Übungsaufgaben

Aufgabe A) Mittelwerte

Auf den Chipkarten von 20 Studierenden sind die Guthaben in € folgendermaßen verteilt:

14	18	17	13	10	10	13	13	19	11
17	12	16	13	18	19	11	13	11	15

Gesucht sind folgende Werte ohne Fehlerangabe, aber in sinnvoller Stellenzahl:

	1. Abgabe		2. Abgabe	
1. Modus oder Modalwert				
2. Median				
3. Mittelwert				
4. Spannweite				

Was ist eine physikalische Größe?

Übungsaufgaben

Wir erinnern uns:

Physikalische Größe =
*Zahlenwert * Einheit*

oder symbolisch

$$G = \{G\} * [G]$$

Übungsaufgaben

Aufgabe A) Mittelwerte

Auf den Chipkarten von 20 Studierenden sind die Guthaben in € folgendermaßen verteilt:

14	18	17	13	10	10	13	13	19	11
17	12	16	13	18	19	11	13	11	15

Gesucht sind folgende Werte ohne Fehlerangabe, aber in sinnvoller Stellenzahl:

	1. Abgabe		2. Abgabe	
1. Modus oder Modalwert				
2. Median				
3. Mittelwert				
4. Spannweite				

Was ist eine physikalische Größe?

Wie viele signifikante Stellen beim Mittelwert?

Übungsaufgaben

Wir erinnern uns:

Zusammengefasst gelte folgende <u>Konvention</u>:

Ist der Fehler geschätzt:
E I N E signifikante Stelle.

Ist der Fehler berechnet
(Fehlerrechnung oder Messreihe):
Z W E I signifikante Stellen.

Übungsaufgaben

Aufgabe A) Mittelwerte

Auf den Chipkarten von 20 Studierenden sind die Guthaben in € folgendermaßen verteilt:

14	18	17	13	10	10	13	13	19	11
17	12	16	13	18	19	11	13	11	15

Gesucht sind folgende Werte ohne Fehlerangabe, aber in sinnvoller Stellenzahl:

	1. Abgabe		2. Abgabe	
1. Modus oder Modalwert				
2. Median				
3. Mittelwert				
4. Spannweite				

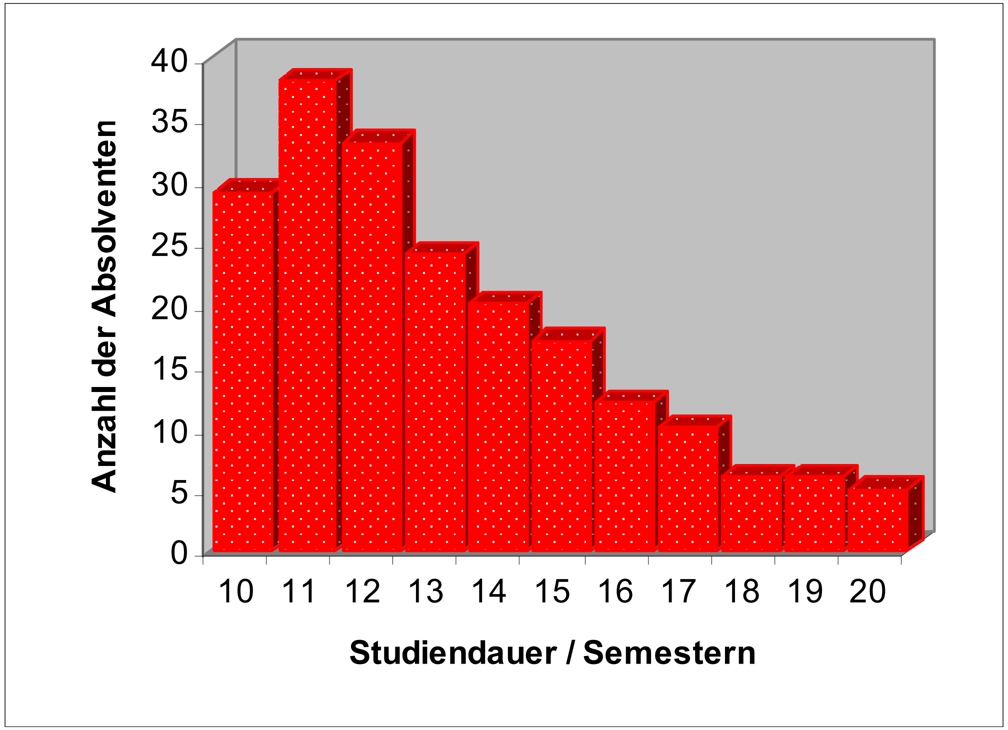
Was ist eine physikalische Größe?

Wie viele signifikante Stellen beim Mittelwert?

Standardabweichung ≈ Spannweite / 4 = 2,25 €

Standardfehler = Standardabweichung/$\sqrt{20}$ ≈ 0,50 €

Beispiel: Studiendauer Diplom



Semester	Anzahl
10	29
11	38
12	33
13	24
14	20
15	17
16	12
17	10
18	6
19	6
20	5

Die meisten der Studenten machen die Diplomprüfung nach 11 Semestern (Modus).

Die mittlere Studiendauer ist 12,5 Semester (Median).

Liegt der Median zwischen zwei ganzen Zahlen, wird gemittelt, z.B. 12,5 Semester (Es gibt detailliertere Regeln).

Der Mittelwert der Studiendauer ist 13,2 Semester (Mittelwert – Mean)

Spannweite der Verteilung: Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert.

Übungsaufgaben

Aufgabe B) Messung der Lichtgeschwindigkeit

Im physikalischen Grundpraktikum wird die Lichtgeschwindigkeit gemessen.
Die ermittelten Messwerte sind in Tausend Kilometer/ Sekunde angegeben:

302,85	297,23	300,08	297,23	299,05
299,02	298,89	296,36	301,02	295,69
301,84	299,44	303,95	296,22	297,35

Beantworten Sie folgende Fragen:

	1. Abgabe		**2. Abgabe**	
Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit mit Standardfehler?				
Ist der gemessene Wert im Rahmen seines Standardfehlers mit dem Literaturwert c = 299 792 458 m/s vereinbar?	JA ☐ NEIN ☐		JA ☐ NEIN ☐	
Ist der gemessene Wert im Rahmen seiner Standardabweichung mit dem Literaturwert c = 299 792 458 m/s vereinbar?	JA ☐ NEIN ☐		JA ☐ NEIN ☐	

Übungsaufgaben

Aufgabe B) Messung der Lichtgeschwindigkeit

Im physikalischen Grundpraktikum wird die Lichtgeschwindigkeit gemessen.
Die ermittelten Messwerte sind in Tausend Kilometer/ Sekunde angegeben:

302,85	297,23	300,08	297,23	299,05
299,02	298,89	296,36	301,02	295,69
301,84	299,44	303,95	296,22	297,35

Berechnung des Mittelwertes von *c*:

$$\bar{c} = 299{,}0813 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Berechnung der Stichprobenstandardabweichung:

$$s_c = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(c_i - \bar{c})^2} \qquad (n = 15)$$

Berechnung des Standardfehlers:

$$s_{\bar{c}} = \frac{s_c}{\sqrt{15}}$$

Übungsaufgaben

Aufgabe B) Messung der Lichtgeschwindigkeit

Im physikalischen Grundpraktikum wird die Lichtgeschwindigkeit gemessen.
Die ermittelten Messwerte sind in Tausend Kilometer/ Sekunde angegeben:

302,85	297,23	300,08	297,23	299,05
299,02	298,89	296,36	301,02	295,69
301,84	299,44	303,95	296,22	297,35

Berechnung des Mittelwertes von *c*:

$$\bar{c} = 299{,}0813 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Berechnung der Stichprobenstandardabweichung:

$$s_c = 2{,}49841626 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Berechnung des Standardfehlers:

$$s_{\bar{c}} = 0{,}6450833 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Übungsaufgaben

