

Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 7

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 14, 2023)

Problem 1. Sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \frac{x^2}{y^2},$$
$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2, xy \geq 1\}.$$

Bestimmen Sie $\int_A f \, d\lambda_2$.

Proof. Zuerst zeigen wir: f ist messbar. Wir betrachten dazu $\{f < \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ (Wenn $\alpha < 0$ ist die Menge die Leermenge, weil $f \geq 0$ stets). Es gilt dann

$$x^2 < \alpha y^2$$
$$|x| < \sqrt{\alpha} |y|$$

Dann ist $\{f < \alpha\}$ eine Borelmenge, also f ist messbar.

Ähnlich wie in Übungen 8.2 ist A eine Borelmenge. Die dritte Voraussetzung kann umgeformt werden:

$$y \geq 1/x$$
$$x \geq y \geq 1/x$$

was nur möglich ist, wenn $2 \geq x \geq 1$ und in diesem Fall ist der Schnitt $\{y \mid (x, y) \in A\}$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

nichtleer. Also wir berechnen das Integral über die Teilmenge nach die Präsenzübung

$$\begin{aligned}
 \int_A f \, d\lambda_2 &= \int_{[1,2]} \int_{A_x} f \, d\lambda_1 \\
 &= \int_1^2 \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} \, d\lambda_1(y) \, d\lambda_1(x) \\
 &= \int_1^2 -x^2 y^{-1} \Big|_{1/x}^x \, d\lambda_1(x) \\
 &= \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) \, d\lambda_1(x) \\
 &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \\
 &= \frac{9}{4}.
 \end{aligned}$$

□

Problem 2. Sei

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(A)$.

Hinweis: Rotation

Proof. A ist eine Borelmenge und daher messbar. Wir schreiben A_z . Es gilt

$$\begin{aligned}
 1 &\geq \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \\
 2(1 - z^2) &\geq (x+y)^2
 \end{aligned}$$

□

Problem 3. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein invertierbare Matrix und $a \in \mathbb{R}^n$. Definiere damit die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \rightarrow a + Sx$. Sei außerdem $A \in \mathcal{L}(n)$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{L}(n) - B^1$ messbar, sodass $\chi_{\varphi(A)} f$ λ_n integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $\chi_A(f \circ \varphi)$ λ_n -integrierbar ist mit

$$\int_{\varphi(A)} f \, d\lambda_n = |\det(S)| \int_A (f \circ \varphi) \, d\lambda_n.$$

Hinweis: Lemma 2.92

Proof. Nach Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz ist $\varphi(A)$ messbar mit Maß $\lambda_n(\varphi(A)) = |\det(S)|\lambda_n(A)$. $\chi_{\varphi(A)}$ ist dann messbar. Weil φ affin ist, ist φ messbar. Dann ist $f \circ \varphi$ messbar, und als Produkt von messbare Funktionen ist $\chi_A(f \circ \varphi)$ λ_n -messbar.

Wir zeigen es für f einfach, f positiv und dann f messbar. Wir brauchen: Weil φ affin ist, ist φ auch bijektiv.

(i) f einfach.

Sei $f = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i}$, $B_i \in \mathcal{L}(n)$ und $B_i = \varphi(A_i)$, $1 \leq i \leq n$ (möglich weil φ bijektiv ist).

Alle A_i sind auch messbar, weil φ messbar ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} f \, d\lambda_n &= \int \chi_{\varphi(A)} \sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i} \, d\lambda_n \\
&= \int \sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i \cap \varphi(A)} \, d\lambda_n \\
&= \sum_{i=1}^n b_i \lambda_n(B_i \cap \varphi(A)) \\
&= \sum_{i=1}^n b_i \lambda_n(\varphi(A_i) \cap \varphi(A)) \\
&= \sum_{i=1}^n b_i \lambda_n(\varphi(A_i \cap A)) && \varphi \text{ injektiv} \\
&= \sum_{i=1}^n b_i |\det(S)| \lambda_n(A_i \cap A) && \text{Satz 1.83 und Bewegungsinvarianz} \\
&= |\det(S)| \int \sum_{i=1}^n b_i \chi_{A_i \cap A} \, d\lambda_n \\
&= |\det(S)| \int \sum_{i=1}^n b_i \chi_A \chi_{A_i} \, d\lambda_n \\
&= |\det(S)| \int_A \sum_{i=1}^n b_i \chi_{\varphi^{-1}(B_i)}(x) \, d\lambda_n \\
&= |\det(S)| \int_A \sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i}(\varphi(x)) \, d\lambda_n \\
&= |\det(S)| \int_A f \circ \varphi \, d\lambda_n
\end{aligned}$$

(ii) f positiv

Sei $s_n \nearrow f$ eine Folge messbare einfache Funktionen. Es ist klar, dass $\chi_{\varphi(A)} s_n \nearrow \chi_{\varphi(A)} f$, Dann ist

$$\int_{\varphi(A)} s_n \, d\lambda_n \nearrow \int_{\varphi(A)} f \, d\lambda_n.$$

□

Problem 4. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$. Für $h \in \mathbb{R}^n$ definiere die Funktion $f_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_h(x) := f(x + h)$. Definiere außerdem die Abbildung

$$T_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}^1(\lambda_n), \quad h \mapsto f_h.$$

Zeigen Sie:

- (a) T_f ist wohldefiniert.
- (b) T_f ist stetig.

Hinweis: Approximieren Sie die Funktion f