Universität Würzburg Übungsblätter
Bachelor Mathematische Physik

Jun Wei Tan

October 26, 2023

Contents

Chapter 1

Lineare Algebra 1

1.1 Blatt 1

Problem 1. Beweisen Sie folgende Aussage: Gegeben seien zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$ mit $p \neq q$. Dann gibt es genau eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $p \in g$ und $q \in g$. Diese ist gegeben durch $g_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1(q_2 - p_2) - x_2(q_1 - p_1) = p_1q_2 - p_2q_1\}$.

Proof. Wir nutzen Def. **??**. Weil p und q in der Gerade sind, können wir zwei Gleichungen schreiben...

$$\begin{aligned} a_1p_1 + a_2p_2 &= b \\ a_1q_1 + a_2q_2 &= b \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} a_1p_1 + a_2p_2 &= a_1q_1 + a_2q_2 \\ a_1(p_1 - q_1) &= a_2(q_2 - p_2) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} a_1 &= t \\ a_2 &= t\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} \\ b &= p_1t + p_2\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2}t \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die gegebene Gerade eine Lösung zu die Gleichung ist, mit $t = q_2 - p_2$. Was passiert mit andere t? Sei $t = q_2 - p_2$ und $t' \in \mathbb{R}$. Vergleich dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1t + x_2t\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1t + p_2\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2}t \\ x_1t' + x_2t'\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2} &= p_1t' + p_2\frac{p_1 - q_1}{q_2 - p_2}t' \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die zweite Gleichung nur die erste Gleichung durch t'/t multipliziert ist. Deshalb habe die zwei Gleichungen die gleiche Lösungsmengen, dann sind die Gerade, die durch die Gleichungen definiert werden, auch gleich.

Wenn $q_1 = q_2$ dürfen wir die Lösungemenge nicht so schreiben. Aber wir können den Beweis wiederholen, aber mit a_2 als das freie Parameter. Es darf nicht, dass $(q_1 - p_1, q_2 - p_2) = (0, 0)$, weil $\vec{\mathbf{q}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ □

Problem 2. In Beispiel 1.2.8 wurde der Schnitt von zwei Ebenen bestimmt. Er hatte eine ganz bestimmte Form, die wir für den Kontext dieser Aufgabe als Gerade bezeichnen wollen, formal:

Ist $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ und $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig, dann ist die Menge

$$\{(p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2, p_3 + t \cdot v_3) | t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade.

(a) Finden Sie zwei Ebenen, deren Schnitt die Gerade $g = \{(1 + 3t, 2 + t, 3 + 2t) | t \in \mathbb{R}\}$ ist. Erläutern Sie, wie Sie die Ebenen bestimmt haben und beweisen Sie anschließend, dass Ihr Ergebnis korrekt ist.

(b) Ist der Schnitt von zwei Ebenen immer eine Gerade? Wenn ja, begründen Sie das, wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(c) Zeigen Sie: Für den Schnitt einer Geraden g mit einer Ebene E gilt genau einer der folgenden drei Fälle:

- $g \cap E = \varnothing$
- $|g \cap E| = 1$
- $g \cap E = g$

Geben Sie für jeden der Fälle auch ein Geraden-Ebenen-Paar an, dessen Schnitt genau die angegebene Form hat.

Proof. (a) Wir suchen zwei Ebenen, also 6 Vektoren $\vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{p}}_2, \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathbb{R}^3$, die zwei Ebenen durch

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\vec{\mathbf{p}}_1 + t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ E_2 &= \{\vec{\mathbf{p}}_2 + t'_1\vec{\mathbf{v}}_1 + t'_2\vec{\mathbf{v}}_2 | t'_1, t'_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

definieren. Einfachste wäre, wenn $p_1 = p_2 \in g$. Sei dann $p_1 = p_2 = (1, 2, 3)^T$. Wenn $\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1 = (3, 1, 2)^T$, ist es auch klar, dass der Schnitt g entschließt $(t_2 = t'_2 = 0)$. Dann mussen wir $\vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2$ finden, für die gelten,

$$(t, t'_2) \neq (0, 0) \implies t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 \neq t'_1 \underbrace{\vec{\mathbf{u}}_1}_{\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1} + t'_2\vec{\mathbf{v}}_2 \forall t_1, t'_1 \in \mathbb{R},$$

also

$$\xi_1\vec{\mathbf{u}}_1 \neq t'_2\vec{\mathbf{v}}_2 - t_2\vec{\mathbf{u}}_2 \qquad (t_2, t'_2) \neq (0, 0), \forall \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned}\xi_1 = 0 &: \vec{\mathbf{v}}_2 \neq k\vec{\mathbf{u}}_2 \qquad \forall k \in \mathbb{R}\\ \xi_1 \neq 0 &: \vec{\mathbf{u}}_1 \notin \operatorname{span}(\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_2)\end{aligned}$$

Remark 1. *Wir können uns einfach für solchen* $\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_2$ *entscheiden. Wir brauchen nur*

$$\langle \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2\rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2\rangle = 0.$$

Aber weil das innere Produkt nicht in der Vorlesung nicht diskutiert worden ist, mussen wir es nicht systematisch finden.

