Kapitel 3

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Ziel: Integrale über Kurven und Flächen. Anwendung: Längen- und Flächenberechnung, partielle Integration.

3.1 Untermannigfaltigkeiten

Dieses Kapitel folgt im Wesentlichen [For17, §14].

Definition 3.1. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α, $0 \le k \le n-1$, $\alpha \ge 1$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt mit*

(1) $M \cap U = \{x \in U : \ f(x) = 0\}$,

(2) $\operatorname{Rang}(f'(a)) = n - k$.

Beispiel 3.2. *(1) Jeder k-dimensionale lineare Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

(2) Sei $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 = 1\}$. Dann ist S_{n-1} eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α für alle α. Für $n = 2$ kann diese Menge lokal als Graph geschrieben werden: der obere (untere) Halbkreis kann als $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ dargestellt werden. In der Umgebung von $(\pm 1, 0)$ funktioniert diese Darstellung nicht, hier kann aber $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ gewählt werden.

(3) Ist $C \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Kurve, die sich selbst schneidet, dann ist C keine Untermannigfaltigkeit.

So eine Darstellung als Graph einer Funktion gilt tatsächlich für allgemeine Untermannigfaltigkeiten.

Satz 3.3 (Untermannigfaltigkeit lokal Graph einer Funktion)**.** *$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α, wenn es für jedes $a \in M$ — nach einer eventuellen Umnummerierung der Koordinaten — Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$ gibt, so dass*

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \; x'' = g(x')\}.$$

Beweis. Sei M k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Sei $a \in M$. Nach Voraussetzung existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $a \in U$, $M \cap U = \{x \in U : \; f(x) = 0\}$ und $\operatorname{Rang}(f'(a)) = n - k$.

Seien $i_1 \dots i_{n-k}$ linear unabhängige Spalten von $f'(a)$. Wir nummerieren die Koordinaten nun um, so dass $(i_1, \dots, i_{n-k}) = (k+1, \dots, n)$. Nun wenden wir den Satz über die implizite Funktion auf die Gleichung $f(x', x'') = 0$ an. Da $\frac{\partial}{\partial x''} f$ im Punkt $a = (a', a'')$ vollen Rang hat, folgt die Behauptung: es gibt Umgebungen U' und U'' von a' und a'' mit $U' \times U'' \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$, so dass $f(x', g(x')) = 0$. Weiter ist

$$g'(x') = -(\frac{\partial}{\partial x''} f(x', g(x')))^{-1} \frac{\partial}{\partial x'} f(x', g(x')).$$

Da $\frac{\partial}{\partial x''} f$ und $\frac{\partial}{\partial x'} f$ $(\alpha - 1)$-mal stetig differenzierbar sind, ist g α-mal stetig differenzierbar.

Sei $a \in M$ mit U', U'' und $g : U' \to U''$ wie oben. Setze $f(x) := x'' - g(x')$. Dann ist $M \cap U = \{x \in U : \; f(x) = 0\}$. Weiter ist $f'(x) = \begin{pmatrix} g'(x) \\ I_{n-k} \end{pmatrix}$, so dass $\operatorname{Rang}(f'(x)) = n - k$ ist. □

Definition 3.4. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere, offene Mengen. Es sei $\Phi : U \to V$ bijektiv. Sind Φ und Φ^{-1} α-mal stetig differenzierbar, dann heißt Φ C^α-Diffeomorphismus.*

Das nächste Ziel ist es, eine Koordinatentransformation zu finden, die eine Untermannigfaltigkeit (lokal) auf einen Unterraum transformiert.

Dazu definieren wir zur Abkürzung für $k \leq n$ den Unterraum

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \; x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Satz 3.5 (Koordinatentransformation auf einen Unterraum)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α genau dann, wenn zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ existiert, so dass*

$$F(M \cap U) = E_k \cap V.$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Sei $a \in M$. Seien U', U'', g wie in Satz 3.3, also dass gilt

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \ x'' = g(x')\}.$$

Definiere $U := U' \times U''$,

$$F(x', x'') := (x', x'' - g(x')),$$

und $V := F(U)$. Dann ist F α-mal stetig differenzierbar. Sei $x = (x', x'') \in M \cap U$. Dann ist $x'' = g(x')$ und $F(x', x'') = (x', 0) \in E_k$.

Seien $x, y \in U$ mit $F(x) = F(y)$. Dann folgt $x' = y'$ und $x'' = y''$, also ist F injektiv. Sei $z = (z', z'') \in V$. Dann ist $F(x', x'') = z$ für $x' = z'$ und $x'' = z'' + g(x') = z'' + g(z')$. Damit ist auch F^{-1} α-mal stetig differenzierbar.

($\Leftarrow$) Sei nun $a \in M$, U eine offene Umgebung von a, V offen, $F : U \to V$ ein C^α-Diffeomorphismus so, dass $F(M \cap U) = E_k \cap V$. Definiere $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$f(x) := (F_{k+1}(x), \dots, F_n(x))^T.$$

Dann ist $f'(a)$ eine Matrix, die die letzten $n-k$ Zeilen der invertierbaren Matrix $F'(a)$ enthält. Also sind diese Zeilen linear unabhängig, $f'(a)$ hat vollen Rang Rang $f'(a) = n - k$. □

Als letzte Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten wollen wir diese über eine Parameterdarstellung beschreiben. Um die Stetigkeit dieser Parameterdarstellung untersuchen zu können, müssen wir die Untermannigfaltigkeit M mit einer Topologie versehen.

Relativtopologie Es sei $d_2(x, y) := \|x - y\|_2$ die von der Euklidischen Norm induzierte Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist auch (M, d_2) ein metrischer Raum. Die offenen Mengen in (M, d_2) kann man folgendermaßen charakterisieren:

Lemma 3.6. *U ist offen in (M, d_2) genau dann, wenn eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen in $(\mathbb{R}^n, d_2)$) existiert mit $U = V \cap M$.*

Beweis. Definiere $B_\rho(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ d_2(x,y) < \rho\}$. Sei U offen in (M, d_2). Sei $x \in U$. Dann existiert ein $r_x > 0$, so dass $B_{r_x}(x) \subseteq U$. [Zum Beispiel kann $r_x := \frac{1}{2}\sup\{r : \ B_r(x) \subseteq U\}$ gewählt werden.] Dann ist $M \cap B_{r_x}(x) \subseteq U$. Es folgt

$$U = \bigcup_{x \in U} (M \cap B_{r_x}(x)) = M \cap \left(\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) \right),$$

was die Behauptung ist.

Sei nun $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ mit $U = V \cap M$. Sei $x \in U$. Dann existiert $\rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subseteq V$. Dann ist $x \in B_\rho(x) \cap M$. Die Menge $B_\rho(x) \cap M$ ist die Kugel mit Radius ρ um x in (M, d_2), und damit ist U offen in (M, d_2). □

Wir vereinbaren folgende Sprechweise: $U \subseteq M$ *ist offen in* M genau dann, wenn U offen in (M, d_2) ist.

Definition 3.7. *Seien X_1, X_2 metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X_1 \to X_2$ heißt Homöomorphismus (oder topologischer Isomorphismus), wenn φ bijektiv ist, und φ, φ^{-1} stetig sind.*

Damit eine bijektive Abbildungen φ homöomorph ist, müssen Urbilder und *Bilder* offener Mengen wieder offen sein.

Satz 3.8 (Bild der Parameterabbildung ist Untermannigfaltigkeit)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ α-mal stetig differenzierbar mit $\operatorname{Rang}\big(\varphi'(t)\big) = k$ für alle $t \in U$. Dann existiert zu jedem $u \in U$ eine offene Umgebung $T \subseteq U$, so dass $\varphi(T)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ist, und $\varphi : T \to \varphi(T)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $(\varphi(T), d_2)$ der zugrundeliegende metrische Raum ist.*

Beweis. Sei $u \in U$. Dann ist $\operatorname{Rang}\varphi'(u) = k$. Nach einer Umnummerierung der Komponenten von φ ist $\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_k)}{\partial t}(u)$ invertierbar. Setze $\tilde{\varphi} := (\varphi_1 \dots \varphi_k)$. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung gibt es eine Umgebung $T \subseteq U$ von u, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^k$ so dass $\tilde{\varphi} : T \to V$ ein C^α-Diffeomorphismus ist. (Wegen $(\tilde{\varphi}^{-1})' = (\tilde{\varphi}')^{-1}$ ist $\tilde{\varphi}^{-1}$ α-mal stetig differenzierbar.)

Definiere $\Phi : T \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$\Phi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k) \quad i = 1 \dots k,$$

$$\Phi_j(t) = \varphi_j(t_1, \dots, t_k) + t_j \quad j = k+1 \dots n.$$

Ist $v \times z \in V \times \mathbb{R}^{n-k}$, dann hat die Gleichung $\Phi(t, y) = (v, z)$ die eindeutige Lösung $t = \tilde{\varphi}^{-1}(v)$ und $y = z - (\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)(v)$. Damit ist Φ ein C^α-Diffeomorphismus. Weiter ist $\Phi(T \times \{0\}) = \varphi(T)$, wobei 0 der Nullvektor im $\mathbb{R}^{n-k}$ ist. Dann ist auch $T \times \{0\} = \Phi^{-1}(\varphi(T) \cap (V \times \mathbb{R}^{n-k}))$. Damit ist nach dem vorherigen Satz (Satz 3.5) angewendet auf $F := \Phi^{-1}$ die Menge $\varphi(T)$ eine Untermannigfaltigkeit.

Es bleibt, die Homöomorphismus-Eigenschaft zu zeigen. Sei O offen in $\varphi(T)$. Wegen Lemma 3.6 existiert eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $O = V \cap \varphi(T)$. Da φ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^k$. Dann ist $\varphi^{-1}(O) = \varphi^{-1}(V \cap \varphi(T)) = \varphi^{-1}(V) \cap T$ offen in $\mathbb{R}^k$.

Sei nun $O \subseteq T$ offen. Dann ist

$$\varphi(O) = \Phi(O \times \{0\}) = \Phi(T \times \{0\}) \cap \Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k}) = \varphi(T) \cap \Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k}).$$

Da Φ^{-1} stetig ist, ist $\Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k})$ offen. Wegen Lemma 3.6 ist $\varphi(O)$ offen in $(\varphi(T), d_2)$. Und φ ist ein Homöomorphismus. $\square$

Definition 3.9. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Sei V offen in M, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : T \to V$ ein Homöomorphismus, φ als Funktion von T nach $\mathbb{R}^n$ α-mal stetig differenzierbar mit* $\operatorname{Rang}(\varphi'(t)) = k$ *für alle $t \in T$. Dann heißt φ lokale Parameterdarstellung (oder auch Immersion) von M. Die Umkehrabbildung φ^{-1} heißt Karte auf M.*

Satz 3.10 (Parameterdarstellung von Untermannigfaltigkeiten)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α genau dann, wenn für jedes $a \in M$ eine in M offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert.*

Beweis. ($\Leftarrow$) Wir verwenden die Charakterisierung aus Satz 3.5. Sei $a \in A$. Dann gibt es eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ mit $a \in V$. Wegen Satz 3.8 gibt es eine offene Teilmenge $T' \subseteq T$ mit $\varphi^{-1}(a) \in T'$, so dass $\varphi(T')$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ist. Dann gibt es nach Satz 3.5 einen C^α-Diffeomorphismus $F : U \to \tilde{U}$ mit $a \in U$, so dass $F(\varphi(T') \cap U) = E_k \cap \tilde{U}$. Nun ist $\varphi(T') \subseteq M$ offen, das heißt, es existiert eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(T') = M \cap U'$ (Lemma 3.6). Es folgt $F(M \cap U' \cap U) = E_k \cap \tilde{U}$. Die Menge $U' \cap U$ ist eine offene Umgebung von a, damit ist M nach Satz 3.5 eine Untermannigfaltigkeit.

