Universität Würzburg Übungsblätter Bachelor Mathematische Physik

Jun Wei Tan

October 26, 2023

Contents

Chapter 1

Lineare Algebra 1

1.1 Blatt 1

Definition 1. Sind $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0)$, so bezeichnet man die Menge $g := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}$ als Gerade.

Theorem 2. *Zu jeder Geraden gibt es $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, sodass die Gerade in der Form*

$$\{(c_1, c_2) + t(d_1, d_2) : t \in \mathbb{R}\}$$

geschrieben werden kann. Weiterhin ist obige Menge im Fall $(d_1, d_2) \neq (0,0)$ immer eine Gerade

Remark 3. *Der Parameterform für Geraden und Ebenen ist in der Vorlesung bewiesen.*

Problem 1. Beweisen Sie folgende Aussage: Gegeben seien zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$ mit $p \neq q$. Dann gibt es genau eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $p \in g$ und $q \in g$. Diese ist gegeben durch $g_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1(q_2 - p_2) - x_2(q_1 - p_1) = p_1 q_2 - p_2 q_1\}$.

Proof. Wir nutzen Def. 1. Weil p und q in der Gerade sind, können wir zwei Gleichungen schreiben...

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = b$$
$$a_1 q_1 + a_2 q_2 = b$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} a_1 p_1 + a_2 p_2 =& a_1 q_1 + a_2 q_2 \\ a_1 (p_1 - q_1) =& a_2 (q_2 - p_2) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} a_1 &= t \\ a_2 &= t\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} \\ b &= p_1 t + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die gegebene Gerade eine Lösung zu die Gleichung ist, mit $t = q_2 - p_2$. Was passiert mit andere t? Sei $t = q_2 - p_2$ und $t' \in \mathbb{R}$. Vergleich dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 t + x_2 t\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1 t + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t \\ x_1 t' + x_2 t'\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1 t' + p_2 \frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} t' \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die zweite Gleichung nur die erste Gleichung durch t'/t multipliziert ist. Deshalb habe die zwei Gleichungen die gleiche Lösungsmengen, dann sind die Gerade, die durch die Gleichungen definiert werden, auch gleich.

Wenn $q_1 = q_2$ dürfen wir die Lösungemenge nicht so schreiben. Aber wir können den Beweis wiederholen, aber mit a_2 als das freie Parameter. Es darf nicht, dass $(q_1 - p_1, q_2 - p_2) = (0, 0)$, weil $\vec{\mathbf{q}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ □

Problem 2. In Beispiel 1.2.8 wurde der Schnitt von zwei Ebenen bestimmt. Er hatte eine ganz bestimmte Form, die wir für den Kontext dieser Aufgabe als Gerade bezeichnen wollen, formal:

Ist $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ und $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig, dann ist die Menge

$$\{(p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2, p_3 + t \cdot v_3) | t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade.

(a) Finden Sie zwei Ebenen, deren Schnitt die Gerade $g = \{(1 + 3t, 2 + t, 3 + 2t) | t \in \mathbb{R}\}$ ist. Erläutern Sie, wie Sie die Ebenen bestimmt haben und beweisen Sie anschließend, dass Ihr Ergebnis korrekt ist.

(b) Ist der Schnitt von zwei Ebenen immer eine Gerade? Wenn ja, begründen Sie das, wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(c) Zeigen Sie: Für den Schnitt einer Geraden g mit einer Ebene E gilt genau einer der folgenden drei Fälle:

- $g \cap E = \varnothing$
- $|g \cap E| = 1$
- $g \cap E = g$

Geben Sie für jeden der Fälle auch ein Geraden-Ebenen-Paar an, dessen Schnitt genau die angegebene Form hat.

Proof. (a) Wir suchen zwei Ebenen, also 6 Vektoren $\vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{p}}_2, \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathbb{R}^3$, die zwei Ebenen durch

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\vec{\mathbf{p}}_1 + t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ E_2 &= \{\vec{\mathbf{p}}_2 + t_1'\vec{\mathbf{v}}_1 + t_2'\vec{\mathbf{v}}_2 | t_1', t_2' \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

definieren. Einfachste wäre, wenn $p_1 = p_2 \in g$. Sei dann $p_1 = p_2 = (1,2,3)^T$. Wenn $\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1 = (3,1,2)^T$, ist es auch klar, dass der Schnitt g entschließt ($t_2 = t_2' = 0$). Dann mussen wir $\vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2$ finden, für die gelten,

$$(t,t_2') \neq (0,0) \implies t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 \neq t_1' \underbrace{\vec{\mathbf{u}}_1}_{\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1} + t_2'\vec{\mathbf{v}}_2 \forall t_1, t_1' \in \mathbb{R},$$

also

$$\xi_1\vec{\mathbf{u}}_1 \neq t_2'\vec{\mathbf{v}}_2 - t_2\vec{\mathbf{u}}_2 \qquad (t_2, t_2') \neq (0,0), \forall \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} &\xi_1 = 0 : \vec{\mathbf{v}}_2 \neq k\vec{\mathbf{u}}_2 \qquad \forall k \in \mathbb{R} \\ &\xi_1 \neq 0 : \vec{\mathbf{u}}_1 \notin \operatorname{span}(\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_2) \end{aligned}$$

Remark 4. *Wir können uns einfach für solchen $\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_2$ entscheiden. Wir brauchen nur*

$$\langle \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2 \rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle = 0.$$

Aber weil das innere Produkt nicht in der Vorlesung nicht diskutiert worden ist, mussen wir es nicht systematisch finden.

Remark 5. *Eigentlich braucht man keine spezielle Grunde, um $\vec{\mathbf{u}}_2$ und $\vec{\mathbf{v}}_2$ zu finden. Wenn man irgindeine normalisierte Vektoren aus einer Gleichverteilung auf $\mathbb{R}^3$ nimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die eine Lösung sind,* 1.

Daher entscheide ich mich ganz zufällig für zwei Vektoren...

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_2 &= (1,0,0)^T \\ \vec{\mathbf{u}}_2 &= (0,1,0)^T \end{aligned}$$

Der Schnitt von der Ebenen kann berechnet werden...

$$\cancel{\vec{\mathbf{p}}} + t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 = \cancel{\vec{\mathbf{p}}} + t_1'\vec{\mathbf{v}}_1 + t_2'\vec{\mathbf{v}}_2,$$

$$\xi_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 = t_2'\vec{\mathbf{v}}_2.$$

Also

$$\xi_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_2' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ t_2 \\ t_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remark 6. *Hier ist es noch einmal klar, dass die einzige Lösung* $\xi_1 = t_2 = t_2' = 0$ *ist, weil* $\det(\dots) \neq 0$. *Aber wir mussen noch eine langere Beweis schreiben…*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

also die einzige Lösung ist $\xi_1 = t_2 = t_2' = 0 \implies t_2 = t_2' = 0, t_1 = t_2 \implies E_1 \cap E_2 = g$

(b) Nein.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

(c)

Theorem 7. *Sei* $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es genau eine Gerade* g, *wofür gilt* $\vec{\mathbf{a}} \in g, \vec{\mathbf{b}} \in g$. *Es kann als*

$$\vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}), t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

Proof. Es ist klar, dass

$$\vec{\mathbf{a}} \in g \qquad (t = 0)$$
$$\vec{\mathbf{b}} \in g \qquad (t = 1)$$

Sei dann eine andere Gerade g', wofür gilt $\vec{\mathbf{a}} \in g'$ und $\vec{\mathbf{b}} \in g'$. g' kann als

$$\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}}, t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden, wobei $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$. Es existiert $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}} + t_1\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{a}} \\ \vec{\mathbf{u}} + t_2\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}} &= \vec{\mathbf{a}} - t_1\vec{\mathbf{v}} \\ \vec{\mathbf{a}} - t_1\vec{\mathbf{v}} + t_2\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{v}} &= \frac{1}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) \qquad t_1 \neq t_2 \text{ weil } \vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Es gilt dann für g':

$$\begin{aligned} g' &= \{\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}} | t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\vec{\mathbf{a}} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) + \frac{t}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) | t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\vec{\mathbf{a}} + \left(\frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}\right)\left(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\right) | t \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Wenn man $t' = \frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}$ definiert, ist es dann klar, dass $g' = g$ $\square$

Es ist klar, dass maximal eines der Fälle gelten kann. Wir nehmen an, dass die erste zwei Fälle nicht gelten. Dann gilt

$$|g \cap E| \geq 2.$$

Es gibt dann mindestens zwei Punkte in $g \cap E$. Es ist auch klar, dass die Verbindungsgerade zwische die beide Punkte g ist (Pr. 1)

Theorem 8. *Sei $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in E$. Dann ist die Verbindungsgerade zwischen $\vec{\mathbf{v}}_1$ und $\vec{\mathbf{v}}_2$ auch in E.*

Proof. Sei

$$E = \{\vec{\mathbf{p}}_1 + t_1\vec{\mathbf{u}} + t_2\vec{\mathbf{v}} | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Es wird angenommen, dass a_1, a_2, b_1, b_2 existiert, sodass

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_1 &= \vec{\mathbf{p}} + a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} \\ \vec{\mathbf{v}}_2 &= \vec{\mathbf{p}} + b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 = (b_1 - a_1)\vec{\mathbf{u}} + (b_2 - a_2)\vec{\mathbf{v}},$$

also

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_1 + t(\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1) =& \vec{\mathbf{p}} + a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} + t\left[(b_1 - a_1)\vec{\mathbf{u}} + (b_2 - a_2)\vec{\mathbf{v}}\right] \\ =& \vec{\mathbf{p}} + \left[a_1 + t(b_1 - a_1)\right]\vec{\mathbf{u}} + \left[a_2 + t(b_2 - a_2)\right]\vec{\mathbf{v}} \in E\end{aligned}$$

$\square$

Deshalb ist $g \subseteq g \cap E$. Weil $g \cap E \subseteq g$, ist $g = g \cap E$

$\square$

1.2 Blatt 2

Problem 3. Gegeben sei die Relation $\sim\subseteq (\mathbb{R}^2\ \{0\}) \times (\mathbb{R}^2\ \{O\})$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn es eine Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, die 0, x und y enthält.