Remark 2. *Eigentlich braucht man keine spezielle Grunde, um* $\vec{\mathbf{u}}_2$ *und* $\vec{\mathbf{v}}_2$ *zu finden. Wenn man irgindeine normalisierte Vektoren aus einer Gleichverteilung auf* $\mathbb{R}^3$ *nimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die eine Lösung sind,* 1.

Daher entscheide ich mich ganz zufällig für zwei Vektoren...

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_2 =& (1, 0, 0)^T\\ \vec{\mathbf{u}}_2 =& (0, 1, 0)^T\end{aligned}$$

Der Schnitt von der Ebenen kann berechnet werden...

$$\vec{\mathbf{p}} + t_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 = \vec{\mathbf{p}} + t_1'\vec{\mathbf{v}}_1 + t_2'\vec{\mathbf{v}}_2,$$

$$\xi_1\vec{\mathbf{u}}_1 + t_2\vec{\mathbf{u}}_2 = t_2'\vec{\mathbf{v}}_2.$$

Also

$$\xi_1 \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = t_2' \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

oder

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ t_2\\ t_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Remark 3. *Hier ist es noch einmal klar, dass die einzige Lösung* $\xi_1 = t_2 = t_2' = 0$ *ist, weil* $\det(\ldots) \neq 0$. *Aber wir mussen noch eine langere Beweis schreiben...*

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}6 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

also die einzige Lösung ist $\xi_1 = t_2 = t_2' = 0 \implies t_2 = t_2' = 0, t_1 = t_2 \implies E_1 \cap E_2 = g$

(b) Nein.

$$E_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

(c)

Theorem 4. *Sei $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine Gerade g, wofür gilt $\vec{\mathbf{a}} \in g, \vec{\mathbf{b}} \in g$. Es kann als*

$$\vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}), t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

Proof. Es ist klar, dass

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} &\in g \qquad (t = 0) \\ \vec{\mathbf{b}} &\in g \qquad (t = 1) \end{aligned}$$

Sei dann eine andere Gerade g', wofür gilt $\vec{\mathbf{a}} \in g'$ und $\vec{\mathbf{b}} \in g'$. g' kann als

$$\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}}, t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden, wobei $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$. Es existiert $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}} + t_1\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{a}} \\ \vec{\mathbf{u}} + t_2\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{a}} - t_1\vec{\mathbf{v}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} - t_1\vec{\mathbf{v}} + t_2\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{b}}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) \qquad t_1 \neq t_2 \text{ weil } \vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{b}}$$

Es gilt dann für g':

$$\begin{aligned} g' &= \{\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}} | t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\vec{\mathbf{a}} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) + \frac{t}{t_2 - t_1}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) | t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\vec{\mathbf{a}} + \left(\frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}\right)\left(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\right) | t \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Wenn man $t' = \frac{t}{t_2 - t_1} - \frac{t_1}{t_2 - t_1}$ definiert, ist es dann klar, dass $g' = g$ □

Es ist klar, dass maximal eines der Fälle gelten kann. Wir nehmen an, dass die erste zwei Fälle nicht gelten. Dann gilt

$$|g \cap E| \geq 2.$$

Es gibt dann mindestens zwei Punkte in $g \cap E$. Es ist auch klar, dass die Verbindungsgerade zwische die beide Punkte g ist (Pr. 1)

Theorem 5. *Sei $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in E$. Dann ist die Verbindungsgerade zwischen $\vec{\mathbf{v}}_1$ und $\vec{\mathbf{v}}_2$ auch in E.*

Proof. Sei

$$E = \{\vec{\mathbf{p}}_1 + t_1\vec{\mathbf{u}} + t_2\vec{\mathbf{v}} | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Es wird angenommen, dass a_1, a_2, b_1, b_2 existiert, sodass

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_1 =& \vec{\mathbf{p}} + a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}}\\ \vec{\mathbf{v}}_2 =& \vec{\mathbf{p}} + b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 = (b_1 - a_1)\vec{\mathbf{u}} + (b_2 - a_2)\vec{\mathbf{v}},$$

also

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_1 + t(\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1) =& \vec{\mathbf{p}} + a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} + t\left[(b_1 - a_1)\vec{\mathbf{u}} + (b_2 - a_2)\vec{\mathbf{v}}\right]\\ =& \vec{\mathbf{p}} + \left[a_1 + t(b_1 - a_1)\right]\vec{\mathbf{u}} + \left[a_2 + t(b_2 - a_2)\right]\vec{\mathbf{v}} \in E\end{aligned}$$

