Elektrodynamik Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 5, 2024)

Problem 1. Man betrachte den Raum zwischen zwei unendlich großen, geerdeten Leiterplatten, die parallel zueinander an den Punkten $x = 0$ und $x = d$ aufgestellt sind. Eine weitere Platte mit Flächenladungsdichte σ befindet sich bei $x = a$ mit $0 < a < d$.

(a) Zeigen Sie, dass die Herleitung des Potentials $\varphi(x)$ für $0 \leq x \leq d$ äquivalent ist zur Berechnung einer eindimensionalen Green'schen Funktion und somit zur Lösung der

$$\Delta_x G(x, a) = -\delta(x - a), \ \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen $G(0, a) = G(d, a) = 0$.

Um die Lösung der folgenden Teilaufgaben zu vereinfachen, bietet es sich an, das Koordinatensystem so zu verschieben, dass die geladene Platte sich bei $x = 0$ und die geerdeten Leiterplatten sich bei $x = -a$ bzw. $x = d - a$ befinden.

(b) Teilen Sie den Raum in zwei ladungsfreie Regionen $-a < x < 0$ und $0 < x < d - a$ auf, und lösen Sie dort die zwei separaten, homogenen Laplace-Gleichungen für das Potential. Integrieren Sie dann die Poisson-Gleichung von $x = -\epsilon$ bis $x = +\epsilon$, und betrachten Sie den Grenzwert $\epsilon \to 0$, um die Bedingungen zu finden, welche die zwei Lösungen für das Potential in $x = 0$ verbinden. Bestimme schließlich das Potential für den gesamten Bereich $-a < x < d - a$.

(c) Bestätigen Sie das obige Resultat, indem Sie die Differenzialgleichung für das Potential unter Berücksichtigung der Randbedingungen bei $x = -a$ und $x = d - a$ direkt integrieren.

Proof. (a) Die Ladungsverteilung ist 0 außer wenn $x = a$, also die Ladungsverteilung ist proportional zu $\delta(x - a)$. Die Definition der Greensche Funktion ist also proportional zu die Poisson-Gleichung.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Die Greensche Funktion verschwindet genau dann wenn die Potential verschwindet, also bei $x = 0$ und $x = d$.

(b) Die Lösungen in einer ladungsfreien Region ist

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0 \implies V = ax + b.$$

Der Gradient ist das elektrische Feld, also $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Die Lösungen sind also

$$\begin{aligned} -a < x < 0 : V &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(x + a) \\ 0 < x < d - a : V &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(d - a - x) \end{aligned}$$

Integriert zwischen $x = -\epsilon$ und $x = +\epsilon$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} =& \delta(x) \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} \, \mathrm{d}x =& \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) \, \mathrm{d}x \\ V'(\epsilon) - V'(-\epsilon) =& 1 \end{aligned}$$

Das Potential muss stetig sein, also das Potential ist $\square$