(a) Bestimmen Sie alle $y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mit $(0,1) \sim y$ bzw. $(1,0) \sim y$ und skizzieren Sie die beiden Mengen in einem geeigneten Koordinatensystem.

(b) Begründen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Bleibt $\sim$ auch dann eine Äquivalenzrelation, wenn man sie als Relation in $\mathbb{R}^2$ betrachtet?

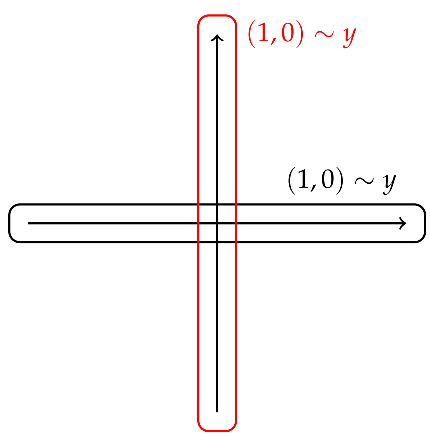
Proof. (a) Eine Gerade hat den Form

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | a_1x_1 + a_2x_2 = b\right\}.$$

Weil $(0,0)$ in der Gerade ist, gilt $b = 0$. Für die zwei Fälle:

(i) $(0,1)$ ist in der Gerade. Es gilt dann $a_2 = 0, a_1 \in \mathbb{R}$. Die Gleichung der Gerade ist dann $x_1 = 0$, oder alle Punkte des Forms $(0,y), y \in \mathbb{R}$.

(ii) $(1,0)$ ist in der Gerade. Es gilt dann $a_1 = 0, a_2 \in \mathbb{R}$. Die Gerade enthält ähnlich alle Punkte des Forms $(x,0), x \in \mathbb{R}$.



(b) (i) $x \sim x$ (Reflexivität)
Es gibt immer eine Gerade zwischen 0 und x. Eine solche Gerade enthält x per Definition.

(ii) $x \sim y \iff y \sim x$ (Symmetrie)
Es gibt eine Gerade, die 0, x und y enthält. Deswegen gilt die beide Richtung der Implikationen.

(iii) $x \sim y$ und $y \sim z \implies x \sim z$ (Transitivität)
Es gibt eine Gerade zwischen $0, x$ und y, und eine Gerade zwischen $0, y$ und z. Weil die beide Geraden zwischen y geht, sind die Geraden gleich, und enthält x und z, daher $x \sim z$.

(c) Nein. $(1,0) \sim (0,0), (0,1) \sim (0,0)$, aber $(1,0) \sim (0,1)$ stimmt nicht.

□

Problem 4. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2)$, s die Spiegelung in $\mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Translation um $(1,0)$ und $em : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Einbettung.

(a) Bilden Sie die Verkettungen $f \circ em, em \circ f, s \circ f, T \circ s, s \circ T$ und $em \circ s$. Geben Sie dabei jeweils Argumentmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift an.

(b) Untersuchen Sie die Funktionen aus der vorherigen Teilaufgabe auf Surjektivität, Injektivität bzw. Bijektivität.

(c) Sei $F = em \circ T \circ s \circ f$. Bestimmen und skizzieren Sie das Bild bzw. Urbild von $[0,1] \times [-1,1] \times [0,2]$ unter F.

Proof. (a) (i) $f \circ em$
Argumentmenge: $\mathbb{R}^2$
Zielmenge: $\mathbb{R}^2$
Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$

(ii) $em \cdot f$
Argumentmenge + Zielmenge: $\mathbb{R}^3$
Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, 0)$

(iii) $s \cdot f$
Argumentmenge: $\mathbb{R}^3$
Zielmenge: $\mathbb{R}^2$
Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_1)$

(iv) $em \circ s$
Argumentmenge: $\mathbb{R}^2$
Zielmenge: $\mathbb{R}^3$
Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1, 0)$

(b) (i) $f \circ em$
Surjektive, injektive und auch bijektive

(ii) $em \circ f$
Injektiv, aber nicht surjektiv (und deswegen nicht Bijektiv)

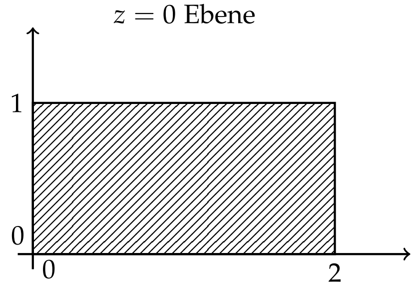
(iii) $s \circ f$
Surjektive, aber nicht injektiv

(iv) $em \circ s$
Injektiv, aber nicht surjektiv

(c)

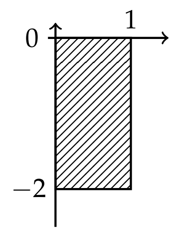
Bild: $[0,2] \times [0,1] \times \{0\}$

$z = 0$ Ebene



Urbild: $[0,1] \times [-2,0] \times \mathbb{R}$

$z = 0$ Ebene



$\square$

Problem 5. Es sei M eine beliebige, nichtleere Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Wir definieren induktiv $f^0 := id$ und für $k \in \mathbb{N} f^k := f \circ f^{k-1}$.

(a) Zeigen Sie: $f^{k+l} = f^k \circ f^l$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$

(b) Zeigen Sie: Gibt es $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $f^{k_0+l} = f^{k_0}$, dann gilt $f^{k+l} = f^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq k_0$.

(c) Geben Sie eine Funktion $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ an, für die $f^1 \neq f^3$, aber $f^{k+2} = f^k$ für alle $k \geq 2$ gilt. Begründen Sie, dass Ihre Funktion diese Eigenschaft hat.

Proof. (a) Wir beweisen es per Induktion auf k. Für $k = 1$ gilt es per Definition (es wird in der Frage gegeben). Jetzt nehme an, dass es für ein beliebige $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)+l} &= f \circ f^k \circ f^l \\ &= f^{k+1} \circ f^l \end{aligned}$$

Deswegen gilt es auch für $k + 1$, und daher für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $k = k_0 + k'$. Es gilt

$$f^{k+l} = f^{k_0+k'+l} = f^{k_0} = f^{k_0+k'} = f^k.$$

(c) Sei f definiert durch

$$\begin{aligned} f(1) =& 1 \\ f(2) =& 1 \\ f(3) =& 2 \\ f(4) =& 1 \\ f(5) =& 4 \end{aligned}$$

Es gilt dann

x	$f^1(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$f^5(x)$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	4	1	1	1	1

$f^1 \neq f^3$, weil $f^1(3) \neq f^3(3)$. Aber $f^k(x) = 1 \forall k \in \{1,2,3,4,5\}, k \geq 2$. Daher ist $f^{k+2} = f^k, k \geq 2$. □

Problem 6. Es seien M, N Mengen, m, n natürliche Zahlen und die Abbildungen $f : M \to \{1,2,3,\dots,m\}, g : N \to \{1,2,3,\dots,n\}$ bijektiv. Finden Sie eine natürliche Zahl k und eine bijektive Abbildung $F : M \times N \to \{1,2,3,\dots,k\}$.

Proof. $k = nm$, und

$$F(a,b) = a + (b-1)m.$$

Das ist bijektiv. Sei $x \in \{1,2,\dots,nm\}$. Es existiert eindeutige Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, so dass

$$x = pm + q, q < m.$$

Falls $q = 0$, sei $b = p, a = m$. Sonst definiert man $b = p+1, a = m$. Per Definition ist $a \in \{1,2,3,\dots,m\}$. Außerdem ist $1 \leq b \leq n$, weil $p \leq k/m = n$ (n teilt $k = mn$). □

Chapter 2

Lineare Algebra 2

2.1 Blatt 1

Problem 7. (a) Bestimmen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung

$$x^2 = u + iv,$$

in Abhängigkeit von $u, v \in \mathbb{R}$

(b) Führen Sie das Nullstellenproblem

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

mit $a \in \mathbb{C} \backslash 0, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ auf den Fall in (a) zurück. Geben Sie weiterhin eine geschlossene Darstelling aller Lösungen für den Fall $a = 1$ an.

