Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 10, 2023)

Problem 1. Wir definieren mit S_n die Menge der bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} .$$

Dann ist bekannterweise $(S, \circ)$ mit

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(i) = \sigma_2(\sigma_1(i))$$

eine Gruppe. Wir führen für gewöhnlich eine Abbildungstabelle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

mit $i_1, \ldots, i_n$ paarweise verschieden, um zu signalisieren $\sigma(k) = i_k$ für $k = 1, \ldots, n$.

(a) Eine übliche Darstellung bei Elementen aus S_n ist die Zyklenschreibweise. Ein Zyklus der Länge k mit $k \leq n$ hat die Form

$$\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

und signalisiert $i_1 \to i_2, i_2 \to i_3$, usw. $i_k \to i_1$ under σ. Ist die Zahl i_j nicht im Zyklus vertreten, so wird sie unter σ auf sich selbst abgebildet. Speziell für $k = 1$ erhalten wir die Identität und schreiben

$$\sigma = (1).$$

Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Abbildungen σ durch ein Zyklus der Länge k realisiert werden können! Kann jedes Element in S_3 (S_4) als ein Zyklus geschriebeb werden?

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Wir definieren die Menge der (Permutations-)Matrizen

$$P_n := \left\{ P \in \mathbb{K}^{n\times n} : P = (e_{i_1}, \dots, e_{i_n}, \text{ mit } i \leq i_k \leq n \text{ und alle } i_k \text{ paarweise verschieden} \right\},$$

mit e_i der i-te Einheitsvektor. Verifizieren Sie: $(P_n, \cdot)$ ist mit der herkömmlichen Matrixmultiplikation eine Gruppe! Bestimmen Sie weiterhin einen bijektiven Gruppenmorphismus

$$\Phi : (S_n, \circ) \to (P_n, \cdot),$$

sodass gilt

$$\Phi(\sigma)e_i = s_j \iff \sigma(i) = j.$$

Beweisen Sie, dass sich jedes P aus P_n schreiben lässt als

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} V_{i_k j_k},$$

mit V_{ij} definiert wie in Lemma 5.56.

Proof. (a) Es gibt $n!$ Möglichkeiten für eine Folge $(i_1 i_2 \dots i_k)$, aber wir können die zyklisch permutieren und σ verändert sich nicht. Deswegen gibt es $n!/n = (n-1)!$ unterschiedliche Abbildungen, die durch ein Zyklus der Länge k realisiert werden können.

Ja, jedes Element in S_3 kann als ein Zyklus geschrieben werden. Das können wir explizit machen:

(1)	(12)	(23)
(13)	(132)	(123)

Weil wir 6 Elemente haben, und $|S_3| = 3! = 6$, haben wir alle Elemente.

Das stimmt aber nicht für S_4. Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Falls es als Zyklus geschreiben werden kann, muss das Zyklus den Länge 4 haben, weil $\sigma(i) \neq i$ für alle i. Wir fangen obdA mit 1 an. Dann ist das Zyklus $(12\dots)$. Aber weil $\sigma(2) = 1$, hört das Zyklus auf, und $\dots = \varnothing$. Dann ist das Zyklus nicht mit Länge 4.

(b) Sei $A, B \in P_n$ beliebige Elemente von P_n,

$$A = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$
$$B = (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$$

(i) G ist abgeschlossen: Wir betrachten ABe_k für k beliebig.

$$ABe_k = Ae_{j_k} = e_{i_{j_k}},$$

also

$$AB = (e_{i_{j_1}}, e_{i_{j_2}}, \dots, e_{i_{j_n}}) \in P_n.$$

Das i_{j_k} paarweise verscheiden sind folgt daraus, dass j_k alle paarweise verscheiden sind.

(ii) Neutrales element: Wir wissen aus der linearen ALgebra, dass

$$1_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in P_n$$

das neutrales Element ist.

(iii) Assoziativität: Wir wissen auch, dass Matrizmultiplikation assoziativ ist.

(iv) Existenz des Inverses: Sei jetzt p_k, sodass $i_{p_k} = k$.

Bemerkung

Man kann $i, p : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ interpretieren. Dann ist i eine bijektive Abbildung, und das Existenz einer inversen Abbildung p folgt daraus. Deswegen ist unsere Entscheidung immer möglich.

Wir betrachten $A(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n})$, und dafür die Wirkung der Abbildung auf einem beliebigen Basiselement e_k:

$$A(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n})e_k = Ae_{p_k} = e_{i_{p_k}} = e_k.$$

(c) Sei i eine bijektive Abbildung $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Wir schreiben i_k oder $i(k)$ als das Bild von k. Wir vermuten, dass die gewünschte Homomorphismus

$$\Phi : i \to (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots e_{i_n})$$

ist.

(i) $\Phi(\sigma)e_j = e_{\sigma_j}$, also $\Phi(\sigma)e_i = s_j \iff \sigma(i) = j$.

(ii) Injektiv: Sei $\sigma, \sigma' \in S_n$, $\sigma \neq \sigma'$, insbesondere gilt $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$. Es gilt dann

$$\begin{tikzcd} & (e_{\sigma_1}, \dots, \boxed{e_{\sigma_i}}, \dots, e_{\sigma_n}) \\ \Phi(\cdot) \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma'"'] & \\ & (e_{\sigma'_1}, \dots, \boxed{e_{\sigma'_i}}, \dots, e_{\sigma_n}) \\ & \neq \end{tikzcd}$$

also $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\sigma')$.

(iii) Surjektiv: Sei $M = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$. Wie im letzten Teilaufgabe können wir eine Abbildung $i(k) = i_k$ definieren, und $\Phi(i) = M$.

(iv) Homomorphismusgesetz: Es ist zu zeigen, für $i, j \in S_n$ und

$$\begin{aligned} M_1 =& (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \Phi(i) \\ M_2 =& (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) = \Phi(j), \end{aligned}$$

dass

$$\Phi(i \circ j)(e_k) = M_1 M_2 e_k$$

für alle k gilt. Per Definition ist

$$\Phi(i \circ j)e_k = e_{i(j(k))} = e_{i_{j_k}}.$$

Es gilt auch

$$M_1 M_2 e_k = M_1 e_{j(k)} = e_{i(j(k))} = e_{i_{j_k}}.$$

□

Problem 2. Gegeben sei die Permutation

$$S_9 \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 7 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$