

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Ein Überblick -

7. Februar 2025

Dieses Skript hat den Zweck, einen Überblick über den Inhalt der Veranstaltung Gewöhnliche Differentialgleichungen im Wintersemester 2024 / 2025 zu geben. Der Skript wird ab und zu vervollständigt im Laufe dieser Lehrveranstaltung. Bitte beachten Sie, dass das Skript noch viele Tippfehler enthält.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Das mathematische Pendel	6
1.2	Elektrische Schaltung	7
1.3	Wachstum der Zellpopulationen	7
2	Elementare Analysis- und Lösungsverfahren	8
2.1	Separable Gleichungen / Trennung der Variablen	8
2.2	Exakte Differentialgleichungen	13
2.3	Integrierende Faktoren	17
2.4	Transformationen	19
2.5	Homogene Differentialgleichungen	20
2.6	Lineare DGL	21
3	Eindeutigkeit von Lösungen	22
4	Existenz von Lösungen	24
5	Das maximale Existenzintervall (maximale Lösung)	32
5.1	Linear beschränkte Differentialgleichungen	37
6	Stetige Abhängigkeit der Lösungen von Anfangsbedingungen und der rechten Seite der DGL	38
7	Lineare Systeme von Differentialgleichungen	41
7.1	Lineare zeitvariante inhomogene Gleichungen	47
7.2	Reduktion der Ordnung (d'Alembert Methode)	50
7.3	Zeitinvariante Lineare Differentialgleichungen	52
7.3.1	Operatornormen	52
7.4	Homogene linDGL mit konstanten Koeffizienten	53
7.4.1	Matrix-Exponentialfunktion	53
7.5	Berechnung von e^{At}	61
7.5.1	Berechnung von e^{At} : Reelle Jordanblöcke für Paare komplexer Eigenwerte	64
7.6	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	66
7.7	Konstante Koeffizienten	68
7.7.1	Spezielle Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen	73

8	LinDGL mit periodischen Koeffizienten	76
8.1	Matrixlogarithmus	76
8.2	Lineare DGL-systeme mit periodischen Koeffizienten	78
9	Autonome Systeme	79
9.1	Grenzmengen	81
9.2	Gruppeneigenschaft	82
10	Modellierung mit DGL	83
11	Stabilität	83
11.1	Lineare autonome Systeme	86
11.2	Lyapunov-Funktion	93
11.3	Linearisierungsmethode	97
12	Stetige Differenzierbarkeit der Lösung nach einem Parameter	99
12.1	Differenzierbarkeit bzgl. Anfangswert	101
13	Erste Integrale	102
13.0.1	Geometrische Deutung	102
13.1	Erste Integrale für autonome DGL	106
13.2	Gleichheit von Differentialformen	107
14	Differentialgleichungen mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung	109
14.1	Lineare homogene PDGL	109
14.2	Quasilineare PDGL 1. Ordnung	110

1 Einleitung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine k -mal differenzierbare Funktion ($x \in \mathcal{C}^k$). Notation

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}x(t) \\ \ddot{x}(t) &= \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ \dddot{x}(t) &= \frac{d^3}{dt^3}x(t) \\ x^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k}x(t), \quad k \geq 4.\end{aligned}$$

Definition 1.1 Sei $D \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{N+1}$ nicht leer und sei $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine Gleichung der Form

$$F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(N)}) = 0 \quad (1)$$

heißt gewöhnliche Differentialgleichung. Dabei ist n die Dimension der Gleichung und die höchste auftretende Ableitung N heißt Ordnung der Gleichung. Gleichungen der Form (1) heißen implizit. Kann die Gleichung in der Form

$$x^{(N)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(N-1)})$$

geschrieben werden, so heißt die Gleichung explizit. In diesem Fall ist $D \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^N$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Beispiel 1 Das 2. Newtonsche Gesetz $F = ma$ kann in der Form

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

aufgeschrieben werden, wobei $x(t) \in \mathbb{R}^3$ die Position des Massenpunktes mit Masse m zur Zeit t bezeichnet und $F(t) \in \mathbb{R}^3$ für die wirkende Kraft steht. Dimension der DGL ist hier $n = 3$ und die Ordnung ist $N = 2$.

Für jedes $v, p \in \mathbb{R}^3$ erfüllt die Funktion $x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + vt + p$ diese DGL. Sie beschreibt die Bewegung des Massenpunktes in \mathbb{R}^3 .

Definition 1.2 (Lösungsbegriff) Sei $D \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{(N+1)}$ nicht leer und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösung der Differentialgleichung (1), wenn gilt

(i) I ist ein offenes Intervall und φ ist \mathcal{C}^N auf I .

(ii) Der Graph von φ und seiner Ableitungen ist Teilmenge von D :

$$\{(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \dots, \varphi^{(N)}(t)) \mid t \in I\} \subset D.$$

(iii) Für alle $t \in I$ gilt

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \dots, \varphi^{(N)}(t)) = 0. \quad (2)$$

Die Bedingungen (i) und (ii) sind dabei nebensächlich in dem Sinne, dass sie nur formuliert werden, damit φ in die Gleichung (1) eingesetzt werden kann. Manche Autoren verfolgen die Philosophie, dass die Gleichheit (2) bereits impliziert, dass (i) und (ii) erfüllt sind, sonst wäre der linke Ausdruck ja nicht definiert. Dementsprechend wird in den entsprechenden Büchern (i) und (ii) nicht erwähnt.

Bemerkungen zur Notation:

Manchmal wird die unabhängige Variable mit x bezeichnet und die unbekannte Funktion mit y . Die Ableitungen nach x werden dann, wie aus der Analysis gewohnt, mit y', y'' etc. bezeichnet. Die Gleichung (1) nimmt dann die Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(N)}) = 0$$

an.

Bemerkung:

Das „Gewöhnliche“ an gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht darin, dass die gesuchte Funktion von einer Variablen abhängt, bzw. dass alle Ableitungen nach einer Variablen auftreten. Nicht alle dynamischen Phänomene lassen sich derart beschreiben. So wird die Temperaturänderung $T = T(t, x)$ in einem Raum (im Punkt $x \in \mathbb{R}^3$) durch die Wärmeleitungsgleichung beschrieben, in der nicht nur eine Ableitung nach t auftritt, sondern auch Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 . Im eindimensionalen Fall ($x \in \mathbb{R}$), der etwa die Wärmeleitung in einem homogenen Stab beschreibt, lautet sie

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial^2}{\partial x^2} T = 0,$$

wobei $T(t, x)$ die Temperatur an der Stelle $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist. Die Untersuchung derartiger Gleichungen gehört in das Gebiet der Partiellen Differentialgleichungen.

Wir diskutieren nun einige Beispiele. Einerseits, um zu zeigen, dass Differentialgleichungen sich in verschiedenen Situationen als Modell anbieten. Andererseits soll ein Einblick in die Modellierung mit Hilfe der DGL gegeben werden.

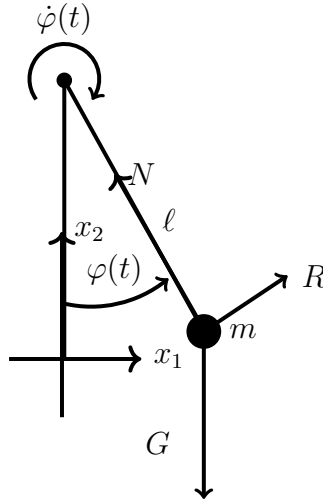


Abbildung 1: Schematische Abbildung des Pendels

1.1 Das mathematische Pendel

Das Pendel: Stab (masselos, Länge ℓ), der an einem Ende so aufgehängt ist, dass eine freie Rotation möglich ist. Am anderen Ende ist ein Massenpunkt der Masse m . Eventuell: mit Reibung /Luftwiderstand $R = -\mu v$. Die Bewegung findet in einer Ebene statt. Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ die Position des Massenpunkts, dann ist die Geschwindigkeit $v = \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$ und $a = \ddot{x} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$. Ausser Luftwiderstand wirkt die Schwerkraft G und die Reaktionskraft N . Im gezeichneten Koordinatensystem sind die Koordinaten der Vektoren wie folgt

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -n \sin \varphi \\ n \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad v = \ell \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad a = \ell \ddot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

wobei n die Norm von N ist. v ist die Geschwindigkeit und a ist die Beschleunigung. Die Vektorgleichung

$$ma = F = G + N + R$$

in diesen Koordinaten ist dann wie folgt

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Eliminiert man n aus den beiden skalaren Gleichungen, so bekommt man

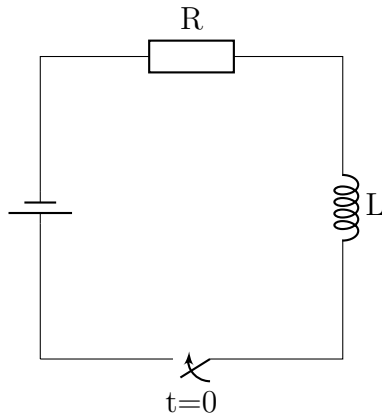
$$m\ell\ddot{\varphi}(t) = -mg \sin \varphi(t) - \mu\ell\dot{\varphi},$$

wobei $\mu \geq 0$ gegebene Konstante ist. Also ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t) - \frac{\mu}{m} \dot{\varphi}.$$

Dies ist eine explizite nichtlineare DGL. Allerdings gibt es keine explizite Formel für die Lösungen dieser DGL.

1.2 Elektrische Schaltung



Schließt der Schalter bei $t_0 = 0$ den Stromkreis, so beginnt der Strom zu fließen. Die Stromstärke I erfüllt die Kirchhoffsche Regeln, die zu folgender DGL führen

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V$$

am Anfang $t_0 = 0$ gilt die Anfangsbedingung $I(0) = 0$. Die Lösung ist dann $I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

1.3 Wachstum der Zellpopulationen

Es ist bekannt, dass die Bakterien sich durch Zellteilung vermehren. Nehmen wir an, dass die Zellteilungsrate konstant ist und von der Anzahl der Bakterien nicht abhängt.

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \alpha x(t) \Delta t.$$

Daraus folgt

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \alpha x(t).$$

Diese Gleichung gilt für alle $\Delta t > 0$. Für $\Delta t \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t). \quad (3)$$

Die direkte Substitution zeigt, dass $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ eine Lösung von (3) entsprechend dem Anfangswert $x(0) = x_0$ ist.

In diesem Falle waren wir klug genug um die Lösung zu finden, aber das ist nur selten möglich, deswegen wollen wir eine allgemeinere Methode ausdenken. Nehmen wir an, dass $x(0) \neq 0$.

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = \alpha dt$$

Daraus folgt

$$\int_0^t \frac{dx(s)}{x(s)} = \int_0^t \alpha ds$$

Dies impliziert

$$\ln |x(t)| - \ln |x(0)| = \alpha t$$

Also,

$$|x(t)| = |x(0)|e^{\alpha t}$$

und schließlich

$$x(t) = x(0)e^{\alpha t}. \quad (4)$$

Wir haben vorausgesetzt dass $x(0) \neq 0$ ist, aber da die Lösung für $x(0) = 0$ gleich $x \equiv 0$ ist. Die Formel (4) gilt auch für $x(0) = 0$. Also, wir haben eine Lösungsformel zu (3) für alle Anfangswerte gefunden.

2 Elementare Analysis- und Lösungsverfahren

2.1 Separable Gleichungen / Trennung der Variablen

Gleichung der Form (alle Funktionen und Variablen sind skalarwertig)

$$\dot{x} = h(t)g(x), \quad (5)$$

wobei h und g stetige Funktionen sind, heißt separabel. Sei $f(x) := \frac{1}{g(x)}$, dann gilt

$$f(x) \cdot \dot{x} = h(t)$$

wo die Variablen x und t getrennt sind. Sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = F'(x)\frac{dx}{dt} = f(x)\dot{x} = h(t)$$

und somit

$$F(x(t)) = \int h(t)dt + c, c \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Sei F^{-1} die Umkehrfunktion von F und H die Stammfunktion von H , so gilt

$$x(t) = F^{-1}(H(t) + c).$$

Diese formale Rechenvorschrift gilt es nun zu rechtfertigen. Dazu sei das folgende Anfangswertproblem gegeben:

$$\dot{x} = g(x)h(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (7)$$

Dabei sind $I, D \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und die Funktionen $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig.

Satz 2.1 Gegeben sei die Differentialgleichung (7), definiert auf der Menge $I \times D$.

- (a) Ist $x_0 \in D$, mit $g(x_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $x(t) = x_0, t \in I$ eine Lösung des Anfangswertproblems (7). (x_0 heißt dabei Ruhelage oder Gleichgewicht)
- (b) Ist $x_0 \in D$ mit $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein offenes Intervall $J \subset I$ um t_0 , so dass (7) auf J genau eine Lösung besitzt, für die $g(x(t)) \neq 0$ für $t \in J$ gilt. Sie kann aus

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dr}{h(r)} = \int_{t_0}^t g(s) ds \quad (8)$$

durch Auflösen nach $x(t)$ gewonnen werden.

Beweis: (a) Folgt sofort aus $\dot{x}(t) = 0$, da x konstant ist.

(b) Definiere $H \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ durch $H(t) = \int_{t_0}^t h(s) ds$. Dann gilt $H' = h$, $H(t_0) = 0$. Sei U das maximale Intervall in D mit $x_0 \in U$ und $g(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in U$. Damit ist U offen in \mathbb{R} . Wir definieren $G \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ durch

$$G(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)}, \quad x \in U.$$

Insbesondere gilt $G(x_0) = 0$, $G' = \frac{1}{g}$. Also ist G ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus (warum?), auf ein Intervall $V \subset \mathbb{R}$. D.h.

$$G : U \rightarrow V \quad \text{mit} \quad G(x_0) = 0 \in V.$$

Sei J das größte Intervall um t_0 , sodass $H(J) \subset V$ gilt, siehe Abbildung 2.1. Da G ein Diffeomorphismus ist, kann die Gleichung

$$G(x) = H(t) \quad (9)$$

umgeformt werden zu

$$x(t) = G^{-1}(H(t)) \quad \text{für } t \in J. \quad (10)$$

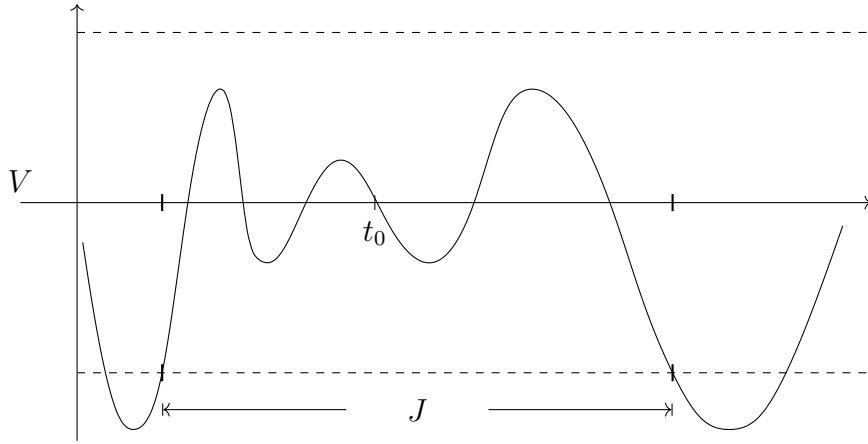


Abbildung 2: Der Graph von G und die Definition von J .

Die so definierte Funktion $x : J \rightarrow U$ erfüllt als Komposition von \mathcal{C}^1 -Funktionen, dass

$$x \in \mathcal{C}^1, \quad x(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = x_0.$$

Weiterhin, die Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion impliziert dass:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}G^{-1}(H(t)) = (G^{-1})'(H(t))\dot{H}(t) = \frac{\dot{H}(t)}{G'(G^{-1}(H(t)))} = \frac{h(t)}{1/g(x(t))} = g(x)h(t)$$

Also ist $x = G^{-1} \circ H : J \rightarrow D$ eine Lösung des Anfangswertproblems (7). Es bleibt die Eindeutigkeit auf J zu zeigen. Sei dazu $\tilde{x} \in \mathcal{C}^1(\tilde{J}, D)$ eine weitere Lösung mit $g(\tilde{x}(t)) \neq 0$ für alle $t \in \tilde{J}$. Es gilt $\tilde{x}(\tilde{J}) \subset U$ nach der Definition von U und der Stetigkeit von \tilde{x} . Ferner gilt für $t \in \tilde{J}$

$$\frac{d}{dt}G(\tilde{x}(t)) = G'(\tilde{x}(t)) \cdot \dot{\tilde{x}}(t) = \frac{1}{g(\tilde{x}(t))} \cdot h(t) \cdot h(\tilde{x}(t)) = h(t),$$

oder

$$G(\tilde{x}(t_0)) = H(t) + c, \quad t \in \tilde{J}.$$

Da außerdem $G(\tilde{x}(t_0)) = G(x_0) = 0 = H(t_0)$, folgt $c = 0$ und $G(\tilde{x}(t)) = H(t)$ für $t \in \tilde{J}$. Daher gilt $\tilde{x}(t) = G^{-1}(H(t)) = x(t)$ für alle $t \in J \cap \tilde{J}$. \square

Zur Anwendung des Verfahrens der Trennung der Variablen betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 2 Gegeben sei

$$\dot{x} = \frac{t^2}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Wir erhalten nach Umformung

$$\begin{aligned}x^2 \dot{x} &= t^2 \\ \int x^2(t) \dot{x}(t) dt &= \int t^2 dt + c \\ \frac{1}{3} x(t)^3 &= \frac{1}{3} t^3 + c \\ x(t) &= \sqrt[3]{t^3 + c}.\end{aligned}$$

(Da $c \mapsto 3c$ eine Bijektion auf \mathbb{R} ist, schreiben wir im letzten Schritt der Einfachheit halber wieder c statt $3c$.)

Man beachte hierbei, dass im vorliegenden Fall keine Gleichgewichtspunkte vorhanden sind, da $g(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$. Ferner führt die formale Rechnung zwar zu einer auf ganz \mathbb{R} definierten Funktion. Diese hat allerdings eine Nullstelle, an der die Differentialgleichung nicht definiert ist. Dies sieht man auch an dem gegebenen Ausdruck, da $\sqrt[3]{t^3 + c}$ für $c \neq 0$ nicht in $t = -\sqrt[3]{c}$ differenzierbar ist. Die ermittelten Lösungen der Differentialgleichung sind also

$$\begin{aligned}x_{1,c}(t) &= \sqrt[3]{t^3 + c}, & t \in (-\infty, -\sqrt[3]{c}) , \\ x_{2,c}(t) &= \sqrt[3]{t^3 + c}, & t \in (-\sqrt[3]{c}, \infty) , \\ x_0(t) &= t, & t \in \mathbb{R} .\end{aligned}$$

Hierbei ist $c \neq 0$ eine beliebige Konstante.

Noch ein Beispiel (nicht aus der Vorlesung)

Beispiel 3 Wir betrachten

$$e^x \dot{x} - t - t^3 = 0$$

und erhalten nach Umformung

$$\frac{d}{dt} e^{x(t)} = t + t^3.$$

D.h., für die Stammfunktionen gilt

$$e^{x(t)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

oder

$$x(t) = \ln \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c \right).$$

Möchte man ein Anfangswertproblem für eine separable Gleichung lösen, empfiehlt sich ein anderes Vorgehen. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \frac{g(t)}{f(x)}, \quad x(t_0) = x_0. \quad (11)$$

Integration führt zu den Bedingungen

$$F(x(t)) = \int g(t)dt + c, \quad x(t_0) = x_0.$$

Wir möchten

$$F(x(t)) - F(x_0) = \int_{t_0}^t g(s)ds \quad (12)$$

und mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$F(x(t)) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x(t)} f(r)dr$$

aus (12) folgt

$$\int_{x_0}^{x(t)} f(r)dr = \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

Diese Gleichung muss im konkreten Fall nur noch aufgelöst werden.

Beispiel 4 Löse das Anfangswertproblem

$$e^x \dot{x} - (t + t^3) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Methode 1: Aus Beispiel 2:

$$\begin{aligned} x(t) &= \log \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4 + c \right) \\ x(1) &= \log \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c \right) \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Auflösen der Gleichung führt zu

$$c = e - \frac{3}{4}.$$

Methode 2: Wir setzen direkt die Integralschranken ein und erhalten

$$\begin{aligned} \int_1^x e^r dr &= \int_1^t (s + s^3) ds \\ e^x - e &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{3}{4} \\ x(t) &= \log \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{3}{4} + e \right) \end{aligned}$$

auf einem geeigneten Definitionsbereich.

2.2 Exakte Differentialgleichungen

Eine Verallgemeinerung des Verfahrens der Trennung der Variablen liefern Differentialgleichungen, die in die Form

$$\frac{d}{dt}F(t, x) = 0$$

gebracht werden können. Denn durch Integration erhält man

$$F(t, x) = c,$$

was eine implizite Gleichung für x ist. Beachte, dass \dot{x} nicht mehr auftritt. Die Gleichung kann daher nach $x(t)$ aufgelöst werden, jedenfalls mit etwas Glück. Ferner sei darauf hingewiesen, dass es sich um eine Weiterentwicklung und Erweiterung des Begriffs der separablen Gleichungen handelt. Die Gleichung (6) zeigt sofort, dass separable Gleichungen exakt sind. Man mache sich an dieser Stelle klar, hinreichende Differenzierbarkeit aller Funktionen vorausgesetzt, dass die mehrdimensionale Kettenregel impliziert, dass

$$\frac{d}{dt}F(t, x(t)) = \frac{\partial}{\partial t}F(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}F(t, x(t)) \dot{x}(t). \quad (13)$$

Anwendung auf explizite gewöhnliche DGL

Definition 2.2 Seien $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, $M, N : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Differentialgleichung der Form

$$M(t, x) + N(t, x)\dot{x} = 0$$

heißt **exakt** auf U , falls es eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = M(t, x), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = N(t, x)$$

für alle $(t, x) \in U$ gilt. In diesem Fall heißt F Stammfunktion der Differentialgleichung.

Satz 2.3 Die Voraussetzungen seien gegeben wie in Definition 2.2. Sei

$$M(t, x) + N(t, x)\dot{x} = 0 \quad (14)$$

exakt. Eine \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lösung von (14) genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\text{Graph}(\varphi) \subset U$ und

$$F(t, \varphi(t)) = c \quad \forall t \in (\alpha, \beta). \quad (15)$$

Beweis: "⇒" Sei $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung. Dann folgt mit (13) und (14), dass

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(t, \varphi(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} F(t, \varphi(t)) + \frac{\partial}{\partial \varphi} F(t, \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \\ &= M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta).\end{aligned}$$

Also ist $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ konstant. Das war zu zeigen.

