Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 30, 2023)

Problem 1. Es seien die Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren den Operator

$$\Phi : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}^{n+1}, p \to y, \text{ mit } p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

wobei wir mit $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchsten n bezeichnen und $p(x)$ die Auswertung des Polynoms p im Punkt x beschreibt.

(a) Zeigen Sie: Sind die Punkte x_i paarweise verschieden, so ist die Abbildung Φ wohldefiniert und isomorph. (Eine Konsequenz hieraus ist die eindeutige Lösbarkeit der Polynominterpolation.)

(b) Was passiert, wenn Sie nicht fordern, dass die x_i paarweise verschieden sind? Kann Φ im Allgemeinen noch injektiv (surjektiv) sein?

Proof. (a) Injektiv: Nehme an, dass es zwei unterschiedliche Polynome p_1, p_2 gibt, mit $p_1(x_i) = p_2(x_i) \forall i = 0, \dots, n$. Dann ist $p(x) := p_1(x) - p_2(x)$ auch ein Polynom, mit $p(x_i) := 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$. Weil $\deg(p) \leq n$ist, folgt daraus, dass $\forall x, p(x) = 0, p_1(x) = p_2(x)$. Das ist ein Widerspruch.

Surjektive: Sei $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$p(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n)$$

auch ein Polynom mit $\Phi(p) = (y_0, \dots, y_n)$.

Linearität: Sei $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x], a \in \mathbb{R}$. Sei auch $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$. Es gilt dann

$$p(x_i) = p_1(x_i) + p_2(x_i), i = 0, \dots, n$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(p_1 + p_2) = \Phi(p_1) + \Phi(p_2).$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Es gilt auch, für $p(x) := ap_1(x)$, dass

$$p(x_i) = ap_1(x_i), i = 0, \dots, n,$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(ap_1) = a\Phi(p_1).$$

(b) Nein. Sei, zum Beispiel, $n = 1$, $x_0 = x_1 = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi(x) =& (0,0)^T \\ \Phi(x^2) =& (0,0)^T \end{aligned}$$

Aber die zwei Polynome sind ungleich.

□

Problem 2. (a) Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben. Wir bilden die erweiterte Matrix

$$B = (A|1_n)$$

mit 1_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn A durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Verfizieren Sie weiterhin: Werden die dafür benötigten Zeilenumformungen auf ganz B angewendet, so ergibt sich im hinteren Teil, wo zu Beginn die Einheitsmatrix stand, genau A^{-1}.

(b) Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^{-1}.

Proof. (a) Definiert $(x, y), x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$ durch $\mathbb{K}^{n+m} \ni (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Eine solche erweiterte Matrix bedeutet eine Gleichungssystem durch

$$B(x, -y) = Ax - 1_n y = 0,$$

wobei $x, y \in \mathbb{K}^n$. Für jeder $x \in \mathbb{K}^n$ gibt es $y \in \mathbb{K}^n$, so dass $B(x, -y) = 0$. Nehme an, dass wir durch elementare Zeilenumformung

$$B = (A|1_n) \to (1_n, A') := B'$$

kann. Die Gleichungssystem ist dann $x = A'y$. Dadurch können wir für jeder $y \in \mathbb{K}^n$ eine $A'y = x \in \mathbb{K}^n$ rechnen, für die gilt, dass $Ax = y$. Das heißt, dass $A' = A^{-1}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - 3R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \times -1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + 2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \times -\frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

□

Problem 3. Es seien die Vektorräume V, W über $\mathbb{K}$ gegeben mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Wir betrachten eine lineare Abbildung

$$T : V \to W, v \to T(v)$$

Seien B_V und B_W Basen von V, bzw. W. Wir nehmen an T ist nicht die konstante Nullabbildung. Beweisen Sie:

(a) Der Kern von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder trivial (d.h. nur die 0) oder hängt nur von der Wahl von B_V ab, aber nicht von B_W.

(b) Das Bild von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist entweder der ganze $\mathbb{K}^m$ oder hängt nur von der Wahl von B_W ab, aber nicht von B_v.

(c) Der Rang von ${}_{B_W}[T]_{B_V}$ ist unabhängig von B_w und B_V. aber nicht von B_W.

Proof. Nach Korollar 5.43 gilt, für $A, A' \subseteq V$ und $B, B' \subseteq W$ Basen der Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$, und $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

$$ {}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\mathrm{id}_V]_{A'}. $$

Lemma 1. *Jeder Basiswechsel für sowohl B_V als auch B_W kann als zwei Basiswechseln interpretiert werden, wobei eine Basiswechsel nur B_V verändert, und die andere nur B_W.*

Proof.

$$ {}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\mathrm{id}_V]_{A'} = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B \left({}_B[\mathrm{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\mathrm{id}_V]_{A'} \right) {}_A[\mathrm{id}_V]_A. $$

(In den Klammern gibt es zuerst ein Basiswechsel in V, dann ein Basiswechsel in W). Ein ähnliche Argument zeigt, dass wir zuerst ein Basiswechseln in W betrachten kann. □

Corollary 2. *In die Aufgabe muss man nur das Fall betrachten, in dem entweder B_V oder B_W sich verändert.*

(a) Nehme an, $\ker({}_{B_W}[T]_{B_V}) \neq 0$. Die zwei Fälle

(i) Nur B_W sich verändert.

Sei $v \in \mathbb{K}^n$, ${}_B[\Phi]_A v = 0$. Es gilt

$$ {}_{B'}[\Phi]_A = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B [\Phi]_{AA} [\mathrm{id}_V]_A v = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_{BB}[\Phi]_A v = {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B(0) = 0. $$

Sei jetzt ${}_B[\Phi]_A v \neq 0$. Solange wir zeigen, dass

$$ {}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B u \neq 0 $$

für $\mathbb{K}^m \ni u \neq 0$, sind wir fertig. Aber ${}_{B'}[\mathrm{id}_W]_B u = 0$, nur wenn $u = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n, v_i \in B' = 0$ wegen der linear Unabhängigkeit.

(ii) Nur B_V sich verändert. Es gilt dann

$\square$