# Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 10

Jun Wei Tan* and Jonas Hack

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: January 31, 2024)

**Problem 1.** Begründen Sie, warum die Determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung im Punkt $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche besondere Form nimmt $(D\det)(\mathrm{Id})$ an?

*Proof.* Per Definition ist

$$\det(X) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{1\sigma(1)} X_{2\sigma(2)} \dots X_{n\sigma(n)}.$$

Da dies eine Summe von Produkte der Komponenten sind, ist det unendlich oft differenzierbar.

Es gilt $\det' : \mathbb{R}^{n\times n} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R})$. Wir betrachten eine parameterabhängige Matrix $A(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det A(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}(t) \dots A_{n\sigma(n)}(t) \\
=& \sum_{\sigma\in S_n} \left[ (A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \sum_{j=1}^{n} \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right] \\
=& \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n} \left[ (A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}) \frac{A'_{j\sigma(j)}(t)}{A_{j\sigma(j)}} \right]
\end{aligned}$$

Für festes $j$ kann dieser Ausdruck so vorgestellt werden: Wir setzten in der $j$-te Zeile $A'$ statt $A$, also

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{A'_{j1}(t)} & \cancel{A'_{j2}(t)} & \cancel{\dots} & \cancel{A'_{jn}(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

und berechnen deren Determinante. Wir führen eine Laplaceentwicklung um die $j$-te Zeile durch und erhalten, mit $A^\#$ die adjugierte Matrix

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det A(t) =& \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A'_{jk}(t)A^\#_{kj} \\ =& \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A^\#_{kj}A'_{jk}(t) \\ =& \sum_{k=1}^{n}(A^\# A')_{kk} \\ =& \operatorname{tr}(A^\# A') \end{aligned}$$

Also die Ableitung $\det'$ im Punkt $A$ ist die Abbildung, die $B$ nach $\operatorname{tr}(A^\# B)$ abbildet.

Im Punkt $I$: Es gilt $I^\# = I$, also $D\det(I) = \operatorname{tr}$. □

**Problem 2.** Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so kann die zweite Ableitung $D^2 f$ in jedem Punkt $x \in U$ durch eine blineare Abbildung $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ darstellen. Für eine gegebene Basis auf dem $\mathbb{R}^n$-wir wählen die kanonische Basis hier - lassen sich bilineare Abbildungen durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ darstellen, die sog. Hesse-Matrix $Hf$ mit

$$Hf(x,y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die partiellen Ableitungen nach dem Satz von Schwarz vertauschen, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch.

Es sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f$ in $(0,0)$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt genau dann besitzt, wenn die Hesse-Matrix von $f$ (in (0,0)) positiv semi- negativ semi- bzw. indefinit ist.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für allgemeine Funktionen mit positiv (bzw. negativ) semidefiniter Hesse-Matrix im kritischen Punkt kein lokales Minimum (bzw. Maximum) vorliegen muss.

*Proof.* (a) Offensichtlich ist $A$ die Hesse-Matrix und $f(0) = 0$. Wir drücken $f(x)$ als $\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle$ aus.

Dann per Definition: Falls $A$ positiv semidefinit ist, ist $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle \geq 0$ für alle $x$, also $f$ besitzt ein Minimum in $(0,0)$. Die Umkehrrichtung gilt auch per Definition. Sei $U$ eine Umgebung. Für $x \in U$ ist $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ per Definition eines Minimums.

Das gleiche Argument (per Definition) gilt für $f$ ein Maximum in $(0,0)$.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ besitzt in 0 Ableitung 0. 0 ist sowohl positiv als auch negativ definit. Die Funktion besitzt aber weder ein Maximum noch ein Minimum in 0.

$\square$

**Problem 3.** Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $F$.

(b) In welchem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ existiert die Inverse von $JF(p)$?

(c) Finden Sie eine lokale inverse Abbildung $F^{-1}$ von $F$ in einer Umgebung von $p = (1,0) = F(1,0)$ und berechnen Sie die Ableitung von $F^{-1}$ in $p$.

(d) Ist $F$ auf dem ganzen Gebiet $\{p \in \mathbb{R}^2 | JF(p) \text{ invertierbar}\}$ global invertierbar?

*Proof.* (a)

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

(b) $\det(JF) = 4x^2 + 4y^2$. Dies ist genau dann Null, wenn $x = y = 0$. Sonst ist $JF$ invertierbar.

(c) Wir lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 =& \xi \\ 2xy =& \zeta \\ y =& \frac{\zeta}{2x} \\ x^2 - \left(\frac{\zeta}{2x}\right)^2 =& \xi \\ x^4 - \frac{\zeta^2}{4} =& \xi x^2 \\ x^4 - \xi x^2 - \frac{\zeta^2}{4} =& 0 \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left[\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}\right]$$

Beim Punkt $(x, y) = (1, 0)$ ist $(\xi, \zeta) = (1, 0)$. In einer genug kleinen Umgebung nehmen wir daher die positive Nullstelle und danach positive Würzel.

$$x = \left[\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{2}\right]^{1/2}.$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{\zeta}{2}\left[\frac{2}{\xi + \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}\right]^{1/2}.$$

Dies ist die Umkehrabbildung.

(d) Nein, weil sie nicht injektiv ist. Es gilt $F(1, 1) = (0, 2)$ und $F(-1, -1) = (0, 2)$, aber $(1, 1) \neq (-1, -1)$. □

**Problem 4.** Mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen wir die Glattheit der Inversen-Abbildung $\mathrm{inf} : GL(n) \to GL(n)$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Begründen Sie, dass die Abbildung $A \cdot B \to AB$ auf $\mathbb{R}^{(n \times n)^2}$ unendlich oft differenzierbar ist.

(b) Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um $\inf \in \mathcal{C}^\infty(GL(n), GL(n))$ zu beweisen.

*Hinweis: Betrachten Sie* $A \cdot B = \mathrm{Id}$

*Proof.* (a) Das Produkt $AB$ besitzt Komponente $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$. Dann sind alle Komponenten von $AB$ nach alle Komponenten von $A$ und $B$ unendlich stetig differenzierbar, da die lineare Kombinationen von Produkten von $AB$ sind.

(b) Wir betrachten $g : \mathbb{R}^{(n \times n)^2} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $g(A, B) \to AB - I$. Falls die Ableitung $(D_2 g)(A, B)$ invertierbar ist, ist die Abbildung $\mathrm{inv} : A \mapsto B$ glatt.

Da $I$ konstant ist, leiten wir also das Produkt $AB$ nach $B$ ab. Dies ist aber bekanntermaßen glatt, also nach dem Satz von inverse Funktionen ist inv glatt. $\square$