Hat alles geklappt, sollte bei Ihnen speziell für den Fall $a = 1$ und $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(c) = 0$ die entsprechende Mitternachtsformel dastehen.

Proof. (a) $\left|x^2\right| = |x|^2 = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}$

Daraus folgt:

$$|x| = (u^2 + v^2)^{1/4},$$
$$x = (u^2 + v^2)^{1/4} e^{i\theta}.$$

Setze es in $x^2 = u + iv$ ein und löse die Gleichungen für θ. Sei $\varphi = \mathrm{atan}_2(u, v)$ Dann ist:

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \text{ oder } \theta = \frac{\varphi + 2\pi}{2}.$$

(b)

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

d.h.

$$
\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm p
\end{aligned}
$$

wobei p die Lösung zu $p^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ ist. Im Fall $a = 1$ und $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(c) = 0$, daraus folgt:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}.$$

□

Problem 8. Finden Sie für die Polynome $p, d \in \mathbb{C}[x]$ jeweils solche $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r) < \deg(d)$, dass $p = qd + r$ gilt.

(a) $p = x^7 + x^5 + x^3 + 1, d = x^2 + x + 1$

(b) $p = x^5 + (3 - i)x^3 - x^2 + (1 - 3i)x + 1 + i, d = x^2 + i$

(c) Wie sehen s, r aus, wenn man in (a) und (b) jeweils die Rollen von p und d vertauscht? D.h. bestimmen Sie $s, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg r < \deg p$, sodass $d = sp + r$ gilt.

Proof. (a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^5 - x^4 + x^3 \\
\hline
x^2 + x + 1 & x^7 \qquad + x^5 \qquad + x^3 + 1 \\
 & -x^7 - x^6 - x^5 \\
\cline{2-2}
 & -x^6 \\
 & x^6 + x^5 + x^4 \\
\cline{2-2}
 & x^5 + x^4 + x^3 \\
 & -x^5 - x^4 - x^3 \\
\cline{2-2}
 & 1
\end{array}
$$

Daher

$$q = x^5 - x^4 + x^3, r = 1.$$

(b) $q = x^3 + (3 - 2i)x - x, r = -(1 + 6i)x + (1 + 2i)$

(c) $r = d, s = 0$

□

Problem 9. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -38 \\ -46 \\ -18 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(A)$ und $\ker(A)$

(b) Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$ und $\text{Lös}(A, c)$.

Proof. (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei dann $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Wenn $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \ker(A)$, gilt

$$\begin{aligned} t_3 &:= x_3 \\ t_4 &:= x_4 \\ x_1 &= x_3 - x_4 = t_3 - t_4 \\ x_2 &= -x_3 - 2x_4 = -t_3 - 2t_4 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\ker(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -46 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_3 + x_4 &= -18 \\
x_2 + x_3 + 2x_4 &= -10
\end{aligned}
$$

Deswegen ist Lös(A, b)

$$
\begin{pmatrix} -18 + x_3 - x_4 \\ -10 - x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

(c)

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

Es gibt keine Lösungen, weil $0 \neq 1$, also Lös$(A, c) = \varnothing$

□

Problem 10. Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume V mit Basis $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ und Basis $B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Wir definieren einen linearen Operator $T : V \to W$ wie folgt:

$$
T(v_1) = w_1 + w_3 \qquad T(v_2) = w_1 + w_2, T(v_3) = -w_1 - w_2 - w_3.
$$

(a) $w_1, w_2, w_3 \in \operatorname{span}\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$, weil

$$
\begin{aligned}
w_1 =& T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) \\
w_2 =& (-1)\left(T(v_3) + T(v_1)\right) \\
w_3 =& (-1)\left(T(v_2) + T(v_3)\right)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
W = \operatorname{span}(w_1, w_2, w_3) = \operatorname{span}(T(v_1), T(v_2), T(v_3)).
$$

Daraus folgt:

$$
\operatorname{im}(T) = \mathbb{R}^3, \qquad \ker(T) = \{0\}.
$$

(b)

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

(c)

$$
B_W^* = \{w_1 + w_3, w_1 + w_2, -w_1 - w_2 - w_3\}.
$$

(d)

$$
B_V^* = \{v_1 + v_2 + v_3, -(v_1 + v_3), -(v_2 + v_3)\}.
$$

2.2 Blatt 2

Problem 11. Es seien die Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren den Operator

$$\Phi : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}^{n+1}, p \to y, \text{ mit } p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

wobei wir mit $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchsten n bezeichnen und $p(x)$ die Auswertung des Polynoms p im Punkt x beschreibt.

(a) Zeigen Sie: Sind die Punkte x_i paarweise verschieden, so ist die Abbildung Φ wohldefiniert und isomorph. (Eine Konsequenz hieraus ist die eindeutige Lösbarkeit der Polynominterpolation.)

(b) Was passiert, wenn Sie nicht fordern, dass die x_i paarweise verschieden sind? Kann Φ im Allgemeinen noch injektiv (surjektiv) sein?

Proof. (a) Injektiv: Nehme an, dass es zwei unterschiedliche Polynome p_1, p_2 gibt, mit $p_1(x_i) = p_2(x_i) \forall i = 0, \dots, n$. Dann ist $p(x) := p_1(x) - p_2(x)$ auch ein Polynom, mit $p(x_i) := 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$. Weil $\deg(p) \leq n$ist, folgt daraus, dass $\forall x, p(x) = 0, p_1(x) = p_2(x)$. Das ist ein Widerspruch.

Surjektive: Sei $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$p(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n)$$

auch ein Polynom mit $\Phi(p) = (y_0, \dots, y_n)$.

Linearität: Sei $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x], a \in \mathbb{R}$. Sei auch $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$. Es gilt dann

$$p(x_i) = p_1(x_i) + p_2(x_i), i = 0, \dots, n$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(p_1 + p_2) = \Phi(p_1) + \Phi(p_2).$$

Es gilt auch, für $p(x) := ap_1(x)$, dass

$$p(x_i) = ap_1(x_i), i = 0, \dots, n,$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(ap_1) = a\Phi(p_1).$$

(b) Nein. Sei, zum Beispiel, $n = 1$, $x_0 = x_1 = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi(x) =& (0, 0)^T \\ \Phi(x^2) =& (0, 0)^T \end{aligned}$$

Aber die zwei Polynome sind ungleich.

□

Problem 12. (a) Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben. Wir bilden die erweiterte Matrix

$$B = (A|1_n)$$

mit 1_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn A durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Verfizieren Sie weiterhin: Werden die dafür benötigten Zeilenumformungen auf ganz B angewendet, so ergibt sich im hinteren Teil, wo zu Beginn die Einheitsmatrix stand, genau A^{-1}.

(b) Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^{-1}.

Proof. (a) Definiert $(x, y), x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$ durch $\mathbb{K}^{n+m} \ni (x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Eine solche erweiterte Matrix bedeutet eine Gleichungssystem durch

$$B(x, -y) = Ax - 1_n y = 0,$$

wobei $x, y \in \mathbb{K}^n$. Für jeder $x \in \mathbb{K}^n$ gibt es $y \in \mathbb{K}^n$, so dass $B(x, -y) = 0$. Nehme an, dass wir durch elementare Zeilenumformung

$$B = (A|1_n) \to (1_n, A') := B'$$

kann. Die Gleichungssystem ist dann $x = A'y$. Dadurch können wir für jeder $y \in \mathbb{K}^n$ eine $A'y = x \in \mathbb{K}^n$ rechnen, für die gilt, dass $Ax = y$. Das heißt, dass $A' = A^{-1}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-3R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times -1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\times -\frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$\square$

Problem 13. Es seien die Vektorräume V, W über $\mathbb{K}$ gegeben mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Wir betrachten eine lineare Abbildung

$$T : V \to W, v \to T(v)$$

Seien B_V und B_W Basen von V, bzw. W. Wir nehmen an T ist nicht die konstante Nullabbildung. Beweisen Sie:

(a) Der Kern von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder trivial (d.h. nur die 0) oder hängt nur von der Wahl von B_V ab, aber nicht von B_W.

(b) Das Bild von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder der ganze $\mathbb{K}^m$ oder hängt nur von der Wahl von B_W ab, aber nicht von B_v.

(c) Der Rang von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist unabhängig von B_w und B_V. aber nicht von B_W.

Chapter 3

Analysis 2

Ich habe die Übungen für Analysis 2 mit Lukas Then gemacht.

