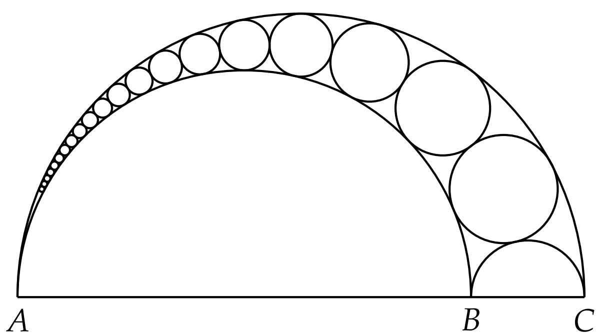
Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 12, 2024)

Aufgabe 1. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}_0$ Halbkreise mit Durchmessern AC, AB bzw. BC, sodass A, B und C auf einer Gerade liegen. Wir betrachten erner Kreise $\mathcal{C}_\setminus$ für $n \in \mathbb{N}$ tangential zu den Halbkreisen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$, sodass ferner $\mathcal{C}_n$ tangential zu $\mathcal{C}_{n-1}$ in einem Punkt P_n ist. Zeigen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, die alle Berührpunkte $P_0, P_1, \ldots$ enthält.



Beweis. Wir führen ein Möbiustransformation durch. OBdA nehmen wir an, dass A das Ursprung ist.

Danach betrachten wir die Inversion $z \mapsto 1/z$. Die reelle Achse wird offensichtlich auf die reelle Achse abgebildet. Insbesondere bleiben B und C auf der reellen Achse. A wird auf ∞ abgebildet.

Schritt 1: Die große Halbkreisen werden auf vertikale Geraden abgebildet.

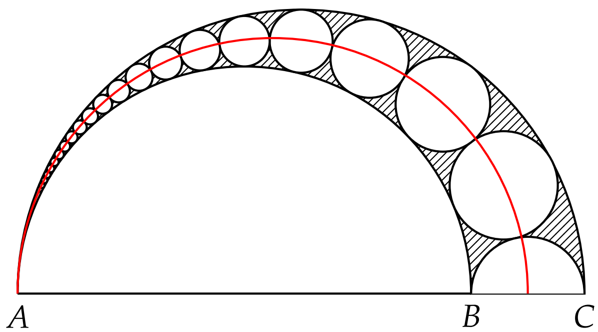
Wir schreiben die Koordinaten von B bzw. C als x, $x \in \mathbb{R}$. Das höchste Punkt hat Koordinaten $x/2 + ix/2$. Das wird auf

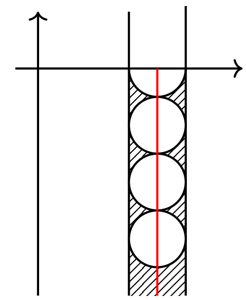
$$\frac{1}{\frac{x}{2} + i\frac{x}{2}} = \frac{1-i}{x} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x}.$$

Das heißt, dass die Halbkreisen auf vertikalen Geraden bei x-Koordinaten $1/(2R_1)$ und $1/(2R_2)$ abgebildet werden.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Jetzt ist die Frage “auf welche Seite” das Innere abgebildet wird. Wir nehmen $x \in \mathbb{R}$ hinreichend groß, sodass $1/x$ hinreichend klein ist und $1/x$ liegt außerhalb die zwei Geraden. Das heißt: Das Innere wird auf das Innere abgebildet.





Die Berührpunkten sind offensichtlich auf einer Gerade (rot). Da die inverse Abbildung auch eine Möbiustransformation ist, wird die Gerade auf eine Kreislinie oder Gerade abgebildet. Da die Gerade zwischen die Halbkreisen liegen muss, wird die Gerade auf eine Kreislinie abgebildet. Das heißt, dass die Berührpunkte im originalen Ebene auf einer Kreislinie liegen. 🎉

Aufgabe 2. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$ und $K_R(z_0)$, $0 < R < \infty$, die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \; z \in K_R(z_0).$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $r \in [0, R)$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t$.

