Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 12

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 31, 2024)

Problem 1. Begründen Sie, warum die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung im Punkt $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche besondere Form nimmt $(D\det)(\mathrm{Id})$ an?

Proof. Per Definition ist

$$\det(X) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{1\sigma(1)} X_{2\sigma(2)} \dots X_{n\sigma(n)}.$$

Da dies eine Summe von Produkte der Komponenten sind, ist det unendlich oft differenzierbar.

Es gilt $\det' : \mathbb{R}^{n\times n} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R})$. Wir betrachten eine parameterabhängige Matrix $A(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det A(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}(t) \dots A_{n\sigma(n)}(t) \\
=& \sum_{\sigma\in S_n} \left[(A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \sum_{j=1}^{n} \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right] \\
=& \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n} \left[(A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right]
\end{aligned}$$

Für festes j kann dieser Ausdruck so vorgestellt werden: Wir setzten in der j-te Zeile A' statt A, also

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$
\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{cccc}
A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\
A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2n}(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cancel{A'_{j1}(t)} & \cancel{A'_{j2}(t)} & \cancel{\dots} & \cancel{A'_{jn}(t)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \dots & A_{nn}(t)
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

und berechnen deren Determinante. Wir führen eine Laplaceentwicklung um die j-te Zeile durch und erhalten, mit $A^{\#}$ die adjugierte Matrix

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det A(t) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A'_{jk}(t) A^{\#}_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A^{\#}_{kj} A'_{jk}(t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A^{\#}A')_{kk} \\
&= \operatorname{tr}(A^{\#}A')
\end{aligned}
$$

Also die Ableitung $\det'$ im Punkt A ist die Abbildung, die B nach $\operatorname{tr}(A^{\#}B)$ abbildet.

Im Punkt I: Es gilt $I^{\#} = I$, also $D\det(I) = \operatorname{tr}$. □

Problem 2. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so kann die zweite Ableitung $D^2 f$ in jedem Punkt $x \in U$ durch eine blineare Abbildung $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ darstellen. Für eine gegebene Basis auf dem $\mathbb{R}^n$-wir wählen die kanonische Basis hier - lassen sich bilineare Abbildungen durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ darstellen, die sog. Hesse-Matrix Hf mit

$$
Hf(x,y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.
$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die partiellen Ableitungen nach dem Satz von Schwarz vertauschen, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch.

Es sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt genau dann besitzt, wenn die Hesse-Matrix von f (in (0,0)) positiv semi- negativ semi- bzw. indefinit ist.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für allgemeine Funktionen mit positiv (bzw. negativ) semidefiniter Hesse-Matrix im kritischen Punkt kein lokales Minimum (bzw. Maximum) vorliegen muss.

Proof. (a) Offensichtlich ist A die Hesse-Matrix und $f(0) = 0$. Wir drücken $f(x)$ als $\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle$ aus.

Dann per Definition: Falls A positiv semidefinit ist, ist $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle \geq 0$ für alle x, also f besitzt ein Minimum in $(0,0)$. Die Umkehrrichtung gilt auch per Definition. Sei U eine Umgebung. Für $x \in U$ ist $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ per Definition eines Minimums.

Das gleiche Argument (per Definition) gilt für f ein Maximum in $(0,0)$.

Die Eigenschaft des Sattelpunkts folgt durch ein Eliminationsverfahren: Falls A indefinit ist, ist sie weder positiv noch negative. Dann besitzt f weder ein Maximum noch ein Maximum in $(0,0)$. Da die Ableitung noch 0 ist, muss f ein Sattelpunkt im Ursprung besitzen.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ besitzt in 0 Ableitung 0. 0 ist sowohl positiv als auch negativ definit. Die Funktion besitzt aber weder ein Maximum noch ein Minimum in 0. $\square$

Problem 3. Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F.

(b) In welchem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ existiert die Inverse von $JF(p)$?

(c) Finden Sie eine lokale inverse Abbildung F^{-1} von F in einer Umgebung von $p = (1,0) = F(1,0)$ und berechnen Sie die Ableitung von F^{-1} in p.

(d) Ist F auf dem ganzen Gebiet $\{p \in \mathbb{R}^2 | JF(p) \text{ invertierbar}\}$ global invertierbar?

Proof. (a)

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

(b) $\det(JF) = 4x^2 + 4y^2$. Dies ist genau dann Null, wenn $x = y = 0$. Sonst ist JF invertierbar.

(c) Wir lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \xi \\ 2xy &= \zeta \\ y &= \frac{\zeta}{2x} \\ x^2 - \left(\frac{\zeta}{2x}\right)^2 &= \xi \\ x^4 - \frac{\zeta^2}{4} &= \xi x^2 \\ x^4 - \xi x^2 - \frac{\zeta^2}{4} &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left[\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}\right]$$

Beim Punkt $(x,y) = (1,0)$ ist $(\xi,\zeta) = (1,0)$. In einer genug kleinen Umgebung nehmen wir daher die positive Nullstelle und danach positive Würzel.

$$x = \left[\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{2}\right]^{1/2}.$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{\zeta}{2}\left[\frac{2}{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}\right]^{1/2}.$$

Dies ist die Umkehrabbildung.

(d) Nein, weil sie nicht injektiv ist. Es gilt $F(1,1) = (0,2)$ und $F(-1,-1) = (0,2)$, aber $(1,1) \neq (-1,-1)$. $\square$

Problem 4. Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen wir die Glattheit der Inversen-Abbildung $\inf : GL(n) \to GL(n)$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Begründen Sie, dass die Abbildung $A \cdot B \to AB$ auf $\mathbb{R}^{(n \times n)^2}$ unendlich oft differenzierbar ist.

(b) Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um $\inf \in \mathcal{C}^\infty(GL(n), GL(n))$ zu beweisen.

Hinweis: Betrachten Sie $A \cdot B = \mathrm{Id}$

Proof. (a) Das Produkt AB besitzt Komponente $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$. Dann sind alle Komponenten von AB nach alle Komponenten von A und B unendlich stetig differenzierbar, da die lineare Kombinationen von Produkten von AB sind.

(b) Wir betrachten $g : \mathbb{R}^{(n \times n)^2} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $g(A, B) \to AB - I$. Falls die Ableitung $(D_2 g)(A, B)$ invertierbar ist, ist die Abbildung $\mathrm{inv} : A \mapsto B$ glatt.

Da I konstant ist, leiten wir also das Produkt AB nach B ab. Dies ist aber bekanntermaßen glatt, also nach dem Satz von inverse Funktionen ist inv glatt. $\square$