Aufgabe B) Messung der Lichtgeschwindigkeit

Im physikalischen Grundpraktikum wird die Lichtgeschwindigkeit gemessen.
Die ermittelten Messwerte sind in Tausend Kilometer/ Sekunde angegeben:

302,85	297,23	300,08	297,23	299,05
299,02	298,89	296,36	301,02	295,69
301,84	299,44	303,95	296,22	297,35

Beantworten Sie folgende Fragen:

	1. Abgabe		**2. Abgabe**	
Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit mit Standardfehler?	$(299{,}08 \pm 0{,}65) \cdot 10^3 \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$			
Ist der gemessene Wert im Rahmen seines Standardfehlers mit dem Literaturwert c = 299 792 458 m/s vereinbar?	JA ☐ NEIN ☐		JA ☐ NEIN ☐	
Ist der gemessene Wert im Rahmen seiner Standardabweichung mit dem Literaturwert c = 299 792 458 m/s vereinbar?	JA ☐ NEIN ☐		JA ☐ NEIN ☐	

Übungsaufgaben

Aufgabe C) Schwingungsdauer

Mit viel Übung sind wir in der Lage, Zeiten (z.B. die Schwingungsdauer eines Pendels) mit einer Unsicherheit (Standardfehler bei der Zeitmessung von Schwingungen) von 0,10 s zu messen.
*Wie groß sind dann die Schwingungsdauer τ und der absolute Fehler **einer Pendelschwingung**, wenn wir bei der Messung von n Schwingungen folgende Zeiten erhalten? Berechnen Sie zusätzlich den relativen Fehler!*

		1. Abgabe			**2. Abgabe**		
n	T_n/s	τ/s	Relativer Fehler/ %		τ/s	Relativer Fehler/ %	
3	1,10	±			±		
7	2,50	±			±		
24	8,50	±			±		

Standardfehler – Konkretes Beispiel

Nummer	Zeit/s
1	10,1
2	10,1
3	10,2
4	10,2
5	10,1
6	10,1
7	10,2
8	10,2
9	10,1
10	10,1

$$\overline{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = 10{,}140\,\mathrm{s}$$

$$s_t = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \overline{t}\right)^2} = 0{,}05163978\,\mathrm{s}$$

$$s_{\overline{t}} = \frac{s_t}{\sqrt{n}} = 0{,}0163299\,\mathrm{s}$$

$$\overline{t} = \left(10{,}140 \pm 0{,}016\right)\mathrm{s}$$

Standardfehler – Konkretes Beispiel

Nummer	Zeit/s
1	10,1
2	10,1
3	10,2
4	10,2
5	10,1
6	10,1
7	10,2
8	10,2
9	10,1
10	10,1

$$\overline{t} = (10{,}140 \pm 0{,}016)\,\mathrm{s}$$

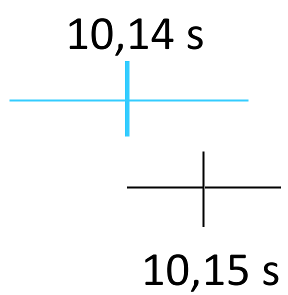
Annahme: Wir messen nicht 10 mal eine Schwingung, sondern einmal 10 Schwingungen.

$$T_{10} = 101{,}5\ \mathrm{s} \qquad \tau = 10{,}150\ s$$

$$\Delta\tau = 0{,}10 / 10\ s = 0{,}010\, s$$

$$\tau = (10{,}150 \pm 0{,}010)\,\mathrm{s}$$

Sind die beiden Messungen miteinander vereinbar ?



Die beiden Messwerte überlappen im Rahmen ihrer Fehlerbalken, also die Messungen sind miteinander vereinbar.

Übungsaufgaben

Aufgabe C) Schwingungsdauer

Mit viel Übung sind wir in der Lage, Zeiten (z.B. die Schwingungsdauer eines Pendels) mit einer Unsicherheit (Standardfehler bei der Zeitmessung von Schwingungen) von 0,10 s zu messen.
Wie groß sind dann die Schwingungsdauer τ und der absolute Fehler **einer Pendelschwingung**,
wenn wir bei der Messung von n Schwingungen folgende Zeiten erhalten? Berechnen Sie zusätzlich den relativen Fehler!

