Prof. Dr. Thorsten Ohl
Manuel Kunkel, Christopher Schwan

14. Übung zur Klassischen Mechanik
29. Januar 2024

Kanonische Transformationen / Wiederholung

14.1 Kanonische Transformation

Die Hamiltonfunktion eines eindimensionalen mechanischen Systems laute

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2q^4 + \frac{1}{2q^2}. \tag{1}$$

Die Bewegung soll mit Hilfe einer kanonischen Transformation $(q,p) \mapsto (Q,P)$ des Phasenraums $T^*Q = T^*\mathbf{R} \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ bestimmt werden.

1. Bestimmen Sie die Bedingungen an die konstanten Parameter A, $\alpha \neq 0$, β und γ, unter denen die Transformation

$$q = P^\alpha\,, \quad p = AQ^\beta P^\gamma \tag{2}$$

kanonisch ist, indem Sie fordern, daß die kanonischen Gleichungen auch für die neuen Koordinaten Q und P gelten.

2. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil 1, indem Sie die Poissonklammern nutzen, um die Bedingungen an die Parameter zu finden, unter denen die Transformation in Gl. (2) kanonisch ist.

3. Bestimmen Sie den in Teilaufgabe 1 verbliebenen freien Parameter so, daß $H'(Q,P)$ eine wohlbekannte Form annimmt und lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für Q und P. Ermitteln Sie anhand der Lösung für die Anfangswerte $P(0) = P_0$ und $Q(0) = Q_0$ die gesuchte Zeitabhängigkeit der ursprünglichen Variablen p und q.

Die Aufgaben 14.2-14.6 auf diesem Übungszettel sollen Ihnen Gelegenheit geben, noch einmal klausurrelevante Themen zu rekapitulieren und Sie auf den zu erwartenden Schwierigkeitsgrad vorzubereiten. Die meisten der Aufgaben sind aber umfangreicher als in der Klausur, um Ihnen mehr Übung zu ermöglichen.

14.2 Verständnisfragen

Begründen Sie Ihre Antworten *kurz*.

1. Welche der folgenden Kraftfelder $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ sind konservativ?

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla}(x_1 x_2 x_3) \tag{3a}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = (x_1^2, b\, x_3, a\, x_2) \qquad \text{mit } a, b \in \mathbf{R} \tag{3b}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = (x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2) \tag{3c}$$

2. Haben die folgenden Potentiale stabile oder instabile Gleichgewichtslagen? Wenn ja, welche?

$$V(\vec{x}) = e^{-\vec{x}^2} \tag{4a}$$

$$V(x) = x^2(5-x)^3 \tag{4b}$$

$$V(x) = \sin(x) \tag{4c}$$

3. Welche Erhaltungsgröße folgt mit dem Noether-Theorem aus der Translationsinvarianz eines Systems? (Hier ist keine Begründung verlangt!)

4. Entscheiden Sie, welche der Transformationen $T^*Q \to T^*Q$ mit $\mathbf{R} \ni \beta \neq 0, |\beta| \neq 1$ kanonisch sind.

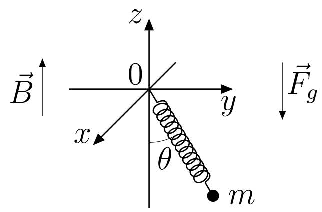
$$(q, p) \mapsto (\beta q, -p/\beta) \tag{5a}$$

$$(q, p) \mapsto (\beta q, \beta p) \tag{5b}$$

$$(q, p) \mapsto (\beta p, -q/\beta) \tag{5c}$$

14.3 Schwingende Feder im Magnetfeld

Ein Teilchen der Masse m und Ladung e ist durch eine Feder der Ruhelänge r_0 (mit Federkonstante k und vernachlässigbarer Masse) mit dem Ursprung verbunden. Die Feder kann frei um der Ursprung schwingen. Das Teilchen koppelt an ein konstantes homogenes Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der System befindet sich unter dem Effekt einer konstanten homogenen Schwerkraft $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$.



