Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 30, 2024)

Problem 1. Bei einer Sportveranstaltung wird ein Dopingtest durchgeführt. Falls eine Person gedopt ist, so fällt der Test zu 99% auch positiv aus. Hat eine Person nicht gedopt, zeigt der Test trotzdem mit 5% Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis an. Aus Erfahrung sei bekannt, dass 20% der Teilnehmenden gedopt sind.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafur, dass eine Dopingprobe positiv ausfällt.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafur, dass der Test negativ ausfällt, obwohl die getestete Person gedopt ist.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafur, dass eine Person gedopt ist, deren Test negativ ausgefallen ist.

Proof. (a) Da eine Person entweder gedopt or nicht gedopt ist, können wir die Wahrscheinlichkeit zerlegen

$$\begin{aligned} P(\text{positiv}) &= P(\text{positiv}|\text{gedopt})P(\text{gedopt}) + P(\text{positiv}|\text{nicht gedopt})P(\text{nicht gedopt}) \\ &= 0.99 \cdot 0.2 + 0.05 \cdot 0.8 \\ &= 0.238 \end{aligned}$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit ist

$$P(\text{negativ} \cap \text{gedopt}) = P(\text{negativ}) \cap P(\text{gedopt}).$$

□

Problem 2. Betrachten Sie die Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und die Abbildung $p : \Omega \to [0, 1]$ mit $p(\omega) = \omega/6$, für $\omega \in \Omega$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(a) Geben Sie vier verschiedene σ-Algebren auf Ω an.

(b) Geben Sie ein Beispiel an für σ-Algebren uber der Menge Ω, so dass

$$\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} := \{A \cup B : A \in \mathcal{A} \text{ und } B \in \mathcal{B}\},$$

keine σ-Algebra ist.

(c) Zeigen Sie, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ existiert, so dass $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p(\omega) = \omega/6$.

(d) Bestimmen Sie die σ-Algebra, welche von $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) | \mathbb{P}(A) = 1/2\}$ erzeugt wird

Proof. (a)

$$\{\varnothing, \Omega\}$$
$$\{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$$
$$\{\varnothing, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$$
$$\mathcal{P}(\Omega)$$

(b) Wir betrachten die zweite und dritte σ-Algebren:

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$$
$$\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$$
$$\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \Omega\}$$

was keine σ-Algebra ist, da $\Omega \setminus \{1,3\} = \{2\} \notin \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$.

(c) Wir können die Funktion durch deren Wirkung auf jeder Teilmenge definieren:

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \omega/6$$
$$\mathbb{P}(\{1,2\}) = 1/2$$
$$\mathbb{P}(\{2,3\}) = 5/6$$
$$\mathbb{P}(\{1,3\}) = 2/3$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Durch Betrachtung alle Permutationen kann man zeigen, dass $\mathbb{P}$ σ-additiv ist. Daher ist $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

(d) $\mathcal{E} = \{\{1,2\},\{3\}\}$. Daher ist die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$$

Dies ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, da eine σ-Algebra die Nullmenge und die gesamte Menge enthalten muss. Man darf die anderen 2 Mengen auch nicht weglassen, da die Mengen aus $\mathcal{E}$ sind. Man verfiziere auch, dass Komplementen und Vereinigungen noch in $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ sind. $\square$