		1. Abgabe			**2. Abgabe**		
n	T_n/s	τ/s	Relativer Fehler/ %		τ/s	Relativer Fehler/ %	
3	1,10	±			±		
7	2,50	±			±		
24	8,50	±			±		

$$\tau = \frac{8,5\,s}{24} = 0,354166666..\,s$$

$$\tau = \frac{T_n}{n}$$

$$\Delta\tau = ???????$$

Übungsaufgaben

Diese Schwingungsdauer ist sicher genauer bestimmt als wenn wir den Mittelwert aus 24 gemessenen Einzelschwingungen nehmen, bei der jede Messung auf 0,1 s genau ist.

Wenn wir die Zeit T_{24} für 24 Schwingungen messen, dann ist die Genauigkeit der 24 Schwingungen 0,1 s. Das bedeutet, eine Schwingung ist auf

$$s_{\bar{\tau}} = \frac{0{,}1}{24}\,\mathrm{s} = 0{,}00416666\,\mathrm{s}$$

genau gemessen.

Dies ist der Grund, warum bei einer Fehlerberechnung die Unsicherheit auf zwei signifikante Stellen angegeben wird, obwohl die Ausgangsgröße nur auf eine signifikante Stelle geschätzt wurde.

Übungsaufgaben

Aufgabe C) Schwingungsdauer

Mit viel Übung sind wir in der Lage, Zeiten (z.B. die Schwingungsdauer eines Pendels) mit einer Unsicherheit (Standardfehler bei der Zeitmessung von Schwingungen) von 0,10 s zu messen.
Wie groß sind dann die Schwingungsdauer τ und der absolute Fehler ***einer Pendelschwingung****,*
wenn wir bei der Messung von n Schwingungen folgende Zeiten erhalten? Berechnen Sie zusätzlich den relativen Fehler!

		1. Abgabe			**2. Abgabe**		
n	T_n/s	τ/s	Relativer Fehler/ %		τ/s	Relativer Fehler/ %	
3	1,10	±			±		
7	2,50	±			±		
24	8,50	±			±		

Was ist ein relativer Fehler?

Wir erinnern uns:

$$E = (\, x \pm \Delta x \,)$$

x: Schätzwert oder Bestwert
Δx: Messungenauigkeit oder Messabweichung
$\Delta x/x$: Relativer Fehler

Übungsaufgaben

Aufgabe D) Standardfehler

Nach mehrmaliger Messung der Lichtgeschwindigkeit c zieht ein Student den Schluss, dass die Standardabweichung $\sigma_c = 12$ m/s ist.
Nimmt man an, dass alle auftretenden Abweichungen zufällig sind, dann kann der Student formal die Unsicherheit (Standardfehler) bei der Angabe seines Ergebnisses verringern, wenn er nur genug Messungen durchführt und den Erwartungswert (arithmetischer Mittelwert) berechnet.
Wie viele Messungen sind nötig, um die folgenden Unsicherheiten bei der Angabe des Erwartungswerts zu erzielen?

Standardfehler	1. Abgabe		2. Abgabe	
5,0 m/s				
0,60 m/s				

Wir erinnern uns:

$$s_{\bar{c}} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{n}}$$

Fragestunde

Falls es zur Fragen/Unklarheiten gibt:

Fragen Sie Ihren Betreuer!

Studentenbüro Öffnungszeiten:

Mo: 11 bis 13 Uhr

Di – Do : 11 bis 12 Uhr

neu! Fr: 11 bis 13 Uhr neu!

Wie bestimme ich den Fehler einer physikalischen Größe, die mittels mehrerer Einzelmessungen bestimmt wurde?

