a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Ausdrücke exakte Differentiale darstellen. *2 P.*

$$\delta F_1(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$
$$\delta F_2(x, y) = \left(2y^2 - 3x\right)dx - 4xy\,dy$$
$$\delta F_3(x, y) = \left(y - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$$

a) $F_1$: Nein. Angenommen es gibt $F(x,y)$, $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit $dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$.

Dann betrachten wir $F(\cos\theta, \sin\theta)$. $F$ soll periodisch sein. Es gilt

$$\frac{dF_1(\cos\theta, \sin\theta)}{d\theta} = \frac{\partial F_1}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial F_1}{\partial y}\cos\theta$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta} = 1$$

Ein Widerspruch, da dann $F_1$ nicht periodisch ist.

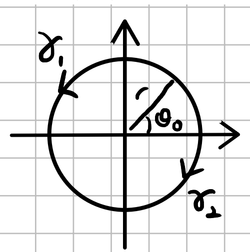
$F_2$: Nein, da $\frac{\partial(2y^2-3x)}{\partial y} = 4y \neq -4y = \frac{\partial(-4xy)}{\partial x}$

$F_3$: Ja, da $\frac{\partial(y-x^2)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(x+y^2)}{\partial x}$

Da $F_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist das Differentialform exakt.

b) Integrieren Sie $\delta F_1(x, y)$ entlang der gezeigten Wege $\gamma_1$ und $\gamma_2$. *2 P.*

b)




$$\gamma_1: [\theta_0, \theta_0 + \pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\theta \mapsto r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$
$$dx = -r\sin\theta\, d\theta$$
$$dy = r\cos\theta\, d\theta$$

$$\delta F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

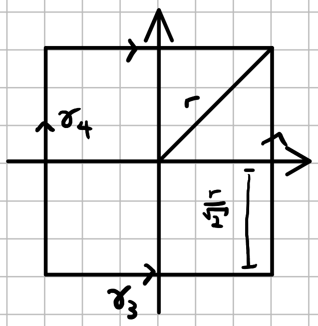
$$\delta(F_1 \circ \gamma_1) = \left[-\frac{r\sin\theta}{r^2}(-r\sin\theta) + \frac{r\cos\theta}{r^2} r\cos\theta\right]d\theta$$
$$= d\theta$$
$$\int \delta(F_1 \circ \gamma_1) = \int d\theta = \pi$$

$$\gamma_2: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\theta \mapsto r\begin{pmatrix}\cos(\theta_0 - \theta)\\ \sin(\theta_0-\theta)\end{pmatrix}$$
$$dx = \sin(\theta_0 - \theta)\,d\theta$$
$$dy = -\cos(\theta_0-\theta)\,d\theta$$

$$\delta(F \circ \gamma_2) = \left[-\frac{r\sin(\theta_0-\theta)}{r^2}\sin(\theta_0-\theta) + \frac{r\cos(\theta_0-\theta)}{r^2}\left(-r\cos(\theta_0-\theta)\right)\right]d\theta$$
$$= -d\theta$$
$$\int \delta(F \circ \gamma_2) = -\int d\theta = -\pi$$

c) Integrieren Sie $\delta F_2(x,\, y)$ entlang der Wege $\gamma_3$ und $\gamma_4$. *2 P.*

c)




$$\delta F_2(x,\, y) = (2\,y^2 - 3\,x)\,\mathrm{d}x - 4\,x\,y\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{\gamma_3} \delta F_2 = \int_{-r/\sqrt{2}}^{r/\sqrt{2}} (r^2 - 3x)\, dx + \int_{-r/\sqrt{2}}^{r/\sqrt{2}} \left(-4 \tfrac{r}{\sqrt{2}}\, y\right) dy$$

$$= \sqrt{2}\, r^3$$

$$\int_{\gamma_4} \delta F_2 = \int_{-r/\sqrt{2}}^{r/\sqrt{2}} \left(4 \tfrac{r}{\sqrt{2}}\, y\right) dy + \int_{-r/\sqrt{2}}^{r/\sqrt{2}} (r^2 - 3x)\, dx$$

$$= \sqrt{2}\, r^3$$

d) Zeigen Sie, dass für ein beliebiges exaktes Differential gilt: $\oint \delta F = 0$. *2 P.*
*Hinweis:* Nutzen Sie den Green'schen Integralsatz.

