Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Wachsmuth
Bastian Dittrich

Wintersemester 2023/24

5. Übung zur Vertiefung Analysis - Lösung

15. November 2023

Aufgabe 5.1. Sei $A_k := \{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{k}\} = \{f > \frac{1}{k}\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\{f > 0\} = \bigcup_{r>0} \{f > r\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f > \frac{1}{k}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Da $A \subseteq \{f > 0\}$ ist, folgt mit der Monotonie und σ-Subadditivität von μ

$$0 < \mu(A) \leq \mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Also muss ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit $\mu(A_{k_0}) > 0$. Mit $\varepsilon := \frac{1}{k_0}$ und $B := A_{k_0}$ folgt dann aus der Messbarkeit von f die Behauptung.

Aufgabe 5.2. Definiere die Funktionenfolge

$$g_n : X \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) := \begin{cases} f_n(x) & \text{für } x \in X \setminus N, \\ 0 & \text{für } x \in N. \end{cases}$$

Insbesondere gilt also $g_n(x) = f_n(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Da (f_n) auf $X \setminus N$ punktweise gegen f konvergiert, konvergiert die Funktionenfolge (g_n) punktweise gegen die Funktion

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in X \setminus N, \\ 0 & \text{für } x \in N. \end{cases}$$

Wegen $g_n = f_n \cdot \chi_{N^c}$ ist g_n nach Beispiel 2.14 und Satz 2.23 als Produkt messbarer Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ wieder messbar. Nach Folgerung 2.25 ist dann auch g messbar.
Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\{f < \alpha\} = (\{f < \alpha\} \cap N) \cup (\{f < \alpha\} \cap N^c) = (\{f < \alpha\} \cap N) \cup (\{g < \alpha\} \cap N^c),$$

da $f(x) = g(x)$ für alle $x \in N^c$. Aus der Vollständigkeit des Maßraums folgt $\{f < \alpha\} \cap N \in \mathcal{A}$. Außerdem ist $\{g < \alpha\} \cap N^c \in \mathcal{A}$, da g messbar ist. Dies zeigt $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ und somit die Messbarkeit von f.

Aufgabe 5.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar. Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dann $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$. Außerdem gilt $\{f \leq \alpha\} \subseteq \{f \leq \beta\}$ für alle $\alpha \leq \beta$. Also muss $\{f \leq \alpha\} \in \{\emptyset, A, \mathbb{R}\}$ oder $\{f \leq \alpha\} \in \{\emptyset, A^c, \mathbb{R}\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten, denn A und A^c sind immer disjunkt. Wir betrachten den ersten Fall: Es folgt sofort, dass f maximal zwei verschiedene Werte annehmen kann, denn angenommen es existieren $t_1 < t_2 < t_3$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = t_1 < f(y) = t_2 < f(z) = t_3$. Dann folgt

$$\emptyset \neq \{f \leq t_1\} \subsetneq \{f \leq t_2\} \subsetneq \{f \leq t_3\},$$

was wegen $\{f \leq \alpha\} \in \{\emptyset, A, \mathbb{R}\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ nicht möglich ist. Dies folgt analog auch für den zweiten Fall.
Also existieren $t_1 < t_2$ und eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $f = t_1\chi_B + t_2\chi_{B^c}$. Aus der Messbarkeit von f folgt dann sofort $B = \{f \leq t_1\} \in \mathcal{A}$.
Gleichzeitig ist jede Funktion $f = t_1\chi_B + t_2\chi_{B^c}$ mit $t_1 < t_2$ und $B \in \mathcal{A}$ offenbar messbar, denn es gilt

$$\{f \leq \alpha\} = \left(\begin{cases} \emptyset, & \alpha < t_1, \\ B, & t_1 \leq \alpha < t_2, \\ \mathbb{R}, & t_2 \leq \alpha \end{cases}\right) \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 5.4. (a) Nach Präsenzaufgabe 3.2 ist f stetig und monoton wachsend mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Somit gilt $0 \leq g(x) \leq 1 + f(1) = 2$ für ale $x \in [0,1]$ und g ist wohldefiniert. Außerdem ist g stetig und es gilt $g(0) = f(0) = 0$ und $g(1) = 1 + f(1) = 2$. Insbesondere ist g dann auch surjektiv.

g ist injektiv: Seien $x < y \in [0,1]$, dann folgt $g(x) = x + f(x) < y + f(y) = g(y)$ aufgrund der Monotonie von f. Also ist g streng monoton steigend, also injektiv.

Wegen der Surjektivität ist g also sogar bijektiv und somit die Umkehrfunktion $g^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ wohldefiniert.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{g^{-1} \leq \alpha\} = \emptyset$ für $\alpha < 0$, $\{g^{-1} \leq \alpha\} = [0,2]$ für $\alpha \geq 1$ und $\{g^{-1} \leq \alpha\} = \{0\}$ für $\alpha = 0$. Sei also nun $0 < \alpha < 1$. Dann ist

$$\{g^{-1} \leq \alpha\} = \{y \in [0,2] \mid g^{-1}(y) \leq \alpha\} = \{g(x) \in [0,2] \mid 0 \leq x \leq \alpha\} = g([0,\alpha]) = [0, g(\alpha)] \in \mathcal{B}^1,$$

da g stetig und streng monoton steigend ist. Dies zeigt die Messbarkeit von g^{-1}.

(b) Nach Präsenzaufgabe 3.1 ist $C \subseteq [0,1]$ kompakt, also eine Borel-Menge, mit $\lambda_1(C) = 0$. Wegen der Stetigkeit von g ist dann auch $g(C)$ kompakt und somit eine Borel-Menge.

Es gilt

$$[0,1] \setminus C = [0,1] \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} ([0,1] \setminus C_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_{n-1} \setminus C_n).$$

Da g bijektiv ist, folgt also

$$g([0,1] \setminus C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(C_{n-1} \setminus C_n).$$

Für jedes $x \in C_{n-1} \setminus C_n$ gilt $g(x) = x + f(x) = x + \frac{1}{2^n}$ nach Präsenzaufgabe 3.2 und somit

$$g(C_{n-1} \setminus C_n) = (C_{n-1} \setminus C_n) + \frac{1}{2^n}.$$

Da die Mengen $C_{n-1} \setminus C_n$ disjunkt sind folgt

$$\lambda_1(g([0,1] \setminus C)) = \lambda_1 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} g(C_{n-1} \setminus C_n) \right) \leq \lambda_1 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (C_{n-1} \setminus C_n) \right) \leq \lambda_1([0,1]) = 1.$$

Dies zeigt $\lambda_1(g(C)) \geq 1$.

Nach Lemma 1.83 existiert dann eine Menge $B \subseteq g(C)$ mit $B \notin \mathcal{L}(1)$. Sei nun $N := g^{-1}(B) \subseteq C$. Angenommen $N \in \mathcal{B}^1$, dann folgt aus der Messbarkeit von g^{-1}, dass

$$B = g(N) = (g^{-1})^{-1}(N) \in \mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{L}(1),$$

ein Widerspruch zur Wahl von B.

Also existiert zur Nullmenge C die Teilmenge $N \subseteq C$ mit $N \notin \mathcal{B}^1$. Dies zeigt, dass der Borel-Raum nicht vollständig ist.