

Gewöhnliche Differentialgleichungen Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 9, 2024)

Problem 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

(a) $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 8e^t$.

(b) $\ddot{x}(t) + x(t) = 4t \sin(t) - 2 \sin(t)$.

Proof. (a) Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

mit Lösungen

$$\lambda = -1, 5.$$

Zwei lineare unabhängige Lösungen der homogenen DGL sind e^{-t} und e^{5t} . Für eine partikuläre Lösung verwenden wir als Ansatz $x = Ae^t$. Eingesetzt ist

$$Ae^t - 4Ae^t - 5Ae^t = -8Ae^t = 8e^t.$$

und damit $A = -1$. Die allgemeine Lösung ist

$$\varphi(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} - 8e^t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die charakteristische Gleichung der homogenen DGL ist $x^2 + 1 = 0$ und hat Lösungen $x = \pm i$. Die Lösung der homogenen DGL ist damit

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung einer Lösung der inhomogenen DGL verwenden wir den Ansatz

$$x(t) = At^2 \cos t + Bt \sin t$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

mit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2At \cos t - At^2 \sin t + B \cos t - Bt \sin t \\ \ddot{x} &= 2A \cos t - 2At \sin t - 2At \sin t - At^2 \cos t \\ &\quad - B \sin t - B \sin t - Bt \cos t \\ &= 2A \cos t - 4At \sin t - At^2 \cos t - 2B \sin t - Bt \cos t\end{aligned}$$

und

$$\ddot{x} + x = 2A \cos t - 4At \sin t - 2B \sin t.$$

□

Problem 2. Bestimmen Sie mit Begründung eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die folgende Lösungen besitzt:

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & t &\mapsto 2e^{3t} + \sin(3t), \\ \varphi_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & t &\mapsto 3e^{-2t} + \sin(3t), \\ \varphi_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & t &\mapsto e^{-2t} + 5e^{3t} + \sin(3t).\end{aligned}$$

Proof. Wenn die DGL homogen wäre, bräuchten wir die folgenden Nullstellen der charakteristischen Polynom: $-2, 5, \pm 3i$. Da 4 Lösungen zu viel sind, muss die DGL inhomogen sein.

Die drei Lösungen haben $\sin 3t$ gemeinsam. Dies muss daher der inhomogenen Teil sein. Wir suchen also eine DGL, deren homogenen Teil e^{-2t} und e^{3t} als linear unabhängige Lösungen hat und $\sin 3t$ als partikuläre Lösung hat. Ein charakteristisches Polynom ist

$$(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$$

und damit ist ein möglicher homogener Teil

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0.$$

Zur Bestimmung der inhomogenen Teil setzen wir einfach $\sin 3t$ ein:

$$-3 \sin 3t - 3 \cos 3t - 6 \sin 3t = -9 \sin 3t - 3 \cos 3t.$$

Die DGL ist damit

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = -9 \sin 3t - 3 \cos 3t.$$

□

Problem 3. Sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf D und lokal Lipschitz-stetig in x ist. Weiterhin sei $C \geq 0$, sodass

$$\langle f(t, x), x \rangle \leq C|x|_2^2$$

für alle $(t, x) \in D$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne hier das Standardskalarprodukt und $|\cdot|_2$ die euklidische Norm im \mathbb{R}^n .

Zeigen Sie: Für das maximale Existenzintervall $I = (t^-, t^+)$ der Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (1), gilt $t^+ = +\infty$.

Bemerkung: Eine Möglichkeit diese Aufgabe zu lösen, verwendet folgende Hinweise:

1. Verwenden Sie als Ansatz $y(t) = |x(t)|_2^2$.
2. In dieser Aufgabe können Sie die Separation der Variablen ohne Beweis auch auf Differentialungleichungen der Form $y' \leq f(y)$ anwenden.

PRÄZENSBLATT

Problem 4. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2x = 2 \cos(t).$$

Proof.

$$x = A \cos(\sqrt{2}t) + B \sin(\sqrt{2}t) + 2 \cos t. \quad \square$$

Problem 5. Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_3(t) = t^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Es ist bekannt, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Lösungen einer linearen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind.

Geben Sie die Menge aller Lösungen dieser Differentialgleichung an. Die Differentialgleichung selbst ist dabei nicht zu bestimmen. (*Hinweis: Beachten Sie, dass die Lösungen einer linearen inhomogenen Differentialgleichung einen affinen Unterraum aufspannen, siehe Satz 7.3.*)

Proof.

$$A + Bt + t^2 \quad \square$$

Problem 6. Bei zeitunabhängigen linearen Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax$ können wir mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion $\exp(At)$ eine Fundamentalmatrix angeben. Man könnte daher versuchen zu beweisen, dass bei zeitabhängigen linearen Differentialgleichungen $\dot{x} = A(t)x$ die Matrix-Exponentialfunktion

$$\Phi(t) := \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right)$$

eine Fundamentalmatrix ist.

Erklären Sie, an welcher Stelle der Beweis schief gehen würde und belegen Sie dies mit einem Gegenbeispiel.

Proof.

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right)^k$$

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \left(\int_{t_0}^t A(s) \, ds \right)^{k-1} A(t) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left(\int_{t_0}^t A(s) \, ds \right)^{k-1} \right] A(t) \\
&= \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) \, ds \right) A(t)
\end{aligned}$$

□