansatz

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}$$

und behandeln Sie auch den Fall  $\gamma^2 = k/m$ 

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem für eine harmonische äußere Kraft  $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$  indem Sie zur soeben gefundenen Lösung der homogenen Differentialgleichung noch eine Partikularlösung mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite " $x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$ " addieren. Auch hier empfiehlt es sich, Kraft und Ansatz zu komplexifizieren:

$$\begin{aligned}
F_{ext}(t) &= F_0 \sin(\omega_0 t) \rightarrow F_0 e^{-i\omega_0 t} \\
x(t) &= A \sin(\omega_0 t) \rightarrow A e^{-i\omega_0 t}
\end{aligned}$$

3. Zeigen Sie anhand der Lösungen, daß die Energie

$$E(t) = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{k}{2} x^2(t)$$

für verschwindende Dämpfung  $\gamma = 0$  und äußere Kraft  $F_{ext} \equiv 0$  erhalten ist und diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit von  $E(t)$  als Funktion von  $\gamma$  im allgemeinen Fall. Berücksichtigen Sie insbesondere eine harmonische äußere Kraft  $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ .

*Beweis.* 1.

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) &= \alpha \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \alpha \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} m\lambda^2 \alpha e^{\lambda t} &= -k\alpha e^{\lambda t} - 2m\gamma\lambda\alpha e^{\lambda t} \\ 0 &= m\lambda^2 + 2m\gamma\lambda + k \\ \lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Falls  $\gamma^2 \neq \frac{k}{m}$  :

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ A e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right],$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\gamma e^{-\gamma t} \left[ A e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right] \\ &\quad + e^{-\gamma t} \left[ A \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} - B \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} t} \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = x_0 \\ x'(0) &= \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} (A - B) = v_0 \\ 2A &= x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}} \\ 2B &= x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}} \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass es möglich ist, dass  $\gamma^2 < \frac{k}{m}$ . In diesem Fall ist  $\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}$ , aber der Form der Lösung bleibt.

Für  $\gamma^2 = \frac{k}{m}$  ist die Lösung

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}.$$

Es gilt

$$x'(t) = -\gamma Ae^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} - Bt\gamma e^{-\gamma t}.$$

Dann

$$\begin{aligned} x(0) &= A = x_0 \\ x'(0) &= -\gamma A + B = v_0 \\ B &= v_0 + \gamma x_0 \\ x(t) &= x_0 e^{-\gamma t} + (v_0 + \gamma x_0) t e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

2. Wir suchen eine Partikularlösung für die Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 e^{-i\omega_0 t}$$

mit dem Form

$$x(t) = Ae^{-i\omega_0 t}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x'(t) &= -i\omega_0 A e^{-i\omega_0 t} \\ x''(t) &= -\omega_0^2 A e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Dann ist

$$-\omega_0^2 A m e^{-i\omega_0 t} - 2m\gamma i\omega_0 A e^{-i\omega_0 t} + A k e^{-i\omega_0 t} = F_0 e^{-i\omega_0 t},$$

$$A = \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k}.$$

3. für verschwindende Dämpfung  $\gamma = 0$  und äußere Kraft  $F_{\text{ext}} \equiv 0$  ist die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Wir berechnen

$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 &= \frac{m}{2} (-x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t)^2 \\ &= \frac{m}{2} (x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t - 2x_0 v_0 \omega \sin \omega t \cos \omega t + v_0^2 \cos^2 \omega t) \\ &= \frac{m}{2\omega^2} \overset{k/2}{\left( x_0^2 \sin^2 \omega t - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t \right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{2} \left( x_0^2 (1 - \cos^2 \omega t) - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} (1 - \sin^2 \omega t) \right)$$

Aus

$$\frac{k}{2} x(t)^2 = \frac{k}{2} \left( x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right)$$

folgt

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{k}{2} \left( x_0^2 (1 - \cos^2 \omega t) - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} (1 - \sin^2 \omega t) \right) \\ &\quad + \frac{k}{2} \left( x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right) \\ &= \frac{k}{2} x_0^2 + \frac{k v_0^2}{2 \omega^2}, \end{aligned}$$

was nicht abhängig von  $t$  ist.

