Wintersemester 2023/24 | 04.12.2023
Prof. Dr. Stephan Elsenhans | Benedikt Wolf

Lineare Algebra: Aufgabenblatt 08

8.1 Lineare Abbildungen /24 Punkte

Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto x \cdot y$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto x + y$

(c) $h : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]$ $p(t) \mapsto p(t^2)$

(d) $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $k(t) = t + 2$

(e) $l : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $l(z) = \overline{z}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(f) l, aber mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum

8.2 Eigenschaften linearer Abbildungen /25 Punkte

Entscheiden Sie, welche der folgenden linearen Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathbb{Q}[t] \to Q[t], p(t) \mapsto p'(t)$

(d) $\mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ mit $(z, w) \mapsto (z + w, z - \overline{w})$, wobei wir $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen.

(e) $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \to End(\mathbb{R})$ mit $f \mapsto \mathrm{Re}(f|_{\mathbb{R}}) + \mathrm{Im}(f|_{\mathbb{R}})$, wobei $f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f|_{\mathbb{R}}(x) := f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, und Re bzw. Im den Real- bzw. Imaginärteil bezeichnen.

8.3 Spezielle lineare Abbildungen /10 Punkte

Geben Sie je eine lineare Abbildung mit den folgenden Eigenschaften an. Sie müssen Ihre Aussagen ausnahmsweise nicht beweisen.

(a) $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $L(x) = x$ nur für $x = (0, 0)$

(b) $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass $L_2((1, 1, 1)) = L_2((1, 1, 0))$.

(c) $L_3 : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t]$, sodass $\deg(L_3(p(t))) \geq 3 \deg(p(t))$ für alle $p \in \mathbb{Q}[t]$

(d) $L_4 : V \to V$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist, für einen $\mathbb{Q}-$Vektorraum Ihrer Wahl.

(e) $L_5 : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, sodass es genau drei verschiedene Elemente $x, y, z \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ mit $L_5(x) = L_5(y) = L_5(z) = (\overline{1}, \overline{0})$ gibt.

8.4 Matrizen **/16 Punkte**

Die folgenden linearen Abbildungen können jeweils auch in der Form $x \mapsto Ax$ mit einer Matrix A geschrieben werden. Bestimmen Sie für jede der Abbildungen eine geeignete Matrix.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix}$$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

(c) $f \circ g$

(d) $g \circ f$

8.5 Polynomabbildung **/25 Punkte**

Wir betrachten die Abbildung $S_n : \mathbb{Q}[t]_{\leq n} \to \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$ mit $p(t) \mapsto p'(t) + \tilde{p}(0)t^n$.

(a) Beweisen Sie: S_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ linear.

(b) Untersuchen Sie S_n auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(c) Beweisen Sie: $S_n^k(t^k) = k!$ und $S_n^{n-k}(t^n) = n!/k!t^k$ für $k = 0, \ldots, n$

(d) Folgern Sie: $S_n^{n+1}(p(t)) = n!p(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}, p(t) \in \mathbb{Q}[t]_{\leq n}$.

Lösungshinweise

Aufgabe 1:
Was ist die Definition?

Aufgabe 2:
Die Schreibweise p' bezeichnet hier und in den anderen Aufgaben die „formale Ableitung", d.h. zu einem Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ ist $p'(t) := \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} t^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}$. Die analytischen Eigenschaften dieses Polynoms interessieren uns dabei aber nicht.

Aufgabe 3:
...

Aufgabe 4:
Verwenden Sie nicht die Multiplikation von zwei Matrizen, diese wurde noch nicht eingeführt! Sie müssen nicht begründen, ob das Ergebnis eindeutig ist, das werden wir später zeigen.

Aufgabe 5:
Der Exponent in der letzten Teilaufgabe bezeichnet die Mehrfachausführung wie in Aufgabe 2.3