(b) Falls $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in K_R(z_0)$, so gilt $|a_k| \leq M \frac{1}{R^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(z_0 + re^{it}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{kit} \\
\overline{f}(z_0 + re^{it}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^k e^{-kit} \\
|f(z_0 + re^{it})|^2 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{kit} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^k e^{-kit} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \left(a_l r^l e^{lit} \overline{a}_{k-l} r^{k-l} e^{-(k-l)it} \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[r^k \sum_{l=0}^{k} a_l \overline{a}_{k-l} e^{(2l-k)it} \right]$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig, also wir dürfen die Summe und das Integral vertauschen

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[r^k \sum_{l=0}^{k} a_l \overline{a}_{k-l} e^{(2l-k)it} \right] \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{l=0}^{k} a_l \overline{a}_{k-l} \int_0^{2\pi} e^{(2l-k)it} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Wir wissen aber, dass das Integral nur ungleich Null ist genau dann, wenn $2l - k = 0$. Weil $2l$ gerade ist, muss k auch gerade sein. Daher substituieren wir $k := 2p,\ p \in \mathbb{N}_0$. Der Ausdruck ist

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} r^{2p} \sum_{l=0}^{2p} a_l \overline{a}_{2p-l} \int_0^{2\pi} e^{(2l-2p)it} \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} r^{2p} |a_p|^2 (2\pi) && \text{Nur } l = p \text{ Fall bleibt}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| \, \mathrm{d}t$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^2 \, \mathrm{d}t \\
&= M^2
\end{aligned}$$

andererseits gilt, weil alle Terme in der Summe positiv sind,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \geq |a_p|^2 r^{2p}$$

für alle $p \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

für alle $r \in [0, R)$. Dann muss $|a_k| \leq M/R^k$ sein.

Aufgabe 3. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in K_r(z_0)$ folgende Identität gilt:

$$\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z)^k} \,\mathrm{d}w = 0.$$

Warum schließen wir $k = 1$ aus?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $z = z_0$ und versuchen Sie anschließend den allgemeinen Fall auf diesen zurückzuführen.

Beweis. Spezialfall $z = z_0$: Wir parametrisieren den Weg durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $\gamma'(t) = ire^{it}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0)^k} \,\mathrm{d}w &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z_0)^k} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(z_0+re^{it}-z_0)^k} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} ir^{1-k} e^{(1-k)it} \,\mathrm{d}t \\
&= ir^{1-k} \left[\frac{1}{i(1-k)} e^{(1-k)it} \right]_0^{2\pi} && k \neq 0 \\
&= \frac{r^{1-k}}{1-k} \left[e^{2\pi(1-k)i} - e^0 \right] \\
&= \frac{r^{1-k}}{1-k} [1-1] = 0
\end{aligned}$$

Jetzt im Allgemein:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z)^k} \,\mathrm{d}w &= \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0+z_0-z)^k} \,\mathrm{d}w \\
&= \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0)^k} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{z_0-z}{w-z_0}\right)\right)^k} \,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

Da $|w - z_0| = r$ und $|z_0 - z| < r$, ist

$$\left| \frac{z_0 - z}{w - z_0} \right| < 1.$$

Daher dürfen wir den Ausdruck in einer Potenzreihe entwickeln.

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z)^k} \,\mathrm{d}w \\
&= \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} \left(\frac{z_0-z}{w-z_0} \right)^n \mathrm{d}w
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial K_r(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} \frac{(z_0 - z)^n}{(w - z_0)^{k+n}} \, \mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{(z_0 - z)^n}{(w - z_0)^{k+n}} \, \mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

wobei wir die Summe und das Integral tauschen dürfen, weil die Reihe gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und $g(z) = zf(z)$.

(a) Sei $K \subset \mathbb{D}$ kompakt. Beweisen Sie, dass die Funktionreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g(z^n)$ gleichmäßig auf K konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g(z^n)$ nicht notwendigerweise gleichmäßig auf der ganzen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ konvergiert.

Beweis. (a) f ist holomorph und insbesondere stetig. Wir betrachten $\overline{B_r(0)}$ mit $r < 1$. Weil $\overline{B_r(0)}$ kompakt ist, ist f auf $\overline{B_r(0)}$ beschränkt. Wir wählen $A > 0$, sodass

$$
|f(x)| \leq A \qquad \forall x \in \overline{B_r(0)}.
$$

Jetzt betrachten wir $K \subset D$ kompakt. Die Idee ist: Wir wählen n hinreichend groß, sodass $z^n \in \overline{B_r(0)}$. Dann ist die Reihe dominiert durch eine Potenzreihe. Die Kompaktheit von K ermöglicht die "n hinreichend groß" Wahl.

Jetzt wählen wir n hinreichend groß, sodass $z^n \in \overline{B_r(0)}$ für alle $z \in K$. Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} \left[\sum_{k=1}^{\infty} g(z^k) - \sum_{k=1}^{n} g(z^k) \right] \\
=& \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} \sum_{k=n+1}^{\infty} g(z^k) \\
\leq& \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} z^k A \\
=& A \lim_{n\to\infty} \frac{z^{1+n}}{1-z} \\
=& 0
\end{aligned}
$$

Die Funktionreihe konvergiert also im Supremumsnorm und daher gleichmäßig.

🎉