

Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 3

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 12, 2023)

Problem 1. (a) Seien $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $a \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\{y \in Y \mid (a, y) \in C\} \in \mathcal{B}.$$

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n -Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann $K \times N$ eine λ_{m+n} -Nullmenge ist.

(c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine λ_m -Nullmenge und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n -Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann $M \times N$ eine λ_{m+n} -Nullmenge ist.

(d) Zeigen Sie Bemerkung 1.71, also dass $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n) \subsetneq \mathcal{L}(m+n)$.

Hinweis: Sie dürfen hierfür annehmen, dass $B \notin \mathcal{L}(n)$ tatsächlich existiert.

Proof. (a) Wir wissen, dass C eine abzählbare Vereinigung von Mengen $A_i \times B_i$, $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$. Sei $\Pi_2 : X \times Y, \Pi_2 : (a, b) \rightarrow b$.

(b) Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, A_i \in \mathbb{J}(m)$ eine endliche Überdeckung von K , wobei jedes $\lambda_m(A_i) < \infty$.

Das ist immer möglich, weil K kompakt ist. Wir können dann eine Überdeckung (A_i) von K wählen, und die Kompaktheit von K liefert eine endliche Teilüberdeckung.

Sei dann $A = \max(\lambda_m(A_1), \lambda_m(A_2), \dots, \lambda_m(A_n))$. Per Definition (N ist eine λ_n -Nullmenge) gibt es eine abzählbare Überdeckung $(B_j), B_j \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) < \frac{\epsilon}{nA}.$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Wir betrachten dann

$$M = \bigcup_{j=1}^n \{A_j \times B_i | i \in \mathbb{N}\},$$

was eine abzählbare Überdeckung von $K \times N$ ist, aber $\sum_{C \in M} \lambda_{n+m}(C) < \epsilon$, also $K \times N$ ist eine λ_{m+n} -Nullmenge.

□

Problem 2. Sei $A \in \mathcal{L}(n)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \inf \{ \lambda_n(K) | K \supseteq A, K \text{ kompakt} \}.$$

(b) Es gilt

$$\lambda_n(A) = \sup \{ \lambda_n(O) | O \subseteq A, O \text{ offen} \}.$$

Proof. (a) Falsch. Betrachten Sie $A = \mathbb{Q}$. Weil \mathbb{Q} nicht beschränkt ist, gibt es keine kompakte Mengen K mit $K \supseteq A$. Deswegen ist

$$0 = \lambda_n(\mathbb{Q}) \neq \inf \{ \lambda_n(K) | K \supseteq A, K \text{ kompakt} \} = \infty.$$

Bemerkung

Erinnern Sie sich daran, dass wir $\inf(\emptyset) = \infty$ definieren. Sonst kann man $\lambda_n(\mathbb{R})$ betrachten.

(b) Wahr.

□

Problem 3. (Maße von Matrixbildern)

(a) Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und $\mu : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß. Zeigen Sie, dass $\mu_S : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, \infty]$, $\mu_S(A) := \mu(SA)$ wohldefiniert und ein Maß ist.

(b) Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht invertierbar. Zeigen Sie, dass $\lambda_n(SA) = 0$ für alle $A \in L(n)$ gilt.

Proof. Wir werden sehr oft eine Matrizennorm brauchen:

Matriz ∞ -Norm

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und $x \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren:

$$\|x\| = \|x\|_\infty, \text{ wie in der Vorlesung, und}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

- (a) (i) (Wohldefiniert) Wir müssen nur zeigen, dass SA offen ist. Wir definieren die übliche Norm auf Matrizen $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$. Weil S invertierbar ist, muss $\|A\| > 0$ gelten. Sei $x \in A$ und eine r , sodass $B_r(x) \subseteq A$. Sei $y \in B_r(x)$. Es gilt

$$|Ay - Ax| \leq \|A\| |y - x| \leq \|A\| r$$

also $B_{\|A\|r}(Sx) \subseteq SA$. Daraus folgt, dass SA offen ist, und μ_S wohldefiniert ist.

- (ii) Wir haben auch, $\mu_S(\emptyset) = \mu(S\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

- (iii) Sei $(A_j), A_j \in \mathcal{L}(n)$ eine Folge von messbare Mengen. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \mu_S \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &= \mu \left(S \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(SA_i) && (\sigma\text{-Additivität von } \mu) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_S(A_i) \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass SA_i noch paarweise disjunkt ist, weil S bijektiv (insbesondere injektiv) ist.

- (b) Weil S nicht invertierbar ist, gibt es ein nichttriviales Kern. Wir entscheiden uns für ein Vektor $v_1 \in \ker(S)$. Dann machen wir ein Basisergänzung, um ein Basis zu konstruieren:

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

□