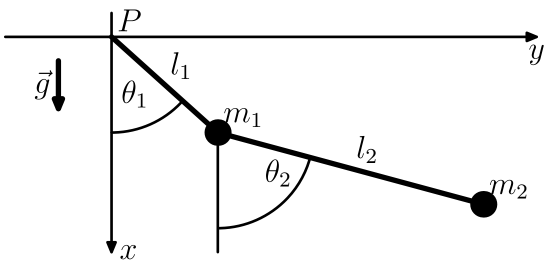
4. Übung zur Klassischen Mechanik
6. November 2023

Zwangsbedingungen und -Kräfte

4.1 Doppelpendel

Ein Doppelpendel aus masselosen Stäben der Längen l_1 und l_2 und Massen m_1 und m_2 sei im Punkt $P = (0, 0)$ befestigt und schwinge in der x-y-Ebene unter dem Einfluß einer in positiver x-Richtung wirkenden homogenen Schwerkraft.

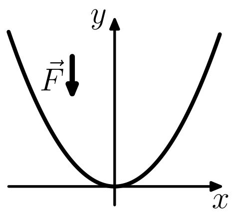


1. Geben Sie die Zwangsbedingungen an.
2. Bestimmen Sie eine Lagrangefunktion für das System in den generalisierten Koordinaten θ_1 und θ_2.
3. Leiten Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen her.
4. Betrachten Sie nun im Fall $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2$ kleine Schwingungen, d. h. entwickeln Sie die Bewegungsgleichungen bis zur ersten Ordnung in den generalisierten Koordinaten. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen $\omega_\pm$ des Systems, indem Sie zeigen, dass die Bewegungsgleichungen gelöst werden durch[1] (den Realanteil von)
$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{i\omega_+ t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{i\omega_- t}, \qquad (1)$$
wobei $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Skizzieren Sie die Schwingungen des Doppelpendels für die beiden Spezialfälle $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ und $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.

[1] Hier wird Ihnen die Lösung als Ansatz angegeben. Im weiteren Verlauf dieser und der Mathematikvorlesung werden Sie lernen, dass und wie lineare Systeme von Bewegungsgleichungen - wie sie hier im Fall kleiner Schwingungen vorliegen - als Eigenwertproblem formuliert werden und mit Hilfe von Methoden aus der linearen Algebra gelöst werden können.

4.2 Teilchen auf der Parabel

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m auf dem Geschwindigkeitsphasenraum $TQ = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ unter Einwirkung der Gravitationskraft $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_y$. Das Teilchen sei nun in seiner Bewegung auf eine Parabel mit Krümmung $\alpha \in (0, \infty)$

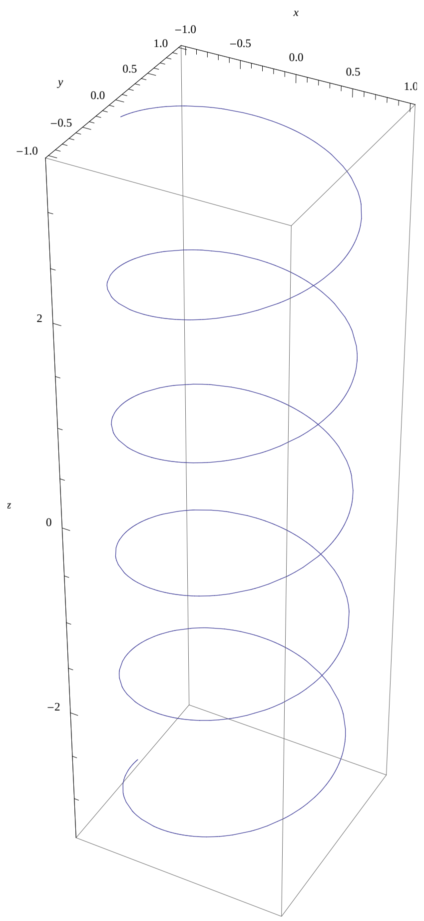


eingeschränkt.

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingung $\chi(x, y) = 0$ dieses Systems.
2. Geben Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten an.
3. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion in den verallgemeinerten Koordinaten und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.
4. Anstelle der Wahl von geeigneten generalisierten Koordinaten können Sie auch Lagrangemultiplikatoren verwenden um die Bewegungsgleichungen unter Zwangsbedingungen zu bestimmen. Leiten Sie in diesem Formalismus die Bewegungsgleichungen erneut ab und bestimmen Sie den Lagrangemultiplikator als Funktion von x und $\dot{x}$ mit Hilfe der Bedingungen $\chi = 0$, $\dot{\chi} = 0$ und $\ddot{\chi} = 0$.
5. Bestimmen Sie die Zwangskräfte dieses Systems und diskutieren Sie deren Richtung.

4.3 Teilchen auf der Spirale

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m auf dem Geschwindigkeitsphasenraum $TQ = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ unter Einwirkung der Gravitationskraft $\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{e}_z$. Das Teilchen sei nun in seiner Bewegung auf eine unendlich lange Spirale mit Radius $R \in (0, \infty)$ und Hub (d. h. Abstand der Windungen in z-Richtung) $h \in (0, \infty)$



eingeschränkt.

Diskutieren Sie die Punkte 1. bis 3. der vorherigen Aufgabe für dieses Problem und lösen Sie auch die Bewegungsgleichung. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen Energie, Impuls in z-Richtung und Drehimpuls in z-Richtung für $g \neq 0$ und $g = 0$.