Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 4, 2023)

Problem 1. Im Folgenden ist $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Sind $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, so auch $f + g$.

(b) Sind $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, so auch $f \cdot g$.

(c) Sind $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so auch $g \circ f$.

(d) Es sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, nicht-negativ und uneigentlich integrierbar. Dann konvergiert

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\, \mathrm{d}x\,.$$

Proof. (a) Wahr. Sei $a < c < b$. Wir wissen, dass $f + g$ auf $[a, c]$ integrierbar für alle solchen c ist und außerdem

$$\int_a^c (f+g)(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{c\to b} \int_a^b (f+g)(x)\, \mathrm{d}x =& \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x + \lim_{c\to\infty} \int_a^c g(x)\, \mathrm{d}x \\ =& \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

also $f + g$ ist integrierbar.

(b) Falsch. Sei $f, g : [-1, 0) \to \mathbb{R}, f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$. Das uneigentliche Integral existiert:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = & \qquad \lim_{x_0\to 0} \int_{x_0}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \\ = \lim_{x_0\to 0} 2\sqrt{x}\big|_{x_0}^1 &\end{aligned}$$

---

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x_0 \to 0} (2 - \sqrt{x_0}) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Aber $fg = \frac{1}{-x}$ und

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{1}{-x} \,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{x_0 \to 0} \ln x |_{x_0}^{1} \\
&= \lim_{x_0 \to 0} (-\ln x_0)
\end{aligned}
$$

Der Grenzwert existiert nicht.

(c) Falsch. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ und $f : [0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{-\sqrt{x}}$. Dann ist $g \circ f = \frac{1}{-x}$.

Wir haben schon gezeigt, dass f integrierbar ist, $g \circ f$ aber nicht.

(d) Wir betrachten nur das Fall, in dem $f \geq 1$. Sonst können wir $f + 1$ betrachten. Weil die konstante Funktion 1 uneigentlich (sogar eigentlich) auf $[0,1]$ integrierbar ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x$ genau dann, wenn $\int_0^1 f(x) + 1 \,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Wir betrachten der Grenzwert, durch den das uneigentliche Riemann-Integral definiert ist. Weil f nichtnegativ ist, ist

$$
I(x_0) = \int_{x_0}^{1} \sqrt{f(x)} \,\mathrm{d}x
$$

ein Monoton fallend Funktion von x_0. Der Grenzwert existiert also genau dann, wenn $I(x_0)$ von oben beschränkt ist.

Wir definieren außerdem:

$$
J(x_0) = \int_{x_0}^{1} f(x) \,\mathrm{d}x \,.
$$

Weil f integrierbar ist, ist $J(x_0)$ von oben beschränkt. Weil $\sqrt{f} \leq f$ gilt, ist $I(x_0) \leq J(x_0) \ \forall x_0 \in (0,1]$. Daraus folgt, dass I beschränkt ist, also $\sqrt{f}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar. $\square$

Problem 2. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Riemannintegrale auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

Proof. (a) Wir betrachten zuerst $\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Weil e^{-x^2} monoton fallend ist, konvergiert das Integral genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$$

konvergiert. Es gilt $e^{-k^2} \geq e^{-k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$$

konvergiert, weil es eine geometrische Reihe ist.

Nachdem wir gezeigt haben, dass $\int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, existiert auch das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Es gilt, für $c \leq -1$, dass

$$\int_c^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_c^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Weil $\exp(-x^2)$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist, ist $\exp(-x^2)$ auf $[-1,1]$ integrierbar, also der Grenzwert $\int_{-\infty}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert genau dann, wenn $\int_c^{-1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Aber wir wissen, weil $\exp(-(-x)^2) = \exp(-x^2)$, dass

$$\int_c^{-1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{c} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

also

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^{-1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Weil der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, existiert der Grenzwert auf der linken Seite, also $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert.

Weil $e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, konvergiert das Integral genau dann, wenn es absolut konvergiert, also es konvergiert absolut.

(b) Es steht schon im Skript, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

existiert. Aus

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

existiert auch $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x}$, daher auch

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir untersuchen es also für absolut Konvergenz. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi N}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{N-1}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x\\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi(j+1)}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)}|\sin x|\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{j=1}^{N-1}\frac{2}{\pi(j+1)}\end{aligned}$$

Dann nehmen wir die Limes $N\to\infty$. Weil die Summe divergent ist, ist das Integral auch divergent.

(c) Wie vorher ist $\sin((-x)^2) = \sin x$, also wir müssen nur zeigen, dass $\int_0^\infty \sin(x^2)$ konvergiert bzw. absolut konvergiert.

Sei $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{u}\,\mathrm{d}x$ und $\mathbb{R}\ni a, b, 0 < a < b$. Es folgt:

$$\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

Dann machen wir partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u &= \left.\frac{-\cos u}{\sqrt{u}}\right|_{a^2}^{b^2} - \int_{a^2}^{b^2}\frac{\cos u}{2u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u\\ \left|\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right| &\leq \left|\left.\frac{-\cos u}{\sqrt{u}}\right|_{a^2}^{b^2}\right| + \int_{a^2}^{b^2}\frac{1}{2u^{3/2}}\,\mathrm{d}u\\ &\geq \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \left.\frac{1}{\sqrt{u}}\right|_{a^2}^{b^2}\\ &= \frac{2}{a},\end{aligned}$$

was unabhängig von der oberen Grenze ist. Also $\int_a^\infty x^2 \sin(x^2)$ konvergiert für alle a. Da $\sin(x^2)$ überall in $\mathbb{R}$ definiert und stetig ist, ist auch