□

Deshalb ist $g \subseteq g \cap E$. Weil $g \cap E \subseteq g$, ist $g = g \cap E$

□

Chapter 2

Lineare Algebra 2

2.1 Blatt 1

Problem 3. (a) Bestimmen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung

$$x^2 = u + iv,$$

in Abhängigkeit von $u, v \in \mathbb{R}$

(b) Führen Sie das Nullstellenproblem

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

mit $a \in \mathbb{C}\backslash 0, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ auf den Fall in (a) zurück. Geben Sie weiterhin eine geschlossene Darstelling aller Lösungen für den Fall $a = 1$ an.

Hat alles geklappt, sollte bei Ihnen speziell für den Fall $a = 1$ und $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(c) = 0$ die entsprechende Mitternachtsformel dastehen.

Proof. (a) $\left|x^2\right| = |x|^2 = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}$

Daraus folgt:

$$|x| = (u^2 + v^2)^{1/4},$$
$$x = (u^2 + v^2)^{1/4} e^{i\theta}.$$

Setze es in $x^2 = u + iv$ ein und löse die Gleichungen für θ. Sei $\varphi = \mathrm{atan}_2(u, v)$ Dann ist:

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \text{ oder } \theta = \frac{\varphi + 2\pi}{2}.$$

(b)

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

d.h.

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = &\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = &\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
x = &- \frac{b}{2a} \pm p
\end{aligned}$$

wobei p die Lösung zu $p^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ ist. Im Fall $a = 1$ und $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(c) = 0$, daraus folgt:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}.$$

□

Problem 4. Finden Sie für die Polynome $p, d \in \mathbb{C}[x]$ jeweils solche $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r) < \deg(d)$, dass $p = qd + r$ gilt.

(a) $p = x^7 + x^5 + x^3 + 1, d = x^2 + x + 1$

(b) $p = x^5 + (3 - i)x^3 - x^2 + (1 - 3i)x + 1 + i, d = x^2 + i$

(c) Wie sehen s, r aus, wenn man in (a) und (b) jeweils die Rollen von p und d vertauscht? D.h. bestimmen Sie $s, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg r < \deg p$, sodass $d = sp + r$ gilt.

Proof. (a)

$$\begin{array}{r|l}
 & x^5 - x^4 + x^3 \\ \hline
x^2 + x + 1 & x^7 \qquad + x^5 \qquad + x^3 + 1 \\
 & -x^7 - x^6 - x^5 \\ \cline{2-2}
 & -x^6 \\
 & x^6 + x^5 + x^4 \\ \cline{2-2}
 & x^5 + x^4 + x^3 \\
 & -x^5 - x^4 - x^3 \\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}$$

Daher

$$q = x^5 - x^4 + x^3, r = 1.$$

(b) $q = x^3 + (3 - 2i)x - x, r = -(1 + 6i)x + (1 + 2i)$

(c) $r = d, s = 0$

□

Problem 5. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -38 \\ -46 \\ -18 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(A)$ und $\ker(A)$

(b) Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$ und $\text{Lös}(A, c)$.

Proof. (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei dann $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Wenn $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \ker(A)$, gilt

$$\begin{aligned} t_3 &:= x_3 \\ t_4 &:= x_4 \\ x_1 &= x_3 - x_4 = t_3 - t_4 \\ x_2 &= -x_3 - 2x_4 = -t_3 - 2t_4 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\ker(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -46 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 30 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & -38 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= -18 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= -10 \end{aligned}$$

Deswegen ist Lös(A,b)

$$\begin{pmatrix} -18+x_3-x_4 \\ -10-x_3-2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\times-\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es gibt keine Lösungen, weil $0 \neq 1$, also Lös$(A,c) = \varnothing$

□

Problem 6. Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume V mit Basis $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ und Basis $B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Wir definieren einen linearen Operator $T : V \to W$ wie folgt:

$$T(v_1) = w_1 + w_3 \qquad T(v_2) = w_1 + w_2, T(v_3) = -w_1 - w_2 - w_3.$$

(a) $w_1, w_2, w_3 \in \operatorname{span}\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$, weil

$$\begin{aligned} w_1 &= T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) \\ w_2 &= (-1)\left(T(v_3) + T(v_1)\right) \\ w_3 &= (-1)\left(T(v_2) + T(v_3)\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$W = \operatorname{span}(w_1, w_2, w_3) = \operatorname{span}(T(v_1), T(v_2), T(v_3)).$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{im}(T) = \mathbb{R}^3, \qquad \ker(T) = \{0\}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$B_W^* = \{w_1 + w_3, w_1 + w_2, -w_1 - w_2 - w_3\}.$$

(d)

$$B_V^* = \{v_1 + v_2 + v_3, -(v_1 + v_3), -(v_2 + v_3)\}.$$

Chapter 3

Analysis 2

Ich habe die Übungen für Analysis 2 mit Lukas Then gemacht.