Fehlerfortpflanzung nach Größtfehler

Die wenigsten physikalischen Größen werden direkt, sondern meist mittels mehrerer Einzelmessungen bestimmt

Wie gehen die Fehler dieser Einzelmessungen in das Endergebnis ein ?

$$p = m \cdot v$$

$$m = (0{,}623 \pm 0{,}014)\ \mathrm{kg}$$

$$v = (9{,}12 \pm 0{,}31)\ \mathrm{m/s}$$

Bestwert: *p* = 5,68176 kg m/s

Wie groß ist der Fehler des Impulses?

Fehlerfortpflanzung nach Größtfehler

Wie groß ist der Fehler des Impulses?

Größter Wert des Impulses im Rahmen der Fehlergrenzen der Einzelmessungen

$$p = m \cdot v = (0{,}623 + 0{,}014) \cdot (9{,}12 + 0{,}31)\ kg\ m/s = 6{,}00691\ \mathrm{kg\ m/s}$$

Kleinster Wert des Impulses im Rahmen der Fehlergrenzen der Einzelmessungen

$$p = m \cdot v = (0{,}623 - 0{,}014) \cdot (9{,}12 - 0{,}31)\ kg\ m/s = 5{,}36529\ \mathrm{kg\ m/s}$$

In vielen Büchern wird dann folgendes gemacht:

Fehler des Impulses entspricht der Hälfte des Intervalls zwischen größtem und kleinstem Wert

$$\Delta p = \tfrac{1}{2}\,(6{,}00691-5{,}36529)\ \mathrm{kg\ m/s} = 0{,}32081\ \mathrm{kg\ m/s}$$

Endergebnis: $p = (5{,}68 \pm 0{,}32)\ \mathrm{kg\ m/s}$

Dieses Vorgehen ist nicht ganz korrekt

Fehlerfortpflanzung nach Größtfehler

Wie groß ist der Fehler des Impulses?

Genauere Betrachtung: **Bestwert: p = 5,68176 kg m/s**

Maximalwert: p = 6,00691 kg m/s

Minimalwert: p = 5,36529 kg m/s

$p_{Max} - p_{Best}$ = 0,325 kg m/s

$p_{Min} - p_{Best}$ = - 0,316 kg m/s

$$p = \left(5{,}68 \begin{array}{l} +0{,}33 \\ -0{,}32 \end{array}\right) \mathrm{kg\,m/s}$$

Dies ist unübersichtlich, daher:

Endergebnis: p = (5,68 ± 0,33) kg m/s

Dies wäre dann der Größtfehler
und als Angabe besser als der halbierte Wert oder ein asymmetrischer Fehler

Fehlerfortpflanzung nach Größtfehler

Das bislang vorgestellte Verfahren ist extrem aufwändig und bei komplexen physikalischen Größen äußerst unübersichtlich

Geht es einfacher?

$$(\text{gemessenes} \quad m) = m_{Best} \pm \Delta m = m_{Best}\left(1 \pm \frac{\Delta m}{m_{best}}\right)$$

$$(\text{gemessenes} \quad v) = v_{Best}\left(1 \pm \frac{\Delta v}{v_{Best}}\right)$$

$$(\text{Bestwert von} \quad p) = m_{Best} \cdot v_{Best}$$

Fehlerfortpflanzung nach Größtfehler

Größter Wert für $p = m{\cdot}v$:

$$m_{Best} \cdot v_{Best} \left(1 + \frac{\Delta m}{m_{Best}}\right)\left(1 + \frac{\Delta v}{v_{Best}}\right)$$

$$m_{Best} \cdot v_{Best} \left(1 + \frac{\Delta m}{m_{Best}} + \frac{\Delta v}{v_{Best}} + \cancel{\frac{\Delta m}{m_{Best}} \cdot \frac{\Delta v}{v_{Best}}}\right)$$

Konvention:

$$\boxed{m_{Best} \cdot v_{Best} \left(1 + \frac{\Delta m}{m_{Best}} + \frac{\Delta v}{v_{Best}}\right)}$$

