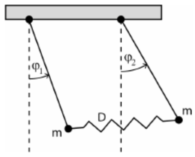
**Aufgabe 10.3:** *Gekoppelte Pendel* .................................................. (3 Punkte)

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

Betrachten Sie die beiden gekoppelten, gleichartigen mathematischen Pendel aus Aufgabe 9.3. Für kleine Auslenkungen der Pendel ergeben sich die Eigenfrequenzen $\omega_A$ und $\omega_B = \omega_A + \Delta\omega$ mit $\Delta\omega > 0$. Es wird eine schwache Kopplung der beiden Pendel betrachtet, so dass $\Delta\omega$ klein ist.




Die allgemeine Lösung der gekoppelten Bewegungsgleichungen ist:

$$\varphi_1(t) = A\sin(\omega_A t + \delta_A) + B\sin((\omega_A + \Delta\omega)t + \delta_B)$$
$$\varphi_2(t) = A\sin(\omega_A t + \delta_A) - B\sin((\omega_A + \Delta\omega)t + \delta_B)$$

Für die folgenden drei Anfangsbedingungen bestimmen Sie die zugehörigen Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ und skizzieren diese.

(1 P) a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind beide Pendel um $\varphi_0 > 0$ ausgelenkt und werden losgelassen.

(1 P) b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind beide Pendel ausgelenkt und werden losgelassen. Pendel 1 um $\varphi_0 > 0$ und Pendel 2 um $-\varphi_0$.

(1 P) c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist Pendel 1 um $\varphi_0 > 0$ ausgelenkt, Pendel 2 in der Ruhelage und sie werden losgelassen. Wie bezeichnet man das sich ergebende physikalische Phänomen?

$$\varphi_1(0) = A\sin\delta_A + B\sin\delta_B \quad \text{------} \quad (1)$$
$$\varphi_2(0) = A\sin\delta_A - B\sin\delta_B \quad \text{------} \quad (2)$$
$$\dot\varphi_1(t) = A\omega_A\cos(\omega_A t + \delta_A) + B(\omega_A + \Delta\omega)\cos[(\omega_A+\Delta\omega)t + \delta_B]$$
$$\dot\varphi_2(t) = A\omega_A\cos(\omega_A t + \delta_A) - B(\omega_A + \Delta\omega)\cos[(\omega_A+\Delta\omega)t + \delta_B]$$
$$\dot\varphi_1(0) = A\omega_A\cos\delta_A + B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B \quad \text{--} \quad (3)$$
$$\dot\varphi_2(0) = A\omega_A\cos\delta_A - B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B \quad \text{---} \quad (4)$$

a)

$(1)$: $A\sin\delta_A + B\sin\delta_B = \varphi_0$

$(2)$: $A\sin\delta_A - B\sin\delta_B = \varphi_0$

$(3)$: $A\omega_A\cos\delta_A + B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$

$(4)$: $A\omega_A\cos\delta_A - B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$

$(1)+(2)$: $2A\sin\delta_A = 2\varphi_0$

$(3)+(4)$: $2A\omega_A\cos\delta_A = 0$

Da $A \neq 0 \neq \omega_A$, ist $\cos\delta_A = 0$, $\delta_A = \frac{\pi}{2}$

$\sin\delta_A = \sqrt{1-\cos^2\delta_A} = 1$

$A = \varphi_0$

$(1)$: $B\sin\delta_B = 0$

$B = 0$ oder $\sin\delta_B = 0$

Angenommen $\sin\delta_B = 0$

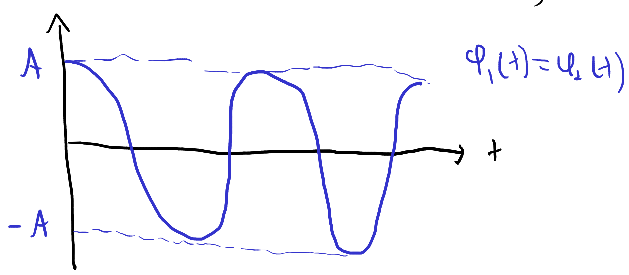
$$A\omega_A\cancel{\cos\delta_A}^{\to 0} + B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$$

$$B(\omega_A+\Delta\omega)\underbrace{\cos\delta_B}_{=1\neq 0} = 0$$

also $B = 0$.