3.1 Blatt 1

Problem 7. Berechnen Sie Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{\arctan \sin x^2}{e^{1-x}}$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = x^{(x^x)}$ für $x > 0$

(a)

$$f(x) = e^{x-1} \arctan \sin x^2.$$

$$\begin{aligned} f'(x) =& e^{x-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \sin x^2 + \left(\arctan \sin x^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x-1} \\ =& \frac{e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x^2 + \left(\arctan \sin x^2\right) e^{x-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-1) \\ =& \frac{e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} (\cos x^2)(2x) + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \\ =& \frac{2x \cos x^2 e^{x-1}}{1+\sin^2 x^2} + (\arctan \sin x^2) e^{x-1} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g(x) =& x^{(x^x)} \\ \ln g(x) =& x^x \ln x \end{aligned}$$

Lemma 6.

$$\begin{aligned} h(x) &:= x^x \\ h'(x) &= x^x(1 + \ln x) \end{aligned}$$

Proof.

$$\ln h(x) = x \ln x.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} | \ln h(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x \ln x) \\
\frac{h'(x)}{h(x)} =& \ln x + 1 \\
h'(x) =& h(x) (1 + \ln x) \\
=& x^x (1 + \ln x)
\end{aligned}$$

□

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln g(x) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x^x \ln x) \\
\frac{g'(x)}{g(x)} =& \frac{1}{x} x^x + (\ln x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x^x) \\
=& \frac{x^x}{x} + (\ln x) x^x (1 + \ln x) \\
g'(x) =& g(x) x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right] \\
=& x^{x^x + x} \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right] \\
=& x^{x^x + x - 1} \left[1 + x \ln x + x \ln^2 x \right]
\end{aligned}$$

Problem 8. Untersuchen Sie, für welche Argumente des Definitionsbereiches die folgenden Funktionen differenzierbar sind:

(a) $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) $h(z) = \overline{z}, z \in \mathbb{C}$

(a) Für $x_0 \neq 0$ gibt es eine Umgebung auf x_0, worin $|x| = x$ oder $|x| = -x$. Dann ist die Ableitung von $|x|$ gleich mit die Ableitung von entweder x oder $-x$, also $f'(x_0)$ existiert für $x_0 \neq 0$.

Für $x_0 = 0$ gilt $|0| = 0$, und auch

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Weil die beide ungleich sind, existiert die Grenzwert und daher auch die Ableitung nicht.

(b) Sei $x_0 \neq 0$ und $y_0 = x_0^2$. Dann für $0 < \epsilon < y_0$ existiert keine $\delta > 0$, sodass $|x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

Beweis: Es gibt zwei Fälle:

(i) $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann in jeder offenen Ball $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt es ein Zahl $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, also $|g(x) - g(x_0)| = g(x_0) = y_0 > \epsilon$

(ii) Sei $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dann in jeder offenen Ball $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt es ein Zahl $x \in \mathbb{Q}$, also $|g(x) - g(x_0)| = g(x) > y_0 > \epsilon$

Sei $x_0 = 0$. Dann gilt $g(x_0) = 0$, und auch:

(i) $x \in \mathbb{Q}$, also

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \frac{x^2}{x} \\ &= x \end{aligned}$$

(ii) oder $x \notin \mathbb{Q}$, also

$$g(x) - g(0) = 0 - 0 = 0 \implies \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

Deshalb ist

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

(c) Zu berechnen:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Sei $z = z_0 + x, x \in \mathbb{R}$. Dann, falls die Grenzwert existiert, ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{z_0 + x - z_0}}{z_0 + x - z_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sei jetzt $z = z_0 + ix, x \in \mathbb{R}$. Falls die Grenzwert existiert ist es gleich

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{z_0 + ix - z_0}}{z_0 + ix - z_0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\overline{ix}}{ix} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-ix}{ix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Weil das Grenzwert, wenn durch zwei Richtungen berechnet wurde, ungleich ist, existiert das Grenzwert nicht (für alle $z \in \mathbb{C}$)

Problem 9. Man zeige, dass die Gleichung

$$x = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

auf $[0,1]$ genau eine Lösung besitzt.