"⇐" Sei φ eine \mathcal{C}^1 -Funktion, die (15) erfüllt. Dann gilt $c \equiv F(t, \varphi(t))$. Es folgt

$$0 = \frac{dF}{dt}(t, \varphi(t)) = M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t)) \dot{\varphi}(t),$$

also löst φ (14). □

Beispiel 5 *Die Differentialgleichung*

$$\dot{x}t + x + t^2 = 0 \tag{16}$$

ist exakt auf \mathbb{R}^2 , denn die Stammfunktion

$$F(t, x) = tx + \frac{t^3}{3}$$

erfüllt

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = x + t^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = t.$$

Wir bezeichnen mit $N(t_0, x_0)$ die Niveaumengen, an denen der Wert $F(t_0, x_0)$ durch F angenommen wird. Die Niveaumenge zum Anfangswert (t_0, x_0) ist

$$N(t_0, x_0) = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx + \frac{t^3}{3} = t_0x_0 + \frac{t_0^3}{3} \right\}.$$

Zur Bestimmung der Lösungen treffen wir eine Fallunterscheidung.

$$N(t_0, x_0) = \begin{cases} \left\{ \left(t, \frac{1}{t} \left(t_0x_0 + \frac{t_0^3}{3} \right) - \frac{t^2}{3} \right) : t \neq 0 \right\}, & \text{falls } t_0x_0 + \frac{t_0^3}{3} \neq 0 \\ \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \left\{ \left(t, -\frac{t^2}{3} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erhalten also die Lösungen

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \frac{1}{t} \left(t_0x_0 + \frac{t_0^3}{3} \right) - \frac{t^2}{3}$$

und als einzige auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung die Funktion

$$\varphi : t \mapsto -\frac{t^2}{3}.$$

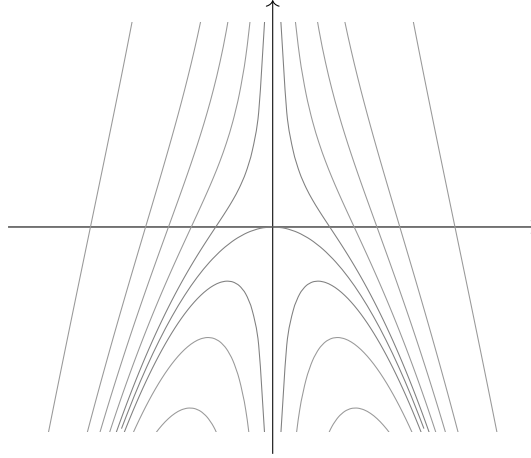


Abbildung 3: Darstellung der Höhenlinien $N(t_0, x_0)$ zum Beispiel 5.

Die Lösungen sind in Abbildung 3 dargestellt.

Es stellt sich nun die Frage, wie man erkennt, ob eine Differentialgleichung exakt ist.

Satz 2.4 Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck, (d.h. $U = (a, b) \times (c, d)$). Seien $M, N : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Differentialgleichung

$$M(t, x) + N(t, x)\dot{x} = 0$$

ist genau dann exakt, wenn gilt

$$\frac{\partial M}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, x), \quad (t, x) \in U. \quad (17)$$

In diesem Fall besitzt die Stammfunktion F_0 , die durch $F_0(t_0, x_0) = 0$ charakterisiert ist, die Darstellungen

$$F_0(t, x) = \int_{t_0}^t M(s, x) ds + \int_{x_0}^x N(t_0, w) dw, \quad (18)$$

$$= \int_{t_0}^t M(s, x_0) ds + \int_{x_0}^x N(t, w) dw. \quad (19)$$

Beweis: " \Rightarrow " Da M, N beide \mathcal{C}^1 -Funktionen sind, ist F selbst \mathcal{C}^2 . Es folgt mit dem Satz von Schwarz, dass

$$\frac{\partial M}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} N(t, x) \quad \text{für alle } (t, x) \in U.$$

Dies zeigt die Behauptung.

” \Leftarrow ” Wir rechnen nach, dass unter der Voraussetzung (17) die Funktion F_0 aus (18) eine Stammfunktion ist. Wir erhalten

$$\frac{\partial F_0}{\partial t}(t, x) = M(t, x), \quad (20)$$

sowie

$$\frac{\partial F_0}{\partial x}(t, x) = \int_{t_0}^t \frac{\partial M}{\partial x}(s, x) ds + N(t_0, x) \quad (21)$$

$$= \int_{t_0}^t \frac{\partial N}{\partial t}(s, x) ds + N(t_0, x) \quad (22)$$

$$= N(t, x) - N(t_0, x) + N(t_0, x). \quad (23)$$

Dies zeigt die Behauptung. Zu beachten ist, dass wir den Satz über die Differenzierbarkeit parameter-abhängiger Integrale verwenden (in (21))¹ sowie im Schritt von (21) nach (22) die Voraussetzung (17) des Satzes. \square

Das folgende Beispiel zeigt, dass es im vorigen Satz 2.4 wichtig ist, Rechtecke zu betrachten.

Beispiel 6 (Einfach zusammenhängende Gebiete sind notwendig!)

Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und betrachte

$$\underbrace{x \frac{t}{t^2 + x^2}}_N - \underbrace{\frac{x}{t^2 + x^2}}_M = 0. \quad (24)$$

Wir erhalten also $N(t, x) = \frac{t}{t^2 + x^2}$, $M(t, x) = -\frac{x}{t^2 + x^2}$ und somit auf U die Identität

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t, x) = \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} = \frac{\partial M}{\partial x}(t, x). \quad (25)$$

Die Differentialgleichung (20) ist aber **nicht** exakt auf U . Um dies einzusehen, nehmen wir Exaktheit an. D.h. wir nehmen an, es gibt ein $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = -\frac{x}{t^2 + x^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = \frac{t}{t^2 + x^2}, \quad (t, x) \in U.$$

Die Funktion $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$P(y) := F(\cos y, \sin y)$$

¹Siehe etwa: Kapitel 1, §9, Otto Forster, Analysis 2, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn

ist periodisch. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} P'(y) &= -\frac{\partial F}{\partial t}(\cos y, \sin y) \sin y + \frac{\partial F}{\partial x}(\cos y, \sin y) \cos y \\ &= \sin^2 y + \cos^2 y = 1. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Periodizität von P . Die Annahme der Existenz einer Stammfunktion F war also falsch.

2.3 Integrierende Faktoren

Der Sinn integrierender Faktoren besteht darin, Gleichungen als exakte Differentialgleichungen zu erkennen, obwohl sie sich auf den ersten Blick nicht so darstellen.

Die folgenden vier Gleichungen gehen durch offensichtliche Umformungen auseinander hervor.

$$\begin{array}{ll} a) & \dot{x} - tx = 0, \quad D_a = \mathbb{R}^2, \\ b) & \dot{x} \frac{1}{x} - t = 0, \quad D_b = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}, \\ c) & \dot{x} \frac{1}{t} - x = 0, \quad D_c = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | t \neq 0\}, \\ d) & \dot{x} \frac{1}{tx} - 1 = 0, \quad D_d = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | tx \neq 0\}. \end{array}$$

Die Bedingung an Exaktheit lautet in den vier Fällen:

$$a) \quad 0 \equiv -t \quad b) \quad 0 \equiv 0 \quad c) \quad -\frac{1}{t^2} \equiv -1 \quad d) \quad -\frac{1}{t^2 x} \equiv 0.$$

D.h. Gleichung b) ist exakt auf jedem Rechteck, das in D_b enthalten ist. Die anderen sind es nicht. Umgekehrt kann man sagen, dass die Gleichungen a), c), d) durch Multiplikation mit einem Faktor in exakte Form gebracht werden können.

Definition 2.5 Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$M(t, x) + N(t, x)\dot{x} = 0 \tag{26}$$

mit $M, N : U \rightarrow \mathbb{R}$, stetig. Eine stetige Funktion

$$\mu : U \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu(t, x) \neq 0, (t, x) \in U$$

heißt integrierender Faktor für (26), wenn die Differentialgleichung

$$\mu(t, x)N(t, x)\dot{x} + \mu(t, x)M(t, x) = 0 \quad (27)$$

exakt ist.

Man beachte zu dieser Definition, dass auf dem Definitionsbereich

$$\tilde{D} := \{(t, x) \in U; \mu(t, x) \neq 0 \quad \text{und} \quad N(t, x) \neq 0\}$$

die Lösungen von (26), (27) übereinstimmen, denn es sind gleichzeitig die Lösungen von

$$\dot{x} = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)}.$$

Beispiel 7 Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha,$$

wobei $\alpha > 0$. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Umschreiben der Differentialgleichung liefert

$$\dot{x} - a(t)x - b(t)x^\alpha = 0.$$

Wir suchen nun einen integrierenden Faktor. Sei dazu A eine Stammfunktion von a . Wir definieren

$$\mu(t, x) := (1 - \alpha)x^{-\alpha}e^{(\alpha-1)A(t)}$$

und prüfen, dass dies ein integrierender Faktor ist. Es gilt für die neuen Faktoren $\hat{N} = \mu N$, $\hat{M} = \mu M$, dass

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \mu, \\ \hat{M} &= [a(t)x + b(t)x^\alpha] (\alpha - 1)x^{-\alpha}e^{(\alpha-1)A(t)}. \end{aligned}$$

Man rechnet nun nach, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} &= a(t)(\alpha - 1)(1 - \alpha)x^{-\alpha}e^{(\alpha-1)A(t)} \\ &= (\alpha - 1)e^{(\alpha-1)A(t)} [(1 - \alpha)a(t)x^{-\alpha}] = \frac{\partial \hat{M}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (28)$$

Also ist die Differentialgleichung exakt auf rechteckigen Gebieten. Wir berechnen die Stammfunktion

$$\begin{aligned} F_0(t, x) &= \int_{t_0}^t \hat{M}(s, x) ds + \int_{x_0}^x \mu(t, w) dw \\ &= \int_{t_0}^t \hat{M}(s, x) ds - \left(w^{-\alpha+1} e^{(\alpha-1)A(t)} \Big|_{w=x_0}^x \right). \end{aligned}$$

Beim Berechnen der beiden Integrale stellt man fest, dass sich zwei Terme aufheben. Die allgemeine Lösung ist dann:

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{A(t)} \left[x_0^{1-\alpha} e^{(\alpha-1)A(t_0)} + (1-\alpha) \int_{t_0}^t b(s) e^{(\alpha-1)A(s)} ds \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

2.4 Transformationen

Ein weiterer Ansatz, Differentialgleichungen zu vereinfachen, besteht in dem geschickten Einsatz von Transformationen. Diese können manchmal verwendet werden, um Differentialgleichungen zu vereinfachen. Ein Spezialfall dieses Vorgehens betrifft die sogenannten homogenen Differentialgleichungen. Die Situation ist wie folgt:

Gegeben sei eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und die DGL

$$\dot{x} = f(t, x).$$

Wir betrachten nun einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} T : D &\rightarrow T(D) \subset \mathbb{R}^{1+n} \\ (t, x) &\mapsto (T(t, x)) =: (t, y). \end{aligned}$$

In den neuen Koordinaten erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} T(t, x) = \frac{\partial T}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial T}{\partial x}(t, x) \cdot \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial T}{\partial x}(t, x) \cdot f(t, x)$$

Setzt man nun die Rücktransformation $(t, x) = (T^{-1}(t, y))$ ein, so erhält man also

$$\dot{y} = \frac{\partial T}{\partial t}(T^{-1}(t, y)) + \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(t, y)) f(T^{-1}(t, y)).$$

Ist diese einfach zu lösen, so erhält man die Lösung der ursprünglichen Gleichung durch Rücktransformation.

2.5 Homogene Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (29)$$

heißt homogen, wenn $\forall (t, x) \in D, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(\gamma t, \gamma x) = f(t, x).$$

Damit dies sinnvoll ist, setzen wir für den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ voraus, dass D stets offen ist und dass $t \neq 0$ für alle $(t, x) \in D$ gilt, sowie

$$(t, x) \in D \Rightarrow \left[\gamma(t, x) \in D \quad \forall \gamma \neq 0 \right].$$

Wir betrachten nun die Transformation

$$(t, y) = T(t, x) := \left(t, \frac{x}{t} \right).$$

Sei $\varphi(t)$ eine Lösung von (29). Dann erhalten wir für die transformierte Lösung $\nu(t) := \frac{\varphi(t)}{t}$, dass

$$\dot{\nu} = \frac{t\dot{\varphi} - \varphi}{t^2} = \frac{tf(t, t\nu(t)) - t\nu(t)}{t^2} = \frac{f(1, \nu(t)) - \nu(t)}{t},$$

wobei wir im letzten Schritt die Homogenität von f ausgenutzt haben. Also ist $\nu(t)$ die Lösung von

$$\dot{y} = \frac{f(1, y) - y}{t}.$$

Diese Differentialgleichung ist nun separabel und kann nach dem Verfahren der Trennung der Variablen gelöst werden.

Beispiel 8 *Die Gleichung*

$$\dot{x} = \frac{x}{t} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}$$

ist offensichtlich homogen, denn Einsetzen von $\gamma(t, x)$ in der rechten Seite führt zum selben Ergebnis wie Einsetzen von (t, x) . Der Definitionsbereich der Gleichung ist

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t| > |x|\}.$$

Durch Einsetzen des allgemeinen Verfahrens erhalten wir

$$\dot{y} = \frac{f(1, y) - y}{t} = \frac{y + \sqrt{1 - y^2} - y}{t} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{t}$$

mit Definitionsbereich

$$\hat{D} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0, |y| < 1\}.$$

Mit Trennung der Variablen erhalten wir für den Anfangswert $(t_0, y_0) \in \hat{D}$

$$\arcsin y - \arcsin y_0 = \int_{y_0}^y \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \int_{t_0}^t \frac{ds}{s} = \log \frac{t}{t_0}$$

und damit

$$\nu(t; t_0, y_0) = \sin \left(\arcsin y_0 + \log \frac{t}{t_0} \right).$$

Die Lösung der ursprünglichen Gleichung ist dann $\varphi(t; t_0, x_0) = t\nu \left(t; t_0, \frac{x_0}{t_0} \right)$.

Analoge Methoden bieten sich insbesondere an für Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = g(\alpha t + \beta x + \gamma).$$

Die Transformation $y = \alpha t + \beta x + \gamma$ führt dann zu

$$\dot{y} = \alpha + \beta \dot{x} = \alpha + \beta g(y),$$

was manchmal eine wesentliche Vereinfachung ist.

2.6 Lineare DGL

Seien a, b stetig auf $I \subset \mathbb{R}$ und $y' = a(x)y + b(x)$ – (skalare) lineare DGL.

- Löse $y' = a(x)y$: $y(x) = ce^{\int a(x)dx} =: c\phi(x), \quad c \in \mathbb{R}$
- Ansatz (Variation der Konstante):
 $y(x) = c(x)\phi(x) \rightarrow c'(x) = b(x)/\phi(x)$
- Berechnung von $c = c(x)$
- Lösung: $y(x) = c(x)\phi(x)$

Beispiel: $xy' = 2y - 2x^4$ (Wurde auf der Tafel gelöst.)

3 Eindeutigkeit von Lösungen

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

für $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, $t_0 \in I$, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ und suchen nach einer Bedingung, die uns die Eindeutigkeit einer Lösung (falls eine existiert) garantiert. Dazu beweisen wir zunächst ein

Lemma 3.1 Sei $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ und $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$|\dot{z}(t)| \leq k|z(t)| + m, \quad k \geq 0, \quad m \geq 0, \quad |z(t_0)| \leq r_0, \quad t \in I. \quad (30)$$

(i) Für $k = 0$ gilt $|z(t)| \leq r_0 + m|t - t_0|$, $t \in I$.

(ii) Für $k > 0$ gilt

$$|z(t)| \leq r_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1), \quad t \in I. \quad (31)$$

Bemerkung: Hier und später für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^n$ gilt $|a| := \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass (i) und (ii) für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$ gilt. Man beachte, falls $z(t) = 0$ für ein $t \in I$, dann sind für dieses t die Ungleichungen in (i) und (ii) erfüllt. Sei $t_1 \in I$ mit $t_1 > t_0$ und $z(t_1) \neq 0$. (Wenn solch ein t_1 nicht existiert, dann gilt (31) für alle $t \geq t_0$.) Falls die Menge $\{t \in [t_0, t_1] \mid z(t) = 0\} = \emptyset$, definieren wir $t^* := t_0$, sonst $t^* := \sup\{t \in [t_0, t_1] \mid z(t) = 0\}$ und es gilt wegen Stetigkeit $z(t^*) = 0$. Dann gilt $|z(t^*)| \leq r_0$ und es gilt

$$z(t) \neq 0, \quad t \in (t^*, t_1).$$

deswegen existiert die Ableitung von $|z(t)| := \sqrt{z_1^2(t) + \dots + z_n^2(t)}$. Aus $|z(t)|^2 = z^T z$ folgt

$$2|z(t)| \cdot \frac{d}{dt}|z(t)| = 2z^T \dot{z} \leq 2|z(t)| \cdot |\dot{z}(t)|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}|z(t)| \leq |\dot{z}(t)|.$$

Wir definieren $r(t) := |z(t)|$, $t \in (t^*, t_1)$, dann gilt $r(t^*) \leq r_0$ und

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}|z(t)| \leq |\dot{z}(t)| \leq kr + m, \quad t \in (t^*, t_1).$$

Daraus folgt (i), wenn man $k = 0$ setzt. Nun sei $k > 0$ und $\varphi(t) := e^{-kt}(r(t) + m/k)$. Dann gilt $\dot{\varphi}(t) = e^{-kt}(\dot{r} - kr - m) \leq 0$, also ist φ eine monoton fallende Funktion und $\varphi(t_1) \leq \varphi(t^*)$

$$\Leftrightarrow e^{-kt_1}(r(t_1) + m/k) \leq e^{-kt^*}(r(t^*) + m/k).$$

Umstellung nach $r(t_1)$ unter Berücksichtigung, dass $r(t^*) \leq r_0$, liefert

$$r(t_1) \leq r_0 e^{k(t_1-t^*)} + \frac{m}{k}(e^{k(t_1-t^*)} - 1) \leq r_0 e^{k(t_1-t_0)} + \frac{m}{k}(e^{k(t_1-t_0)} - 1).$$

Damit ist das Lemma für $t \geq t_0$ bewiesen. Der Fall $t < t_0$ folgt mit der Substitution t durch $-t$ und t_0 durch $-t_0$, was die Ausdrücke $|t - t_0|$ und $|\dot{z}|$ nicht ändert.

□

Definition 3.2 $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt lokal Lipschitz stetig bzgl. x auf D , falls für jede Kompakte Teilmenge $K \subset D$ $\exists k = k(K)$ so dass

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|, \quad t \in I, \quad x, y \in K. \quad (32)$$

Theorem 3.3 Sei $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf $I \times D$ und lokal Lipschitz stetig bzgl. x auf D . Für jeden Punkt $(t_0, x_0) \in I \times D$ gibt es nicht mehr als eine Lösung zu

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (33)$$

Beweis: Gebe es zwei verschiedene Lösungen x und y zu (33), dann $\exists t_1$ mit $x(t_1) \neq y(t_1)$. Sei $t_1 > t_0$ (der Fall $t_1 < t_0$ behandelt man analog). Wir definieren $z(t) := x(t) - y(t)$ und $t^* := \sup\{t \in [t_0, t_1] \mid z(t) = 0\}$ dann gilt wegen der Stetigkeit der Lösungen, dass $z(t^*) = 0$ und $z(t) \neq 0$ für $t \in (t^*, t_1]$. Sei $h > 0$ so klein, dass $B_h(t^*, x(t^*)) \subset I \times D$ und $K := \{x \in D \mid |x - x(t^*)|^2 \leq h\} \subset D$. Aus (32) folgt

$$|\dot{z}| = |\dot{x} - \dot{y}| = |f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y| = k|z|.$$

Dann folgt aus Lemma 3.1 (siehe (31) mit $m = 0$), dass $z(t) = 0$ für $t \in [t^*, t_1]$. Dies widerspricht $x(t_1) \neq y(t_1)$. Also kann es keine zwei verschiedene Lösungen geben. □

Folgende Behauptung hilft die Lipschitz Stetigkeit nachzuweisen.

Lemma 3.4 Ist $I \times D$ Konvex und $|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}| \leq \ell \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ in $I \times D$, so ist f Lipschitz stetig in D .

Beweis: Seien $x, y \in D$. Wir definieren für $s \in [0, 1]$ die Verbindungsstrecke $z(s) := y + s(x - y)$ von x nach y und $g(s) = f(t, z(s))$, dann gilt

$$\dot{g}(s) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(t, z) \dot{z}_j(s) =: A \dot{z}(s) = A(x - y), \quad A := \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(t, z).$$

Da die Strecke $\bar{x}y \in D$, gilt in jedem Punkt z dieser Strecke $|\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(t, z)| \leq \ell$, und deswegen gilt $\|A\| \leq n\ell$ und damit $|\dot{g}(s)| \leq n\ell|x - y|$. Also

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= |g(1) - g(0)| = \left| \int_0^1 \dot{g}(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |\dot{g}(s)| ds \leq \int_0^1 n\ell|x - y| ds = n\ell|x - y| = k|x - y| \end{aligned}$$

mit $k := n\ell$. □

4 Existenz von Lösungen

Sei $I \times D \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und sei $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten eine nichtautonome DGL

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in I \times D, \quad x(t_0) = x_0. \quad (\text{DGL})$$

Proposition 4.1 *Wenn $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (DGL) ist, dann löst die Funktion φ auch die folgende Integralgleichung:*

$$\varphi(t) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds}_{=: K(\varphi)(t)}. \quad (\text{IntGL})$$

Umgekehrt, wenn $\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (IntGL) ist, dann gilt $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und φ ist eine Lösung von (DGL).

Beweis: Integration von (DGL) von t_0 bis t unter Berücksichtigung von $x(t_0) = x_0$ liefert

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Ist φ eine Lösung von (DGL) so ist $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und erfüllt (IntGL). Umgekehrt, ist φ stetig und so dass (IntGL) gilt, dann ist $f(t, \varphi(t))$ stetig. Die Ableitung von (IntGL) liefert $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, also ist φ stetig diff-bar. Setzt man $t = t_0$ in (IntGL), so folgt $\varphi(t_0) = x_0$. □ Die Äquivalenz zwischen

(DGL) und (IntGL) wurde bewiesen unter der Annahme dass f stetig ist. Falls f nicht stetig ist, gilt die Äquivalenz nicht!

Betrachten wir das skalare AWP

$$\dot{x}(t) = \text{sign}(t)x(t), \quad x(0) = 1.$$

und die entsprechende Integralgleichung

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \text{sign}(s)x(s)ds.$$

Die Funktion $t \mapsto e^{|t|}$ löst die Integralgleichung, und könnte eine 'Lösung' für DGL sein, ist aber keine C^1 -Funktion.

Man kann das Konzept der Lösung von DGL verallgemeinern und absolut stetige Funktionen als Lösungen zulassen. Das nennt man 'DGL im Sinne von Caratheodory'.

Siehe 'Theory of Ordinary Differential Equations' by E. A. Coddington, N. Levinson.

Euler-Polygone

Die Approximation durch Euler-Polygone besteht darin, die rechte Seite der Differentialgleichung nur zu bestimmten Zeiten abzutasten. Sei dazu eine Schrittweite $h > 0$ gegeben. Dann definieren wir im Intervall $[t_0, t_0 + h]$

$$p_h(t) := x^0 + (t - t_0)f(t_0, x^0), \quad t \in [t_0, t_0 + h].$$

Diese Definition setzen wir induktiv fort und setzen für $t \in [t_0 + kh, t_0 + (k+1)h]$

$$p_h(t) := p_h(t_0 + kh) + (t - (t_0 + kh)) f(t_0 + kh, p_h(t_0 + kh)).$$

Analog gehen wir rückwärts in der Zeit vor und definieren für $k = 0, -1, -2, \dots$ und $t \in [t_0 + (k-1)h, t_0 + kh]$:

$$p_h(t) := p_h(t_0 + kh) + (t - (t_0 + kh))f(t_0 + kh, p_h(t_0 + kh)).$$

Durch diese Definition entsteht ein Polygonzug, bei dem die Steigungen auf den Teilintervallen der Länge h jeweils durch Auswertung von f an einer Stützstelle bestimmt werden, siehe Abbildung 4. Die Definition bricht ab, sobald eine Stützstelle des Euler-Polygons nicht mit in D liegt, da dann f nicht ausgewertet werden kann.

