Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 7

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 12, 2023)

Problem 1. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ und $(Z, \mathcal{C}, \eta)$ σ-endliche Maßraume. Definiere $A \otimes B \otimes C := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{C})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \mathcal{C} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$.

Hinweis: Betrachten Sie $\Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ *mit*

$$\Pi : X \times Y \times Z \to X \times Y,\ \Pi(x, y, z) := (x, y).$$

(b) Es gilt $(\mu \otimes \nu) \otimes \eta = \mu \otimes (\nu \otimes \eta)$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$.

Proof. (a) Per Hinweis betrachten wir $\Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$. Sei $P \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. $P \in \Pi_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ genau dann, wenn $P \times Z \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$.

□

Problem 2. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2, a < b \in \mathbb{R}, r : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und

$$A := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < r(z)^2, z \in [a, b]\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie $\lambda_2(B_R(x_0))$ für $R > 0$ mittels dem Satz von Fubini.

(b) Zeigen Sie:

$$\lambda_3(A) = \pi \int_a^b r(z)^2 \,\mathrm{d}z\,.$$

Proof. (a) Aus Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes genügt es, $B_R(0)$ zu betrachten. Per Definition ist es definiert durch

$$x^2 + y^2 < R^2.$$

Insbesondere ist, für jedes $x \in [-1, 1]$,

$$\{y | (x, y) \in B_R(0)\} = [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}].$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Aus Satz 2.81 folgt

$$\begin{aligned}\lambda_2(B_R(0)) &= \int_{-R}^{R} \lambda_1([-\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-x^2}])\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Die Funktion ist Riemann-integrierbar, also wir dürfen Sätze vom Riemann-Integral verwenden. Hier integrieren wir es per Substitution. Sei $x = R\sin\theta, \mathrm{d}x = R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. Wenn $x = -R$, ist $\theta = -\pi/2$ und wenn $x = R$ ist $\theta = \pi/2$.

$$\begin{aligned}\lambda_2(B_R(0)) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R\sqrt{1-\sin^2\theta}R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &=2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\,\mathrm{d}\theta \\ &=2R^2\left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &=2R^2\left[\sin\pi - \sin 0 + \frac{\pi}{2}\right] \\ &=\pi R^2 \\ &=\lambda_2(B_R(x_0))\end{aligned}$$

(b) Wir vorher ist $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ σ-endlich. Das Innere der Menge $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2 < r(z)^2, z \in (a,b)\}$ ist offen und daher messbar. Da A das Innere mit eine Nullmenge hinzugefügt ist, ist A auch messbar. Wir können daher das Maß als Integral schreiben:

$$\begin{aligned}\lambda_3(A) &= \int_{[a,b]} A_z\,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_{[a,b]} \pi r(z)^2\,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &=\pi\int_a^b r(z)^2\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

□

Problem 3. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq |a| + |b|$. Definiere

$$E := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2 < 1, 0 \leq z \leq ax+by+c\right\}.$$

Bestimmen Sie $\lambda_3(E)$.

Proof. Ähnlich betrachten wir $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, 0 < z < ax + by + c\}$. Da die Menge offen ist, ist sie messbar. Weil E gleich die Menge mit eine Nullmenge hinzugefügt ist, ist E auch messbar. Wir schreiben dann das Maß als Doppel bzw. Tripelintegral. Hierbei nutzen wir, dass $x^2 \leq 1$, also $x \in (-1, 1)$ aus die Gleichung $x^2 + y^2 < 1$. Sei x fest. Dann ist $y^2 < 1 - x^2$, also $y \in (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$.

$$
\begin{aligned}
\lambda_3(E) =& \int_{-1}^{1} \lambda_2(E_x)\,\mathrm{d}\lambda_2 && \text{Satz 2.81}\\
=& \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \lambda_1([0, ax + by + c])\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) && \text{Satz 2.81}\\
=& \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ax + by + c\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\
=& \int_{-1}^{1} \left[axy + by^2/2 + cy\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\
=& \int_{-1}^{1} 2ax\sqrt{1-x^2} + 2c\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\
=& 2\int_{-1}^{1} (ax + c)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\
=& 2\left[\int_{-1}^{1} (ax)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + c\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right]\\
=& 2c\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x && x\sqrt{1-x^2} \text{ ist ungerade}\\
=& c\pi. && \square
\end{aligned}
$$

Problem 4. Seien $B_1 := B_1(0, 0, 0) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $B_2 := B_1(0, 0, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$ die offenen Kugeln mit Radius 1 um die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Bestimmen Sie $\lambda_3(B_1 \cap B_2)$.

Proof. Per Definition ist

$$
\begin{aligned}
B_1 =& \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 < 1\}\\
B_2 =& \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + (z-1)^2 < 1\}
\end{aligned}
$$

Weil λ_1 bzw. das Lebesgue-Maß σ-endlich ist, werden wir das Maß als Integral gemäß Satz 2.81 schreiben. Daher betrachten wir $(B_1 \cap B_2)_z$ für beliebiges $z \in [0, 1]$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(B_1 \cap B_2)_z =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < \min(1 - (z-1)^2, 1 - z^2)\}\\
=& B_{\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})}(0) \subseteq \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Offenbar ist

$$\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2}) = \begin{cases} \sqrt{1-z^2} & z \geq 1/2, \\ \sqrt{1-(z-1)^2} & z \leq 1/2. \end{cases}$$

Aus 2 ist $\lambda_2(B_R(0)) = \pi R^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_3(B_1 \cap B_2) &= \int_0^1 \lambda_2(B_{\min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})}(0)) \,\mathrm{d}\lambda_1(z) \\ &= \int_0^1 \pi \min(\sqrt{1-(z-1)^2}, \sqrt{1-z^2})^2 \,\mathrm{d}\lambda_1(z) \\ &= 2\int_{1/2}^1 \pi(1-z^2) \,\mathrm{d}\lambda_1(z) \\ &= 2\pi(z - z^3/3)|_{1/2}^1 \\ &= \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

$\square$