Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

Analysis 2

Stefan Waldmann

Wintersemester 2023/2024

Hausaufgabenblatt Nr. 10

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)
Git revision of ana2-ws2324: `(None)` (None)

10. 01. 2024
(25 Punkte. Abzugeben am 17. 01. 2024)

Hausaufgabe 10-1: Stetigkeit, partielle und totale Differenzierbarkeit

Sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Funktionswerten

i.) $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{1/4}$, **(2 Punkte)**

ii.) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$ **(2 Punkte)**

iii.) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ **(3 Punkte)**

stetig, partiell oder total differenzierbar in $(0, 0)$?

Hausaufgabe 10-2: Tangenten von Kurven

Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt $t \in [a, b]$ ein regulärer Punkt, falls $\gamma'(t) \neq 0$. Andernfalls nennen wir t einen singulären Punkt.
Bestimmen Sie die Menge der regulären/singulären Punkte folgender Kurven:

i.) $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (t^2, t^3)^\top$, **(1 Punkt)**

ii.) $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_2(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))^\top$, **(1 Punkt)**

iii.) $\gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_3(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^\top$. **(1 Punkt)**

Hausaufgabe 10-3: Rechnen mit der Kettenregel

Die reellwertigen Funktionen $f(u_1, \dots, u_n)$ und $u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m)$ seien auf den offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $G \subset \mathbb{R}^m$ erklärt, und die Funktion

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) := f(u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m))$$

existiere auf G.

Im Folgenden ist jeweils die Ableitung $D\varphi$ der Funktion φ zu berechnen:

i.) $f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2; \quad u(t) = e^t \cos t,\ v(t) = e^t \sin t,\ w(t) = e^t,$ **(2 Punkte)**

ii.) $f(u, v) = \ln(u^2 + v^2)$ für $(u, v) \neq (0, 0); \quad u(x, y) = xy,\ v(x, y) = \sqrt{x}/y$ für $x, y > 0$, **(2 Punkte)**

iii.) $f(u, v, w) = uv + vw - uw; \quad u(x, y) = x + y,\ v(x, y) = x + y^2,\ w(x, y) = x^2 + y.$ **(2 Punkte)**

Hausaufgabe 10-4: Weitere Beispiele differenzierbarer Abbildungen

Beweisen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und geben Sie die Ableitung an:

i.) $f(x) = x^\top Ax$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, **(3 Punkte)**

ii.) $f(X, Y) = XY$ für $(X, Y) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times k}$. **(3 Punkte)**

Hausaufgabe 10-5: Sattelpunkt

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = xy$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen kritischen Punkt in $(x, y) = (0, 0)$ besitzt, aber kein Extremum. **(3 Punkte)**