Wir untersuchen jetzt die Energie für eine harmonische äußere Kraft. Wenn die Dämpfung  $\neq 0$  ist, ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_h(t) + x_p(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t).$$

Daher muss man nur die Energie der Partikularlösung berechnen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t} \\ \dot{x}(t) &= - \frac{iF_0\omega_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Wenn  $\gamma = 0$ , kann  $x(t) \rightarrow \infty$ , wenn

$$-m\omega_0^2 + k = 0 \quad (\text{Resonanz}).$$

Das bedeutet  $E(t) \rightarrow \infty$  auch.

□

## 5.2 Blatt 2

**Aufgabe 189.** Betrachten Sie die folgenden Familien von Kraftfeldern auf geeigneten Definitionsbereichen  $D_\eta^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} F_\eta^{(1)} : D_\eta^{(1)} &\ni \vec{x} \rightarrow r^\eta \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\ F_\eta^{(2)} : D_\eta^{(2)} &\ni \vec{x} \rightarrow r_{12}^\eta \cdot (x_1 \vec{e}_1 - x_2 \vec{e}_2) \in \mathbb{R}^3 \\ F_\eta^{(3)} : D_\eta^{(3)} &\ni \vec{x} \rightarrow r_{12}^\eta \cdot (x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2) \in \mathbb{R}^3 \\ F_\eta^{(4)} : D_\eta^{(4)} &\ni \vec{x} \rightarrow r_{12}^\eta \cdot (x_2 \vec{e}_1 + x_1 \vec{e}_2) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

wobei  $r_{12} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  Skizzieren Sie die Felder  $\vec{F}_\eta^{(n)}$  als Vektorpfeile in der von den Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  aufgespannten Ebene (hier genügt es, zwischen den Fällen  $\eta > -1$ ,  $\eta = -1$  und  $\eta < -1$  zu unterscheiden).

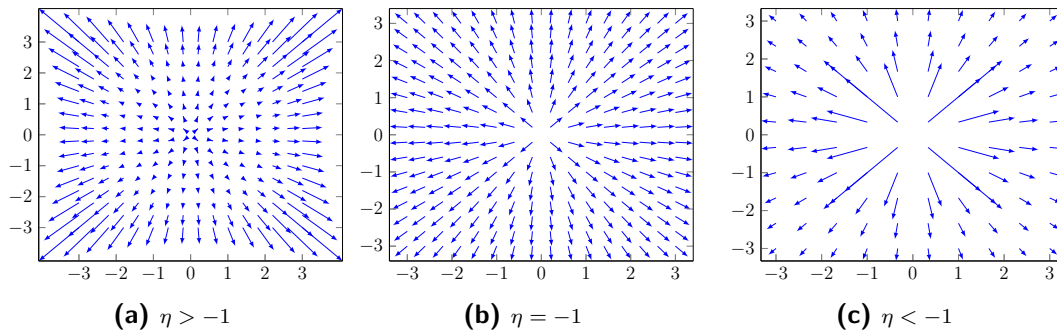
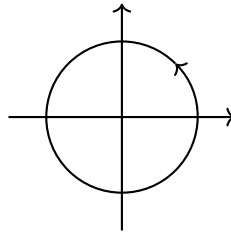
Bestimmen Sie, abhängig von der Potenz  $\eta \in \mathbb{R}$ ,

Eigentlich ist  $\vec{x}$  als  $\vec{x} = (x, y, z)^T$  definiert. Deswegen sind alle meine Antworten nicht die erwartete Antwort.

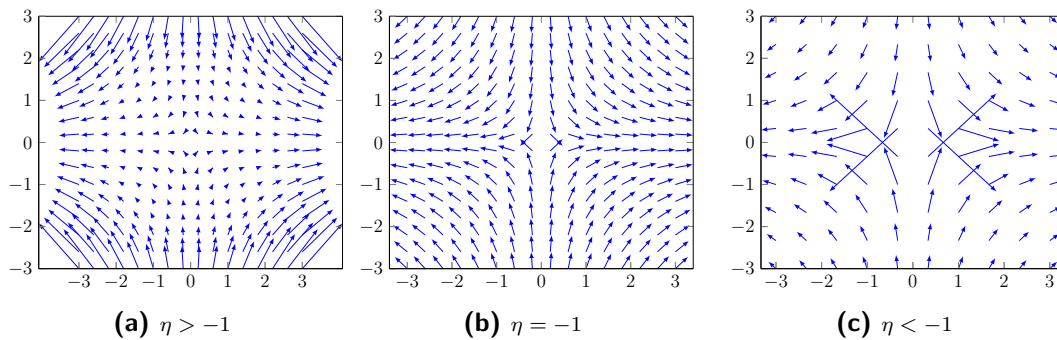
1. den maximalen Definitionsbereich  $D_\eta^{(n)}$ ,
2. die maximale Bereiche  $C_\eta^{(n)} \subseteq D_\eta^{(n)}$ , auf denen  $F_\eta^{(n)}$  konservativ ist,
3. eine Potentialfunktion  $V_\eta^{(n)} : C_\eta^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F_\eta^{(n)} = -\nabla V_\eta^{(n)}$ , sofern sie existiert,
4. das Kurvenintegral