Picard-Iteration

Ein weiteres Verfahren für die Erzeugung approximativer Lösungen ist die

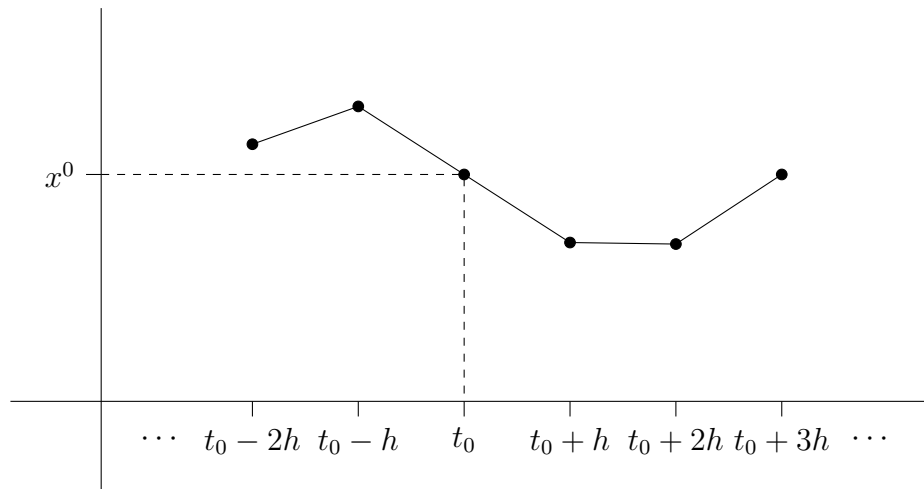


Abbildung 4: Skizze eines Euler-Polygons

rekursive Anwendung der rechten Seite der zu unserem Anfangswertproblem gehörenden Integralgleichung. Die Picard-Iterierten sind definiert durch

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &\equiv x^0, \\ \varphi_{k+1}(t) &= x^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds, \quad k \geq 0.\end{aligned}$$

Auch diese Definitionen gelten jeweils für die $t \in \mathbb{R}$, wo sie sinnvoll sind.

Der Satz von Peano

Die Idee zum Beweis der Existenz einer Lösung besteht darin, dass man die Konvergenz $p_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} p$, bzw. $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi$ nachweist und anschließend zeigt, dass die Grenzwertfunktion die Integralgleichung (IntGl) erfüllt, was äquivalent zu (DGL) ist.

Wir benötigen zunächst ein Kriterium dafür, dass aus einer Folge stetiger Funktionen eine gleichmäßig konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann.

Satz 4.2 (Arzelá-Ascoli) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen

$$f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

a) **gleichmäßiger Beschränktheit:**

zu jedem $x \in [a, b]$ gibt es eine Schranke S , so dass

$$\|f_k(x)\| \leq S \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

b) **gleichgradiger Stetigkeit:**

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \|f_k(x) - f_k(y)\| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann besitzt $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis: Die Menge $M := \mathbb{Q} \cap [a, b]$ ist abzählbar und dicht in $[a, b]$. Wähle eine Abzählung $M = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Wegen Beschränktheit der Folge $\{f_k(x_0)\}$ gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_1}\} \subset \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

$$f_{k_1}(x_0) \rightarrow y_0,$$

für ein geeignetes $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Aus demselben Grund existiert eine Teilfolge $\{f_{k_2}\} \subset \{f_{k_1}\}$, so dass

$$f_{k_2}(x_1) \rightarrow y_1.$$

Wir setzen dies nun induktiv fort und wählen jeweils Teilfolgen $\{f_{k_{\ell+1}}\} \subset \{f_{k_\ell}\}$ so dass $f_{k_{\ell+1}}(x_\ell) \rightarrow y_\ell$. Wir betrachten nun die unendliche Anordnung

$$\begin{array}{cccc} f_{11}(x_0) & f_{21}(x_0) & f_{31}(x_0) & \dots \\ f_{12}(x_1) & f_{22}(x_1) & f_{32}(x_1) & \dots \\ f_{13}(x_2) & f_{23}(x_2) & f_{33}(x_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

In jeder Zeile konvergiert die Folge nach Konstruktion für $k_\ell \rightarrow \infty$. Außerdem bilden die Indizes der darauffolgenden Zeile stets eine Teilmenge der Indizes der vorhergehenden Zeile.

Die Diagonalfolge

$$g_k := f_{k_k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

konvergiert daher punktweise für alle $x \in M$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert. Fixiere zu diesem Zweck $\varepsilon > 0$. Wegen gleichgradiger Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \|g_k(x) - g_k(y)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

Unterteile $[a, b] = \cup_{j=1}^{j_0} I_j$ in j_0 Intervalle positiver Länge, deren Länge stets kleiner als δ ist. Für jedes $j = 1, \dots, j_0$ wähle $x_j \in I_j \cap \mathbb{Q}$. Aufgrund des Cauchy-Kriteriums existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j = 1, \dots, j_0$ gilt

$$\|g_k(x_j) - g_m(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k, m \geq k_0. \quad (35)$$

Sei nun $x \in I$ beliebig. Dann gibt es ein $j = 1, \dots, j_0$, sodass $x \in I_j$. Wir erhalten für alle $k, m \geq k_0$

$$\begin{aligned} \|g_k(x) - g_m(x)\| &= \|g_k(x) - g_k(x_j) + g_k(x_j) - g_m(x_j) + g_m(x_j) - g_m(x)\| \\ &\leq \|g_k(x) - g_k(x_j)\| + \|g_k(x_j) - g_m(x_j)\| + \|g_m(x_j) - g_m(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad (36) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt in der ersten und dritten Ungleichung die Bedingung (34) und in der zweiten Ungleichung die Bedingung (35) verwendet haben. Nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz konvergiert die Folge $\{g_k\}$ gleichmäßig. \square

Zum Beweis der Existenz von Differentialgleichungen: Wir betrachten

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0.$$

Dabei sei f stetig auf der Zylindermenge

$$Z_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)}.$$

Wir definieren außerdem

$$M := \max \{ \|f(t, x)\| : (t, x) \in Z_{a,b} \}.$$

Satz 4.3 (Peano, quantitative Fassung) *Gegeben sei ein Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (37)$$

bei dem $f : Z_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist, $a > 0, b > 0$. Dann existiert eine Lösung des Anfangswertproblems (37) auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, wobei

$$\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

(Wir setzen dabei $\frac{b}{M} := \infty$, falls $M = 0$).

Beweis: Der Beweis auf der Tafel wurde durch den Ansatz

$$y_p(t) = x_0 \quad t \in [t_0 - h_p, t_0]$$

$$y_p(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_p(s - h_p)) ds, \quad t \in [t_0 + (i-1)h_p, t_0 + ih_p], \quad i = 1, \dots, p$$

wobei $h_p := \frac{\alpha}{p}$ und $p = 2, 3, 4, \dots$. Es wurde gezeigt, dass $p \rightarrow \infty$ die Konvergenz von y_p gegen eine Lösung gilt. Hier geben wir den Beweis für Euler-Polygone.

Wir können annehmen, dass $M > 0$, denn sonst gilt $f \equiv 0$ und $\varphi(t) \equiv x_0$ ist trivialerweise eine Lösung.

Schritt 1: Konstruktion von Euler-Polygonen

Sei $\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Da $Z_{a,b}$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig auf $Z_{a,b}$. Also gibt es für alle $k \geq 1$ ein $\delta(k) > 0$, so dass

$$\|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{falls} \quad |t - \tilde{t}| \leq \delta(k), \quad \|x - \tilde{x}\| \leq \delta(k). \quad (38)$$

Für alle k wähle ein geeignetes $n(k) \in \mathbb{N}$ und $h(k) := \frac{\alpha}{n(k)}$, so dass

$$0 < h(k) < \min \left\{ \delta(k), \frac{\delta(k)}{M} \right\}. \quad (39)$$

Im Folgenden ist es allerdings übersichtlicher, die Abhängigkeit von n und h von k nicht explizit zu notieren. Definiere nun die Eckpunkte des Polygonzugs durch $t_i := t_0 + ih$, $i = -n, \dots, n$,

$$x_i := \begin{cases} x_{i-1} + hf(t_{i-1}, x_{i-1}), & i = 1, \dots, n \\ x_{i+1} - hf(t_{i+1}, x_{i+1}), & i = -1, \dots, -n \end{cases}$$

und die Euler-Polygone durch

$$p_k(t) := \begin{cases} x_i + (t - t_i)f(t_i, x_i), & i = 0, \dots, n-1, t \in [t_i, t_{i+1}] \\ x_{i+1} + (t - t_{i+1})f(t_{i+1}, x_{i+1}), & i = -1, \dots, -n, t \in [t_i, t_{i+1}] \end{cases}.$$

Insbesondere gilt $p_k(t_i) = x_i$, $i = -n, \dots, n$. Diese Konstruktion ist zulässig, d.h. $(t_i, x_i) \in Z_{a,b}$, denn es gilt für alle i

$$\begin{aligned} \|x_i - x_0\| &= \left\| \sum_{j=0}^{i-1} x_{j+1} - x_j \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{i-1} p_k(t + j) - x_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{i-1} (t_{j+1} - t_j) f(t_j, x_j) \right\| \leq M \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (t_{j+1} - t_j) \leq M\alpha \leq b. \end{aligned}$$

Schritt 2: Die p_k erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli

Voraussetzung a: Gleichmäßige Beschränktheit ist erfüllt, da $Z_{a,b}$ kompakt ist.

Voraussetzung b: Gleichgradige Stetigkeit: es reicht zu zeigen, dass für alle k gilt

$$\|p_k(t) - p_k(s)\| \leq M|t - s|.$$

Dazu seien zunächst $t, s \in [t_i, t_{i+1}]$ für ein $i = 0, \dots, n$. Dann gilt

$$\|p_k(t) - p_k(s)\| = \|x_i + (t - t_i)f(t_i, x_i) - (x_i + (s - t_i)f(t_i, x_i))\| \leq M|t - s|.$$

Der Fall $i = -n, \dots, 0$ folgt analog. Andernfalls nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $t < s, t \in [t_i, t_{i+1}], s \in [t_j, t_{j+1}]$. Man erhält

$$\begin{aligned} \|p_k(t) - p_k(s)\| &= \|p_k(s) - p_k(t)\| = \|p_k(s) - p_k(t_j) + p_k(t_j) - p_k(t_{j-1}) - \dots + p_k(t_{i+1}) - p_k(t)\| \\ &\leq \|p_k(s) - p_k(t_j) + \sum_{l=i+1}^{j-1} p_k(t_{l+1}) - p_k(t_l) + p_k(t_{i+1}) - p_k(t)\| \\ &\leq \|p_k(s) - p_k(t_j)\| + \sum_{l=i+1}^{j-1} \|p_k(t_{l+1}) - p_k(t_l)\| + \|p_k(t_{i+1}) - p_k(t)\| \\ &\leq \|(s - t_j)f(t_j, x_j)\| + \sum_{l=i+1}^{j-1} \|(t_{l+1} - t_l)f(t_l, x_l)\| + \|(t_{i+1} - t)f(t_i, x_i)\| \\ &\leq M \left[|s - t_j| + \sum_{l=i+1}^{j-1} |t_{l+1} - t_l| + |t_{i+1} - t| \right] = M(s - t) = M|t - s| \\ &\leq M \left[t_j - s + \sum_{l=i+1}^{j-1} (t_{l+1} - t_l) + t_{i+1} - t \right] = M(s - t) = M|t - s| \end{aligned}$$

Nun liefert eine Anwendung des Satzes von Arzelá-Ascoli (Satz 4.2): es existiert eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bezeichnen.

Schritt 3: Die p_k sind " $\frac{1}{k}$ -Näherungslösungen" des Anfangswertproblems, d.h. es gilt

$$\|\dot{p}_k(t) - f(t, p_k(t))\| \leq \frac{1}{k} \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \setminus \{t_i | i = -n, \dots, n\}.$$

Dazu bemerken wir zunächst, dass für $t \in (t_i, t_{i+1})$ gilt (siehe (39))

$$\|p_k(t) - x_i\| = |t - t_i| \|f(t_i, x_i)\| \leq h(k)M \leq \delta(k),$$

sowie $|t - t_i| < h(k) \leq \delta(k)$. Daher folgt mit (38) für $t \in (t_i, t_{i+1})$, dass

$$\|\dot{p}_k(t) - f(t, p_k(t))\| = \|f(t_i, x_i) - f(t, p_k(t))\| \leq \frac{1}{k}.$$

Schritt 4: Die p_k sind " $\frac{1}{k}$ -Näherungslösungen" der Integralgleichung

Es ist also zu zeigen, dass für $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gilt

$$\left\| p_k(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, p_k(\tau)) d\tau \right\| \leq \frac{1}{k} |t - t_0|.$$

Dazu sei $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Dann gilt mit Schritt 3, dass

$$\begin{aligned} & \left\| p_k(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, p_k(\tau)) d\tau \right\| \\ &= \left\| p_k(t) - x_i - \int_{t_i}^t f(\tau, p_k(\tau)) d\tau + \sum_{j=0}^{i-1} \left[x_{j+1} - x_j - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau, p_k(\tau)) d\tau \right] \right\| \\ &= \left\| \int_{t_i}^t [\dot{p}_k(\tau) - f(\tau, p_k(\tau))] d\tau + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\dot{p}_k(\tau) - f(\tau, p_k(\tau))] d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_i}^t \frac{1}{k} d\tau + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{k} d\tau = \frac{1}{k} |t - t_0|. \end{aligned}$$

Schritt 5: Die Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Insbesondere ist die Grenzfunktion p_∞ stetig.

Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt aus dem Satz von Arzelá-Ascoli (Satz 4.2). Insbesondere ist die Grenzfunktion p_∞ stetig. Da f auf $Z_{a,b}$ gleichmäßig stetig ist, konvergiert auch die Folge der Abbildungen

$$t \mapsto f(t, p_k(t)), \quad t \in I_\alpha$$

gleichmäßig gegen die Grenzfunktion

$$t \mapsto f(t, P_\infty(t)), \quad t \in I_\alpha.$$

Es gilt daher für alle $t \in I_\alpha$

$$\begin{aligned} p_\infty(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x^0 + \int_{t_0}^t f(s, p_k(s)) ds \right) \\ &= x^0 + \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, p_k(s)) ds = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, p_\infty(s)) ds. \end{aligned}$$

Dabei haben wir für die Vertauschung von Grenzwert und Integral die Gleichmäßigkeit der Konvergenz verwendet. Dies zeigt, dass p_∞ das Anfangswertproblem löst, da es die zugehörige Integralgleichung löst. \square

Als Folgerung bekommen wir nun folgendes Resultat:

Satz 4.4 (Picard-Lindelöf) *Gegeben sei ein Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0, \quad (40)$$

bei dem $f : Z_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich x ist, $a > 0, b > 0$. Dann existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems (40) auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, wobei

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Beweis: Existenz folgt aus dem Satz von Peano (Satz 4.3), Eindeutigkeit aus dem Eindeutigkeitssatz (Theorem 3.3). \square

5 Das maximale Existenzintervall (maximale Lösung)

Nachdem wir uns bisher mit lokalen Lösungen beschäftigt haben, ist es nun das Ziel, globale Eigenschaften von Lösungen von Differentialgleichungen zu untersuchen. Die Lösung $x = x(t)$ aus dem P.-L.-Satz ist auf $I_0 = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ definiert. Man kann doch den Wert der Lösung $x_1 := x(t_0 + \alpha)$ als neuen Anfangswert zur Zeit $t_1 := t_0 + \alpha$ betrachten und den P.-L.-Satz wieder anwenden. Dann gibt es eine Lösung auf $I_1 = [t_1 - \alpha_1, t_1 + \alpha_1]$, die auf $I_0 \cap I_1$ mit der Lösung x übereinstimmt. So kann man iterativ immer neue Fortsetzung konstruieren auf $I_n = [t_n - \alpha_n, t_n + \alpha_n]$. Eventuell gilt dann $t_n \rightarrow \infty$. Das ist aber nicht immer so, wie das nächste Beispiel zeigt.

Betrachte

$$\dot{x} = x^2 + 1, \quad x(0) = 0.$$

Man kann a, b für $Z_{a,b}$ beliebig groß wählen, allerdings wird dabei M beliebig groß und deswegen $\alpha = \frac{b}{b^2+1} < \frac{1}{b}$ beliebig klein. Die obige Fortsetzungsprozedere kann bis maximal $t < \frac{\pi}{2}$ geführt werden. Dies sieht man an der zugehörigen Lösung $x(t) = \tan(t)$, die unbeschränkt wächst bei $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Satz 5.1 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich x . Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(t_0, x^0) \in D$ genau ein Intervall*

$$I = (t^-, t^+)$$

mit den Eigenschaften

$$(i) \quad -\infty \leq t^- < t_0 < t^+ \leq \infty.$$

(ii) Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x^0$ besitzt genau eine Lösung auf $I = (t^-, t^+)$.

(iii) Ist $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems für ein offenes Intervall J , so folgt $J \subset (t^-, t^+)$.

Beweis: Sei \mathcal{J} die Menge aller Intervalle J , auf denen eine Lösung $\varphi_J : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems existiert. Für $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$ gilt nach dem Eindeutigkeitssatz 3.3

$$\varphi_{J_1}(t) = \varphi_{J_2}(t) \quad \forall t \in J_1 \cap J_2. \quad (41)$$

Setze $I = \bigcup_{\mathcal{J}} J$. Die so definierte Menge I ist ein Intervall, da alle $J \in \mathcal{J}$ den Punkt t_0 enthalten. Also gilt $I = (t^-, t^+)$ für geeignete $t^-, t^+ \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ferner ist I offen als Vereinigung offener Mengen. Definiere nun $\varphi(t) := \varphi_J(t)$, $t \in J$. Wegen (41) ist dies wohldefiniert auf I . Wir können nun die einzelnen Behauptungen zeigen:

(i) Die Eigenschaft $t^- < t_0 < t^+$ folgt nach dem Satz von Picard-Lindelöf, Satz 4.4, da zumindest eine lokale Lösung existiert.

(ii) Folgt aus dem Eindeutigkeitssatz, Satz 3.3.

(iii) Dies gilt nach Konstruktion von I .

□

Definition 5.2 Das im vorigen Beweis konstruierte Intervall (t^-, t^+) heißt maximales Existenzintervall zum Anfangswert (t_0, x^0) . Es wird auch mit

$$I_{\max}(t_0, x^0) = (t^-(t_0, x^0), t^+(t_0, x^0))$$

bezeichnet. Die auf $I_{\max}(t_0, x^0)$ definierte Lösung wird als maximale Lösung $\varphi_{\max}(\cdot; t_0, x^0)$ bezeichnet.

Satz 5.3 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich x . Betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0. \quad (42)$$

Ist $t^+(t_0, x^0) < \infty$ und existiert

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) \quad (43)$$

für eine Folge $t_k \nearrow t^+(t_0, x^0)$, so folgt

$$(t^+(t_0, x^0), x^*) \in \partial D.$$

Analog gilt für $t^-(t_0, x^0)$: Gibt es eine Folge $t_k \searrow t^-(t_0, x^0)$, sodass (43) erfüllt ist, so folgt $(t^-(t_0, x^0), x^*) \in \partial D$.

Beweis: Sei φ_{\max} die maximale Lösung von (42). Dann gilt per Definition, dass $(s, \varphi_{\max}(s)) \in D$ für alle $s \in I_{\max}$. Insbesondere gilt $(t_k, \varphi_{\max}(t_k)) \in D$ für alle k , so dass mit (43) folgt, dass $(t^+, x^*) \in \overline{D}$. Wir nehmen an, dass $(t^+, x^*) \in D$ und führen diese Annahme zum Widerspruch. Damit folgt, dass $(t^+, x^*) \in \partial D$.

Nehmen wir also an, dass $(t^+, x^*) \in D$. Da D offen ist, gibt es hinreichend kleine $a > 0, b > 0$, so dass $[t^+ - a, t^+ + a] \times B(x^*, b) =: Z_{a,b}(t^+, x^*) \subset D$. Setze

$$M := \max_{(t,x) \in Z_{a,b}} \|f(t, x)\|, \quad \alpha := \frac{\min\{a, \frac{b}{M}\}}{2}.$$

Wähle nun ein hinreichend großes k , so dass für $\tilde{t} := t_k < t^+$ gilt

$$t^+ - a < \tilde{t} - \alpha < t^+ < \tilde{t} + \alpha < t^+ + a \quad \text{und} \quad \|\varphi(\tilde{t}) - x^*\| < \frac{b}{2}.$$

Sei $\tilde{x} := \varphi(\tilde{t})$. Wir bemerken nun, dass für das definierte α und $\beta = \frac{b}{2}$ gilt, dass $Z_{\alpha,\beta}(\tilde{t}, \tilde{x}) \subset Z_{a,b}$. Insbesondere ist M eine obere Schranke für $\|f\|$ auf $Z_{\alpha,\beta}$. Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert nun eine eindeutige Lösung ψ des Anfangswertproblems.

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tilde{t}) = \tilde{x}$$

auf einem Intervall der Länge $\min\{\alpha, \frac{b}{2M}\} = \alpha$, also auf $(\tilde{t} - \alpha, \tilde{t} + \alpha)$. Wegen $\psi(\tilde{t}) = \tilde{x} = \varphi(\tilde{t})$ stimmen φ und ψ auf $(\tilde{t} - \alpha, t^+)$ überein und die Funktion

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (t^-, t^+) \\ \psi(t), & t \in [\tilde{t} - \alpha, \tilde{t} + \alpha) \end{cases}$$

ist eine Lösung von (42) auf dem größeren Intervall $(t^-, \tilde{t} + \alpha)$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von t^+ . \square

Korollar 5.4 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich x . Sei $\varphi_{\max} : (t^-, t^+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems,

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Dann gilt:

- (i) Für jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ gibt es ein Intervall $[t_1, t_2] \subset I_{\max}$, so dass

$$(t, \varphi_{\max}(t)) \notin K \quad \forall t \in I_{\max} \setminus [t_1, t_2].$$

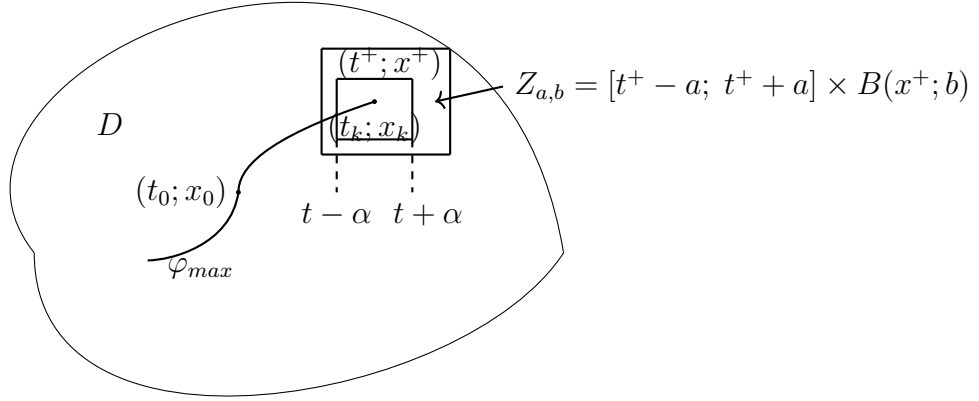


Abbildung 5: Zum Beweis der Aussage über die Fortsetzbarkeit der Lösungen

(ii) Ist $t^+ < \infty$, so ist φ_{\max} unbeschränkt oder es gilt

$$\partial D \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \lim_{t \nearrow t^+} \text{dist}((t, \varphi_{\max}(t)), \partial D) = 0.$$

(iii) Ist $t^- > -\infty$, so ist φ_{\max} unbeschränkt oder

$$\partial D \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \lim_{t \searrow t^-} \text{dist}((t, \varphi_{\max}(t)), \partial D) = 0.$$

Beweis:

(i) Andernfalls existiert eine Folge $t_k \rightarrow t^+$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, \varphi(t_k)) \in K \subset D.$$

Dies ist ein Widerspruch zu Satz 5.3.

