Übungen zur Theoretische Quantenmechanik

Prof. Dr. Ansgar Denner, MSc. Christoph Haitz, Dr. Christopher Schwan SS 2024

Blatt 1 — Ausgabe: 15. April 2024 — Besprechung: 17. Kalenderwoche 2024

Aufgabe 1: Photoeffekt **2 Punkte**

Ein Lichtstrahl der Wellenlänge $\lambda = 253.7\,\mathrm{nm}$ (UV Licht von Quecksilber) beleuchtet eine Caesium-Photokathode. Die maximale Energie der emittierten Photoelektronen ist $3.14\,\mathrm{eV}$. Benutzt man stattdessen eine Natriumlampe, $\lambda = 589\,\mathrm{nm}$, ist die maximale Energie $0.36\,\mathrm{eV}$.

a) Berechnen Sie den Wert der Planck'schen Konstante aus den gegebenen Daten. **1 Punkt**

b) Bestimmen Sie die minimale Austrittsarbeit der Elektronen in Caesium. **0.5 Punkte**

c) Berechnen Sie die maximale Wellenlänge der Strahlung, die den photoelektrischen Effekt an Caesium bewirken kann. **0.5 Punkte**

Aufgabe 2: Comptoneffekt **4 Punkte**

Im historischen Experiment von A.H. Compton (1922) wurden Röntgenstrahlen der Wellenlänge $\lambda = 0.0708\,\mathrm{nm}$ an einem Stück Graphit gestreut. Um die beobachteten Ergebnisse zu erklären postulierte Compton, dass jedes Photon elastisch an einem einzelnen freien Elektron in der Probe streut.

a) Die Austrittsarbeit von Graphit beträgt $4.8\,\mathrm{eV}$. Ist die Annahme freier Elektronen gerechtfertigt? **1 Punkt**

b) Zeigen Sie, dass die Wellenlängen λ und λ' der einlaufenden und auslaufenden Photonen verknüpft sind durch

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_\mathrm{e} c}(1 - \cos\theta),$$

mit der Elektronmasse m_e, der Planck'schen Konstanten h, der Lichtgeschwindigkeit c und dem Winkel θ zwischen dem ein- und auslaufenden Photonen.

Hinweis: In der speziellen Relativitätstheorie ist die Energie eines Teilchens der Masse m und des Impulses $\vec{p}$ gegeben durch $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2}$. **2 Punkte**

c) Berechnen Sie die Wellenlänge λ' der um den Winkel $\theta = 90^\circ$ gestreuten Photonen. **1 Punkt**

Aufgabe 3: Bohr-Sommerfeld Quantisierung des Wasserstoffatoms **4 Punkte**

Nehmen Sie an, dass sich das Elektron im Wasserstoffatom auf einer stationären Kreisbahn um den einfach positiv geladenen Kern bewegt. Benutzen Sie die Gleichheit von Coulomb-Anziehung und Zentrifugalkraft zusammen mit der Bohr'schen Quantisierungsvorschrift,

$$\oint p \, \mathrm{d}q \stackrel{!}{=} nh; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei q und p Ort und Impuls des Elektrons sind und das Integral sich über einen Umlauf erstreckt.

bitte wenden

a) Bestimmen Sie die Radien der Bohr'schen Bahnen und geben Sie den numerischen Wert für $n = 1$ an. **2 Punkte**

b) Welche Umlauffrequenzen und Energien ergeben sich? **2 Punkte**

Aufgabe 4: Pauli-Matrizen **8 Punkte**

Die Pauli-Matrizen sind definiert als:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

a) die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren, **2 Punkte**

b) die Matrizenprodukte $\sigma_j^n \sigma_k$, und $\mathrm{Sp}(\sigma_j^n \sigma_k)$, $n \in \mathbb{N}$, **2 Punkte**

c) die Kommutatoren $[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j$, und **1 Punkt**

d) die Antikommutatoren $\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j$. **1 Punkt**

