Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 11

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: March 27, 2024)

Aufgabe 1. Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^α sowie $P \subseteq \mathbb{R}^m$ eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Zeigen Sie:

(a) $M \times P \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(b) Gilt $M \cap \overline{N} = \varnothing = \overline{M} \cap N$, so ist $M \cup N$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(c) Die Mengen

$$\begin{aligned} A :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (-1,1), y = x^2\}, \\ B :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (-1,0) \cup (0,1), y = -|x|\}, \end{aligned}$$

sind jeweils 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^1.

(d) Die Aussage aus (b) ist unter der schwächeren Voraussetzung $M \cap N = \varnothing$ im Allgemeinen nicht richtig.

Beweis. (a) Sei $(m,p) \in M \times P$. Per Definition gibt es offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, f und g α-mal differenzierbare Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, $g : V \to \mathbb{R}^{m-l}$, so dass

$$\begin{aligned} & m \in U,\ p \in V \\ & M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\} \\ & \mathrm{Rang}(f'(m)) = n-k \\ & P \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\} \\ & \mathrm{Rang}(g'(p)) = m-l \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Dann ist $U \times V \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ offen Sei außerdem $h : U \times V \to \mathbb{R}^{n+m-(n+k)}$ definiert durch $h(x,y) = (f(x), g(y))$, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$.

Dann ist $h(x,y) = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ und $g(y) = 0$. Außerdem ist

$$h' = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}.$$

Da h' eine Blockmatrix ist, ist $\text{Rang}(h'(m,p)) = \text{Rang}(f'(m)) + \text{Rang}(g'(p))$. (Man kann das beweisen, indem man das Gauss-Algorithismus durchführt, bis f' und g' in Zeilenstufenform sind.)

Weil f und g α-mal stetig differenzierbar sind, ist h auch α-mal stetig differenzierbar

Es gilt dann

$$\begin{aligned} (U \times V) \cap (M \times P) &= \{x \in U \times V : h(x) = 0\} \\ \text{Rang}(h'(m,p)) &= n + m - (k + l) \end{aligned}$$

(b) Sei $x \in M \cup N$, also $x \in M$ oder $x \in N$. OBdA betrachten wir den Fall, $x \in M$. Per Definition gibt es $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ α-mal stetig differenzierbar, so dass

$$\begin{aligned} M \cap U =& \{y \in U : f(y) = 0\} \\ \text{Rang}(f'(x)) =& n - k \end{aligned}$$

Da $M \cap \overline{N} = \varnothing$, ist $M \subseteq \overline{N}^c$. Per Definition ist $\overline{N}^c$ offen. Seien $V := U \cap \overline{N}^c$ und $g := f|_V$. Weil f α-mal stetig differenzierbar ist, ist g auch α-mal stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} (M \cup N) \cap V =& M \cap V = \{y \in V : g(y) = 0\} \\ \text{Rang}(g'(x)) =& n - k \end{aligned}$$

Ähnlich gilt für $x \in N$. Dann ist $M \cup N$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - y$. Sei $p \in A$ und U offen, so dass $p \in U$. Per Definition ist

$$A \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Außerdem ist f mindestens einmal stetig differenzierbar, mit Ableitung $f' = (2x, -1)$. Da f' eine 1×2-Matrix ist, ist f vom höchstens Rang 1. Weil die zweite Komponente konstant $-1 \neq 0$ ist, ist f nie von Rang 0. Dann ist f immer vom Rang 1, also A ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1.

Sei jetzt $p \in B$. Wir betrachten den Fall, $\pi_1(p) > 0$, wobei $\pi_1((x,y)) = x$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f((x,y)) = x + y$ und U offen mit $p \in U$. OBdA ist $\pi_1(U) \subseteq (0, \infty)$, sonst ist $(0, \infty) \times \mathbb{R} \cap U$ offen mit gleiche Eigenschaften.