Wir beweisen nun ($\Rightarrow$). Sei $a \in M$. Wir wenden Satz 3.3 an. Sei $a \in M$. Dann gibt es nach einer eventuellen Umnummerierung der Koordinaten Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$, so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \; x'' = g(x')\}.$$

Wir setzen $V := M \cap (U' \times U'')$, $T := U'$, und für $t \in T = U'$

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\varphi : T \to V$ bijektiv und α-mal stetig differenzierbar mit $\operatorname{Rang} \varphi'(t) = k$ für alle $t \in T$. Ist $z \in \varphi(T)$ dann ist $\varphi^{-1}(z) = (z_1 \dots z_k)$.

Wir benutzen Lemma 3.6. Sei O offen in $\varphi(T)$. Dann ist $O = \varphi(T) \cap \tilde{O}$ mit einer offenen Menge $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $\varphi^{-1}(O) = \varphi^{-1}(\tilde{O}) \cap T$. Sei nun $O \subseteq T$ offen in $\mathbb{R}^k$. Dann ist $\varphi(O) = \varphi(T) \cap (O \times \mathbb{R}^{n-k})$. □

Satz 3.11 (Koordinatentransformation oder Kartenwechsel)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Seien $\varphi_i : T_i \to V_i$, $i = 1, 2$ lokale Parameterdarstellungen von M mit $V_1 \cap V_2 =: V \neq \emptyset$.*

Dann sind $\varphi_i^{-1}(V) =: W_i$ offene Teilmengen von T_i, $i = 1, 2$, und $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$ ist ein C^α-Diffeomorphismus.

Beweis. Da τ die Verknüpfung stetiger, bijektiver Funktionen ist, ist τ stetig und bijektiv. Auch $\tau^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ ist stetig.

Wir zeigen die Differenzierbarkeit von τ. Sei $w_1 \in W_1$, $a := \varphi_1(w_1) \in V$. Wir benutzen Satz 3.5. Es existiert also eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a, eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^α-Diffeomorphismus $F : U \to \tilde{U}$, so dass

$$F(M \cap U) = E_k \cap \tilde{U}.$$

Da wir U durch $U \cap V$ ersetzen können, können wir $U \subseteq V$ annehmen.

Wir betrachten nun $F \circ \varphi_1$. Sei $w \in \varphi_1^{-1}(M \cap U)$. Dann ist

$$(F \circ \varphi_1)(w) = (g_1(w), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

mit $g_1(w) \in \mathbb{R}^k$. Es gilt

$$(F \circ \varphi_1)'(w) = F'(\varphi_1(w))\varphi_1(w).$$

Da $\varphi_1(w) \in U$ ist $F'(\varphi_1(w))$ invertierbar. Weiter ist $\operatorname{Rang} \varphi_1(w) = k$. Es folgt $\operatorname{Rang} g_1'(w) = k$. Also ist g_1 lokal invertierbar. Da $F \circ \varphi_1$ bijektiv ist, ist auch g_1 bijektiv und damit ein C^α-Diffeomorphismus. Analog bekommen wir einen C^α-Diffeomorphismus g_2 mit

$$(F \circ \varphi_2)(w) = (g_2(w), 0, \dots, 0) \quad w \in \varphi_2^{-1}(M \cap U).$$

Es folgt

$$\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ F^{-1} \circ F \circ \varphi_1 = g_2^{-1} g_1^{-1},$$

und τ ist ein C^α-Diffeomorphismus. Hier haben wir benutzt, dass $(F\circ\varphi_1)(w_1) = (F \circ \varphi_2)(w_2)$ genau dann, wenn $g_2(w_2) = g_1(w_1)$. □

Definition 3.12. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Es sei (φ_j) gegeben mit*

(1) $\varphi_j : T_j \to V_j$ ist lokale Parameterdarstellung von M für alle $j \in \mathbb{N}$,

(2) $\bigcup_{j=1}^\infty V_j = M$.

Dann heißt (φ_j) ein (abzählbarer) Atlas von M der Klasse C^α.

Bemerkung 3.13. *Die Charakterisierung von Satz 3.10 ist die Grundlage für die Definition von Mannigfaltigkeiten. Diese kommt ohne den umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$ aus.*

Ein metrischer Raum (M, d) heißt k-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn für jedes $a \in M$ eine in M offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und ein Homöomorphismus $\varphi : T \to V$ existiert.

Differenzierbarkeit (eines Atlas) kommt durch die Aussage von Satz 3.11: man nimmt dann an, dass die Koordinatentransformationen τ α-mal stetig differenzierbar sind für alle Parameterdarstellungen durch Homöomorphismen φ_1, φ_2 eines Atlas.

3.2 k-dimensionales Volumen im $\mathbb{R}^n$

3.2.1 Kurvenlänge im $\mathbb{R}^n$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann ist $\varphi(I)$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Wie kann man die Länge der Kurve definieren?

Eine Möglichkeit ist es, die Kurve durch einen Polygonzug zu approximieren: seien $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ Punkte aus I. Dann ist die “wahre” Länge der Kurve größer als die Länge

$$\sum_{j=1}^{m-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi_(t_j)\|_2$$

des Polygonzugs. Unter geeigneten Annahmen ist das Supremum über die Längen aller Polygonzüge gleich dem Integral

$$\int_I \|\varphi'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t.$$

3.2.2 Oberfächeninhalt im $\mathbb{R}^3$

Für den Oberflächeninhalt einer Menge im $\mathbb{R}^3$ ist diese Prozedur nicht so einfach übertragbar. Wir wollen den Oberflächeninhalt des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 = 1, \ z \in [0, 1]\}$$

bestimmen. Die Idee ist, die Oberfläche durch Dreiecke zu approximieren. Wir unterteilen den Umfang in n gleiche Teile, die Höhe des Zylinders in m gleiche Teile.

Die Länge einer Sehne ist dann gegeben durch

$$2 \sin(\pi/n).$$

Liegen die Punkte auf den verschiedenen Schichten direkt übereinander, dann ergibt sich als Summe der Flächen der Dreiecke

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \sin(\pi/n) \cdot \frac{1}{m} \right) \cdot 2 = 2n \sin(\pi/n).$$

Nach Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir den korrekten Wert 2π.

Nun betrachten wir eine zweite Konfiguration, in der die Punkte in den einzelnen Schichten nicht direkt übereinander liegen, sondern wo die einzelnen Schichten gegeneinander um den Winkel π/n versetzt sind. Es entsteht eine Lampion-Struktur, der sogenannte Schwarz-Zylinder.

Die Höhe dieser Dreiecke ist dann nicht mehr $\frac{1}{m}$ sondern gleich

$$\left(\frac{1}{m^2} + (1 - \cos(\pi/n))^2 \right)^{1/2},$$

so dass sich als Gesamtfläche ergibt

$$\begin{aligned} A_{m,n} &:= m \cdot 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin(\pi/n) \cdot \left(\frac{1}{m^2} + (1 - \cos(\pi/n))^2 \right)^{1/2} \\ &= 2n \sin(\pi/n) \cdot \left(1 + m^2 (1 - \cos(\pi/n))^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} n^2 (1 - \cos(\pi/n)) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Wir wählen nun $m(n)$ so, dass $\lim_{n \to \infty} \frac{m(n)}{n^2} = q$. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} m(n)(1 - \cos(\pi/n)) = \frac{q\pi^2}{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} A_{m(n),n} = 2\pi \cdot \left(1 + \left(\frac{q\pi^2}{2}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Das richtige Ergebnis 2π erhalten wir nur für $q = 0$. Der Grenzwert wird beliebig groß für $q \to \infty$. Damit ist das Supremum der Flächeninhalte aller Dreiecksnetze auf der Zylinderoberfläche unendlich, was diesen (naiven) Zugang untauglich macht für Flächenberechnungen.

Wir werden daher nicht das Vorgehen für Kurven ($k = 1$) auf den Fall $k > 1$ verallgemeinern. Dies ist möglich aber sehr aufwendig. Stattdessen werden wir die Parameterdarstellung von Mannigfaltigkeiten verwenden, und die Integrale auf der Mannigfaltigkeit auf Integrale über die Parameterbereiche zurückführen. Im nächsten Abschnitt betrachten wir zunächst den einfachen Fall einer linearen Parameterdarstellung φ.

3.2.3 k-dimensionales Volumen eines Parallelotops im $\mathbb{R}^n$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $k < n$. Wir wollen das k-dimensionale Volumen von $\varphi([0,1]^k)$ bestimmen. Dies ist ein sogenanntes Parallelotop. Für $k = 1$ ist dies eine Strecke, für $k = 2$ ein Parallelogramm, für $k = 3$ ein Parallelepiped.

Sei $\varphi(x) = Vx$ mit einer Matrix $V \in \mathbb{R}^{n,k}$, deren Spalten wir mit v_i bezeichnen. Dann ist

$$\varphi([0,1]^k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \ \lambda_i \in [0,1] \right\}$$

Wir setzen

$$P_j := \left\{ \sum_{i=1}^j \lambda_i v_i : \ \lambda_i \in [0,1] \right\}.$$

Wir wollen nun das j-dimensionale Volumen von P_j berechnen unter folgender Annahme:

$$\operatorname{vol}_{j+1} P_{j+1} = \operatorname{vol}_j P_j \cdot h_{j+1} \tag{3.14}$$

wobei h_{j+1} die Höhe von v_{j+1} über P_j ist. Dann gilt

$$h_{j+1} = \operatorname{dist}(v_{j+1},\ \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)).$$

Für $j = 1$ erhalten wir $\operatorname{vol}_1(P_1) = \|v_1\|_2$.

Lemma 3.15. *Unter den Voraussetzungen* (3.14) *und* $\operatorname{vol}_1(P_1) = \|v_1\|_2$ *gilt für alle* $j \leq k$

$$\operatorname{vol}_j P_j = \sqrt{\det(V_j^T V_j)},$$

wobei $V_j = (v_1, \ldots, v_j)$.