(ii) Ist φ_{\max} beschränkt, so existiert eine Folge $t_k \rightarrow t^+$, mit $\varphi_{\max}(t_k) \rightarrow x^*$. Dann gilt nach Satz 5.3, dass $(t^+, x^*) \in \partial D \neq \emptyset$. Gilt

$$\limsup_{t \nearrow t^+} \text{dist}(t, \varphi_{\max}(t), \partial D) > 0,$$

so existiert wiederum eine Folge $t_k \rightarrow t^+$ mit

$$\text{dist}(t, \varphi_{\max}(t_k), \partial D) > \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

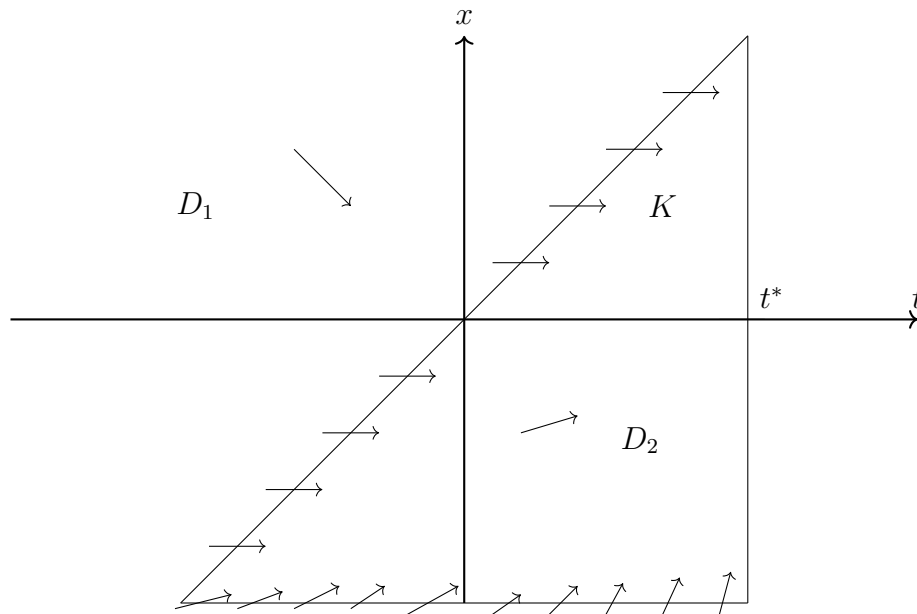
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit konvergiert $\varphi_{\max}(t_k) \rightarrow x^*$ aufgrund der Beschränkung von φ_{\max} . Für den Grenzwert gilt nach unserer Annahme $(t^+, x^*) \in D$. Das ist ein Widerspruch zu Satz 5.3.

(iii) Der Beweis erfolgt wie in (ii).

□

Beispiel 9 Zeigen Sie, dass für jede maximale Lösung zu $\dot{x} = t^3 - x^3$ gilt, dass $t^+ = \infty$ ist.

Sei $D_1 := \{(t, x) | x > t\}$ und $D_2 := \{(t, x) | x < t\}$. Jede Lösung, die in D_1 existiert, ist dort streng monoton fallend, da für ihre Ableitung $t^3 - x^3 < 0$ gilt. Deswegen erreicht der Graph dieser Lösung die Gerade $x = t$. Auf der Gerade ist die Ableitung der Lösung gleich Null. Also wird jede Lösung in D_2 treten. In D_2 ist jede Lösung monoton steigend. Sei $(t_0, x_0) \in D_2$ beliebig. Für jedes $t^* > t_0$ betrachten wir die kompakte Menge $K := \{(t, x) | x_0 - 1 \leq$



$x \leq t$ und $t \leq t^*\}$, siehe das Bild. Der Graph der Lösung, die durch (t_0, x_0) verläuft soll das K verlassen, siehe Korollar 5.4. Die Einzige Möglichkeit dafür ist: über die Strecke, die durch $t = t^*$ definiert ist (weil auf den anderen Seiten des Dreiecks das Richtungsfeld es nicht zulässt). Da t^* beliebig ist, folgt die Behauptung daraus.

5.1 Linear beschränkte Differentialgleichungen

Definition 5.5 Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt linear beschränkt auf J bezüglich x , wenn stetige Funktionen $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ existieren mit

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t) \quad \forall (t, x) \in J \times \mathbb{R}^n.$$

Satz 5.6 Sei $J = (\alpha, \beta)$ mit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ und $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, Lipschitz-stetig bezüglich x und linear beschränkt auf J bezüglich x . Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf J .

Beweis: Seien $\alpha_1 < \beta_1$ beliebig mit $[\alpha_1, \beta_1] \subset J$. Seien $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Es gibt $k, m \geq 0$ mit $\|a(t)\| \leq k$ und $\|b(t)\| \leq m$, deswegen gilt auf $[\alpha_1, \beta_1]$, dass

$$\|\dot{x}\| = \|f(t, x)\| \leq k\|x\| + m, \quad t \in [\alpha_1, \beta_1], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Aus Lemma 3.1 folgt

$$\|x\| \leq r_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1), \quad r := \|x_0\|$$

Sei

$$R := \max_{t \in [\alpha_1, \beta_1]} r_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1).$$

Sei $K = [\alpha_1, \beta_1] \times \{|x| \leq R + 1\}$. Dann folgt aus dem letzten Korollar, dass die Lösung bis zum Rand von K fortsetzbar ist. Da $\|x\| \leq R$ für alle $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ gilt, ist diese Lösung bis zur Grenze von $[\alpha_1, \beta_1]$ fortsetzbar. Wir betrachten $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots \rightarrow \alpha$ und $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots \rightarrow \beta$. Die Lösung ist dann analog auf ganz $[\alpha_i, \beta_i]$ für alle $i \in \mathbb{N}$ fortsetzbar. Aber $\cup_{i \in \mathbb{N}} [\alpha_i, \beta_i] = [\alpha, \beta] = J$. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Als Spezialfall betrachten wir lineare Systeme.

Satz 5.7 Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $A : J \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf ganz J .

Beweis: Zunächst ist $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ linear beschränkt durch

$$\|f(t, x)\| = \|A(t)x + b(t)\| \leq \|A(t)\| \|x\| + \|b(t)\|.$$

Ferner ist f stetig und Lipschitz-stetig in x auf $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ für jedes Intervall $[\alpha, \beta] \subset J$, denn

$$\|A(t)x + b(t) - A(t)y - b(t)\| \leq \|A(t)\| \|x - y\|.$$

und eine Lipschitz-Konstante ist dann $k := \max_{t \in [\alpha, \beta]} \|A(t)\|$. Satz 5.6 impliziert existenz eindeutiger Lösung auf $[\alpha, \beta]$. Da $[\alpha, \beta] \subset J$ beliebig ist, gilt die Behauptung für ganz J . \square

6 Stetige Abhängigkeit der Lösungen von Anfangsbedingungen und der rechten Seite der DGL

Satz 6.1 Sei $\varphi(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, $t \in I := [t_*, t_1] \ni t_0$ eine Lösung des AWP $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $U := \{(t, x) | t \in I, |x - \varphi(t)| \leq \rho\}$ eine Umgebung des Graphes dieser Lösung. Sei f stetig in (t, x) und Lipschitz stetig in x auf U . Dann $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ so dass jedes andere AWP $\dot{y} = g(t, y)$, $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, mit g stetig in (t, y) und Lipschitz stetig in y auf U und mit

$$\|y_0 - x_0\| < \delta, \quad \|g(t, x) - f(t, x)\| \leq \delta, \quad (t, x) \in U$$

eine Lösung $y = y(t)$ auf I besitzt und es gilt $\|y(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ für $t \in I$.

Bemerkung 1 Die Lösungen φ und y im obigen Theorem sind für jeweiligen AWP eindeutig.

Beweis: Sei $k > 0$ eine Lipschitzkonstante für f . Sei $I_1 \subset I$ sodass der Graph von y in U ist. Sei $z(t) := \varphi(t) - y(t)$, $t \in I_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\dot{z}(t)\| &= \|f(t, x) - g(t, y)\| = \|f(t, x) - f(t, y) + f(t, y) - g(t, y)\| \\ &\leq \|f(t, x) - f(t, y)\| + \|f(t, y) - g(t, y)\| \leq k\|x - y\| + \delta = k\|z\| + \delta \end{aligned}$$

and $\|z(t_0)\| \leq \delta$. Das Lemma 3.1 impliziert

$$\|y(t) - \varphi(t)\| = \|z(t)\| \leq \delta e^{ks} + \frac{\delta(e^{ks} - 1)}{k}, \quad t \in I_1, \quad s := \max\{t_1 - t_0, t_0 - t_*\}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\varepsilon_1 := \min\{\rho, \varepsilon\}$ und $\delta > 0$ so, dass $\delta e^{ks} + \frac{\delta(e^{ks} - 1)}{k} < \varepsilon_1$. Sei $K := \{(t, x) | t \in I_1, \|x - \varphi(t)\| \leq \varepsilon_1\}$.

$\|y_0 - x_0\| < \delta \Rightarrow$ der Graph der Lösung y für t in der Nähe von t_0 liegt in K . Wir haben früher bewiesen, dass der Graph von y geht über das K hinaus. In K gilt stets $\|y(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon_1$. Deswegen kann y über das I_1 nach links und rechts fortgesetzt werden und die Fortsetzung hat den Graph in U . Deswegen kann die Fortsetzung auf ganz I geführt werden. Deswegen gilt $\|y(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon_1$ für $t \in I$. \square

Korollar 6.2 *Seien I , f und φ wie im obigen Theorem. Sei $a_i \rightarrow x_0$ für $i \rightarrow \infty$ eine Folge. Sei χ_i die Lösung vom AWP $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = a_i$. Dann konvergiert $\chi_i \rightarrow \varphi$ für $i \rightarrow \infty$ gleichmässig auf I .*

Nun betrachten wir AWP mit einem Parameter. Sei $M \in \mathbb{R}^m$ ein Gebiet und $\mu \in M$ ein Parameter. Sei AWP gegeben durch

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = a(\mu), \quad (44)$$

wo die DGL und die Anfangbedingung von Parameter $\mu \in M$ abhängt. So hängt auch die Lösung von μ ab, die wir mit $\varphi = \varphi(t, \mu)$ bezeichnen.

Theorem 6.3 *Sei $\mu = \mu_0 \in M$ fest und sei $\varphi = \varphi(t, \mu_0)$ die auf $I \ni t_0$ definierte Lösung von (44). Sei $U := \{(t, x) | t \in I, |x - \varphi(t, \mu_0)| \leq \rho\}$. Für jedes $\mu \in M$ sei f stetig in (t, x, μ) und Lipschitz stetig in x auf $U \times M$. Sei $a = a(\mu)$ stetig auf M . Dann $\exists \eta > 0$, sodass $\varphi = \varphi(t, \mu)$ stetig ist für $t \in I$ und $\|\mu - \mu_0\| \leq \eta$.*

Beweis: Für jedes $\mu \in M$ das AWP (44) erfüllt alle bedingung vom Theorem 6.1. Deswegen $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass

$$\|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)\| \leq \delta, \quad (t, x) \in U, \quad \|a(\mu) - a(\mu_0)\| \leq \delta \quad (45)$$

impliziert die Existenz einer eindeutigen Lösung $\varphi(t, \mu)$ für $t \in I$ mit

$$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\| < \varepsilon. \quad (46)$$

Sei $M_0 \subset M$ kompakt mit $\mu_0 \in M_0 \setminus \partial M_0$, dann sind f und a gleichmäßig stetig für $(t, x) \in U$ und $\mu \in M_0$. Daraus folgt $\exists \eta > 0$, sodass $\|\mu - \mu_0\| \leq \eta \Rightarrow \mu \in M_0$ und (45) gilt für $(t, x) \in U$ und alle μ aus η -Umgebung von μ_0 . Aus Theorem 6.1 folgt, dass $\varphi(t, \mu)$ auf I existiert und (46) erfüllt, was die Stetigkeit in μ bei $\mu = \mu_0$ nachweist.

Sei q so dass $\|f(t, x, \mu)\| \leq q$ für alle $(t, x) \in U$ und alle μ mit $\|\mu - \mu_0\| \leq \eta$. Solch ein q existiert, weil f stetig ist. Deswegen gilt $\|\dot{\varphi}\| = \|f\| \leq q$, d.h

$$\|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(t, \mu)\| \leq q|t - \tau| \leq \varepsilon \quad \text{für } t, \tau \in I \text{ mit } |t - \tau| \leq \frac{\varepsilon}{q}$$

Daraus folgt mit Hilfe von (46), dass

$$\begin{aligned} \|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\| &= \|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(t, \mu) + \varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\| \\ &\leq \|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(t, \mu)\| + \|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)\| \leq 2\varepsilon \quad \text{für } t, \tau \in I \text{ mit } |t - \tau| \leq \frac{\varepsilon}{q}. \end{aligned}$$

Also ist die Lösung φ stetig für $t \in I$ und $\mu = \mu_0$.

Sei nun $\varepsilon \in (0, \rho)$. Dann gibt es ein $\eta_1 \in (0, \eta)$ sodass für jedes μ_1 mit $\|\mu_1 - \mu_0\| \leq \eta_1$ eine Lösung $\varphi = \varphi(t, \mu_1)$ existiert auf I und erfüllt (46). Das bedeutet, dass die Umgebung $U_1 := \{(t, x) | t \in I, |x - \varphi(t, \mu_1)| \leq \rho - \varepsilon\}$ des Graphes dieser Lösung in U enthalten ist. Deswegen gelten alle Bedingungen des Theorems für μ_1 and der Stelle von μ_0 . Daraus folgt, dass die Lösung $\varphi = \varphi(t, \mu)$ stetig ist in (t, μ) für $\mu = \mu_1$ mit $\|\mu_1 - \mu_0\| < \eta_1$, $t \in I$. \square

7 Lineare Systeme von Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden Differentialgleichungen behandelt, die linear im Zustand x sind. Aufgrund der Linearität lassen sich deutlich stärkere Aussagen treffen als im allgemeinen Fall.

Algebraische Struktur

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir betrachten stetige $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$, $g : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) \quad (47)$$

heißt (zeitvariante) lineare Differentialgleichung. Man nennt (47) homogen, wenn $g(t) \equiv 0$, also wenn

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (48)$$

und sonst inhomogen. Die Lösungsmenge zu einer Inhomogenität g bezeichnen wir mit

$$L(g) := \{\varphi \in C^1(I, \mathbb{K}^n) : \dot{\varphi} = A(t)\varphi + g(t), \quad t \in I\}.$$

Bemerkung 2 *Wegen linearer Beschränktheit sind alle Lösungen auf I fortsetzbar, siehe Satz 5.7.*

Lemma 7.1 (Superpositionsprinzip) *Sind φ_1, φ_2 Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{x} = A(t)x$ auf I , so folgt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, dass*

$$\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$$

eine Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ ist.

Beweis: Die Behauptung folgt durch Nachrechnen. Es gilt für alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)) \\ &= \alpha\dot{\varphi}_1(t) + \beta\dot{\varphi}_2(t) = \alpha A(t)\varphi_1(t) + \beta A(t)\varphi_2(t) = A(t) (\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)). \end{aligned}$$

□

Definition 7.2 *Seien V und W Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. f heißt ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen V und W , wenn f bijektiv ist.*

Satz 7.3 Wir betrachten die lineare Differentialgleichung (47). Es gilt:

(i) Für jedes $t_0 \in I$ ist die Abbildung

$$x_0 \mapsto \varphi(\cdot, t_0, x_0), \mathbb{K}^n \rightarrow L(0)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

(ii) $L(0)$ ist Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ der Dimension n .

(iii) Ist $\tilde{\varphi}$ eine bestimmte Lösung der inhomogenen Gleichung zur Inhomogenität g , so gilt

$$L(g) = \tilde{\varphi} + L(0) = \{\tilde{\varphi} + \varphi \mid \varphi \in L(0)\}.$$

Beweis:

(i) Linearität folgt aus dem Superpositionsprinzip, denn

$$\varphi(\cdot, t_0, \alpha x_1 + \beta x_2), \quad \alpha \varphi(\cdot, t_0, x_1) + \beta \varphi(\cdot, t_0, x_2)$$

sind zwei Lösungen des Anfangswertproblems zum Anfangswert $x(t_0) = \alpha x_1 + \beta x_2$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist die Lösung dieses Anfangswertproblems eindeutig, also sind die beiden Lösungen gleich. Die Abbildung ist surjektiv, da jede Lösung einen Wert in t_0 annimmt. Sie ist injektiv, da $x_0 \neq x_1$ impliziert, dass $\varphi(t_0, t_0, x_0) \neq \varphi(t_0, t_0, x_1)$. Es folgt also

$$\varphi(\cdot, t_0, x_0) \neq \varphi(\cdot, t_0, x_1).$$

(ii) Das Superpositionsprinzip besagt, dass $L(0)$ ein linearer Raum ist. Die Dimension ergibt sich aus (i).

(iii) Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in L(g)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 - \varphi_2) = A(t)\varphi_1 + g - A(t)\varphi_2 - g = A(t)(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Also ist $\varphi_1 - \varphi_2 \in L(0)$. Seien nun umgekehrt $\varphi_1 \in L(g), \varphi_2 \in L(0)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 + \varphi_2) = A(t)\varphi_1 + g + A(t)\varphi_2 = A(t)(\varphi_1 + \varphi_2) + g.$$

Also folgt $\varphi_1 + \varphi_2 \in L(g)$. Dies zeigt die Behauptung.

□

Definition 7.4 *Die Funktionen*

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$$

heißen *linear abhängig*, wenn $\exists c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich 0, sodass

$$\sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t) = 0, \quad t \in I.$$

Sonst heißen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ *linear unabhängig (LUA)*.

Für Lösungen linearer Systeme gibt es besonders einfache Kriterien für lineare Unabhängigkeit.

Satz 7.5 (Lineare Unabhängigkeit von Lösungen) Seien $m \leq n$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L(0)$. Äquivalent sind

- a) $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sind linear unabhängige Funktionen,
- b) für alle $t \in I$ sind $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ linear unabhängige Vektoren in \mathbb{K}^n ,
- c) es gibt ein $t \in I$, so dass $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ linear unabhängig sind.

Beweis: Laut Satz 7.3 ist die Abbildung $x \mapsto \varphi(\cdot; t, x)$ für alle $t \in I$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

Wir Zeigen a) \Rightarrow b) durch Widerspruch. Angenommen $\exists \tau \in I$ mit $\sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(\tau) = 0$. Sei $\varphi(t) := \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t)$, $t \in I$. Dann ist $\varphi \in L(0)$. wegen $\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(\tau) = 0$ und Eindeutigkeit folgt, dass $\varphi = 0$. Dies ist ein Widerspruch mit a).

b) \Rightarrow c) ist klar.

Wir Zeigen c) \Rightarrow a) durch Widerspruch. Angenommen $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ sind linear abhängig, dann gilt $\sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t) = 0$, $t \in I$. Dies widerspricht c). \square

Definition 7.6 (Fundamentalsystem & Fundamentalmatrix) Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung zu (47). Sind $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ linear unabhängige Lösungen, so heißt $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein *Fundamentalsystem von Lösungen*. Die Matrixfunktion gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \end{bmatrix}$$

heißt *Fundamentalmatrix*.

Bemerkung 3 Aus der Definition und Satz 7.5 folgen zwei wesentliche Eigenschaften der Fundamentalmatrix.

$$(i) \quad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad t \in I,$$

$$(ii) \quad \det \Phi(t) \neq 0, \quad t \in I.$$

Proposition 7.7 Sei $\Phi \in C^1(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ eine Fundamentalmatrix von (48). Dann gilt für jedes $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0, \quad t \in I.$$

Beweis: $\Phi^{-1}(t_0)$ existiert wegen letzter Bewertung. $\Phi^{-1}(t_0)x_0$ ist ein Vektor und also $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$ ist eine lineare Kombination der Lösungen von (48). Laut Superpositionsprinzip ist sie wieder eine Lösung von (48).

Da $\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)x_0 = x_0$, erfüllt diese Lösung die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Da die Lösung eindeutig ist, folgt die Aussage der Proposition. \square

Proposition 7.8 Sei $\Phi \in C^1(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ eine Fundamentalmatrix von (48) und sei $\Psi \in C^1(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ eine beliebige Matrixfunktion. Dann ist Ψ eine Fundamentalmatrix dann und genau dann wenn es eine konstante Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt so dass $\det C \neq 0$ und $\Psi(t) = \Phi(t)C$ für alle $t \in I$.

Beweis: Klar, ist $\Phi(\cdot)C$ eine Fundamentalmatrix für alle invertierbare C . Nun sei Ψ eine Fundamentalmatrix. Dann $\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x_0 = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$ für alle t, t_0 und $x_0 \in \mathbb{K}^n$. Da diese Identität für alle $x_0 \in \mathbb{K}^n$ gilt, dann gilt auch $\Psi(t)\Psi^{-1}(\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ für alle t, t_0 . Da $\Psi(\tau)$ invertierbar ist (wir haben das früher bewiesen), dann

$$\Psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Psi(\tau).$$

für beliebige $\tau \in I$. Schließlich, $\Phi^{-1}(\tau)\Psi(\tau)$ ist invertierbar als Produkt invertierbarer Matrizen. \square

Definition 7.9 (Evolutionsoperator) Gegeben sei die homogene Gleichung zur linearen Differentialgleichung (47). Für $(t_0, t) \in I^2$ heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x_0 &\mapsto \varphi(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

Evolutionsoperator (von t_0 nach t).

Der Evolutionsoperator von $\dot{x} = A(t)x$ beschreibt die Gesamtheit aller Integralkurven. D.h. die Lösung zum Anfangswertproblem $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

Bemerkung 4 Der Operator $\Phi(t, t_0)$ ist linear und ein Isomorphismus. In Definition 7.9 fassen wir ihn als Element von $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ auf. Dasselbe Symbol wird für die Matrixdarstellung dieser linearen Abbildung bezüglich der Standardbasis verwendet.

Definition 7.10 Die Matrixdarstellung des Evolutionsoperators bezüglich der Standardbasis des \mathbb{K}^n heißt Übergangsmatrix.

Es gilt also nach Definition 7.10 und Bemerkung 3:

$$\begin{aligned}\Phi(t; t_0) &= [\varphi(t; t_0, e_1) \mid \dots \mid \varphi(t; t_0, e_n)] , & \forall (t, t_0) \in I^2 , \\ \dot{\Phi}(t, t_0) &= A(t)\Phi(t, t_0) , & \forall (t, t_0) \in I^2 , \\ \Phi(t_0, t_0) &= I_n , & \forall t_0 \in I .\end{aligned}$$

wobei I_n für die $n \times n$ Einheitsmatrix steht.

