

**Übungen zur theoretischen Elektrodynamik, SoSe 2024****Übungsblatt I**

**Bitte laden Sie Ihre Lösungen auf WUE Campus hoch, und zwar vor 8.00 Uhr am Montag, dem 22. April.**

**Sie dürfen in Dreiergruppen abgeben.**

**1. Wiederholung Vektoranalysis**

- a) Geben Sie die Definitionen von Gradient, Rotation und Divergenz an.  
 b) Wir schreiben die Komponenten des dreidimensionalen Vektorprodukts als

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k, \quad (1)$$

wobei  $\epsilon_{ijk}$  der total antisymmetrische Tensor für  $\mathbb{R}^3$  ist, mit  $\epsilon_{123} = +1$ . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = \delta_{kl}, \quad (3)$$

mit  $\delta$  dem Kronecker- $\delta$ .

- c) Zeigen Sie mit den Formeln aus b) die folgenden Identitäten für beliebige Vektorfelder  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (4)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}, \quad (5)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \quad (6)$$

- d) Zeigen Sie damit, dass für beliebige skalare Funktionen  $F(\vec{x})$  und Vektorfelder  $\vec{A}(\vec{x})$  gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} F) = 0, \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (F \vec{A}) = (\vec{\nabla} F) \cdot \vec{A} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad (10)$$

mit  $\Delta$  dem Laplace-Operator.

(bitte wenden)

## 2. Elektrostatisches Feld

- a) Berechnen Sie das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  einer Punktladung  $q$ , die sich am Ort  $\vec{x} = 0$  befindet.
- b) Berechnen Sie das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  einer homogen geladenen Kugel mit Radius  $R$  und Gesamtladung  $Q$ , für Orte sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel.