

Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: June 6, 2024)

I. MESSUNG

Zur Berechnung der Fehler nehmen wir an, dass die Streuung durch eine Poissonverteilung gut beschrieben ist. Der Fehler ist also der quadratische Wurzel des Messwerts. Wir bezeichnen die Anzahl der Zerfälle mit r .

Zeit (s)	Anzahl Zerfälle	Poissonfehler
20	33	5,7
40	30	5,5
60	27	5,2
80	26	5,1
100	23	4,8
120	20	4,5
140	19	4,4
160	17	4,1
180	18	4,2
200	12	3,5

Tabelle I: Anzahl der Zerfälle mit Poissonfehler in Abhängigkeit von der Zeit

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Radioaktive Zerfall ist durch das Zerfallsgesetz beschrieben

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Deren Ableitung ist

$$N'(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

und die Anzahl der Zerfälle ist damit proportional zu $\lambda e^{-\lambda t}$. Wir schreiben die Anzahl der Zerfälle als $r(t) = k\lambda e^{-\lambda t}$. Es gilt also

$$\ln r = \ln(k\lambda) - \lambda t \quad (2)$$

Wir plotten $\ln r$ in Abhängigkeit von der Zeit, und die Steigung ist $-\lambda$. Man kann daraus die Halbwertszeit bestimmen, indem man $N(t) = N_0/2$ in Gl. (1) einsetzt.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

mit Lösung

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (3)$$

Sei die Steigung b . Es gilt

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{b} \quad (4)$$

Mit der Gauss'sche Fehlerfortpflanzung gilt

$$\Delta t_{1/2} = \frac{\ln 2}{b^2} \Delta b \quad (5)$$

Wir bestimmen also das natürliche Logarithmus der Zerfallanzahl. Dessen Fehler ist durch

$$\Delta(\log r) = \frac{\Delta r}{r}$$

bestimmt. Weiterhin bezeichnen wir die Zeit mit x und $\ln r$ mit y .

II. UNGEWICHTETE LINEARE REGRESSION

Wir finden eine Gerade

$$y = a + bx$$

sodass der Fehler so klein wie möglich ist. Die benötigten Größen sind

$$N=10$$

Zeit (s)	$\ln r$	$\Delta(\ln r)$
20	3,50	0,17
40	3,40	0,18
60	3,30	0,19
80	3,26	0,20
100	3,14	0,21
120	3,00	0,22
140	2,94	0,23
160	2,83	0,24
180	2,89	0,24
200	2,48	0,29

Tabelle II: Verwendete Daten für ungewichtete lineare Regression

$$\begin{aligned}
\sum x_i &= 1100 \text{ s} \\
\sum y_i &= 30,73579556754441 \\
\sum x_i^2 &= 154000 \text{ s}^2 \\
\sum x_i y_i &= 3220,197114428394 \text{ s}
\end{aligned}$$

Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}
\Delta &= N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \\
&= 330000 \\
a &= \frac{1}{\Delta} (\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i) \\
&= 3,609380883426078 \\
b &= \frac{1}{\Delta} (N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i) \\
&= -0,004870921151560359 \text{ s}^{-1}
\end{aligned}$$

Danach schätzen wir den Fehler durch die Streuung

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i)^2 = 0,006392534773757218$$

und die Fehler in den Parameter bestimmen wir durch

$$\begin{aligned} \Delta a &= \left[\frac{s^2}{\Delta} \sum x_i^2 \right]^{1/2} \\ &= 0,05461852153271851 \\ \Delta b &= \left[N \frac{s^2}{\Delta} \right]^{1/2} \\ &= 0,0004401285891217928 \end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$\begin{aligned} a &= 3,609 \pm 0,055 \\ b &= (-0,00487 \pm 0,00044) \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Die Halbwertszeit ist dann nach Gl. (4) und (5)

$$t_{1/2,1} = (142 \pm 13) \text{ s}$$

III. NACH GAUSSFEHLERN GEWICHTETER LINEARE REGRESSION

Die Bestwerte sind nach der Vorlesungsfolien gegeben durch

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right) \\ b &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \\ \Delta &= \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta &= 1,577216 \times 10^8 \text{ s}^2 \\ a &= 3,595703335355059 \\ b &= -0,004695908025178519 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Die Fehler sind durch

$$\Delta a = \left[\frac{1}{\Delta} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right]^{1/2} \quad (6)$$

$$= 0,131167828328609$$

$$\Delta b = \left[\frac{1}{\Delta} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right]^{1/2} \quad (7)$$

$$= 0,001194388661734524 \text{ s}^{-1}$$

Insgesamt ist

$$a = 3,60 \pm 0,13$$

$$b = (-0,0047 \pm 0,0012) \text{ s}^{-1}$$

Nach Gl. (4) und (5) ist die Halbwertszeit

$$t_{1/2,2} = (148 \pm 38) \text{ s}$$

IV. POISSON-REGRESSION

In diesem Abschnitt verwenden wir Regression unter der Annahme poissonverteilte Messwerte. Die Bestwerte a und b sind Lösungen des Gleichungssystems (vgl. Vorlesungsfolien)

$$\sum \frac{y_i}{a + bx_i} - N = 0 \quad (8)$$

$$\sum \frac{y_i x_i}{a + bx_i} - \sum x_i = 0 \quad (9)$$

Wir lösen das Gleichungssystem mit Mathematica (Newton'sche Verfahren) mit den in Abschnitt II gefundenen Parameter als Startpunkt und erhalten als Bestwerte

$$a = 3,61311616971402$$

$$b = -0,004904878299632539 \text{ s}^{-1}$$

Wir setzen diese Werte in der linken Seiten von Gl. (8) und (9) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \sum \frac{y_i}{a + bx_i} - N &= 1,776356839400251 \times 10^{-15} \\ \sum \frac{y_i x_i}{a + bx_i} - \sum x_i &= 2,273736754432321 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

also die Werte sind eigentlich Lösungen.

Alle der y_i sind größer als 9, also die Poissonverteilung stimmt relativ gut mit einer Gaußverteilung überein (vgl. Vorlesungsfolien Vorlesung 1). Daher dürfen wir die Formeln (6) und (7) zur Berechnung der Fehler verwenden. Das Ergebnis ist auch gleich, nämlich

$$\Delta a = 0,131167828328609$$

$$\Delta b = 0,001194388661734524 \text{ s}^{-1}$$

Die Halbwertszeit ist wieder nach Gl. (4) und (5) bestimmt

$$t_{1/2,3} = (141 \pm 34) \text{ s}$$

V. DISKUSSION

Alle durch Regression bestimmte Halbwertszeiten stimmen bis auf dem Fehler überein. Die Abweichungen können erklärt werden, wenn man die unterschiedliche Herangehensweise betrachtet — während der Regression suchen wir die Parameter, sodass die Likelihood-Funktion maximal ist. Da die angenommene Verteilungen unterschiedlich sind, haben wir unterschiedliche Likelihood-Funktionen und daher unterschiedliche Ergebnisse.

Die Fehlerbetrachtung im Abschnitt III ist genauer als die Fehlerbetrachtung in II, da der Fehler da durch das Poissonfehler geschätzt wird, und daher ist die Unsicherheit besser dargestellt. Im Vergleich mit der Fehlerbetrachtung im Abschnitt IV ist die in IV vorzuziehen, weil die Daten poissonverteilt sind, also die Poissonregression ist ein genaueres Modell der Streuung.

Deswegen ist es zu erwarten, dass die Poissionregression ein besseres Ergebnis liefern soll, sogar wenn wir mehr Messungen später machen. Obwohl wir hier eine numerische Lösung zu einem Gleichungssystem finden soll, ist die Konvergenz ausreichend gut. Daher nehmen wir die dritte Halbwertszeit als Ergebnis

$$t_{1/2} = (141 \pm 34) \text{ s}$$