Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Institut für
MATHEMATIK

Wintersemester 2023
Prof. Knut Hüper, Felix Weiß

1. Übungsblatt

Hinweis:
Die Übungsblätter erscheinen jeweils Mittwoch nach der Vorlesung und die Bearbeitung ist im zugehörigen Abgabefeld hochzuladen bis zum jeweils darauffolgenden Donnerstag um 0:00 Uhr. Vorzugsweise soll die Bearbeitung in zweier Gruppen erfolgen aber eine Abgabe alleine ist auch möglich. Mehr als zwei Leute auf einer Bearbeitung ist nicht gestattet und führt zu einer Entwertung. Bei Abgabe zu zweit ist zu beachten, dass die zugerhörigen Namen deutlich am Anfang der Bearbeitung ersichtlich sind. Ein Name auf mehreren Abgaben führt ebenfalls zu einer Entwertung.

Zur Teilnahme an der Klausur müssen 50% der insgesamt zu vergegebenden Bewertungspunkte aller Übungsblätter erreicht worden sein. Die Zulassung zur Klausur gemäß der erreichten Punktzahl überträgt sich ebenso auf die Nachklausur allerdings nicht darüber hinaus.

1. **Mitternachtsformel und komplexe Zahlen (6 + 4 = 10 Pkte)**

   (a) Bestimmen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung

   $$x^2 = u + iv,$$

   in Abhängigkeit von $u, v \in \mathbb{R}$.
   Hinweis: Sie sparen sich Arbeit, wenn Sie beachten $\left|x^2\right| = |u + iv|$.

   (b) Führen Sie das Nullstellenproblem

   $$ax^2 + bx + c = 0,$$

   mit $a \in \mathbb{C} \setminus 0,\ b \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{C}$ auf den Fall in (a) zurück. Geben Sie weiterhin eine geschlossene Darstellung aller Lösungen für den Fall $a = 1$ an.
   Hat alles geklappt, sollte bei Ihnen speziell für den Fall $a = 1$ und $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(c) = 0$ die entsprechende Mitternachtsformel dastehen.

2. **Polynomdivision (2 + 2 + 1 = 5 Pkte)**

   Finden Sie für die Polynome $p, d \in \mathbb{C}[x]$ jeweils solche $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r) < \deg(d)$, dass $p = qd + r$ gilt.

   (a) $p = x^7 + x^5 + x^3 + 1,\ d = x^2 + x + 1,$

   (b) $p = x^5 + (3 - i)x^3 - x^2 + (1 - 3i)x + 1 + i,\ d = x^2 + i.$

   (c) Wie sehen s, r aus, wenn man in (a) und (b) jeweils die Rollen von p und d vertauscht? D.h. bestimmen Sie $s, r, \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(r) < \deg(p)$, sodass $d = sp + r$ gilt.

3. **Lineare Gleichungssysteme (6 + 6 = 12 Pkte)**

   Seien

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -38 \\ -46 \\ -18 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   gegeben.

   (a) Bestimmen Sie $\mathrm{im}(A)$ und $\ker(A)$.

   (b) Bestimmen Sie $\mathrm{Lös}(A, b)$ und $\mathrm{Lös}(A, c)$.

4. **Basisdarstellungen (2 + 1 + 1 + 2 = 6 Pkte)**

   Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume V mit Basis $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ und W mit Basis $B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Wir definieren einen linearen Operator $T : V \to W$ wie folgt

   $$T(v_1) = w_1 + w_3, \quad T(v_2) = w_1 + w_2, \quad T(v_3) = -w_1 - w_2 - w_3.$$

   (a) Zeigen Sie: $W = \mathrm{span}\{T(v_1),\ T(v_2),\ T(v_3)\}$. Was folgt daraus für den Operator T?

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung

$$ {}_{B_W}[T]_{B_V}. $$

(c) Bestimmen Sie eine Basis B_W^* von W, sodass gilt

$$ {}_{B_W^*}[T]_{B_V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

(d) Bestimmen Sie eine Basis B_V^* von V, sodass gilt

$$ {}_{B_W}[T]_{B_V^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$