Lineare Algebra 1 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 30, 2023)

Problem 1. Gegeben sei die Relation $\sim\subseteq (\mathbb{R}^2\ \{0\}) \times (\mathbb{R}^2\ \{O\})$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn es eine Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, die 0, x und y enthält.

(a) Bestimmen Sie alle $y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mit $(0,1) \sim y$ bzw. $(1,0) \sim y$ und skizzieren Sie die beiden Mengen in einem geeigneten Koordinatensystem.

(b) Begründen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Bleibt $\sim$ auch dann eine Äquivalenzrelation, wenn man sie als Relation in $\mathbb{R}^2$ betrachtet?

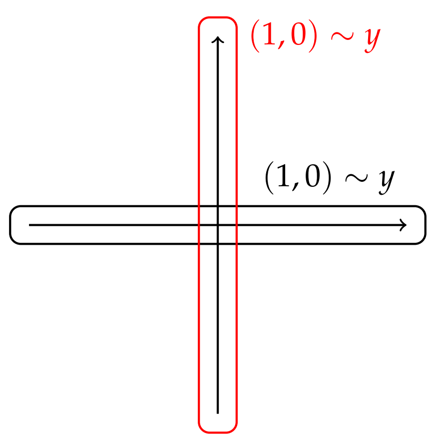
Proof. (a) Eine Gerade hat den Form

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\right\}.$$

Weil $(0,0)$ in der Gerade ist, gilt $b = 0$. Für die zwei Fälle:

(i) $(0,1)$ ist in der Gerade. Es gilt dann $a_2 = 0, a_1 \in \mathbb{R}$. Die Gleichung der Gerade ist dann $x_1 = 0$, oder alle Punkte des Forms $(0,y), y \in \mathbb{R}$.

(ii) $(1,0)$ ist in der Gerade. Es gilt dann $a_1 = 0, a_2 \in \mathbb{R}$. Die Gerade enthält ähnlich alle Punkte des Forms $(x,0), x \in \mathbb{R}$.



* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) (i) $x \sim x$ (Reflexivität)

Es gibt immer eine Gerade zwischen 0 und x. Eine solche Gerade enthält x per Definition.

(ii) $x \sim y \iff y \sim x$ (Symmetrie)

Es gibt eine Gerade, die 0, x und y enthält. Deswegen gilt die beide Richtung der Implikationen.

(iii) $x \sim y$ und $y \sim z \implies x \sim z$ (Transitivität)

Es gibt eine Gerade zwischen $0, x$ und y, und eine Gerade zwischen $0, y$ und z. Weil die beide Geraden zwischen y geht, sind die Geraden gleich, und enthält x und z, daher $x \sim z$.

(c) Nein. $(1,0) \sim (0,0), (0,1) \sim (0,0)$, aber $(1,0) \sim (0,1)$ stimmt nicht. $\square$

Problem 2. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2)$, s die Spiegelung in $\mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Translation um $(1,0)$ und $em : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Einbettung.

(a) Bilden Sie die Verkettungen $f \circ em, em \circ f, s \circ f, T \circ s, s \circ T$ und $em \circ s$. Geben Sie dabei jeweils Argumentmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift an.

(b) Untersuchen Sie die Funktionen aus der vorherigen Teilaufgabe auf Surjektivität, Injektivität bzw. Bijektivität.

(c) Sei $F = em \circ T \circ s \circ f$. Bestimmen und skizzieren Sie das Bild bzw. Urbild von $[0,1] \times [-1,1] \times [0,2]$ unter F.

