Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

Analysis 2

Stefan Waldmann

Wintersemester 2023/2024

Hausaufgabenblatt Nr. 7

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)
Git revision of ana2-ws2324: `(None)` (None)

06. 12. 2023

(23 Punkte. Abzugeben am 13. 12. 2023)

Hausaufgabe 7-1: Ein nettes Integral

Zeigen Sie

$$\int_0^1 x^{-x}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}.$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst

$$\int_0^1 x^n \log^n(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. **(5 Punkte)**

Hausaufgabe 7-2: Normierte Räume stetiger Funktionen

Es sei $1 \leq p < \infty$ und auf dem Raum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}([a,b])$ definieren wir

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

i.) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C},([a,b]), \|\cdot\|_p)$ einen normierten Raum darstellt. **(3 Punkte)**

ii.) Ist $1 \leq p \leq q < \infty$, so beweisen Sie, dass

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_q$$

für ein zu bestimmendes $C = C(p,q)$ für jedes $f \in C([a,b])$ gilt. Sind zwei solche Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ äquivalent? **(3 Punkte)**

Hausaufgabe 7-3: Eine Metrik

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und (siehe Proposition 7.2.8)

$$d'(p,q) := \frac{d(p,q)}{1+d(p,q)}, \qquad p, q \in X.$$

Zeigen Sie, dass auch (X, d') ein metrischer Raum ist. **(3 Punkte)**

Hausaufgabe 7-4: Noch eine Metrik

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir $d_0 = d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|, & \text{falls } y = tx \text{ für ein } t \in \mathbb{R}, \\ \|x\| + \|y\|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ darstellt und skizzieren Sie $B_1((0,0))$, $B_1((1,0))$ sowie $B_1((0,\frac{1}{2}))$.
(4 Punkte)

Hausaufgabe 7-5: Lipschitz-stetige Funktionen

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Lipschitz-stetig sind:

i.) Für einen metrischen Raum (X, d) mit $x_0 \in X$ die Abb. $f : X \to \mathbb{R}$ definiert durch **(2 Punkte)**

$$f(x) := d(x, x_0).$$

ii.) Die Abb. $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{für } z = 0, \\ \dfrac{z^2}{|z|}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie eine geschickte Fallunterscheidung. **(3 Punkte)**