Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 28, 2023)

Problem 1. (Stückweise Integrierbarkeit) Zeigen Sie: ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$ für ein $c \in (a, b)$, so auch auf $[a, b]$.

Proof. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Weil f auf sowohl $[a, c]$ als auch $[c, b]$ integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung $\mathcal{J}_1 = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = c\}$ bzw. $\mathcal{J}_2 = \{x_n = c, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\}$ von $[a, c]$ bzw. $[c, b]$, so dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}_1} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}(f) < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\mathcal{O}_{J_2} - \mathcal{U}_{J_2} < \frac{\epsilon}{2}$$

Dann ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}_{\mathcal{J}} < \epsilon.$$

Weil ϵ beliebig war, ist f integrierbar. □

Problem 2. (Bestimmte Integrale) Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale :

(a) $\int_1^4 \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Proof. (a) $u = \sqrt{x}, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, also $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. Wenn $x = 1$ ist $u = 1$, und $x = 4$ ist $u = 2$. Es gilt

$$\int_1^4 \sin\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \sin(u)(2u\,\mathrm{d}u)$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_1^2 u\sin u\,\mathrm{d}u \\
&= 2\left[u(-\cos u)|_1^2 + \int_1^2 \cos u\,\mathrm{d}u\right] && \text{partielle Integration} \\
&= 2\left[(\cos(1) - 2\cos(2)) + [\sin u]_1^2\right] \\
&= 2\cos 1 - 4\cos 2 + 2\sin 2 - 2\sin 1
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x &= x\arcsin(x)|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
u &= 1 - x^2, \qquad \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x\,. \\
&\text{Wenn } x = 0, \text{ ist } u = 1. \\
&\text{Wenn } x = 1/2, \text{ ist } u = 3/4. \\
\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2} - \int_1^0 \frac{1}{(-2)}\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\int_{3/4}^1 u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\left[2u^{1/2}\right]_{3/4}^1 \\
&= \frac{\pi}{12} - 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \\
&= -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

(c) Substitution: $x = \tan\theta$, $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, für $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Es gilt $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}(\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta) \\
&= \int \frac{1}{\sec^4\theta}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]$$

Es gilt auch $\sin\theta = \sin\tan^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $\cos\theta = \cos\tan^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Daraus folgt

$$\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{x}{1+x^2}.$$

Dann ist

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2}\right).$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =& \frac{x^2}{2}\sqrt{1-x^2}|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\,\mathrm{d}x \\
=& 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
u =& 1-x^2 \qquad \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x \\
x^3\,\mathrm{d}x =& \frac{1}{-2}x^2(-2x\,\mathrm{d}x) \\
=& -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}u \\
=& -\frac{1}{2}(1-u)\,\mathrm{d}u \\
\text{Wenn } x =& 0 \text{ ist } u = 1 \\
\text{Wenn } x =& 1 \text{ ist } u = 0 \\
\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =& +\frac{1}{2}\int_1^0 \left(-\frac{1}{2}\frac{1-u}{\sqrt{u}}\right)\mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{4}\left[2\sqrt{u} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
=& \frac{1}{4}\left[2-\frac{2}{3}\right] \\
=& \frac{1}{4}\frac{4}{3} \\
=& \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

□

Problem 3. (Der Hauptsatz) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.

(b) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt ein Stammfunktion.

(c) Ein Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, welche eine Stammfunktion auf $[a, b]$ besitzt, ist integrierbar.

Hinweis: $F(x) = \sqrt{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$

Proof. (a) Falsch. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Es gilt dann

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

(b) Ja (Proposition 6.4.1 und Definition 6.4.2).

(c) Nein. Sei $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$F = \begin{cases} \sqrt{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und

$$F' = f = -x^{-1/2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3\sqrt{x}}{2} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dann ist f nicht integrierbar, weil es nicht auf $[0, 1]$ eingeschränkt ist ($x^{1/2} \to \infty$ wenn $x \to 0$). $\square$

Problem 4. (Riemann-Lemma) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{5.1}$$

gilt. Verifizieren Sie dazu:

(i) Zeigen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ eine stückweise konstante Funktion $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\int_a^b |f(x) - T(x)|\,\mathrm{d}x \leq \epsilon.$$

(ii) Zeigen Sie (5.1) für beliebige, stückweise konstakte Funktionen.