Proof. (a) (i) $f \circ em$

Argumentmenge: $\mathbb{R}^2$

Zielmenge: $\mathbb{R}^2$

Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$

(ii) $em \cdot f$

Argumentmenge + Zielmenge: $\mathbb{R}^3$

Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, 0)$

(iii) $s \cdot f$

Argumentmenge: $\mathbb{R}^3$

Zielmenge: $\mathbb{R}^2$

Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_1)$

(iv) $em \circ s$

Argumentmenge: $\mathbb{R}^2$

Zielmenge: $\mathbb{R}^3$

Zuordnungsvorschrift: $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1, 0)$

(b) (i) $f \circ em$

Surjektive, injektiv und auch bijektiv

(ii) $em \circ f$

Injektiv, aber nicht surjektiv (und deswegen nicht Bijektiv)

(iii) $s \circ f$

Surjektive, aber nicht injektiv

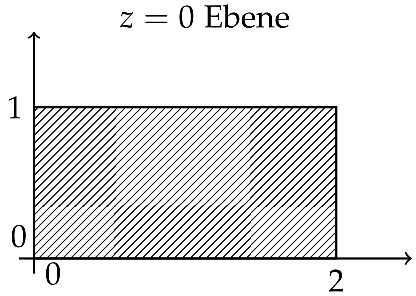
(iv) $em \circ s$

Injektiv, aber nicht surjektiv

(c)

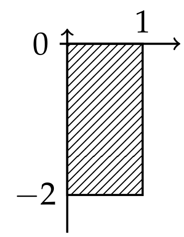
Bild: $[0, 2] \times [0, 1] \times \{0\}$

$z = 0$ Ebene



Urbild: $[0, 1] \times [-2, 0] \times \mathbb{R}$

$z = 0$ Ebene



□

Problem 3. Es sei M eine beliebige, nichtleere Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Wir definieren induktiv $f^0 := id$ und für $k \in \mathbb{N} f^k := f \circ f^{k-1}$.

(a) Zeigen Sie: $f^{k+l} = f^k \circ f^l$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$

(b) Zeigen Sie: Gibt es $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $f^{k_0+l} = f^{k_0}$, dann gilt $f^{k+l} = f^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq k_0$.

(c) Geben Sie eine Funktion $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ an, für die $f^1 \neq f^3$, aber $f^{k+2} = f^k$ für alle $k \geq 2$ gilt. Begründen Sie, dass Ihre Funktion diese Eigenschaft hat.

Proof. (a) Wir beweisen es per Induktion auf k. Für $k = 1$ gilt es per Definition (es wird in der Frage gegeben). Jetzt nehme an, dass es für ein beliebige $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)+l} &= f \circ f^{k+l} \\ &= f \circ f^k \circ f^l \\ &= (f \circ f^k) \circ f^l \\ &= f^{k+1} \circ f^l \end{aligned}$$

Deswegen gilt es auch für $k+1$, und daher für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $k = k_0 + k'$. Es gilt

$$f^{k+l} = f^{k_0+k'+l} = f^{k_0} = f^{k_0+k'} = f^k.$$

(c) Sei f definiert durch

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 1 \\ f(3) &= 2 \\ f(4) &= 1 \\ f(5) &= 4 \end{aligned}$$

Es gilt dann

x	$f^1(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$f^5(x)$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	4	1	1	1	1

$f^1 \neq f^3$, weil $f^1(3) \neq f^3(3)$. Aber $f^k(x) = 1 \forall k \in \{1,2,3,4,5\}, k \geq 2$. Daher ist $f^{k+2} = f^k, k \geq 2$. □

Problem 4. Es seien M, N Mengen, m, n natürliche Zahlen und die Abbildungen $f : M \to \{1,2,3,\ldots,m\}, g : N \to \{1,2,3,\ldots,n\}$ bijektiv. Finden Sie eine natürliche Zahl k und eine bijektive Abbildung $F : M \times N \to \{1,2,3,\ldots,k\}$.

Proof. $k = nm$, und

$$F(a,b) = a + (b-1)m.$$

Das ist bijektiv. Sei $x \in \{1,2,\ldots,nm\}$. Es existiert eindeutige Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, so dass

$$x = pm + q, q < m.$$

Falls $q = 0$, sei $b = p, a = m$. Sonst definiert man $b = p+1, a = m$. Per Definition ist $a \in \{1,2,3,\ldots,m\}$. Außerdem ist $1 \leq b \leq n$, weil $p \leq k/m = n$ (n teilt $k = mn$). □