Sei $f(x) = x - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Dann ist die Gleichung gleich $f(x) = 0$. $f(x)$ ist auf $[0,1]$ stetig, und auf $(0,1)$ differenzierbar.

$$\begin{aligned} f(0) =& 0 - 1 = -1 \\ f(1) =& 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es mindestens eine Lösung zu der Gleichung $f(x) = 0$. Dann

$$f'(x) = 1 + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0 \text{ für } x \in [0,1].$$

f is dann monoton wachsend, und es gibt maximal eine Lösung zu $f(x) = 0$.

Deswegen besitzt die Gleichung genau eine Lösung.

Problem 10. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{k\to\infty} k \ln \frac{k-1}{k}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}$

(a)

$$k \ln \frac{k-1}{k} = \frac{\ln(k-1) - \ln k}{1/k}.$$

Weil $\ln x$ und $1/x$ auf $x \in (0,\infty)$ differenzierbar sind, kann man den Satz von L'Hopital verwenden:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\ln(k-1) - \ln k\right] =& \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{1}{k} =& -\frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k(k-1)}}{-\frac{1}{k^2}} =& \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{k}{k-1}\right) \\ =& \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \\ =& -1 \end{aligned}$$

Weil das Grenzwert auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert, ist

$$\lim_{k\to\infty} k \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -1.$$

(b)

$$\frac{x^{\ln x}}{e^x} = \frac{\left(e^{\ln x}\right)^{\ln x}}{e^x} = \frac{e^{\ln^2 x}}{e^x} = e^{\ln^2 x - x} = e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 1\right)}.$$

Lemma 7.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} = 0, \qquad p, q > 0.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} &= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{p/q}}\right)^q \\ &= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x^{p/q})}\right)^q && \text{L'Hopital} \\ &= 0^q = 0 \end{aligned}$$

□

Corollary 8.

$$\lim_{x\to\infty} \left[x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 1\right)\right] = -\infty.$$

Deswegen ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 1\right)} = 0.$$

Problem 11. Überprüfen Sie die Funktion $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & -1 \le x < 1 \\ \frac{8}{\pi} \arctan \frac{1}{x} & x \ge 1 \end{cases}$$

auf lokale und globale Extrema.

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & -1 < x < 1 \\ \frac{8}{\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) & x > 1 \end{cases}.$$

Es ist klar, dass $x = 0$ eine Lösung zu $f'(x) = 0$ ist. Weil $f''(0) = 2 > 0$, ist es ein lokales Minimum. Es gibt auch $a, b \in \mathbb{R}, a < 1 < b$, wofür gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 && x \in (a, 1) \\ f'(x) &< 0 && x \in (1, b) \end{aligned}$$

Falls $f(1) \ge \lim_{x\to 1^-} f(x)$, ist $f(1)$ ein lokales Maximum (sogar wenn f nicht auf 1 stetig ist). Weil

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2 + 1\right) = 2$$

und

$$f(1) = \frac{8}{\pi} \arctan 1 = \frac{8}{\pi} \frac{\pi}{4} = 2$$

ist $f(1)$ ein lokales Maximum. Weil $f(x) < 2$ für $x > 1$ kann kein Punkt $x > 1$ ein globales Maximum sein. Es gilt auch, dass

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Außer $x \in \{-1, 0, 1\}$ gibt es keine Möglichkeiten für ein globales Maximum. Daher sind die globale Maxima auf $x \in \{-1, 1\}$

Für $x \in [1, 1)$ gilt $f(x) \geq 1$. Dennoch ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Deswegen gibt es *keine* globales Maximum auf $\mathbb{R}$. Wenn man $f(\infty)$ definiert durch $f(\infty) = \lim_{x \to \infty} f(x)$, ist $f(\infty)$ das globale Maximum.

Chapter 4

Vertiefung Analysis

Ich habe die Übungen für Vertiefung Analysis mit Lucas Wollman gemacht.

4.1 Blatt 1

Problem 12. Seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}, \mathcal{S}$ σ-Algebren über X sowie B eine σ-Algebra über Y. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(c) $\mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra über X.

(d) $f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{ f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{B} \right\}$ ist eine σ-Algebra über X.

(e) $f(\mathcal{A}) = \{ f(A) \subseteq Y | A \in \mathcal{A} \}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Proof. (a) Falsch. Sei

$$\begin{aligned} X &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{A} &= \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, X\} \\ \mathcal{S} &= \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$A \cup S = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}.$$

keine σ-Algebra, weil

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{S}.$$

(b) Richtig.

(1) $X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{S} \implies X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$

(2) Sei $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann $A \in \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{S}$.
Daraus folgt: $A^c \in \mathcal{A}$ und $A^c \in \mathcal{S}$. Deswegen ist $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$.

(3) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$$

Daraus folgt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}.$$

(c) Falsch. $X \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{S} \implies X \notin \mathcal{A} \backslash \mathcal{S}$

(d) Richtig.

(1) $f^{-1}(Y) = X \in f^{-1}\mathcal{B}$

(2) Sei $A = f^{-1}(B)$

$$X - A = f^{-1}(\underbrace{Y - B}_{\in \mathcal{B}}) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

(3) Es folgt aus

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right).$$

(e) Falsch. Sei $a \in Y$ und f die konstante Abbildung $f(x) = a \forall x \in X$. Dann gilt

$$f(\mathcal{A}) = \{\varnothing, \{a\}\}$$

was keine σ-Algebra ist, solange $Y \neq \{a\}$.

$\square$

Problem 13. (a) Sei $X := \mathbb{Q}$ und $\mathcal{A}_\sigma(M)$ die von $M := \{(a, b] \cap Q | a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_\sigma(M) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ gilt.

(b) Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ gilt

$$f^{-1}\left(A_\sigma(\mathcal{M})\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right).$$

Das Urbild von $\mathcal{M}$ ist hierbei analog zum Urbild einer σ-Algebra definiert durch

$$f^{-1}(\mathcal{M}) := \left\{f^{-1}(B) \subseteq X | B \in \mathcal{M}\right\}.$$

Proof. (a) $\{q\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) \forall q \in \mathbb{Q}$, weil

$$\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(q - \frac{1}{n}, q \right] \in \mathcal{A}_\sigma(M).$$

Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, sind alle Teilmenge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ abzählbar, daher

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma\left(\{\{q\} | q \in \mathbb{Q}\}\right) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(M)$$

Es ist klar, dass

$$\mathcal{A}_\sigma(M) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}).$$

(b) Sei $P = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}\}$. Per Definition ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A}$. Dann ist es zu beweisen:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\mathcal{A} \in P} \mathcal{A} \right) = \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right).$$

Jeder σ-Algebra $f^{-1}(\mathcal{A})$ enthält $f^{-1}(\mathcal{M})$. Daraus folgt, dass

$$\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right) \subseteq \bigcap_{\mathcal{A} \in P} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

Jetzt betrachten wir

$$\mathcal{M}' := f_*\left(\mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right)\right).$$

Es ist schon in der Vorlesung bewiesen, dass $\mathcal{M}'$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{M}$ und daher auch $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})$ enthält. Weil $f^{-1}(\mathcal{M}')$ eine σ-Algebra ist, ist $f^{-1}(\mathcal{M}') = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right)$. Daraus folgt:

$$f^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})\right) \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}') = \mathcal{A}_\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right). \qquad \square$$

Problem 14. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik, also ausgestattet mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Für $re > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| < r\}$. Definiere außerdem $B_\mathbb{Q} := \{B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n | \mathbb{Q} \ni r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\}$ und $B_\mathbb{R} := \{B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n | r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$

(a) Zeigen Sie: Für jeder offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $A = \cup_{B_r(q) \in M} B_r(q)$ mit

$$M := \{B_r(q) \in B_\mathbb{Q} | B_r(q) \subseteq A\}.$$

(b) Folgern Sie nun $\mathcal{A}_\sigma(B_\mathbb{Q}) = \mathcal{A}_\sigma(B_\mathbb{R}) = \mathcal{B}^n$

Proof. (a) Es genügt zu beweisen, dass jeder offene Ball eine Vereinigung von $\mathbb{Q}$-Bälle sind.

Sei $B_p(x), p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Ball. Sei auch $(a_i), a_i \in \mathbb{Q}^n$ eine Folge, für die gilt

$$\|x - a_i\| < r \forall i$$
$$\lim_{i \to \infty} a_i = x$$

Sei dann

$$M_i = B_{r - \|x - a_i\|}(a_i) \in B_{\mathbb{Q}}.$$

Es ist klar, dass jeder $M_i \subseteq B_r(x)$ ist. Wir beweisen auch, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = B_r(x)$.

Sei $y \in B_r(x)$. Es gilt $\|y - x\| = r_0 < r$. Sei $\xi = r - r_0$. Weil $\lim_{n \to \infty} a_n = x$, gibt es ein Zahl a_k, wofür gilt

$$\|a_k - x\| < \frac{\xi}{2}.$$

(Eigentlich existiert unendlich viel, aber die brauchen wir nicht). Es gilt dann

$$\|y - a_k\| \leq \|y - x\| + \|x - a_k\| \leq r_0 + \frac{\xi}{2} < r - \frac{\xi}{2} < r - \|x - a_i\|,$$

also $y \in B_{r - \|x - a_k\|}(a_k)$. Jetzt ist die Ergebnis klar: Weil jeder offene Menge eine Vereinigung von offene Bälle ist, gilt

$$A = \bigcup B_p(x) = \bigcup \bigcup B_r(q),$$

wobei $p \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}^n$

(b) $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n$ per Definition.

