

## 9. Übung zur Einführung in die Algebra

Abgabe online in WueCampus bis zum 15.01.2024, 12 Uhr

### Aufgabe 9.1 (3+1 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung 15 zyklisch sind.  
(Hinweis: Verwenden Sie Übungsaufgabe 4.2.)
- (b) Funktioniert die Schlussweise aus Aufgabenteil (a) auch bei Gruppen der Ordnung 45?

### Aufgabe 9.2 (1+3 Punkte; Sylow-Aufgabentyp: Elemente zählen)

- (a) Seien  $p$  eine Primzahl,  $G$  eine Gruppe,  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  und  $n_p$  die Anzahl der  $p$ -Sylowgruppen von  $G$ . Zeigen Sie, dass  $P \trianglelefteq G$  genau dann gilt, wenn  $n_p = 1$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 12 nicht einfach ist.

### Aufgabe 9.3 (4 Punkte; Sylow-Aufgabentyp: Operieren)

Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $392 = 2^3 \cdot 7^2$ . Zeigen Sie, dass  $G$  nicht einfach ist. (Staatsexamen Herbst 2016)

### Aufgabe 9.4 (2+1+1 Punkte)

- (a) Sei  $G$  eine endliche Gruppe mit zyklischer *Zentrumsfaktorgruppe*  $G/Z(G)$ . Zeigen Sie, dass dann  $G = Z(G)$  gilt.  
(Anmerkung:  $G$  ist in diesem Fall abelsch, denn die Elemente des Zentrums kommutieren mit allen Elementen.)
- (b) Zeigen Sie: Sind  $p \in \mathbb{P}$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p^2$ , so ist  $G$  abelsch.
- (c) Sind auch Gruppen der Ordnung  $p^3$  (mit primem  $p \in \mathbb{P}$ ) stets abelsch?

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.