$\varphi_1(t) = A\sin\left(\omega_A t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(\omega_A t)$

$\varphi_2(t) = A\sin\left(\omega_A t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(\omega_A t) = \varphi_1(t)$




b)

$(1): A\sin\delta_A + B\sin\delta_B = \varphi_0$

$(2): A\sin\delta_A - B\sin\delta_B = -\varphi_0$

$(3): A\omega_A\cos\delta_A + B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$

$(4): A\omega_A\cos\delta_A - B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$

$(3)+(4):\quad 2A\omega_A\cos\delta_A = 0$

Annahme $A \neq 0 \neq \omega_A$, ist $\cos\delta_A = 0$, $\delta_A = \frac{\pi}{2}$

$\sin\delta_A = \sqrt{1-\cos^2\delta_A} = 1$

$(1)+(2):\quad 2A\sin\delta_A = 0$

da $\sin\delta_A \neq 0$, ist $A = 0$, also $A=0$ immer

$(1)-(2):\quad 2B\sin\delta_B = 2\varphi_0$

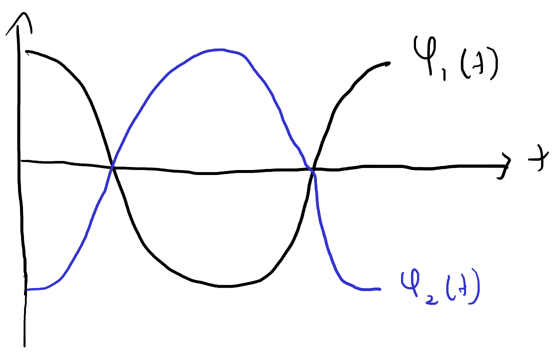
$(3)-(4):\quad 2B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$

$\cos\delta_B = 0, \quad \delta_B = \frac{\pi}{2}$

$B = \varphi_0$

$\varphi_1(t) = \varphi_0 \sin\left((\omega_A+\Delta\omega)t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\varphi_2(t) = -\varphi_0 \sin\left((\omega_A+\Delta\omega)t + \frac{\pi}{2}\right)$



c)

$$(1):\ A\sin\delta_A + B\sin\delta_B = \varphi_0$$

$$(2):\ A\sin\delta_A - B\sin\delta_B = 0$$

$$(3):\ A\omega_A\cos\delta_A + B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$$

$$(4):\ A\omega_A\cos\delta_A - B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$$

$(3)+(4)$: $\quad 2A\omega_A\cos\delta_A = 0$

Angenommen $A \neq 0 \neq \omega_A$, ist $\cos\delta_A = 0$, $\delta_A = \frac{\pi}{2}$

$\sin\delta_A = \sqrt{1-\cos^2\delta_A} = 1$

$(1)+(2)$: $\quad 2A\sin\delta_A = \varphi_0$

$$A = \varphi_0/2$$

$(1)-(2)$ $\quad 2B\sin\delta_B = \varphi_0$

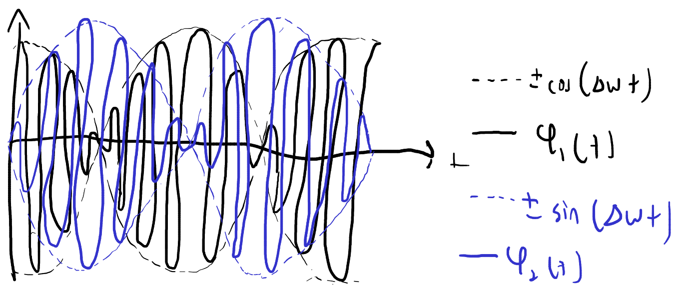
$(3)-(4)$: $\quad 2B(\omega_A+\Delta\omega)\cos\delta_B = 0$

$\cos\delta_B = 0, \quad \delta_B = \frac{\pi}{2}$

$B = \varphi_0/2$

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2}\cos(\omega_A t) + \frac{\varphi_0}{2}\cos\left[(\omega_A+\Delta\omega)t\right] = \varphi_0\cos(\Delta\omega t)\cos\left(\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \approx \varphi_0\cos(\Delta\omega t)\cos(\omega t)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2}\cos(\omega_A t) - \frac{\varphi_0}{2}\cos\left[(\omega_A+\Delta\omega)t\right] = \varphi_0\sin\left[\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\sin(\Delta\omega t) \approx \varphi_0\sin(\Delta\omega t)\sin(\omega t)$$




**Schwebung**