

Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 15, 2024)

Problem 1. Betrachten Sie die folgenden 3×3 -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ -1+i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die adjungierten Abbildungen A^* und B^* .
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B .
- (c) Überprüfen Sie, dass sich aus den Eigenvektoren der Matrix A eine Orthonormalbasis des \mathbb{C}^3 mit Standardskalarprodukt bauen lässt. Führen Sie das selbe auch mit Matrix B durch.
- (d) Bestimmen Sie unitäre Matrizen $U, V \in M_3(\mathbb{C}^3)$, sodass UAU^* und VBV^* diagonal sind. Können Sie zudem erreichen, dass U und V orthogonal sind?

Proof. (a)

$$A^* = A, \quad B^* = \begin{pmatrix} 1-i & -1-i & 0 \\ 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

(b) A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}
&= (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) - (1 - \lambda) + (\lambda - 1) \\
&= (2 - \lambda)^3 - (2 - \lambda) - 2 + 2\lambda \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\lambda = 1$ ein Nullstelle des Polynoms. Es gilt

$$\begin{aligned}
-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4) \\
&= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)
\end{aligned}$$

also die Eigenwerte von A sind 1 und 4.

Ähnlich für B :

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - i - \lambda & -1 - i & 0 \\ 1 + i & 1 - i - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 3(1 - i)\lambda^2 + 4i\lambda \\
&= -\lambda(\lambda - (1 - i))(\lambda - (2 - 2i))
\end{aligned}$$

also die Eigenwerte sind 0, $1 - i$ und $2 - 2i$.

(c) Wir berechnen die Eigenvektoren:

Für A :

$$\begin{aligned}
\text{EW} = 4 &: (1, 1, 1)^T \\
\text{EW} = 1 &: (-1, 0, 1)^T \\
\text{EW} = 1 &: (-1, 1, 0)^T
\end{aligned}$$

Die Eigenräume für die Eigenwerte 4 und 1 sind schon orthogonal. Im Eigenraum $\text{EW}=1$ können wir den Gram-Schmidt-Algorithmus durchführen, da lineare Kombinationen von Eigenvektoren mit gleichen Eigenwerte noch Eigenvektoren sind. Eine Orthonormalbasis ist dann

$$\begin{aligned}
\text{EW} = 4 &: \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T \\
\text{EW} = 1 &: \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T \text{ und}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^T$$

Die Eigenvektoren von B sind

$$\text{EW} = 0 : (i, 1, 0)^T$$

$$\text{EW} = 1 - i : (0, 0, 1)^T$$

$$\text{EW} = 2 - 2i : (-i, 1, 0)^T$$

Die Vektoren sind schon orthogonal, also wir normalisieren die Vektoren, um eine Orthonormalbasis zu bekommen.

$$\text{EW} = 0 : \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1, 0)^T$$

$$\text{EW} = 1 - i : (0, 0, 1)^T$$

$$\text{EW} = 2 - 2i : \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1, 0)$$

- (d) Wir schreiben die Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A als die Zeilen der Matrix U .

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ähnlich für V :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

U ist schon orthogonal. V ist unitär und kann nicht orthogonal werden. □

Problem 2. Betrachten Sie die reelle Matrix

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass P ein Orthogonalprojektor bezüglich des Standardskalarprodukts ist.
- (b) Bestimmen Sie den Rang von P .

- (c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Bildes und des Kerns von P sowie den Basiswechsel O von der Standardbasis auf diese Basis.
- (d) Verifizieren Sie, dass O orthogonal ist, Können Sie einen solchen orthonormalen Basiswechsel finden, dass $\det O = 1$ gilt?

Proof. (a) Schritt 1: P ist ein Projektor. Durch direktes Rechnung:

$$P^2 = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = P.$$

Da $P^* = P$, ist P ein Orthogonalprojektor nach Proposition 7.79.

(b)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 5} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_3 \times 5} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Rang ist 2.

- (c) Eine Basis des Bildes ist die erste 2 Spalten, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir ergänzen es bis eine Basis für den ganzen Vektorraum:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus ergibt sich eine Orthonormalbasis durch den Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die ersten 2 Vektoren sind eine Orthonormalbasis des Bildes, der dritte eine Orthonormalbasis des Kerns. Der Basiswechselmatrix ist

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(d)

$$OO^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & \sqrt{\frac{2}{15}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 1).$$

Er hat schon Determinante 1. Sonst könnten wir die erste zwei Spalten vertauschen.

