Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 5, 2023)

Problem 1. Wir ändern die Gruppendefinition aus Definition 2.3 ab, indem wir für eine Menge G mit einer zweistelligen Verknüpfung $\cdot$ und einem Element $e \in G$ fordern:

(a) Es gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in G$.

(b) Es gilt $a \cdot e = a$ für alle $a \in G$.

(c') Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element $b \in G$ mit $b \cdot a = e$

Ist dann G stets eine Gruppe?

Proof. Nein. Sei $x \cdot y = x$. Es ist klar, dass es assoziativ ist. Es gilt auch $x \cdot e = x \forall x$. Außerdem gilt $e \cdot x = e \forall x \in G$. Aber es gilt für alle $x \in G$, dass $x \cdot y = x \neq e \forall y \in G$. G ist dann keine Gruppe. $\square$

Problem 2. Sei $n \in N$ mit $n \geq 3$ fixiert. Wir setzen $\alpha := \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$ und definieren die folgenden zwei Abbildungen:

$$s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \to \bar{z} \qquad \text{sowie} \qquad r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \to \alpha z.$$

Das neutrale Element der Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ bezeichnen wir mit e und mit $\cdot$ die Verkettung von Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $s^2 = e$ und $r \cdot s \cdot r = s$ gelten.

(b) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ genau dann $r^k = e$ gilt, wenn $n|k$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass r und s Elemente der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ sind.

(d) Zeigen Sie, dass $s \cdot r^k = r^{-k} \cdot s$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(e) Zeigen Sie, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $t \in \mathbb{N}$ mit $r^{-k} = r^t$ existiert.

(f) Beschreiben Sie das Abbildungsverhalten von r und s geometrisch.

(g) Folgern Sie aus (a)–(e), dass $\{r^x \cdot s^y | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$ gilt.

(h) Zeigen Sie, dass $D_n := \{r^a \cdot s^b | 0 \leq a < n \text{ und } 0 \leq b < 2\}$ eine Gruppe ist.

(i) Beweisen Sie, dass $|D_n| = 2n$ gilt.

(j) Zeigen Sie, dass D_n nicht abelsch ist.

(a) $s^2 = e$ folgt aus $\overline{\overline{z}} = z$. Es gilt

$$\begin{aligned}(r \cdot s \cdot r)(z) =&(r \cdot s)\left(\exp(2\pi i/n)z\right)\\ =&r\left(\exp(-2\pi i/n)\overline{z}\right)\\ =&\exp(2\pi i/n)\exp(-2\pi i/n)\overline{z}\\ =&\overline{z}\end{aligned}$$

Also $r \cdot s \cdot r = s$.

(b) Wir wissen, $r^k(z) = \exp(2\pi ik/n)z$. $r^k = e$ genau dann, wen $\exp(2\pi ik/n) = 1$, also $n|k$.

(c) Sie sind bijektiv.

(d)

$$\begin{aligned}(s \cdot r^k)(z) =&s\left(\exp\left(2\pi ik/n\right)z\right)\\ =&\exp\left(-2\pi ik/n\right)\overline{z}\\ (r^{-k} \cdot s)(z) =&\left(r^{-k}\right)(\overline{z})\\ =&\exp(-2\pi ik/n)\overline{z}\\ =&(s \cdot r^k)(z)\end{aligned}$$

(e) Sei