Vertiefung Analysis (Analysis 3)

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 20, 2023)

I. 18/10/23

In dieser Vorlesung ist $0 \in \mathbb{N}$.

II. 20/10/23

Theorem 1. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ und $z \in \mathbb{Z}$ sei ein gemeinsamen Teiler von a und b. Dann gilt $d \cdot ggT\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = ggT(a, b)$. Insbesondere gilt $d | ggT(a, b)$ und $\frac{a}{ggT(a,b)}$ und $\frac{b}{ggT(a,b)}$ sind Teiler von d.*

Proof. $ggT\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ teilt $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ und daher ist $d \cdot ggT\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ ein Teiler von a und b. Deswegen ist $d \cdot ggT\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) \leq ggT(a, b)$

Nach den Satz von Bezout gibt es $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a, b) = sa + tb$. Aus $d|a$ und $d|b$ folgt $d | ggT(a, b)$. Aus

$$\frac{a}{d} = \frac{ggT(a, b)}{d} \frac{a}{ggT(a, b)}$$

folgt $\frac{ggT(a,b)}{d} | \frac{a}{d}$ und ähnlich auch $\frac{ggT(a,b)}{d} | \frac{b}{d} \implies \frac{ggT(a,b)}{d} \leq ggT(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ □

Theorem 2. *Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und a, b teilerfremd. Dann gilt*

(a) Aus $a|bc$ folgt $a|c$.

(b) Aus $a|c$ und $b|c$ folgt $ab|c$.

(c) $ggT(a, bc) = ggT(a, c)$

Proof. Es gibt $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $sa + tb = 1$, also $sac + tbc = c$.

(a) $a|sac, a|tbc \implies a|c$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Aus $a|c$ folgt $ab|bc$, und aus $b|c$ folgt $ab|ac$. Aus $ab|sac$ und $ab|tbc$ folgt $ab|c$.

(c)

$\square$

Definition 3. kleinstes gemeinsames Vielfaches = LCM

Lemma 4. *Für $a, b \in \mathbb{N}*$ gilt $ggT(a, b)ksV(a, b) = ab$.*

Proof. Wegen $\frac{ab}{ggT(a,b)} = \frac{a}{ggT(a,b)}b = a\frac{b}{ggT(a,b)}$ ist $\frac{ab}{ggT(a,b)}$ ein Vielfaches von a und b, also $\frac{ab}{ggT(a,b)} \geq ksV(a, b)$

Da $\frac{a}{ggT(a,b)}$ und $\frac{b}{ggT(a,b)}$ teilerfremd sind und Teiler von $\frac{kgV(a,b)}{ggT(a,b)}$ sind, gilt

$$\frac{a}{ggT(a,b)}\frac{b}{ggT(a,b)}|\frac{kgV(a,b)}{ggT(a,b)} \implies ab \leq kgV(a,b) \cdot ggT(a,b).$$

$\square$

Definition 5. Sei $a, b, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$. Man sagt, dass a kongruent b modulo m ist, falls $m|a - b$.

Lemma 6. *Sei $k, m \in \mathbb{N}*$ und $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv a'$ und $b \equiv b' \pmod m$. Dann gilt*

(a) $a \pm b \equiv a' \pm b' \pmod m$

(b) $ab = a'b' \pmod m$

(c) $a^k \equiv (a')^k \pmod m$

Theorem 7. *Sei $a, b \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$ und $p|ab$. Dann gilt $p|a$ oder $p|b$*

Proof. Sei $d = ggT(a, p)$. Wegen $d|p$ und $p \in \mathbb{P}$ gilt $d = 1$ oder $d = p$. Falls $d = p$, sind wir fertig. Falls $d = 1$, sind a und p teilerfremd. Dann $p|ab \implies p|b$ $\square$