Analysis 2 Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: October 23, 2023)

Problem 1. (a) Man berechne den Abstand der Punkte $P(8|-2|-4)$ und $Q(5|4|-6)$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch die Punkte $P_1(2|3|1)$, $P_2(0|2|3)$ und $P_3(1|2|2)$ gegebenen Dreiecks.

(c) Zeigen Sie, dass gilt ($|\vec{\mathbf{a}}| = a$ usw.): $\left|\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}\right| \leq a \cdot b.$

Solution. (a)

$$\begin{aligned} d(P,Q) =& \sqrt{(8-5)^2 + (-2-4)^2 + (-4+6)^2} \\ =& \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} \\ =& \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

(b)

$$P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1) &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$|(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c) $|\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}| = |ab\cos\theta| = ab|\cos\theta| \leq ab.$ □

Problem 2. Auf der A3 zwischen dem Kreuz Biebelried und der Abfahrt Randersacker ist ein 4 km langer Stau vor einer Baustelle.

(a) Wie viele Autos stehen ungefähr in diesem Stau?

(b) Wie viele Personen befinden sich in diesem Stau?

Solution. (a) Ein Auto ist ungefähr 2 m lang, und es gibt daher $\frac{4 \text{ km}}{2 \text{ m}} = 2000$ Autos in ein 4 km lange Gerade. Aber es gibt ungefähr 6 Spuren, und die Anzahl von Autos ist ungefähr $2000 \times 6 = 12000$ Autos im Stau.

(b) Es gibt wahrscheinlich durchschnittlich 2 Personen pro Auto, also 24000 Personen im Stau. □

Problem 3. Eine Familie macht einen Sonntagsspaziergang. Auf dem Rückweg beschließt das Kind 2,0 km entfernt vom Haus mit dem Fahrrad vorauszufahren. Die Eltern spazieren gemütlich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 3,0 km/h in Richtung Haus. Das Kind fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 8,0 km/h nach Hause. Dort angekommen dreht es um und fährt zurück zu seinen Eltern. Wenn es auf diese trifft, dreht es wieder um und fährt wieder zum Haus zur¨uck usw. bis die Eltern schließlich auch zu Hause ankommen.

(a) In welcher Entfernung zum Haus treffen die Eltern das Kind das 1. Mal, 2. Mal, 3. Mal nach dessen Losfahren wieder? (Skizze!)

(b) Welche Gesamtstrecke hat das Kind am Schluss (wenn alle zu Hause angekommen sind) zurückgelegt?

Solution. Sei

$$d = 2 \text{ km}$$
$$v_1 = 3 \text{ kmh}^{-1}$$
$$v_2 = 8 \text{ kmh}^1$$

(a) Sei t_n die Zeit, die die Eltern und das Kind sich zum n. Mal treffen. Die Eltern sind $x_n = d - v_1 t_n$ vom Haus entfernt. Wann treffen sie sich zum nächsten Mal (t_{n+1})? Es gilt:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} =& d - v_1 t_{n+1} \\
x_{n+1} + x_n =& v_2(t_{n+1} - t_n) \\
\underbrace{d - v_1 t_{n+1}}_{x_{n+1}} + \underbrace{d - v_1 t_n}_{x_n} =& v_2(t_{n+1} - t_n) \\
2d - v_1(t_{n+1} + t_n) =& v_2(t_{n+1} - t_n) \\
(v_2 + v_1)t_{n+1} + (v_1 - v_2)t_n =& 2d \\
t_{n+1} =& \frac{2d}{v_1 + v_2} + \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} t_n
\end{aligned}$$

Sei dann $t_0 = 0, a = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}, b = \frac{2d}{v_1 + v_2}$ und die Lösung ist:

$$t_n = \frac{(1 - a^n)b}{1 - a} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Weil $t_0 = 0$, ist $C = 0$. Numerisch ist $a = 5/11 \approx 0.455$ und $b \approx 0.634$ h. Daraus folgt die erste t_n und auch $x_n = d - v_1 t_n$:

n	t_n (h)	x_n (km)
0	0	2.00
1	0.364	0.909
2	0.529	0.413
3	0.604	0.188
4	0.638	0.0854
5	0.654	0.0388
6	0.661	0.0176

(b) $d = \frac{2 \text{ km}}{3 \text{ kmh}^{-1}} 8 \text{ kmh}^{-1} \approx 5.33$ km

□