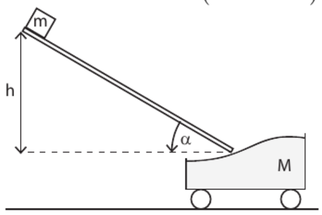
Aufgabe 3.3: *Mit Schwung in den Wagen* .... (4 Punkte)

Jun Wei Tan
Mattis Lieberman

Ein Körper der Masse m rutscht reibungsfrei eine schiefe Ebene mit dem Winkel α zur Horizontalen hinunter und landet in einem ruhenden Wagen, der mit Sand gefüllt ist. Der Körper startet aus der Ruhe aus der Höhe h. Der Wagen hat die Masse M und rollt reibungsfrei. Der Körper kommt innerhalb von Δt im Wagen zur Ruhe.



(1 P) a) Bestimmen Sie das Tempo des Wagens v_W, nachdem der Körper hineingefallen ist.

(1 P) b) Welchen Kraftbetrag F_1 übt der Erdboden auf den Wagen aus während der Körper landet?

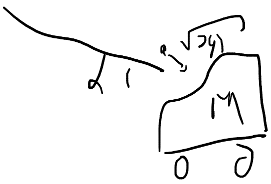
Die schiefe Ebene sei nun mit dem Wagen fest verbunden.

(1 P) c) Bestimmen Sie die x- und die y-Komponente der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{SP,r}}(t)$ des Systems solange die Masse noch auf der Schräge rutscht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das System in Ruhe und die Masse beginnt zu rutschen. Reibungseffekte sind zu vernachlässigen.

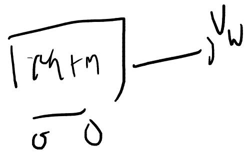
(1 P) d) Bestimmen Sie die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{SP,n}}$ des Systems nachdem die Masse im Wagen gelandet ist.

a)

vor



nach



$$m\sqrt{2gh}\cos\alpha = (m+M)\,v_W$$

$$v_W = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}\cos\alpha$$

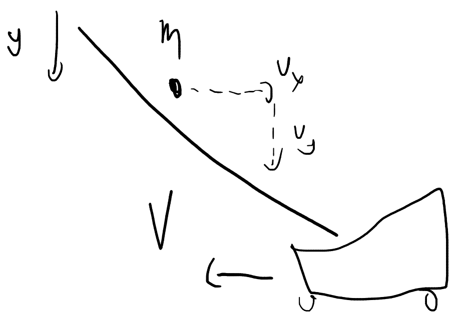
b) durchschnittlich ist

$$F_1\,\Delta t = m\sqrt{2gh}\sin\alpha$$

$$F_1 = \frac{1}{\Delta t}\left(m\sqrt{2gh}\sin\alpha\right)$$

c) die x-Komponent ist immer 0, $\vec{v}_{sp,r}(t)\cdot\hat{x} = 0$

die einfachste Methode, die y-Komponente zu berechnen, ist die Erhaltung von Energie



$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 - mgy \quad \text{--- (1)}$$

zwangsbedingung: $\dfrac{v_y}{v_x - V} = \tan\alpha$ --- (2)

erhaltung von Impuls: $mv_x = MV$ --- (3)

(2): $v_y = v_x\tan\alpha - V\tan\alpha$

$$v_x = \frac{v_y}{\tan\alpha} + V$$

(3): $\dfrac{v_y}{\tan\alpha} + V = \dfrac{M}{m}V$

$$V = \left(\frac{M}{m}-1\right)^{-1} \frac{v_y}{\tan\alpha}$$

② : $$v_x = \frac{v_y}{\tan\alpha} + \left(\frac{M}{m}-1\right)^{-1} \frac{v_y}{\tan\alpha}$$

$$= \frac{v_y}{\tan\alpha}\left[1 + \frac{1}{\frac{M}{m}-1}\right]$$

$$= \frac{v_y}{\tan\alpha}\left(\frac{M/m}{\frac{M}{m}-1}\right) = \frac{v_y}{\tan\alpha}\left(\frac{1}{1-\frac{m}{M}}\right)$$

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 - mgy$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{v_y^2}{\tan^2\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-2} + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{M}{m}-1\right)^{-2}\frac{v_y^2}{\tan^2\alpha} - mgy$$

$$\frac{dE}{dt} = m\frac{\cancel{v_y}\dot{v}_y}{\tan^2\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-2} + m\cancel{v_y}\dot{v}_y + M\left(\frac{M}{m}-1\right)^{-2}\frac{\cancel{v_y}\dot{v}_y}{\tan^2\alpha} - mg\cancel{\dot{y}} = 0$$

$$a_y := \dot{v}_y = mg\left[\frac{m}{\tan^2\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-2} + m + \frac{M}{\tan^2\alpha}\left(\frac{M}{m}-1\right)^{-2}\right]^{-1}$$

$$= mg\left[\frac{m}{\tan^2\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-2} + m + \frac{M}{\tan^2\alpha}\left(\frac{m}{M}\right)^2\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-2}\right]^{-1}$$

$$= mg\left[\frac{m\left(1+\frac{m}{M}\right)}{\tan^2\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-2} + m\right]^{-1}$$

$$= mg\left[\frac{m}{\tan^2\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-1} + m\right]^{-1}$$

also

$$v_y = mgt\left[\frac{m}{\tan^2\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-1} + m\right]^{-1}$$

Dann ist die y-Komponente $\vec{V}_{sp,r}\cdot\hat{y}$

$$= \frac{mgt}{m+M}\left[\frac{m}{\tan^2\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{-1} + m\right]^{-1}$$

d) $$\vec{V}_{sp,r} = 0$$

(x-Komponent = 0: Erhaltung von der x-Komponente des gesamten impuls)

(y-Komponent = 0: Zwangsbedingungen)