

Hausaufgaben und Übungen zur Vorlesung

## Analysis 2

**Stefan Waldmann**

Wintersemester 2023/2024

### Hausaufgabenblatt Nr. 3

revision: (None)

Last changes by (None) on (None)

Git revision of ana2-ws2324: (None) (None)

01. 11. 2023

(22 Punkte. Abzugeben am 08. 11. 2023)

#### Hausaufgabe 3-1: (Nicht-)analytische $C^\infty$ -Funktion

i.) Benutzen Sie Proposition 5.6.9, um zu zeigen, dass

$$g(x) = \sin(x) \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

durch die zugehörige Taylorreihe im Punkt  $x_0 = 0$  mit Konvergenzradius  $R = +\infty$  dargestellt wird. **(3 Punkte)**

ii.) Zeigen Sie, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

*nicht* durch ihre Taylorreihe um  $x = 0$  dargestellt wird. Warum ist dies kein Widerspruch zu Proposition 5.6.9? **(2 Punkte)**

#### Hausaufgabe 3-2: Fehlerabschätzung durch Taylor

Es sei  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Geben Sie das Taylorpolynom  $P_2$  von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$  an und schätzen Sie den maximalen Fehler von  $|f(x) - P_2(x)|$  auf dem Intervall  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  ab. **(4 Punkte)**

#### Hausaufgabe 3-3: Diverse Taylorpolynome

Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 30 der folgenden Funktionen in  $x_0$ :

- i.)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  im Punkt  $x_0 = 2$ , (2 Punkte)  
ii.)  $g(x) = \sin^2(\pi x)$  in  $x_0 = 3$ , (3 Punkte)  
iii.)  $h(x) = \arcsin(x)$  in  $x_0 = 0$ . (3 Punkte)

### Hausaufgabe 3-4: Riemann-Integral zu Fuß

Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen von  $\exp : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für die markierten Zerlegungen  $(J_n, \Xi_n)$  mit der Auswahl  $\Xi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie anschließend, dass die zugehörigen Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren. (5 Punkte)