Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 24, 2023)

Problem 1. (a) Bestimmen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung

$$x^2 = u + iv,$$

in Abhängigkeit von $u, v \in \mathbb{R}$

(b) Führen Sie das Nullstellenproblem

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

mit $a \in \mathbb{C}\backslash 0, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ auf den Fall in (a) zurück. Geben Sie weiterhin eine geschlossene Darstelling aller Lösungen für den Fall $a = 1$ an.

Hat alles geklappt, sollte bei Ihnen speziell für den Fall $a = 1$ und $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(c) = 0$ die entsprechende Mitternachtsformel dastehen.

Proof. (a) $|x^2| = |x|^2 = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}$

Daraus folgt:

$$|x| = (u^2 + v^2)^{1/4},$$

$$x = (u^2 + v^2)^{1/4} e^{i\theta}.$$

Setze es in $x^2 = u + iv$ ein und löse die Gleichungen für θ. Sei $\varphi = \mathrm{atan}_2(u, v)$ Dann ist:

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \text{ oder } \theta = \frac{\varphi + 2\pi}{2}.$$

(b)

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

d.h.

$$\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 =&\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \\ x=&-\frac{b}{2a}\pm p \end{aligned}$$

wobei p die Lösung zu $p^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ ist. Im Fall $a=1$ und $\mathrm{Im}(b)=\mathrm{Im}(c)=0$, daraus folgt:

$$x=-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}.$$

□

Problem 2. Finden Sie für die Polynome $p,d\in\mathbb{C}[x]$ jeweils solche $q,r\in\mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r)<\deg(d)$, dass $p=qd+r$ gilt.

(a) $p=x^7+x^5+x^3+1, d=x^2+x+1$

(b) $p=x^5+(3-i)x^3-x^2+(1-3i)x+1+i, d=x^2+i$

(c) Wie sehen s,r aus, wenn man in (a) und (b) jeweils die Rollen von p und d vertauscht? D.h. bestimmen Sie $s,r\in\mathbb{C}[x]$ mit $\deg r<\deg p$, sodass $d=sp+r$ gilt.

Proof. (a)

$$\begin{array}{r|l} & x^5-x^4+x^3 \\ \hline x^2+x+1 & x^7 \quad +x^5 \quad +x^3+1 \\ & -x^7-x^6-x^5 \\ & -x^6 \\ & x^6+x^5+x^4 \\ & x^5+x^4+x^3 \\ & -x^5-x^4-x^3 \\ & 1 \end{array}$$

Daher

$$q=x^5-x^4+x^3, r=1.$$

(b) $q=x^3+(3-2i)x-x, r=-(1+6i)x+(1+2i)$

(c) $r = d, s = 0$

$\square$

Problem 3. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -38 \\ -46 \\ -18 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(A)$ und $\ker(A)$

(b) Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$ und $\text{Lös}(A, c)$.

Proof. (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei dann $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Wenn $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \ker(A)$, gilt

$$\begin{aligned} t_3 &:= x_3 \\ t_4 &:= x_4 \\ x_1 &= x_3 - x_4 = t_3 - t_4 \\ x_2 &= -x_3 - 2x_4 = -t_3 - 2t_4 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\ker(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&-38\\2&1&-1&4&-46\\1&0&-1&1&-18\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&-38\\0&-3&-3&-6&30\\1&0&-1&1&-18\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&-38\\0&-3&-3&-6&30\\0&-2&-2&-4&20\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times-\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&-38\\0&1&1&2&-10\\0&-2&-2&-4&20\end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&-38\\0&1&1&2&-10\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&-18\\0&1&1&2&-10\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = -18$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 = -10$$

Deswegen ist Lös(A, b)

$$\begin{pmatrix}-18 + x_3 - x_4\\-10 - x_3 - 2x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\-10\\0\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

(c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&0\\2&1&-1&4&0\\1&0&-1&1&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&0\\0&-3&-3&-6&0\\1&0&-1&1&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&0\\0&-3&-3&-6&0\\0&-2&-2&-4&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\times-\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&0\\0&1&1&2&0\\0&-2&-2&-4&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&5&0\\0&1&1&2&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&0\\0&1&1&2&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

Es gibt keine Lösungen, weil $0 \neq 1$, also $\text{Lös}(A, c) = \varnothing$

$\square$

Problem 4. Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume V mit Basis $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ und Basis $B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Wir definieren einen linearen Operator $T : V \to W$ wie folgt:

$$T(v_1) = w_1 + w_3 \qquad T(v_2) = w_1 + w_2, T(v_3) = -w_1 - w_2 - w_3.$$

(a) $w_1, w_2, w_3 \in \operatorname{span}\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$, weil

$$\begin{aligned} w_1 &= T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) \\ w_2 &= (-1)\left(T(v_3) + T(v_1)\right) \\ w_3 &= (-1)\left(T(v_2) + T(v_3)\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$W = \operatorname{span}\left(w_1, w_2, w_3\right) = \operatorname{span}\left(T(v_1), T(v_2), T(v_3)\right).$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{im}(T) = \mathbb{R}^3, \qquad \ker(T) = \{0\}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$B_W^* = \{w_1 + w_3, w_1 + w_2, -w_1 - w_2 - w_3\}.$$

(d)

$$B_V^* = \{v_1 + v_2 + v_3, -(v_1 + v_3), -(v_2 + v_3)\}.$$