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$$

konvergent. Daraus folgt, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$$

konvergent ist. Wir untersuchen es dann für absolut Konvergenz. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi N} \left|\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\right| \mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2\sqrt{2\pi j}} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\sin x| \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{j}}
\end{aligned}$$

Weil die Summe divergent ist, divergiert auch das Integral. □

Problem 3. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

Proof. Es gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= \ln 2n - \ln n \\
&= \int_1^{2n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x - \int_1^n \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\
&= \int_n^{2n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

also wir brauchen

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j}.$$

Es gilt

$$\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leq \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j+1}$$

weil $\frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$ monoton fallend ist. Außerdem ist

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j+1}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$=0$$

also wenn wir die Limes gegen ∞ nehmen, konvergiert die beide Summen gegen den gleichen Wert, also das Integral.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=n}^{2n}\frac{1}{j}=\lim_{n\to\infty}\int_n^{2n}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Die Behauptung folgt. $\square$

Problem 4. Wir zeigen die Irrationalität von π durch einen Widerspruch. Angenommen, es gälte $\pi=\frac{a}{b}$ für $a,b\in\mathbb{N}$. Außerdem seien $f,F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned}f(x)=&x^n\frac{(a-bx)^n}{n!},\\ F(x)=&f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^nf^{(2n)}(x).\end{aligned}$$

für $n\in\mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f^{(k)}(0),f^{(k)}(\pi)\in\mathbb{N}$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie

$$f(x)\sin x=\left(F'(x)\sin x-F(x)\cos x\right)'.$$

Folgern Sie anschließend, dass $F(\pi)+F(0)$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist, was allerdings nicht mit den Eigenschaften von $x\to f(x)\sin x$ für hinreichend großes $n\in\mathbb{N}$ vereinbar ist.

Proof. (a) Wir leiten es ab. Sei $g(x)=x^n,\ h(x)=(a-bx)^n$. Es gilt

$$f^{(p)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}g^{(k)}(x)h^{(p-k)}(x).$$

Es gilt außerdem

$$g^{(k)}(x)=n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k},$$

also $g^{(k)}(0)\neq 0$ genau dann, wenn $k=n$ und in diesem Fall ist $g^{(n)}(0)=n!$. Ähnlich ist $h^{(k)}(x)=n(n-1)\dots(n-k+1)(-b)^k(a-bx)^{n-k}$, also $h^{(k)}(0)\in\mathbb{N}$. Dann im Summe müssen wir nurdem Fall $k=n$ betrachten, also

$$f^{(p)}(0)=\binom{p}{n}h^{(p-k)}(0)\in\mathbb{N}.$$

Ähnlich bei π gilt $g^{(k)}(\pi) = n(n-1)\dots(n-k+1)\pi^{n-k}$ und

$$\begin{aligned} g^{(k)}(\pi) =& n(n-1)\dots(n-k+1)(-b)^k(a-b\pi)^{n-k} \\ =& n(n-1)\dots(n-k+1)(-b)^k(a-b(a/b))^{n-k} \\ =& \begin{cases} 0 & k \neq n \\ n!(-b)^n & k = n \end{cases} \\ \in& \mathbb{Z} \end{aligned}$$

also wir betrachten im Summe nur den Fall $p-k=n$, also

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{n!}\binom{p}{p-n} g^{(p-n)}(\pi)h^{(n)}(\pi) = \binom{p}{p-n} g^{(p-n)}(\pi)(n!)(-b)^n \in \mathbb{N}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' =& F''(x)\sin x + F'(x)\cos x - F'(x)\cos x + F(x)\sin x \\ =& [F''(x) + F(x)]\sin x \\ =& \sin(x)[\cancel{f^{(2)}(x)} - \cancel{f^{(4)}(x)} + \cancel{f^{(6)}(x)} - \dots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) \\ & + f(x) - \cancel{f^{(2)}(x)} + \cancel{f^{(4)}(x)} - \dots + \cancel{(-1)^n f^{(2n)}(x)}] \\ =& f(x)\sin x + (-1)^n f^{(2n+2)}(x). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $f^{(2n+2)}(x) = 0$. Wir wissen: $g^{(n+1)}(x) = h^{(n+1)}(x) = 0$. Aus

$$f^{(2n+2)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{2n+2} g^{(k)}(x)h^{(2n+2-k)}(x).$$

Weil entweder k oder $2n+2-k \geq n+1$ ist, sind alle Terme im Summe 0, also $f^{(2n+2)} = 0$ und

$$f(x)\sin x = (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)'.$$

(c) $F(x)$ und $F(\pi)$ sind natürliche Zahlen, weil sie Summen von Ableitungen von f sind, und wir wissen, dass alle Ableitungen bei 0 oder π ganze Zahlen sind.

Wir integrieren die beide Seite

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' \,\mathrm{d}x \\ &= [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -F(\pi)\cos\pi + F(0)\cos 0 \\
&= F(0) + F(\pi)
\end{aligned}
$$

Wir wissen auch, dass $f(x)$ und $\sin x \geq 0$ für $x \in [0, \pi]$ sind, also $F(0) + F(\pi) \geq 0$ und $F(0) + F(\pi)$ ist eine natürliche Zahl. Aber:

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x \right| &\leq \int_0^\pi |f(x) \sin x| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^\pi |f(x)| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \pi \sup_{x \in [0,\pi]} f(x)
\end{aligned}
$$

Weil $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x^n} = 0$ für alle $x > 0$, können wir $f(x)$ beliebig klein machen. Insbesondere gilt für hinreichend groß n $f(x) \leq 1$. Dann ist das Integral keine ganze Zahl, ein Widerspruch. □