Beweis. Sei die Behauptung für $1 \leq j < k$ bewiesen. Aus der orthogonalen Zerlegung $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) \oplus (\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j))^\perp$ bekommen wir

$$v_{j+1} = u + w$$

mit $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$ und $u = (\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j))^\perp$. Sei $\tilde{w} \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$. Dann ist $\|v_{j+1} - \tilde{w}\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|w - \tilde{w}\|_2^2$, und damit gilt

$$h_{j+1} = \operatorname{dist}(v_{j+1},\ \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)) = \|u\|_2.$$

Da $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$ existiert $s \in \mathbb{R}^j$ mit $w = V_j s$. Weiter ist $V_j^T u = 0$. Dann ist

$$V_{j+1} = \begin{pmatrix} V_j & v_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j & V_j s + u \end{pmatrix}.$$

Um s zu eliminieren, multiplizieren wir V_{j+1} von rechts mit $R = \begin{pmatrix} I_j & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$V_{j+1} R = \begin{pmatrix} V_j & V_j s + u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_j & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j & u \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt wegen $V_j^T u = 0$

$$(V_{j+1}R)^T V_{j+1} R = \begin{pmatrix} V_j^T \\ u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_j & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j^T V_j & 0 \\ 0 & \|u\|_2^2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(R) = 1$ bekommen wir

$$\det(V_{j+1}^T V_{j+1}) = \det(R^T V_{j+1}^T V_{j+1} R) = \det(V_j^T V_j) \cdot \|u\|_2^2.$$

Wegen der Voraussetzungen ist $\det(V_j^T V_j) \cdot \|u\|_2^2 = (\operatorname{vol}_{j+1} P_{j+1})^2$, und der Induktionsbeweis ist vollständig. □

Für $k = n$ erhalten wir das Resultat von Satz 1.83. Achtung: Da $V_j \in \mathbb{R}^{n,j}$ ist, lässt sich die Formel $\det(V_j^T V_j)$ für $j < n$ *nicht* zu $\det(V_j)^2$ vereinfachen. Mithilfe der Cauchy-Binet-Formel kann $\det(V_j^T V_j)$ allerdings über Determinanten von quadratischen Untermatrizen berechnet werden.

Lemma 3.16 (Cauchy-Binet-Formel)**.** *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $n > m$. Dann gilt*

$$\det(AB^T) = \sum_I \det(A_I) \det(B_I),$$

wobei die Summe über alle m-elementigen Teilmengen I von $\{1, \ldots, n\}$ geht, und A_I die Matrix bezeichnet, die die Spalten i von A mit $i \in I$ enthält.

Beweis. Für einen Beweis siehe [For17, Satz 14.6], welcher auch für Matrizen über einem kommutativen Ring mit Eins funktioniert. □

Dieses Resultat hat mithilfe von Lemma 3.15 auch eine geometrische Interpretation: das Quadrat des k-dimensionalen Volumen eines Parallelotops ist gleich der Summe der Quadrate der k-dimensionalen Volumen der Projektionen des Parallelotops auf alle Kombinationen k-dimensionaler Koordinatenebenen, siehe auch [Kon13]. Für $k = 1$ ist dies nichts anderes als der Satz von Pythagoras.

3.3 Lebesgue-Messbarkeit als lokale Eigenschaft

Wir beweisen noch eine lokale Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen. Wir starten mit einem Hilfsresultat.

Lemma 3.17 (Existenz von abzählbaren Teilüberdeckungen)**.** *Sei $\mathcal{O}$ eine Menge offener Mengen des $\mathbb{R}^n$. Sei $A \in \mathbb{R}^n$ eine Menge mit der Eigenschaft: für alle $x \in A$ existiert $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$. Dann existieren abzählbar viele (O_j) mit $O_j \in \mathcal{O}$ und $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$.*

Beweis. Definiere die abzählbare Menge $Q := \{(x, \rho) \in \mathbb{Q}^{n+1} : \ \rho > 0\}$. Sei $q = (x, \rho) \in Q$. Falls es eine Menge $O \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $B_\rho(x) \subseteq O$ ist, dann wählen wir eine solche Menge O und setzen $O_q := O$, sonst $O_q := \emptyset$. Mit dieser Strategie müssen wir nur abzählbar viele Auswahlen vornehmen.

Wir zeigen, dass gilt $A \subseteq \bigcup_{q\in Q} O_q$. Sei $x \in A$. Dann gibt es eine Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$. Dann existiert $r > 0$, so dass $B_r(x) \subseteq O$. Sei $\rho \in (0, r/2) \cap \mathbb{Q}$. Dann existiert $x' \in B_\rho(x) \cap \mathbb{Q}^n$. Damit ist $x \in B_\rho(x') \subseteq B_r(x) \subseteq O$. Für $q := (x', \rho)$ ist dann $O_q \neq \emptyset$. Aus der Konstruktion von O_q folgt $x \in B_\rho(x') \subseteq O_q$. □

Folgerung 3.18. *Sei I eine Indexmenge, $O_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen für alle $i \in I$. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$ so, dass*

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{j\in J} O_j.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.17 mit $\mathcal{O} = \{O_i : \ i \in I\}$. □

Bemerkung 3.19. *Die rationalen Kugeln $(B_\rho(x))_{(x,\rho)\in Q}$ im Beweis von Folgerung 3.18 sind eine abzählbare Basis der Topologie auf dem $\mathbb{R}^n$: jede offene Menge ist eine Vereinigung von Elementen der Basis. Die Behauptung von Folgerung 3.18 nennt man die Lindelöf-Eigenschaft (von $\mathbb{R}^n$).*

Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann ist die Existenz einer abzählbaren Basis und die Lindelöf-Eigenschaft äquivalent zur Separabilität von (X, d), siehe

[AE01, Satz IX.1.8]. Dabei ist (X, d) separabel, wenn es eine abzählbare, dichte Menge $D \subseteq X$ gibt, d.h. der Abschluss von D ist M. Ist (X, d) separabel, dann ist auch jeder Teilraum separabel.

Der Beweis von Lemma 3.17 lässt sich auf separable metrische Räume (X, d) übertragen: man ersetzt $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{Q}^n$ durch X und die abzählbare, dichte Teilmenge.

Folgerung 3.20. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $A \in \mathcal{L}(n)$ genau dann, wenn für alle $x \in A$ eine offene Umgebung $O \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $A \cap O \in \mathcal{L}(n)$ ist.*

Beweis. [AE01, Bemerkung IX.5.14(c)] Es ist nur die Richtung ($\Leftarrow$) zu beweisen. Aus Lemma 3.17 mit $\mathcal{O} = \{O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen mit } A \cap O \in \mathcal{L}(n)\}$ folgt $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty O_j$ mit $O_j \in \mathcal{O}$. Dies impliziert $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty (O_j \cap A) \subseteq A$, und $A \in \mathcal{L}(n)$. □

Folgerung 3.21. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Dann hat M einen abzählbaren Atlas der Klasse C^α.*

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{O} = \{O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} : \ \exists \text{ lokale Parameterdarstellung } \varphi : T \to M \cap O\}.$$

Wegen Satz 3.10 existiert für jedes $a \in M$ ein $O \in \mathcal{O}$ mit $a \in O$. Mit Lemma 3.17 folgt $M \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty O_j$ mit $O_j \in O$. Zu jedem O_j gehört eine lokale Parameterdarstellung $\varphi_j : T_j \to M \cap O_j$. Die Funktionen (φ_j) sind der gewünschte Atlas. □

Bemerkung 3.22. *Die Beweise in diesem Abschnitt benutzen nur das abzählbare Auswahlaxiom nicht das volle Auswahlaxiom. Der folgende Beweis von Folgerung 3.21 benutzt allerdings das volle Auswahlaxiom:*

Wegen Satz 3.10 existiert für jedes $a \in M$ eine lokale Parameterdarstellung $\varphi_a : T \to V_a$. Dann existiert eine offene Menge $O_a \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V_a = M \cap O_a$. Dann ist $M \subseteq \bigcup_{a \in A} O_a$. Nach Folgerung 3.18 gibt es ein abzählbare Teilüberdeckung. Der Schluss ist dann wie im Beweis von Folgerung 3.21. Zum Aufstellen der Behauptung $M \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$ müssen wir für jedes a eine Auswahl treffen, das sind im Allgemeinen überabzählbar viele.

3.4 Maß und Integral auf Untermannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Wir definieren nun Messbarkeit von Teilmengen von M analog zur lokalen Charakterisierung von messbaren Mengen in Folgerung 3.20. Wir folgen [AE01, Abschnitt XII.1], dort werden allerdings Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachtet.

Definition 3.23. *Es sei $A \subseteq M$. Dann heißt A messbar genau dann, wenn für alle $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq M$ und eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert, so dass $\varphi^{-1}(A \cap V) \in \mathcal{L}(k)$ ist.*

Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir φ als Abbildung nach M betrachten, und mit $\varphi^{-1}(A)$ das Urbild von A unter der Abbildung $\varphi : T \to M$ bezeichnen. An Stellen, wo wir die Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : V \to T$ brauchen, werden wir dann die Schreibweise $\varphi^{-1}(A \cap V)$ benutzen. Wir werden also im Folgenden

$$\varphi^{-1}(A \cap V) = \varphi^{-1}(A)$$

miteinander identifizieren.

Wir zeigen nun, dass die Definition der Messbarkeit unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung ist.

Satz 3.24. *Sei $A \subseteq M$. Dann ist A messbar genau dann, wenn für alle lokalen Parameterdarstellungen $\varphi : T \to V$ gilt $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$.*

Beweis. Es ist nur die Richtung ($\Rightarrow$) zu beweisen. Sei also $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung.

Sei $a \in V$. Dann gibt es nach Definition 3.23 $\varphi_a : T_a \to V_a$ mit $\varphi_a^{-1}(A \cap V_a) \in \mathcal{L}(k)$. Da V offen ist, ist

$$\varphi_a^{-1}(A \cap V_a \cap V) = \varphi_a^{-1}(A \cap V_a) \cap \varphi_a^{-1}(V_a \cap V) \in \mathcal{L}(k).$$

Da $\varphi^{-1} \circ \varphi_a$ ein Diffeomorphismus ist (Satz 3.11), ist wegen Lemma 2.115

$$\varphi^{-1}(A \cap V \cap V_a) = (\varphi^{-1} \circ \varphi_a)\left(\varphi_a^{-1}(A \cap V \cap V_a)\right) \in \mathcal{L}(k).$$

Nach Folgerung 3.18 angewendet auf $\mathcal{O} = \{O \text{ offen} : \ V_a \cap M = O, \ a \in V\}$ gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq V$, so dass $V = \bigcup_{a \in J}(V \cap V_a)$. Damit folgt

$$\varphi^{-1}(A \cap V) = \bigcup_{a \in J} \varphi^{-1}(A \cap V \cap V_a) \in \mathcal{L}(k),$$

was die Behauptung ist. □

Definition 3.25. *Es sei $\mathcal{L}_M := \{A \subseteq M : \ A \text{ messbar}\}$ die Menge der messbaren Mengen auf M.*

Lemma 3.26. *$\mathcal{L}_M$ ist eine σ-Algebra, und es gilt $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{L}_M$.*

Beweis. Dies ist eine Konsequenz von Satz 3.24. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Dann ist $M \in \mathcal{L}_M$, da $\varphi^{-1}(M) = T \in \mathcal{L}(k)$ ist.

