Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 12

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 16, 2024)

Problem 1. (a) Geben Sie die Definitionen von Gradient, Rotation und Divergenz an.

(b) Wir schreiben die Komponenten des dreidimensionalen Vektorprodukts als

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k,$$

wobei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor für $\mathbb{R}^3$ ist, mit $\epsilon_{ijk} = 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} =& \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} =& \delta_{kl}, \end{aligned}$$

mit δ dem Kronecker-δ.

(c) Zeigen Sie mit den Formeln aus (b) die folgenden Identitäten für beliebige Vektorfelder $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =& \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) =& (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) =& (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

(d) Zeigen Sie damit, dass für beliebige skalare Funktionen $F(\vec{x})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{x})$ gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} F =& 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times A) =& 0 \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times A =& \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot A) - \nabla^2 A\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(F\vec{A}) =& (\boldsymbol{\nabla}F)\cdot\vec{A} + F\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{A},\end{aligned}$$

mit Δ dem Laplace-Operator.

Proof. (a)

$$\begin{aligned}\text{grad } F =& \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial F}{\partial x_i}\hat{x}_i\\ \text{div } \vec{F} =& \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\\ \text{curl } \vec{F} =& \boldsymbol{\nabla}\times F\end{aligned}$$

(b) Bemerkung: j, k, l und m sind freie Indizes. i wird summiert.

Spezialfall $j = k$ oder $l = m$: Die Summe ist 0

Voraussetzung, um eine nicht Null Summe zu erhalten: i muss nicht gleich j, k, l oder m sein. Da es nur insgesamt 3 Möglichkeiten für die Indizes gibt, muss für die Mengen gelten:

$$\{j, k\} = \{l, m\}.$$

Wenn die vorherige Gleichung gilt, ist die Summe $\neq 0$ genau dann, wenn

$$i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j, k\}.$$

In diesem Fall ist die Summe eindeutig bestimmt.

Der eindeutige Ausdruck mit den gleichen Eigenschaften ist

$$\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

Für den zweiten Teil betrachten wir wieder die Fälle:

Wenn $k \neq l$, gälte einer der Fälle

(i) $i = k$, oder

(ii) $i = k$, oder $j = k$, oder

(iii) $i = l$, oder $j = l$

Damit sind alle Terme in der Summe und auch die ganze Summe 0.

Im Fall $k = l$: Sei $\{1, 2, 3\} = \{a, b, k\} = \{a, b, l\}$. Dann gibt es nur nicht Null Terme: $\epsilon_{abk}\epsilon_{abl} = (\epsilon_{abl})^2$ und $(\epsilon_{bal})^2$.

Unabhängig vom Signum der Permutation ist dessen Quadrat 1. Die Summe ist damit 2 und der Ausdruck 1.

(c) Doppel auftretende Indizes werden immer implizit summiert.

(i)

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) =& a_i(\epsilon_{ijk} b_j c_k) \\
=& c_j \epsilon_{kij} a_i b_j \\
=& \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{b}}) \\
=& b_j \epsilon_{jki} c_k a_i \\
=& \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{a}})
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
[\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})]_i =& \epsilon_{ijk} a_j (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})_k \\
=& \epsilon_{ijk} a_j (\epsilon_{klm} b_l c_m) \\
=& \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m \\
=& (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m \\
=& b_i a_m c_m - c_i a_l b_l \\
=& b_i (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - c_i (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \\
\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) =& \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{d}}) =& (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})_i (\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{d}})_i \\
=& (\epsilon_{ijk} a_j b_k)(\epsilon_{ilm} c_l d_m) \\
=& (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\
=& a_l c_l b_m d_m - a_m d_m b_l c_l \\
=& (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{d}}) - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{d}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})
\end{aligned}$$

(d) Doppel auftretende Indizes werden immer implizit summiert.

(i)

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} F]_i =& \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k F \\
=& -\epsilon_{ikj}\delta_j\delta_k F && \text{Indizes in } \epsilon \text{ vertauscht} \\
=& -\epsilon_{ikj}\partial_k\partial_j F && \text{Satz von Schwarz} \\
=& -\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k F && \text{Umnummerierung } j \leftrightarrow k \\
=& -[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} F]_i \\
[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} F]_i =& 0 && \forall i \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} F =& \vec{\mathbf{0}}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times A =& \partial_i(\boldsymbol{\nabla} \times A)_i \\
=& \partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_j A_k) \\
=& \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k \\
=& 0
\end{aligned}$$

mit dem gleichen Argument, aber k ist kein freier Index.

(iii)

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}]_i =& \epsilon_{ijk}\partial_j(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}})_k \\
=& \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\partial_l A_m \\
=& \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m \\
=& (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m \\
=& \partial_m\partial_i A_m - \partial_l\partial_l A_i \\
=& \partial_i\partial_m A_m - \partial_l\partial_l A_i \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times A =& \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

(iv)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot F\vec{\mathbf{A}} = \partial_i(FA_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= A_i \partial_i F + F \partial_i A_i \\
&= \vec{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\nabla} F + F \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\cdot} A
\end{aligned}
$$

$\square$

Problem 2.