Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 19, 2024)

Problem 1. Seien X_1, X_2 und X_3 Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern p_1, p_2 und p_3, $p_j \in [0,1], 1 \leq j \leq 3$. Es gilt also $\mathbb{P}(X_j = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_j = 0) = p_j, 1 \leq j \leq 3$. Ereignisse der Form $\{X_i = k\}, \{X_j = l\}, l, k \in \{0,1\}$, seien für alle $i \neq j$ unabhängig.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 + X_2 + X_3 = 1\}$.

(b) Leiten Sie die Verteilung der Zufallsvariable $S = X_1 + X_2 + X_3$ her. Geben Sie insbesondere an, um welche Art von Zufallsvariable es sich hier handelt.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 < X_3\}$.

(d) Wir definieren die Zufallsvariable $Y = \mathbb{1}\{X_1 < X_2\}$. Wie ist Y verteilt?

Proof. (a) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0\}$. Die Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3).$$

Analog finden wir

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) = (1 - p_1)p_2(1 - p_3)$$

und

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = (1 - p_1)(1 - p_2)p_3.$$

Da diese Ereignisse disjunkt sind, und deren Vereinigung das Ereignis $\{X_1+X_2+X_3 = 1\}$ ist, ist die Wahrscheinlichkeit einfach

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 1) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Es gilt $X_1 + X_2 + X_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Also wir suchen die Zähldichte

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 2).$$

Ähnlich betrachten wir die drei Ereignisse

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) = p_1 p_2 (1 - p_3)$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) = (1 - p_1) p_2 p_3$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = p_1 (1 - p_2) p_3$$

und

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 2) = p_1 p_2 (1 - p_3) + (1 - p_1) p_2 p_3 + p_1 (1 - p_2) p_3$$

Letztlich ist

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = p_1 p_2 p_3$$

und

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3).$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist definiert durch die Summe

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(\{x\}).$$

(c) Es gilt

$$\{X_1 < X_3\} = \{X_1 = 0, X_3 = 1\}$$

und damit

$$\mathbb{P}(X_1 < X_3) = (1 - p_1) p_3.$$

(d) Y is Bernoulli-verteilt mit Parameter $(1 - p_1) p_3$. $\square$

Problem 2. (a) Zeigen Sie, dass es sich bei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{7}{20} + \frac{1}{5} x + \frac{1}{20} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

um eine Verteilungsfunktion handelt.

(b) Es handelt sich hier um eine Mischung aus diskreter und stetiger Verteilung, also ist F von der Form

$$F(x) = aF^d(x) + bF^s(x)$$

mit positiven Zahlen a und b, $a + b = 1$, und F^d Verteilungsfunktion einer diskreten und F^s einer stetigen Verteilung.

Bestimmen Sie a, b, sowie F^d und F^s. Skizzieren Sie F^d, F^s und F. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Verteilung an.

(c) Ein Median m einer Verteilung wird häufig eingeführt als eine Zahl, für welche

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2, \text{ und } \mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2,$$

gilt. Bestimmen Sie einen so definierten Median zu der durch F charakterisierten Verteilung.

Proof. (a) (1) Monoton wachsend: Wir betrachten die Ableitung

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{10}x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Da die Funktion fast überall stetig differenzierbar ist mit positiv semidefiniter Ableitung, ist sie monoton wachsend.

(2) Die Funktion ist per Definition rechtseitig stetig.

(3) $F(x)$ geht gegen 1 bzw. Null when x geht gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$.

(b) Wir sehen, dass es Atome bei $x = 0$ und $x = 1$ gibt:

$$F(0+) - F(0-) = \frac{7}{20}$$
$$F(1+) - F(1-) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Diese Atome stellen die diskrete Verteilung dar. Wir müssen die Verteilung normieren

$$\frac{7}{20} + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

und

$$F^d(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{7}{15} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}.$$

Die stetige Verteilung ergibt sich durch den streng wachsenden Term zwischen 0 und 1. Die Normierung ist

$$\left[\frac{7}{20} + \frac{1}{5}x + \frac{1}{20}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

und damit

$$F^s(x) = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}x^2.$$

Die Gewichtung ist $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$.

(c) Wir bestimmen m durch die Gleichung $F(x) = \frac{1}{2}$. Die Lösung ist $m = -2 + \sqrt{7}$. $\square$