$$I_\eta^{(n)}(R) = \int_{\gamma_R} d\vec{\xi} \cdot \vec{F}_\eta^{(n)}(\vec{\xi})$$

über den gegen den Uhrzeigersinn umlaufenen Kreis  $\gamma_R$  mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $\vec{0}$  in der von  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  aufgespannten Ebene

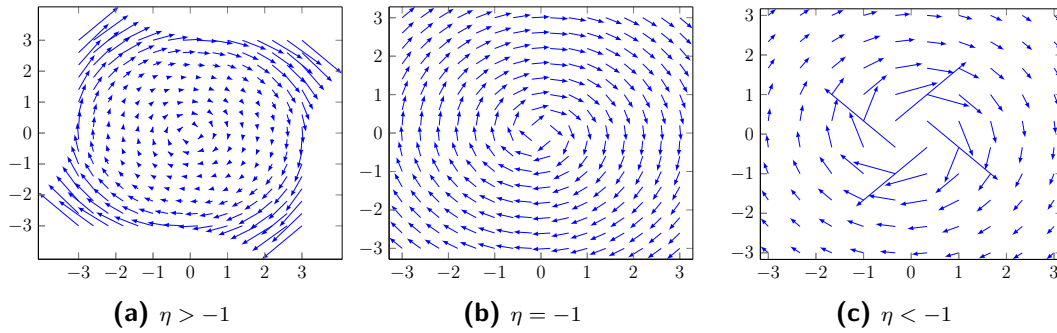
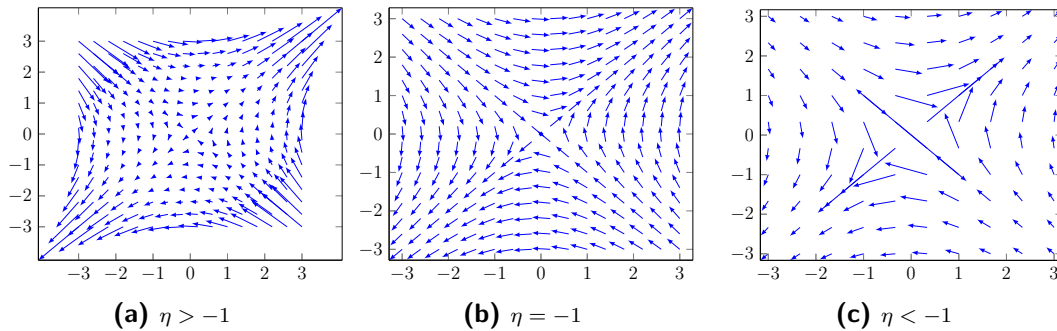


**Figure 5.1:** Vektorpfeile für  $\vec{F}_\eta^{(1)}$



**Figure 5.2:** Vektorpfeile für  $\vec{F}_\eta^{(2)}$

*Beweis.* 1. Maximalen Definitionsbereich (für alle  $\vec{F}_\eta^{(n)}$ ): Wenn  $\eta \leq -1$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , sonst  $\mathbb{R}^3$ .

Figure 5.3: Vektorpfeile für  $\vec{F}_\eta^{(3)}$ Figure 5.4: Vektorpfeile für  $\vec{F}_\eta^{(4)}$ 

2. maximale Bereiche, auf denen  $\vec{F}_\eta^{(n)}$  konservativ ist.  $n = \dots$

Erwartete  
Antwort ist  
einfach  $D_\eta^{(1)}$ .

- (1) Falls  $\eta = 0, D_\eta^{(1)}$ , sonst  $z = 0$
- (2) Falls  $\eta = 0, D_\eta^{(2)}$ , sonst  $\emptyset$
- (3) Falls  $\eta = -2, D_\eta^{(3)}$ , sonst  $\emptyset$ .
- (4) Falls  $\eta = 0, D_\eta^{(4)}$ , sonst  $\emptyset$ .