3.1 Blatt 1

Problem 14. Berechnen Sie Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{\arctan \sin x^2}{e^{1-x}}$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = x^{(x^x)}$ für $x > 0$

(a)

$$f(x) = e^{x-1} \arctan \sin x^2.$$

$$\begin{aligned} f'(x) =& e^{x-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \sin x^2 + \left(\arctan \sin x^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x-1} \\ =& \frac{e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x^2 + \left(\arctan \sin x^2\right) e^{x-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x-1) \\ =& \frac{e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} (\cos x^2)(2x) + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \\ =& \frac{2x \cos x^2 e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g(x) =& x^{(x^x)} \\ \ln g(x) =& x^x \ln x \end{aligned}$$

Lemma 9.

$$\begin{aligned} h(x) &:= x^x \\ h'(x) &= x^x(1 + \ln x) \end{aligned}$$

Proof.

$$\ln h(x) = x \ln x.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} | \ln h(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x \ln x) \\
\frac{h'(x)}{h(x)} =& \ln x + 1 \\
h'(x) =& h(x) (1 + \ln x) \\
=& x^x (1 + \ln x)
\end{aligned}$$

□

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln g(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x^x \ln x) \\
\frac{g'(x)}{g(x)} =& \frac{1}{x} x^x + (\ln x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x^x) \\
=& \frac{x^x}{x} + (\ln x) x^x (1 + \ln x) \\
g'(x) =& g(x) x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right] \\
=& x^{x^x + x} \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right] \\
=& x^{x^x + x - 1} \left[1 + x \ln x + x \ln^2 x\right]
\end{aligned}$$

Problem 15. Untersuchen Sie, für welche Argumente des Definitionsbereiches die folgenden Funktionen differenzierbar sind:

(a) $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) $h(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$

(a) Für $x_0 \neq 0$ gibt es eine Umgebung auf x_0, worin $|x| = x$ oder $|x| = -x$. Dann ist die Ableitung von $|x|$ gleich mit die Ableitung von entweder x oder $-x$, also $f'(x_0)$ existiert für $x_0 \neq 0$.

Für $x_0 = 0$ gilt $|0| = 0$, und auch

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Weil die beide ungleich sind, existiert die Grenzwert und daher auch die Ableitung nicht.

(b) Sei $x_0 \neq 0$ und $y_0 = x_0^2$. Dann für $0 < \epsilon < y_0$ existiert keine $\delta > 0$, sodass $|x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

Beweis: Es gibt zwei Fälle:

(i) $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann in jeder offenen Ball $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt es ein Zahl $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, also $|g(x) - g(x_0)| = g(x_0) = y_0 > \epsilon$

(ii) Sei $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dann in jeder offenen Ball $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt es ein Zahl $x \in \mathbb{Q}$, also $|g(x) - g(x_0)| = g(x) > y_0 > \epsilon$

Sei $x_0 = 0$. Dann gilt $g(x_0) = 0$, und auch:

(i) $x \in \mathbb{Q}$, also

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \frac{x^2}{x} \\ &= x \end{aligned}$$

(ii) oder $x \notin \mathbb{Q}$, also

$$g(x) - g(0) = 0 - 0 = 0 \implies \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

Deshalb ist

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

(c) Zu berechnen:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Sei $z = z_0 + x, x \in \mathbb{R}$. Dann, falls die Grenzwert existiert, ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{z_0 + x - z_0}}{z_0 + x - z_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sei jetzt $z = z_0 + ix, x \in \mathbb{R}$. Falls die Grenzwert existiert ist es gleich

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\overline{z_0 + ix - z_0}}{z_0 + ix - z_0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\overline{ix}}{ix} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-ix}{ix} \\ &= -1\end{aligned}$$

Weil das Grenzwert, wenn durch zwei Richtungen berechnet wurde, ungleich ist, existiert das Grenzwert nicht (für alle $z \in \mathbb{C}$)

Problem 16. Man zeige, dass die Gleichung

$$x = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

auf $[0, 1]$ genau eine Lösung besitzt.

Sei $f(x) = x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Dann ist die Gleichung gleich $f(x) = 0$. $f(x)$ ist auf $[0, 1]$ stetig, und auf $(0, 1)$ differenzierbar.

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 - 1 = -1 \\ f(1) &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es mindestens eine Lösung zu der Gleichung $f(x) = 0$. Dann

$$f'(x) = 1 + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0 \text{ für } x \in [0, 1].$$

f is dann monoton wachsend, und es gibt maximal eine Lösung zu $f(x) = 0$.
Deswegen besitzt die Gleichung genau eine Lösung.

Problem 17. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{k\to\infty} k \ln \frac{k-1}{k}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}$

(a)

$$k \ln \frac{k-1}{k} = \frac{\ln(k-1) - \ln k}{1/k}.$$

Weil $\ln x$ und $1/x$ auf $x \in (0, \infty)$ differenzierbar sind, kann man den Satz von L'Hopital verwenden:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\ln(k-1) - \ln k\right] &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{1}{k} &= -\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k(k-1)}}{-\frac{1}{k^2}} &= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{k}{k-1}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

Weil das Grenzwert auf $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ existiert, ist

$$\lim_{k\to\infty} k\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -1.$$

(b)

$$\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \frac{\left(e^{\ln x}\right)^{\ln x}}{e^x} = \frac{e^{\ln^2 x}}{e^x} = e^{\ln^2 x - x} = e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-1\right)}.$$

Lemma 10.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^p x}{x^q} = 0, \qquad p,q>0.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^p x}{x^q} &= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{p/q}}\right)^q\\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x^{p/q})}\right)^q \qquad \text{L'Hopital}\\ &= 0^q = 0\end{aligned}$$

□

Corollary 11.

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-1\right)\right] = -\infty.$$

Deswegen ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-1\right)} = 0.$$

Problem 18. Überprüfen Sie die Funktion $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & -1\le x<1\\ \frac{8}{\pi}\arctan\frac{1}{x} & x\ge 1\end{cases}$$

auf lokale und globale Extrema.

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & -1 < x < 1 \\ \frac{8}{\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x > 1 \end{cases}.$$

Es ist klar, dass $x = 0$ eine Lösung zu $f'(x) = 0$ ist. Weil $f''(0) = 2 > 0$, ist es ein lokales Minimum. Es gibt auch $a, b \in \mathbb{R}, a < 1 < b$, wofür gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 && x \in (a, 1) \\ f'(x) &< 0 && x \in (1, b) \end{aligned}$$

Falls $f(1) \geq \lim_{x \to 1^-} f(x)$, ist $f(1)$ ein lokales Maximum (sogar wenn f nicht auf 1 stetig ist). Weil

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 + 1\right) = 2$$

und

$$f(1) = \frac{8}{\pi} \arctan 1 = \frac{8}{\pi}\frac{\pi}{4} = 2$$

ist $f(1)$ ein lokales Maximum. Weil $f(x) < 2$ für $x > 1$ kann kein Punkt $x > 1$ ein globales Maximum sein. Es gilt auch, dass

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Außer $x \in \{-1, 0, 1\}$ gibt es keine Möglichkeiten für ein globales Maximum. Daher sind die globale Maxima auf $x \in \{-1, 1\}$

Für $x \in [1, 1)$ gilt $f(x) \geq 1$. Dennoch ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Deswegen gibt es *keine* globales Maximum auf $\mathbb{R}$. Wenn man $f(\infty)$ definiert durch $f(\infty) = \lim_{x \to \infty} f(x)$, ist $f(\infty)$ das globale Maximum.

3.2 Blatt 2

Problem 19. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen für $n \in \mathbb{N} \backslash 0$ und $D \subset \mathbb{K}$ offen. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ ebenfalls n-mal differenzierbar ist und weiterhin

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für jedes $x \in D$ gilt.

Proof. Wir zeigen es per Induktion, für $n = 1$ ist es das Produktregel. Nehme jetzt an, dass f, g $(n+1)-$ mal differenzierbar Funktionen sind und

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

gilt (weil alle $(n+1)$-mal differenzierbar Funktionen sind auch n-mal differenzierbar). Dann ist $(f \cdot g)^{(n)}(x)$ differenzierbar, weil die rechte Seite eine Linearkombination von Produkte aus (zumindest) einmal differenzierbar Funktionen. Es gilt auch,

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) && n = 1 \text{ Fall} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x)
\end{aligned}$$

□

Problem 20. i) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 x^2 + 1}.$$

Beweisen Sie, dass $(f_n), n \in \mathbb{N}$ gegen eine zu bestimmende Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, diese jedoch nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Warum ist das kein Widerspruch zu Proposition 5.5.2?

ii) Untersuchen Sie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}, x \in \mathbb{R}.$$

auf Differenzierbarkeit.

Proof. i)

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Es ist klar, dass $f_n(x)$ konvergiert gegen $\sqrt{x^2} = |x|$. Sei dann $r(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|$. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} r(x) =& \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - x \\ r'(x) =& \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Deswegen ist $r(x)$ monoton fallend auf $(0, \infty)$. Ähnlich beweist man, dass $r(x)$ monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$ ist. Deswegen ist $x = 0$ ein globales Maximum, und $r(x) \leq r(0) = \frac{1}{n}$. Daher konvergiert (f_n) gleichmäßig.

Man berechnet:

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Die Folge der Ableitungen konvergiert gegen $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)$, falls $x \neq 0$, und 0, falls $x = 0$. Es konvergiert aber nicht lokal gleichmäßig in eine Umgebung U auf 0.

