4. Übung zur Einführung in die Algebra

Abgabe online in WueCampus bis zum 20.11.2023, 12 Uhr

Aufgabe 4.1 (1+1+2 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}^\star$, T die Menge der positiven Teiler von n und G eine Gruppe der Ordnung n. Für $t \in T$ definieren wir die Mengen

$$M_t := \{g \in G \mid \operatorname{ord}(g) = t\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes $g \in G$ in genau einer der Mengen M_t mit $t \in T$ liegt.

(b) Sei nun zudem G zyklisch. Zeigen Sie, dass dann $|M_t| = \varphi(t)$ für alle $t \in T$ gilt.

(c) Folgern Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}^\star$ gilt $n = \sum_{t|n,\ t>0} \varphi(t)$.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte; Hauptsatz über zyklische Gruppen)

Zeigen Sie, dass für eine Gruppe G der Ordnung $n \in \mathbb{N}^\star$ äquivalent sind:

(a) G ist zyklisch.

(b) G besitzt zu jedem positiven Teiler t von n genau eine Untergruppe der Ordnung t.

Aufgabe 4.3 (3+1 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Ordnungen der Elemente für jede der Diedergruppen D_n mit $n \geq 3$.

(b) Zeigen Sie, dass Satz 2.23 für nicht-abelsche Gruppen im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 4.4 (2+2 Punkte)

Sei $n \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $R := \{r^0, r^1, \dots, r^{n-1}\}$ ein Normalteiler von D_n ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\langle x \rangle$ für kein $x \in D_n \setminus R$ ein Normalteiler von D_n ist.

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich online im zugehörigen WueCampus-Kurs.