Dann ist

$$\begin{aligned} U \cap B =& \{x \in U : f(x) = 0\} \\ f'(p) =& (1,1) \\ \mathrm{Rang}(f'(p)) =& 1 \end{aligned}$$

und analog für p mit $\pi_1(p) < 0$. Weil $x \neq 0$, ist $\pi_1(p)$ nie 0. Also wir sind fertig, und B ist eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1.

(d) Wir betrachten $A \cap B$. Es gilt $A \cap B = \varnothing$, weil $x^2 = |x|$ nur wenn $|x| = 0$ oder $|x| = 1$, aber die beide Fälle sind ausgeschlossen.

Es gilt $(0,0) \in A \cup B$, weil $(0,0) \in A$. Wir fahren per Widerspruch fort. Wir nehmen an, dass $M \cup N$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1 ist.

Dann gibt es eine offene Menge U mit $(0,0) \in U$ sowie eine stetig differenzierbare Funkton $f : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$(A \cup B) \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$$

und $\mathrm{Rang}(f'((0,0))) = 1$. Wir zeigen, dass der Rang eigentlich 0 ist. Wir wissen, entlang die Kurve $y = x^2$ ist $f = 0$. Sei $\gamma(t) = (t, t^2)^T$. Weil $f \circ \gamma = 0$ in eine offene Umgebung um 0, gilt

$$0 = D(f \circ \gamma)$$

$$
\begin{aligned}
&= (Df)(\gamma') \\
D(f \circ \gamma)(0) &= (Df)(\gamma'(0)) \\
&= Df((1,0)^T) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ähnlich gilt, weil f entlang $y = -|x|$ ist, definieren wir die Kurve $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, -t)$ für ein $a > 0$. Daraus folgt, weil $\gamma'(t) = (1, -1)$.

$$
\begin{aligned}
D(f \circ \gamma)(0) &= (Df)(\gamma'(0)) \\
&= (Df)((1,-1)^T)
\end{aligned}
$$

also sowohl $(1,0)^T$ als auch $(1,-1)$ liegen in $\ker Df(0)$. Da diese linear unabhängig sind, ist $\ker D = 2$ und wegen des Rangsätzes ist $\operatorname{Rang}(f'((0,0))) = 0$, ein Widerspruch.💀 🎉

Aufgabe 2. Sei $a < b, \alpha \in \mathbb{N}$ und $r : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei α-mal stetig differenzierbar mit $r(z) > 0$ für alle $z \in (a,b)$. Definiere

$$
R := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \in (a,b), \sqrt{x^2 + y^2} = r(z) \right\}.
$$

Dann ist R durch die Abbildung

$$
\varphi : (a,b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(z, \alpha) := \begin{pmatrix} r(z)\cos\alpha \\ r(z)\sin\alpha \\ z \end{pmatrix}
$$

parametrisiert.

(a) Zeigen Sie, dass R eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ist.

(b) Zeigen Sie, dass R eine λ_3-Nullmenge ist.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$
I := \int_{(a,b)\times(0,2\pi)} \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi')}\, \mathrm{d}\lambda_2(z, \alpha)
$$

in Abhängigkeit der Funktion r.

(d) Bestimmen Sie das Integral I in (c) für den Fall $r(z) := \cosh(z)$ und $(a,b) := (0,1)$.

Beweis. (a) Sei $p \in R$.

Lemma

Lemma 1. *Ist $p \in \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$, so ist $p \notin R$.*

Beweis. Es gälte dann $\sqrt{x^2+y^2} = 0$, also $0 > r(z)$, was unmöglich ist, weil $r(z) > 0$ per Definition. 🎉

Sei jetzt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f((x,y,z)) = \sqrt{x^2+y^2} - r(z)$. Sei jetzt $p \in R$ und $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $p \in U$. Per Definition ist

$$R \cap U = \{q \in U : f(q) = 0\}. \tag{1}$$

Außerdem ist f stetig differenzierbar mit

$$f' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, r'(z) \right),$$

solange $(x,y,z) \notin \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$. Dies ist aber kein Problem wegen des Lemmas. Als Verkettung von elementäre Funktionen sind die ersten zwei Komponenten unendlich mal stetig differenzierbar. $r(z)$ ist bekanntermaßen α-mal stetig differenzierbar.