Lemma 7.11 Sei $\Phi(t, t_0)$ die Übergangsmatrix zur homogen linearen Differentialgleichung (47). Dann gilt

- (i) $\Phi(t_0, t_0) = I_n \quad \forall t_0 \in I$,
- (ii) $\Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t, t_0) \quad \forall t, t_0, t_1 \in I$,
- (iii) $\Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t) \quad \forall t, t_0 \in I$.
- (iv) Ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix, so gilt

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} \quad \forall t, t_0 \in I .$$

- (v) Ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix, so ist $\Psi(t)$ eine Fundamentalmatrix genau dann, wenn eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert, so dass

$$\Psi(t) = \Phi(t)C \quad \forall t \in I .$$

Beweis: (i) ist klar wegen der Anfangsbedingung: $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Nachweis für (ii) ist wie folgt: $\forall x_0$ und alle $s \in I$ gilt

$$\varphi(t) = \Phi(t, t_0)x_0 = \Phi(t, t-s)\varphi(t-s, t_0, x_0) = \Phi(t, t-s)\Phi(t-s, t_0)x_0 .$$

Setzen wir $t_1 := t - s$ so folgt die Behauptung. Analog für (iii): Wegen Eindeutigkeit der Lösung gilt $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, dass

$$x_0 = \varphi(t_0, t, \varphi(t, t_0, x_0)) = \Phi(t_0, t)\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0)x_0$$

was (iii) impliziert. (iv) und (v) folgen aus den letzten Propositionen. \square

Beispiel 10 *Wir betrachten folgendes DGL-System*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Aus der 2. Gleichung folgt $x_2(t) = c_1$. Dann impliziert die 1. Gleichung $x_1 = c_1 t + c_2$. Für $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$ bekommen wir folgende Lösung $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $c_1 = 0$ und $c_2 = 1$ haben wir die Lösung $\psi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $\det \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, sind diese Lösungen linear unabhängig. Damit gilt $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.1 Lineare zeitvariante inhomogene Gleichungen

Sei $\dot{x} = A(t)x(t) + g(t)$, $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ stetig und $g : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig.

Satz 7.12 *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = A(t)x(t) + g(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Sei $\Phi(t)$ Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung, dann gilt

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}g(s)ds.$$

Beweis: Wir versuchen die Lösung als Kombination der Lösungen des homogenen Systems darzustellen und machen den Ansatz mit “Konstanten Variation“

$$\varphi(t) = \Phi(t)c(t). \quad (49)$$

Dann liefert Ableiten dieser Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \dot{\Phi}(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t) \\ &= A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t) \\ &= A(t)\varphi(t) + \Phi(t)\dot{c}(t). \end{aligned}$$

Gilt nun $\varphi(t_0) = x_0$ und $\Phi(t)\dot{c}(t) = g(t)$, so ist φ Lösung des Anfangswertproblems. Die Bedingung $\varphi(t_0) = x_0$ ist nach (49) äquivalent zu

$$c(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}x_0.$$

Außerdem erhalten wir aus $\Phi(t)\dot{c}(t) = g(t)$ die Gleichung

$$\dot{c}(t) = \Phi(t)^{-1}g(t).$$

Dies liefert eine Differentialgleichung für c mit eindeutiger Lösung

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}g(s)ds.$$

Einsetzen dieser Gleichung in (49) liefert die Behauptung. \square

Bemerkung 5 *Insbesondere folgt aus der Variation der Konstanten-Formel für den Evolutionsoperator, dass*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)g(s)ds.$$

Als einfaches Anwendungsbeispiel betrachten wir das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{1}{\sin t}\end{aligned}$$

Man kann leicht prüfen, dass $\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ zwei linear unabhängige Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

sind. Also gilt $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$ und die Menge aller Lösungen des homogenen Systems ist $x(t) = \Phi(t)c$, $c \in \mathbb{R}^2$. Um die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems zu bekommen nutzen wir den Ansatz $x(t) = \Phi(t)c(t)$. So bekommen wir $\Phi(t)\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix}$. Daraus folgt $\dot{c}_1(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ und $\dot{c}_2(t) = -1$. Also gilt $c_1(t) = \ln(\sin t) + \alpha$ und $c_2(t) = -t + \beta$. Die Gesamtheit aller Lösungen des inhomogenen Systems ist dann

$$x_1(t) = \sin t \cdot \ln \sin t - t \cos t + \alpha \sin t + \beta \cos t, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$x_2(t) = \cos t \cdot \ln \sin t - t \sin t + \alpha \cos t - \beta \sin t, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Definition 7.13 Die Determinante einer Matrix aus n Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von $\dot{x} = A(t)x$ wird als Wronski-Determinante der Wronski-Matrix $W(t)$ bezeichnet:

$$W(t) := \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \end{bmatrix}$$

und

$$w(t) = \det W(t), \quad t \in I.$$

Satz 7.14 (Liouville) Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen des homogenen Systems $\dot{x} = A(t)x$ und $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige Wronski-Determinante. Dann gilt

$$\dot{w} = [\text{spur} A(t)] w, \quad t \in I.$$

Es folgt für alle $t_0, t \in I$, dass

$$w(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{spur} A(s) ds \right).$$

Beweis: Wir schreiben die Wronski-Matrix sowohl spaltenweise als auch zeilenweise als

$$W(t) = [\varphi_1(t) \mid \dots \mid \varphi_n(t)] = \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \vdots \\ \nu_n(t) \end{bmatrix}.$$

Da die φ_j Lösungen der homogenen Gleichung sind, erhalten wir

$$\dot{\varphi}_j(t) = A(t)\varphi_j(t), \quad t \in I.$$

Dies heißt insbesondere für jeden ij -ten Eintrag der Wronski-Matrix, dass

$$\dot{w}_{ij}(t) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}(t)w_{\ell j}(t).$$

Für die Ableitung der i -ten Zeile ν_i ergibt sich

$$\dot{\nu}_i(t) = a_{i1}(t)\nu_1(t) + \dots + a_{in}(t)\nu_n(t), \quad t \in I, i = 1, \dots, n. \quad (50)$$

Die Determinante von $W(t)$ können wir über die Leibniz-Formel darstellen als

$$\det W(t) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) w_{1,\sigma(1)}(t) \cdot \dots \cdot w_{n,\sigma(n)}(t),$$

wobei die Summe über alle Permutationen σ der Menge $\{1, \dots, n\}$ läuft. Die Produktregel liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det W(t)) &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \dot{w}_{1,\sigma(1)}(t) w_{2,\sigma(2)}(t) \dots w_{n,\sigma(n)}(t) + \dots \\ &\quad + \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) w_{1,\sigma(1)}(t) \dots w_{(n-1),\sigma(n-1)}(t) \dot{w}_{n,\sigma(n)}(t) \\ &= \det \begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \vdots \\ \nu_n(t) \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \vdots \\ \nu_{n-1}(t) \\ \dot{\nu}_n(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setzt man nun jeweils (50) für die Ableitungen ein, so ergibt sich aus den Eigenschaften der Determinante, dass in jedem Summanden lediglich der Term $a_{jj}(t)\nu_j(t)$ von der Ableitung verbleibt. Dies zeigt

$$\dot{w} = \operatorname{spur} A(t)w.$$

□

Als Anwendung betrachten wir

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0, \quad t \in I$$

oder

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

In dem Falle gilt $\text{spur} A(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}$ und $w(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = ce^{-\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}$.

Ist φ_1 eine bekannte Lösung von $a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0$, so ist die letzte DGL 1. Ordnung zu Bestimmung einer weiteren LUA Lösung und kann mit schon bekannten Methoden erledigt werden.

Beispiel 11

$$(t^2 + 1)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Man kann leicht prüfen, dass $x(t) = t$ eine Lösung ist. Um eine weitere zu finden, haben wir

$$\det \begin{pmatrix} t & \varphi_2 \\ 1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = ce^{-\int \frac{-2t}{t^2+1} dt} = ce^{\int \frac{dt^2}{t^2+1}} = c(t^2 + 1)$$

oder

$$t\dot{\varphi}_2 - \varphi_2 = c(t^2 + 1)$$

Dies kann mit variation der Konstanten Formel gelöst werden. So bekommen wir $\varphi_2(t) = t^2 - 1$ als eine weitere LUA Lösung. Insgesamt gilt $x(t) = c_1 t + c_2(t^2 - 1)$.

7.2 Reduktion der Ordnung (d'Alembert Methode)

Sei eine Lösung ϕ_1 bekannt.

Dann ist mindestens eine Komponente von ϕ_1 ungleich Null (sei das die erste Komponente). Sei

$$X(t) = (\phi_1(t), e_2, \dots, e_n).$$

Betrachten wir die Transformation

$$x(t) = X(t)y(t).$$

Für $y(t) = X(t)^{-1}x(t)$ lautet die DGL

$$\dot{y} = X^{-1}\dot{x} - X^{-1}\dot{X}X^{-1}x = X^{-1}(AX - \dot{X})y,$$

wobei

$$AX - \dot{X} = AX - (\dot{\phi}_1, 0, \dots, 0) = A(X - (\phi_1, 0, \dots, 0)) = A(0, e_2, \dots, e_n).$$

Also ist

$$\dot{y}(t) = X^{-1}(t)A(t)(0, e_2, \dots, e_n)y(t).$$

Diese Gleichung kann man auch wie folgt darstellen:

$$\dot{y}(t) = X^{-1}(t)A(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} y(t), \quad (\text{ModifDGL})$$

wobei I ist die $n-1 \times n-1$ Identitätsmatrix, und als 0 sind die Null-Vektoren mit entsprechenden Dimensionen bezeichnet. Offensichtlich ist $y = (1, 0, \dots, 0)^T$ eine Lösung. Diese Lösung entspricht der schon bekannten $\varphi_1(t) = X(t)(1, 0, \dots, 0)^T$. Es gibt aber weitere LVA Lösungen. Die weiteren Schritte sind also wie folgt:

1. Der rechte Teil von (ModifDGL) hat keine y_1 -Komponente.
2. Somit können wir erst $n-1$ mal $n-1$ System für (y_2, \dots, y_n) lösen
3. Danach: Bestimmung von y_1 mittels noch einer Integration.
4. Anschließend die Rücktransformation $x = Xy$ anwenden.

Bemerkung: $X(t)X^{-1}(t) = I \Rightarrow \frac{d}{dt}X(t)X^{-1}(t) = 0$ oder

$$\dot{X}(t)X^{-1}(t) + X(t)\frac{d}{dt}X^{-1}(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t).$$

Beispiel 12 Betrachte das System $\dot{x} = A(t)x$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ 2t & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung für die Gleichung ist bekannt: $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$. Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

$$x(t) = X(t)y(t), \quad X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix},$$

deswegen bekommen wir

$$\dot{y} = X^{-1}(t)A(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Die rechte Seite hängt von y_1 nicht ab. Für y_2 bekommen wir $\dot{y}_2 = t^2 y_2$. Daraus folgt $y_2(t) = e^{\frac{t^3}{3}}$. Dann aus $\dot{y}_1 = -y_2$ folgt $y_1(t) = -\int e^{\frac{t^3}{3}} dt$. Also bekommen wir eine weitere LUA Lösung

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\int e^{\frac{t^3}{3}} dt \\ e^{\frac{t^3}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int e^{\frac{t^3}{3}} dt \\ e^{\frac{t^3}{3}} - t^2 \int e^{\frac{t^3}{3}} dt \end{pmatrix}.$$

Um noch mehr Informationen über die Lösungen zu bekommen, müssen wir die DGL weiter spezialisieren. Zum Beispiel kann man folgende spezielle Klassen von Systemen betrachten:

1. $A(t) = A$, für alle $t \in I$.
2. $A(\cdot)$ ist periodisch.
3. $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, für alle $t, s \in \mathbb{R}$.

7.3 Zeitinvariante Lineare Differentialgleichungen

Seien nun $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ konstant, $g : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Wir betrachten zeitinvariante lineare Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = Ax + g(t),$$

und die homogenen DGL der form $\dot{x} = Ax$. Für die letzte haben wir eine Darstellung für die allgemeine Lösung hergeleitet:

$$\phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0,$$

wobei $\Phi(t, t_0)$ eine Übergangsmatrix und $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix ist. Diese Matrizen konnten wir aber nicht explizit bestimmen. Für zeitinvariante Gleichungen wollen wir nun eine explizite Darstellung von Lösungen herleiten.

Zunächst wiederholen wir einige Begriffe und Eigenschaften aus linearer Algebra.

7.3.1 Operatornormen

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{K}^n .

Definition 7.15 Die durch $\|\cdot\|$ induzierte Norm (oder Operatornorm) auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist gegeben durch

$$\|A\| := \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Lemma 7.16 Die Operatornorm ist eine Norm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$. Sie ist außerdem submultiplikativ, d.h. für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{und für } x \in \mathbb{K}^n: \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

7.4 Homogene linDGL mit konstanten Koeffizienten

Nun betrachten wir $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$. Die Picard-Iterationen sind:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_0^t Ax_0(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_0^t ds = x_0 + tAx_0 \\ x_2(t) &= x_0 + \int_0^t Ax_1(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_0^t ds + A^2x_0 \int_0^t sds \\ &= x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0 \\ &\dots \\ x_m(t) &= x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0 + \dots + \frac{t^m}{m!}A^mx_0 = \sum_{j=0}^m \frac{t^j}{j!}A^jx_0 \end{aligned}$$

Wir haben früher gezeigt, dass die Folge x_m konvergiert, also

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}A^jx_0$$

ist die gesuchte Lösung. Ist $x \in \mathbb{R}$ (und $A \in \mathbb{R}$) so gilt $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}A^jx_0 = e^{At}x_0$. Daher definieren wir $e^{At} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}A^j$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

7.4.1 Matrix-Exponentialfunktion

Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$t \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}A^j =: e^{tA} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Die Reihe konvergiert wegen $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ und Konvergenz von $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!}\|A\|^j$

Die Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!}\|A\|^j$ konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ können wir also die folgende Funktion betrachten:

$$\begin{aligned} \Phi : t &\mapsto \exp(At), \\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Ableiten dieser Funktion nach t führt zu

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{d}{dt}\exp(At) = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k = A \exp(At).$$

Dabei verwenden wir, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden können. Wir erhalten also

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A, \quad \text{und} \quad e^{A \cdot 0} = I.$$

Damit erfüllt e^{At} die Bedingung für die Fundamental-Matrix und ist die Übergangsmatrix für den Fall $t_0 = 0$ des linearen zeitinvarianten Systems $\dot{x} = Ax$.

Bemerkung 6 *Satz von Liouville* $\Rightarrow \det(e^{At}) = e^{\text{tr}(At)} \neq 0 \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Beispiel 13 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deswegen

$$e^{At} = I + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^0 & e^t \\ e^0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 14 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Man kann

direkt nachrechnen $A^j = \begin{pmatrix} (-1)^j & 0 & 0 \\ (-1)^{j+1}j & (-1)^j & 0 \\ (-1)^j(j-1) & (-1)^{j+1} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} & 0 & 0 \\ t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-t)^{j-1}}{(j-1)!} & 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} & 0 \\ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-t)^j(j-1)}{j!} & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t} & 1 - e^{-t} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung 7 *Definition von $\|A\|$ für $A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow \max_{ij} |A_{ij}| \leq \|A\| \leq n \max_{ij} |A_{ij}|$. Konvergiert eine Matrixfolge \Leftrightarrow konvergieren die Matrixelemente als Zahlenfolgen*

Die hier wesentliche Anwendung dieser Beobachtung erhalten wir durch die Betrachtung der Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$. Ihr Konvergenzradius ist ∞ , also existiert $\exp(A)$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Lemma 7.17 *Die Matrix e^{At} ist Übergangsmatrix der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Insbesondere ist $x(t) = e^{At}x_0$ Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0.$$

Für stetige $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = Ax + g(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

gegeben durch

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}g(s)ds.$$

Beweis: Es gilt

$$e^{A0} = I, \quad \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Die weiteren Aussagen folgen aus Eigenschaften von Übergangsmatrix und Formel der Konstanten Variation. \square

Lemma 7.18 *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}, T \in GL_n(\mathbb{K})$. Für alle $t, s \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(i) \quad e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}, \text{ falls } AB = BA.$$

$$(ii) \quad e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}.$$

$$(iii) \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

$$(iv) \quad T^{-1}e^{At}T = e^{T^{-1}ATt}.$$

$$(v) \quad (e^{At})^T = e^{A^T t}.$$

Beweis: (i) Es gilt $B^k A^m = A^m B^k$ und $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ usw.

$$e^A \cdot e^B = (I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots)(I + B + \frac{1}{2}B^2 + \dots) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} A^i B^j, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$e^{A+B} = (I + (A+B) + \frac{1}{2}(A+B)^2 + \dots) = \sum_{i,j=0}^{\infty} d_{ij} A^i B^j, \quad d_{ij} \in \mathbb{R}$$

wobei die Koeffiziente c_{ij}, d_{ij} hängen von der Größe der Matrizen A, B nicht ab.

Für $A, B \in \mathbb{R}$ haben wir die übliche skalare e -Funktion dabei ist aus Analysis bekannt, dass $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$, deswegen stimmen die beiden Potenzreihenentwicklung überein, d.h. $c_{ij} = d_{ij}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Sind A, B Matrizen, so sind die Koeffiziente c_{ij}, d_{ij} in obigen Potenzreihen die selben, wie bei skalaren A, B , deswegen gilt wieder $c_{ij} = d_{ij}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

(ii) folgt aus (i), weil A mit sich selbst kommutiert.

(iii) Folgt aus (i) und folgender Beobachtung

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A \cdot e^{-A} \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

(iv) und (v) folgen unmittelbar aus der Definition von e^A .

□

Sei $\dot{x} = Ax$ und v ein EV von A . Wir nutzen diesen Vektor v als Anfangswert. Dann gilt für die Lösung

$$\varphi(t, 0, v) = e^{At}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda^k}{k!} v = e^{\lambda t} v.$$

Definition 7.19 *Lösungen von $\dot{x} = Ax$ zu einem Anfangswert aus einem Eigenraum von A heißen Eigenschwingungen von A .*

Die verallgemeinerte Eigenvektoren von A werden wie folgt definiert

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^k z &\neq 0, & k < m \\ (A - \lambda I)^k z &= 0, & k \geq m \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} e^{(A-\lambda I)t} z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z \\ &= z + (A - \lambda I) z + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda I)^{m-1} z \end{aligned}$$

Also

$$e^{At} z = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t} z = e^{\lambda t} I \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z.$$

Definition 7.20 Diejenigen Lösungen, deren Anfangswert aus einem verallgemeinerten Eigenraum von A stammen, heißen (komplexe) verallgemeinerte Eigenschwingungen.

Satz 7.21 Jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist eine Linearkombination verallgemeinerter Eigenschwingungen.

Beweis: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ die Basis verallgemeinerter Eigenvektoren. Ist $x_0 \in \mathbb{K}^n$ beliebig, so existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, so dass

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Aufgrund der Linearität der Differentialgleichung gilt

$$e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{At}v_i.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 8 Ist A reell, dann kommen komplexe Eigenwerte in Paaren $\lambda = \alpha + iw, \bar{\lambda} = \alpha - iw, \lambda, \bar{\lambda} \in \sigma(A)$.

$$\begin{aligned} Az &= \lambda z \\ \Rightarrow A\bar{z} &= \overline{Az} = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\bar{z} \end{aligned}$$

wg. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.

Da z und \bar{z} linear unabhängig (LUA) sind, sind auch $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ LUA (ansonsten bekommen wir einen Widerspruch). Somit, $e^{At}\operatorname{Re} z$ und $e^{At}\operatorname{Im} z$ sind LUA Lösungen von $\dot{x} = Ax$, $\Rightarrow \operatorname{span}\{e^{At}\operatorname{Re} z, e^{At}\operatorname{Im} z\} = \operatorname{span}\{e^{At}z, e^{At}\bar{z}\}$. Nun berechnen wir die Lösungen $e^{At}\operatorname{Re} z, e^{At}\operatorname{Im} z$:

$$\begin{aligned} e^{At}\operatorname{Re} z &= \operatorname{Re}(e^{At}z) \\ &= \operatorname{Re}(e^{\lambda t}z) \\ &= \operatorname{Re}(e^{(\alpha+iw)t}z) \\ &= \operatorname{Re}(e^{\alpha t}e^{iwt}z) \\ &= \operatorname{Re}(e^{\alpha t}(\cos(wt) + i\sin(wt))(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z)) \\ &= e^{\alpha t}(\operatorname{Re} z \cos(wt) - \operatorname{Im} z \sin(wt)) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} e^{At}\operatorname{Im} z &= \operatorname{Im}(e^{\lambda t}z) \\ &= e^{\alpha t}(\operatorname{Re} z \sin(wt) + \operatorname{Im} z \cos(wt)). \end{aligned}$$

Definition 7.22 $e^{At}\operatorname{Re}z, e^{At}\operatorname{Im}z$ heißen reelle Eigenschwingungen von $\dot{x} = Ax$.

Nun können wir aus dem System von n LVA verallgemeinerten Eigenschwingungen von A (die eine Basis für den Lösungsraum von $\dot{x} = Ax$ bilden, die Lösungen $e^{At}z, e^{At}\bar{z}$ rausnehmen, und stattdessen $e^{At}\operatorname{Re}z, e^{At}\operatorname{Im}z$ einfügen. Analog kann man mit den verallgemeinerten komplexen Eigenschwingungen arbeiten und als Ergebnis bekommen wir:

Satz 7.23 Jede Lösung ist Superposition verallgemeinerter reellen Eigenschwingungen.

Beispiel 15 Betrachten wir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = (1, 1)^T$. In Matrixform das sieht für $x = (x_1, x_2)^T$ wie folgt aus:

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Wir haben: $\sigma(A) = \{i, -i\}$ mit den entsprechenden Eigenvektoren: $\nu = (1, -i)^T$ und $\bar{\nu} = (1, i)^T$:

$$A\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = i\nu.$$

Also, für $\lambda = i$ und $\nu = (1, -i)^T$ haben wir:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(e^{\lambda t}\nu) &= \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\ \operatorname{Im}(e^{\lambda t}\nu) &= \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dann ist die allgemeine Lösung für unsere Gleichung

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (51)$$

Um die spezielle Lösung für $x(0) = (1, 1)^T$ zu finden, lösen wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also, $C_1 = 1$ und $C_2 = -1$ und die gesuchte Lösung ist

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

Bemerkung 9 Aus (51) kann man e^{At} wie folgt bestimmen. Die Spalten von e^{At} sind die Lösung zum Anfangswert $x(0) = e_i$, $i = 1, 2$. Also $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Daraus sieht man, dass die Bestimmung von e^{At} ist durch die Lösung der DGL $\dot{x} = Ax$ möglich.

Beispiel 16 Betrachten Sie das folgende System linearer Differentialgleichungen:

$$\dot{x} = Ax, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{DGL})$$

- (i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (DGL).
- (ii) Finden Sie die Lösung, die dem Anfangswert $x(0) = (1, 2, 1)^T$ entspricht.
- (iii) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Gleichung, die für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren.
- (iv) Bestimmen e^{At} .

Lösung:

Man berechnet leicht das Spektrum von A : $\sigma(A) = \{1, 2, -1\}$. Alle EW sind unterschiedlich - A ist diagonalisierbar.

Der Eigenraum für den Eigenwert λ_1 ist:

$$\text{Eig}_A(\lambda_1) = \text{Ker}(A - I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

wobei $\langle x \rangle$ die lineare Hülle des Vektors x ist, d.h. $\langle x \rangle = \{cx, c \in \mathbb{R}\}$.