Sei $1 > \epsilon > 0$ gegeben, und nehme an, dass existiere $N \in \mathbb{N}$, für die gilt,

$$|f_n(x)' - g(x)| \leq \epsilon \qquad n > N, x \in U,$$

wobei

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Nehme eine solche Abbildung $f_n'(x)$. Weil f_n' stetig ist, und $f_n'(0) = 0$, gibt es eine Umgebung $0 \in V$, in der gilt, dass $|f_n'(x) - f_n'(0)| = f_n'(x) \leq 1 - \epsilon, x \in V$. Sei dann $0 \neq x \in V$, und $|1 - f_n'(x)| > \epsilon$. Deswegen ist es kein Widerspruch.

ii) Es gilt $\left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$. Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig (Weierstraßsches Majorantenkriterium).

Jetzt ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\cos(nx)}{n^3} = -\frac{\cancel{n}\sin(nx)}{n^{\overset{2}{\cancel{3}}}}$. Weil $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|$ gleichmäßig. Deswegen ist f differenzierbar, mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]. \qquad \square$$

Problem 21. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \max\{x, 0\}$$

gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Proof. Wir wissen schon, dass es $q_n(x)$ existiert, $q_n(x)$ Polynome, und $q_n(x) \to |x|$ gleichmäßig. Es gilt auch

$$f(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{x}{2}.$$

Daher konvergiert gleichmäßig

$$\frac{q_n(x)}{2} + \frac{x}{2} \to f(x).$$

□

Problem 22. i) Es seien $f : (a,b) \to (c,d)$ und $g : (c,d) \to R$ n-mal differenzierbare Funktionen mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f$ n-mal differenzierbar ist.

ii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert ist. Bestimmen Sie zudem $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Proof. i)

Theorem 12. *Die Ableitung von ein Produkt $f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$ ist*

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_n(x).$$

Proof. Wir beweisen es per Indukion. Für $n = 2$ ist es das Produktregel. Jetzt nehme an, dass es für eine $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, und

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_1(x)f_2(x)\dots f_{n+1}(x)\right) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right) f_{n+1}(x) \\
&+ \left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right)\frac{\mathrm{d}f_{n+1}}{\mathrm{d}x} \\
=& \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_n(x)\right) \\
&+ \left(f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\right) f_n'(x) \\
=& \sum_{i=1}^{n+1} f_1(x)f_2(x)\dots\frac{\mathrm{d}f_i(x)}{\mathrm{d}x}\dots f_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

□

Corollary 13. *Alle Monome von differenzierbare Funktionen sind differenzierbar, und die Ableitung ist noch eine lineare Kombination von Monome.*

Corollary 14. *Sei f $k-$ mal differenzierbar. Dann alle Monome von*

$$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$$

sind differenzierbar.

Theorem 15. $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f \circ g)$ *ist ein Monom von Ableitungen von f und g (höchstens die k-ste Ableitung), sofern f und g, n-mal differenzierbar sind.*

Proof. Für $k = 1$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Nehme an, dass es für ein $k \in \mathbb{N}, k < n$ gilt. Dann per Korollar 13 gilt es auch für $k+1$. Per Induktion ist die Verkettung dann n-mal differenzierbar, □

ii)

Lemma 16.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0, k > 0.$$

Proof. Wir beweisen es per Induktion auf p. Für $p = 1$ verwenden wir den Satz von L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^{k-1}(k)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{kx^k} = 0.$$ □

Jetzt nehme an, dass es für p gilt. Wir zeigen, dass es für $p \to p+1$ auch gilt.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)(\ln x)^p}{kx^{k-1}(x)} = \frac{p+1}{k} \lim_{\xi\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^k} = 0.$$

Lemma 17.

$$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-kx} = 0, k > 0.$$

Proof. Nimm $x = e^{\xi}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-k}(\ln x)^p = \lim_{x\to\infty} e^{-k\xi}\xi^p = 0.$$ □

Die Ableitungen $f^{(n)}(x), x \neq 0$ haben den Form $p_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$, wobei $p_n(x)$ eine Polynome ist.

Theorem 1. $f^{(n)}(0) = 0$

Proof. Wir beweisen es per Induktion. $f^{(0)}(0) = 0$ per Definition.

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(f^{(n-1)}(x) \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} p_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to \infty} x p_n(x) e^{-x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Deswegen ist f überall (inkl. 0) differenzierbar, mit alle Ableitungen $f^{(n)}(0) = 0$ □

□

Problem 23. Es seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{K}$ nichtleere, kompakte Mengen und die Folgen stetiger Funktionen $f_n : K_1 \to K_2$ sowie $g_n : K_2 \to K$ seien gleichmäßig konvergent gegen $f : K_1 \to K_2$ bzw. $f : K_2 \to K$. Beweisen Sie, dass auch

$$g_n \circ f_n \to g \circ f$$

gleichmäßig auf K_1 gilt.

Proof. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann per Definition existiert $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}, x \in K_2, n \geq n_2 \tag{3.1}$$

Weil g stetig und auf eine kompakte Menge definiert ist, ist g gleichmäßig stetig, und es existiert $\delta > 0$, für die gilt

$$|g(a) - g(b)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |a - b| < \delta \tag{3.2}$$

Es gibt auch $n_1 \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| < \delta, x \in K_1, n \geq n_1$. Für $n > n_1$ gilt daher auch

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \frac{\epsilon}{2}, n > n_1, x \in K_1 \tag{3.3}$$

Sei $N = \max(n_1, n_2)$. Für $n \geq N$ gilt Eq. (3.1) und Eq. (3.3) auch, weil $N \geq n_1$ und $N \geq n_2$. Dann für $n \geq N$ gilt.

$$
\begin{aligned}
|g(f(x)) - g_n(f_n(x))| =& |g(f(x)) - g(f_n(x)) + g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))| \\
\leq& \underbrace{|g(f(x)) - g(f_n(x))|}_{<\epsilon/2 \ (3.3)} + \underbrace{|g(f_n(x)) - g_n(f_n(x))|}_{<\epsilon/2 \ (3.1)} \\
<& \ \epsilon
\end{aligned}
$$

Also $g_n \circ f_n \to g \circ f$ gleichmäßig. □

Chapter 4

Vertiefung Analysis

Ich habe die Übungen für Vertiefung Analysis mit Lucas Wollman gemacht.

4.1 Blatt 1

Problem 24. Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}, \mathcal{S}$ σ-Algebren über X sowie B eine σ-Algebra über Y. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(c) $\mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(d) $f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{ f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{B} \right\}$ ist eine σ-Algebra über X.

(e) $f(\mathcal{A}) = \{ f(A) \subseteq Y | A \in \mathcal{A} \}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Proof. (a) Falsch. Sei

$$\begin{aligned}
X &= \{a, b, c\} \\
\mathcal{A} &= \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, X\} \\
\mathcal{S} &= \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\}
\end{aligned}$$

Dann ist

$$A \cup S = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}.$$

keine σ-Algebra, weil

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{S}.$$

(b) Richtig.

(1) $X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$

(2) Sei $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann $A \in \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{S}$.
Daraus folgt: $A^c \in \mathcal{A}$ und $A^c \in \mathcal{S}$. Deswegen ist $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$.

(3) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$$

Daraus folgt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}.$$

(c) Falsch. $X \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{S} \implies X \notin \mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$

(d) Richtig.

(1) $f^{-1}(Y) = X \in f^{-1}\mathcal{B}$

(2) Sei $A = f^{-1}(B)$

$$X - A = f^{-1}(\underbrace{Y - B}_{\in \mathcal{B}}) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

(3) Es folgt aus

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right).$$

(e) Falsch. Sei $a \in Y$ und f die konstante Abbildung $f(x) = a \forall x \in X$. Dann gilt

$$f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

was keine σ-Algebra ist, solange $Y \neq \{a\}$.

$\square$

Problem 25. (a) Sei $X := \mathbb{Q}$ und $\mathcal{A}_\sigma(M)$ die von $M := \{(a, b] \cap Q | a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_\sigma(M) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ gilt.