3. Potentialfunktion, für  $n = \dots$

Die  
erwartete  
Antwort ist  
einfach  $V = -\frac{1}{\eta+2}r^{\eta+2}$

- (1) Auf  $z = 0$  Ebene:  
 $\eta = -2: V = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ , sonst  $V = -\frac{1}{\eta+2}r^{\eta+2}$   
 Wenn  $n = 0$  kann eine Potentialfunktion für alle  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  definiert werden:  
 $V(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
- (2) Nur für  $\eta = 0, V = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ .
- (3) Für  $\eta = -2, V = -\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ .
- (4) Für  $\eta = 0, V = -xy$ .

In  
zylindrische  
Koordinaten  
ist es  
 $V = -\varphi$

4. Kurvenintegral, für  $n = \dots$

- (1) Weil  $\nabla \times F_\eta^{(1)} = 0$  auf die  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  Ebene, ist das Kurvenintegral stets 0.



- (2) Gleich für  $\eta = 0$ . Sonst sei  $x_1 = \cos \theta$ ,  $x_2 = \sin \theta$ ,  $dx_1 = -\sin \theta d\theta$ ,  $dx_2 = \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_1 dx_1 - x_2 dx_2 &= R^\eta \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta d\theta - \cos \theta \sin \theta d\theta) \\ &= R^\eta \int_0^{2\pi} (-2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (3) Sei  $x_1 = \cos \theta$ ,  $x_2 = \sin \theta$ ,  $dx_1 = -\sin \theta d\theta$ ,  $dx_2 = \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_2 dx_1 - x_1 dx_2 &= R^\eta \int_0^{2\pi} (-\sin^2 \theta d\theta - \cos^2 \theta d\theta) \\ &= -R^\eta \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -2\pi R^\eta \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass es für  $\eta = -2$  ungleich 0 ist, weil  $\nabla \times \vec{F}_\eta^{(3)}$  auf  $(0,0)$  nicht definiert ist.

- (4) Für  $\eta = 0$  ist die Kurvenintegral stets 0. Sonst sei  $x_1 = \cos \theta$ ,  $x_2 = \sin \theta$ ,  $dx_1 = -\sin \theta d\theta$ ,  $dx_2 = \cos \theta d\theta$  und

$$\begin{aligned} R^\eta \int_{\gamma_R} x_2 dx_1 + x_1 dx_2 &= R^\eta \int_0^{2\pi} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= R^\eta \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 190.** Zwischen zwei Kreisringen mit Radius  $R$ , die bei  $x = -x_0$  und  $x = x_0$  zentriert in der  $yz$ -Ebene liegen, sei eine Seifenhaut gespannt (s. Skizze). Aufgrund der Oberflächenspannung wird sich die Seifenhaut so ausbilden, dass die entsprechende Oberfläche minimal ist.

1. Das gesamte Problem ist rotationssymmetrisch um die  $x$ -Achse. Zeigen Sie, dass die Fläche der Rotationsfigur um die  $x$ -Achse für die Funktion  $y : [-x_0, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$  zwischen den Kreisringen durch

$$F(y) = \int_{-x_0}^{x_0} 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

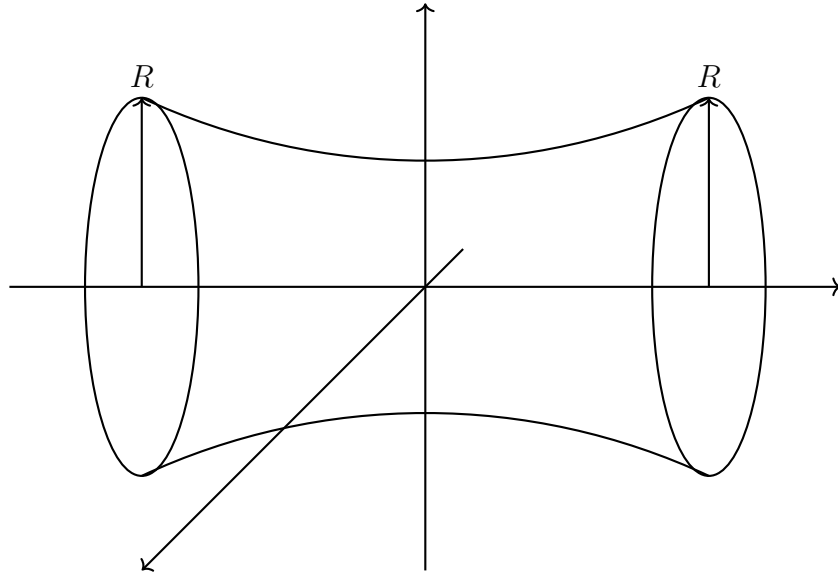
mit  $y' = \frac{dy}{dx}$  gegeben ist.