Sei $A \in \mathcal{L}_M$. Dann ist $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$, und es folgt $\varphi^{-1}(A^c) = T \setminus \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$. Sind (A_j) abzählbar viele Mengen aus $\mathcal{L}_M$, dann ist $\varphi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \bigcup_{j=1}^\infty \varphi^{-1}(A_j) \in \mathcal{L}(k)$. Sei $O \subseteq M$ offen in (M, d_2). Dann ist $\varphi^{-1}(O)$ offen, also in $\mathcal{L}(k)$. Daraus folgt $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{L}(M)$. □

Wir konstruieren nun ein Maß auf M. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Ist $W \subseteq T$ ein Würfel mit $t \in W$, dann ist $\varphi(W) \approx \varphi(t) + \varphi'(t)(W - t)$. Nach den Berechnungen in Abschnitt 3.2.3 hat dann $\varphi(W)$ das "Maß" $\sqrt{\det \varphi'^T(t)\varphi'(t)}\,\mathrm{vol}_k(W)$. Das Integral über den Bildbereich $T = \varphi(V)$ sollte analog zum Transformationssatz Satz 2.120 wie folgt aussehen

$$\int_{\varphi(V)} \chi_A \,\mathrm{d}\lambda_M \stackrel{?}{=} \int_V (\chi_A \circ \varphi) \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}\,\mathrm{d}\lambda_k, \tag{3.27}$$

wobei wir $\sqrt{\det \varphi'^T(t)\varphi'(t)}$ anstelle des in dieser Situation nicht definierten Ausdrucks $|\det \varphi'|$ geschrieben haben. Diese Gleichung (3.27) dient nur zur Motivation der folgenden Entwicklungen. Wir wollen nun ein Maß λ_M auf M konstruieren, welches (3.27) erfüllt.

Wir beginnen mit der folgenden Definition. Für $A \in \mathcal{L}_M$ definieren wir

$$\lambda_{M,V}(A) := \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}\ \mathrm{d}\lambda_k.$$

Hier ist $\chi_{\varphi^{-1}(A)} = \chi_A \circ \varphi$ die Transformation von χ_A. Der Ausdruck $\varphi'^T\varphi'$ heißt auch Maßtensor, und $\det \varphi'^T\varphi'$ Gramsche Determinante. Zuerst berechnen wir, wie sich dieser unter Koordinatentransformationen verhält.

Lemma 3.28. *Sei $V \subseteq M$ offen, $\varphi : T \to V$ und $\tilde\varphi : \tilde T \to V$ lokale Parameterdarstellungen. Sei $\tau = \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi : T \to \tilde T$. Dann ist*

$$(\sqrt{\det \tilde\varphi'^T \tilde\varphi'} \circ \tau) \cdot |\det \tau'| = \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}$$

auf T.

Beweis. Sei $t \in T$. Dann ist $\varphi = \tilde\varphi \circ \tau$ und

$$\varphi'(t) = \tilde\varphi'(\tau(t)) \cdot \tau'(t).$$

Es folgt

$$\varphi'(t)^T \varphi(t) = \tau'(t)^T \cdot \tilde\varphi'(\tau(t))^T \tilde\varphi'(\tau(t)) \cdot \tau'(t),$$

woraus wir nach Anwenden der Determinante

$$\begin{aligned}\det(\varphi'(t)^T\varphi(t)) &= \det(\tau'(t))^2 \cdot \det\left(\tilde\varphi'(\tau(t))^T \tilde\varphi'(\tau(t))\right)\\ &= \det(\tau'(t))^2 \cdot (\det(\tilde\varphi'^T\tilde\varphi') \circ \tau)(t)\end{aligned}$$

bekommen, was die Behauptung ist. □

An diesem Resultat können wir schon sehen, dass die Wahl des Terms $\sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}$ vernünftig war: bei Koordinatentransformation auf eine andere Parameterdarstellung entsteht der zusätzliche Faktor $|\det \tau'|$, dieser wird dann durch die Anwendung des Transformationssatzes Satz 2.120 kompensiert.

Lemma 3.29. *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V}$ wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl von φ.*

Beweis. Sei $\tilde\varphi : \tilde T \to V$ eine weitere lokale Parameterdarstellung. Sei $\tau : T \to \tilde T$ die Koordinatentransformation $\tau = \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi$ von Satz 3.11. Dann ist nach dem Transformationssatz Satz 2.120

$$\int_{\tilde T} \chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde\varphi'^T\tilde\varphi'}\ \mathrm{d}\lambda_k = \int_T \left(\chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde\varphi'^T\tilde\varphi'}\right) \circ \tau \cdot \det |\tau'|\, \mathrm{d}\lambda_k.$$

Wegen

$$\chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \circ \tau = \chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \circ \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi = \chi_A \circ \varphi = \chi_{\varphi^{-1}(A)}$$

und der Transformation für den Maßtensor Lemma 3.28 erhalten wir

$$\int_{\tilde T} \chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde\varphi'^T\tilde\varphi'}\ \mathrm{d}\lambda_k = \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A)}(t) \sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}\, \mathrm{d}\lambda_k.$$

Damit ist der Wert $\lambda_{M,V}(A)$ unabhängig von der Wahl von φ (und T). □

Folgerung 3.30. *Es sei $A \in \mathcal{L}_M$ und $V', V \subseteq M$ offen mit $A \subseteq V' \subseteq V$ und einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V'}(A) = \lambda_{M,V}(A)$.*

Beweis. Die Einschränkung von φ auf $\varphi^{-1}(V')$ ist eine lokale Parameterdarstellung mit Werten in V'. Die Behauptung folgt mit Lemma 3.29. □

Folgerung 3.31. *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Die Mengenfunktion $\lambda_{M,V}$ ist ein positives Maß auf $\mathcal{L}_M$.*

Beweis. Die σ-Additivität folgt aus der Bijektivität von φ und monotoner Konvergenz, siehe auch Aufgabe 2.49. □

Lemma 3.32. *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V}$ σ-endlich.*

Beweis. Definiere $T_r := \{x \in T :\ |x| \le r,\ d(x, \partial T) \ge r^{-1}\}$. Dann ist T_r eine kompakte Teilmenge von T, siehe auch Lemma 2.98. Auf T_r ist $\sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}$ beschränkt, damit ist

$$\lambda_{M,V}(\varphi(T_r)) = \int_{T_r} \sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}\ \mathrm{d}\lambda_k < \infty.$$

Setze $M_r := (M \cap V^c) \cup \varphi(T_r)$. Daraus folgt $\lambda_{M,V}(M_r) = \lambda_{M,V}(\varphi(T_r))$ und $\bigcup_{r=1}^\infty M_r = M$. Also ist $\lambda_{M,V}$ σ-endlich. $\square$

Beispiel 3.33. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $t \in I$ eine offene Umgebung $T \subseteq I$, so dass $\varphi : T \to \varphi(T)$ eine lokale Parameterdarstellung ist. Weiter ist $\varphi'(t) \in \mathbb{R}^n$, so dass $\det(\varphi'(t)^T\varphi'(t)) = \|\varphi'(t)\|_2^2$ ist.*

Beispiel 3.34. *Sei M eine Untermannigfaltigkeit, die lokal durch den Graph von g parametrisiert ist, also $(x', g(x')) \in M$ gilt für $x' \in U'$. Dann ist $\varphi(x') := (x', g(x')) : U' \to \varphi(U')$ eine lokale Parameterdarstellung von M, siehe den Beweis von Satz 3.10. Daraus folgt dann $\varphi'(x') = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ g'(x') \end{pmatrix}$ und $\varphi'(x')^T\varphi'(x') = I_{n-1} + g'(x')^T g'(x')$. Die Determinante kann man mit der folgenden Faktorisierung berechnen: Sei $u := g'(x')^T$, $I := I_{n-1}$. Dann ist*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & I + uu^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \|u\|_2^2 & 0 \\ u & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u^T \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Und es gilt $\det(\varphi'(x')^T\varphi'(x')) = 1 + \|g'(x')\|_2^2$.

Aufgabe 3.35. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zeigen Sie: $\det(I_n + A^T B) = \det(I_m + BA^T)$.*

Sei $A \in \mathcal{L}_M$. Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$, welcher nach Folgerung 3.21 existiert. Wähle $A_j \subseteq V_j$ mit $A_j \in \mathcal{L}_M$ so, dass $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ eine disjunkte Vereinigung ist. Eine Möglichkeit ist $A_j = (A \cap V_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$. Dann definiere

$$\lambda_M(A) := \sum_{j=1}^\infty \lambda_{M,V_j}(A_j).$$

Dieses Maß wird auch als Volumenmaß oder Oberflächenmaß auf M bezeichnet.

Lemma 3.36. *λ_M ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Atlas (φ_j) und der Mengen (A_j).*

Beweis. Es sei $(\tilde\varphi_k)$ ein weiterer Atlas von M mit $\tilde\varphi_k : \tilde T_k \to \tilde V_k$ mit messbaren und disjunkten Mengen $\tilde A_k \subseteq \tilde V_k$ und $A = \bigcup_{k=1}^\infty \tilde A_k$.

Angenommen $\tilde A_k \cap A_j \neq \emptyset$. Dann ist $\tilde A_k \cap A_j \subseteq \tilde V_k \cap V_j$, und wegen Folgerung 3.30 gilt

$$\lambda_{M,\tilde V_k}(\tilde A_k \cap A_j) = \lambda_{M,\tilde V_k \cap V_j}(\tilde A_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(\tilde A_k \cap A_j).$$

Aufsummieren über k ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k \cap A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(\tilde{A}_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(A_j).$$

Aufsummieren über j ergibt aufgrund der σ-Additivität von $\lambda_{M,\tilde{V}_k}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k \cap A_j).$$

Anwenden von Fubini (Satz 2.84 mit den Maßräumen $X = Y = \mathbb{N}$ mit $\mu = \nu =$ Zählmaß) ergibt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k \cap A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k),$$

wobei wir die σ-Additivität von $\lambda_{M,\tilde{V}_k}$ benutzt haben. □

Satz 3.37. *λ_M ist ein positives Maß auf $(M, \mathcal{L}_M)$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\lambda_M \geq 0$ und $\lambda_M(\emptyset) = 0$.

Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Definiere die Mengen $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \in \mathcal{B}(M)$. Sei (A_k) eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{L}_M$. Setze $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist

$$\lambda_M(A_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j)$$

und mit dem Satz von Fubini (Satz 2.84) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_M(A_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A \cap U_j) = \lambda_M(A),\end{aligned}$$

also ist λ_M σ-additiv. □

Aufgabe 3.38. *Sei $A \in \mathcal{L}_M$ und $\varphi : T \to V$ mit $A \subseteq V$. Dann ist $\lambda_M(A) = \lambda_{M,V}(A)$.*

Aufgabe 3.39. *Sei $N \in \mathcal{L}_M$ mit $\lambda_M(N) = 0$. Dann gilt $\lambda_{M,V} = 0$ für alle V, für die eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert.*

Satz 3.40. *Das Maß λ_M ist vollständig, σ-endlich und regulär.*

Beweis. Sei $N \in \mathcal{L}_M$ mit $\lambda_M(N) = 0$. Sei $A \subseteq N$. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Dann ist $\varphi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(k)$. Weiter ist $\lambda_{M,V}(N) = 0$ nach Aufgabe 3.39, also $\int_T \chi_{\varphi^{-1}(N)} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \, \mathrm{d}\lambda_k = 0$. Da $\sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} > 0$ auf T folgt $\chi_{\varphi^{-1}(N)} = 0$ λ_k-fast überall auf T (Satz 2.45), und $\varphi^{-1}(N)$ ist eine λ_k-Nullmenge. Damit ist $\varphi^{-1}(A)$ Teilmenge einer Nullmenge, also $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$. Nach Satz 3.24 ist $A \in \mathcal{L}_M$. Und λ_M ist vollständig.

Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Definiere die Mengen $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \in \mathcal{B}(M)$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = M$ eine disjunkte Vereinigung.

Da λ_{M,V_j} σ-endlich ist, existieren Folgen von Mengen $(M_{j,r})$ in $\mathcal{L}_M$ mit $\bigcup_{r=1}^{\infty} M_{j,r} = M$ und $\lambda_{M,V_j}(M_{j,r}) < \infty$. Weiter ist

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} M_{j,r} \cap U_j = M.$$

Definiere

$$M_k := \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{r=1}^{k} (M_{i,r} \cap U_i).$$

Dann ist

$$M_k \cap U_j = \begin{cases} \bigcup_{r=1}^{k} (M_{j,r} \cap U_j) & \text{falls } j \leq k \\ \emptyset & \text{falls } j > k. \end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda_M(M_k) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(M_k \cap U_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_{M,V_j}(M_k \cap U_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{k} \lambda_{M,V_j}(M_{j,r} \cap U_j). \end{aligned}$$

Alle Summanden in dieser endlichen Summe sind endlich, also ist $\lambda_M(M_k) < \infty$, und wegen $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = M$ ist λ_M σ-endlich.

Für den Beweis der Regularität verweisen wir auf [AE01, Satz XII.1.5]. □

Damit ist $(M, \mathcal{L}_M, \lambda_M)$ ein vernünftiger Maßraum, und wir können die komplette Integrationstheorie anwenden. Im Rest dieses Abschnittes werden wir noch untersuchen, wann Funktionen von M nach $\bar{\mathbb{R}}$ messbar und integrierbar sind.

Satz 3.41. *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann ist f $\mathcal{L}_M$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar genau dann, wenn für jede lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ die Funktion $f \circ \varphi$ $\mathcal{L}(k)$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist.*

Beweis. (1) Sei f $\mathcal{L}_M - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbar, $\varphi : T \to V$ lokale Parameterdarstellung.

Sei $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Dann ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}_M$, woraus $\varphi^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{L}(k)$ folgt. Da $(f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$ folgt die Behauptung.

(2) Wir zeigen nun, dass aus $(f \circ \varphi)^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$ folgt $f^{-1}(A) \cap V \in \mathcal{L}_M$. Sei $B := (f \circ \varphi)^{-1}(A)$. Dann ist $f^{-1}(A) \cap V = \varphi(B)$.

Sei nun $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to \tilde{V}$ eine weitere lokale Parameterdarstellung. Ist $\tilde{V} \cap V = \emptyset$ dann ist $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B)) = \emptyset$. Anderenfalls ist

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B)) = \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B) \cap V \cap \tilde{V}) = (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(B \cap \varphi^{-1}(\tilde{V} \cap V)) \in \mathcal{L}(k),$$

da $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ ein Diffeomorphismus ist, $B \in \mathcal{L}(k)$, und $\varphi^{-1}(\tilde{V} \cap V)$ offen ist. Daraus folgt $\varphi(B) = f^{-1}(A) \cap V \in \mathcal{L}_M$ mit Satz 3.24.

(3) Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Sei $f \circ \varphi_j$ $\mathcal{L}(k)$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar für alle j. Sei $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Dann ist $\varphi_j^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{L}(k)$. Nach (2) folgt damit $f^{-1}(A) \cap V_j \in \mathcal{L}_M$. Damit ist auch $f^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(f^{-1}(A) \cap V_j) \in \mathcal{L}_M$. □

Das nächste Resultat ist eine lokale Charakterisierung von Integrierbarkeit.

Lemma 3.42. *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung.*

Dann ist $\chi_V \cdot f$ λ_M-integrierbar genau dann, wenn $f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}$ λ_k-integrierbar ist.

Ist f nicht-negativ, oder ist $\chi_V \cdot f$ λ_M-integrierbar, dann gilt

$$\int \chi_V f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_T f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Beweis. Nach Definition ist f integrierbar genau dann, wenn f^+ und $-f^-$ integrierbar sind. Damit reicht es, die Gleichheit der Integrale für nicht negative Funktionen zu beweisen.

Sei zuerst $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$ eine einfache Funktion. Dann sind auch $\chi_V f$ und $(\chi_V f) \circ \varphi = f \circ \varphi$ einfache Funktionen, und nach der Definition des Lebesgue-Integrals für einfache Funktionen ist

$$\begin{aligned} \int_M \chi_V f \,\mathrm{d}\lambda_M &= \sum_{j=1}^n c_j \lambda_M(A_j \cap V) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_{M,V}(A_j \cap V) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A_j)} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_k \\ &= \int_T f \circ \varphi \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \,\mathrm{d}\lambda_k. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nun sei $f \geq 0$ messbar. Dann approximieren wir f durch eine Folge einfacher Funktionen (f_j). Für jede Funktion f_j gilt die Gleichung (3.43). Mit monotoner

Konvergenz angewendet auf (3.43) folgt, dass f (3.43) erfüllt. Insbesondere ist eine Seite der Gleichung ein endlicher Wert genau dann, wenn es die andere Seite ist. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Es fehlt noch eine Möglichkeit, das Integral $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M$ zu berechnen. Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Es sei (α_j) eine Zerlegung der Eins bezüglich (V_j), das heißt

(1) $\alpha_j : M \to [0, +\infty)$ messbar,

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in M$,

(3) $\alpha_j(x) = 0$ für alle $x \notin V_j$.

Zum Beispiel kann $\alpha_j := \chi_{U_j}$ gewählt werden mit $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$.

Satz 3.44. *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f integrierbar bezüglich λ_M genau dann, wenn für jeden Atlas (φ_j) von M und passender Zerlegung der Eins (α_j) gilt: $f \cdot \alpha_j$ ist λ_M-integrierbar für alle j und*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (|f| \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \,\mathrm{d}\lambda_k < \infty.$$

In diesem Fall ist

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (f \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Beweis. Wegen monotoner Konvergenz ist

$$\int |f| \,\mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f| \cdot \alpha_j \,\mathrm{d}\lambda_M.$$

Aus Lemma 3.42 bekommen wir

$$\int |f| \,\mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (|f| \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \,\mathrm{d}\lambda_k,$$

woraus direkt die Charakterisierung der Integrierbarkeit folgt. Mit analogen Argumenten angewendet auf f^+ und $-f^-$ folgt die zweite Behauptung. $\square$

Beispiel 3.45. *Sei M eine Untermannigfaltigkeit, die lokal durch den Graph von g parametrisiert ist, also $(x', g(x')) \in M$ gilt für $x' \in U'$. Dann ist $\varphi(x') := (x', g(x')) : U' \to \varphi(U')$ eine lokale Parameterdarstellung von M, siehe den Beweis von Satz 3.10. Wie in Beispiel 3.34 gezeigt, gilt dann* $\det(\varphi'(x')^T \varphi'(x')) =$

$1 + \|g'(x')\|_2^2$. *Ist $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann kann das Integral von f über M wie folgt berechnet werden:*

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_{U'} f(x', g(x'))\sqrt{1 + \|g'(x')\|_2^2}\,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Lemma 3.46. *Sei $S_{n-1} = \{x : \ \|x\|_2 = 1\}$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar. Definiere $g : S_{n-1} \times (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ durch $g(x', r) := f(rx')$.*

Dann ist g $(\mathcal{B}(M) \otimes \mathcal{B}^1)$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{(0,+\infty)} \int_{S_{n-1}} g(x', r)\,\mathrm{d}\lambda_{S_{n-1}}(x')\ r^{n-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(r).$$

Beweis. Setze $I := (0, +\infty)$. Die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2}$ ist stetig differenzierbar von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^n$, also als Abbildung nach (S_{n-1}, d_2) stetig. Dann ist die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S_{n-1} \times I$ mit $\pi(x) = (\frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2)$ stetig mit stetiger Umkehrfunktion $\pi^{-1}(x', r) = rx'$, und als Abbildung nach $\mathbb{R}^{n+1}$ stetig differenzierbar. Weiter ist $g = f \circ \pi^{-1}$. Nach Lemma 1.81 ist π^{-1} $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}(S_{n-1} \times I)$ messbar. Damit ist g $\mathcal{B}(S_{n-1} \times I)$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar. Ähnlich zu Satz 1.19 zeigt man $\mathcal{B}(S_{n-1} \times I) = \mathcal{B}(S_{n-1}) \otimes \mathcal{B}^1$.

Sei $\varphi : T \to V \subseteq S_{n-1}$ eine lokale Parameterdarstellung von S_{n-1} (mit $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$). Dann ist die Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \neq 0, \ \frac{x}{\|x\|_2} \in V\}$ offen in $\mathbb{R}^n$. Definiere $\psi : T \times I \to U$ durch

$$\psi(t, r) = r\varphi(t) = \pi^{-1}(r, \varphi(t)).$$

Dann ist ψ bijektiv, stetig differenzierbar mit stetiger Umkehrfunktion. Die Ableitung von ψ ist

$$\psi'(t, r) = \begin{pmatrix} r\varphi'(t) & \varphi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Wegen $\|\varphi(t)\|_2 = 1$ für alle $t \in T$, folgt $\varphi(t)^T\varphi'(t) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \det(\psi'(t, r)^T\psi'(t, r)) &= r^{2(n-1)}\det(\varphi'(t)^T\varphi'(t)), \\ |\det\psi'(t, r)| &= r^{n-1}\sqrt{\det(\varphi'(t)^T\varphi'(t))}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_U f \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_{T\times I} f \circ \psi \cdot |\det\psi'|\,\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_I \int_T g(r, \varphi(t)) \cdot r^{n-1}\sqrt{\det(\varphi'(t)^T\varphi'(t))}\,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(r) \\ &= \int_I \int_V g(r, x')\,\mathrm{d}\lambda_{S_{n-1}}(x')\ r^{n-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(r). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mittels eines Überdeckungsarguments mithilfe eines abzählbaren Atlas von S_{n-1} und passender Zerlegung der Eins. $\square$

Für einen Beweis unter Benutzung der sogenannten co-area formula verweisen wir auf [EG92, Section 3.4.3].

