



Übungsblatt 7

Klausurübung 7.1

Es sei X eine Zufallsvariable, die diskret uniform verteilt ist auf den ganzen Zahlen $\{-n, \dots, n\}$ zwischen $-n$ und n , für ein $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie dass $X \stackrel{d}{=} -X$, also dass X und $-X$ dieselbe Verteilung haben. Was ist $\mathbb{P}(X = -X)$?
- (b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.
- (c) Leiten Sie die Verteilung von X^2 her.
- (d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X^2]$.

Aufgabe 7.2

Es sei $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Quantilsfunktion. Der Abstand $F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/4)$ heißt Interquartilsabstand der zugehörigen Verteilung.

- (a) Was ist der minimal mögliche Interquartilsabstand einer Verteilung? Geben Sie ein entsprechendes Beispiel an.
- (b) Leiten Sie den Interquartilsabstand einer uniformen Verteilung $\mathcal{U}(a, b)$ auf (a, b) her.
- (c) Leiten Sie den Interquartilsabstand einer Exponentialverteilung $\text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ her.
- (d) Leiten Sie den Interquartilsabstand einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ her. Sie können benutzen, dass $\Phi(0,675) \approx 3/4$ ist für die Verteilungsfunktion Φ von $\mathcal{N}(0, 1)$.
- (e) Welche Werte kann $\mathbb{P}(F^{-1}(1/4) \leq X \leq F^{-1}(3/4))$ minimal und maximal annehmen, falls X mit Verteilungsfunktion F verteilt ist. Geben Sie entsprechende Beispiele an.
- (f) Bei welchen der drei Verteilungen aus (b), (c) und (d) liegt der Median in der Mitte des Intervalls $[F^{-1}(1/4), F^{-1}(3/4)]$?

Übung 7.3 (keine Abgabe)

Lotto 6 aus 49 ist eine Lotterie, bei der ein Spieler auf sechs verschiedene Zahlen aus 1 bis 49 tippen kann. Zusätzlich wird eine Superzahl zwischen 0 und 9 über die Spielscheinnummer bestimmt. Bei einem Tipp gehen wir davon aus, dass wir die sechs Zahlen und die Superzahl frei wählen können. Bei der Ziehung werden dann sechs unterschiedliche Gewinnzahlen und eine Superzahl zufällig ausgelost. Je nachdem, wie viele Zahlen richtig getippt wurden, werden verschiedene Gewinne ausgegeben. Die Gewinne erhöhen sich, wenn die richtige Superzahl zusätzlich gezogen wurde. Die aktuellen Gewinne im Lotto 6 aus 49 mit Superzahl sind in nachfolgender Tabelle aufgeführt.

LOTTO 6aus49		
	Gewinnklasse	Quote
1	(6 Richtige + Superzahl)	6.134.435,40 € *
2	(6 Richtige)	1.150.048,60 €
3	(5 Richtige + Superzahl)	10.775,20 €
4	(5 Richtige)	4.993,20 €
5	(4 Richtige + Superzahl)	192,60 €
6	(4 Richtige)	57,20 €
7	(3 Richtige + Superzahl)	20,00 €
8	(3 Richtige)	11,80 €
9	(2 Richtige + Superzahl)	6,00 €

Einen Tipp zu spielen kostet 1,70 Euro.

- (a) Beschreiben Sie den Gewinn eines kostenlosen Tipps als Zufallsvariable und leiten Sie deren Verteilung her.
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns.
- (c) Für welchen Preis eines Tipps würden Sie spielen? Begründen Sie Ihre Antwort sinnvoll.

Aufgabe 7.4 (keine Abgabe)

Betrachten Sie ein „Capture-Recapture“-Experiment zur Schätzung einer Populationsgröße: Im ersten Schritt werden R Individuen gefangen, markiert und wieder freigelassen. Später werden n Individuen eingefangen und darin $k \leq n$ markierte Individuen gezählt. In dem Modell $\text{Hyp}(\cdot, n, R, N)$ ist die Gesamtpopulationsgröße N unbekannt und soll geschätzt werden.

- (a) Erläutern Sie heuristisch den Ansatz $k/n \approx R/N$.
- (b) Eine Methode zur Schätzung des unbekannten Parameters N ist es, $\mathbb{E}[X] = f(N)$ als Funktion in N aufzufassen, für den unbekannten Erwartungswert die Beobachtung $X(\omega)$ einzusetzen und nach N aufzulösen (Momentenschätzer). Bestimmen Sie einen solchen Momentenschätzer für N .
- (c) In einem See wurden 1800 Fische markiert. In einem späteren Fischfang mit 6392 Individuen befinden sich 141 markierte. Schätzen Sie die Gesamtpopulationsgröße.

Hinweis: Sie können $\mathbb{E}[X] = n \cdot R/N$, für $X \sim \text{Hyp}(\cdot, n, R, N)$, aus der Vorlesung verwenden.

Bearbeitung bis Donnerstag, den 05.12.2024.