Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 9

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 16, 2024)

Problem 1. (Hyperbelfunktion) Sei $d \in \{1, 2, 3\}, R > 0, 1 \leq p < \infty$ und $\alpha > 0$. Definiere

$$B_R(d; 0) := \{x \in \mathbb{R}^d | \|x\| < R\}, \qquad f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \to \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{1}{\|x\|^\alpha} & x \neq 0. \end{cases}.$$

(a) Sei zunächst $d = 1$. Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{B_R(1;0)} f$ in $L^p(\lambda_1)$? Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{\mathbb{R} \setminus B_R(1;0)} f$ in $L^p(\lambda_1)$?

(b) Welche Bedingungen müssen in den Fällen $d = 2, 3$ für α, p gelten, damit $\chi_{B_R(d;0)} f \in L^p(\lambda_d)$ ist?

(c) Sei $1 < p < r < q < \infty$. Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit $g \in L^r(\lambda_1)$, $g \notin L^p(\lambda_1)$, $g \notin L^q(\lambda_1)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ an, sodass $g \in L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in [1, \infty)$ gilt, aber $g \notin L^\infty(\lambda_1)$.

Proof. (a) Die Funktion $\chi_{B_R(1;0)} f$ ist in $L^p(\lambda_1)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \int \chi_{B_R(1;0)} |f|^p \, \mathrm{d}\lambda_1 &= \int_{B_R(1;0)} |f|^p \, \mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_{B_R(1;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \, \mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_0^R \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \, \mathrm{d}\lambda_1 + \int_{-R}^0 \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \, \mathrm{d}\lambda_1 \end{aligned}$$

Weil die Funktionen positiv sind, sind sie Lebesgue-Integrierbar genau dann, wenn sie (uneigentlich) Riemann-Integrierbar sind. Wir wissen aber auch, dass

$$\int_0^R \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_0^R \frac{1}{x^{\alpha p}} \, \mathrm{d}\lambda_1 \qquad\qquad x > 0$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$= \lim_{a \to 0} \int_a^R \frac{1}{x^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{a \to 0} \left[\frac{x^{-\alpha p+1}}{1 - \alpha p} \right]$$

was existiert genau dann, wenn $-\alpha p + 1 \geq 0$. Das Ergebnis stimmt nicht für $\alpha p = 1$. In diesem Fall ist

$$\int_a^R \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = [\ln x]_a^R$$

und der Grenzwert existiert nicht. Aus der Symmetrie von $x \to -x$ gilt genau die gleiche für $\int_{-R}^0 \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x$. Insgesamt ist die Funktion genau dann integrierbar, wenn $-\alpha p + 1 > 0$.

Ähnlich berechnen wir das Riemann-Integral für $\chi_{\mathbb{R} \setminus B_R(1;0)}$. Es gilt

$$\int_R^\infty \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} = \int_R^\infty \frac{1}{x^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{a \to \infty} \int_R^a \frac{1}{x^{\alpha p}} \,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{a \to \infty} \left[\frac{x^{-\alpha p+1}}{1 - \alpha p} \right]$$

was genau dann existiert, wwenn $-\alpha p + 1 \leq 0$. Ähnlich stimmt das Ergebnis nicht für $-\alpha p = 1$ nicht. In diesem Fall ist

$$\int_R^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim_{a \to \infty} \ln x|_R^a,$$

was nicht existiert. Also es ist genau dann integrierbar, wenn $-\alpha p + 1 < 0$.

(b) $d = 2$: Wir berechnen das Integral in Polarkoordinaten. Da die Funktion positiv ist, ist das Integral wohldefiniert. Sie ist genau dann integrierbar, wenn die transformierte Funktion integrierbar ist. Wir wissen, dass $\|x\| = r$. Daraus folgt:

$$\int_{B_R(2;0)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha p}} \,\mathrm{d}\theta \, r \,\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi \int_0^R \frac{1}{r^{\alpha p - 1}} \,\mathrm{d}r$$

Aus dem Argument in (a) existiert das Integral genau dann, wen

$$-(\alpha p - 1) + 1 = \alpha p + 2 > 0.$$

□

Problem 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$ gilt und außerdem

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}^{\theta} \|f\|_{L^q(\mu)}^{1-\theta}$$

für alle $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ und $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

(b) Sei der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nun endlich. Zeigen Sie, dass dann $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ und

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mu)}$$

für alle $f \in L^q(\mu)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie den Raum $L^r(\mu)$ für $r := \frac{q}{p}$.

Proof. (a) Sei $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$. Das Ziel ist: $f \in L^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$. Sei

$$A = \{x | x \in X, \ |f(x)| < 1\}$$
$$B = \{x | x \in X, \ |f(x)| \geq 1\} = X \backslash A$$

Weil $|f|^p$ bzw. $|f|^q$ auf der ganzen Menge X integrierbar sind, sind $|f|^p$ bzw. $|f|^q$ auf A und B integrierbar. Es gilt, für alle $x \in A$,

$$|f|^q \leq |f|^r \leq |f|^p$$

also $|f|^r$ ist auf A integrierbar. Ähnlich ist für alle $x \in B$

$$|f|^p \leq |f|^r \leq |f|^q$$

und das Integral von $|f|^r$ auf B existiert. Da

$$\int |f|^r \, \mathrm{d}\mu = \int_A |f|^r \, \mathrm{d}\mu + \int_B |f|^r \, \mathrm{d}\mu \,,$$

ist $|f|^r$ integrierbar und $f \in L^r(\mu)$. Aus der Höldersche Ungleichung folgt, für $1/p + 1/q = 1, p, q \in [1, \infty]$

$$\|f^2\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|f\|_{\mathcal{L}^q(\mu)}.$$

□

Problem 3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := |xyz|$ und

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_3$.