(b) Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ gilt

$$f^{-1}\left(A_\sigma(\mathcal{M})\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right).$$

Das Urbild von $\mathcal{M}$ ist hierbei analog zum Urbild einer σ-Algebra definiert durch

$$f^{-1}(\mathcal{M}) := \left\{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{M}\right\}.$$

Proof. (a) $\{q\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) \forall q \in \mathbb{Q}$, weil

$$\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(q - \frac{1}{n}, q\right] \in \mathcal{A}_\sigma(M).$$

Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, sind alle Teilmenge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ abzählbar, daher

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma\left(\{\{q\} \,|q \in \mathbb{Q}\}\right) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(M)$$

Es ist klar, dass

$$\mathcal{A}_\sigma(M) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}).$$

(b) Sei $P = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}\}$. Per Definition ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}$. Dann ist es zu beweisen:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}\right) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right).$$

Jeder σ-Algebra $f^{-1}\left(\mathcal{A}\right)$ enthält $f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)$. Daraus folgt, dass

$$\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right) \subseteq \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

Jetzt betrachten wir

$$\mathcal{M}' := f_*\left(\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right)\right).$$

Es ist schon in der Vorlesung bewiesen, dass $\mathcal{M}'$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{M}$ und daher auch $\mathcal{A}_\sigma\left(\mathcal{M}\right)$ enthält. Weil $f^{-1}(\mathcal{M}')$ eine σ-Algebra ist, ist $f^{-1}\left(\mathcal{M}'\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right)$. Daraus folgt:

$$f^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma\left(\mathcal{M}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\mathcal{M}'\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{M}\right)\right).$$ □

Problem 26. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik, also ausgestattet mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Für $re > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| < r\}$. Definiere außerdem $B_{\mathbb{Q}} := \{B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n | \mathbb{Q} \ni r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$ und $B_{\mathbb{R}} := \{B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n | r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$

(a) Zeigen Sie: Für jeder offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $A = \cup_{B_r(q) \in M} B_r(q)$ mit

$$M := \left\{B_r(q) \in B_{\mathbb{Q}} | B_r(q) \subseteq A\right\}.$$

(b) Folgern Sie nun $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$

Proof. (a) Es genügt zu beweisen, dass jeder offene Ball eine Vereinigung von $\mathbb{Q}$-Bälle sind.

Sei $B_p(x), p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Ball. Sei auch $(a_i), a_i \in \mathbb{Q}^n$ eine Folge, für die gilt

$$\|x - a_i\| < r \forall i$$
$$\lim_{i \to \infty} a_i = x$$

Sei dann

$$M_i = B_{r - \|x - a_i\|}(a_i) \in B_{\mathbb{Q}}.$$

Es ist klar, dass jeder $M_i \subseteq B_r(x)$ ist. Wir beweisen auch, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = B_r(x)$.

Sei $y \in B_r(x)$. Es gilt $\|y - x\| = r_0 < r$. Sei $\xi = r - r_0$. Weil $\lim_{n \to \infty} a_n = x$, gibt es ein Zahl a_k, wofür gilt

$$\|a_k - x\| < \frac{\xi}{2}.$$

(Eigentlich existiert unendlich viel, aber die brauchen wir nicht). Es gilt dann

$$\|y - a_k\| \le \|y - x\| + \|x - a_k\| \le r_0 + \frac{\xi}{2} < r - \frac{\xi}{2} < r - \|x - a_i\|,$$

also $y \in B_{r - \|x - a_k\|}(a_k)$. Jetzt ist die Ergebnis klar: Weil jeder offene Menge eine Vereinigung von offene Bälle ist, gilt

$$A = \bigcup B_p(x) = \bigcup \bigcup B_r(q),$$

wobei $p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}^n$

(b) $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$ per Definition.

Aus $B_{\mathbb{Q}} \subseteq B_{\mathbb{R}}$ folgt $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}})$

Aus (a) folgt, dass

$$B_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}).$$

Dann

$$\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}})) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}).$$

Deswegen

$$\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n.$$

□

Problem 27. Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $\mu : A \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion.

(a) Sei μ σ-subadditiv, $B \in \mathcal{A}$ und definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty], \mu_B(A) := \mu(A \cap B)$. Zeigen Sie, dass μ_B wohldefiniert und eine σ-subadditive Mengenfunktion ist.

(b) μ erfülle die beiden Eigenschaften

(1) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \varnothing$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ für alle $(A_n) \subseteq A$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$.

Zeigen Sie, dass μ σ-additiv ist.

Proof. (a) Weil $B \in \mathcal{A}$, ist $B \cap A \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A}$. μ_B ist daher wohldefiniert.

Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Sei auch $B_j = A_j \cap B \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu_B\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_B(A_j)$$

(b) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkter Menge. Dann definiere $B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_j$. Für k endlich ist es klar,

$$\mu(B_k) = \sum_{i=1}^{k} A_i.$$

Weil $B_i \subseteq B_{i+1}$, (2) gilt auch:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \quad \square$$

4.2 Blatt 2

Problem 28. (Maß über $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere

$$\mu_\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}, \mu_\lambda(A) := \sum_{k \in A} \exp(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bestimmen Sie jeweils alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_\lambda)$ ein Maßraum ist.

(b) μ_λ ein endliches Maß ist.

(c) μ_λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Proof. (a) μ_λ ist auf jedem Fall für endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ wohldefiniert. Weil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ konvergiert (absolut) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, konvergiert absolut alle Teilfolge.

μ_λ ist auch trivialweise additiv.

(b) Das passt für $\lambda \in \mathbb{R}$

(c) Wir brauchen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)(\exp(\lambda) - 1) = 1,$$

oder

$$\exp(\lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Weil $\exp(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ immer positiv ist, gibt es nur eine reelle Lösung:

$$\lambda = \ln\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right].$$

□

Problem 29. (vollständiger Maßraum) Sei X eine nichtleere Menge, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\mu_B(A) := \mu(A \cap B)$.

(a) Zeigen Sie, dass μ_B ein Maß über $\mathcal{A}$ ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ ein vollständiger Maßraum, dann auch $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, dann auch $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$.

Proof. (a) In der Übungsblatt 1. haben wir schon bewiesen, dass es wohldefiniert ist.

Sei dann $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ eine Folge disjunkte Menge. Es gilt

$$\begin{aligned}\mu_B\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \mu\left(B \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)\\ &= \underbrace{\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B \cap A_i)}_{\sigma-\text{additivität von } \mu} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_B(A_i)\end{aligned}$$

μ_B ist dann σ-Additiv, und daher Maß.

(b) Ja. Sei $\mu(A) = 0$. Weil $A \cap B \subseteq A$ ist, gilt auch $\mu_B(A) = 0$. Weil $(X, \mathcal{A}, \mu_B)$ vollständig ist, ist jede Teilmenge $\mathcal{A} \ni A' \subseteq A$. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist dann vollständig.

(c) Nein. Sei $X = \{a, b, c\}, B = \{a\}, \mathcal{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$.

Sei auch $\mu(\{b, c\} \neq 0, \mu(X) \neq 0, \mu(\{a\}) \neq 0$. Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ trivialweise vollständig (es gibt keine Nullmenge), aber $\mu_B(\{b, c\}) = \mu(\{a\} \cap \{b, c\}) = \mu(\varnothing) = 0$. Deswegen ist $\{b, c\}$ eine Nullmenge in (X, A, μ_B), aber $\{b\} \subseteq \{b, c\} \notin \mathcal{A}$

□

Problem 30. (a) Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varnothing \in K_i$ für $i = 1,2$ und $\nu_i : K_i \to [0,\infty]$ mit $\nu_i(\varnothing) = 0$ für $i = 1,2$. Bezeichne nun mit μ_i^* die analog zu Satz 1.37 von ν_i induzierten äußeren Maße. Es existiere ein $\alpha > 0$, so dass

$$\forall I_1 \in K_1 \exists I_2 \in K_2 : I_1 \subseteq I_2 \text{ und } \alpha\nu_2(I_2) \leq \nu_1(I_1).$$

Zeigen Sie: Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\alpha\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$.

(b) Vervollständigen Sie den Beweis zu Satz 1.55: Zeigen Sie, dass

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ und } \lambda_a^*(A) \leq \lambda_r^*(A) \leq \lambda_n^*(A)$$

für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt.

Proof. (a) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine Überdeckung $(A_{1,j}), A_{1,j} \in K_1$, für die gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1,k} \supseteq A$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{1,k}) \leq \mu_1^*(A) + \epsilon$$

Es gibt auch per Hypothese eine Folge $(A_{2,k}), A_{2,k} \in K_2, A_{2,k} \supseteq A_{1,k}, \alpha\nu_2(A_{2,k}) \leq \nu_2(A_{1,k})$. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2,k} \supseteq A$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha\nu_2(A_{2,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_1(A_{2,k}) < \mu_1^*(A) + \epsilon$$

Weil das für alle ϵ gilt, ist $\alpha\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A)$

(b) Es existiert, für jede Elemente $(a,b) = J \in \mathbb{J}(n)$, ein Element $[a,b) \in \mathbb{J}_l(n) \supseteq (a,b)$, und es gilt $\mathrm{vol}_n([a,b)) \leq \mathrm{vol}_n((a,b))$. Für jede Elemente $[a,b) \in \mathbb{J}_l$ existiert auch $\overline{\mathbb{J}}(n) \ni [a,b] \supseteq [a,b)$, für die gilt $\mathrm{vol}_n([a,b]) \leq \mathrm{vol}_n([a,b))$. Daraus folgt die Behauptung:

$$\lambda_a^*(A) \leq \lambda_l^*(A) \leq \lambda_n^*(A) \text{ für alle } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ähnlich folgt die andere Teil. Man muss nur $(a,b]$ statt $[a,b)$ einsetzen, und alle Aussagen bleiben richtig. □

Problem 31. Zeigen Sie folgende Aussagen über das äußere Lebesgue-Maß:

(a) Es gilt $\lambda_n^*(A) = 0$ für alle abzählbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$mit $\lambda_n^*(B) = 0$. Dann gilt $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A)$.