2. Benutzen Sie nun die in der Vorlesung kennengelernte Methode der Variationsrechnung, um die Minimalfläche zu finden, die von der Seifenhaut gebildet wird.

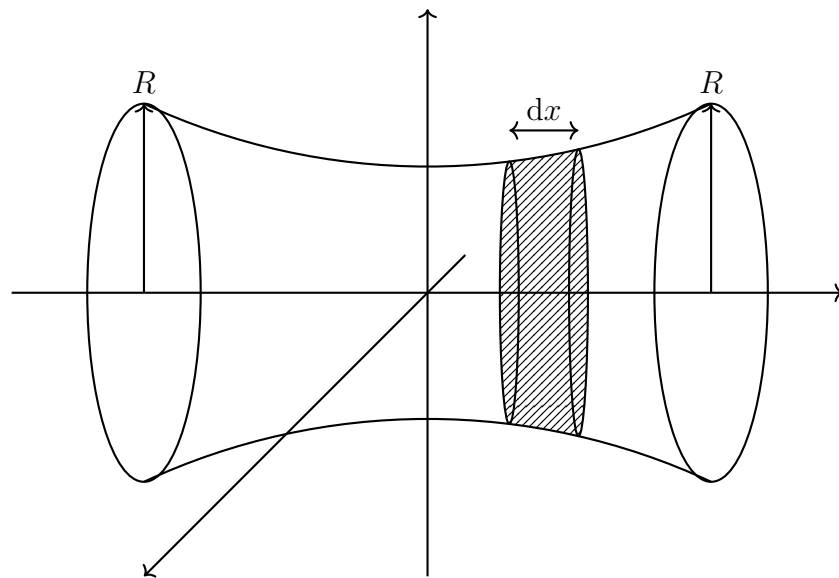
Gesucht ist also die Funktion  $y$ , die  $F(y)$  minimiert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Problem als

$$\frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

geschrieben werden kann.)



*Beweis.* 1.



$$dV = 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

2.

**Satz 5.1.** Im Allgemein, für  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , gilt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) = 0.$$

*Beweis.* Erinnern Sie sich daran, dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (5.1)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} \\ &= \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} = 0 \end{aligned} \quad \square$$

Sei jetzt  $L(y(x), y'(x), x) = y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}$ . Es folgt  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L &= \left( \frac{y(x) y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) y' - y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} \\ &= \left( \frac{y y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - \frac{y(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} \\ &= \frac{-y}{\sqrt{1 + y'^2}} \end{aligned}$$

Es gilt dann, dass

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha y &= \sqrt{1 + y'^2} \\ \alpha^2 y^2 &= 1 + y'^2 \\ y' &= \pm \sqrt{\alpha^2 y^2 - 1} && + \text{ wenn } x > 0 \\ \int dx &= \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 y^2 - 1}} \\ x &= \frac{1}{\alpha} \cosh^{-1}(\alpha y) - \beta \\ y &= \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha(x + \beta)) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen ergeben:

$$\alpha R = \cosh(\alpha(x_0 + \beta)) = \cosh(\alpha(-x_0 + \beta))$$

Daraus folgt  $\beta = 0$ . Leider ist die Gleichung für  $\alpha$  unlösbar. Die Lösung zu die Gleichung ist

$$y(x) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x)$$

$$\alpha R = \cosh(\alpha x)$$

□

### 5.3 Blatt 3

**Aufgabe 191.** Die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen lautet:

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \omega^2 \vec{x} = 0 \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Entwickeln Sie den Ortsvektor  $x(t)$  und seine zeitlichen Ableitungen in der Polarkoordinatenbasis  $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\phi\}$  und überzeugen Sie sich, dass die so aus (1) folgenden Differentialgleichungen den Bewegungsgleichungen entsprechen, die Sie wie in der Vorlesung mittels der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

direkt aus der Lagrangefunktion in Polarkoordinaten  $q_i = r, \phi$  erhalten.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}} &= \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + r \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{x}} &= \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} + r\dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weil  $(\cos \phi, \sin \phi)^T$  und  $(-\sin \phi, \cos \phi)^T$  linear unabhängig (sogar orthogonal) sind, kann die Gleichung  $\ddot{\vec{x}} + \omega^2 \vec{x}(t) = 0$  als

