Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 29, 2023)

Problem 1. Betrachten Sie eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Zahlen $d_1, \ldots d_n \in \mathbb{R}$ auf der Diagonalen.

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $D := d_1 \ldots d_n \neq 0$ gilt. Beweisen Sie, dass in diesem Fall die zu A inverse Matrix ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Seien nun alle Einträge von A ganze Zahlen und A invertierbar. Zeigen Sie, dass die inverse Matrix A^{-1} aus rationalen Einträgen besteht, wobei (im gekürzten Fall) als Nenner höchstens D auftritt.

Proof. (a) Es genügt zu zeigen, dass $\det(A) = d_1 \ldots d_n$ für ein Dreiecksmatrix gilt. Wir beweisen es per Induktion auf n. Für $n = 1$ ist $\det(A_1) = A_{11}$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für $n - 1$ gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Wir betrachten ein $n \times n$ Dreiecksmatrix A_n und ein Laplaceentwicklung auf der ersten Spalte.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ & & A_{n-1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Also $\det(A_n) = a_{11}\det(A_{n-1})$. Als Induktionsannahme haben wir angenommen, dass $\det(A_{n-1}) = a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$. Daraus folgt:

$$\det(A_n) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Die Ergebnis folgt daraus und aus Proposition 6.28.

(b) Wir beweisen es durch Durchfürung des Gauß-Algorithismus.

Wir fangen an mit dem zweiten Spalte bzw. zweiten Zeile. Wir dividieren das zweite Zeile durch a_{22}. Das Matrix sieht so aus

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & \dots & a_{2n}/a_{22} & 0 & 1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Dann subtrahtieren wir a_{12} mal die zweite Zeile von die erste Zeile. Weil der Einträg in der linken Seite der zweiten Zeile eine rationale Zahl mit Nenner höchstens a_{22} ist, werden alle Einträge in der zweiten Spalte des ehemaligen Einheitsmatrix auch rationale Zahlen mit Nenner höchstens $\frac{1}{a_{22}}$.

Danach dividieren wir die dritte Zeile durch $a_{22}a_{33}$. Dann sieht das Matrix so aus

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} & 1 & -1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & \dots & a_{2n}/a_{22} & 0 & 1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & \dots & 1 & 0 & 0 & 1/(a_{22}a_{33}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Alle Einträge in der dritten Spalte sind Vielfachen von $1/a_{22}$, also wir können alle Einträge darin 0 machen durch subtrahtieren ein Vielfaches von die dritte Zeile, was das Nenner nicht erhöhen kann.

Ähnlich machen wir weiter. Wir dividieren die vierte Zeile durch $1/a_{22}a_{33}a_{44}$. Alle Einträge in die vierte Spalte werden nur Vielfachen von $1/a_{22}a_{33}$. Zuletzt dividieren wir die erste Zeile durch a_{11}, damit das Matrix auf der linken Seite das Einheitsmatrix ist. Dann kann das Nenner höchstens $a_{11}\dots a_{nn}$ sein. □

Problem 2. Es sei im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir definieren die Spur

$$\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad A \to \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Spur ist ein lineares Funktional in $M_n(\mathbb{K})^*$.

(b) Für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

(c) Für $A \in GL_n(\mathbb{K})$ und $B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt

$$\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}(B).$$

(d) Ist $f \in M_N(\mathbb{K})^*$ ein lineares Funktional mit

$$f(AB) = f(BA), \qquad f(1) = n$$

für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, dann gilt bereits $f = \mathrm{tr}$.

Proof. (a) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(xA + yB) &= \sum_{i=1}^{n} (xA + yB)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(xA)_{ii} + (yB)_{ii}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (xA)_{ii} + \sum_{i=1}^{n} (yB)_{ii} \\
&= x \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii} + y \sum_{i=1}^{n} (B)_{ii} \\
&= x\mathrm{tr}(A) + y\mathrm{tr}(B).
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} && \text{wir dürfen endliche Summe umordnen} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} B_{ik} && \text{wir vertauschen } i \text{ und } k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \qquad \mathbb{K} \text{ ist kommutativ}$$
$$= \operatorname{tr}(BA)$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(ABA^{-1}) &= \operatorname{tr}\left((AB)A^{-1}\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(A^{-1}(AB)\right) \\ &= \operatorname{tr}(A^{-1}AB) \\ &= \operatorname{tr}(AB) \end{aligned}$$

(d) Wir betrachten ein Basis für $M_n(\mathbb{K})$. Das gewählte Basis ist die Elementarmatrizen E_{ij} (s. Proposition 5.54). Es gilt

$$E_{ii}E_{ij} = E_{ij} \qquad E_{ij}E_{ii} = 0 \qquad i \neq j.$$

Es folgt $f(E_{ij}) = f(E_{ii}E_{ij}) = f(E_{ij}E_{ii}) = f(0) = 0$, also $f(M)$ ist nicht von nichtdiagonale Elemente abhängig.