Wenn f' Null ist, muss $x = y = 0$ gelten, da $(x^2+y^2)^{-1/2} > 0$. Dies ist noch einmal wegen des Lemmas ausgeschlossen, also f' ist immer vom Rang 1.

Zusammen mit Eq. (1) ist R eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(b) R ist messbar, weil R abgeschlossen (und daher eine Borelmenge) ist.

Da $(\mathbb{R}^3, \lambda_3, \mathcal{L}(3))$ σ-endlich ist (oder weil es in der Vorlesung bewiesen wurde), schreiben wir das Maß als Integral.

$$\lambda_3(R) = \int_a^b \lambda_2(R_z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Jetzt betrachten wir R_z und schreiben das Maß aus dem gleichen Grund noch einmal als Integral.

$$R_z = \{(x,y) | \sqrt{x^2+y^2} = r(z)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Weil $\sqrt{\cdot}$ monoton wachsend ist, muss $|x| < r(z)$ gelten, sonst kann die Bedingung nicht erfüllt werden. Sei jetzt x fest. Es gilt $y^2 = r(z)^2 - x^2$, oder

$$y = \pm\sqrt{r(z)^2 - x^2}.$$

also $(R_z)_x = \{(x, \sqrt{r(z)^2 - x^2}, z), (x, -\sqrt{r(z)^2 - x^2}, z)\}$. Als endliche Menge ist $\lambda_1((R_z)_x) = 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(R) &= \int_a^b \lambda_2(R_z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_a^b \int_{-r(z)}^{r(z)} \lambda_1((R_z)_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&= \int_a^b \int_{-r(z)}^{r(z)} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) Als offene Menge ist $(a,b) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine messbare Menge. Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \begin{pmatrix} r'(z)\cos\alpha & -r(z)\sin\alpha \\ r'(z)\sin\alpha & r(z)\cos\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\varphi'^T &= \begin{pmatrix} r'(z)\cos\alpha & r'(z)\sin\alpha & 1 \\ -r(z)\sin\alpha & r(z)\cos\alpha & 0 \end{pmatrix} \\
\varphi'^T\varphi &= \begin{pmatrix} r'(z)^2\cos^2\alpha + r'(z)^2\sin^2\alpha + 1 & 0 \\ 0 & r(z)^2\sin^2\alpha + r(z)^2\cos^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r'(z)^2 + 1 & 0 \\ 0 & r(z)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\det(\varphi'^T\varphi) = (r'(z)^2+1)(r(z)^2)$. Weil $\mathbb{R}^2$ σ-endlich ist, dürfen wir den Satz von Fubini verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{(a,b)\times(0,2\pi)} \sqrt{\det(\varphi'^T\varphi)}\,\mathrm{d}\lambda_2(z,\alpha) \\
&= \int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(\varphi'^T\varphi)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z \\
&= \int_a^b \int_0^{2\pi} r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_a^b r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

(d) In diesem Fall ist $r(z) := \cosh z$ und $(a, b) = (0, 1)$. Das Integral ist

$$
\begin{aligned}
&2\pi \int_a^b r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2}\,\mathrm{d}z \\
=&2\pi \int_0^1 \cosh z \sqrt{1 + \sinh^2 z}\,\mathrm{d}z \\
=&2\pi \int_0^1 \cosh^2 z\,\mathrm{d}z \\
=&2\pi \int_0^1 \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 \mathrm{d}z \\
=&\frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^{2z} + 2 + e^{-2z})\,\mathrm{d}z \\
=&\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}e^{2z} - \frac{1}{2}e^{-2z} + 2z\right]_0^1 \\
=&\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}e^{-2} + 2\right] \\
=&\frac{\pi}{4} \left[e^2 - e^{-2} + 4\right].
\end{aligned}
$$