Bemerkung 3.47. *Die Eigenschaft $M \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir entscheidend benutzt: sie steckt in der Definition des Maßtensors $\sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'}$, weil wir dort die Differenzierbarkeit von φ brauchen. Für allgemeine Mannigfaltigkeiten muss man die Existenz dieses Maßtensors voraussetzen, und annehmen, dass sich diese wie in Lemma 3.28 transformieren. Dies führt dann auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten.*

3.5 Mengen mit glattem Rand

Definition 3.48. *Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Sei $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor von M in a, wenn es eine stetig differenzierbare Kurve $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, gibt mit $\psi(0) = a$ und $\psi'(0) = v$. Die Menge aller Tangentialvektoren in a ist T_aM.*

Satz 3.49. *Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Sei $a \in M$. Dann gilt:*

(1) T_aM ist ein k-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

(2) Es sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung von M mit $\varphi(t) = a$. Dann sind die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \dots \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)$ eine Basis von T_aM.

(3) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a, $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{Rang} f'(a) = n - k$ und $M \cap U = \{x \in U : \ f(x) = 0\}$. Dann gilt

$$T_aM = \{v \in \mathbb{R}^n : \ f'(t)v = 0\}.$$

Beweis. Gelten (2) und (3) für offene Mengen U' und V' mit $a \in V' \subseteq M$ und $a \in U' \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gelten die Behauptungen auch für offene Mengen V und U mit $V' \subseteq V \subseteq M$ und $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$. Es reicht also, den Fall $V = M \cap U$ zu betrachten.

Sei nun $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung von M mit $\varphi(t) = a$, und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ wie unter (3), so dass $V = M \cap U$.

Wir definieren die linearen Unterräume

$$T_1 := \operatorname{span}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)\right), \quad T_2 := \ker f'(a).$$

Da $\operatorname{Rang}(\varphi'(t)) = k$ und $\operatorname{Rang} f'(a) = n-k$, gilt $\dim T_1 = \dim T_2 = k$. Es reicht daher, zu zeigen, dass gilt $T_1 \subseteq T_aM \subseteq T_2$.

Sei $v \in T_1$, also $v = \varphi'(t)w$ mit $w \in \mathbb{R}^k$. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $t+sw \in V$ für alle $|s| < \varepsilon$. Definiere $\psi(s) := \varphi(t+sw)$. Dann folgt $\psi(0) = a$ und $\psi'(0) = \varphi'(t)w = v$.

Sei nun $v \in T_aM$, Dann existiert eine Kurve $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, mit $\psi(0) = a$ und $\psi'(0) = v$. Dann ist $f(\psi(s)) = 0$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, damit folgt $(f \circ \psi)'(s) = 0$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Damit ist $0 = (f \circ \psi)'(0) = f'(\psi(0))\psi'(0) = f'(a)v$. □

Definition 3.50. *Ein Vektor $v \in T_aM^\perp$ heißt Normalenvektor von M in a. Die Menge aller Normalenvektoren in a ist N_aM.*

Definition 3.51. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und nicht leer. Dann heißt A kompakte Menge mit C^α-Rand, wenn für jedes $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ existieren mit*

(1) $A \cap U = \{x \in U : \ \psi(x) \le 0\}$,

(2) $\psi'(u) \neq 0$ für alle $u \in U$.

Lemma 3.52. *Sei A eine kompakte Menge mit C^α-Rand. Für $a \in \partial A$ seien U, ψ wie in der Definition. Dann gilt $\partial A \cap U = \{x \in U : \ \psi(x) = 0\}$ und $\operatorname{int} A \cap U = \{x \in U : \ \psi(x) < 0\} \neq \emptyset$. Insbesondere ist das Innere von A nicht leer.*

Beweis. Sei $x \in \partial A \cap U$. Dann gibt Folgen (x_j) und (y_j) mit $x_j \in A \cap U$ und $y_j \in A^c \cap U$ mit $x_j \to x$ und $y_j \to x$. Es gilt $\psi(x_j) \le 0 < \psi(y_j)$, und $\psi(x) = 0$ folgt.

Sei nun $x \in U$ mit $\psi(x) = 0$. Nach Definition ist $\psi'(x) \neq 0$. Betrachte die Funktion $f(s) := \psi(x + \psi'(x)^T s)$. Dann ist $f(0) = \psi(x) = 0$ und $f'(0) = \psi'(t)\psi'(x)^T > 0$. (Achtung: $\psi'(t) \in \mathbb{R}^{n,1}$ ist ein Zeilenvektor.) Damit existiert $\varepsilon > 0$, so dass $f(s) > 0$ für $s \in (0, +\varepsilon)$. Damit gehören die Punkte $x - \psi'(x)^T s$ für kleine $s > 0$ zu U aber nicht $A \cap U$, also ist $x \in \partial A \cap U$.

Analog argumentieren wir, dass $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(s) < 0$ für alle $s \in (-\varepsilon, 0)$. Damit ist $\{x \in U : \ \psi(x) < 0\} \neq \emptyset$. Da $\operatorname{int} A \cap U = (A \setminus \partial A) \cap U = A \cap (\partial A)^c \cap U$, folgt $\operatorname{int} A \cap U = \{x \in U : \ \psi(x) < 0\} \neq \emptyset$. □

Folgerung 3.53. *Sei A eine kompakte Menge mit C^α-Rand. Dann ist ∂A eine $(n-1)$-dimensionale C^α Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 3.52 und Definition 3.1. □

Satz 3.54. *Sei A eine kompakte Menge mit C^1-Rand. Sei $a \in \partial A$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $\nu(a) \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften*

(1) $\nu \in N_a(\partial A)$,

(2) $\|\nu\|_2 = 1$,

(3) $\exists \varepsilon > 0$: $a + t\nu \notin A$ *für alle* $t \in (0, \varepsilon)$.

Der Vektor $\nu(a)$ heißt äußerer Normaleneinheitsvektor von A in a. Weiter ist die Abbildung $a \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig von $(\partial A, d_2)$ nach $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei U und ψ wie in Definition 3.51. Setze $\nu(a) := \frac{1}{\|\psi'(a)\|_2}\psi'(a)^T$. Dann ist $a \mapsto \nu(a)$ stetig von ∂A nach $\mathbb{R}^n$.

Wegen Satz 3.49 ist $T_a(\partial A) = \ker(\psi'(a))$. Damit ist $N_a(\partial A) = \operatorname{span}(\psi'(a)^T)$, und $\nu \in N_a$. Die Eigenschaft $a + t\nu \notin A$ für kleine $t > 0$ folgt wie in Lemma 3.52. Insgesamt ist $\nu(a)$ eindeutig bestimmt. □

Beispiel 3.55. *Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I := (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, $U := U' \times I$. Weiter sei $g : U' \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$\begin{aligned} A &:= \{(x', x_n) \in U : \ x_n \le g(x')\}, \\ M &:= \{(x', x_n) \in U : \ x_n = g(x')\}. \end{aligned}$$

Dann können wir in Definition 3.51

$$\psi(x) := x_n - g(x')$$

setzen und bekommen den äußeren Normaleneinheitsvektor

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|g'(x')\|_2^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(x') \\ 1 \end{pmatrix} \quad x \in M.$$

3.6 Der Gaußsche Integralsatz

In diesem Abschnitt werden wir den Gaußschen Integralsatz beweisen, der eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes ist. Dieser Abschnitt folgt [For17, §15].

Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist die Divergenz von f definiert durch

$$\operatorname{div} f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Eine andere Schreibweise ist $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f$. Sei nun A kompakt mit glattem Rand. Das Ziel ist es, zu beweisen, dass

$$\int_A \operatorname{div} f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} \nu^T f \, \mathrm{d}\lambda_{\partial A}. \tag{3.56}$$

Für $n = 1$ und $A = (a, b)$ erhalten wir den Fundamentalsatz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wenden wir diese Gleichung angewendet auf das Vektorfeld $(0, \dots, 0, f, 0, \dots, 0)$ an, dann erhalten wir die komponentenweise Variante

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} f \cdot \nu_i \, \mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Gilt umgekehrt diese Gleichung für alle i, dann gilt auch (3.56). Wir beweisen die komponentenweise Gleichung zunächst für zwei Spezialfälle.

Lemma 3.57. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger (also $\operatorname{supp} f$ ist eine kompakte Teilmenge von U). Dann gilt*

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}\lambda_n = 0 \quad \forall i = 1 \dots n.$$

Beweis. Definiere

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in U, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\tilde{f}'(x) = 0$ für alle $x \notin U$. Sei nun $R > 0$ so, dass $\operatorname{supp} f \subseteq [-R, +R]^n$. Sei $z \in U$. Dann ist

$$\int_{(-R,+R)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(z_1 \dots z_{i-1}, x, z_{i+1}, \dots, z_n) \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = 0,$$

da $\tilde{f} = 0$ auf dem Rand von $[-R, +R]^n$. Mit dem Satz von Fubini Satz 2.84 folgt dann die Behauptung. □

Lemma 3.58. *Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I := (\alpha, \beta)$, $U := U' \times I$. Weiter sei $g : U' \to I \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$A := \{(x', x_n) \in U : \; x_n \le g(x')\},$$
$$M := \{(x', x_n) \in U : \; x_n = g(x')\}.$$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_M f \; \nu_i \, \mathrm{d}\lambda_M \quad \forall i = 1 \dots n.$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|g'(x')\|_2^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(x') \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. (1) Sei $i = n$. Dann ist wegen $f(x', \alpha) = 0$

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f}{\partial x_n} \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') \\ &= \int_{U'} f(x', g(x')) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x').\end{aligned}$$

Letzteres Integral können wir wegen Beispiel 3.45 und Beispiel 3.55 schreiben als

$$\begin{aligned}&\int_{U'} f(x', g(x')) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1} \\ &\qquad = \int_{U'} f(x', g(x')) \nu_n(x', g(x')) \sqrt{1 + \|g'(x')\|_2^2} \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') \\ &\qquad = \int_M f \ \nu_n \,\mathrm{d}\lambda_M.\end{aligned}$$

(2) Sei $i \in \{1 \dots n-1\}$. Nach dem Satz von Fubini (Satz 2.85) ist

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x').$$

Wir werden nun das innere Integral berechnen. Definiere die Hilfsfunktion $F : U' \times I \to \mathbb{R}$ durch $F(x', z) := \int_\alpha^z f(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)$. Dann bekommen wir aus den Eigenschaften des Riemann-Integrals

$$\frac{\partial}{\partial z} F(x', z) = f(x', z), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', z) = \int_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_\alpha^{g(x')} f(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \right) &= \frac{\partial}{\partial z} F(x', g(x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x') + \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) \\ &= f(x', g(x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x') + \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t).\end{aligned}$$

Die Abbildung $x' \mapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)$ hat kompakten Träger in U', damit ist nach Lemma 3.57

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_\alpha^{g(x')} f(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \right) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') = 0.$$

Wegen Beispiel 3.45 ist

$$\int_{U'} f(x', g(x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x') \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') = -\int_M f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}\lambda_M.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') \\
&= -\int_{U'} f(x', g(x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x') = \int_M f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}\lambda_M,
\end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Dieses Resultat bleibt auch richtig, falls eine Umnummerierung nötig ist, um ∂A lokal als Graph zu schreiben: Sei zum Beispiel x_j eine Funktion der anderen Koordinaten. Sei $\sigma : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}$ eine bijektive Abbildung mit $\sigma(n) = j$. Dann folgt

$$x_j = x_{\sigma(n)} = g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}).$$

Dann zeigt der Beweis von Lemma 3.58 (nun mit der Fallunterscheidung $i = j$, $i \neq j$)

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma(i)}} \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_M f \; \nu_{\sigma(i)} \,\mathrm{d}\lambda_M,$$

und die Umnummerierung hat keinen Einfluss.