Berechnen Sie für beliebige Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ mit A_j, $B_j \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Ausdrücke

e) $(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B})$ mit $\vec{\sigma}\vec{A} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_j A_j$, **1 Punkt**

f) $\exp\{\mathrm{i}\sigma_2 \alpha/2\}$. **1 Punkt**

Hinweis zu b) und folgende:
Zeigen Sie zunächst

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbf{1} + \mathrm{i} \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \sigma_l,$$

wobei

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases},$$

$$\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & \text{für } j,k,l \text{ zyklische Permutation von } 1,2,3 \\ -1 & \text{für } j,k,l \text{ antizyklische Permutation von } 1,2,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hinweis zu f):

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Web-Seite der Vorlesung:
`https://wuecampus2.uni-wuerzburg.de/moodle/course/view.php?id=65639`

Aufgabe 1: Photoeffekt **2 Punkte**

Ein Lichtstrahl der Wellenlänge $\lambda = 253.7\,\mathrm{nm}$ (UV Licht von Quecksilber) beleuchtet eine Caesium-Photokathode. Die maximale Energie der emittierten Photoelektronen ist $3.14\,\mathrm{eV}$. Benutzt man stattdessen eine Natriumlampe, $\lambda = 589\,\mathrm{nm}$, ist die maximale Energie $0.36\,\mathrm{eV}$.

a) Berechnen Sie den Wert der Planck'schen Konstante aus den gegebenen Daten. **1 Punkt**

b) Bestimmen Sie die minimale Austrittsarbeit der Elektronen in Caesium. **0.5 Punkte**

c) Berechnen Sie die maximale Wellenlänge der Strahlung, die den photoelektrischen Effekt an Caesium bewirken kann. **0.5 Punkte**

a) $\frac{hc}{\lambda_i} - \phi = E_i, \quad i = 1, 2$

$$\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = E_1 - E_2$$

$$h = \frac{E_1 - E_2}{c}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)^{-1}$$

$$= 6.61 \times 10^{-34}\ \mathrm{J Hz^{-1}}$$

b) $\phi = \frac{hc}{\lambda_1} - E_1$

$$= 2.79 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

c) $\frac{hc}{\lambda_{max}} = \phi$

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{\phi} = 7.11 \times 10^{-7}$$

Aufgabe 2: Comptoneffekt **4 Punkte**

Im historischen Experiment von A.H. Compton (1922) wurden Röntgenstrahlen der Wellenlänge $\lambda = 0.0708\,\text{nm}$ an einem Stück Graphit gestreut. Um die beobachteten Ergebnisse zu erklären postulierte Compton, dass jedes Photon elastisch an einem einzelnen freien Elektron in der Probe streut.

a) Die Austrittsarbeit von Graphit beträgt $4.8\,\text{eV}$. Ist die Annahme freier Elektronen gerechtfertigt? **1 Punkt**

b) Zeigen Sie, dass die Wellenlängen λ und λ' der einlaufenden und auslaufenden Photonen verknüpft sind durch

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

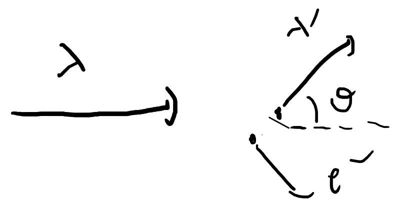
mit der Elektronmasse m_e, der Planck'schen Konstanten h, der Lichtgeschwindigkeit c und dem Winkel θ zwischen dem ein- und auslaufenden Photonen.

Hinweis: In der speziellen Relativitätstheorie ist die Energie eines Teilchens der Masse m und des Impulses $\vec{p}$ gegeben durch $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$. **2 Punkte**

c) Berechnen Sie die Wellenlänge λ' der um den Winkel $\theta = 90°$ gestreuten Photonen. **1 Punkt**

a) Nein. Da 4.8eV sehr groß ist, sind die Elektronen stark verbunden.

b)