(c) Es ist $\lambda_1^* ([0,1] \backslash \mathbb{Q}) = 1$.

(d) Es ist $\lambda_2^* (\mathbb{R} \times \{0\})$ =o

Proof. (a) Sei $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Sei auch

$$M_\epsilon = \left\{ \left(x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) | i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Für jede $\epsilon > 0$ ist M_ϵ eine Überdeckung von A. Es gilt auch:

$$\begin{aligned} \sum_{B \in M_\epsilon} \mathrm{vol}_n(B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n \left(\left(x_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Weil dann $\lambda_n^*(A) \leq \epsilon \forall \epsilon > 0$, ist $\lambda_n^*(A) = 0$.

(b) ...

(c) Weil $\{[0,1]\}$ eine Überdeckung von $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$ ist, ist $\lambda_1^* ([0,1] \backslash \mathbb{Q}) \leq 1$. Wegen subadditivität gilt $\lambda_1^*([0,1]) = 1 \leq \lambda_1^*([0,1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \lambda_1^*([0,1]) + \lambda_1^*(\mathbb{Q})$.Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gilt $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$ und daraus folgt $1 \leq \lambda_1^* ([0,1])$. Daher gilt $\lambda_1^* ([0,1]) = 1$

□

Chapter 5

Einfürung in die Algebra

5.1 Blatt 1

Problem 32. Sei $G := 2\mathbb{N}^* := \{2n | n \in \mathbb{N}^*\}$ die Menge der positiven geraden Zahlen. Wir nennen $a \in G$ *zerlegbar*, falls sich a als Produkt zweier Elemente aus G schreiben lässt. Ansonsten nennen wir a unzerlegbar. Beispielsweise sind 4 zerlegbar und 6 unzerlegbar. Zeigen Sie:

(a) G ist multiplikativ abgeschlossen.

(b) Jedes $a \in G$ lässt sich als Produkt unzerlegbarer Elemente aus G schreiben.

(c) Selbst wenn man die Reihenfolge der Faktoren nicht berücksichtigt, so ist die Zerlegung nach (b) im Allgemeinen nicht eindeutig.

Proof. (a) $2n \times 2n' = 4nn' = 2(nn')$

(b) Wir beweisen es per Induktion. Nehme an, dass jede Elemente $2n, n < k$ entweder unzerlegbar ist, oder als Produkt unzerlegbare Elemente aus G geschrieben werden kann. Für $2(1) = 2$ ist es klar - 2 ist unzerlegbar.

Sei $M_k \subseteq G = \{m \in G | \exists n \in G, mn = 2k\}$

Entweder ist $M = \varnothing$, also k ist unzerlegbar, oder es existiert $m, n \in G, mn = 2k$. Weil m und n ein Produkt unzerlegbarer Elemente aus G sind, ist $2k$ auch ein Produkt unzerlegbarer Elemente.

(c) Gegenbeispiel:

$$G \ni 1020 = 30 \times 34 = 102 \times 10.$$

□

Problem 33. In dieser Aufgabe stellen wir den Euklidischen Algorithmus zur Berechung des größten gemeinsamen Teilers vor. Seien hierzu zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \neq 0$ vorgelegt. Wir setzen $r_0 := a, r1 := b$ und rekursiv für alle $i \in \mathbb{N}^*$ mit $r_i \neq 0$.

$$r_{i+1} := \text{ Rest von } r_{i-1} \text{ bei der Division durch } r_i$$

(a) Zeigen Sie, dass es ein $n \geq 2$ mit $r_n = 0$ gibt.

Da die Rekursionsformel für $i = n$ nicht mehr anwendbar ist, bricht die Folge (r_i) der Reste beim Index n ab. Daher gibt es nur genau einen Index $n \geq 2$ mit $r_n = 0$. Beweisen Sie nun:

(b) Für alle $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ gilt $ggT(a, b) = ggT(r_{i-1}, r_i)$.

(c) Es ist $ggT(a, b) = r_{n-1}$.

(d) Berechnen Sie $ggT(210, 45)$ mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus.

Proof. (a)

$$r_{i-1} = qr_i + r_{i+1} \qquad 0 \leq r_{i+1} < r_i$$

per Definition. Weil $r_{i-1} < r_i$, ist die Folge monoton fallend. Da es endlich viele natürliche Zahlen $k < b$ gibt, muss $r_n = 0$.

(b) Wir beweisen:

$$ggT(r_{i-1}, r_i) = ggT(r_i, r_{i+1}).$$

Die gewünschte Ergebnisse folgt daraus per Induktion.

Es gilt $r_{i-1} - qr_i = r_{i+1}$. Dann folgt: $ggT(r_{i-1}, r_i)$ teilt r_{i-1} und r_i und daher auch $r_{i-1} - qr_i$. Deshalb ist $ggT(r_{i-1}, r_i)$ auch einen Teiler von $r_{i+1} \implies ggT(r_{i-1}, r_i) \leq ggT(r_i, r_{i+1})$.

Weil $r_{i-1} = qr_i + r_{i+1}$, ist $ggT(r_i, r_{i+1})$ einen Teiler von r_i und r_{i+1} und daher auch von $qr_i + r_{i+1}$. Deshalb ist es auch einen Teiler von r_{i-1}, und $ggT(r_i, r_{i+1}) \leq ggT(r_{i-1}, r_i)$

(c) Es gilt

$$r_{n-2} = qr_{n-1} + \cancel{r_n},$$

also r_{n-1} teilt r_{n-2}. Daraus folgt

$$ggT(r_{n-1}, r_{n-2}) = r_{n-1} = ggT(a, b).$$

(d)

$$\begin{aligned} 210 &= 4 \times 45 + 30 \\ 45 &= 1 \times 30 + 15 \\ 30 &= 2 \times 15 + 0 \\ 15 & \\ 0 & \end{aligned}$$

$$ggT(210, 45) = 15.$$

$\square$

Problem 34. (Bonus Problem) Wir wissen von dem Lemma von Bezout, dass für jeder $x, y, \in \mathbb{N}$ es $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$ax + by = ggT(x, y).$$

Zum Beispiel ist $-210 + 5 \times 45 = 15$. Kann man von das Euklidische Algorithmus die Zahlen a, b rechnen?

Proof. Wir berechnen zuerst eine andere Beispiel

$$\begin{aligned}
427 =& 1 \times 264 + 163\\
264 =& 1 \times 163 + 101\\
163 =& 1 \times 101 + 62\\
101 =& 1 \times 62 + 39\\
62 =& 1 \times 39 + 23\\
39 =& 1 \times 23 + 16\\
23 =& 1 \times 16 + 7\\
16 =& 2 \times 7 + 2\\
7 =& 3 \times 2 + 1\\
2 =& 1 \times 2 + 0
\end{aligned}$$

Wir kehren zurück:

$$\begin{aligned}
7 - 1 =& 3 \times 2\\
3 \times 16 =& 6 \times 7 + 3 \times 2\\
=& 6 \times 7 + (7 - 1)\\
=& 7 \times 7 - 1\\
6 \times 16 =& 14 \times 7 - 1\\
6 \times 16 + 1 =& 14 \times 7\\
14 \times 23 =& 14 \times 16 + 14 \times 7\\
=& 14 \times 16 + (6 \times 16 + 1)\\
=& 20 \times 16 + 1
\end{aligned}$$

In der letzte Gleichung bleibt $ggT(427, 264)$ (1). Wir setzen immer wieder ein, bis zu wir eine Gleichung des Forms $427a + 264b = 1$ haben □

Problem 35. Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Für welche Zahlen $\mathbb{N} \ni a, b < k$ braucht das Euklidische Algorithismus die meiste Schritte?

Proof. Wir möchten, dass die Folge $r_n \to 0$ nicht so schnell.

$$\begin{aligned}
13 &= 1 \times 8 + 5 \\
8 &= 1 \times 5 + 3 \\
5 &= 1 \times 3 + 2 \\
3 &= 1 \times 2 + 1 \\
2 &= 1 \times 2 + 0 \\
1 & \\
0 &
\end{aligned}$$

ist die Fibonacci Folge. □

Problem 36. Seien p und q zwei ungerade und aufeinanderfolgende Primzahlen, so dass also zwischen p und q keine weiteren Primzahlen existieren. Zeigen Sie, dass $p + q$ ein Produkt von mindestens drei (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen ist.

Proof. Sei obdA $p < q$. Weil p und q ungerade sind, ist $p + q$ gerade, also $p + q = 2k, k \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass $p + q$ ein Produkt von zwei Primzahlen ist, also $k \in \mathbb{P}$. Dann gilt

$$p < k < q, \qquad k \in \mathbb{P},$$

ein Widerspruch. Deshalb ist $k \notin \mathbb{P}$ und k ist ein Produkt von mindestens zwei Primzahlen, also $p + q$ ist ein Produkt von mindestens drei Primzahlen. □

Problem 37. Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es genau dann ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $ax \equiv 1 \pmod{n}$ gibt, wenn $ggT(a, n) = 1$ gilt.

