7. Übung zur Einführung in die Algebra

Abgabe online in WueCampus bis zum 11.12.2023, 12 Uhr

Aufgabe 7.1 (2+2 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Automorphismen von G zusammen mit der Verkettung von Funktionen als Verknüpfung eine Gruppe bildet.
Man nennt diese Gruppe die *Automorphismengruppe von G* und schreibt $\mathrm{Aut}(G)$ für sie.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ durch

$$k_g : G \to G, \qquad x \mapsto gxg^{-1}$$

ein Automorphismus von G gegeben ist.
Dies zeigt, dass die Konjugation mit einem beliebigen Gruppenelement g einen Automorphismus von G liefert.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Unter dem *Zentrum* $Z(G)$ *einer Gruppe* G versteht man die Menge aller Elemente von G, die mit allen Elementen von G vertauschen, also die Menge $Z(G) = \{g \in G \mid \text{es gilt } gxg^{-1} = x \text{ für alle } x \in G\}$.
Wir definieren die Menge der *inneren Automorphismen von G* durch

$$\mathrm{Inn}(G) := \{k_g \mid g \in G\} \quad \text{mit } k_g \text{ wie in 7.1 (b).}$$

Zeigen Sie, dass $Z(G) \trianglelefteq G$, $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ und $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$ gelten.

Aufgabe 7.3 (2+2 Punkte)

(a) Nach Beispiel 2.71 operiert S_n auf sich selbst per Konjugation. Beschreiben Sie die Bahnen dieser Operation.

(b) Wir nennen eine Transposition der S_3 *schön*, wenn sie von der Form $(1x)$ mit $x \in \{2, 3\}$ ist.
Sei das Neutrale von S_3 als Produkt schöner Transpositionen dargestellt. Kommen in diesem Produkt die einzelnen schönen Transpositionen dann stets in gerader Anzahl vor?

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)

Die Gruppe G operiere auf der Menge M. Weiter sei U eine Untergruppe von G, so dass die auf U eingeschränkte Operation transitiv auf M sei.
Zeigen Sie, dass dann $G = U \cdot G_m$ für alle $m \in M$ gilt.

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.