1. Bestimmen Sie eine Lagrangefunktion L für das System. *Zur Erinnerung: für konstante homogene Magnetfelder kann als Vektorpotential* $\vec{A}(x) = \vec{B} \times \vec{x}/2$ *gewählt werden.*

2. Leiten Sie aus L die Bewegungsgleichungen ab.

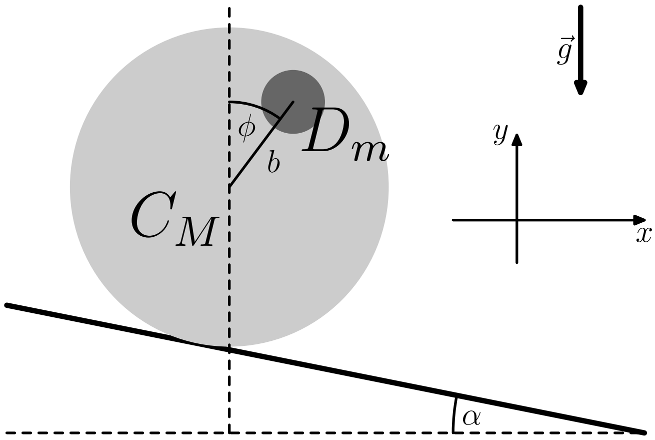
3. Finden Sie alle Lösungen der Bewegungsgleichungen, in denen die folgenden Größen konstant sind:

   - der Abstand r des Teilchens vom Ursprung,
   - die Auslenkung θ der Feder aus dem Lot und
   - die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = \omega$, der Rotation um die z-Achse.

4. Halten Sie wieder r und $\dot{\phi} = \omega$ konstant und lösen Sie nun die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen der Auslenkung θ aus dem Lot um $\theta = 0$.

14.4 Starrer Körper

Ein homogener Zylinder C_M mit Radius R und Masse M rolle reibungsfrei und ohne Schlupf auf einer schiefen Ebene, die um den Winkel α aus der Waagrechten gekippt ist, unter dem Einfluß einer konstanten, homogenen und senkrecht nach unten wirkenden Schwerebeschleunigung $\vec{g} = -g\vec{e}_y$. Im Abstand b vom Mittelpunkt des Zylinders C_M sei eine homogene Scheibe D_m mit Radius $r < R - b$ und Masse m aufgeklebt (siehe Abbildung).



1. Geben Sie die Zwangsbedingungen und die Anzahl der Freiheitsgrade an.

2. Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie eine Lagrangefunktion auf.

3. Geben sie die Bewegungsgleichungen an.

14.5 Hamiltonformalismus

Betrachten Sie einen symmetrischen Kreisel $I_1 = I_2 = I$ mit der Gesamtmasse M der im Abstand l vom Schwerpunkt im Schwerefeld aufgehängt ist. Das dritte Trägheitsmoment soll verschwinden $I_3 = 0$. Eine geeignete Lagrangefunktion in den Eulerwinkeln (ϕ, θ) ausgedrückt ist dann

$$L = \frac{I}{2}\left(\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2\right) - Mgl\cos\theta\,. \tag{6}$$

1. Welcher physikalischen Situation entspricht der Fall $I_3 = 0$?

2. Begründen Sie anschaulich, warum L nicht vom dritten Eulerwinkel ψ und der entprechende Geschwindigkeit $\dot{\psi}$ (Drehung um die Figurenachse) abhängt.

3. Bestimmen Sie die konjugierten Impulse.

4. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion durch Legendretransformation.

5. Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

6. Finden Sie die Gleichgewichtslagen $(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi) = \text{const.}$.

7. Finden Sie die zwei Erhaltungsgrößen des Systems und interpretieren Sie sie physikalisch.

14.6 Bewegung im Phasenraum

Betrachten Sie ein Hamilton'sches System mit einem Freiheitsgrad. Der Phasenraum ist $T^*Q = \mathbf{R}^2$ und die Hamiltonfunktion $H : T^*Q \to \mathbf{R}$

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \frac{\lambda}{3}q^3 \,. \tag{7}$$

Wählen Sie für die folgenden Skizzen $m = \omega = \lambda = 1$, sodaß die interessanten Aspekte im Bereich $(q,p) \in [-2,2] \times [-2,2] \subset T^*Q$ zu sehen sind.

Bei den Skizzen kommt es nicht darauf an, daß alles präzise maßstabsgerecht ist. Vielmehr sollen die qualitativen Eigenschaften (Nullstellen, Asymptoten, etc.) klar erkennbar sein.

1. Skizzieren Sie die potentielle Energie $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

   $$V(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 \tag{8}$$

   und finden Sie die stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen.

2. Skizzieren Sie Linien konstanter Energie $H(q,p) = E$ in T^*Q. Wählen Sie dafür Werte der Energie E so, daß klar erkennbar ist, wo sich diese Linien qualitativ unterschiedlich verhalten.

3. Skizzieren Sie typische Trajektorien in T^*Q. Wählen Sie wieder die Trajektorien so, daß klar erkennbar ist, wo sie sich qualitativ unterschiedlich verhalten. In welchen Bereichen des Phasenraums gibt es, wenn überhaupt, geschlossene oder offene Bahnen?

4. Skizzieren Sie das Hamilton'sche Vektorfeld $X_H : T^*Q \to \mathbf{R}^2$

   $$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) \,. \tag{9}$$