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r &= 0 \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

Man schreibt auch direkt die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$r : m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + m\omega^2 r = 0$$

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2 r = 0$$

$$\phi : \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = 0$$

$$2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = 0$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0.$$

□

**Aufgabe 192.** Eine Punktmasse  $m$  rotiere reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen gespannten Faden der Länge  $l$  ( $l = r + s$ ) sei sie durch ein Loch in der Platte mit einer anderen Masse  $M$  verbunden (s. Skizze). Wie bewegt sich  $M$  unter dem Einfluss der Schwerkraft?

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen.
2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten  $s$  und  $\varphi$  auf und ermitteln Sie daraus die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \text{const} \equiv C$  gilt.
3. Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2, um die  $\varphi$ -Abhängigkeit in der Differentialgleichung für  $s$  zu eliminieren. Betrachten Sie nun den Gleichgewichtsfall  $s(t) = \text{const}$  und finden Sie einen Ausdruck für die resultierende Rotationsgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}(t) = \text{const} \equiv \omega_0$  der Masse  $m$ . Ausgehend vom Gleichgewichtsfall, unter welchen Bedingungen rutscht die Masse  $M$  nach oben, wann nach unten?
4. Diskutieren Sie das Ergebnis für die Anfangsbedingung  $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ .

*Beweis.* 1.  $\frac{dl}{dt} = 0$ .

2.

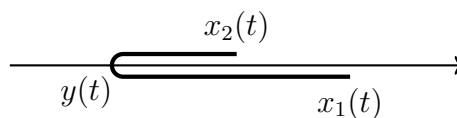
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + Mg(l - r).$$

Weil  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ , gilt aus der Euler-Lagrange-Gleichungen  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$ , also  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \equiv C$ .

3. Weil  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\phi} \equiv C$ , gilt

□

**Aufgabe 193.** Eine einmal gefaltete Schnur mit Gesamtlänge  $l$  und konstanter Masse pro Länge  $\rho$  bewegt sich auf der  $x$ -Achse. Die Endpunkte der Schnur seien mit  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  bezeichnet. Die Stelle, an der die Schnur gefaltet ist, sei mit  $y(t)$  bezeichnet.



1. Geben Sie die Zwangsbedingungen des Systems an.
2. Geben Sie eine Langrangefunktion des Systems an.

Betrachten Sie für die kinetische Energie  $T$  die Endpunkte  $x_1$  und  $x_2$ , deren "Masse" durch die integrierte Masse des Schnurstücks zwischen  $x_1$  und  $y$  bzw.  $x_2$  und  $y$  gegeben ist.

3. Die Lagrangefunktion kann in den Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = x_1 - x_2 \text{ und } X = \frac{1}{2l} [(x_1 - y)(x_1 + y) + (x_2 - y)(x_2 + y)]$$

zu

$$L = \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\xi}^2$$

umgeschrieben werden, wobei  $M$  und  $\mu$  Funktionen von  $X$  und  $\xi$  sind. Bestimmen Sie  $M$  und  $\mu$  durch den Vergleich der Lagrangefunktionen in Koordinaten  $(x_1, x_2)$  und  $(X, \xi)$ .

*Beweis.* 1.  $l = x_2(t) - y(t) + x_1(t) - y(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2y(t)$

2. Wir betrachten eine Koordinate  $0 \leq \xi \leq l$ , die ab  $x_1$  anfängt und steigt monoton, bis die andere Seite. Die Position eine kleine Masselemente ist:

$$x(\xi) = y + |\xi - (x_2 - y)|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{y} + \frac{d}{dt} |\xi - (x_2 - y)| \\ &= \dot{y} + \operatorname{sgn}(\xi - (x_2 - y)) \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \end{aligned}$$

Wir integrieren die Geschwindigkeit, um die kinetische Energie zu bekommen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 d\xi &= \frac{1}{2} \rho \left[ \int_0^{x_2-y} (\dot{y} - (\dot{y} - \dot{x}_2))^2 d\xi + \int_{x_2-y}^l (\dot{y} + (\dot{y} - \dot{x}_2))^2 d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho [(x_2 - y) \dot{x}_2^2 + (l - x_2 + y) (2\dot{y} - \dot{x}_2)^2] \end{aligned}$$

□