# Fortgeschrittene Fehlerrechnung Übungsblatt 6

Jun Wei Tan*

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: June 20, 2024)

## I. BEREINGUNG DER UNTERGRUND

Wir führen eine Messung durch und erhalten die folgenden Messwerte für die Zählereignisse eines befüllten Behälters und die Zählereignisse eines *leeren* Behälters.

| **Winkel (°)** | **Zählereignisse befülltes Behälters ($y_f$)** | **Zählereignisse leeres Behälters ($y_l$)** |
|---|---|---|
| 155 | 184 | 5 |
| 135 | 134 | 4 |
| 120 | 99 | 4 |
| 100 | 49 | 1 |
| 90 | 53 | 3 |
| 75 | 55 | 1 |
| 65 | 70 | 4 |
| 55 | 81 | 9 |
| 40 | 130 | 8 |
| 20 | 216 | 7 |

Zur Bereinigung der Untergrund müssen wir die Zählereignisse bei einem leeren Behälter vom Zählereignisse bei einem befüllten Behälter abziehen. Es ist allerdings dabei zu beachten, dass die Anzahl der Teilchen in dieser Messung eine Hälfte die Anzahl beim Versuch mit

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

einem befüllten Target, also wir müssen *zweimal* $y_l$ vom $y_f$ abziehen. Wir bezeichnen die Anzahl der Ereignisse ohne Untergrund als $y$.

$$y = y_f - 2y_l \tag{1}$$

Der Fehler kann nach Gauss fortgepflanzt werden:

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y_f)^2 + 4(\Delta y_l)^2}$$

Wir nehmen an, dass die Anzahl der Ereignisse poissonverteilt ist. Daher ist der Fehler in $y_f$ $\Delta y_f = \sqrt{y_f}$ und analog für $\Delta y_l = \sqrt{y_l}$. Daraus ergibt sich

$$\Delta y = \sqrt{y_f + 4y_l} \tag{2}$$

| **Winkel (°)** | $\cos\theta$ | **Zahlereignisse ohne Untergrund ($y$)** |
|---|---|---|
| 155 | -0.906308 | $174 \pm 14$ |
| 135 | -0.707107 | $126 \pm 12$ |
| 120 | -0.5 | $91 \pm 11$ |
| 100 | -0.173648 | $47,0 \pm 7,3$ |
| 90 | 0. | $47,0 \pm 8,1$ |
| 75 | 0.258819 | $53,0 \pm 7,7$ |
| 65 | 0.422618 | $62,0 \pm 9,3$ |
| 55 | 0.573576 | $63 \pm 11$ |
| 40 | 0.766044 | $114 \pm 13$ |
| 20 | 0.939693 | $202 \pm 16$ |

## II. REGRESSION

Wir suchen die Parameter $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Funktion

$$y(x) = a_1 P_0(x) + a_2 P_1(x) + a_3 P_2(x) \tag{3}$$

die beste Anpassung an die Daten ist. Dabei sind $P_i,\ i \in \{0, 1, 2\}$ die *Legendre-Polynomen*

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Die Regressionskoeffizienten ergeben sich durch

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

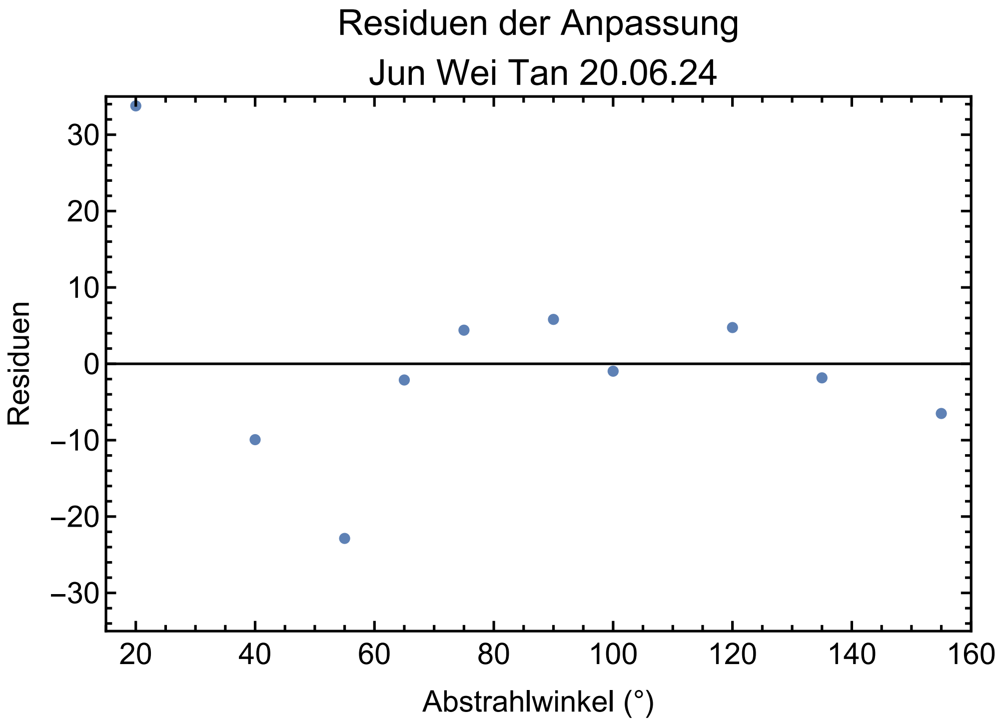
$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