Der Eigenraum für den Eigenwert λ_2 ist:

$$\text{Eig}_A(\lambda_2) = \text{Ker}(A - 2I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Der Eigenraum für den Eigenwert λ_3 ist:

$$\text{Eig}_A(\lambda_3) = \text{Ker}(A + I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Eigenvektoren ν_1, ν_2, ν_3 zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Also ist der Lösungsraum der Gleichung $\dot{x} = Ax$ gegeben durch

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Somit sind alle Lösungen, die für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren, gegeben durch

$$x(t) = c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c_3 \in \mathbb{R}.$$

Wir müssen für die Lösung des AWP mit der Anfangsbedingung $x(0) = (1, 2, 1)^T$ die Konstanten c_1, c_2, c_3 bestimmen:

$$\begin{cases} 1 = x_1(0) = c_1 + c_2 - 2c_3 \\ 2 = x_2(0) = c_1 + 0 + 6c_3 \\ 1 = x_3(0) = c_1 + c_2 + 10c_3 \end{cases}$$

Die Lösung ist:

$$(c_1, c_2, c_3) = (2, -1, 0).$$

Also ist die gesuchte Lösung zum AWP:

$$x(t) = 2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & -2e^{-t} \\ e^t & 0 & 6e^{-t} \\ e^t & e^{2t} & 10e^{-t} \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Klar: $\Phi(t)$ ist die Fundamentalmatrix. Einsetzen von $t := t_0$ liefert:

$$(c_1, c_2, c_3)^T = \Phi^{-1}(t_0)x(t_0).$$

Und schließlich:

$$\phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Daraus kann man e^{At} leicht berechnen.

7.5 Berechnung von e^{At}

Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und J die Jordannormalform von A . Dann existiert ein $T \in GL_n(\mathbb{K})$ so dass:

$$J = T^{-1}AT.$$

Weiterhin, wir wissen dass

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$$

eine Blockdiagonalmatrix (die quadratischen Blöcke J_ℓ sind diagonal angeordnet).

Aufgrund der Rechenregeln für Matrizenexponenten gilt:

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{TJT^{-1}t} = Te^{Jt}T^{-1} \\ &= T \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_r t})T^{-1}. \end{aligned}$$

Somit reicht es $e^{J_i t}$ auszurechnen um e^{At} zu bestimmen!

Lemma 7.24 (Berechnung von e^{At} : 2×2 Jordanblöcke) Sei $J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Dann: $e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= \exp \begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} = \exp \left(\begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \exp \begin{pmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \dots \right) \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Berechnung für

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

mit Hilfe von

$$IN = NI$$

ist analog

$$e^{Jt} = e^{\lambda It} e^{Nt} = e^{\lambda t} \sum_{K=0}^{m-1} \frac{N^K t^K}{K!} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 17 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen das Spektrum von A : $\sigma(A) = \{1\}$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1 = \lambda \end{aligned}$$

Also, algebraische Vielfachheit von EW $\lambda = 1$ ist gleich 2.

(ii) Berechnung der Jordannormalform.

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Geometrische Vielfachheit von EW $\lambda = 1$ ist gleich

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I) = n - \operatorname{rank}(A - I) = 2 - 1 = 1.$$

Algebraische Vielfachheit von λ ist nicht gleich zu der geometrischen Vielfachheit von λ , und also,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Eig_A(1) = \text{Ker}(A - E) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir brauchen noch einen Vektor so dass:

$$(A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Z.B. $(x_1, x_2) = (1, -1)$ ist einer von solchen Vektoren.

Also, Hauptraum von EW $\lambda = 1$ ist:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Somit, $A = TJT^{-1}$, wobei

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich,

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{T^{-1}JTt} \\ &= T^{-1}e^{Jt}T \\ &= T^{-1}e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}T \\ &= T^{-1}e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}}e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}T \\ &= T^{-1} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \dots \right) T \\ &= T^{-1}e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T. \end{aligned}$$

Also, die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit $x(t_0) = x_0$, ist:

$$\phi(t, t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 = T^{-1}e^{t-t_0} \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T x_0$$

□

7.5.1 Berechnung von e^{At} : Reelle Jordanblöcke für Paare komplexer Eigenwerte

Für eine reelle Matrix A mit einem komplexen Eigenwert $\lambda = a + ib$ ist auch $\bar{\lambda} = a - ib$ ein Eigenwert. Die entsprechenden Eigenvektoren u und \bar{u} treten auch paarweise komplex konjugiert zu einander auf. Zu jedem Jordan-block $J = \lambda I + N$ gibt es den komplex konjugierten Block $\bar{J} = \bar{\lambda} I + N$. Die Vektoren u und \bar{u} der Jordan-Basis können durch $\Re u$ und $\Im u$ ersetzt werden. So geht der Block

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \bar{J} \end{bmatrix}$$

in (die reelle Normalform)

$$\begin{bmatrix} R & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad R = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{über.}$$

Lemma 7.25 Für alle $a, b, t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} t \right) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

Beweis: Wir stellen zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \bullet \quad & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{bmatrix} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bt)^k}{k!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bt)^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bt)^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dies gilt wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. Also folgt

$$\exp\left(t \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right) = e^{at} \cdot I \cdot \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & bt \\ -bt & 0 \end{bmatrix}\right) = e^{at} \cdot \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

□

Im Fall von Jordanblöcken höherer Ordnung ergibt sich mit der Notation

$$D_b(t) = \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{bmatrix} a & -b & 1 & 0 & & \\ b & a & 0 & 1 & & \\ & & a & -b & 1 & 0 \\ & & b & a & 0 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a & -b & 1 & 0 \\ & & & & b & a & 0 & 1 \\ & & & & & & a & -b \\ & & & & & & b & a \end{bmatrix}\right) =$$

$$= e^{at} \begin{bmatrix} D_b(t) & tD_b(t) & \frac{t^2}{2}D_b(t) & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}D_b(t) \\ 0 & D_b(t) & tD_b(t) & & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}D_b(t) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & D_b(t) & tD_b(t) \\ 0 & & & 0 & D_b(t) \end{bmatrix}$$

7.6 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Gegeben seien stetige Funktionen

$$a_j : I \rightarrow \mathbb{K}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Wir betrachten nun lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0y(t) = b(t), \quad (52)$$

die sich durch die lineare Transformation

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad x_n = y^{(n-1)}, \quad (53)$$

wie folgt als äquivalentes System schreiben lassen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & & -a_{n-1}(t) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Die Lösungen sind festgelegt durch die Anfangswerte

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

Für die Lösungsräume

$$\begin{aligned} Y(b) &= \{\mu \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}), \mu \text{ Lösung von (52)}\} \\ X(b) &= \{\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n), \varphi \text{ Lösung von (54)}\} \end{aligned}$$

gibt es einen linearen Isomorphismus gegeben durch

$$F(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \varphi_1, \quad F : X(b) \rightarrow Y(b).$$

Betrachten wir eine homogene Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0. \quad (55)$$

Bezeichnung: $L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t)$.

Lemma 7.26 $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ sind LUA Lösungen von (55)

$\Leftrightarrow x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^n$ sind LUA Lösungen von (54) mit $b = 0$.

Beweis: Ist $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0$ so folgt nach $(n-1)$ -fachen Differentieren

$$\begin{aligned} c_1 \dot{y}_1 + \dots + c_n \dot{y}_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} &= 0. \end{aligned}$$

Jede Lösung y_i transformiert sich mit (53) eindeutig in x^i und aus den letzten Gleichheiten folgt

$$c_1 x^1 + \dots + c_n x^n = 0$$

Also aus LUA von y_1, \dots, y_n folgt LUA von x^1, \dots, x^n . Umgekehrt

$$c_1 x^1 + \dots + c_n x^n = 0$$

impliziert $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0$, also folgt die umgekehrte Behauptung. \square
Aus dem Lemma folgt unmittelbar der folgende

Satz 7.27 Sind y_1, \dots, y_n LUA Lösungen von (55) so ist die allgemeine Lösung von (55) gegeben durch die Formel

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n.$$

Als Folgerung gilt für $m > n$, dass, wenn y_1, \dots, y_m Lösungen von (55) sind, dann sind sie LA.

Die Wronski-Matrix von Lösungen μ_1, \dots, μ_n von (52) wird definiert durch

$$W(t) := \begin{pmatrix} \mu_1(t) & \dots & \mu_n(t) \\ \dot{\mu}_1(t) & \ddots & \dot{\mu}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_1^{(n-1)}(t) & \dots & \mu_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Wronski-Matrix von Lösungen zu (54), deswegen gilt für die Determinante

$$w(t) := \det W(t)$$

wegen Satz von Liouville, dass

$$\dot{w}(t) = -a_{n-1}(t)w(t).$$

Analog zu nicht homogenen Gleichungssystemen schreibt sich die allgemeine Lösung von (52) als

$$y = y_{hom} + y_p,$$

wo y_p eine partikuläre Lösung von (52) bezeichnet.

Methode der Konstantenvariation funktioniert analog zu LGS mit dem Ansatz $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, (als alg. Lösung der homogenen DGL), wo man nun die c_i als Funktionen betrachtet. Das Vorgehen ist genau, wie im Beweis vom Satz 7.12: Zunächst die fundamentale Matrix Φ für das entsprechende System (54) aufstellen, dann $\varphi(t) = \Phi(t)c(t)$ in (54) einsetzen um c aus $\Phi\dot{c} = g$ zu bestimmen, wobei $g(t) = (0, \dots, 0, b(t))^T$.

Beispiel 18 Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$(t^2 + 1)\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 6(t^2 + 1)^2.$$

Lösung:

Die homogene DGL ist

$$(t^2 + 1)\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 0.$$

Man kann leicht prüfen, dass $y_1(t) = t$ und $y_2(t) = t^2 - 1$ ihre Lösungen sind. Sie sind LUA (leicht zu prüfen). Also ist $y_{hom} = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 t + c_2(t^2 - 1)$.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

$$\Phi\dot{c} = g \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6(t^2 + 1) \end{pmatrix}$$

Daraus berechnet man $\dot{c}_1(t) = 6 - 6t^2$ und $\dot{c}_2(t) = 6t$. Also $c_1(t) = 6t - 2t^3 + c_1$ und $c_2(t) = 3t^2 + c_2$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig sind. Die gesuchte Lösung ist

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) = c_1(t)t + c_2(t)(t^2 - 1) = t^4 + 3t^2 + c_1 t + c_2(t^2 - 1).$$

7.7 Konstante Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0 \quad (56)$$

Der Ansatz $y = e^{\lambda t}$ führt zu (nach Division durch $e^{\lambda t} \neq 0$)

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (57)$$

(Dis ist auch das charakterisitische Polynom der Matrix A in (54)).

Ist λ eine Nullstelle von p so ist $e^{\lambda t}$ eine Lösung von (56). Sind die Nullstellen λ_i , $i = 1, \dots, n$ von (57) paarweise verschieden, so sind die Lösungen $e^{\lambda_i t}$ LUA. In der Tat, ihre Wronski-Matrix ist

$$W = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$

und die Wronski-Determinante ist

$$w(t) = \det W(t) = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n t} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

wobei wir die Vandermonde-Determinante erkennen, für die bekannt ist, dass diese nicht Null ist, dann und nur dann, wenn alle λ_i paarweise verschieden sind. Also ist die allgemeine Lösung von (56) gegeben durch

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

Ist die DGL reell (d.h. mit reellen Koeffizienten) und dabei $\lambda_j = a + ib$ mit $b \neq 0$, dann gilt für ein $k \neq j$, dass $\lambda_k = a - ib$. Seien die entsprechende Lösungen zerlegt in Real- und Imaginärteile wie folgt:

$$y_j = e^{(a+ib)t} = u_1 + iu_2, \quad y_k = e^{(a-ib)t} = u_1 - iu_2$$

wobei

$$u_1 = e^{at} \cos bt = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad u_2 = e^{at} \sin bt = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2).$$

Also sind u_1, u_2 auch Lösungen von (56). Für jedes Paar $\lambda_j, \lambda_k = \bar{\lambda}_j \notin \mathbb{R}$ ersetzen wir die die Lösungen y_j, y_k durch entsprechende u_1, u_2 und für jedes $\lambda_m \in \mathbb{R}$ sei $u_m := y_m$. Wir zeigen dass u_1, \dots, u_n LUA sind. Sei

$$b_1 u_1(t) + \dots + b_n u_n(t) = 0, \quad b_i \in \mathbb{C}, \quad T \in (t_1, t_2).$$

Darin können u_i durch y_i ausgedrückt und eingesetzt werden. Dies führt zu

$$d_1 y_1 + \dots + d_n y_n = 0$$

wobei für jedes komplexe Paar von Lösungen, etwa für y_1, y_2 , gilt $d_1 = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)$ und $d_2 = \frac{1}{2}(b_1 + ib_2)$. Ist mindestens ein $b_i \neq 0$ so gibt es mindestens ein $d_k \neq 0$, was LA von y_1, \dots, y_n impliziert, also ein Widerspruch. So sind alle $b_i = 0$ und u_1, \dots, u_n sind LUA. So bekommen wir ein Fundamentalsystem von Lösungen in reeller Form.

Beispiel 19 Für

$$\ddot{x} + 3\ddot{x} + 9\dot{x} - 13x = 0$$

ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \cos 3t + c_3 e^{-2t} \sin 3t.$$

Nun betrachten wir den Fall, wo eine Nullstelle vom charakteristischen Polynom p mit Vielfachheit $k \geq 2$ auftritt. Sei also k die Vielfachheit der Nullstelle λ . Wir schreiben $k = 0$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, falls $p(\lambda) \neq 0$ gilt.

Sei nun λ eine Nullstelle mit Vielfachheit $k \geq 2$. Wir nutzen den Ansatz $y(t) = t^s e^{\gamma t}$ mit $s \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$.

Notation:

Differentialoperator

$$L : \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}), \quad a_n = 1$$

$$(Ly)(t) := \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t).$$

Damit sind die Lösungen von (56) Lösungen von

$$Ly = 0.$$

Lemma 7.28 Sei λ eine Lösung von $p(z) = 0$ mit Vielfachheit $k \in \mathbb{N}$ (d.h. $\frac{p(z)}{(z-\lambda)^{k-1}}|_{z=\lambda} = 0$ und $\frac{p(z)}{(z-\lambda)^k}|_{z=\lambda} \neq 0$). Ist $p(\lambda) \neq 0$ so schreiben wir $k = 0$. Dann gilt für $s = 0, 1, 2, \dots$

$$L(t^s e^{\lambda t}) = \begin{cases} 0 & s \leq k-1 \\ (d_0 t^m + d_1 t^{m-1} + \dots + d_m) e^{\lambda t}, & s \geq k \end{cases}$$

wobei $m := s - k$ und es gilt $d_0 \neq 0$.

Beweis: Wir bezeichnen die Ableitung der Ordnung s nach λ kurz: $\frac{\partial f^s}{\partial \lambda^s} = f_\lambda^{(s)}$. Für $s = 0, 1, 2, \dots$ berechnen wir

$$(t^s e^{\lambda t})_t^{(p)} = ((e^{\lambda t})_\lambda^{(s)})_t^{(p)} = ((e^{\lambda t})_t^{(p)})_\lambda^{(s)} = (\lambda^p e^{\lambda t})_\lambda^{(s)}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit a_{n-p} für $p = 0, 1, \dots, n$. Die Ergebnisse werden nun aufsummiert:

$$a_0 (t^s e^{\lambda t})_t^{(n)} + \dots + a_n (t^s e^{\lambda t}) = ((a_0 \lambda^n + \dots + a_n) e^{\lambda t})_\lambda^{(s)}$$

oder

$$L(t^s e^{\lambda t}) = (p(\lambda) e^{\lambda t})_\lambda^{(s)}.$$

Wir nutzen das bekannte Formel aus Analysis

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

für Berechnung von

$$L(t^s e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \left[t^s p(\lambda) + \binom{1}{s} t^{s-1} p'(\lambda) + \dots + \binom{s-1}{s} t^1 p^{(s-1)}(\lambda) + \binom{s}{s} t^0 p^{(s)}(\lambda) \right].$$

Ist λ eine Nullstelle von p mit Vielfachheit k so gilt

$$p(\lambda) = p'(\lambda) = \dots = p^{(k-1)}(\lambda) = 0, \quad p^{(k)}(\lambda) \neq 0.$$

Ist $s \leq k-1$ so folgt $L(t^s e^{\lambda t}) = 0$. Ist λ keine Nullstelle oder eine Nullstelle mit Vielfachheit $k \leq s$, so gilt $p^{(k)}(\lambda) \neq 0$. Dann ist in der letzten Summe der Summand mit dem höchstem Exponent bei t gegeben durch $\binom{k}{s} t^{s-k} p^{(k)}(\lambda)$. Dies entspricht dem $d_0 t^m$ in der Behauptung, wobei $d_0 \neq 0$ und $m = s - k$. \square

Satz 7.29 Sei λ eine k -fache Nullstelle von (57). Dann sind

$$e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$$

linear unabhängige Lösungen von $L(y) = 0$. Die Gesamtheit dieser Lösungen für alle Nullstellen von (57) ist ein Fundamentalsystem. Ist $\lambda = \alpha + iw$ ein komplexer Eigenwert, so sind

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos wt, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos wt, \\ e^{\alpha t} \sin wt, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin wt \end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen, die man benutzen kann um ein reelles Fundamentalsystem zu bekommen.

Beweis: Das letzte Lemma zeigt, dass zu jeder k -fache Nullstelle λ von (57) wir k Lösungen von $L(y) = 0$ haben. Insgesamt für alle Nullstellen unter Berücksichtigung von Vielfachheit haben wir genau n Lösungen. Wir zeigen durch Widerspruch, dass alle diese Lösungen LUA sind.

Annahme: eine nichttriviale Linearkombination dieser Lösungen ist eine Nullfunktion:

$$p_1(t) e^{\lambda_1 t} + p_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + p_m(t) e^{\lambda_m t} \equiv 0 \quad (58)$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschieden sind und p_1, \dots, p_m Polynome sind. O.B.d.A ist $p_m \not\equiv 0$. Division durch $e^{\lambda_1 t}$ in (58) liefert

$$p_1(t) + p_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + p_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} \equiv 0$$

Diese Gleichheit leiten wir $(\deg(p_1) + 1)$ -mals ab. Dabei verschwindet p_1 in der letzten Gleichheit und die Polynome p_2, \dots, p_m werden durch andere Polynome vom gleichen Grad ersetzt, weil

$$\frac{d}{dt}[(at^s + bt^{s-1} + \dots)e^{\gamma t}] = (\gamma at^s + sat^{s-1} + \gamma bt^{s-1} + \dots)e^{\gamma t}$$

und in allen Summanden tritt $\gamma = \lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ auf. So bekommen wir eine Gleichheit der Form (58) aber mit einem Summand weniger. Das gleiche Prozedere wenden wir nochmals an, bis wir auf

$$r_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m-1})t} \not\equiv 0$$

kommen, wobei $\deg(r_m) = \deg(p_m)$ gilt, also $r_m \not\equiv 0$ und die letzte Gleichheit ist nicht möglich. Ein Widerspruch. Also haben wir n LUA Lösungen von $L(y) = 0$ gefunden.

Wenn eine Nullstelle $\lambda = \alpha + iw$ komplex ist, so ist auch $\alpha - iw$ eine Nullstelle mit der selben Vielfachheit k wie $\lambda = \alpha + iw$ und es gilt

$$t^r e^{\lambda t} = t^r e^{\alpha t + iwt} = t^r e^{\alpha t} (\cos(wt) + i \sin(wt)).$$

Analog, wie im Falle von einfachen Nullstellen, können wir das Paar $t^s e^{\alpha + iw}$, $t^s e^{\alpha - iw}$ durch das Paar $t^r e^{\alpha t} \cos(wt)$ und $t^r e^{\alpha t} \sin(wt)$ ersetzen. \square

Ist L reell, so sind mit $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ auch $\operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y$ Lösungen.

$$L(\bar{y}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \bar{y}^{(k)} = \overline{L(y)}$$

also

$$L(y) = 0 \Rightarrow L(\bar{y}) = 0 \Rightarrow L(\operatorname{Re} y) = \frac{1}{2} L(y + \bar{y}) = 0.$$

Beispiel 20 Finden Sie alle Lösungen von

$$\ddot{y} + 2\ddot{y} - 4\dot{y} - 8y = 0.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 4)$. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_{2,3} = -2$. Also ist die allgemeine Lösung $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t}$.

Beispiel 21 Finden Sie alle Lösungen von

$$y^{(6)} - 16\ddot{y} + 64y = 0.$$

Antwort: $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + (c_3 + c_4 t)e^{-t} \cos \sqrt{3}t + (c_5 + c_6 t)e^{-t} \sin \sqrt{3}t$.

7.7.1 Spezielle Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen

Bei Gleichungen der Form $L(y) = f(t)$ löst man zunächst die homogene DGL $L(y) = 0$, dann wendet man die Konstanten-Variationsmethode. Allerdings kann man bei speziellen f eine partikuläre Lösung y_1 wesentlich einfacher bestimmen und so die allgemeine Lösung dann als $y = y_{hom} + y_1$ schreiben.

Satz 7.30 Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$. Die DGL $L(y) = f$ mit

$$f(t) = (b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_m) e^{\gamma t} \quad (59)$$

besitzt eine particuläre Lösung der Form $y(t) = t^k (q_0 t^m + q_1 t^{m-1} + \dots + q_m) e^{\gamma t}$, wobei $k = 0$ falls $p(\gamma) \neq 0$, sonst ist k die Vielfachheit der Nullstelle γ des charakteristischen Polynoms p .

Beweis: Für $y_1(t) := q_0 t^{m+k} e^{\gamma t}$ impliziert das letzte Lemma, dass

$$L(y_1) = (q_0 d_0 t^m + r(t)) e^{\gamma t}, \quad d_0 \neq 0,$$

wobei im Falle $m = 0$ gilt $r(t) \equiv 0$ und für $m \geq 1$ gilt $\deg(r_m) \leq m - 1$. Um darin $b_0 t^m$ zu bekommen, setzen wir $q_0 = b_0/d_0$, so folgt im Falle $m = 0$, dass $y_1 = b_0 d_0^{-1} t^k e^{\gamma t}$ eine Lösung ist.

Sei nun $m \geq 1$. Induktionsannahme: die Aussage ist richtig falls das Polynom in (59) den Grad kleiner als m hat, also für $b_0 = 0$. Zu zeigen ist, dass die Aussage auch für $b_0 \neq 0$ gilt. Wir berechnen

$$L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) = (b_0 t^m + r(t)) e^{\gamma t} + L(z).$$

Wann wird daraus (59)? Dafür muss gelten:

$$(b_0 t^m + r(t)) e^{\gamma t} + L(z) = (b_0 t^m + p_{m-1}(t)) e^{\gamma t},$$

wobei p_{m-1} ein Polynom vom Grad $(m - 1)$ ist. Also muss gelten

$$L(z) = (p_{m-1} - r(t)) e^{\gamma t}.$$

Dabei gilt $\deg(p_{m-1} - r(t)) \leq m - 1$. Wegen der Induktionsannahme besitzt die Gleichung $L(z) = (p_{m-1} - r(t)) e^{\gamma t}$ eine Lösung der Form $z(t) = t^k q^*(t) e^{\gamma t}$, mit $\deg(q^*) \leq m - 1$. Daraus folgt

$$y = y_1 + z = t^k (b_0 d_0^{-1} t^m + q^*(t)) e^{\gamma t}.$$

□

Bemerkung: Aus $L(y_1) = f_1$ und $L(y_2) = f_2$ folgt $L(y_1 + y_2) = f_1 + f_2$. So kann man die partikuläre Lösungen für f_1 und f_2 separat suchen.

Beispiel 22 Finden Sie alle Lösungen von

$$\ddot{y} + 2\ddot{y} - 4\dot{y} - 8y = e^{-2t} + te^t.$$

Lösung: Es gilt $y_{hom} = c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t) e^{-2t}$ und $f_1 = e^{-2t}$ mit $\gamma = -2$ und $f_2 = te^t$ mit $\gamma = 1$. Deswegen, wie im Bemerkung, betrachten wir separat

$$\ddot{y} + 2\ddot{y} - 4\dot{y} - 8y = e^{-2t},$$

$$\ddot{y} + 2\ddot{y} - 4\dot{y} - 8y = te^t.$$

Für die erste Gleichung gilt $\gamma = -2$, $k = 2$, $m = 0$ deswegen nutzen wir den Ansatz $y_1 = at^2 e^{-2t}$ und berechnen $a = -\frac{1}{8}$.

