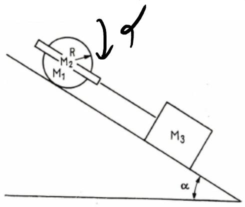
Aufgabe 8.1: *Gemeinsam bergab* .... (4 Punkte)

Eine Walze besteht aus einem homogenen Vollzylinder mit Radius R und Masse M_1, und einer Halterung der Masse M_2. Die Rolle ist durch ein masseloses Seil mit einer Masse M_3 verbunden (siehe Skizze). Das System befindet sich auf einer schiefen Ebene, die den Winkel α zur Horizontalen einnimmt. Der Reibungskoeffizient zwischen der Masse M_3 und der Ebene ist μ_k und die Walze rollt ohne Schlupf.

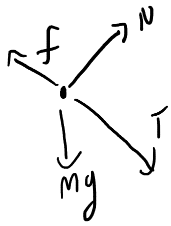


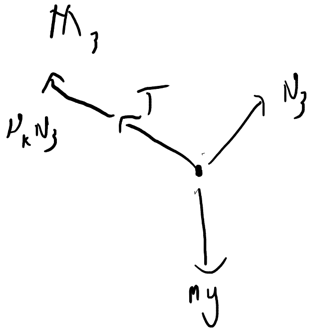
Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

(2 P) a) Bestimmen Sie den Betrag der Beschleunigung a des Systems.

(2 P) b) Wie muss das System in Abhängigkeit von der Steigung α angeordnet sein (Roller oder Masse M_3 vorne), damit das Seil während der Bewegung gespannt ist?

Halterung + Zylinder





Translation
$$\begin{cases} T + (M_1+M_2) g \sin\alpha - f = (M_1+M_2)a \quad \text{--- (1)} \\ M_3 g \sin\alpha - \mu_k N_3 - T = M_3 a \\ N_3 = M_3 g \cos\alpha \end{cases}$$

$$M_3 g(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha) - T = M_3 a \quad \text{--- (2)}$$

Rotation: $fR = I\alpha$, wobei $I := \frac{1}{2} M_1 R^2$

Ohne Schlupf: $\alpha R = a$

$$f = \frac{Ia}{R^2} \quad \text{--- (3)}$$

(1) + (2): $$(M_1+M_2+M_3) g \sin\alpha - \mu_k M_3 g \cos\alpha - f = (M_1+M_2+M_3)a$$

$$(M_1+M_2+M_3) g \sin\alpha - \mu_k M_3 g \cos\alpha - \frac{Ia}{R^2} = (M_1+M_2+M_3)a$$

$$(M_1+M_2+M_3) g \sin\alpha - \mu_k M_3 g \cos\alpha - \frac{1}{2}M_1 a = (M_1+M_2+M_3)a$$

$$(M_1+M_2+M_3) g \sin\alpha - \mu_k M_3 g \cos\alpha = \left(\frac{3}{2}M_1 + M_2 + M_3\right)a$$

$$a = \frac{(M_1+M_2+M_3)g\sin\alpha - \mu_K M_3 g\cos\alpha}{\left(\frac{3}{2}M_1+M_2+M_3\right)}$$

b) Wir betrachten zunächst die Bewegung OHNE Seil.

$$M_3 g(\sin\alpha - \mu_K\cos\alpha) - \cancel{T}^{\,0} = M_3 a_3$$

$$a_3 = g(\sin\alpha - \mu_K\cos\alpha)$$

Dann vergleichen wir die Beschleunigung

$$a - a_3 = \frac{(M_1+M_2+M_3)g\sin\alpha - \mu_K M_3 g\cos\alpha}{\left(\frac{3}{2}M_1+M_2+M_3\right)} - g(\sin\alpha - \mu_K\cos\alpha)$$

$$\left(\frac{3}{2}M_1+M_2+M_3\right)(a-a_3) = (M_1+M_2+M_3)g\sin\alpha - \mu_K M_3 g\cos\alpha - \left(\frac{3}{2}M_1+M_2+M_3\right)g(\sin\alpha - \mu_K\cos\alpha)$$

$$= -\frac{1}{2}M_1 g\sin\alpha - \mu_K M_3 g\cos\alpha + \mu_K\cos\alpha\left(\frac{3}{2}M_1+M_2+M_3\right)g$$

Was > 0 ist genau dann, wenn a > a3

$$-\frac{1}{2}M_1 g\sin\alpha - \mu_K M_3 g\cos\alpha + \mu_K\cos\alpha\left(\frac{3}{2}M_1+M_2+M_3\right)g \geq 0$$

$$-\frac{1}{2}M_1 g\sin\alpha + \mu_K g\cos\alpha\left(\frac{3}{2}M_1+M_2\right) > 0$$

$$\mu_K \cancel{g}\cos\alpha\left(\frac{3}{2}M_1+M_2\right) > \frac{1}{2}M_1\cancel{g}\sin\alpha$$

$$\tan\alpha < \frac{2\mu_K}{M_1}\left(\frac{3}{2}M_1+M_2\right)$$

Wenn a > a3, muss M3 hinten sein, damit die Seilkraft kompensieren kann, um die Beschleunigung von M3 zu erhöhen

Insgesamt

$$\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{2\mu_k}{M_1}\left(\frac{3}{2}M_1 + M_2\right)\right) \qquad \text{Rolle vorn}$$

$$\alpha > \tan^{-1}\left(\frac{2\mu_k}{M_1}\left(\frac{3}{2}M_1 + M_2\right)\right) \qquad M_3 \text{ vorne}$$