Wir berechnen den Fehler analog wie Blatt 5. Daraus ergeben sich die Bestwerte

$$a_1 = 93,4 \pm 3,4$$
$$a_2 = -11,9 \pm 6,6$$
$$a_3 = 104,3 \pm 8,0$$

## III. GÜTE DER ANPASSUNG

Für eine qualitative Schätzung der Güte der Messung verwenden wir ein Residuenplot



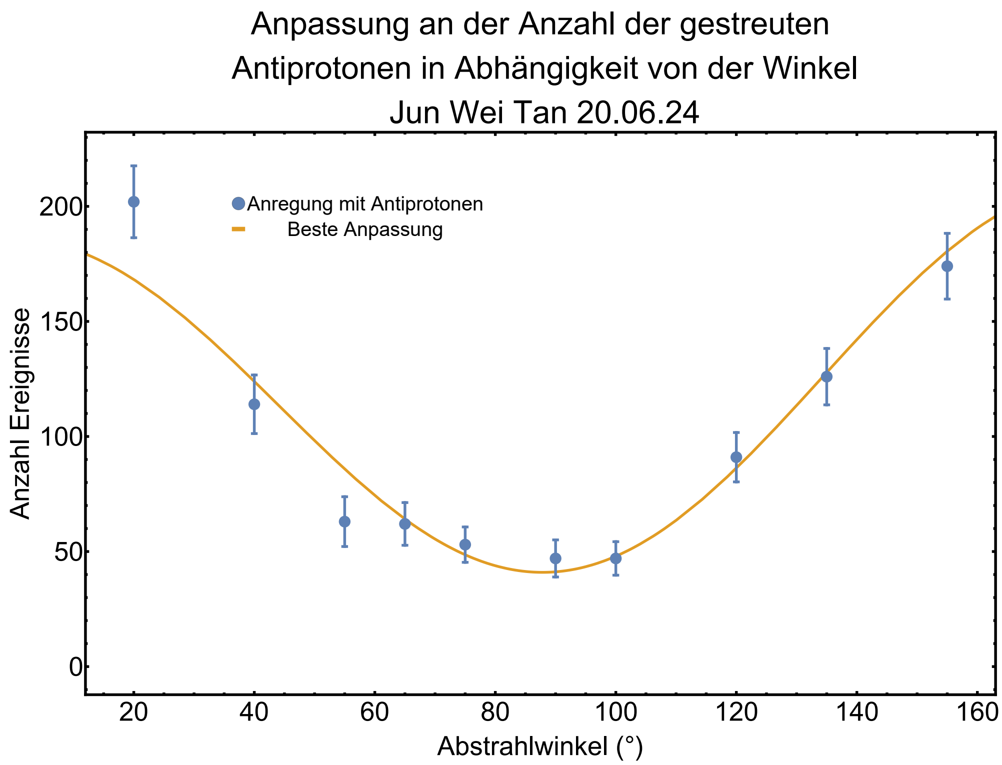

Insgesamt ist die Streuung ordentlich, also es gibt ungefähr die gleiche Anzahl von Punkte, die oberhalb und unterhalb der Nulllinie sind. Für eine quantitative Schätzung der Güte nutzen wir das $\chi^2$-Test. Das $\chi^2$-Statistik ist gegeben durch

$$\chi^2 = \sum \frac{(y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - a_3 f_3(x_i))^2}{a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + a_3 f_3(x_i)}$$
$$= 15,49604105544404$$

Die Anzahl der Zwangsbedingungen ist 3 ($a_i,\ i \in \{1, 2, 3\}$). Daher gibt es 7 Freiheitsgrade. Der $p$-Wert ist daher

$$p = \int_{15,49604105544404}^{\infty} f_{\chi^2(7)}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\approx 0,03014127140085254$$

Da der $p$-Wert großer als ein Irrtumsniveau von $0,05$ ist, ist die Streuung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% nicht durch unsere Anpassung beschrieben. Die Übereinstimmung ist also schlecht. Das kann daran liegen, dass das erste Messpunkt (Abstrahlwinkel $= 20°$) sehr weit weg vom zu erwartenden Wert liegt. Eine Möglichkeit ist, dass es einen systematischen Fehler gibt, der stärker bei höhere Streuungswinkel ist, z.B. die Justierung des Messinstruments.


Anpassung an der Anzahl der gestreuten
Antiprotonen in Abhängigkeit von der Winkel
Jun Wei Tan 20.06.24
Anregung mit Antiprotonen
Beste Anpassung
Anzahl Ereignisse
0
50
100
150
200
20
40
60
80
100
120
140
160
Abstrahlwinkel (°)