Für die zweite Gleichung ist der Ansatz: $y_2 = (bt + c)e^t$, was zu $e^t(-9bt + 3b - 9c) = te^t$ führt, was für alle t gelten muss. Daraus folgt $-9b = 1$ und $3b - 9c = 0$. Also ist $b = -\frac{1}{9}$ und $c = -\frac{1}{27}$.

Die allgemeine Lösung ursprünglicher DGL ist

$$y = y_{hom} + y_1 + y_2 = c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t) e^{-2t} - \frac{1}{8} t^2 e^{-2t} - \left(\frac{1}{9} t + \frac{1}{27} \right) e^t.$$

Bemerkung 10 Sind in der DGL $L(y) = f$ alle Koeffiziente reell und $f(t) = e^{at}(P(t) \cos bt + Q(t) \sin bt)$, mit reellen Polynomen $\deg P = m_1$ und $\deg Q = m_2$ so gibt es eine Lösung der Form

$$y = t^k e^{at} (R(t) \cos bt + S(t) \sin bt),$$

wobei k ist die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = a + ib$ des charakteristischen Polynoms (bzw. $k = 0$, falls dies keine Nullstelle ist) und R, S sind Polynome vom Grad $m := \max\{m_1, m_2\}$.

Beweis: Da $\cos bt = \frac{1}{2}(e^{ibt} + e^{-ibt})$ und $\sin bt = \frac{1}{2i}(e^{ibt} - e^{-ibt})$ gilt, kann man das f in Form $f = f_1 + f_2$ mit $f_i P_i(t) e^{\gamma_i t}$ darstellen, wobei $\gamma_1 = a + ib$ und $\gamma_2 = a - ib$ gilt. Die Lösung von $L(y) = f_1 + f_2$ ist dann $y = y_1 + y_2$, wobei $L(y_1) = f_1$ und $L(y_2) = f_2$. Das k ist bei den Lösungen y_1 und y_2 gleich, da $a \pm ib$ die gleiche Vielfachheit haben. Die Behauptung folgt aus Darstellung $e^{(a \pm ib)t}$ durch $e^{at} \cos bt$ und $e^{at} \sin bt$. \square

Beispiel 23 Finden Sie die allgemeine Lösung von

$$\ddot{y} + y = 2 \cos t - 8t \sin t.$$

Lösung: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Also

$$y_{hom} = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Wir haben $f_1 = 2 \cos t$ und $f_2 = 8t \sin t$. Für alle beide f_1 und f_2 haben wir:

$$a = 0, \quad b = 1, \quad \gamma = a + ib = i.$$

Deswegen kann man mit dem selben Ansatz für f_1 und f_2 gleichzeitig arbeiten.

Es gilt $2 \cos t - 8t \sin t = \operatorname{Re}(2 + 8it)e^{it}$ und wir betrachten die DGL

$$\ddot{z} + z = (2 + 8it)e^{it},$$

dann ist $y = \operatorname{Re}(z)$.

Für $\gamma = i = \lambda_1$ gilt $k = 1$, $m := \deg(2 + 8it) = 1$ also ist der Ansatz:

$$z = t(c_1 + c_2)e^{it}.$$

Substitution in die letzte DGL liefert

$$(2c_1 + i(4c_1t + 2c_2))^{it} = (2 + 8it)e^{it}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4c_1i = 81, \quad 2c_1 + 2c_2i = 2 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 2, \quad c_2 = i$$

Also ist $z = (2t^2 + it)e^{it}$ und $y_1 = \operatorname{Re}(z) = 2t^2 \cos t - t \sin t$.

Beispiel 24 *Elastische Schwingungen unter perioisch wirkender Kraft:*

$$\ddot{y}(t) + \mu \dot{y}(t) + a^2 y(t) = F_0 \sin wt \quad (60)$$

$\mu \geq 0$, $a, w, F_0 \in \mathbb{R}$. Betrachte den Fall ohne Reibung, d.h. $\mu = 0$:

$$\ddot{y} + a^2 y = F_0 \cos wt. \quad (61)$$

$$\lambda^2 + a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm ai$$

$$y_{hom} = c_1 \cos at + c_2 \sin at$$

dies sind die eigenschwingungen, ohne wirkender Kraft. Wir haben für $\sin wt$, dass $\gamma = iw$ ist. Sei $w \neq a$, dann ist eine partikuläre Lösung $y_1 = c \cos wt + d \sin wt$. Einsetzen in die DGL liefert

$$(a^2 - w^2)c \cos wt + (a^2 - w^2)d \sin wt = F_0 \sin wt$$

d.h. $c = 0$ und $d = \frac{F_0}{a^2 - w^2}$ und

$$y = c_1 \cos at + c_2 \sin at + \frac{F_0}{a^2 - w^2} \sin wt.$$

Falls $w = a$ gilt ist der Ansatz: $y_1 = t(c \cos wt + d \sin wt)$, was dann zu $d = 0$ und $c = -\frac{F_0}{2w}$ führt.

$$y = c_1 \cos at + c_2 \sin at - \frac{F_0 t}{2w} \cos wt.$$

Die wirkende Kraft ist beschränkt, aber die Lösungen sind unbeschränkt.

8 LinDGL mit periodischen Koeffizienten

Zunächst brauchen wir einige Werkzeuge.

8.1 Matrixlogarithmus

Zu Erinnerung: Für ein $z \in \mathbb{C}$ heißt $w \in \mathbb{C}$ ein Logarithmus von z , falls $e^w = z$ gilt. Wir schreiben dann $w := \ln z$. Da $e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta)$ und z ist darstellbar als $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gilt

$$e^{\alpha+i\beta} = z \quad \Leftrightarrow \quad e^\alpha = r, \quad \beta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Für jedes $z \neq 0$ ist $\ln z$ wohl definiert, aber nicht eindeutig.

Definition 8.1 Eine Matrix B ist ein Logarithmus einer gegebenen Matrix A , wenn A das Matrixexponential von B ist: $e^B = A$.

Satz 8.2

$$\forall A \in GL_n \quad \exists \ln A$$

Beweis: Wir werden die bekannte Formel aus Analysis benutzen:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j, \quad |x| < 1.$$

Ist $\lambda \neq 0$ und $A = \lambda I + N$ ein Jordan Block, so folgt mit Bezeichnung $H := \frac{1}{\lambda}N$

$$\ln \frac{1}{\lambda} A = \ln(I + H) = H - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{3}H^3 - \dots$$

Um dies zu zeigen, setzen wir die Rechte Seite in die Definition von e ein:

$$e^{\ln \frac{1}{\lambda} A} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} H^j \right)^i = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} H^j \right)^i =: I + S$$

Ist H ein Skalar mit $|H| < 1$, so gilt

$$I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} H^j \right)^i = e^{\ln(1+H)} = 1 + H, \quad S = H.$$

Die Reihe S konvergiert dabei absolut, so kann man in der Reihe die Reihenfolge der Summanden umordnen, bzw. kann man die Summanden Gruppieren um die Reihe wie folgt darzustellen

$$S = c_1 H + c_2 H^2 + c_3 H^3 + \dots$$

Hier ist c_m eine endliche Linearkombination von Koeffizienten der Reihe

$$S := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} H^j \right)^i$$

Aus $S = H$ folgt $c_1 = 1$ und $c_m = 0$ für $m \geq 2$.

Sei nun H eine Matrix der Größe $k \times k$, dann gilt $H^m = 0$ für $m \geq k$, weil H nilpotent ist. Dann ist die Reihe

$$S := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} H^j \right)^i$$

eine endliche Summe, die man wieder als

$$S = c_1 H + c_2 H^2 + c_3 H^3 + \dots$$

schreiben kann, wobei c_m berechnen sich identisch zu dem skalaren Fall, also sind die selben Zahlen. Deswegen gilt wieder $c_1 = 1$ und $c_m = 0$ für $m \geq 2$. Also wieder gilt $S = H$, d.h.

$$e^{\ln(I+H)} = I + H \quad \Leftrightarrow \quad \ln(I + H) = H - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{3}H^3 - \dots =: M$$

Für einen festen Jordanblock mit $\lambda \neq 0$ wählen wir immer den gleichen Zweig des Logarithmus.

$$e^{I \ln \lambda + M} = e^{I \ln \lambda} \cdot e^M = \lambda I (I + H) = \lambda I + H = A$$

d.h.

$$\ln A = I \ln \lambda + M = I \ln \lambda + H - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{3}H^3 - \dots + \frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)} H^{k-1}.$$

So berechnet sich $\ln A$ falls A ein Jordan-Block ist.

Sei nun A beliebig und J ihre Jordan Normalform, die aus Jordanblöcken J_i für $\lambda_i \neq 0$ besteht. Dann ist $\ln J = D$, wobei D aus Blöcken $\ln J_i$ (wie oben) besteht, so dass $e^D = J$ gilt.

Für jede Matrix A mit $\det A \neq 0$ existiert T mit

$$J = T^{-1}AT, \quad \det(J) \neq 0$$

d.h.

$$A = T J T^{-1} = T e^{\ln J} T^{-1} = e^{T(\ln J)T^{-1}}$$

oder

$$\ln A = T(\ln J)T^{-1}$$

Dies zeigt die Existenz von $\ln A$. □

8.2 Lineare DGL-systeme mit periodischen Koeffizienten

Sei $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A(t+T) = A(t)$ für ein $T > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Ist X eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A(t)x$, so ist $Y(t) := X(t+T)$ auch eine Fundamentalmatrix, denn $\det Y(t) \neq 0$ und

$$\dot{Y}(t) = \dot{X}(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)Y(t).$$

Wegen Proposition 7.7 gibt es eine Matrix M mit $\det M \neq 0$ und

$$X(t+T) = X(t)M$$

Dann gilt auch

$$X(t+kT) = X(t)M^k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Lemma 8.3 Sei Z eine Fundamentalmatrix mit dazugehöriger M_1 , dann gilt $M_1 = C^{-1}MC$ für ein T mit $\det(T) \neq 0$.

Beweis: Es gibt eine Matrix C mit $\det(C) \neq 0$ und $Z(t) = X(t)C$. Aus $Z(t+T) = Z(t)M_1$ folgt

$$M_1 = Z^{-1}(t)Z(t+T) = C^{-1}X^{-1}(t)X(t+T)C = C^{-1}MC.$$

□

Nun zeigen wir welche Geometrische Bedeutung die matrix M und ihre Eigenwerte haben.

Sei X eine Fundamentalmatrix mit $X(0) = I$. Für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist dann die Lösung vom AWP gegeben durch $x(t) = X(t)x_0$. Dann gilt wegen $X(t+T) = X(t)M$, dass

$$x(T) = X(T)x_0 = Mx_0.$$

D.h. die Matrix M überführt $x(0)$ nach $x(T) = Mx(0)$. Dann gilt auch $x(2T) = Mx(T) = M^2x(0)$ usw.

Sei v ein Eigenvektor mit $Mv = \mu v$. Sei $x(0) = v$ und $x(t) = X(t)v$ die Lösung zum AW $x(0) = v$.

$$x(t+T) = X(t+T)v = X(t)Mv = X(t)\mu v = \mu x(t).$$

D.h. nach jeden T Zeiteinheiten vergrößert sich die Lösung μ -fach.

Satz 8.4 (Floquet) Jede Fundamentalmatrix für $\dot{x} = A(t)x$ hat immer die Form

$$X(t) = K(t)e^{tB},$$

wobei die Matrix K periodisch mit Periode T ist und $B = \frac{1}{T} \ln M$.

Beweis: Sei X eine Fundamentalmatrix und M so dass $X(t+T) = X(t)M$. Sei B eine Matrix mit $e^{TB} = M$. Wir definieren $K(t) := X(t)e^{-tB}$, dann ist sie stetig und \dot{K} auch stetig. Ausserdem ist sie T -periodisch:

$$K(t+T) = X(t+T)e^{-(t+T)B} = X(t)Me^{-TB}e^{-tB} = X(t)e^{-tB} = K(t)$$

wobei wir $Me^{-TB} = I$ benutzt haben. □

Dieses Resultat erlaubt uns die Betrachtung auf einem Zeit-Intervall der Länge T , beliebig in der Zeit zu erweitern. Es folgt zum Beispiel, dass alle Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$ gegen Null mit der Zeit gehen, falls Spektralradius von M kleiner 1 ist.

9 Autonome Systeme

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten die zeitinvariante Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

D heißt Phasenraum (oder auch Zustandsraum). Dies kann \mathbb{R}^n oder eine Teilmenge von \mathbb{R}^n (etwa Oberfläche eines Zylinders in \mathbb{R}^n) sein.

Jede Lösung $x = x(t)$ definiert eine Kurve im Phasenraum. Diese Kurve heißt Trajektorie. Dies kann auch ein Punkt $x(t) \equiv a$ sein ($\Leftrightarrow f(a) = 0$). Solche Punkte heißen Gleichgewichtszustände. Wir nutzen folgende Terminologie:

- Lösung ist eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\dot{x} = f(x)$
- Lösungskurve ist der Graph $\{(t, x(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \in I\}$
- Trajektorie ist die Bildmenge $\{x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in I\}$ einer maximalen Lösung

Beispiel: $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1$ (der Zustandsraum ist \mathbb{R}^2).

- Lösung: $x_1 = c_1 \sin(t + c_2), \quad x_2 = c_1 \cos(t + c_2), \quad t \in \mathbb{R}$
- Lösungskurve: Spirale in \mathbb{R}^3
- Trajektorie: Kreis in \mathbb{R}^2 , weil $x_1^2 + x_2^2 = c_1^2$.
- Gleichgewichtszustand (Ruhelage): $x_1 = x_2 = 0 \in \mathbb{R}^2$

Jeder Kreis stellt unendlich viele Lösungen (für verschiedene c_2) dar.

Lemma 9.1 *Ist x eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$, so ist $y(t) := x(t+c)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch eine Lösung. Alle solche Lösungen haben die selbe Trajektorie.*

Beweis: Für die Lösung $x = x(t)$ gilt $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $t \in I$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt dann $\dot{x}(t+c) = f(x(t+c))$, $t \in I$ oder $\dot{y}(t) = f(y(t))$ also ist y auch eine Lösung und hat die gleiche Trajektorie, wie x . \square

Lemma 9.2 *Zwei beliebige Trajektorien von $\dot{x} = f(x)$ stimmen komplett überein oder sie haben keine gemeinsame Punkte.*

Beweis: Sei $b \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, der der beiden Trajektorien von Lösungen x und y angehört: $b = x(t_1) = y(t_2)$ für passende $t_1, t_2 \in I$. Dann ist $z(t) := y(t + t_2 - t_1)$ auch eine Lösung. Für diese Lösung gilt $z(t_1) = y(t_2) = x(t_1)$. Wegen Eindeutigkeit der Lösung zu einem AWP folgt $z(t) \equiv x(t)$. Das bedeutet $y(t + t_2 - t_1) \equiv x(t)$. Daraus folgt, dass die Trajektorien von x und y gleich sind. \square

Ist $a \in \mathbb{R}^n$ eine Ruhelage ($f(a) = 0$), so folgt aus dem letzten Lemma, dass diese Ruhelage nicht in endlicher Zeit erreicht werden kann.

Lemma 9.3 *Ist x eine (nicht konstante) Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit der Eigenschaft $x(t_1) = x(t_2)$ für $t_2 > t_1$, so ist diese Lösung periodisch und besitzt die kleinste positive Periode. Trajektorie dieser Lösung ist eine geschlossene Kurve ohne Überschneidung.*

Beweis: Betrachte die Lösung $y(t) := x(t + t_2 - t_1)$. Es gilt $y(t_1) = x(t_2) = x(t_1)$. Wegen Eindeutigkeit der Lösungen folgt $y(t) \equiv x(t)$. Daraus Folgt für $d := t_2 - t_1$, dass $x(t+d) = x(t)$ für alle t . (Andere Perioden möglich.)

Da $x(t) \neq \text{const}$, gibt es ein t^* mit $x(t^*) \neq x(t_1)$. Das bedeutet $r := \|x(t^*) - x(t_1)\| > 0$. Da x stetig (als Lösung) ist, gibt es $h > 0$ mit $\|x(t) - x(t_1)\| < r$ für $t \in [t_1 - h, t_1 + h]$. Deswegen $x(t) \neq x(t^*)$ für $t \in [t_1 - h, t_1 + h]$. Daraus folgt, dass jede Periode größer als $2h$ ist. Ist p ein Infimum über aller Perioden, so ist $p \geq 2h$. Zu zeigen ist, dass p (als Infimum aller Perioden) eine Periode ist. In der Tat, es gibt dann eine monoton fallende Folge $\{p_i\}$ von perioden mit $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p$. Für jede i gilt

$$x(t + p_i) = x(t), \quad t \in I$$

Der Grenzwertübergang für $i \rightarrow \infty$ impliziert $x(t + p) = x(t)$, $t \in I$. Die Trajektorie $x(t)$, $t \in [0, p]$ ist eine geschlossene Kurve, da $x(0) = x(p)$ gilt. Gebe es eine Selbstüberschneidung bei der Kurve, so gebe es $t_1, t_2 \in [0, p]$ mit $|t_1 - t_2| < p$ und $x(t_1) = x(t_2)$. Dann ist $d := |t_1 - t_2| < p$ eine Periode, wegen obiger Betrachtung. Dies ist ein Widerspruch mit der Minimalität von p . Also hat diese Kurve keine Selbstüberschneidung. \square

Theorem 9.4 Jede Trajektorie von $\dot{x} = f(x)$ ist entweder ein Punkt oder eine geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidung oder eine nicht geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidung.

Beweis: Ist die Lösung $x(t) \equiv \text{const}$ so ist ihre Trajektorie ein Punkt.

Ist $x(t_1) \neq x(t_2)$ für alle $t_1 \neq t_2$ so ist ihre Trajektorie eine Kurve ohne Selbstüberschneidung, die dann auch nicht geschlossen ist.

Falls $\exists t_1 \neq t_2$ mit $x(t_1) = x(t_2)$ und $x(t) \neq \text{const}$ so bekommen wir eine Trajektorie als geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidung. \square

9.1 Grenzmengen

Sei $\dot{x} = f(x)$ gegeben auf D .

Definition 9.5 $p \in D$ heißt ω -Grenzpunkt einer Lösung $\varphi = \varphi(t)$ (bzw. der Trajektorie dieser Lösung), wenn $\exists t_k \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}$ mit $p = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k)$.

Die Menge $\Omega(\varphi)$ aller ω -Grenzpunkte von φ heißt ω -Grenzmenge.

Ist $t_k \rightarrow -\infty$ und $p = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k)$, so ist p ein α -Grenzpunkt für φ (bzw. für die Trajektorie von φ).

Die Menge aller solchen Punkte heißt α -Grenzmenge.

Für $x = t$ ist ω -Grenzmenge leer.

Für $x = e^{-t}$ ist ω -Grenzmenge $\{0\}$

Für $x_1 = \frac{e^t \cos t}{1+e^t}, x_2 = \frac{e^t \sin t}{1+e^t}$ ist α -Grenzmenge der Punkt $(0,0)$ und die ω -Grenzmenge ist der Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Theorem 9.6 Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ so, dass f_i und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ stetig in G sind. Sei $\varphi = \varphi(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ beschränkt bei $t \rightarrow \infty$ und mit $\varphi(t) \in G \subset \mathbb{R}^n$ für $t \geq \tilde{t}$, für ein $\tilde{t} \in \mathbb{R}$, so ist $\Omega(\varphi)$ nicht leer, beschränkt, abgeschlossen und besteht aus ganzen Trajektorien.

Beweis: Sei t_i eine Folge mit $t_i \rightarrow \infty$ bei $i \rightarrow \infty$. Dann ist die Folge $\varphi(t_i)$ beschränkt, daher besitzt Sie Grenzwerte. Also ist $\Omega(\varphi) \neq \emptyset$. Da $\varphi(t)$ für $t \geq \tilde{t}$ beschränkt ist, folgt dass $\Omega(\varphi)$ auch beschränkt ist.

Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, betrachten wir eine konvergente Folge $p_i \in \Omega(\varphi)$ mit $p_i \rightarrow p$, wenn $i \rightarrow \infty$. Für jedes i gibt es ein p_i mit $|p_i - p| < 2^{-i}$. Für dieses p_i gibt es eine Folge $t_{i,j}, j \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(t_{i,j}) \rightarrow p_i$ für $j \rightarrow \infty$. Also gibt es ein $j = j(i)$ mit $t_{i,j(i)} > i$ und $|\varphi(t_{i,j(i)}) - p_i| < 2^{-i}$. Dann gilt $|\varphi(t_{i,j(i)}) - p| < 2 \cdot 2^{-i}$ für $t_{i,j(i)} > i \rightarrow \infty$. Daraus folgt $p \in \Omega(\varphi)$, deswegen ist $\Omega(\varphi)$ abgeschlossen.

Nun zeigen wir, dass $\Omega(\varphi)$ aus ganzen Trajektorien besteht, also dass für jedes $a \in \Omega(\varphi)$ eine Trajektorie existiert, die in $\Omega(\varphi)$ enthalten ist.

$$a \in \Omega(\varphi) \Rightarrow \exists t_i : \varphi(t_i) \rightarrow a, \quad i \rightarrow \infty.$$

Betrachten wir die Lösungen $\chi_i(t) := \varphi(t_i + t)$. Es gilt $\chi_i(0) \rightarrow a$, wenn $i \rightarrow \infty$. Sei $z = z(t)$ die Lösung für den AW $z(0) = a$. Sei T die Halb-Trajektorie von φ (der Teil für $t \geq \tilde{t}$). Die $\varepsilon/2$ -Umgebung dieser Trajektorie bezeichnen wir als

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \geq \tilde{t} : |x - \varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

So ist F abgeschlossen. Der Punkt $t = 0, x = a$ liegt in der Menge $D(-\infty < t < \infty, x \in F)$. Jede Lösung ist fortsetzbar entweder bis zum Rand ∂F oder für alle $t \in \mathbb{R}$. Im ersten Fall $\exists t^*$ mit

$$z(t^*) = b \in \partial F \Rightarrow |b - \varphi(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \geq \tilde{t}. \quad (62)$$

Wegen steteiger Abhängigkeit der Lösungen vom Anfangswert, folgt aus $\chi_i(0) \rightarrow a = z(0)$, dass

$$\chi_i(t^*) \rightarrow z(t^*) = b, \quad i \rightarrow \infty. \quad (63)$$

Aber $\chi_i(t^*) = \varphi(t_i + t^*)$ liegt auf der betrachteten Halb-Trajektorie T , d.h. der Abstand von b zu T ist Null. Deswegen stehen (62) und (63) im Widerspruch. Also ist $z = z(t)$ fortsetzbar für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle t

$$\varphi(t_i + t) = \chi_i(t) \rightarrow z(t), \quad i \rightarrow \infty$$

und impliziert $z(t) \in \Omega(\varphi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die ganze Trajektorie der Lösung $z = z(t)$ liegt in $\Omega(\varphi)$. \square

Bemerkung 11 *Man kann beweisen: $\Omega(\varphi)$ ist punktwise zusammenhängend.*

9.2 Gruppeneigenschaft

Sei $\xi \in D$ und $\varphi = \varphi(t, \xi)$ die Lösung vom AWP $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \xi = \varphi(0, \xi)$. Dann gilt

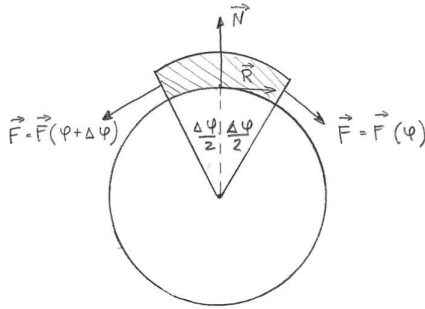
$$\varphi(t, \varphi(s, \xi)) = \varphi(s + t, \xi). \quad (64)$$

für alle t und s , so dass die obige Ausdrücke definiert sind. In der Tat, die Abbildungen $t \mapsto \varphi(t, \varphi(s, \xi))$ und $t \mapsto \varphi(s + t, \xi)$ sind Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ (die letzte wegen Lemma 9.1) und bei $t = 0$ nehmen den selben Wert $q = \varphi(s, \xi)$ an. Wegen Lösungseindeutigkeit stimmen sie überein.