Aus $B_{\mathbb{Q}} \subseteq B_{\mathbb{R}}$ folgt $\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}})$

Aus (a) folgt, dass

$$B_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}).$$

Dann

$$\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}})) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}).$$

Deswegen

$$\mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{A}_\sigma(B_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}^n.$$

□

Problem 15. Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $\mu : A \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion.

(a) Sei μ σ-subadditiv, $B \in \mathcal{A}$ und definiere $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty], \mu_B(A) := \mu(A \cap B)$. Zeigen Sie, dass μ_B wohldefiniert und eine σ-subadditive Mengenfunktion ist.

(b) μ erfülle die beiden Eigenschaften

(1) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \varnothing$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ für alle $(A_n) \subseteq A$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$.

Zeigen Sie, dass μ σ-additiv ist.

Proof. (a) Weil $B \in \mathcal{A}$, ist $B \cap A \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A}$. μ_B ist daher wohldefiniert. Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}, \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Sei auch $B_j = A_j \cap B \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu_B\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_B(A_j)$$

(b) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkter Menge. Dann definiere $B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_j$. Für k endlich ist es klar,

$$\mu(B_k) = \sum_{i=1}^{k} A_i.$$

Weil $B_i \subseteq B_{i+1}$, (2) gilt auch:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \quad \square$$

Chapter 5

Theoretische Mechanik

5.1 Blatt 1

Problem 16. Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in einer Dimension, d. h. das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} =& F(x(t)) = -kx(t) \\ x(t_0) =& x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =& v_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, daß wenn eine komplexwertige Funktion $z : I \to \mathbb{C}$ mit $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ die Differentialgleichung (1a) löst, ihr Realteil $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ zur Lösung des reellen Anfangswertproblems (1) benutzt werden kann.

2. Was ist die allgemeinste Form der rechten Seite der Differentialgleichung (1a), für die der Realteil einer komplexen Lösung selbst eine Lösung ist? Geben Sie Gegenbeispiele an.

3. Machen Sie den üblichen Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten...

Proof. 1. Sei $x(t) = x_r(t) + ix_i(t), x_r, x_i : I \to \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t^2} + i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\right) = -k(x_r + ix_i).$$

Weil das eine Gleichung von zwei komplexe Zahlen ist, gilt auch

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t^2} = -kx_r.$$

2. Das passt für alle reelle lineare Kombinationen der Ableitungen von $x(t)$.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i x}{\mathrm{d}t^i} = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Gegenbeispiele

(i) Irgendeine $a_i \notin \mathbb{R}$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -ikx(t), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Hier ist es klar, dass *keine* Abbildung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung sein kann, weil die linke Seite reelle wird, aber die rechte Seite nicht reelle wird.

Daraus folgt: Das Realteil der Lösung ist kein Lösung.

(ii) Nichtlineare Gleichung, z.B.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

3.

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 \alpha e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} m\cancel{\alpha}\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} &= -k\cancel{\alpha}\cancel{e^{\lambda t}} \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\ \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} &= \pm i\omega \qquad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Daraus folgt, für $z_1(t)$:

$$\begin{aligned} z_1(0) =& \alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = x_0 \\ z_1'(0) =& -i\omega\alpha_{1,+} + i\omega\alpha_{1,-} = v_0 \\ & -\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-} = -\frac{iv_0}{\omega} \\ 2\alpha_{1,-} =& x_0 - \frac{iv_0}{\omega} \\ 2\alpha_{1,+} =& x_0 + \frac{iv_0}{\omega} \\ z_1(t) =& \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t} + \left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{i\omega t}\right] \end{aligned}$$

Daraus folgt die andere Formen der Lösungen:

(i) $x_2(t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(x_0+\frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t}+\left(x_0-\frac{iv_0}{\omega}\right)e^{i\omega t}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\left(x_0+\frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\left(x_0+\frac{iv_0}{\omega}\right)(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t))\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+i(\dots)\right]\\
&=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t
\end{aligned}$$

(ii) $x_3(t)$ (R-Formula)

$$x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t=\alpha_3\sin(\omega t+\delta_3)$$
$$\alpha_3=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$
$$\delta_3=\arctan\frac{v_0}{x_0\omega}$$

(iii) $x_4(t)$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_4=\alpha_3 \qquad \delta_4=\delta_3+\frac{\pi}{2}.$$

□

Problem 17. ...

Proof. 1.

$$\begin{aligned}
x(t)&=\alpha e^{\lambda t}\\
\dot{x}(t)&=\alpha\lambda e^{\lambda t}\\
\ddot{x}(t)&=\alpha\lambda^2 e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
m\lambda^2\cancel{\alpha e^{\lambda t}}=&-k\cancel{\alpha e^{\lambda t}}-2m\gamma\lambda\cancel{\alpha e^{\lambda t}}\\
0=&m\lambda^2+2m\gamma\lambda+k\\
\lambda=&-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

Falls $\gamma^2\neq\frac{k}{m}$:

$$x(t)=e^{-\gamma t}\left[Ae^{\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}t}+Be^{-\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}t}\right],$$

$$\begin{aligned}x'(t) =& -\gamma e^{-\gamma t}\left[Ae^{\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}t}\right] \\ &+ e^{-\gamma t}\left[A\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}e^{\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}t} - B\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}e^{-\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}t}\right]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x(0) &= A + B = x_0 \\ x'(0) &= \sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}\,(A-B) = v_0 \\ 2A &= x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}} \\ 2B &= x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}}}\end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass es möglich ist, dass $\gamma^2 < \frac{k}{m}$. In diesem Fall ist $\sqrt{\gamma^2-\frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m}-\gamma^2}$, aber der Form der Lösung bleibt.
Für $\gamma^2 = \frac{k}{m}$ ist die Lösung

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}.$$

Es gilt

$$x'(t) = -\gamma Ae^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} - Bt\gamma e^{-\gamma t}.$$

Dann

$$\begin{aligned}x(0) =& A = x_0 \\ x'(0) =& -\gamma A + B = v_0 \\ B =& v_0 + \gamma x_0 \\ x(t) =& x_0 e^{-\gamma t} + (v_0 + \gamma x_0)te^{-\gamma t}\end{aligned}$$

2. Wir suchen eine Partikularlösung für die Gleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F_0 e^{-i\omega_0 t}$$

mit dem Form

$$x(t) = Ae^{-i\omega_0 t}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}x'(t) =& -i\omega_0 Ae^{-i\omega_0 t} \\ x''(t) =& -\omega_0^2 Ae^{-i\omega_0 t}\end{aligned}$$

Dann ist

$$-\omega_0^2 Ame^{-i\omega_0 t} - 2m\gamma i\omega_0 Ae^{-i\omega_0 t} + Ake^{-i\omega_0 t} = F_0 e^{-i\omega_0 t},$$

$$A = \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k}.$$

3. für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ und äußere Kraft $F_{\text{ext}} \equiv 0$ ist die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Wir berechnen

$$\dot{x} = -x_0\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 =& \frac{m}{2}\left(-x_0\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t\right)^2 \\
=& \frac{m}{2}\left(x_0^2\omega^2\sin^2\omega t - 2x_0v_0\omega\sin\omega t\cos\omega t + v_0^2\cos^2\omega t\right) \\
=& \frac{\overset{k/2}{\cancel{m}}}{\cancel{2}\omega^2}\left(x_0^2\sin^2\omega t - \frac{2x_0v_0}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2}\cos^2\omega t\right) \\
=& \frac{k}{2}\left(x_0^2(1-\cos^2\omega t) - \frac{2x_0v_0}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2}\left(1-\sin^2\omega t\right)\right)
\end{aligned}$$

Aus

$$\frac{k}{2}x(t)^2 = \frac{k}{2}\left(x_0^2\cos^2\omega t + \frac{2x_0v_0}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t\frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t\right)$$

folgt

$$\begin{aligned}
E(t) =& \frac{k}{2}\left(x_0^2(1-\cos^2\omega t) - \frac{2x_0v_0}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2}\left(1-\sin^2\omega t\right)\right) \\
&+ \frac{k}{2}\left(x_0^2\cos^2\omega t + \frac{2x_0v_0}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t\frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t\right) \\
=& \frac{k}{2}x_0^2 + \frac{kv_0^2}{2\omega^2},
\end{aligned}$$

was nicht abhängig von t ist.

Wir untersuchen jetzt die Energie für eine harmonische äußere Kraft. Wenn die Dämpfung $\neq 0$ ist, ist

$$\lim_{t\to\infty}\left(x_h(t) + x_p(t)\right) = \lim_{t\to\infty} x_p(t).$$

Daher muss man nur die Energie der Partikularlösung berechnen:

$$\begin{aligned}
x(t) =& \frac{F_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k}e^{-i\omega_0 t} \\
\dot{x}(t) =& -\frac{iF_0\omega_0}{-m\omega_0^2 - 2m\gamma i\omega_0 + k}e^{-i\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Wenn $\gamma = 0$, kann $x(t) \to \infty$, wenn

$$-m\omega_0^2 + k = 0 \qquad \text{(Resonanz)}.$$

Das bedeutet $E(t) \to \infty$ auch.

$\square$