Wintersemester 2024/2025 07.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy Andreas Schroll

4. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 11.11. und 12.11. gelöst.

Aufgabe P4.1

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \sin\left(\tfrac{\pi}{6}t\right) x, \quad x(0) = 1.$$

und berechnen Sie mittels Euler-Polygonen $p_1(t)$ eine Näherung auf dem Intervall $[0,4]$ mit Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe P4.2

Überprüfen Sie, ob es für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$$

eine Lösung oder sogar eine lokal eindeutige Lösung gibt. Falls die Lösung lokal eindeutig ist, dann geben Sie diese an und falls die Lösung nicht lokal eindeutig ist, dann geben Sie mindestens zwei Lösungen an.

Wintersemester 2024/2025 07.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy Andreas Schroll

4. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 14.11.2023 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H4.1 **(3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = x(t) + t, \quad x(0) = -1.$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung für das Anfangswertproblem.

b) Berechnen Sie die Schritte bis einschließlich φ_3 der Picard-Iteration.

c) Leiten Sie eine Formel für die Berechnung von φ_k her und beweisen Sie diese.

d) Zeigen Sie, dass $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Lösung aus Teil a konvergiert.

Aufgabe H4.2 **(3 + 4 = 7 Punkte)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} + x + \sqrt[3]{x^2} = 0, \quad x(0) = 1.$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems. Geben Sie auch den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

b) Zeigen Sie, dass die Lösung auf dem Intervall $I = (-\infty, 3\ln(2))$ eindeutig ist.

Aufgabe H4.3 **(5 Punkte)**

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sin(t)\sqrt{1+4x}, \qquad x(0) = x_0, \qquad x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right).$$

Geben Sie alle $x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist. Begründen Sie auch, warum es bei diesen Anfangswerten eine lokal eindeutige Lösung gibt.
Geben Sie für alle Anfangswerte, bei denen es keine eindeutige Lösung gibt, zwei verschiedene Lösungen an.