Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 6

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 30, 2023)

Problem 1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Für $(E_j) \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ gilt

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, \mathrm{d}\mu \,.$$

(b) Sei nun $X := \mathbb{R}$ und $A_n := \{x \in \mathbb{R} | |x| \geq n\} = (-\infty, n] \cup [n, \infty)$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu \right| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt.

Proof. (a) Wir wissen (Satz 2.39), dass $|f|$ integrierbar ist mit Integral $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

Wir betrachten dann die Funktionfolge

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j} f.$$

f_n konvergiert gegen f, und es gilt $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ für alle x, also die Folge ist durch $|f(x)|$ dominiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_E f \, \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} f \, \mathrm{d}\mu \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{E_i} f \, \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, \mathrm{d}\mu \,. \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Es gilt $\left|\int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_{A_n} |f| \,\mathrm{d}\mu$, also wir müssen es nur für $|f|$ beweisen. Wir betrachten die Funktionfolge $g_n = \chi_{A_n}|f|$. g_n konvergiert gegen 0 für alle x. Außerdem gilt $|g_n| \leq f$ für alle n. Wir verwenden dann den dominierte konvergenz Satz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \int 0 \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Aus dem Definition von Konvergenz einer Folge bekommen wir für jedes $\epsilon > 0$ eine ganze Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_{A_n} |f| \,\mathrm{d}\mu < \epsilon$$

für alle $n \geq N$.

□

Problem 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $f_k : X \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbare Funktionen, die gleichmäßig gegen ein Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass f integrierbar ist mit

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass auf Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ im Allgemein nicht verzichtet werden kann.

Proof. (a) f ist messbar (Folgerung 2.25).

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir bezeichnen mit ϵ gleichzeitig eine Zahl und die konstante Funktion $\epsilon(x) = \epsilon\ \forall x \in X$.

ϵ ist integrierbar, weil $\int |\epsilon| \,\mathrm{d}\mu = |\epsilon|\mu(X) < \infty$. Dann sind $|f| + \epsilon := g$ integrierbar. Weil f_k gleichmäßig konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Das heißt, dass

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + \epsilon.$$

Dann ist die Funktionfolge für alle $n \geq N$ durch g dominiert: $|f_n| \leq g$. Weil nur das Verhalten für n groß wichtig für Konvergenz ist, können wir den Satz von dominierte Konvergenz verwenden, also

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu\,.$$

□

Problem 3. (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum mit $\mu(X) > 0$. Zeigen Sie, dass dann eine messbare Funktion $f : X \to \overline{R}$ existiert mit $f > 0$ auf X und $0 < \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

(b) Geben Sie einen Maßraum an, für den $\mathcal{L}^1(\mu) = \{0\}$ gilt.

Problem 4. (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$ gilt.

(b) Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume und $f : X \times Y \to \overline{R}$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann für jedes $x \in X$ die Funktion $f_x(y) := f(x, y)$ $\mathcal{B}$-messbar ist.