Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 25, 2023)

Problem 1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum des jeweils angegebenen Vektorraums sind.

(a) $\{p \in \mathbb{R}[t] | \deg(p) \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}[t]$.

(b) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(c) $B = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) $\{p \in \mathbb{Q}[t] | \forall a \in \mathbb{Q} : \tilde{p}(-a) = \tilde{p}(a)\}$, wobei $\tilde{p}$ die zu p gehörige Polynomfunktion bezeichnet, als Teilmenge von $\mathbb{Q}[t]$.

(e) $\{(1,2,3) + t \cdot (4,5,6) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Proof. (a) Ja. Sei $p_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$ und $p_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$. Es gilt

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 =& (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) t \\ & + (a_2 + b_2) t^2 + (a_3 + b_3) t^3 + (a_4 + b_4) t^3 \end{aligned}$$

was auch ein Polynom mit Grad ≤ 4 ist.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$x p_1 = x a_0 + x a_1 t + x a_2 t^2 + x a_3 t^3 + x a_4 t^4,$$

noch ein Polynom mit Grad ≤ 4.

(b) Nein. Es ist sogar kein Vektorraum, weil $0 \notin \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(c) Nein. Sei $z \in B$ mit $|z| = a < 1$. Dann ist

$$\left|\frac{1}{a^2}z\right| = \frac{1}{a^2}|z| = \frac{1}{a} > 1,$$

also B ist nicht unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

(d) Ja. Sei p_1, p_2 beliebige Elemente von der Menge, und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt $p_1 \tilde{+} p_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$, und per Definition

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1(a) =& \tilde{p}_1(-a)\\ \tilde{p}_2(a) =& \tilde{p}_2(-a)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$p_1 \tilde{+} p_2(a) = \tilde{p}_1(a) + \tilde{p}_2(a) = \tilde{p}_1(-a) + \tilde{p}_2(-a) = p_1 \tilde{+} p_2(-a).$$

Außerdem ist $x\tilde{p}_1 = x\tilde{p}_1$, und

$$x\tilde{p}_1(a) = x\tilde{p}_1(a) = x\tilde{p}_1(-a) = x\tilde{p}_1(-a).$$

(e) Nein. Wir wissen, dass $(1, 2, 3)$ ein Element von unserer Menge ist. Dann sollte $2(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$ auch ein Element sein. Wir würden dann schreiben

$$(1, 2, 3) + t(4, 5, 6) = (2, 4, 6),$$

also

$$t(4, 5, 6) = (1, 2, 3).$$

Aus $6t = 3$ haben wir $t = \frac{1}{2}$. Dann ist $5t = \frac{5}{2} \neq 2$, ein Widerspruch, also es ist kein Untervektorraum. $\square$

Problem 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien im jeweiligen Vektorraum linear unabhängig sind

(a) $((1, 2, 3), (5, 4, 3), (6, 6, 6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $((1, i), (i, -1))$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$.

(c) $((1, i), (i, -1))$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$.

(d) $(1, 1+t, 1+t+t^2)$ im $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$.

(e) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Proof. (a) Nein, weil

$$(1,2,3)+(5,4,3)+(-1)(6,6,6)=0.$$

(b) Ja. Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$a(1,i)+b(i,-1)=(a+bi, ai-b).$$

Wir würden $a+bi=0$ und $ai-b=0$. Aber wir wissen, dass das nur möglich ist, wenn $a=b=0$, also $(1,i)$ und $(i,-1)$ sind linear unabhängig.

(c) Nein, weil

$$i(1,i)+(-1)(i,-1)=(i,-1)-(i,-1)=0,$$

und wir haben $i \neq 0$.

(d) Ja. Sei $a,b,c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sodass

$$a(1+t+t^2)+b(1+t)+c(1)=at^2+(a+b)t+(a+b+c)=0.$$

Per Defintion der Nullpolynom gilt $a=0$. Dann ist $b+a=0$, oder $b=0$. Zuletzt gilt $a+b+c=0$, also $c=0$ weil $a=b=0$.

