

**Aufgabe 1**  $N$  Teilchen-Zustände und -Hilbertraum

8 P.

Gegeben sei ein Einteilchen-Hilbertraum  $\mathcal{H}_1$  mit der Eigenbasis  $\{|\varphi_i\rangle\}$  des Einteilchen-Hamiltonoperators

$$\hat{h}|\varphi_i\rangle = \varepsilon_i|\varphi_i\rangle, \quad (i \in \{1, 2, 3\}). \quad (1)$$

Geben Sie für die Teilchenzahl  $N = 2$  explizit an:

- a) alle Basiszustände des Zweiteilchen-Hilbertraums  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ , wenn es sich um unterscheidbare Teilchen handelt. Welche Dimension hat der Hilbertraum  $\mathcal{H}_2$ ? 2 P.

$$\text{Basiszustände} = \{ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle, |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle, |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_3\rangle, \\ |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_2\rangle, |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle, \\ |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_1\rangle, |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \}$$

$$\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1) = 9$$

- b) alle Basiszustände des total-symmetrischen 2-Teilchen-Hilbertraums  $\mathcal{H}_2^S$ , wenn es sich um bosonische Teilchen handelt. Geben Sie die Basiszustände von  $\mathcal{H}_2^S$  sowohl in Form von Linearkombinationen von Produktzuständen und in Besetzungszahldarstellung an. Welche Dimension hat der Hilbertraum  $\mathcal{H}_2^S$ ? 2 P.

$$\text{Basiszustände} = \{ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_3\rangle + |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_1\rangle), \\ |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_2\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle + |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_2\rangle), |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \}$$

- c) alle Basiszustände des total-antisymmetrischen 2-Teilchen-Hilbertraums  $\mathcal{H}_2^A$ , wenn es sich um fermionische Teilchen handelt. Schreiben Sie die Basiszustände von  $\mathcal{H}_2^A$  mit Hilfe der Slater-Determinante in Form von Linearkombinationen von Produktzuständen. Geben Sie des weiteren die Basiszustände in Besetzungszahldarstellung an. Welche Dimension hat der Hilbertraum  $\mathcal{H}_2^A$ ? 2 P.

$$\text{Basiszustände} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle - |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_3\rangle - |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_1\rangle), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle - |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_2\rangle) \}$$

- d) Geben Sie die Definition des Fock-Raums an. Welche Dimension hat der Fock-Raum  $\mathcal{H}_{\text{Fock}}^F$  im Fall der Fermionen für einen Einteilchen-Hilbertraum mit drei Basiszuständen? 2 P.

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_n$  Hilbert-Raum mit  $n$  Teilchen

**Aufgabe 2** Boltzmann-, Bose- und Fermi-Statistik

7 P.

Bei einem System von  $N$  wechselwirkungsfreien Teilchen und einem Einteilchen-Hilbertraum mit der Eigenbasis  $\{|\varphi_i\rangle\}$  des Einteilchen-Hamiltonoperators:

$$\hat{h}|\varphi_i\rangle = \varepsilon_i|\varphi_i\rangle, \quad (i \in \{1, 2, 3\}). \quad (2)$$

Bestimmen Sie speziell für  $N = 2$  die möglichen Energie-Eigenwerte des  $N$ -Teilchen-Problems und berechnen Sie die kanonische 2-Teilchen-Zustandssumme  $Z_k(2)$

a) für unterscheidbare („klassische“) Teilchen.

2 P.

$$\begin{aligned} Z &= \text{tr}(e^{-\beta \hat{H}}) = \text{tr}(e^{-\beta(\hat{H}_1 + \hat{H}_2)}) \\ &= \sum_{n_1, n_2=1}^3 \langle \varphi_{n_1}, \varphi_{n_2} | e^{-\beta(\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2})} | \varphi_{n_1}, \varphi_{n_2} \rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2=1}^3 e^{-\beta(\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2})} \\ &= e^{-2\beta\varepsilon_1} + 2e^{-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + 2e^{-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)} + 2e^{-\beta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)} + e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-2\beta\varepsilon_3} \end{aligned}$$

b) für den klassischen Grenzfall identischer Teilchen, wobei die Ununterscheidbarkeit durch den Faktor  $\frac{1}{N!}$  in der Zustandssumme berücksichtigt wird.

1 P.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2!} Z_{\text{ein Teilchen}}^2 \\ &= \frac{1}{2!} [e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta\varepsilon_3}]^2 \\ &= \frac{1}{2} [e^{-2\beta\varepsilon_1} + 2e^{-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + 2e^{-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)} + 2e^{-\beta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)} + e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-2\beta\varepsilon_3}] \end{aligned}$$

c) für Bosonen.

2 P.

$$\begin{aligned} Z &= \text{tr}[e^{-\beta \hat{H}}] \\ &= \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \langle n_1, n_2, n_3 | e^{-\beta \hat{H}} | n_1, n_2, n_3 \rangle \\ &= e^{-2\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + e^{-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)} + e^{-\beta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)} \\ &\quad + e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-2\beta\varepsilon_3} \end{aligned}$$