Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Wachsmuth
Bastian Dittrich

Wintersemester 2023/24

10. Übung zur Vertiefung Analysis

20. Dezember 2023

Abgabe bis spätestens *Mittwoch 10. Januar 2024* um *18 Uhr* per WueCampus (maximal zu dritt).

Aufgabe 10.1 (Zylinderkoordinaten, 7 Punkte) Sei $R > 0$ und $a < b$. Definiere $Z := B_R(0) \times (a, b) \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ die (offene) Kreisscheibe um 0 mit Radius R ist. Definiere außerdem die Abbildung

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit $U := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (a, b)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $\Phi(U) = Z \setminus N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \to Z \setminus N$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det\left(\Phi'(r, \varphi, z)\right) = r$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}$. Bestimmen Sie $\int_Z f \,\mathrm{d}\lambda_3$.

Aufgabe 10.2 ((Weihnachts-)Kugelkoordinaten, 8 Punkte) Sei $R > 0$ und $K := B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3$. Definiere die Abbildung

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

mit $U := (0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $\Phi(U) = K \setminus N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \to K \setminus N$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det\left(\Phi'(r, \vartheta, \varphi)\right) = r^2 \sin \vartheta$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$H := B_R(0) \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\right\}.$$

Bestimmen Sie $\int_H f \,\mathrm{d}\lambda_3$.

Aufgabe 10.3 (Ein bisschen lineare Algebra, 5 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-x^T A x\right) \,\mathrm{d}\lambda_3(x) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Wir wünschen Ihnen schöne Weihnachten  **und einen guten Rutsch ins neue Jahr!**