Erhaltung von 4-Impuls

$$\begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h/\lambda \\ h/\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h/\lambda' \\ h\cos\theta/\lambda' \\ h\sin\theta/\lambda' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{m^2c^2 + (p_x^2 + p_y^2)} \\ p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_x^2 = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h\cos\theta}{\lambda'}\right)^2$$

$$p_y^2 = \frac{h^2\sin^2\theta}{\lambda'^2}$$

$$m_e c + \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} + \sqrt{m_e^2c^2 + \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h\cos\theta}{\lambda'}\right)^2 + \frac{h^2\sin^2\theta}{\lambda'^2}}$$

$$\left[m_e c + h\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)\right]^2 = m_e^2c^2 + h^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda'}\right)^2 + \frac{h^2\sin^2\theta}{\lambda'^2}$$

$$\cancel{m_e^2c^2} + h^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2m_e c h\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \cancel{m_e^2c^2} + h^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\theta}{\lambda'}\right)^2 + \frac{h^2\sin^2\theta}{\lambda'^2}$$

$$\cancel{\frac{1}{\lambda^2}} + \cancel{\frac{1}{\lambda'^2}} - \frac{2}{\lambda\lambda'} + \frac{2m_e c}{h}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \cancel{\frac{1}{\lambda^2}} + \cancel{\frac{\cos^2\theta}{\lambda'^2}} + \cancel{\frac{\sin^2\theta}{\lambda'^2}} - \frac{2\cos\theta}{\lambda\lambda'}$$

$$\frac{\cancel{2} m_e c}{h}\left(\frac{\lambda'-\lambda}{\cancel{\lambda\lambda'}}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\lambda\lambda'}}(1-\cos\theta)$$

$$\lambda'-\lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$$

c)

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}$$

$$= 0.0708\,\text{nm} + \ldots$$

$$= 7.32 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

Aufgabe 3: Bohr-Sommerfeld Quantisierung des Wasserstoffatoms **4 Punkte**

Nehmen Sie an, dass sich das Elektron im Wasserstoffatom auf einer stationären Kreisbahn um den einfach positiv geladenen Kern bewegt. Benutzen Sie die Gleichheit von Coulomb-Anziehung und Zentrifugalkraft zusammen mit der Bohr'schen Quantisierungsvorschrift,

$$\oint p\,\mathrm{d}q \overset{!}{=} nh; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei q und p Ort und Impuls des Elektrons sind und das Integral sich über einen Umlauf erstreckt.

bitte wenden

a) Bestimmen Sie die Radien der Bohr'schen Bahnen und geben Sie den numerischen Wert für $n = 1$ an. **2 Punkte**

b) Welche Umlauffrequenzen und Energien ergeben sich? **2 Punkte**

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m R}}$$

$$\oint p\,dq = mv(2\pi R)$$

$$= \cancel{2}\pi R m \sqrt{\frac{q^2}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0 m R}}$$

$$= \sqrt{\frac{q^2 \pi R m}{\varepsilon_0}} = nh$$

$$R = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{q^2 \pi m}$$

$n=1, \quad R = 5.30\times10^{-11}\,m$

b)

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = mR\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

$$= \Big[\frac{q^2}{4\pi} \; - - - ,$$

Aufgabe 4: Pauli-Matrizen **8 Punkte**

Die Pauli-Matrizen sind definiert als:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

a) die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren, **2 Punkte**

b) die Matrizenprodukte $\sigma_j^n \sigma_k$, und $\mathrm{Sp}(\sigma_j^n \sigma_k)$, $n \in \mathbb{N}$, **2 Punkte**

c) die Kommutatoren $[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j$, und **1 Punkt**

d) die Antikommutatoren $\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j$. **1 Punkt**

Berechnen Sie für beliebige Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ mit A_j, $B_j \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Ausdrücke

e) $(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B})$ mit $\vec{\sigma}\vec{A} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_j A_j$, **1 Punkt**

f) $\exp\{\mathrm{i}\sigma_2\alpha/2\}$. **1 Punkt**

a)

	EW	EV
σ_1	1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
	-1	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
σ_2	1	$\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$
	-1	$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$
σ_3	1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\sigma_j^2 = 1, \quad j = 1, 2, 3$

$\sigma_i \sigma_j = \sigma_k = \sigma_i^n \sigma_j$

$\mathrm{Tr}(\ldots) = 0$

c) $[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma_l$

d) $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\,\delta_{jk}\,I$

e) $(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) = \left(\sum_{j=1}^{3} \sigma_j A_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3} \sigma_k B_k\right)$

$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sigma_j \sigma_k A_j B_k$