(iii) Folgern Sie die Behauptung.

Proof. (i) Weil f integrierbar ist, können wir eine Zerlegung $\mathcal{J} = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ finden, so dass

$$\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) - \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \leq \epsilon.$$

Wir definieren zwei stückweise konstante Funktionen:

$$\tau(x) = \begin{cases} \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} & x_i \leq x < x_{i+1}, 0 \leq i < n-1 \\ \sup_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} & x_i \leq x < x_{i+1}, 0 \leq i < n-1 \\ \inf_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Dann sind τ und σ Treppenfunktionen mit $\sigma \leq f \leq \tau$ auf $[a, b]$. Es gilt außerdem per Definition

$$\begin{aligned}
\epsilon \geq & \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(f) - \mathcal{U}_{\mathcal{J}}(f) \\
= & \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) - \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i) \\
= & \sum_{i=0}^{n-1} (\tau(x_i) - \sigma(x_i))(x_{i-1} - x_i) \\
\geq & \sum_{i=0}^{n-1} (\tau(x_i) - f(x_i)) (x_{i+1} - x_i) \\
= & \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(\tau - \sigma) \\
\geq & \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(\tau - f) \\
\geq & \int_a^b (\tau - f)(x) \, \mathrm{d}x \\
= & \int_a^b |\tau(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(ii) ...

(iii) Sei

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x &= \lim_{n \to \infty} \int_a^b [f(x) - \tau(x) + \tau(x)] \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[\int_a^b (f(x) - \tau(x)) \sin nx \, \mathrm{d}x + \int_a^b \tau(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| &\leq \lim_{n\to\infty}\left[\left|\int_a^b (f(x)-\tau(x))\sin nx\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \tau(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\right]\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b |f(x)-\tau(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b \sin nx\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

Wir nehmen dann $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so dass für alle $n > N$ gilt

$$\int_a^b \tau(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \leq \frac{\epsilon}{2}$$

(Möglich wegen (b)). Dann ist

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \leq \epsilon.$$

Weil ϵ beliebig war, gilt die Behauptung.

□

Problem 5. Für eine gegebene Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kann unter bestimmten Voraussetzungen (z.B. $f \in C^1([a,b])$, wir kommen in der Vorlesung darauf zurück) die Länge des Funktionsgraphen durch

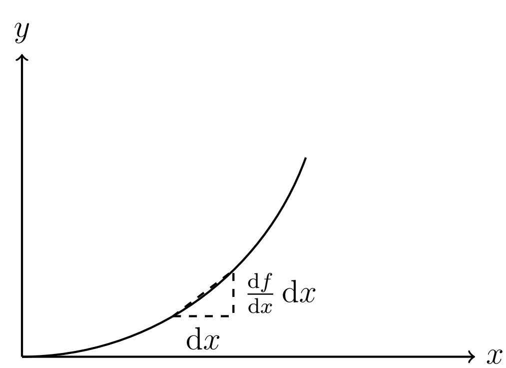
$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,\mathrm{d}x$$

bestimmt werden.

(i) Begründen Sie kurz anschaulich, warum diese Formel wahr sein kann. *Hinweis: Pythagoras.*

(ii) Bestimmen Sie über obige Identität den Umfang eines Einheitskreises.

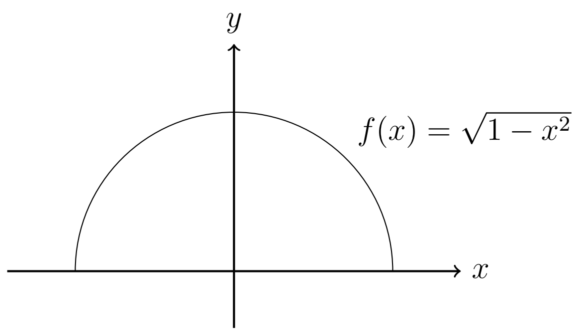
Proof. (i)



also intuitiv wäre

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(ii) Wir berechnen zuerst die Länge eines Hälftes des Kreises, also



Es gilt

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

und

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \arcsin(x)\big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,
\end{aligned}$$

also der Umfang ist 2π. $\square$