Lineare Algebra: Aufgabenblatt 04

4.1 Direktes Produkt /30 Punkte

(a) Zeigen Sie: Sind $(G, *, e_G)$ und $(H, \star, e_H)$ Gruppen, dann ist auch $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$\odot : (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H, \quad (g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 \star h_2)$$

und dem neutralen Element (e_G, e_H) eine Gruppe. Diese Gruppe nennt man auch das *direkte Produkt* von G und H.

(b) Zeigen Sie: Sind $(R, +, \cdot)$ und $(S, \star, *)$ Ringe, dann ist auch $R \times S$ mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$, definiert durch $(r_1, s_1) \oplus (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, s_1 \star s_2)$ bzw. $(r_1, s_1) \odot (r_2, s_2) := (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2)$ ein Ring.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann ist auch $K \times K$ mit den Verknüpfungen wie in (b) ein Körper.

4.2 Kürzen in Ringen /10 Punkte

Zeigen Sie: In einem Ring $(R, +, \cdot)$ gilt genau dann die Kürzungsregel
„Falls $a \in R \setminus \{0\}$ und $x, y \in R$ beliebig sind, dann gilt $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$“,
wenn R nullteilerfrei ist.

4.3 Verknüpfungsverträglich /20 Punkte

Es seien $(G, \cdot, e_G), (H, *, e_H)$ Gruppen und $\alpha : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) $U = \{u \in G | \alpha(u) = e_H\}$ ist eine Untergruppe von G.

(b) $\alpha(G)$ ist eine Untergruppe von H.

(c) Durch $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in U$ wird eine verknüpfungsverträgliche Äquivalenzrelation auf G definiert.

4.4 Rechnen in verschiedenen Ringen /20 Punkte

(a) Bestimmen Sie das inverse Element von $\overline{6}$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ oder weisen Sie nach, dass es nicht existiert.

(b) Bestimmen Sie die Charakteristik von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, wobei die beiden Teile des Produktes als Ringe interpretiert werden und die Verknüpfung wie in 4.1(b) definiert wird.

(c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $z^2 + 2 = 0$ erfüllen.

(d) Berechnen Sie $(7 + i)(6 - i)^{-1}$ und geben Sie das Ergebnis ale komplexe Zahl gemäß Definition 2.4.14 an.

(e) Bestimmen Sie die Einerstelle von 27^{101}.

4.5 „Komplexe Zahlen“ über endlichen Ringen

/20 Punkte

Wir können analog zur Konstruktion komplexer Zahlen vorgehen, um aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ größere Ringe zu konstruieren, d.h. für festes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Addition $\oplus$ bzw. Multiplikation $\odot$ durch

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

bzw.

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

für alle $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Entscheiden Sie, für welche $n \in \{2, 3, 4\}$ mit dieser Konstruktion ein Körper entsteht.

Abgabetermin: **13.11.2023, 11:00 Uhr auf WueCampus** Maximal 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Begründen Sie Ihre Behauptungen. Sofern nicht anders angegeben, dürfen Sie nur Aussagen verwenden, die in der Vorlesung oder in den Übungen bereits bewiesen wurden. $\sum$ **/100**

Lösungshinweise

Aufgabe 1:
Nutzen Sie die Definitionen

Aufgabe 2:
Bringen Sie die Addition ins Spiel.

Aufgabe 3:
...

Aufgabe 4:
Man kann jede ganze Zahl als $a \cdot 10 + b$ mit $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und $a \in \mathbb{Z}$ schreiben. b ist dann die Einerstelle.

Aufgabe 5:
Suchen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede.