Aufgabe 6.4: *Bergabkugeln* .... (3 Punkte)

Eine Kugel (Radius R, Masse M) rollt ohne Schlupf reibungsfrei eine Schräge herunter. Betrachten Sie die Bewegung der Kugel als eine Überlagerung einer Rotation um den Schwerpunkt und eine Translation des Schwerpunkts.

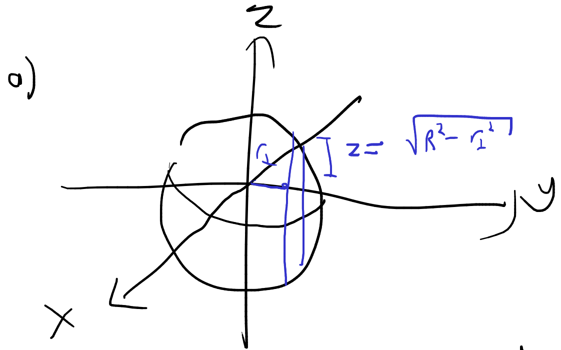
Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

(1 P) a) Zeigen Sie aus der Grunddefinition $J = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m$, dass für das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich des Schwerpunkts gilt $J_{\mathrm{SP}} = \frac{2}{5} M R^2$.
Hinweis: $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$.

(1 P) b) Stellen Sie die Gesamtenergie der Kugel als Funktion des Tempos v_{SP} des Schwerpunkts und der Höhe h des Schwerpunkts über dem Nullpunkt der potentiellen Energie dar.
Hinweis: Wie hängt der Betrag Winkelgeschwindigkeit mit dem Tempo des Schwerpunkts zusammen?

(1 P) c) Die Gesamtenergie ist während des Rollvorgangs erhalten. Es gilt also: $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{ges}}}{\mathrm{d}t} = 0$. Daraus ergibt sich die Bewegungsgleichung. Bestimmen Sie diese!
Hinweis: Wie hängt die zeitliche Ableitung der Höhe mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit zusammen?

a)



Definition einer Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

Wir berechnen das Trägheitsmoment bezüglich die z-Achse

$$r_\perp := \sqrt{x^2+y^2}$$

$$dm = 2\pi r_\perp \left(2\sqrt{R^2 - r_\perp^2}\right) \rho \, dr_\perp$$

$$\rho := \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$J = \int r_\perp^2 \, dm$$

$$= \int_0^R r_\perp^2 (4\pi) r_\perp \sqrt{R^2 - r_\perp^2} \, \rho \, dr_\perp$$

$$= 4\pi\rho \int_0^R r_\perp^3 \sqrt{R^2 - r_\perp^2} \, dr_\perp$$

$$r_\perp = R\sin\theta, \quad dr_\perp = R\cos\theta \, d\theta$$

$$J = 4\pi\rho \int_0^{\pi/2} R^3 \sin^3\theta \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta} \, R\cos\theta \, d\theta$$

$$= 4\pi\rho R^5 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

Nebenrechnung:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{4}\sin^4\theta\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \, d\theta$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \, d\theta$$

Außerdem: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta (1 - \sin^2\theta) \, d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\, d\theta = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta - \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{15}$$

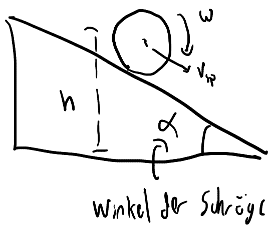
$$J = 4\pi\rho R^5\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4\pi\rho R^5\, \frac{2}{15}$$

$$= \frac{8}{15}\pi R^5\, \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$= \frac{2}{5}MR^2$$

b)



Ohne Schlupf: $V_{sp} = \omega R$

$$KE = \frac{1}{2}MV_{sp}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\omega^2$$

$$E = \frac{1}{2}MV_{sp}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{V_{sp}}{R}\right)^2 + Mgh$$

$$= \frac{1}{2}M\left(1+\frac{2}{5}\right)V_{sp}^2 + Mgh$$

$$= \frac{7}{10}MV_{sp}^2 + Mgh$$

c)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{7}{10}M\frac{d}{dt}\left(v_{sp}^2\right) + Mg\frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{7}{5}MV_{sp}\dot{v}_{sp} + Mg\frac{dh}{dt} = 0$$

$$\frac{dh}{dt} = -V_{sp}\sin\alpha$$

$$0 = \frac{7}{5}\cancel{M}\cancel{V_{sp}}\dot{v}_{sp} - \cancel{M}g\cancel{V_{sp}}\sin\alpha = 0$$

$$\frac{7}{5}\dot{v}_{sp} = g\sin\alpha$$