Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 29, 2023)

Problem 1. Betrachten Sie eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Zahlen $d_1, \dots d_n \in \mathbb{R}$ auf der Diagonalen.

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $D := d_1 \dots d_n \neq 0$ gilt. Beweisen Sie, dass in diesem Fall die zu A inverse Matrix ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Seien nun alle Einträge von A ganze Zahlen und A invertierbar. Zeigen Sie, dass die inverse Matrix A^{-1} aus rationalen Einträgen besteht, wobei (im gekürzten Fall) als Nenner höchstens D auftritt.

Proof. (a) Es genügt zu zeigen, dass $\det(D) = d_1 \dots d_n$ für ein Dreiecksmatrix gilt. Wir beweisen es per Induktion auf n. Für $n = 1$ ist $\det(M) = M_{11}$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für $n-1$ gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Wir betrachten ein $n \times n$ Dreiecksmatrix D_n und ein Laplaceentwicklung auf der ersten Spalte.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \color{blue}{D_{n-1}} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

Also $\det(D_n) = a_{11}\det(D_{n-1})$. Als Induktionsannahme haben wir angenommen, dass $\det(D_{n-1}) = a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$. Daraus folgt:

$$\det(D_n) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Die Ergebnis folgt daraus und aus Proposition 6.28.

□

Problem 2. Es sei im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir definieren die Spur

$$\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad A \to \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Spur ist ein lineares Funktional in $M_n(\mathbb{K})^*$.

(b) Für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

(c) Für $A \in GL_n(\mathbb{K})$ und $B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt

$$\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(B).$$

(d) Ist $f \in M_N(\mathbb{K})^*$ ein lineares Funktional mit

$$f(AB) = f(BA), \qquad f(1) = n$$

für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, dann gilt bereits $f = \operatorname{tr}$.

Proof. (a) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(xA + yB) &= \sum_{i=1}^{n} (xA + yB)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(xA)_{ii} + (yB)_{ii}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (xA)_{ii} + \sum_{i=1}^{n} (yB)_{ii} \\
&= x \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii} + y \sum_{i=1}^{n} (B)_{ii} \\
&= x\operatorname{tr}(A) + y\operatorname{tr}(B).
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ik}B_{ki} && \text{wir dürfen endliche Summe umordnen} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}B_{ik} && \text{wir vertauschen } i \text{ und } k \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{ik}A_{ki} && \mathbb{K} \text{ ist kommutativ} \\
&= \operatorname{tr}(BA)
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(ABA^{-1}) &= \operatorname{tr}\left((AB)A^{-1}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(A^{-1}(AB)\right) \\
&= \operatorname{tr}(A^{-1}AB) \\
&= \operatorname{tr}(AB)
\end{aligned}$$

□

Problem 3. Bestimmen Sie zu den folgenden linearen Abbildungen jeweils alle Eigenwerte und Eigenräume. Entscheiden Sie weiterhin, ob die entsprechende Abbildung diagonalisierbar ist.

(a)

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \to Ax,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad x \to Ax,$$

mit A wie in (a).

(c)

$$T : M_n(\mathbb{K}) \to M_N(\mathbb{K}), \qquad A \to \operatorname{tr}(A)1.$$

(d)

$$T : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \qquad A \to A^T.$$

Proof. (a)

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) =& \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -4 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
=& (-1-\lambda)(-(1+\lambda)(2-\lambda) - 0) + (2 - (1+\lambda)(4)) \\
=& -\lambda - \lambda^3 \\
=& -\lambda(1+\lambda^2)
\end{aligned}$$

also $\lambda = 0$ ist ein Eigenwert, aber $1 + \lambda^2 = 0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$, also es gibt nur ein Eigenwert, also T ist nicht diagonaliserbar.

(b) Das charakteristische Polynom hat 3 unterschiedliche Eigenwerte, $\lambda = 0$ und $\lambda = \pm 1$. Weil alle Eigenwerte unterschiedlich sind und der Eigenraum mindestens Dimension 1 hat, ist es diagonalisierbar.

(c) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. A ist ein Eigenvektor von T genau dann, wenn

$$A = \lambda \operatorname{tr}(A) 1_n.$$

Also gilt, dass A diagonal ist und

$$n \operatorname{tr}(A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$$

also es gibt nur ein Eigenwert n und der Eigenraum ist gespannte durch

$$\operatorname{span}(1_n),$$

was ein 1-dimensionaler Vektorraum ist. Für $n > 1$ kann es kein Basis sein, und T ist nicht diagonaliserbar. Für $n = 1$ ist T das Identität, also es ist schon diagonal.

(d) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. A ist ein Eigenvektor genau dann, wenn

$$A^T = \lambda A.$$

□