d) Nach der Stoke'schen Satz:

$$\int_{\partial\Omega} dF = \int_{\Omega} d(dF) = \int_{\Omega} 0 = 0$$

Alternativ: Angenommen $\delta F$ ist exakt, also $\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$

$$\int_{\partial\Omega} \delta F = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$= \int_{\Omega} \left( - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) dx\, dy$$

$$= \int 0\, dx\, dy = 0$$

**Aufgabe 2** *Kinetische Theorie des idealen Gases* **7 P.**

Ziel dieser Aufgabe ist es die Zustandsgleichung des idealen Gases anhand der kinetischen Gastheorie herzuleiten.

a) Finden Sie einen Ausdruck für die Anzahl der Teilchen, welche in einem infinitesimalen Geschwindigkeitsvolumen $\mathrm{d}^3v$ eingeschlossen sind und somit eine Geschwindigkeit innerhalb des Intervalls $[\vec{v}, \vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}]$ aufweisen. *1 P.*
*Hinweis:* Nehmen Sie für die Teilchen eine beliebige normierte Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ an.

$$N\, f(\vec{v})\, d^3v$$

b) Finden Sie nun einen Ausdruck für die Zahl der Teilchen, welche innerhalb des Zeitraums $\mathrm{d}t$ mit einer Wand kollidieren. *2 P.*
*Hinweis:* Überlegen Sie, wie weit ein Teilchen von einer Wand entfernt sein darf, damit es diese innerhalb des Zeitraums $\mathrm{d}t$ erreichen kann.

Wenn das Teilchen die Geschwindigkeit $\vec{v}$ hat, muss das Teilchen innerhalb $-\vec{v}\,dt$ sein

Angenommen die Wand befindet sich in der $y$-$z$ Ebene, dann muss $x \leq -V_x\,dt$

Die Anzahl der Teilchen ist daher

$$N\, \frac{(-V_x\,dt)S}{V}\, d^3v$$

c) Kombinieren Sie diese beiden Ausdrücke, um einen Ausdruck für den Impuls $\mathrm{d}p$ zu finden, welcher durch alle Teilchenkollisionen innerhalb des Zeitraums $\mathrm{d}t$ auf eine massive Wand übertragen wurde. *1 P.*
*Hinweis:* Das Endergebnis lautet $\mathrm{d}p = 2\,m\,v_x^2\,\frac{N}{V}\,S\,\mathrm{d}t\,f(\vec{v})\,\mathrm{d}^3v$.

Der übertragene Impuls ist $2p_x$, da das Stoß als elastisch angenommen wird und das Teilchen reflektiert wird.

Damit ist

$$dp = \underbrace{2mV_x}_{\text{Impuls eines Teilchens}} \underbrace{\left| N\, \frac{(-V_x\,dt)S}{V} \right|}_{\text{Anzahl Teilchen}} d^3v$$

$$= 2mV_x^2\, \frac{N}{V}\, S\,dt\, f(\vec{v})\,d^3v$$

d) Finden Sie unter Ausnutzung von $\mathrm{d}p$ einen Ausdruck für den Druck, welcher auf die Innenfläche des Behälters ausgeübt wird. *2 P.*
*Hinweis:* Das Endergebnis für die Zustandsgleichung des idealen Gases lautet: $p\,V = \frac{1}{3}\,m\,N\,\langle v^2\rangle = \frac{2}{3}\,N\,\langle \epsilon_{\mathrm{kin}}\rangle$

Druck $\quad P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt}$

Summe auf 6 Seiten des Behälters
Gesamte Fläche $A = 6S$

$$\frac{dp}{dt} = 2m\frac{N}{V}S(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)\, f(\vec{v})\, d^3v$$

$$= 2m\frac{N}{V}S\langle V^2\rangle$$

$$P = \frac{1}{3}m\frac{N}{V}\langle v^2\rangle$$

$$pV = \frac{1}{3}mN\langle v^2\rangle$$

$$= \frac{2}{3}N\langle \epsilon_{kin}\rangle$$

e) Nun vereinfachen Sie diesen Ausdruck unter Benutzung der inneren Energie des idealen Gases. *1 P.*

$$\langle \varepsilon_{kin} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$pV = nRT$$