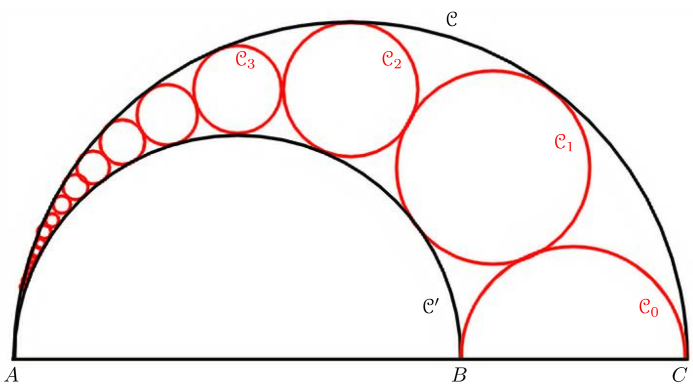
Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Komplexe Analysis
Prof. Dr. Oliver Roth
Annika Moucha

Einführung in die Funktionentheorie

4. Übungsblatt, Abgabe bis 13. Mai 2024 um 10 Uhr

Hausaufgaben

H4.1 **Paarweise tangentiale Halbkreise (4)** Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}_0$ Halbkreise mit Durchmessern AC, AB bzw. BC, sodass A, B und C auf einer Gerade liegen. Wir betrachten ferner Kreise $\mathcal{C}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ tangential zu den Halbkreisen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$, sodass ferner $\mathcal{C}_n$ tangential zu $\mathcal{C}_{n-1}$ in einem Punkt P_n ist. Zeigen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, die alle Berührpunkte $P_0, P_1, \ldots$ enthält.



H4.2 **Integration und Potenzreihen (3+1)**

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$ und $K_R(z_0)$, $0 < R < \infty$, die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in K_R(z_0).$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $r \in [0, R)$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt$.

(b) Falls $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in K_R(z_0)$, so gilt $|a_k| \leq M \frac{1}{R^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

H4.3 **Aufgeblasene Null (4)**

Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in K_r(z_0)$ folgende Identität gilt:

$$\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w - z)^k} \, dw = 0.$$

Warum schließen wir $k = 1$ aus?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $z = z_0$ und versuchen Sie anschließend den allgemeinen Fall auf diesen zurückzuführen.

H4.4 **Wiederholungsaufgabe: Potenzreihen (1+1)**

Sei $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und $g(z) = zf(z)$.

(a) Sei $K \subset \mathbb{D}$ kompakt. Beweisen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g(z^n)$ gleichmäßig auf K konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g(z^n)$ nicht notwendigerweise gleichmäßig auf der ganzen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ konvergiert.