Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 25, 2024)

Problem 1. Es sei U eine auf dem Intervall $(0,1)$ uniform verteilte Zufallsvariable, $U \sim \mathcal{U}((0,1))$, sowie

$$X = -\ln U,\ Y = -\ln(1-U),$$

mit dem natürlichen Logarithmus ln.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungen von X und von Y.

(b) Was können Sie über die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = Y)$ aussagen, was über $\mathbb{P}(X > Y)$?

Proof. (a) $0 < X < \infty$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < a) &= \mathbb{P}(U > e^{-a}) \\ &= 1 - e^{-a} \end{aligned}$$

Ähnlich ist $0 < Y < \infty$ und

$$\mathbb{P}(Y < a) = \mathbb{P}(U < 1 - e^{-a}) = 1 - e^{-a}$$

Deren Verteilungsfunktionen sind also

$$\begin{aligned} F_X(t) &= 1 - e^{-t} \\ F_Y(t) &= 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

mit $t \in (0, \infty)$.

(b) Das Ereignis $X = Y$ entspricht $U = 1/2$. Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(U = 1/2)$ ist aber Null.

Das Ereignis $X > Y$ entspricht $U < 1/2$ und hat damit Wahrscheinlichkeit $1/2$. $\square$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ c \cdot t^2 & t \in [0, 1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

mit einer reellen Konstante c, gegeben ist.

(a) Welche Werte kommen für c in Frage?

(b) Für welche Werte von c ist die Verteilung absolutstetig, für welche diskret? Was ist im absolutstetigen Fall die zugehörige Dichte?

(c) Skizzieren Sie $F_X(t)$ für $c = 1/2$.

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(1/4 < X \leq 1/2)$, also die Wahrscheinlichkeit für $\{X \leq 1/2\} \cap \{X > 1/4\}$, abhängig von c.

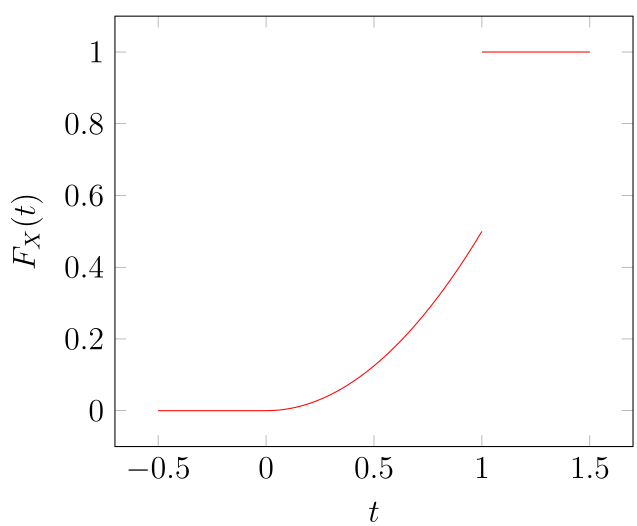
Proof. (a) Aufgrund der Monotonie muss $0 \leq c \leq 1$ sein.

(b) Die Verteilung ist für $c = 1$ absolutstetig und für $c = 0$ diskret.

Im Fall $c = 1$ ist die Dichte die Ableitung

$$f_X(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c)



Da die Verteilung $F_X(t)$ auf $(0,1)$ stetig ist, ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{4}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = c\left(\frac{1}{2}\right)^2 - c\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3c}{16}. \qquad \square$$