Prof. Dr. Thorsten Ohl
Manuel Kunkel, Christopher Schwan

3. Übung zur Klassischen Mechanik
30. Oktober 2023

Lagrangeformalismus

3.1 Harmonischer Oszillator in 2D

Die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen lautet:

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \omega^2 \vec{x}(t) = 0 \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\tfrac{k}{m}}. \tag{1}$$

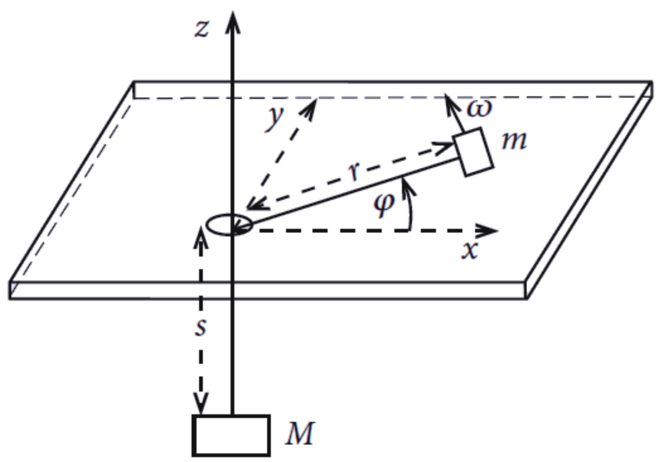
Entwickeln Sie den Ortsvektor $\vec{x}(t)$ und seine zeitlichen Ableitungen in der Polarkoordinatenbasis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\phi\}$ und überzeugen Sie sich, dass die so aus (1) folgenden Differentialgleichungen den Bewegungsgleichungen entsprechen, die Sie wie in der Vorlesung mittels der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) = 0 \tag{2}$$

direkt aus der Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $q_i = r, \phi$ erhalten.

3.2 Zwei Massen an einem Faden

Eine Punktmasse m rotiere reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen gespannten Faden der Länge l $(l = r + s)$ sei sie durch ein Loch in der Platte mit einer anderen Masse M verbunden (s. Skizze). Wie bewegt sich M unter dem Einfluss der Schwerkraft?



1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen.

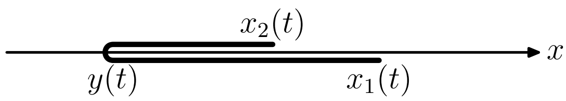
2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten s und φ auf und ermitteln Sie daraus die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \equiv C$ gilt.

3. Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2, um die φ-Abhängigkeit in der Differentialgleichung für s zu eliminieren. Betrachten Sie nun den Gleichgewichtsfall $s(t) = \text{const}$ und finden Sie einen Ausdruck für die resultierende Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t) = \text{const} \equiv \omega_0$ der Masse m. Ausgehend vom Gleichgewichtsfall, unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?

4. Diskutieren Sie das Ergebnis für die Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(t_0) = 0$.

3.3 Knallpeitsche

Eine einmal gefaltete Schnur mit Gesamtlänge l und konstanter Masse pro Länge ρ bewegt sich auf der x-Achse. Die Endpunkte der Schnur seien mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet. Die Stelle, an der die Schnur gefaltet ist, sei mit $y(t)$ bezeichnet.



1. Geben Sie die Zwangsbedingungen des Systems an.

2. Geben Sie eine Langrangefunktion des Systems an[1].

3. Die Lagrangefunktion kann in den Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\xi = x_1 - x_2 \qquad \text{und} \qquad X = \frac{1}{2l}((x_1 - y)(x_1 + y) + (x_2 - y)(x_2 + y)) \quad (3)$$

zu

$$L = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\xi}^2 \quad (4)$$

umgeschrieben werden, wobei M und μ Funktionen von X und ξ sind. Bestimmen Sie M und μ durch den Vergleich der Lagrangefunktionen in Koordinaten (x_1, x_2) und (X, ξ).

[1]Betrachten Sie für die kinetische Energie T die Endpunkte x_1 und x_2, deren "Masse" durch die integrierte Masse des Schnurstücks zwischen x_1 und y bzw. x_2 und y gegeben ist.

4. Geben Sie die Bewegungsgleichungen in Relativ- und Schwerpunktskoordinaten an.

5. Zeigen Sie, dass für die Energie gilt:

$$E(X, \xi) = E_{SP}(X) + E_{rel}(\xi). \tag{5}$$

   Zeigen Sie, dass die Energie des Relativ- und des Schwerpunktsystems erhalten ist, also, dass gilt $\dot{E} = \dot{E}_{rel} = \dot{E}_{SP} = 0$.

6. Betrachten Sie $E_{rel}(\xi)$ im Limes $\xi \to \pm l$. Warum knallt die Peitsche?