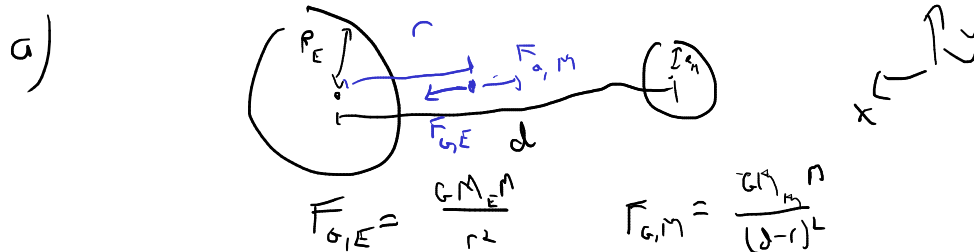


Aufgabe 4.4: Start zum Mond (5 Punkte)

Eine Rakete (Masse m , ohne Eigenantrieb) befindet sich auf dem direkten Weg von der Erde (Radius R_E , Masse M_E) zum Mond (Radius $R_M = \frac{1}{4} R_E$, Masse $M_M = \frac{1}{81} M_E$). Für den Abstand der Mittelpunkte von Erde und Mond gilt näherungsweise $d = 60 R_E$. Vernachlässigen Sie jegliche Rotationsbewegungen und Luftwiderstand.

- (2 P) a) Bestimmen Sie die Gesamtkraft auf die Rakete als Funktion des Abstands r zum Erdmittelpunkt.
- (2 P) b) Bestimmen Sie den Abstand r_0 zur Erde, für den die Rakete auf Ihrem Weg kräftefrei ist.
- (1 P) c) Mit welcher Mindestgeschwindigkeit müsste die Rakete von der Erdoberfläche senkrecht nach oben abgeschossen werden, damit sie auf den Mond trifft?



x-Komponent der Gesamtkraft = $F_x = \frac{G M_E m}{r^2} - \frac{G M_M m}{(d-r)^2}$

$$= G m \left[\frac{M_E}{r^2} - \frac{M_M}{(d-r)^2} \right]$$

$$= G M_E m \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{81 (d-r)^2} \right]$$

b)

$$G M_E m \left[\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{81 (d-r_0)^2} \right] = 0$$

$$\frac{1}{r_0^2} = \frac{1}{81 (d-r_0)^2}$$

$$d^2 + r_0^2 - 2dr_0 = \frac{r_0^2}{81}$$

$$\frac{80}{81} r_0^2 - 2dr_0 + d^2 = 0$$

Es gilt:

$$r_0 = \frac{2d \pm \sqrt{4d^2 - 4d^2 \frac{80}{81}}}{\frac{160}{81}}$$

$$= \frac{2d \pm 2d \sqrt{1 - \frac{80}{81}}}{\frac{160}{81}}$$

$$= \frac{2d}{\frac{160}{81}} \left[1 \pm \frac{1}{9} \right]$$

$$= \frac{81d}{80} \left[1 \pm \frac{1}{9} \right]$$

Die tre Lösung ist aus physikalische Gründen falsch.

Wir haben schon angenommen, dass $0 \leq r \leq d$
sonst werden die Kräfte nicht auf unterschiedlichen
Richtungen verlaufen. plus

$$r = \frac{81d}{80} \left(\frac{8}{9} \right) = \frac{9}{10} d$$

$$= \frac{9}{10} (60 R_E) = 54 R_E$$

c) Erhaltung von Energie: $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_E m}{R_E} - \frac{G M_m m}{(d - R_E)} = - \frac{G M_E m}{(d - R_m)} - \frac{G M_m m}{R_m}$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{M_E}{R_E} + \frac{M_m}{(d - R_E)} - \frac{M_E}{(d - R_m)} - \frac{M_m}{R_m}$$

$$= \frac{M_E}{R_E} + \frac{M_E / 81}{54 R_E} - \frac{M_E}{59.75 R_E} - \frac{M_E / 81}{R_E / 4}$$

$$= \frac{M_E}{R_E} \frac{1066400}{1142181}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 133800}{1142181}} \sqrt{\frac{G M_E}{R_E}}$$