Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 3, 2023)

Problem 1. Sei λ_n^* das äußere Lebesgue-Maß und $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist λ_n^* messbar.

(b) Es gilt $\lambda_n^*(A \cap Q) + \lambda_n^*(A^c \cap Q) = \lambda_n^*(Q)$ für alle $Q \in \mathbb{J}(n)$.

Proof.

Definition 1. Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt μ^*-messbar, falls gilt

$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \qquad \forall D \subseteq X.$$

Weil alle Teilmengen $I \in \mathbb{J}(n)$ solche Teilmengen $D \subseteq X$ sind, gilt natürlich (a) $\implies$ (b). Jetzt bleibt (b) $\implies$ (a) zu zeigen. Es gibt, für jede $\epsilon > 0$, eine abzählbare Überdeckung $M = \{Q_i, i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{J}$ aus offene Intervale von D, für die gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) = \lambda_n^*(D) + \epsilon$. Für jede $Q_i \in M$ gilt

$$\lambda_n^*(A \cap Q_i) + \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \lambda_n^*(Q_i).$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A \cap Q_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) = \lambda_n^*(D) + \epsilon.$$

Sei $(Q_i), Q_i \in \mathbb{J}$ eine abzählbare Überdeckung von $A \cap D$ und $(P_i), P_i \in \mathbb{J}$ eine abzählbare Überdeckung von $A^c \cap D$, für die gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_n) \leq \lambda_n^*(A^c \cap D) + \epsilon, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^*(P_n) \leq \lambda_n^*(A^c \cap D) + \epsilon$ Wir betrachten Q_i:

$$\lambda_n^*(A \cap Q_i) + \lambda_n^*(A^c \cap Q_i) = \lambda_n^*(Q_i),$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^* \left(A \cap Q_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^*(Q_i) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(A^c \cap Q_i\right) \leq \lambda_n^*(A \cap D) + \epsilon.$$

Es gilt ähnlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^* \left(A^c \cap P_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^*(P_i) - \sum_{n=1}^{\infty} (A \cap P_i) \leq \lambda_n^*(A^c \cap D) + \epsilon.$$

□

Problem 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ein Maßraum und μ^* das von $(\mathcal{A}, \nu)$ induzierte äußere Maß auf X, d.h. in Satz 1.37 ist $K = \mathcal{A}$ und $\nu = \nu$. Nach Satz 1.59 induziert μ^* ein Maß $\mu := \mu^*|A(\mu^*)$ auf der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mu^*)$.

(a) Zeigen Sie, dass μ eine sogenannte Erweiterung von ν ist, also dass

   (1) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mu^*)$ und

   (2) $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.

(b) Gilt sogar $\mu = \nu$, also $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mu^*)$?

Proof. (a) Sei $A \in \mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, das für alle $D \subseteq X$, gilt

$$\mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) = \mu^*(D).$$

(b) Nein. Sei zum Beispiel $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma\left(\mathbb{J}(n)\right)$, und $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ das eingeschränkte Lebesgue-Maß. Dann ist $\mu^* = \lambda_n^*$, und daher μ das Lebesgue-Maß. Es gilt aber

$$\{q\} \notin \mathcal{A}_\sigma\left(\mathbb{J}(n)\right), \qquad q \in \mathbb{R},$$

obwohl jeder Punktmenge λ_n^* messbar ist.

□