Proof. $ax \equiv 1 \pmod{n} \iff ax - 1 = kn, k \in \mathbb{Z}$, also $ax - kn = 1$.

Weil $ggT(a, n) = 1$, gibt es so zwei Zahlen $a, -k$, so dass $ax - kn = 1$ (Lemma von Bezout) □

Chapter 6

Theoretische Mechanik

6.1 Blatt 1

Problem 38. Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in einer Dimension, d. h. das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} =& F(x(t)) = -kx(t) \\ x(t_0) =& x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =& v_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, daß wenn eine komplexwertige Funktion $z : I \to \mathbb{C}$ mit $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ die Differentialgleichung (1a) löst, ihr Realteil $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ zur Lösung des reellen Anfangswertproblems (1) benutzt werden kann.

2. Was ist die allgemeinste Form der rechten Seite der Differentialgleichung (1a), für die der Realteil einer komplexen Lösung selbst eine Lösung ist? Geben Sie Gegenbeispiele an.

3. Machen Sie den üblichen Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten...

Proof. 1. Sei $x(t) = x_r(t) + ix_i(t), x_r, x_i : I \to \mathbb{R}$.
Dann gilt

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t^2} + i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\right) = -k(x_r + ix_i).$$

Weil das eine Gleichung von zwei komplexe Zahlen ist, gilt auch

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t^2} = -kx_r.$$

2. Das passt für alle reelle lineare Kombinationen der Ableitungen von $x(t)$.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i x}{\mathrm{d}t^i} = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Gegenbeispiele

(i) Irgendeine $a_i \notin \mathbb{R}$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -ikx(t), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Hier ist es klar, dass *keine* Abbildung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung sein kann, weil die linke Seite reelle wird, aber die rechte Seite nicht reelle wird.

Daraus folgt: Das Realteil der Lösung ist kein Lösung.

(ii) Nichtlineare Gleichung, z.B.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

3.

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 \alpha e^{\lambda t}$$

Dann

$$m\cancel{\alpha}\lambda^2\cancel{e^{\lambda t}} = -k\cancel{\alpha}\cancel{e^{\lambda t}}$$
$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$
$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega \qquad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Daraus folgt, für $z_1(t)$:

$$\begin{aligned}
z_1(0) =& \alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = x_0 \\
z_1'(0) =& -i\omega\alpha_{1,+} + i\omega\alpha_{1,-} = v_0 \\
& -\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = -\frac{iv_0}{\omega} \\
2\alpha_{1,-} =& x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \\
2\alpha_{1,+} =& x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \\
z_1(t) =& \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t} + \left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{i\omega t}\right]
\end{aligned}$$

Daraus folgt die andere Formen der Lösungen:

(i) $x_2(t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t} + \left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{i\omega t}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega}\right)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + i(\dots)\right] \\
&= x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t
\end{aligned}$$

(ii) $x_3(t)$ (R-Formula)

$$x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = \alpha_3\sin(\omega t + \delta_3)$$
$$\alpha_3 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$
$$\delta_3 = \arctan\frac{v_0}{x_0\omega}$$

(iii) $x_4(t)$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_4 = \alpha_3 \qquad \delta_4 = \delta_3 + \frac{\pi}{2}.$$

□

Problem 39. Betrachten Sie den gedämpften und getriebenen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit dem Anfangswertproblem

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(x(t), \dot{x}(t), t) = -kx(t) - 2m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_{ext}(t)$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \in \mathbb{R}$$

1. Lösen sie das Anfangswertproblem zunächst für verschwindende äußere Kraft $F_{ext} \equiv 0$. Machen Sie dazu wieder den üblichen Exponentialansatz

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}$$

und behandeln Sie auch den Fall $\gamma^2 = k/m$

2. Lösen sie das Anfangswertproblem für eine harmonische äußere Kraft $F_{ext}(t) = F_0 sin(\omega_0 t)$ indem Sie zur soeben gefundenen Lösung der homogenen Differentialgleichung noch eine Partikularlösung mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite "$x(t) = Asin(\omega_0 t) + Bcos(\omega_0 t)$" addieren. Auch hier empfiehlt es sich, Kraft und Ansatz zu komplexifizieren:

$$\begin{aligned} F_{ext}(t) =& F_0 \sin(\omega_0 t) \to F_0 e^{-i\omega_0 t} \\ x(t) =& A \sin(\omega_0 t) \to A e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie anhand der Lösungen, daß die Energie

$$E(t) = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2(t)$$

für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ und äußere Kraft $F_{ext} \equiv 0$ erhalten ist und diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit von $E(t)$ als Funktion von γ im allgemeinen Fall. Berücksichtigen Sie insbesondere eine harmonische äußere Kraft $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$.

Proof. 1.

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) &= \alpha \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \alpha \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} m\lambda^2 \cancel{\alpha e^{\lambda t}} =& - k\cancel{\alpha e^{\lambda t}} - 2m\gamma\lambda\cancel{\alpha e^{\lambda t}} \\ 0 =& m\lambda^2 + 2m\gamma\lambda + k \\ \lambda =& -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Falls $\gamma^2 \neq \frac{k}{m}$:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}t}\right],$$

$$\begin{aligned} x'(t) =& -\gamma e^{-\gamma t}\left[Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}t}\right] \\ &+ e^{-\gamma t}\left[A\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}e^{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}t} - B\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}e^{-\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}t}\right] \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
x(0) &= A + B = x_0 \\
x'(0) &= \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}\,(A - B) = v_0 \\
2A &= x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}} \\
2B &= x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}}
\end{aligned}
$$

Es ist zu beachten, dass es möglich ist, dass $\gamma^2 < \frac{k}{m}$. In diesem Fall ist $\sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}$, aber der Form der Lösung bleibt.

Für $\gamma^2 = \frac{k}{m}$ ist die Lösung

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}.$$

Es gilt

$$x'(t) = -\gamma Ae^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} - Bt\gamma e^{-\gamma t}.$$

Dann

$$
\begin{aligned}
x(0) =& A = x_0 \\
x'(0) =& -\gamma A + B = v_0 \\
B =& v_0 + \gamma x_0 \\
x(t) =& x_0 e^{-\gamma t} + (v_0 + \gamma x_0) te^{-\gamma t}
\end{aligned}
$$

2. Wir suchen eine Partikularlösung für die Gleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F_0 e^{-i\omega_0 t}$$

mit dem Form

$$x(t) = Ae^{-i\omega_0 t}.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
x'(t) =& -i\omega_0 Ae^{-i\omega_0 t} \\
x''(t) =& -\omega_0^2 Ae^{-i\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$-\omega_0^2 Ame^{-i\omega_0 t} - 2m\gamma i\omega_0 Ae^{-i\omega_0 t} + Ake^{-i\omega_0 t} = F_0 e^{-i\omega_0 t},$$

$$A = \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k}.$$

3. für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ und äußere Kraft $F_{\text{ext}} \equiv 0$ ist die Lösung
$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \qquad \omega = \sqrt{k/m}.$$
Wir berechnen
$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t.$$
Dann gilt
$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 =& \frac{m}{2}\left(-x_0\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t\right)^2 \\
=& \frac{m}{2}\left(x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t - 2x_0 v_0 \omega \sin \omega t \cos \omega t + v_0^2 \cos^2 \omega t\right) \\
=& \overset{k/2}{\cancel{\frac{m}{2\omega^2}}}\left(x_0^2 \sin^2 \omega t - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t\right) \\
=& \frac{k}{2}\left(x_0^2(1 - \cos^2 \omega t) - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2}\left(1 - \sin^2 \omega t\right)\right)
\end{aligned}$$
Aus
$$\frac{k}{2} x(t)^2 = \frac{k}{2}\left(x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t\right)$$
folgt
$$\begin{aligned}
E(t) =& \frac{k}{2}\left(x_0^2(1 - \cos^2 \omega t) - \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2}\left(1 - \sin^2 \omega t\right)\right) \\
&+ \frac{k}{2}\left(x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{2x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t\right) \\
=& \frac{k}{2} x_0^2 + \frac{k v_0^2}{2\omega^2},
\end{aligned}$$
was nicht abhängig von t ist.

Wir untersuchen jetzt die Energie für eine harmonische äußere Kraft. Wenn die Dämpfung $\neq 0$ ist, ist
$$\lim_{t \to \infty}\left(x_h(t) + x_p(t)\right) = \lim_{t \to \infty} x_p(t).$$
Daher muss man nur die Energie der Partikularlösung berechnen:
$$\begin{aligned}
x(t) =& \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i \omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t} \\
\dot{x}(t) =& -\frac{i F_0 \omega_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i \omega_0 + k} e^{-i\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Wenn $\gamma = 0$, kann $x(t) \to \infty$, wenn

$$-m\omega_0^2 + k = 0 \qquad \text{(Resonanz)}.$$

Das bedeutet $E(t) \to \infty$ auch.

$\square$