Fehlerfortpflanzung nach Größtfehler

Kleinster Wert für $p = m \cdot v$:

$$m_{Best} \cdot v_{Best} \left(1 - \frac{\Delta m}{m_{Best}}\right)\left(1 - \frac{\Delta v}{v_{Best}}\right)$$

$$m_{Best} \cdot v_{Best} \left(1 - \frac{\Delta m}{m_{Best}} - \frac{\Delta v}{v_{Best}} + \frac{\Delta m}{m_{Best}} \cdot \frac{\Delta v}{v_{Best}}\right)$$

$$m_{Best} \cdot v_{Best} \left(1 - \frac{\Delta m}{m_{Best}} - \frac{\Delta v}{v_{Best}} + \cancel{\frac{\Delta m}{m_{Best}} \cdot \frac{\Delta v}{v_{Best}}}\right)$$

Fehlerfortpflanzung nach Größtfehler

Zusammenfassung :

$$m_{Best} \cdot v_{Best} \left(1 \pm \left(\frac{\Delta m}{m_{Best}} + \frac{\Delta v}{v_{Best}} \right) \right)$$

$$p_{Best} \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta p}{p_{best}} \right), \quad \text{wobei} \quad \frac{\Delta p}{p_{Best}} \approx \frac{\Delta m}{m_{Best}} + \frac{\Delta v}{v_{Best}}$$

Die Fehlerfortpflanzung nach Gauß wird folgendes Ergebnis liefern:

$$\frac{\Delta p}{p_{Best}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m_{Best}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{v_{Best}} \right)^2}$$

Dies ist der wahrscheinliche und nicht der maximale Fehler

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler bei Produkten und Quotienten

Bei Produkten und Quotienten addieren sich die relativen Fehler.

$$C = A \cdot B \qquad \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

$$C = A \,/\, B \qquad \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

Die Gauss´sche Fehlerfortpflanzung wird für beide Fälle ergeben:

Wahrscheinlicher Fehler:

$$C = A \cdot B \qquad \frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

$$C = A \,/\, B \qquad \frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2}$$

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler bei Produkten und Quotienten

Der relative Fehler des Impulses ist die Summe der relativen Fehler der Einzelgrößen
Dies gilt bei allen Produkten und Quotienten

$$m = (0,623 \pm 0,014)\ \text{kg}$$
$$v = (9,12 \pm 0,31)\ \text{m/s}$$

$$\frac{\Delta m}{m_{Best}} = \frac{0,014}{0,623} = 0,02247 = 2,2\ \%$$
$$\frac{\Delta v}{v_{Best}} = \frac{0,31}{9,12} = 0,03399 = 3,4\ \%$$

$$\frac{\Delta p}{p_{Best}} = \frac{\Delta m}{m_{Best}} + \frac{\Delta v}{v_{Best}} = 2,2\% + 3,4\% = 5,6\%$$

$$\Delta p = 5,6\ \% \cdot p_{Best} = 0,056 \cdot 5,682\ \text{kg m/s} = 0,318\ \text{kg m/s}$$

$$\underline{\underline{p = (5,68 \pm 0,32)\ \text{kg m/s}}}$$

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler bei Produkten und Quotienten

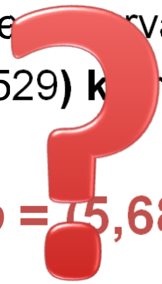
Der aufmerksame Student wundert sich an dieser Stelle:

$$\underline{\underline{p = (5{,}68 \pm 0{,}32)\ \mathrm{kg\ m/s}}}$$

In vielen Büchern wird dann folgendes gemacht:

Fehler des Impulses entspricht der Hälfte des Intervalls zwischen größtem und kleinstem Wert

Δp = ½ (6,00691-5,36529) **kg m/s = 0,32081** kg m/s



Endergebnis: p = (5,68 ± 0,32) kg m/s

Dieses Vorgehen ist nicht ganz korrekt

Die Linearisierung erzeugt eine Näherung – das ist natürlich nur eine Abschätzung!

