Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lukas Then

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 3, 2023)

Problem 1. (a) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x)\cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius $R = +\infty$ dargestellt wird.

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht durch ihre Taylorreihe um x = 0 dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9?

Problem 2. Es sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Geben Sie das Taylorpolynom P_2 von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an und schätzen Sie den maximalen Fehler von $|f(x) - P_2(x)|$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ab.

Proof. Es gilt $f(x) = x^{1/3}$, und daher

$$f^{(n)}(x) = \left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3} - i\right)\right] x^{\frac{1}{3}-n},$$

also

$$f^{(n)}(1) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3} - i\right).$$

□

Problem 3. Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in x_0.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ im Punkt $x_0 = 2$.

(b) $g(x) = \sin^2(\pi x)$ in $x_0 = 3$.

(c) $h(x) = \sin^{-1}(x)$ in $x_0 = 0$.

Proof. (a)

$$\begin{aligned}
f(2) =& 2^3 - 3(2)^2 + 3(2) + 2 = 4 \\
f'(x) =& 3x^2 - 6x + 3 \\
f'(2) =& 3 \\
f''(x) =& 6x - 6 \\
f''(2) =& 6 \\
f'''(x) =& 6 = f(2) \\
f''''(x) =& 0
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom ist dann

$$4 + 3(x-2) + 3(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

(b)

$$\begin{aligned}
g(x) =& \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x)) \\
g(3) =& 0 \\
g'(x) =& \pi \sin(2\pi x) \\
g^{(n)}(x) =& (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} \sin(2\pi x) & n \text{ ungerade} \\ \cos(2\pi x) & n \text{ gerade} \end{cases} && n \geq 1 \\
g^{(n)}(3) =& (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^n}{2} \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} && n \geq 1
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom vom Grad 30 ist

$$\sum_{n=1}^{15} \left[(-1)^{\lfloor (2n-1)/2 \rfloor} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} (x-3)^{2n} \right].$$

(c)

$$
\begin{aligned}
h(x) =& \sin^{-1} x \\
h(0) =& 0 \\
h'(x) =& \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \\
h'(0) =& 1 \\
h''(x) =& -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2}(-2x) \\
=& x(1-x^2)^{-3/2} \\
h''(0) =& 0 \\
h'''(x) =& (1-x^2)^{-3/2} - \frac{3x}{2}\left(1-x^2\right)^{-5/2}(-2x) \\
=& (1-x^2)^{-3/2} - 3x^2\left(1-x^2\right)^{-5/2} \\
h'''(0) =& 1
\end{aligned}
$$

□

Problem 4. Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von $\exp : [0,1] \to \mathbb{R}$ für die markierten Zerlegungen (J_n, Ξ_n) mit der Auswahl $\Xi_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

Proof. (a)

Lemma 1.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - e^{-1/n}\right) = 1.$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(1 - e^{-1/n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-1/n}}{1/n} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-x}}{x} && x = 1/n \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}}{1} && \text{L'Hopital} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{O}_{\Xi_n}(f) =& \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \exp\left(\frac{k+1}{n} \right) \right) \\
=& \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k+1}{n} \right) \\
=& \frac{1}{n} \frac{(e-1)e^{1/n}}{e^{1/n}-1} \\
=& \frac{1}{n} \frac{e-1}{1-e^{-1/n}}
\end{aligned}
$$

Es folgt daraus

$$
\lim_{n\to\infty} \mathfrak{O}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n\left(1-e^{-1/n}\right)} = e-1.
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) =& \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \exp\left(\frac{k}{n} \right) \right) \\
=& \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n} \right) \\
=& \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{1/n}-1} \\
=& \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{1/n}\left(1-e^{-1/n}\right)}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\lim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_{\Xi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n(e^{1/n}\left(1-e^{-1/n}\right)} = e-1. \qquad \square
$$