Wintersemester 2023/24 27.11.2023
Prof. Dr. Stephan Elsenhans Benedikt Wolf

Lineare Algebra: Aufgabenblatt 07

7.1 Austauschsatz /30 Punkte

Wir betrachten den Unterraum U von $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}[t]$, der von

$$B = (\overline{1}, t^2 + t, t^3 - t^2, t + t^3, t^7, t^6 + t^5 + t^3, t^4 - \overline{5})$$

erzeugt wird.

(a) Entscheiden Sie, ob B eine Basis von U ist. Finden Sie andernfalls eine Basis B' von U, die nur aus Elementen von B besteht.

(b) Zeigen Sie: Die Polynome

$$(t^7 - t^3 - t - \overline{5}, \overline{2}t^7 - \overline{27}, t^6 + t^5 - t^4 + t^3 + \overline{5})$$

liegen alle in U und sie sind linear unabhängig.

(c) Bestimmen Sie eine Umnummerierung von B', die die Aussage des Austauschsatzes 2.6.8 mit $(w_1, w_2, w_3) = (t^7 - t^3 - t - \overline{5}, \overline{2}t^7 - \overline{27}, t^6 + t^5 - t^4 + t^3 + \overline{5})$ erfüllt.

7.2 Dimension /15 Punkte

Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Vektorräume.

(a) $V_1 = \{p \in \mathbb{Q}[X] | p(0) = 0 \wedge \deg(p) \leq 6\}$

(b) $V_2 = \{p \in \mathbb{Q}[X] | \forall a \in \mathbb{Q} : p(-a) = -p(a)\}$

(c) $V_3 = \{v \in \mathbb{R}^n \,| \forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} : v_i - v_{n-i+1} = 0\}$

7.3 Zeilenstufenform /20 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{8} \\ \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^{3\times 4}$$

(a) Bringen Sie A mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Lesen Sie anschließend den Zeilenrang von A ab.

(b) Bringen Sie $B = A^T$ mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Lesen Sie anschließend den Zeilenrang von B ab.

7.4 Zeilenraum /35 Punkte

Wir betrachten $U = \operatorname{span}((1, 2, 5, 6), (5, 4, 3, 2), (4, 3, 6, 5)) \subseteq \mathbb{Q}^4$.

(a) Bringen Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

mit elementaren Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform. Die entstandenen Zeilenvektoren nennen wir ab jetzt b_1, b_2, b_3

(b) Begründen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

(c) Begründen Sie, dass b_1, b_2, b_3 in U liegen.

(d) Folgern Sie mit Hilfe der vorigen beiden Aussagen, dass sowohl $((1,2,5,6),(5,4,3,2),(4,3,6,5))$ als auch (b_1, b_2, b_3) eine Basis von U bilden.

(e) Nutzen Sie die Basis (b_1, b_2, b_3), um herauszufinden, welche der Vektoren $u_1 = (1,1,1,1)$,$u_2 = (1,1,0,0)$ bzw. $u_3 = (1,2,3,4)$ in U enthalten sind. Geben Sie in diesem Fall zudem die Koeffizienten der Linearkombination

$$\lambda_i(1,2,5,6) + \mu_i(5,4,3,2) + \tau_i(4,3,6,5) = u_i$$

an.

Abgabetermin: **04.12.2023, 11:00 Uhr auf WueCampus**
Maximal 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Begründen Sie Ihre Behauptungen. Sofern nicht anders angegeben, dürfen Sie nur Aussagen verwenden, die in der Vorlesung oder in den Übungen bereits bewiesen wurden. $\sum$ **/100**

Lösungshinweise

Aufgabe 1:
...

Aufgabe 2:
Finden Sie zunächst ein Erzeugendensystem.

Aufgabe 3:
Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n - Matrix$, so ist $A^T := (a_{ji})$ diejenige $n \times m$-Matrix, die entsteht wenn man die Rolle von Spalten und Zeilen vertauscht.

Aufgabe 4:
Was hat die Zeilenstufenform mit dem Spann zu tun?