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler bei Summen und Differenzen

Analoges Vorgehen wie bei Produkt

Beispiel aus dem Praktikum: Dichte der Luft

$$m_L = m_{Glas+Luft} - m_{Glas} = m_1 - m_2$$

Größter Wert für m_L

$$m_1\left(1+\frac{\Delta m_1}{m_1}\right) - m_2\left(1-\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)$$

$$m_1 - m_2 + \Delta m_1 + \Delta m_2$$

Kleinster Wert für m_L

$$m_1\left(1-\frac{\Delta m_1}{m_1}\right) - m_2\left(1+\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)$$

$$m_1 - m_2 - \Delta m_1 - \Delta m_2$$

$$m_{Luft} \pm \Delta m = m_1 - m_2 \pm \left(\Delta m_1 + \Delta m_2\right)$$

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler bei Summen und Differenzen

Bei Summen und Differenzen addieren sich die absoluten Fehler.

$$C = A + B \qquad \Delta C = \Delta A + \Delta B$$

$$C = A - B \qquad \Delta C = \Delta A + \Delta B$$

Die Gauss´sche Fehlerfortpflanzung wird
für den wahrscheinlichen Fehler ergeben:

$$C = A + B \qquad \Delta C = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$$

Wahrscheinlichster Fehler

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler Beispiel 1

Beispiel aus dem Praktikum: Dichte der Luft

$$\rho = \frac{m_L}{V} = \frac{m_1 - m_2}{V}$$

$V = (16{,}73 \pm 0{,}21)\ \mathrm{cm}^3$
$m_1 = (10{,}3420 \pm 0{,}0020)\ \mathrm{g}$
$m_2 = (10{,}3210 \pm 0{,}0020)\ \mathrm{g}$

$m_L = 0{,}0210\ \mathrm{g}$
$\rho = 1{,}25523 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$

Differenz:

$$\Delta m_L = \left(\Delta m_1 + \Delta m_2\right) = 0{,}0040\ \mathrm{g}$$

Quotient:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m_L}{m_L} + \frac{\Delta V}{V}$$

$$= \frac{0{,}0040}{0{,}0210} + \frac{0{,}21}{16{,}73} = 0{,}190 + 0{,}013 = 0{,}203$$

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler Beispiel 1

Bei der Arbeit im Praktikum gilt:

Es ist immer besser einen Größtfehler anzugeben als gar keinen Fehler.

Allgemein gilt:

Durch Mittelwertbildung und die Berechnung des Standardfehlers minimiert man immer nur statistische (zufällige) Fehler.
Systematische Fehler bleiben erhalten,
gewinnen sogar relativ zu den zufälligen Fehlern an Bedeutung.

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler Beispiel 1

Beispiel aus dem Praktikum: Dichte der Luft

$$\rho = \frac{m_L}{V} = \frac{m_1 - m_2}{V}$$

$V = (16{,}73 \pm 0{,}21)\ \mathrm{cm}^3$
$m_1 = (10{,}3420 \pm 0{,}0020)\ \mathrm{g}$
$m_2 = (10{,}3210 \pm 0{,}0020)\ \mathrm{g}$

$m_L = 0{,}0210\ \mathrm{g}$
$\rho = 1{,}25523 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$

Differenz:

$$\Delta m_L = \left(\Delta m_1 + \Delta m_2\right) = 0{,}0040\ \mathrm{g}$$

Quotient:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m_L}{m_L} + \frac{\Delta V}{V}$$

$$= \frac{0{,}0040}{0{,}0210} + \frac{0{,}21}{16{,}73} = 0{,}190 + 0{,}013 = 0{,}203$$

$$\underline{\underline{\rho = (1{,}26 \pm 0{,}25) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g\ cm}^{-3}}}$$

Fehlerfortpflanzung: Größtfehler Beispiel 1

Größtfehler:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m_L}{m_L} + \frac{\Delta V}{V} = 0,203$$

Grobe Abschätzung:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m_L}{m_L} + \cancel{\frac{\Delta V}{V}} = 0,190 + \cancel{0,013}$$

Wahrscheinlicher Fehler:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_L}{m_L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2} = 0,1904$$