(e) Ja. Sei $a,b,c \in \mathbb{R}$, sodass $a(1,2,3)+b(5,4,3)+c(6,6,7)=0$. Es gilt

$$\begin{aligned}-6c &= a+5b\\ -6c &= 2a+4b\\ -7c &= 3a+3b\end{aligned}$$

Aus den zweiten und ersten Gleichungen folgt

$$a+5b=2a+4b,$$

also $a=b$. Aus der ersten oder zweiten Gleichung folgt $c=-a$. Aus der dritten Gleichung folgt

$$-7(-a)=7a=3a+3b=6a.$$

Weil $7a = 6a$ muss $a = 0$ sein. Dann ist $b = c = 0$. Also die Vektoren sind linear unabhängig.

$\square$

Problem 3. Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums sind

(a) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,6))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $(\exp it)_{t\in\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) $(1+t^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(d) $(\tilde{p})_{p\in\mathbb{R}[t]}$ für den Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(e) $((1,2,3),(5,4,3),(6,6,7))$ in $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Proof. (a) Nein. Wir betrachten $(6,6,5)$. Wir hoffen, dass es als Summe

$$(6,6,5) = a(1,2,3) + b(5,4,3) + c(6,6,6)$$

dargestellt werden kann, wobei $a,b,c \in \mathbb{R}$. Weil $(6,6,6)$ als linear Kombination der anderen 2 Vektoren geschrieben werden kann, können wir oBdA schreiben

$$(6,6,5) = a'(1,2,3) + b'(5,4,3) + (6,6,6),$$

oder einfach

$$(0,0,-1) = a'(1,2,3) + b'(5,4,3).$$

wobei $a',b' \in \mathbb{R}$. Dann ist $a' + 5b' = 0$, oder $a = -5b'$. Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 =& 2a' + 4b' \\ =& 2(-5b') + 4b' \\ =& -6b' \end{aligned}$$

also $b' = 0$. Daraus folgt $a' = 0$. Aber

$$0(1,2,3) + 0(5,4,3) = (0,0,0) \neq (0,0,-1).$$

(b) Nein.

(c) Ja. Sei $v_n = 1 + t^n$ $n \in \mathbb{N}_0$ der Erzeugendensystem. Es ist $v_0 = 1 + 1 = 2$. Dann ist $v_n - \frac{1}{2}v_0 = t^n$ $n \in \mathbb{N}$. Weil wir wissen, dass t^n ein Erzeugendensystem ist, ist dann auch $(1 + t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Erzeugendensystem.

(d) Nein. Alle solche Funktionen $\tilde{p}$ sind stetig, also lineare Kombinationen davon $a_1\tilde{p}_1 + a_2\tilde{p}_2 + \dots$ sind auch stetig. Aber es gibt unstetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}.$$

(e) Ja. Es gilt

$$\begin{aligned}
(0,0,1) =& (6,6,7) - (5,4,3) - (1,2,3) \\
(1,0,0) =& -2(1,2,3) + (5,4,3) + 3(0,0,1) \\
(0,1,0) =& \frac{1}{2}\left[(1,2,3) - (1,0,0) - 3(0,0,1)\right]
\end{aligned}$$

Weil alle Elemente der Standardbasis als Linearkombination von unserem System geschrieben werden können, können alle Elemente in $\mathbb{R}^3$ auch. Dann ist es ein Erzeugendensystem. Weil es linear unabhängig ist, ist es eine Basis. □

Problem 4. (a) Zeigen Sie: Ist $(b_i)_{i \in B}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V und $i_0 \in B$, dann ist auch $(b_i - 2b_{i_0})_{i \in B}$ eine Basis von V.

(b) Zeigen Sie: Ist K ein unendlicher Körper und sind $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ Elemente von K mit $x_i \neq x_i$ für $i \neq j$, so ist $(b_k)_{k \in \{0,1,2,3,\dots,n\}}$ mit

$$b_k = \frac{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(t - x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(t - x_i)\right)}{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k - x_i)\right)}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $K_{\leq n}[t] = \{p(t) \in K[t] | \deg(p) \leq n\}$.