Danach betrachten wir die diagonale Elemente. Wir können ein Permutationsmatrix (ein Matrix mit die Zeilen i und j vertauscht) P betrachten. Es gilt $P^{-1} = P$ und

$$P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n)P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n).$$

Weil f angewandt auf die beide Seite der Gleichung wegen (c) gleich sein muss, ist f unabhängig von ein Umordnung der diagonale Elemente. Zuletzt gilt

$$f(1) = \sum_{i=1}^{n} f(E_{ii}) = nf(E_{11}) = n,$$

also

$$f(E_{ii}) = 1 \qquad \text{für alle } i.$$

Dann ist $f = \operatorname{tr}$. □

Problem 3. Bestimmen Sie zu den folgenden linearen Abbildungen jeweils alle Eigenwerte und Eigenräume. Entscheiden Sie weiterhin, ob die entsprechende Abbildung diagonalisierbar ist.

(a)

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \to Ax,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad x \to Ax,$$

mit A wie in (a).

(c)

$$T : M_n(\mathbb{K}) \to M_N(\mathbb{K}), \qquad A \to \mathrm{tr}(A)1.$$

(d)

$$T : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \qquad A \to A^T.$$

Proof. (a)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) =& \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -4 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ =& (-1-\lambda)(-(1+\lambda)(2-\lambda) - 0) + (2 - (1+\lambda)(4)) \\ =& -\lambda - \lambda^3 \\ =& -\lambda(1+\lambda^2) \end{aligned}$$

also $\lambda = 0$ ist ein Eigenwert, aber $1 + \lambda^2 = 0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$, also es gibt nur ein Eigenwert, also T ist nicht diagonaliserbar.

(b) Das charakteristische Polynom hat 3 unterschiedliche Eigenwerte, $\lambda = 0$ und $\lambda = \pm 1$. Weil alle Eigenwerte unterschiedlich sind und der Eigenraum mindestens Dimension 1 hat, ist es diagonalisierbar.

(c) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. A ist ein Eigenvektor von T genau dann, wenn

$$A = \lambda \mathrm{tr}(A) 1_n.$$

Also gilt, dass A diagonal ist und

$$n\mathrm{tr}(A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$$

also es gibt nur ein Eigenwert n und der Eigenraum ist gespannte durch

$$\mathrm{span}\left(1_n\right),$$

was ein 1-dimensionaler Vektorraum ist. Für $n > 1$ kann es kein Basis sein, und T ist nicht diagonaliserbar. Für $n = 1$ ist T das Identität, also es ist schon diagonal.

(d) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. A ist ein Eigenvektor genau dann, wenn

$$A^T = \lambda A.$$

Wir können hier sofort zwei Eigenwerte und deren Eigenräume lesen:

$$\begin{aligned} \lambda = 1 :& A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{K}) \\ \lambda = -1 :& A \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Das Dimension der Eigenraum wissen wir schon

$$\begin{aligned} \dim\left(\mathrm{SM}_n(\mathbb{K})\right) =& \frac{n(n+1)}{2} \\ \dim(\mathrm{AS}_n(\mathbb{K})) =& \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2,$$

also wir können ein Basis für $M_n(\mathbb{K})$ finden mit genau $\frac{n(n+1)}{2}$ Vektoren aus $\lambda = 1$ Eigenraum und $\frac{n(n-1)}{2}$ Vektoren aus dem $\lambda = -1$ Eigenraum. Daraus folgt: T ist diagonaliserbar. □

Problem 4. Über einen algebraisch vollständigen Körper $\mathbb{K}$ zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ immer in Linearfaktoren

$$\chi_A(x) := \det(A - x1) = (\lambda_1 - x)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_m - x)^{\mu_m}.$$

Dabei ist der Exponent μ_i die algebraische Vielfachheit zum Eigenwert λ_i und $n = \mu_1 + \dots + \mu_m$. Es sei V_{λ_i} der Eigenraum zum Eigenwert λ_i, dann bezeichnen wir die Dimension des Eigenraums

$$d_i := \dim(V_{\lambda_i})$$

als geometrische Vielfachheit von λ_i. Zeigen Sie: Es gilt immer

$$\mu_i \geq d_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Hinweis: Führen Sie einen Basiswechsel mit einer möglichst geschickt gewählten Basis B durch.

Proof. Sei λ_i ein Eigenwert mit geometrische Vielfachheit d_i. Das heißt, dass wir d_i linear unabhängige Vektoren finden können, so dass $Av = \lambda_i v$ für alle solche Vektoren. Dann ergänzen wir die Basis, so dass die erste d_i Vektoren in der Basis Eigenvektoren mit Eigenwert λ_i sind. Das charakteristische Polynom verändert sich nicht, wenn wir ein Basiswechsel machen. Also das charakterische Polynom ist gleich das charakteristische Polynom von

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda 1_{d_i} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A' - x1_n) = (x - \lambda)^{d_i} \det(C),$$

also die algebraische Vielfachheit von λ_i ist mindestens die geometrische Vielfachheit. $\square$