Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 14, 2024)

Problem 1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = x(t) + t, \qquad x(0) = 1.$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung für das Anfangswertproblem.

(b) Berechnen Sie die Schritte bis einschließlich φ_3 der Picard-Iteration

(c) Leiten Sie eine Formel für die Berechnung von φ_k her und beweisen Sie diese.

(d) Zeigen Sie, dass $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Lösung aus Teil a konvergiert.

Proof. (a) Lösung analog wie Blatt 3: Man verifiziere einfach, dass

$$\varphi(t) = -1 - t + 2e^t$$

eine Lösung ist.

(b) Wir immer setzen wir $\varphi_0(t) = 1$ und definieren $f(t,x) = t + x$. Danach führen wir das Iterationsverfahren durch

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= 1 + \int_0^t (s+1)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
\varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + \frac{s^2}{2}\right) \mathrm{d}s \\
&= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3!} \\
\varphi_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3!}\right) \mathrm{d}s \\
&= 1 + t + t^2 + 2 \cdot \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}
\end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(c) Wir erraten:

$$\varphi_n(t) = 1 + t + t^2 + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

für $n \geq 3$ und sonst wie in (b). Klar gilt das Formel für $n = 3$. Jetzt beweisen wir es durch Induktion. Angenommen das Formel gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^t f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + s^2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{s^k}{k!} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \right) \mathrm{d}s \\
&= 1 + t + t^2 + 2 \cdot \frac{t^3}{3!} + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{s^{n+2}}{(n+2)!} \\
&= 1 + t + t^2 + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n+1} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

(d) Wir können die Potenzreihe umschreiben

$$\begin{aligned}
&1 + t + t^2 + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
=&(-1 - t) + 2 + 2t + 2 \cdot \frac{t^2}{2} + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n+1} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
=& -1 - t + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass die Summe $2 \cdot \sum_{k=0}^{n} t^k/k!$ gegen $2e^t$ (sogar gleichmäßig und absolut) konvergiert. Da $t^{n+1}/(n+1)!$ gegen Null für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert $\varphi_n(t)$ gegen die Lösung aus (a). □

Problem 2. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} + x + \sqrt[3]{x^2} = 0, \qquad x(0) = 1.$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangwertproblems. Geben Sie auch den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung auf dem Intervall $I = (-\infty, 3\ln(2))$ eindeutig ist.

Proof. (a) Wir lösen die DGL durch TDV:

$$\int_1^x \frac{1}{r + \sqrt[3]{r^2}}\,\mathrm{d}r = -\int_0^t \mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
[3\ln|1+r^{1/3}|]_1^x &= -t && (*) \\
\ln\left(1+x^{1/3}\right) - \ln 2 &= -\frac{t}{3} \\
1+x^{1/3} &= 2e^{-t/3} \\
x &= \left[2e^{-t/3}-1\right]^3 && (!)
\end{aligned}
$$

wobei wir den Betrag in (*) weglassen dürfen, da $x(0) = 1 > 0$ und die Lösung ist somit lokal positiv. Nachdem wir die Lösung (!) bestimmt haben, sehen wir, dass es eine reine positive Lösung gibt innerhalb eines Bereiches.

Für diese Lösung brauchen wir offensichtlich $1 + x^{1/3} > 0$. Dies ist aber für alle $t \in \mathbb{R}$ der Fall, da $\exp(t) > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.

(b) Die DGL hat den Form $\dot{x} = f(t,x)$ mit $f(t,x) = -x - \sqrt[3]{x}$. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{2}{3x^{1/3}}$$

was für alle $x^{1/3} > 0$ stetig ist. Dies entspricht zeitlich

$$2e^{-t/3} - 1 > 0,$$

oder

$$t < 3\ln 2.$$

$f(t,x)$ ist damit lokal lipschitz stetig und die Lösung ist eindeutig. □

Problem 3. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sin(t)\sqrt{1+4x}, \qquad x(0) = x_0, \qquad x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right).$$

Geben Sie alle $x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist. Begründen Sie auch, warum es bei diesen Anfangswerten eine lokal eindeutige Lösung gibt.

Geben Sie für alle Anfangswerte, bei denen es keine eindeutige Lösung gibt, zwei verschiedene Lösungen an.

Proof. Die DGL hat den Form $\dot{x} = f(t,x)$. $f(t,x)$ ist für $x \in (-1/4, \infty)$ lokal Lipschitz stetig in x, da sie stetig differenzierbar ist (mit Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\sin(t)}{\sqrt{1+4x}}$). Daher gibt es für alle $x_0 \in (-1/4, \infty)$ eine lokal eindeutige Lösung.

Jetzt betrachten wir $x_0 = -1/4$. Die konstante Lösung $x = -1/4$ ist offensichtlich eine Lösung. Darüber hinaus können wir die DGL durch TDV lösen:

$$\begin{aligned}
\int_{-1/4}^{x} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1+4s}} &= \int_0^t \sin(r)\,\mathrm{d}r \\
\frac{1}{2}\sqrt{1+4x} &= -\cos t + 1 \\
1 + 4x &= 4(1-\cos t)^2 \\
x &= (1-\cos t)^2 - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass diese Lösung nicht konstant ist. $\square$