(c) Geben Sie mit Hilfe der Basis aus der vorigen Teilaufgabe ein rationales Polynom vom Grad höchstens 4 an, dessen Polynomfunktion die Funktionswerte $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 17$, $f(5) = 6000$ hat.

Proof. (a) $(b_i - 2b_{i_0})_{i \in B}$ ist...

(i) Linear unabhängig

Sei $(a_k)_{k\in B}, a_k \in R$, nicht alle 0, sodass

$$\sum_{i\in B} a_i(b_i - 2b_{i_0}) = 0.$$

Es ist dann

$$\sum_{B\ni i\neq i_0} a_i b_i + 2\left(\sum_{B\ni i\neq i_0} a_i\right) b_{i_0} - a_{i_0} b_{i_0} = 0.$$

Die Koeffizienten sind nicht alle null, also $(b_i)_{i\in B}$ ist nicht linear unabhängig, ein Widerspruch, weil es ist dann kein Basis.

(ii) Ein Erzeugendesystem

Sei $v \in V$ beliebig und $a_i \in \mathbb{R}$, sodass

$$v = \sum_{i\in B} a_i b_i,$$

was immer möglich ist, weil $(b_i)_{i\in B}$ eine Basis ist. Sei dann

$$c_i = \begin{cases} a_i & i \neq i_0 \\ -2\sum_{B\ni i\neq i_0} a_i - a_{i_0} & i = i_0 \end{cases}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{i\in B} c_i(b_i - 2b_{i_0}) &= \sum_{B\ni i\neq n_0} c_i(b_i - 2b_{i_0}) + c_{i_0}(b_{i_0} - 2b_{i_0}) \\ &= \sum_{B\ni i\neq 0} c_i b_i - 2\sum_{B\ni i\neq i_0} b_{i_0} - c_{i_0} b_{i_0} \\ &= \sum_{B\ni i\neq i_0} a_i b_i + a_{i_0} b_{i_0} \\ &= \sum_{i\in B} a_i b_i \\ &= v\end{aligned}$$

Weil v beliebig war, haben wir einen Erzeugendensystem. Die Behauptung folgt.

(b) Wir betrachten die Wirkung der Polynomfunktion $\tilde{b}_k$ auf ein Punkt x_i. Es gilt, für $i \neq k$, $\tilde{b}_k(x_i) = 0$. Für $i = k$ ist

$$\tilde{b}_k(x_k) = \frac{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k - x_i)\right)}{\left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k - x_i)\right)} = 1.$$

Sei $p \in K[t]$ ein Polynom mit Grad $\leq n$. Wir wissen, dass nachdem wir $\tilde{p}(x_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ wissen, ist das Polynom eindeutig. Sei jetzt $p(x_i) = a_i$ für alle i. Es ist $p' = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Dann gilt $\tilde{p}'(x_i) = a_i$ für alle i, also $p' = p$, also (b_k) ist ein Erzeugendensystem.

Weil wir genau $\dim(K_{\leq n}[t]) = n$ b_k haben, ist es ein Basis, sonst wäre die Dimension nicht eindeutig.

(c) Sei $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5$. Wir betrachten zuerst

$$c_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}(x_k - x_i)\right)$$

für $k =$

(0) $c_0 = 24$

(1) $c_1 = -6$

(2) $c_2 = 4$

(3) $c_3 = -6$

(4) $c_4 = 24$

Dann betrachten wir die Polynomfunktion:

$$\tilde{p} = \sum_{i=0}^{4}\left(\frac{1}{c_i}\prod_{i\neq k=0}^{4}(t - x_i)\right).$$

p ist dann ein Polynom mit die gewünschte Nullstellen. Nach Vereinfachung ist

$$\frac{5971x^4}{24} - \frac{9951x^3}{4} + \frac{208985x^2}{24} - \frac{49751x}{4} + 5970.$$

□