Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 16, 2024)

I. MESSUNG

Temperatur (°C)	**Luftfeuchte (g/m^3)**
-15	0,47
-11	0,54
-7	0,79
-3	1,32
1	1,13
5	1,26
9	3,02
13	2,99
17	3,15
21	3,90
25	5,04
29	7,72
33	11,02
37	13,42
41	20,85

Im Zukunft werden wir die Temperatur mit T und Luftfeuchte mit ρ bezeichnen.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

II. KOVARIANZ UND KORRELATIONSKOEFFIZIENT

Wir berechnen jetzt die Kovarianz und Korrelationskoeffizient

$$
\begin{aligned}
N &= 15\\
\bar{T} &= 13\ ^\circ\mathrm{C}\\
\bar{\rho} &= 5,108\ \mathrm{gm}^{-3}\\
\sigma_T &= \left[\frac{1}{N}\sum(T_i-\bar{T})^2\right]^{1/2}\\
&= 17,282\ ^\circ\mathrm{C}\\
\sigma_\rho &= \left[\frac{1}{N}\sum(\rho_i-\bar{\rho})^2\right]^{1/2}\\
&= 5,6499\ \mathrm{gm}^{-3}\\
\text{Kovarianz } \sigma_{T\rho} &= \frac{1}{N}\sum(T_i-\bar{T})(\rho_i-\bar{\rho})\\
&= 83,688\ ^\circ\mathrm{Cgm}^{-3}\\
\text{Korrelationskoeffizient } r &= \frac{\sigma_{T\rho}}{\sigma_T\sigma_\rho}\\
&= 0,857095
\end{aligned}
$$

Laut Tabelle (Taylor) ist die Wahrscheinlichkeit, bei 15 nicht korrelierten Messwerte ein $|r| > 0,8$ zu bekommen kleiner als $0,05\%$. Weil $0,85$ großer als $0,8$ ist, ist die Messung hochsignifikant.

III. REGRESSION

Das Ziel ist eine Best-Fit Gerade

$$\rho = a + bT$$

zu finden. Dafür brauchen wir die Annahme, dass der Fehler in T vernachlässigbar im Vergleich zum Fehler in ρ ist. Der Messfehler eines marktüblichen Thermometers ist 0,1 °C, und die Fehler der Instrumenten im Umweltstation sind wahrscheinlich deutlich kleiner. Daher ist der Fehler in T wahrscheinlich vernachlässigbar.

Außerdem brauchen wir, dass die Messwerte voneinander statistisch unabhängig sind. Die Annahme ist wahrscheinlich richtig, weil die Messungen über das Jahr gemacht werden.

Die Idee zur Berechnung der Regessionswerte ist: Wir suchen a und b, sodass der quadratische Fehler

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\rho_i - a - bT_i}{\sigma_i}\right]^2$$

so klein wie möglich ist. Wir nehmen an, dass alle Datenpunkte den gleichen Fehler haben. Damit können wir die Regressionswerte und deren Fehler mit dem Formel aus VL08 Fehlerrechnung 1 berechnen. Wir benötigen folgende Größen

$$\begin{aligned}
\sum T_i =& 195\,^\circ\mathrm{C} \\
\sum \rho_i =& 76,72\ \mathrm{gm}^{-3} \\
\sum T_i^2 =& 7015\,(^\circ\mathrm{C})^2 \\
\sum T_i\rho_i =& 2251,38\ ^\circ\mathrm{Cgm}^{-3}
\end{aligned}$$

Danach definieren wir

$$\begin{aligned}
\Delta =& N\sum T_i^2 - \left(\sum T_i\right)^2 \\
=& 67200\,(^\circ\mathrm{C})^2
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten werden dann bestimmt durch

$$\begin{aligned}
a =& \frac{1}{\Delta}\left(\sum T_i^2 \sum \rho_i - \sum T_i \sum T_i\rho_i\right) \\
=& 1,465330357142856\ \mathrm{gm}^{-3} \\
b =& \frac{1}{\Delta}\left(N\sum T_i\rho_i - \sum T_i \sum \rho_i\right) \\
=& 0,2802053571428572\ \mathrm{gm}^{-3}(^\circ\mathrm{C})^{-1}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Fehler brauchen wir die Stichprobevarianz

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{N-2}\sum(\rho_i - a - bT_i)^2 \\
&\approx 9,77488085164836\ \mathrm{g^2m^{-6}}
\end{aligned}$$

Deren Fehler werden durch

$$\begin{aligned}
\sigma_a &= \left[\frac{s^2}{\Delta}\sum T_i^2\right]^{1/2} \\
&\approx 1,0\ \mathrm{gm}^{-3}
\end{aligned}$$

$$\sigma_b = \left[N\frac{s^2}{\Delta}\right]^{1/2}$$
$$= 0,047\ \mathrm{gm}^{-3}(^\circ\mathrm{C})^{-1}$$

Insgesamt ist

$$a = (1,5 \pm 1,0)\ \mathrm{gm}^{-3}$$
$$b = (0,280 \pm 0,047)\ \mathrm{gm}^{-3}(^\circ\mathrm{C})^{-1}$$