Jun Wei Tan
Mattis Lieberman

(2 P) a) Prüfen Sie mit Hilfe von $\nabla \times \vec{F}$, welche der beiden Felder konservative Kraftfelder sind.

i. $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ii. $\vec{F}(\vec{r}) = 2z\vec{e}_x$

i) $$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & -\frac{ay}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & -\frac{az}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix}$$

$$= a\left\{ \hat{i}\left(\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) - \hat{j}\left(\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) + \hat{k}\left(\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3yx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)\right\} = \vec{0}$$

ii) $$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) + \hat{j}(-2z) + \hat{k}(0)$$

$$= -2z\hat{j}$$

(1 P) b) Bestimmen Sie jeweils die verrichtete Arbeit des Kraftfeldes $\vec{F}(\vec{r}) = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, wenn sich ein Objekt vom Ort $P = (x_0, y_0)$ zum Ort $Q = (x_1, y_1)$ entlang des Weges i. beziehungsweise ii. bewegt. Was können Sie über das Kraftfeld aussagen?

i. zunächst parallel zur x-Achse von x_0 nach x_1 (a) und im Anschluss parallel zur y-Achse von y_0 nach y_1. (b)

ii. zunächst parallel zur y-Achse von y_0 nach y_1 (c) und im Anschluss parallel zur x-Achse von x_0 nach x_1. (d)

i) $$\int_i \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(a)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{(b)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F_x(x, y_0, z)\,dx + \int_{y_0}^{y_1} F_y(x_1, y, z)\,dy$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} y_0\,dx + \int_{y_0}^{y_1} (-x_1)\,dy$$

$$= y_0(x_1 - x_0) - x_1(y_1 - y_0)$$
$$= y_0 x_1 - y_0 x_0 - y_1 x_1 + x_1 y_0$$
$$= 2x_1 y_0 - y_1 x_1 - y_0 x_0$$

ii) $$\int_{ii} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(c)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{(\lambda)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{y_0}^{y_1} F_y(x_0, y, z)\, dy + \int F_x(x, y_1, z)\, dx$$
$$= \int_{y_0}^{y_1} (-x_0)\, dy + \int_{x_0}^{x_1} y_1 \, dx$$
$$= -x_0(y_1 - y_0) + y_1(x_1 - x_0)$$
$$= -x_0 y_1 + x_0 y_0 + y_1 x_1 - y_1 x_0$$
$$= y_1 x_1 + x_0 y_0 - 2x_0 y_1$$

Also das Kraftfeld ist nicht konservativ.

(2 P) c) Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch und warum?

i. Nur konservative Kräfte können Arbeit verrichten.
ii. Solange nur konservative Kräfte wirken, ändert sich die kinetische Energie eines Teilchens nicht.
iii. Falls eine konservative Kraft für ein Teilchen, dessen Bewegung auf die x-Achse beschränkt ist, nach rechts zeigt, nimmt die potentielle Energie des Teilchens zu, wenn es sich nach links bewegt.
iv. Der Winkel zwischen Kraft und Äquipotentiallinie hängt vom Abstand der Potentiallinien ab.

i) Falsch, sonst wird die Energie erhalten sogar wenn es Reibung gibt, weil Reibung keine Arbeit verrichten könnte.

ii) Falsch, z.B. wenn etwas durch das Luft fällt, ist die Schwerkraft konservativ, aber die kinetische Energie steigt noch.

iii) Richtig

iiii) Falsch.

$$\vec{F} = -\nabla V$$

Per Definition gilt, für $\vec{t}$ die Tangentenvektor der Äquipotentiallinie

$$\vec{t} \cdot \nabla V = 0,$$

$$\vec{t} \cdot \vec{F} = 0$$