Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 6

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 17, 2024)

Problem 1. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A und B mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A und B direkt mit der Leibnizformel.

(c) Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Methoden. Welche würden Sie bevorzugen? Hängt Ihre Antwort von der Struktur der Matrix ab?

Proof. (a)

$$\begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times 5} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 10 & -40 & 0 & 0 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & -9 & 60 & -180 \\ 10 & -31 & -60 & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & -9 & 60 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 10 & -31 & -60 & 180 \\ 0 & 3 & -21 & 63 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Als obere Dreiecksmatrix hat die Matrix am Ende die Determinante $10(3)(-3)(3) = -270$. Weil wir im ersten Schritt durch 5 multipliziert haben, ist das genau 5 mal die gewünschte Determinante, also $\det A = -270/5 = -54$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ähnlich ist die Determinante der Matrix am Ende $1(-3)(-1)(2) = 6$. Da wir keine Operationen gemacht haben, die die Determinante verändern, ist das die gewünschte Determinante.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \det A = & A_{1,4}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,1} - A_{1,3}A_{2,4}A_{3,2}A_{4,1} \\ & - A_{1,4}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,1} + A_{1,2}A_{2,4}A_{3,3}A_{4,1} \\ & + A_{1,3}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,1} - A_{1,2}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,1} \\ & - A_{1,4}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,2} + A_{1,3}A_{2,4}A_{3,1}A_{4,2} \\ & + A_{1,4}A_{2,1}A_{3,3}A_{4,2} - A_{1,1}A_{2,4}A_{3,3}A_{4,2} \\ & - A_{1,3}A_{2,1}A_{3,4}A_{4,2} + A_{1,1}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,2} \\ & + A_{1,4}A_{2,2}A_{3,1}A_{4,3} - A_{1,2}A_{2,4}A_{3,1}A_{4,3} \\ & - A_{1,4}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,3} + A_{1,1}A_{2,4}A_{3,2}A_{4,3} \\ & + A_{1,2}A_{2,1}A_{3,4}A_{4,3} - A_{1,1}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,3} \\ & - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}A_{4,4} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,4} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,4}\\
&- A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3}A_{4,4} + A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,4}\\
=&0 + 0 - 307440 + 0 + 302400\\
&+ 0 + 0 + 0 + 238266 + 0 - 234360\\
&+ 0 + 0 + 0 + 65880 + 0 + 234360\\
&- 302400 + 0 + 0 - 64800 + 0\\
&- 234360 + 302400 = -54
\end{aligned}
$$

Ähnlich für B, aber weil in der letzten Zeile eine nicht null Zahl nur im dritten Spalte entsteht, tragt nur Permutationen σ mit $\sigma(4) = 4$ bei. Dann gibt es nur zwei Terme im Summe, die die Permutationen $(3, 4)$ und $(1, 2)(3, 4)$ entsprechen.

$$\det B = 12 - 6 = 6.$$

(c) Für A habe ich mehr Arbeit gebraucht, durch die Leibnizformel die Determinante zu berechnen. Für B ist es anders.

Für Matrizen mit viele null Elemente würde ich daher mit der Leibnizformel die Determinante zu berechnen, sonst würde ich Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden. $\square$

Problem 2. E sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $x \to Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 & 5 \\ -96 & 268 & -63 \\ -400 & 1110 & 263 \end{pmatrix}$$

sowie $B := (b_1, b_2, b_3) := ((13, 6, 4), (10, 6, 10), (6, 8, 24))$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $C = T^E_B$, wobei E die Standardbasis ist (Notation wie in 3.5.2)

(c) Bestimmen Sie C^{-1} und berechnen Sie CAC^{-1}.

(d) Geben Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis B an.

(e) Bestimmen Sie $\det(A), \det(C), \det(C^{-1})$ und $\det(CAC^{-1})$, ohne den Determinantenmultiplikationssatz zu verwenden. Verifizieren Sie damit für diesen Spezialfall Folgerung 4.3.6 und Satz 4.3.7.

Proof. (a) Die Vektoren (b_1, b_2, b_3) sind linear unabhängig genau dann, wenn $\det B \neq 0$. Wir berechnen die Determinante

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{7}{3}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 14 & 14 & \frac{56}{3} \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times \frac{7}{2}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 14 & 35 & 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & \frac{38}{3} \\ 0 & 25 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{25}{4}} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 25 & \frac{475}{6} \\ 0 & 25 & 78 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 0 & 25 & \frac{475}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

deren Determinante ungleich null ist. Daher ist $\det B \neq 0$, und die Vektoren sind linear unabhängig. Da wir 3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$ haben, wobei $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, sind die Vektoren eine Basis.

(b) Es gilt

$$T_E^B = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 24 \end{pmatrix} =: B.$$

Da $T_B^E = (T_E^B)^{-1}$, ist

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \times \frac{1}{14}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 6R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{156}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times \frac{25}{6}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{156}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{10} R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & \frac{50}{7} & \frac{475}{21} & -\frac{25}{14} & \frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times \frac{7}{50}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{25}{6} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \times -3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - \frac{19}{6} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + \frac{11}{6} R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & \frac{45}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -39 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -3 \end{array}\right)$$

$\square$