Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 11

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 18, 2024)

Problem 1. Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^α sowie $P \subseteq \mathbb{R}^m$ eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Zeigen Sie:

(a) $M \times P \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(b) Gilt $M \cap \overline{N} = \varnothing = \overline{M} \cap N$, so ist $M \cup N$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α.

(c) Die Mengen

$$\begin{aligned} A :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (-1,1), y = x^2\}, \\ B :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (-1,0) \cup (0,1), y = -|x|\}, \end{aligned}$$

sind jeweils 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten der Klasse C^1.

(d) Die Aussage aus (b) ist unter der schwächeren Voraussetzung $M \cap N = \varnothing$ im Allgemeinen nicht richtig.

Proof. (a) Sei $(m,p) \in M \times P$. Per Definition gibt es offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, f und g α-mal differenzierbare Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, $g : V \to \mathbb{R}^{m-l}$, so dass

$$\begin{aligned} & m \in U,\ p \in V \\ & M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\} \\ & \mathrm{Rang}(f'(m)) = n-k \\ & P \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\} \\ & \mathrm{Rang}(g'(p)) = m-l \end{aligned}$$

Dann ist $U \times V \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ offen Sei außerdem $h : U \times V \to \mathbb{R}^{n+m-(n+k)}$ definiert durch $h(x,y) = (f(x), g(y))$, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Dann ist $h(x, y) = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ und $g(y) = 0$. Außerdem ist

$$h' = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}.$$

Da h' eine Blockmatrix ist, ist $\operatorname{Rang}(h'(m, p)) = \operatorname{Rang}(f'(m)) + \operatorname{Rang}(g'(p))$. (Man kann das beweisen, indem man das Gauss-Algorithismus durchführt, bis f' und g' in Zeilenstufenform sind.)

Weil f und g α-mal stetig differenzierbar sind, ist h auch α-mal stetig differenzierbar

Es gilt dann

$$(U \times V) \cap (M \times P) = \{x \in U \times V : h(x) = 0\}$$
$$\operatorname{Rang}(h'(m, p)) = n + m - (k + l)$$

$\square$

Problem 2. Sei $a < b, \alpha \in \mathbb{N}$ und $r : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei α-mal stetig differenzierbar mit $r(z) > 0$ für alle $z \in (a, b)$. Definiere

$$R := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in (a, b), \sqrt{x^2 + y^2} = r(z)\right\}.$$

Dann ist R durch die Abbildung

$$\varphi : (a, b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(z, \alpha) := \begin{pmatrix} r(z) \cos \alpha \\ r(z) \sin \alpha \\ z \end{pmatrix}$$

parametrisiert.

(a) Zeigen Sie, dass R eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ist.

(b) Zeigen Sie, dass R eine λ_3-Nullmenge ist.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$I := \int_{(a,b)\times(0,2\pi)} \sqrt{\det(\varphi'^T \varphi'}\, \mathrm{d}\lambda_2(z, \alpha)$$

in Abhängigkeit der Funktion r.

(d) Bestimmen Sie das Integral I in (c) für den Fall $r(z) := \cosh(z)$ und $(a, b) := (0, 1)$.