Aufgabe 3.59. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq U$ kompakt. Zeigen Sie: $\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', t) \in K,\ t \in \mathbb{R}\}$ ist kompakt.*

Konstruktion einer glatten Zerlegung der Eins Wir wollen nun unendlich oft stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger konstruieren, deren Summe überall gleich Eins ist. Definiere

$$g(x) := \begin{cases} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{1-x_i^2}} & \text{falls } x \in (-1,1)^n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist g unendlich oft stetig differenzierbar mit $\operatorname{supp} g = [-1, 1]^n$. Setze

$$J(x) := \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} g(x - p).$$

Für gegebenes x sind nur endlich viele Terme nicht Null. Auch J ist unendlich oft stetig differenzierbar mit $J(x) > 0$ für alle x. Weiter ist J periodisch mit $J(x) = J(x-p)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{Z}^n$. Setze

$$h(x) := \frac{g(x)}{J(x)}.$$

Dann gilt $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} h(x-p) = 1$ für alle x. Für $p \in \mathbb{Z}^n$, $\varepsilon > 0$ definiere

$$\alpha_{p,\varepsilon}(x) := h\left(\frac{x}{\varepsilon} - p\right).$$

Dann ist $\operatorname{supp}\alpha_{p,\varepsilon} = \varepsilon(p + [-1,1]^n)$, und es folgt $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\alpha_{p,\varepsilon}) = 2\varepsilon\sqrt{n}$. Es gilt $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{p,\varepsilon}(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 3.60. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann existiert ein $\lambda > 0$, so dass für alle $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \cap A \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(B) < \lambda$ ein $i \in I$ existiert mit $B \subseteq U_i$.*

Beweis. Definiere

$$\mathcal{O} := \{B_\rho(x) : \ x \in A,\ \rho > 0,\ \ B_{2\rho}(x) \subseteq U_i \text{ für ein } i \in I\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Überdeckung von A, $A \subseteq \bigcup_{O\in\mathcal{O}} O$. Es existiert also eine endliche Überdeckung, das heißt, es gilt $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_{\rho_j}(x_j)$ mit $x_j \in A$, und für jedes j existiert $i_j \in I$ mit $B_{2\rho_j}(x_j) \subseteq U_{i_j}$. Setze $\lambda := \min_{j=1\ldots m} \rho_j$.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \cap A \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(B) < \lambda$. Sei $x \in B \cap A$. Dann gibt es ein j, so dass $x \in B_{\rho_j}(x_j)$. Es folgt $B \subseteq B_{\rho_j + \operatorname{diam} B}(x_j)$. Da $\operatorname{diam}(B) < \lambda \le \rho_j$ folgt $B \subseteq B_{2\rho_j}(x_j) \subseteq U_{i_j}$. □

Satz 3.61 (Gaußscher Integralsatz)**.** *Sei A eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand. Sei $U \supseteq A$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei ν der äußere Normaleneinheitsvektor von A. Dann gilt*

$$\int_A \operatorname{div} f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} \nu^T f \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Beweis. Wir konstruieren eine Überdeckung von A durch ein System $\mathcal{O}$ von offenen Mengen. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Dann definieren wir $\mathcal{O}$ folgendermaßen: Es ist $O \in \mathcal{O}$ genau dann, wenn $O \subseteq \operatorname{int} A$ oder, wenn $O \subseteq U$ und $\partial A \cap O$ ein Graph einer Funktion gemäß Satz 3.3 ist.

Nach Lemma 3.60 existiert ein $\lambda > 0$, so dass für alle $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \cap A \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(B) < \lambda$ ein $O \in \mathcal{O}$ existiert mit $B \subseteq O$. Sei $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda}{2\sqrt{n}})$. Dann ist $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\alpha_{p,\varepsilon}) < \lambda$. Sei $P := \{p \in \mathbb{Z}^n : \ \operatorname{supp}\alpha_{p,\varepsilon} \cap A \neq \emptyset\}$. Da A kompakt ist, ist P endlich. Weiter gilt

$$\int_A \operatorname{div} f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_A \operatorname{div}(f \cdot \sum_{p\in P} \alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n = \sum_{p\in P} \int_A \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Die Funktionen $f\alpha_{p,\varepsilon}$ haben kompakten Träger und sind stetig differenzierbar.

Sei $p \in P$. Dann existiert eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $\operatorname{supp} \alpha_{p,\varepsilon} \subseteq O$. Damit ist $\operatorname{supp}(f\alpha_{p,\varepsilon})$ eine kompakte Teilmenge von O.

Angenommen $O \subseteq \operatorname{int} A$. Dann folgt mit Lemma 3.57

$$\int_A \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_O \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n = 0 = \int_{\partial A} \nu^T f \cdot \alpha_{p,\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Anderenfalls ist $O \subseteq U$ so, dass $\partial A \cap O$ ein Graph einer Funktion gemäß Satz 3.3 ist. Hier können wir Lemma 3.58 (inklusive Nachbemerkung) anwenden, und es folgt

$$\begin{aligned}\int_A \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_O \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_{O\cap\partial A} \nu^T f \cdot \alpha_{p,\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A} \\ &= \int_{\partial A} \nu^T f \cdot \alpha_{p,\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.\end{aligned}$$

Da $\sum_{p\in P} \alpha_{p,\varepsilon}(x) = 1$ für alle $x \in A$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\int_A \operatorname{div} f \,\mathrm{d}\lambda_n &= \sum_{p\in P} \int_A \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \sum_{p\in P} \int_{\partial A} \nu^T f \cdot \alpha_{p,\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A} = \int_{\partial A} \nu^T f \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A},\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Wir beweisen noch zwei einfache aber wichtige Folgerungen dieses Satzes. Für stetig differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist der Gradient definiert durch

$$\nabla f(x) := f'(x)^T.$$

Der Laplace-Operator ist definiert durch

$$\Delta f(x) := \operatorname{div}(\nabla f(x)) = \operatorname{spur}(f''(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Dann gelten die folgende Formeln.

Folgerung 3.62 (Greensche Formeln)**.** *Sei A eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ mit*

C^1-Rand. Sei $U \supseteq A$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_A g\Delta f + (\nabla f)^T \nabla g \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} g(\nabla f)^T \nu \;\mathrm{d}\lambda_{\partial A}$$

und

$$\int_A g\Delta f - f\Delta g \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} (g\nabla f - f\nabla g)^T \cdot \nu \;\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Hier ist

$$(\nabla f(x))^T \nu(x) = f'(x)\nu(x) =: \frac{\partial f}{\partial n}(x)$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Normalenrichtung $\nu(x)$. Es ist üblich die das Transponieren-Zeichen wegzulassen, und zu schreiben

$$\nabla f \cdot \nabla g := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = (\nabla f)^T \nabla g$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt durch ausdifferenzieren von $\operatorname{div}(g\nabla f)$ und Satz 3.61

$$\int_A \operatorname{div}(g\nabla f) = \int_A g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_A \operatorname{div}(g\nabla f) = \int_A g\nabla f \cdot \nu \;\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Die zweite Behauptung ist eine direkte Folge der ersten. □

3.7 Differentialformen erster Ordnung und Kurvenintegrale

Definition 3.63. *Sei $I = (a, b)$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt φ Kurve, wenn $\varphi(I)$ eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $\varphi : I \to \varphi(I)$ ein Parameterdarstellung von $\varphi(I)$ ist.*

Gilt $\varphi(a) = \varphi(b)$, dann heißt φ geschlossen.

Definition 3.64. *Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\varphi(I)$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann das Kurvenintegral von F entlang φ definiert als*

$$\int_\varphi F \,\mathrm{d}x := \int_\varphi \sum_{i=1}^n F_i \,\mathrm{d}x_i := \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi' \,\mathrm{d}\lambda^1 \in \mathbb{R}.$$

Im Unterschied zum Integral auf Untermannigfaltigkeiten steht hier φ' statt $|\varphi'|$.

Bemerkung 3.65. *(1) Der Ausdruck $\omega := \sum_{i=1}^n F_i \,\mathrm{d}x_i$ wird auch als Differentialform 1. Ordnung bezeichnet.*

(2) Setze $M := \varphi(I)$. Achtung: Die Ausdrücke $\int_\varphi F \, \mathrm{d}x$ und $\begin{pmatrix} \int_M F_1 \, \mathrm{d}\lambda_M \\ \vdots \\ \int_M F_n \, \mathrm{d}\lambda_M \end{pmatrix}$ sind nicht gleich.

Satz 3.66. *Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Sei $\tilde\varphi : \tilde I \to \varphi(I)$ eine weitere Parameterdarstellung von $\varphi(I)$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\varphi(I)$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $\tau := \varphi^{-1} \circ \tilde\varphi$. Dann gilt*

$$\int_\varphi F \, \mathrm{d}x = \begin{cases} +\int_{\tilde\varphi} F \, \mathrm{d}x & \text{falls } \tau' > 0, \\ -\int_{\tilde\varphi} F \, \mathrm{d}x & \text{falls } \tau' < 0. \end{cases}$$

Beweis. Es gilt $\tilde\varphi'(s) = \varphi'(\tau(s))\tau'(s)$. Die Funktion τ ist ein Diffeomorphismus, damit ist $\tau'(s) \neq 0$ für alle $s \in \tilde I$. Da $\tau'(s) \in \mathbb{R}$, ist τ' positiv auf $\tilde I$ oder negativ of $\tilde I$. Es gibt also $\sigma \in \{-1, +1\}$, so dass $\tau'(s) = \sigma|\tau'(s)|$ für alle $s \in \tilde I$. Wir benutzen den Transformationssatz Satz 2.120. Dann ist

$$\int_\varphi F \, \mathrm{d}x = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi' \, \mathrm{d}\lambda^1 = \int_{\tilde I} (F^T \circ \varphi \circ \tau) \cdot (\varphi' \circ \tau) \cdot |\tau'| \, \mathrm{d}\lambda^1 = \sigma \int_{\tilde I} (F^T \circ \tilde\varphi) \cdot \tilde\varphi' \, \mathrm{d}\lambda^1,$$

was die Behauptung ist. $\square$

Das obige Kurvenintegral hängt also nur von der Orientierung der Parameterdarstellung ab.

