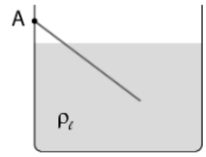
Aufgabe 11.1: *Auftrieb* .... (4 Punkte)



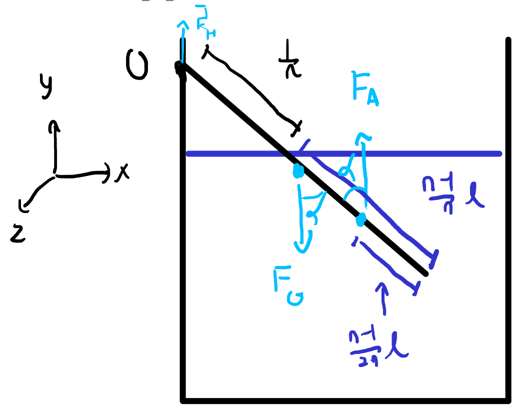
Ein langer, dünner, homogener Stab (Länge l, Querschnittsfläche A) ist am Rand eines Gefäßes befestigt und hängt zum Teil im Wasser (Dichte ρ_l). Der Stab kann frei in der Zeichenebene um die Befestigung rotieren. Im Gleichgewichtszustand ist $1/n$-tel des Stabes nicht im Wasser. Vernachlässigen Sie Oberflächeneffekte.

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

(2 P) a) Bestimmen Sie die Dichte des Stabes ρ_s im Verhältnis zur Dichte des Wassers. Machen Sie eine Skizze mit den von Ihnen verwendeten Größen.

(1 P) b) Bestimmen Sie die Kraft $\vec{F}_H$, die die Befestigung auf den Stab ausübt.

(1 P) c) Das Stabende befindet sich zu Beginn in der Tiefe $y = h_1$ unter der Wasseroberfläche. Wird die Füllhöhe des Gefäßes verändert, verändert sich auch der Winkel, den der Stab zur Wand einnimmt. Bestimmen Sie diesen Winkel als Funktion der Höhenänderung y der Wasseroberfläche. Die y-Achse zeige nach unten. Bei welcher Füllhöhe stößt der Stab gegen die Wand?



Auftriebskraft übt nur auf den Teil im Wasser aus.

$$F_A = \left(Al\frac{n-1}{n}\right) g \rho_l$$

$$F_G = (Al\rho_s) g$$

Totales Drehmoment bzgl. O

$$= \left[F_A\, l\left[1-\frac{n-1}{2n}\right]\sin\alpha - F_G\left(\frac{l}{2}\right)\sin\alpha\right]\hat{z}$$

$$= \hat{z}\left[\left(Al^2\frac{n-1}{n}\right) g\rho_l\left(\frac{n+1}{2n}\right)\sin\alpha - (Al\rho_s)g\,\frac{l}{2}\sin\alpha\right]$$

$$= \hat{z}\, A l^2 g\left[\frac{n-1}{n}\,\frac{n+1}{2n}\rho_l - \frac{\rho_s}{2}\right]\sin\alpha \qquad = \vec{0}$$

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{n+1}{\cancel{2}n}\rho_l - \frac{\rho_s}{\cancel{2}} = 0$$

$$\rho_s = \frac{n^2-1}{n^2}\rho_l$$

b) $\vec{F}_{Gesamt} = \vec{0}$

$$\vec{F}_H + \vec{F}_A + \vec{F}_G = 0$$

$$F_{H,y}\,\hat{y} + \left(Al\frac{n-1}{n}\right)g\rho_l\,\hat{y} - (Al\rho_s)g\,\hat{y}$$

$$= \left[F_{H,y} + Al\frac{n-1}{n}g\rho_l - Al\rho_s g\right]\hat{y} = 0$$

$$F_{H,y} = Al\rho_s g - Al\frac{n-1}{n}g\rho_l$$

$$= Alg\frac{n^2-1}{n^2}\rho_l - Al\frac{n-1}{n}g\rho_l$$

$$= A l g \rho_l \left[\frac{n^2-1}{n^2} - \frac{n-1}{n} \right]$$

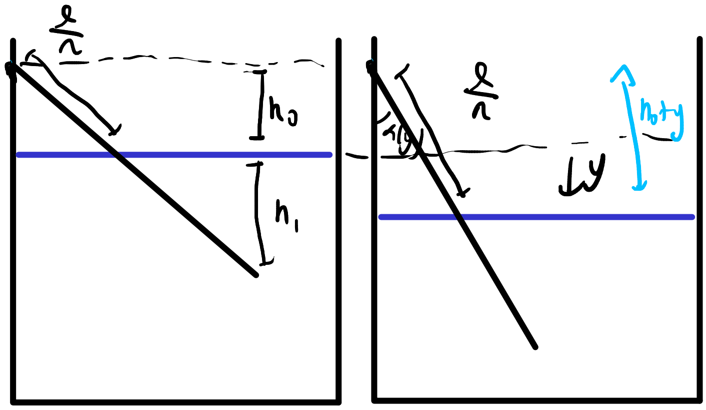
$$= A l g \rho_l \frac{n-1}{n} \left[\frac{n-1}{n} - 1 \right]$$

$$= A l g \rho_l \frac{n-1}{n} \left(-\frac{1}{n} \right)$$

$$\vec{F}_H = - A l g \rho_l \frac{n-1}{n^2} \hat{y}$$

c)

Die Gleichungen, durch die die Gleichgewichtsort festgelegt ist, sind nicht von \alpha abhängig, also 1 / n bleibt nicht im Wasser.



Ähnliche Dreiecke: $\frac{h_0}{l/n} = \frac{h_0+h_1}{l}$

$$n h_0 = h_0 + h_1$$

$$h_0 = \frac{h_1}{n-1}$$

$$\cos\alpha = \frac{h_0+y}{l/n}$$

$$= \frac{n}{l}\left[\frac{h_1}{n-1} + y\right]$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{n}{l}\left(\frac{h_1}{n-1} + y\right)\right]$$