

Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 26, 2023)

Problem 1. Es seien die Punkte x_0, x_1, \dots, x_n mit $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren den Operator

$$\Phi : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \rightarrow y, \text{ mit } p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

wobei wir mit $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchsten n bezeichnen und $p(x)$ die Auswertung des Polynoms p im Punkt x beschreibt.

- (a) Zeigen Sie: Sind die Punkte x_i paarweise verschieden, so ist die Abbildung Φ wohldefiniert und isomorph. (Eine Konsequenz hieraus ist die eindeutige Lösbarkeit der Polynominterpolation.)
- (b) Was passiert, wenn Sie nicht fordern, dass die x_i paarweise verschieden sind? Kann Φ im Allgemeinen noch injektiv (surjektiv) sein?

Proof. (a) Injektiv: Nehme an, dass es zwei unterschiedliche Polynome p_1, p_2 gibt, mit $p_1(x_i) = p_2(x_i) \forall i = 0, \dots, n$. Dann ist $p(x) := p_1(x) - p_2(x)$ auch ein Polynom, mit $p(x_i) := 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$. Weil $\deg(p) \leq n$ ist, folgt daraus, dass $\forall x, p(x) = 0, p_1(x) = p_2(x)$. Das ist ein Widerspruch.

Surjektive: Sei $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$p(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n)$$

auch ein Polynom mit $\Phi(p) = (y_0, \dots, y_n)$.

Linearität: Sei $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x], a \in \mathbb{R}$. Sei auch $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$. Es gilt dann

$$p(x_i) = p_1(x_i) + p_2(x_i), i = 0, \dots, n$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(p_1 + p_2) = \Phi(p_1) + \Phi(p_2).$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Es gilt auch, für $p(x) := ap_1(x)$, dass

$$p(x_i) = ap_1(x_i), i = 0, \dots, n,$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(ap_1) = a\Phi(p_1).$$

(b) Nein. Sei, zum Beispiel, $n = 1$, $x_0 = x_1 = 0$. Dann gilt

$$\Phi(x) = (0, 0)^T$$

$$\Phi(x^2) = (0, 0)^T$$

Aber die zwei Polynome sind ungleich.

□

Problem 2. (a) Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben. Wir bilden die erweiterte Matrix

$$B = (A|1_n)$$

mit 1_n die Einheitsmatrix in \mathbb{R}^n . Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn A durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Verifizieren Sie weiterhin: Werden die dafür benötigten Zeilenumformungen auf ganz B angewendet, so ergibt sich im hinteren Teil, wo zu Beginn die Einheitsmatrix stand, genau A^{-1} .

(b) Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^{-1} .

Proof. (a) Definiert (x, y) , $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$ durch $\mathbb{K}^{n+m} \ni (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$.

Eine solche erweiterte Matrix bedeutet ein Gleichungssystem durch

$$B(x, -y) = Ax - 1_n y = 0,$$

wobei $x, y \in \mathbb{K}^n$. Für jeder $x \in \mathbb{K}^n$ gibt es $y \in \mathbb{K}^n$, so dass $B(x, -y) = 0$. Nehme an, dass wir durch elementare Zeilenumformung

$$B = (A|1_n) \rightarrow (1_n, A') := B'$$

kann. Die Gleichungssystem ist dann $x = A'y$. Dadurch können wir für jeder $y \in \mathbb{K}^n$ eine $A'y = x \in \mathbb{K}^n$ rechnen, für die gilt, dass $Ax = y$. Das heißt, dass $A' = A^{-1}$.

(b)

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 - 3R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + 2R_3} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \times -\frac{1}{2}} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_4} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

□

Problem 3. Es seien die Vektorräume V, W über \mathbb{K} gegeben mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Wir betrachten eine lineare Abbildung

$$T : V \rightarrow W, v \rightarrow T(v)$$

Seien B_V und B_W Basen von V , bzw. W . Wir nehmen an T ist nicht die konstante Nullabbildung. Beweisen Sie:

- (a) Der Kern von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder trivial (d.h. nur die 0) oder hängt nur von der Wahl von B_V ab, aber nicht von B_W .
- (b) Das Bild von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder der ganze \mathbb{K}^m oder hängt nur von der Wahl von B_W ab, aber nicht von B_V .
- (c) Der Rang von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist unabhängig von B_W und B_V , aber nicht von B_W .