Universität Würzburg
Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Giorgio Sangiovanni
Linus Aliani, Alexander Baum,
Max Fischer, Jonathan Karl, Niklas Witt

10. Übung Statistische Mechanik und Thermodynamik

Bitte laden Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 16.01.2025 um 16:00 Uhr auf WueCampus hoch.
Die Blätter dürfen Sie dabei in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 *Paramegnetisches Fermi-Gas* **10 P.**

Gegeben ist ein paramegnetisches System bestehend aus N nicht-wechselwirkenden Elektronen mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} - \mu_0 \sigma_j \cdot \mathbf{B}\,, \tag{1}$$

wobei $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$ und der Spin der einzelnen Elektronen entweder parallel (+) oder antiparallel (-) zum Magnetfeld ausgerichtet ist.

a) Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential durch folgenden Ausdruck gegeben ist: *4 P.*

$$\mathcal{J} = -\,k_\mathrm{B}T\ln(Z_\mathrm{G}) = -k_\mathrm{B}T\left[\ln(Q_-(\mu+\mu_0 B)) + \ln(Q_+(\mu-\mu_0 B))\right] \tag{2}$$

mit

$$\ln(Q_\mp(\mu\pm\mu_0 B)) = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(1+\exp\left\{-\beta\left(\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} \mp \mu_0 B - \mu\right)\right\}\right) \tag{3}$$

b) Benutzen Sie die Umformulierung der Summe zum Integral hin für makroskopisch große Volumina *4 P.*

$$\sum_j f(\mathbf{p}_j) \to \frac{V}{2\pi\hbar^3}\int d^3p f(\mathbf{p}) \tag{4}$$

und drücken Sie so die beiden Funktionen $\ln(Q_-(\mu+\mu_0 B))$ und $\ln(Q_+(\mu-\mu_0 B))$ durch die aus der Vorlesung bekannten Fermi-Integrale $f_n(z)$ aus.
Setzen Sie diese zwei neuen Ausdrücke in das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe ein und zeigen Sie so, dass:

$$\mathcal{J} = -k_\mathrm{B}T\frac{V}{\lambda_\mathrm{T}^3}\left[f_{5/2}(ze^{\beta\mu_0 B}) + f_{5/2}(ze^{-\beta\mu_0 B})\right] \tag{5}$$

Hierbei ist $\lambda_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_\mathrm{B}T}}$ die thermische De-Broglie-Wellenlänge und $z = e^{\beta\mu}$.
Hinweis: Der Wert der Gamma-Funktion $\Gamma(3/2) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *ist hilfreich.*

Bitte wenden!

c) Finden Sie die Zahldichte für alle Elektronen, die jeweils parallel oder antiparallel zum Magnetfeld ausgerichtet sind. *2 P.*

Aufgabe 2 *Druck und innere Energie eines ultra-relativistischen Fermi-Gases* **5 P.**

Gegeben ist ein ultra-relativistisches Elektronen-Gas von N Teilchen welche jeweils einen Impuls $\mathbf{k}_i$ haben. Die Zahl der Teilchen in einem Energielevel ist durch n_i gegeben. Der Hamilton Operator ist somit durch den folgenden Audruck gegeben:

$$H = \sum_{i=1}^{N} c|\mathbf{k}_i|n_i \tag{6}$$

a) Berechnen Sie die innere Energie des Systems. *Hinweis: Vergessen Sie nicht den Spin der Teilchen beim Berechnen der Spur über alle Freiheitsgrade.* *2 P.*

b) Berechnen Sie den Druck des Fermigases. *2 P.*

c) Zeigen Sie unter Nutzung der Beziehung: $\mathcal{J} = -pV$ für das großkanonische Potential ($\mathcal{J}$), den Druck (p) und das Volumen (V), dass *1 P.*

$$U = 3pV \tag{7}$$

für ultra-relativische Fermi-Gase gilt. Vergleichen Sie dies kurz mit dem Ergebnis für ein nicht-relativistisches ideales Fermi-Gas.