Satz 3.67. *Sei $I = (a, b)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\varphi(I)$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_\varphi \mathrm{d}f := \int_\varphi \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$

Den Ausdruck $\mathrm{d}f$ nennt man auch totales Differential von f.

Dieses Integral ist wegunabhängig. Es hängt nur von Start- und Endpunkt der Kurve ab, nicht von der konkreten Wahl der Kurve. Wir wollen nun Bedingungen an F finden, so dass diese Aussage auch für $\int_\varphi F \, \mathrm{d}x$ gilt.

Definition 3.68. *Sei $I = (a, b)$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt φ stückweise stetig differenzierbare Kurve, falls es $t_1 < t_2 < \dots t_m$ in (a, b) gibt, so dass $\varphi|_{(t_i, t_{i+1})}$ für alle $i = 0 \dots m$ eine Kurve ist, wobei hier $t_0 = a$ und $t_{m+1} = b$ gesetzt wurde.*

Ist φ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, dann definieren wir

$$\int_\varphi F \, \mathrm{d}x := \sum_{i=0}^m \int_{\varphi|_{(t_i, t_{i+1})}} F \, \mathrm{d}x.$$

Daraus folgt, dass $\int_\varphi \mathrm{d}f = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$ auch für stückweise stetig differenzierbare Kurven gilt.

Definition 3.69. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt U zusammenhängend, falls gilt: Ist $U \subseteq O_1 \cup O_2$ mit zwei nicht leeren, offenen disjunkten Mengen O_1 und O_2, dann ist $U \subseteq O_1$ oder $U \subseteq O_2$.*

Aufgabe 3.70. *$\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und U zusammenhängend, dann ist $f(U)$ zusammenhängend.*

Lemma 3.71. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann existiert für alle $x, y \in U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\varphi : (a, b) \to U$ mit $\varphi(a) = x$ und $\varphi(b) = y$.*

Beweis. Wir konstruieren einen Polygonzug, der x und y verbindet. Sei P die Menge aller Punkte x, für die es einen Polygonzug (stückweise differenzierbare Kurve mit stückweise konstanter Ableitung) von x nach y in U gibt.

Sei $\rho > 0$ so, dass $B_\rho(y) \subseteq U$. Dann ist $B_\rho(y) \subseteq P$, und P ist nicht leer.

Sei nun $x \in P$. Sei $\rho > 0$ so, dass $B_\rho(x) \subseteq U$. Sei $x' \in B_\rho(x)$. Dann gibt es einen Polygonzug von y nach x. Diesen können wir um die Strecke von x nach x' ergänzen. Damit ist $x' \in P$ und P ist offen.

Sei nun (x_j) eine Folge in P mit $x_j \to x$ und $x \in U$. Sei $\rho > 0$ so, dass $B_\rho(x) \subseteq U$. Dann ist $x_j \in B_\rho(x)$ für ein j, und wir können einen Polygonzug von y nach x konstruieren. Damit ist P abgeschlossen in U, oder äquivalent $U \setminus P$ ist offen.

Damit ist $U = P \cup (U \setminus P)$. Da U zusammenhängend ist, folgt $U \setminus P = \emptyset$ und $U = P$. □

Satz 3.72. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer, offen und zusammenhängend, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert ein stetig differenzierbares $f : U \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla f$ genau dann, wenn $\int_\varphi F \,\mathrm{d}x = 0$ für alle geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven in U gilt.*

Beweis. Ist $F = \nabla f$, dann ist $\int_\varphi F \,\mathrm{d}x = 0$ für alle geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven in U nach Satz 3.67.

Sei nun $\int_\varphi F \,\mathrm{d}x = 0$ für alle geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven in U. Sei $x_0 \in U$.

Sei $x \in U$. Nach Lemma 3.71 existiert eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\varphi : (0, 1) \to U$ mit $\varphi(0) = x_0$ und $\varphi(1) = x$. Wir definieren

$$f(x) := \int_\varphi F \,\mathrm{d}x.$$

Die Funktion f ist wohldefiniert: Sei $\tilde\varphi : (0,1) \to U$ eine weitere Kurve mit $\tilde\varphi(0) = x_0$ und $\tilde\varphi(1) = x$. Sei $\psi : (0,2) \to U$ definiert durch $\psi(t) := \varphi(t)$ falls $t \le 1$, $\psi(t) := \tilde\varphi(2-t)$ falls $t > 1$. Dann ist

$$\int_\varphi F \,\mathrm{d}x - \int_{\tilde\varphi} F \,\mathrm{d}x = \int_\psi F \,\mathrm{d}x = 0,$$

da ψ eine geschlossene Kurve ist.

Sei nun $B_\rho(x) \subseteq U$, $y \in B_\rho(x)$. Definiere $\varphi : [0,1] \to U$ durch $\varphi(t) = x + t(y-x)$. Dann ist

$$f(y)-f(x) = \int_\varphi F \,\mathrm{d}x = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi' \,\mathrm{d}\lambda^1 = \int_{(0,1)} F(x+t(y-x))^T (y-x) \,\mathrm{d}\lambda^1(t).$$

Die rechte Seite ist eine stetige Funktion in y, und f ist stetig. Ein Kandidat für die Ableitung von f ist $F(x)$:

$$f(y) - f(x) - F(x)(y-x) = \int_{(0,1)} [F(x+t(y-x)) - F(x)]^T (y-x) \,\mathrm{d}\lambda^1(t).$$

Da F stetig ist, ist $\|F(x+t(y-x)) - F(x)\|_2 < \varepsilon$ falls nur $\|y-x\|_2$ klein genug ist. Damit ist f differenzierbar. □

Definition 3.73. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt sternförmig bezüglich $p \in U$, wenn für alle $x \in U$ die Verbindungsstrecke $\{p + t(x-p), t \in (0,1)\}$ in U liegt.*

Eine hinreichende Bedingung für die Wegunabhängigkeit des Integrals ist die folgende.

Satz 3.74. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich eines $p \in U$. Sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i \ne j.$$

Dann existiert ein zweimal stetig differenzierbares $f : U \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla f$.

Beweis. Durch Verschiebung können wir $p = 0$ annehmen.

Sei nun $x \in U$, $\varphi(t) := p + t(x-p) = tx$, $I := (0,1)$. Definiere

$$f(x) := \int_\varphi F \,\mathrm{d}x = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi' \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I F(tx)^T x \,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\nabla f = F$ ist. Wir definieren die Hilfsfunktion $g : U \times [0,1] \to U$ durch

$$g(x,t) := F(tx)^T x.$$

Dann ist g stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) &= F(tx)^T + tx^T F'(tx) \\ &= F(tx)^T + tx^T F'(tx)^T = F(tx)^T + t(F'(tx)x)^T \\ &= F(tx)^T + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(tx)^T,\end{aligned}$$

wobei wir die Voraussetzung, dass F' symmetrisch ist, benutzt haben. Integrieren dieser Ableitung bezüglich t ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) &= \int_0^1 F(tx)^T + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(tx)^T\,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &= \int_0^1 F(tx)^T\,\mathrm{d}\lambda_1(t) + F(x)^T - \int_0^1 F(tx)^T\,\mathrm{d}\lambda_1(t) = F(x)^T.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f(y) - f(x) - F(x)^T(y-x) &= \int_0^1 g(y,t) - g(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) - F(x)^T(y-x) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g(x+s(y-x),t)(y-x)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) - F(x)^T(y-x) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g(x+s(y-x),t)(y-x)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) - F(x)^T(y-x) \\ &= \int_0^1 (F(x+s(y-x)) - F(x))^T(y-x)\,\mathrm{d}\lambda_1(s).\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da F stetig differenzierbar ist, existiert $\rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subseteq U$ und $\|F(y) - F(x)\|_2 < \varepsilon$ für alle $y \in B_\rho(x)$. Für solches y ist dann $|f(y) - f(x) - F(x)^T(y-x)| \le \varepsilon \|y-x\|_2$, damit ist $f'(x) = F(x)^T$. $\square$

Beispiel 3.75. *Sei* $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix}$, $\varphi : [0,2\pi] := \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}$. *Dann gilt*

$$\int_\varphi F\,\mathrm{d}x = 2\pi,$$

Das geschlossene Integral ist nicht wegunabhängig, damit existiert kein f, *so dass* $F = \nabla f$. *Weiter ist*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{x_2^1 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

damit ist obiges Integrabilitätskriterium erfüllt. Allerdings ist U *nicht sternförmig. Auf der sternförmigen Menge* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1,0) :\ x_1 \le 0\}$ *hat* F *tatsächlich eine Stammfunktion, die aus* $\arctan(\frac{x_1}{x_2})$ *und* $\arctan(\frac{x_2}{x_1})$ *zusammengesetzt wer-*

den kann.

Satz 3.76 (Greenscher Satz)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit C^1-Rand. Sei U eine offene Umgebung von A, $F : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_\varphi F \,\mathrm{d}x = \int_A \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \,\mathrm{d}\lambda_2$$

für jede Parameterdarstellung von ∂A, die wie folgt orientiert ist: läuft man entsprechend φ entlang des Randes ∂A, dann liegt die Menge A links, und der äußere Normaleneinheitsvektor zeigt nach rechts.

Beweis. Sei $\varphi : I \to \partial A$ eine lokale Parameterdarstellung von ∂A mit $\varphi(\bar{I}) = \partial A$. Falls dies nicht möglich ist, kann wieder mit einem Überdeckungsargument gearbeitet werden. Dann ist

$$\int_\varphi F \,\mathrm{d}x = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi' \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|_2} \|\varphi'\|_2 \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Der Vektor $\varphi'(t)$ ist Tangentialvektor an ∂A in $\varphi(t)$. Aufgrund der Annahme an die Orientierung von φ ist dann $\frac{1}{\|\varphi'\|_2} \begin{pmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{pmatrix}$ der äußere Normaleneinheitsvektor an ∂A. Aus dem Gaußschen Integralsatz bekommen wir nun

$$\begin{aligned} \int_\varphi F \,\mathrm{d}x &= \int_I F^T \circ \varphi \cdot \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|_2} \|\varphi'\|_2 \,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_{\partial A} \begin{pmatrix} F_2 & -F_1 \end{pmatrix}^T \nu_A \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A} \\ &= \int_A \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \,\mathrm{d}\lambda_2, \end{aligned}$$

was die Behauptung ist. □