□

Problem 3. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Jede Matrix $P \in M_n(\mathbb{C})$ mit $P^2 = P$ ist ein Orthogonalprojektor bezüglich eines *geeigneten* Skalarprodukts auf V .
- (b) Eine invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal für ein geeignet gewähltes Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

Proof. (a) Da P ein Projektor ist, ist $\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \text{im } P$. Die Frage ist: Können wir uns für ein Skalarprodukt entscheiden, so dass $\ker P = (\text{im } P)^\perp$?

Wir entscheiden uns für eine Basis von $\ker P$ bzw. von $\text{im } P$, was wir mit $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ bezeichnen. Sei die Matrix A^{-1} so definiert: Die Spalten sind die Basisvektoren von $\ker P$ bzw. $\text{im } P$. Dann schickt A die Basisvektoren nach der Standardbasis. Wir definieren dann $B = A^T A$. Wir definieren dann ein Skalarprodukt $\langle v_1, v_2 \rangle = (v_1)^T B v_2$, was noch ein Skalarprodukt ist, da B positiv definit ist.

Es gilt dann, für $b_i \neq b_j$:

$$\begin{aligned} \langle b_i, b_j \rangle &= (b_i)^T B b_j \\ &= (b_i)^T A^T A b_j \\ &= (A b_i)^T (A b_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass die Standardbasis bzgl. des Standardskalarprodukts orthonormal ist. Daraus folgt, dass $\ker P = (\operatorname{im} P)^\perp$ bzgl. dieses Standardskalarprodukts, also nach Proposition 7.79 ist P ein Orthogonalprojektor.

(b) Falsch. Sei $n = 1$ und Endomorphismus $Ax = 2x$, dann ist

$$\langle 2x, 2x \rangle = 4 \langle x, x \rangle \neq \langle x, x \rangle$$

unabhängig vom Wahl von x .

□

Problem 4. Seien V, W euklidische Vektorräume und A eine lineare Abbildung $V \rightarrow W$.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

- i. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\langle v_1, v_2 \rangle_V = 0 \implies \langle Av_1, Av_2 \rangle_W = 0$.
- ii. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $\|v_1\|_V = \|v_2\|_V \implies \|Av_1\|_W = \|Av_2\|_W$.
- iii. Es existieren eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Isometrie $\Phi : V \rightarrow W$ mit $A = \alpha\Phi$.

(b) Zeigen Sie, dass es genau dann Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, sodass

$$C_1 \langle v_1, v_2 \rangle_V \leq \langle Av_1, Av_2 \rangle_W \leq C_2 \langle v_1, v_2 \rangle_V$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt, wenn $A = \alpha\Phi$ für eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Isometrie $\Phi : V \rightarrow W$ erfüllt ist. Bestimmen Sie die bestmöglichen Parameter C_1 und C_2 .

Proof. (a) Der Plan ist: (i) \iff (iii) \iff (ii).

Angenommen (i). Sei $v_1, v_2 \in V$, so dass $\langle v_1, v_2 \rangle = k$. Sei $U = \operatorname{span} v_1$, was ein Orthogonalkomplement hat. Also wir zerlegen $v_2 = k_1 v_1 + v'_2$, wobei v'_2 senkrecht auf v_1 liegt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, k_1 v_1 + v'_2 \rangle \\ &= k_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v'_2 \rangle \\ &= k_1 \langle v_1, v_1 \rangle \\ \langle Av_1, Av_2 \rangle &= \langle Av_1, k_1 Av_1 + Av'_2 \rangle \\ &= k_1 \langle Av_1, Av_1 \rangle + \langle Av_1, Av'_2 \rangle \\ &= k_1 \langle Av_1, Av_1 \rangle \end{aligned} \quad \text{(i) angenommen}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle Av_1, Av_2 \rangle &= \langle \alpha \Phi v_1, \alpha \Phi v_2 \rangle \\ &= \alpha^2 \langle \Phi v_1, \Phi v_2 \rangle \\ &= \alpha^2 \langle v_1, v_2 \rangle\end{aligned}\quad \Phi \text{ ist Isometrie}$$

also $C_1 = C_2 = \alpha^2$, und wir haben Gleichheit.

□