Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

3. Übungsblatt

Hinweis:
Die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum Mittwoch (08.11.2023) um 23:59 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugehörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

1. **Matrixmultiplikation (16 + 4)**

   (a) Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte der folgenden Matrizen. Was muss jeweils für die Dimensionen erfüllt sein?

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$$

   $$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Eine Blockmatrix ist eine Matrix von der Form

   $$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$$

   mit Matrizen $A_1 \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $A_2 \in \mathbb{K}^{n' \times m}$, $A_3 \in \mathbb{K}^{n \times m'}$, $A_4 \in \mathbb{K}^{n' \times m'}$. Sei weiterhin

   $$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix},$$

   mit ebenso Einträgen aus $\mathbb{K}$. Wer nun meint, die Multiplikation von A und B sei so simpel wie

   $$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_3B_2 & A_1B_3 + A_3B_4 \\ A_2B_1 + A_4B_2 & A_2B_3 + A_4B_4 \end{pmatrix},$$

   hat tatsächlich recht. Beweisen Sie diese Formel und geben Sie gleichzeitig für die $B_i's$ die benötigten Matrizenräume an, sodass die Rechnung wohldefiniert ist.

2. **Die Duale Abbildung (4 + 4 + 2)**

   Es seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$, nicht notwendigerweise endlich-dimensional und

   $$\Phi : V \to W,$$

   eine lineare Abbildung. Beweisen Sie:

   (a) Die duale Abbildung Φ^* ist injektiv genau dann, wenn Φ surjektiv ist.
   Hinweis: Die Richtung $\Rightarrow$ beweisen Sie am einfachsten als eine Kontraposition.

   (b) Die duale Abbildung Φ^* ist surjektiv genau dann, wenn Φ injektiv ist.
   Hinweis: Die Rückrichtung lässt sich am einfachsten direkt beweisen. Nutzen Sie in dem Fall die Injektivität von Φ aus, um für ein beliebiges $v^* \in V^*$ eine lineare Abbildung im Bild von Φ^* zu konstruieren, die die gleichen Werte wie Abbildung v^* liefert.

   (c) Im Falle der Invertierbarkeit gilt

   $$\left(\Phi^{-1}\right)^* = \left(\Phi^*\right)^{-1}.$$

3. **Darstellung eines Unterraums (6 + 6)**

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Beweisen Sie: Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau dann eine Lösung in $x \in \mathbb{K}^n$, wenn für alle $y \in \mathbb{K}^m$ aus $A^T y = 0$ folgt, $b^T y = 0$.

(b) Es sei

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Verwenden Sie (a) um eine Matrix B zu konstruieren, sodass gilt

$$U = \ker(B).$$