Bemerkung 12 *Die Funktion $\varphi = \varphi(t, p)$ ist stetig in beiden Argumenten, siehe Satz 6.1.*

10 Modellierung mit DGL

Mit Hilfe von DGL kann man viele Phänomene modellieren. Um eine DGL herzuleiten, betrachtet man die unbekannte Größe zu zwei beieinander liegenden Werten der unabhängiger Variable (t und $t + \Delta t$). Mit Hilfe von physikalischen/chemischen/biologischen/etc. Gesetzen stellt man den Zusammenhang zwischen den zwei Werten her. Anschließend, macht man einen Grenzwertübergang für $\Delta t \rightarrow 0$. Dies betrachten wir an einem Beispiel:



Im Gleichgewichtszustand gilt: Summe aller Kräfte ist 0:

$$\vec{F}(\phi + \Delta\phi) + \vec{F}(\phi) + \vec{R} + \vec{N} = \vec{0}, \quad |\vec{R}| = \mu|\vec{N}|, \quad F := |\vec{F}|, \quad N := |\vec{N}|$$

Projektion auf die radiale Richtung: $F(\phi + \Delta\phi) \sin \frac{\Delta\phi}{2} + F(\phi) \sin \frac{\Delta\phi}{2} = N$
 und auf die tangentielle Richtung: $F(\phi + \Delta\phi) \cos \frac{\Delta\phi}{2} - F(\phi) \cos \frac{\Delta\phi}{2} = R = \mu N$
 \Rightarrow

$$F(\phi + \Delta\phi) \cos \frac{\Delta\phi}{2} - F(\phi) \cos \frac{\Delta\phi}{2} = \mu \left(F(\phi + \Delta\phi) \sin \frac{\Delta\phi}{2} + F(\phi) \sin \frac{\Delta\phi}{2} \right)$$

Dies wird durch $\Delta\phi$ dividiert und $\lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \dots$ berechnet.

$$\frac{F(\phi + \Delta\phi) - F(\phi)}{\Delta\phi} \cos \frac{\Delta\phi}{2} = \mu (F(\phi + \Delta\phi) + F(\phi)) \frac{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta\phi}$$

$$F'(\phi) = \mu F(\phi)$$

Nun kann man die Lösungen berechnen und diese analysieren.

11 Stabilität

Wir betrachten Differentialgleichungen unter unseren Standardbedingungen. Sei also $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ stetig und Lipschitzstetig bezüglich x . Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (65)$$

Definition 11.1 Sei $\psi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Systems (65). Dann heißt ψ

- (i) *stabil*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\sigma > 0$ existiert, so dass $\|x - \psi(t_0)\| < \sigma$ impliziert, dass die Lösung $\varphi(\cdot; t_0, x)$ auf $[t_0, \infty)$ existiert und dass gilt

$$\|\varphi(t; t_0, x) - \psi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

- (ii) *attraktiv*, wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass $\|x - \psi(t_0)\| < \eta$ impliziert, dass die Lösung $\varphi(\cdot; t_0, x)$ auf $[t_0, \infty)$ existiert und dass gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t; t_0, x) - \psi(t)\| = 0.$$

- (iii) *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil und attraktiv ist.

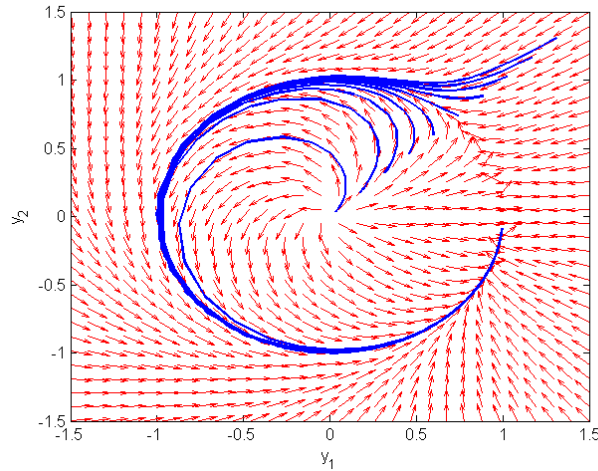


Abbildung 6: Richtungsfeld der Trajektorien von (66)

Attraktivität und Stabilität sind im Allgemeinen zwei unabhängige Begriffe. D.h. eine Eigenschaft impliziert nicht die Andere. Zum Beispiel ist die triviale Lösung von $\dot{x} = 0$ stabil aber nicht attraktiv (weil jede Lösung konstant ist). Folgendes Beispiel zeigt, dass triviale Lösung attraktiv aber instabil sein kann.

Beispiel 25 Betrachten wir in Polarkoordinaten (r, θ) das System

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r), \\ \dot{\theta} &= \sin^2(\theta/2). \end{aligned} \tag{66}$$

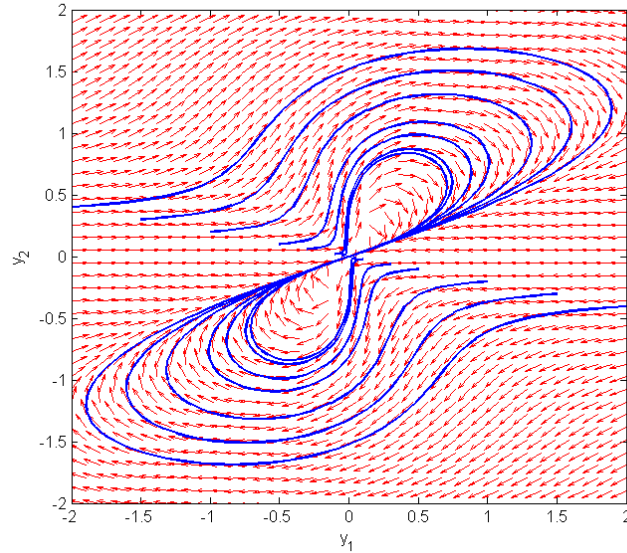


Abbildung 7: Velocity field and some of trajectories of (67)

Das System hat zwei Ruhelagen $(0, 0)$ und $(1, 0)$. Man kann sich leicht überlegen, dass $(0, 0)$ nicht stabil und nicht attraktiv ist. Alle andere Lösungen konvergieren gegen $(1, 0)$, also ist die Ruhelage $(1, 0)$ attraktiv. Man kann aber nachweisen, dass diese Lösung nicht stabil ist.

Beispiel 26 Die Ruhelage $(0, 0)$ ist (global) attraktiv aber nicht stabil:

$$\dot{x} = \frac{x^2(y - x) + y^5}{r^2(1 + r^4)}, \quad \dot{y} = \frac{y^2(y - 2x)}{r^2(1 + r^4)}, \quad (67)$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2$.

Stabilitätsuntersuchung einer Lösung $x = \xi(t)$ von $\dot{x} = f(t, x)$ kann man auf die Stabilitätsuntersuchung der trivialen Lösung von einem anderen System zurückführen. Dazu benutzen wir die Substitution $x = \xi + y$ und bekommen $\dot{\xi} + \dot{y} = f(t, \xi + y)$. Wegen $\dot{\xi} = f(t, \xi)$ folgt für y die DGL

$$\dot{y} = f(t, \xi + y) - f(t, \xi) \quad (68)$$

Die obige Substitution bildet jede Lösung ξ von DGL $\dot{x} = f(t, x)$ in die triviale Lösung $y \equiv 0$ von (68). Die Stabilitätseigenschaften ändern sich dabei nicht, weil die Differenz $\|\varphi(t; t_0, x) - \xi(t)\|$ geht in $\|\tilde{\varphi}(t; t_0, y) - 0\|$ über, wobei $\tilde{\varphi}(t; t_0, y)$ die Lösung von AWP (68) mit $y(t_0) = y$ darstellt.

Beispiel 27 Wir untersuchen, ob die triviale Lösung von

$$\dot{y} = -y^2$$

stabil ist.

$y \equiv 0$ ist eine Lösung. Alle andere Lösungen sind durch $y(t) = \frac{1}{t+c}$, $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Man könnte denken, dass hier alle Lösungen gegen 0 konvergieren und deswegen die triviale Lösung stabil ist. Allerdings für $y(0) < 0$ folgt $c < 0$ und die Lösung ist monoton fallend und besitzt eine vertikale Asymptote. Diese Lösung ist unbeschränkt, deswegen gilt die Implikation

$$\|y(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|y(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0$$

nicht. Die triviale Lösung ist nicht stabil.

Beispiel 28 Untersuchen wir die Stabilitätseigenschaften der trivialen Lösung von

$$\dot{x} = -4y, \quad \dot{y} = x.$$

Aus $4ydy = -xdx$ folgt die Formel für die allgemeine Lösung: $x^2 + 4y^2 = c$, $c \geq 0$. Die Trajektorien sind Ellipsen. Ist $x^2(0) + y^2(0) < \delta^2$ so ist die Trajektorie beschränkt durch die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4\delta^2$ (weil die Lösungen keine gemeinsame Punkte haben dürfen, wegen Lösungseindeutigkeit). Also ist die Lösung immer innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ mit $\varepsilon = 2\delta$. Daraus folgt die Stabilität. Allerdings ist die triviale Lösung nicht asymptotisch stabil, weil jede andere Lösung immer auf eigener Ellipse $x^2 + 4y^2 = c$ bleibt und nicht gegen 0 konvergieren kann.

11.1 Lineare autonome Systeme

Wir charakterisieren zunächst asymptotische Stabilität und Stabilität für lineare zeitinvariante Systeme

$$\dot{x} = Ax.$$

Seien λ_i die EW von A . Es gilt

Satz 11.2 (i) Gilt $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle EW von A , so ist die triviale Lösung asymptotisch stabil.

(ii) Seien $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ für alle EW von A . Für $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ sei die algebraische und die geometrische Vielfachheit von λ_i gleich. Dann ist die triviale Lösung stabil.

(iii) $\exists \lambda_i$ mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ oder $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ mit Jordanblock der Größe 2 oder mehr, so ist die triviale Lösung instabil.

Beweis: Aus dem Satz 7.21 folgt: Jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist in der Form

$$x(t) = \sum_{i=1}^m P_i(t) e^{\lambda_i t}, \quad (69)$$

P_i ein Polynom ist mit $\deg(P_i) \leq k_i - 1$, wobei k_i die Größe des größten Jordan-Block mit λ_i ist. Die Koeffiziente der Polynome P_i sind vektoren aus \mathbb{R}^n . Für EW $\lambda = a + ib$ gilt

$$P(t) e^{\lambda t} = P(t) e^{at} (\cos bt + i \sin bt), \quad |\cos bt + i \sin bt| = 1.$$

Fall (i): Wegen $a < 0$ folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) e^{at} = 0$. Das bedeutet, dass jede Lösung konvergiert gegen 0 und ist auf $[0, \infty)$ beschränkt. Sei X die fundamentale matrix mit $X(0) = I$. Weil sie aus Lösungen besteht, $\exists M$ mit $\|X(t)\| \leq M$ für $t \in [0, \infty)$ und es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$. Für jede Lösung gilt $x(t) = X(t)x(0)$. Deswegen

$$\|x(0)\| < \delta := \frac{\varepsilon}{M} \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \leq \|X(t)\| \cdot \|x(0)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0$$

und $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Daraus folgt (i).

Fall (ii): Die Summanden in (69) mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ sind beschränkt für $t \in [0, \infty)$. Falls $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ ist das entsprechende Polynom vom Grad 0 (da die alg. und gem. Vielfachheiten gleich sind, sind die Jordan Blöcke zum λ_i der Größe 1), also konstant und deswegen auch beschränkt. So folgt analog zu (i) die Stabilität.

Fall (iii): Es gibt eine Lösung der Form $x(t) = e^{(a+ib)t}v$, wobei v der EV zu $\lambda = a + ib$ ist. Da $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = \infty$ ist diese Lösung unbeschränkt. Nun $\forall \delta > 0$ sei $c := \frac{\delta}{2d\|x(0)\|}$. Betrachte die Lösung $x_1(t) := cx(t)$. Es gilt $x_1(0) = \delta/2$ aber $x_1(t)$ ist unbeschränkt. Deswegen ist die triviale Lösung instabil. Falls $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ aber für ein λ gilt $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ und es gibt ein Jordanblock der Größe $k \geq 2$ mit dem EW λ , dann gibt es ein Summand $P(t)e^{\lambda t}$ in (69) mit $\deg(P) \geq 1$ (unbeschränkt). Da $|e^{\lambda t}| = 1$ ist diese Lösung unbeschränkt und die Instabilität folgt analog zum letzten Schritt. \square

Definition 11.3 Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt positiv definit, falls $A^* = A$ gilt und x^*Ax reell ist und positiv für alle $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$.

Die positive Definitheit wird mit $A > 0$ bezeichnet. Es ist bekannt aus Linearer Algebra, dass $A > 0$ dann und nur dann, wenn alle Eigenwerte reell und positiv sind (und $A^* = A$ gilt).

Satz 11.4 Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax.$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- (i) Alle Lösungen sind asymptotisch stabil.
- (ii) Die Ruhelage (die triviale Lösung) ist asymptotisch stabil.
- (iii) $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$.
- (iv) Es gibt $M \geq 1$, $\beta > 0$, so dass

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

- (v) Für alle $Q > 0$ gibt es ein $P > 0$, so dass

$$A^*P + PA = -Q.$$

- (vi) Es gibt ein $Q > 0$ und ein $P > 0$, so dass

$$A^*P + PA = -Q.$$

Beweis:

- (i) \Rightarrow (ii) Das ist klar.

- (ii) \Rightarrow (iii) Annahme: $\exists \lambda \notin \mathbb{C}^-$, $Av = \lambda v$, $v \neq 0$. Damit ist $e^{\lambda t}v$ eine Lösung und $\|e^{\lambda t}v\| = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|v\| \not\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, also ist die triviale Lösung nicht asymptotisch stabil.

- (iii) \Rightarrow (iv)

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit $\operatorname{Re} \lambda < 0$, $t \geq 0$ und z aus dem verallgemeinerten Eigenraum von λ .

Ist

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^k z &\neq 0, & k < m \\ (A - \lambda I)^k z &= 0, & k \geq m \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned}
e^{(A-\lambda I)t}z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z \\
&= z + (A - \lambda I)z + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda I)^{m-1} z
\end{aligned}$$

Also

$$e^{At}z = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t}z = e^{\lambda t} I \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z.$$

Sei $\lambda = \alpha + \beta i$. Dann

$$e^{At}z = e^{\alpha t} e^{i\beta t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k z.$$

und

$$\begin{aligned}
|e^{At}z| &\leq e^{\alpha t} |e^{i\beta t}| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} |(A - \lambda I)^k z| \\
&\leq e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \|A - \lambda I\|^k |z|.
\end{aligned}$$

Wenn $m = 1$, ist die Aufgabe gelöst, und β in der Formulierung des Lemmas kann gleich zu $\alpha = \operatorname{Re} \lambda$ gewählt werden.

Sei $m > 1$. Wählen wir $\varepsilon > 0$ so dass $\varepsilon < |\alpha|$. Dann

$$|e^{At}z| \leq e^{(\alpha+\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \|A - \lambda I\|^k |z|.$$

Klar,

$$M := \sup_{t \geq 0} e^{-\varepsilon t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \|A - \lambda I\|^k < \infty,$$

und also

$$|e^{At}z| \leq M e^{(\alpha+\varepsilon)t} |z|.$$

Und die Aussage gilt mit $\beta := \operatorname{Re} \lambda + \varepsilon$, für $\varepsilon > 0$ beliebig klein.

Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von \mathbb{R}^n aus den verallgemeinerten EV von A . Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann existieren $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ so dass:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Nun $c_i x_i$ ist wieder ein verallgemeinerter EV von A . Also impliziert $|x| \leq |c_1 x_1| + \dots + |c_n x_n|$ die Eigenschaft (iv) für passende M und β .

(iv) \Rightarrow (v) Fixiere $Q > 0$ und betrachte

$$\begin{aligned} \left\| \int_{T_1}^{T_2} e^{A^* t} Q e^{A t} dt \right\| &\leq \int_{T_1}^{T_2} \|e^{A^* t} Q e^{A t}\| dt \\ &\leq M^2 \|Q\| \int_{T_1}^{T_2} e^{-2\beta t} dt, \end{aligned}$$

also ist

$$\int_0^T e^{A^* t} Q e^{A t} dt$$

für $T \rightarrow \infty$ Cauchy und es existiert

$$P := \int_0^\infty e^{A^* t} Q e^{A t} dt.$$

Da $Q > 0$, gilt auch $P > 0$. Weiterhin,

$$\begin{aligned} A^* P + P A &= \int_0^\infty \underbrace{A^* e^{A^* t} Q e^{A t} + e^{A^* t} Q e^{A t} A}_{= \frac{d}{dt} (e^{A^* t} Q e^{A t})} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^* t} Q e^{A t}) dt = e^{A^* t} Q e^{A t} \Big|_0^\infty = -Q. \end{aligned}$$

(v) \Rightarrow (vi) Das ist klar.

(vi) \Rightarrow (i) Sei $x = x(t)$ eine Lösung, also $\dot{x} = Ax$. Betrachte $v(x(t)) := x(t)^* P x(t)$. Dann gilt für die totale Ableitung von v

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(x(t)) &= \dot{x}(t)^* P x(t) + x(t)^* P \dot{x}(t) \\ &= x^*(t) A^* P x(t) + x^*(t) P A x(t) \\ &= x^*(t) [A^* P + P A] x(t) = -x(t)^* Q x(t) < 0 \end{aligned}$$

für $x(t) \neq 0$.

Da alle Normen in \mathbb{K}^n äquivalent sind, reicht es, Stabilität für die Norm

$$\|x\|_P = \sqrt{x^* P x} = \left\| P^{\frac{1}{2}} x \right\|_2$$

zu zeigen. Sei $z = z(t) \in \mathbb{K}^n$ eine nicht triviale Lösung. Für alle $t > 0$ gilt

$$v(z(t)) = v(z(0)) + \int_0^t \dot{v}(z(s)) ds < v(z(0)).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir δ sodass $\|y - z(0)\|_P < \delta$ impliziert $v(y - z(0)) < \varepsilon$. Die Stabilität folgt dann aus

$$\|y(t) - z(t)\|_P = \sqrt{v(y(t) - z(t))} = \|y(t) - z(t)\|_P < v(y - z(0)) < \varepsilon.$$

Attraktivität: Die Abbildung $t \rightarrow v(z(t))$ ist monoton fallend und beschränkt. Also existiert ein $c \geq 0$ mit

$$c = \lim_{t \rightarrow \infty} v(z(t)).$$

Ist $c = 0$, so folgt $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, daraus folgt die Behauptung.

Annahme: $c > 0 \Rightarrow v(z(t)) > c$ für alle $t \geq 0$. Nun ist $Q > 0$, also gilt

$$x^* Q x \geq \|x\|_2^2 \lambda_{\min}(Q) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \|x\|_P^2 > \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} c,$$

also $\dot{v}(z(t)) = -z(t)^* Q z(t) \leq -\gamma < 0$ für alle $t > 0$ mit $\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} c$. Damit

$$\begin{aligned} v(z(t)) &= v(z(0)) + \int_0^t -z(s)^* Q z(s) dt \\ &< v(z(0)) - \int_0^t \gamma ds = v(z(0)) - \gamma t \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

für $t \rightarrow \infty$. Also ist $c > 0$ nicht möglich. □

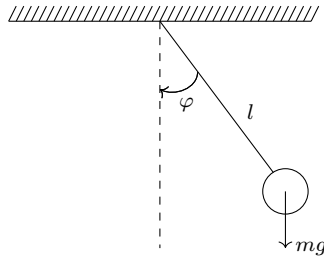


Abbildung 8: Mathematisches Pendel

Satz 11.5 (Stabilität) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- (i) 0 ist stabil.
- (ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ und für $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ stimmen algebraische und geometrische Vielfachheiten überein.
- (iii) $\exists M \geq 1 : \|e^{At}\| \leq M, \quad t \geq 0.$
- (iv) Es gibt ein $P > 0$ und ein $Q \geq 0$, so dass

$$A^*P + PA = -Q.$$

Beweis: Der Beweis ist analog zum Beweis vom letzten Satz. Dabei brauchen wir keine Attraktivität mehr. Zum Beispiel, zeigen wir die Implikation

(i) \Rightarrow (ii) durch Widerspruch. Sei $\lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re} \lambda > 0$

$$\|e^{\lambda(t)}v\| \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Stabilität. Sei $\lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re} \lambda = 0$ und $v \in \operatorname{Ker} (\lambda I - A)^2 \setminus \operatorname{Ker} (\lambda I - A)$

$$e^{At}v = e^{\lambda t} (I + (A - \lambda I)t) v.$$

Da $(\lambda I - A)v \neq 0$, folgt $\|e^{At}v\| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Dies ist ein Widerspruch zur Stabilität.

□

11.2 Lyapunov-Funktion

Bei nichtlinearen DGL $\dot{x} = f(t, x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann man mit Eigenwerten, wie in den letzten Sätzen nicht mehr arbeiten. Deswegen braucht man eine andere Methode. Als Motivation betrachten wir das mathematische Pendel

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad \xLeftrightarrow{x_1 := \varphi} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1. \end{cases}$$

Hier gibt es keine explizite Lösungsformel und keine EW, weil die Rechtseite nichtlinear ist. Betrachten wir die mechanische Energie:

$$E(x_1(t), x_2(t)) = \frac{m(lx_2(t))^2}{2} + mg(l - l \cos x_1(t)).$$

Ihre Ableitung nach t berechnet sich mit der Kettenregel als

$$\dot{E} = \nabla E \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mgl \sin x_1 \\ ml^2 x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Also ändert sich die Energie mit der Zeit nicht. Die Stabilität folgt dann mit folgender Überlegung: Ist $|x(0)| < \delta \ll 1$ klein, so ist $E = \text{const}$ auch klein und deswegen sind die Werte von $|x_1(t)|, |x_2(t)|$ klein, also ist $|x(t)|$ klein für alle t .

Ohne Information über die Lösungen haben wir die Stabilität der Ruhelage mit Hilfe der Energie nachgewiesen. Statt Energie, könnte man eine andere Funktion betrachten. Dies führt zum Begriff der Lyapunov-Funktion (LF), den wir zunächst für autonome DGL

$$\dot{x} = f(x), \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eingeführen.

Definition 11.6 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $x^* \in D$ mit $f(x^*) = 0$. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lyapunovfunktion für $\dot{x} = f(x)$ auf D wenn gilt

$$(i) \quad V(x) \geq 0, x \in D \text{ und } V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*.$$

$$(ii) \quad \text{Für alle } x \in D \text{ ist } \dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0.$$

Ist darüber hinaus $\dot{V}(x) := \nabla v(x) \cdot f(x) < 0$ für alle $x \in D \setminus \{x^*\}$, so heißt V strikte LF. (Es gilt $\dot{V}(x^*) = 0$.)

Bemerkung: $\dot{V}(x(t)) := \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \nabla V(x) \cdot f(x)$.

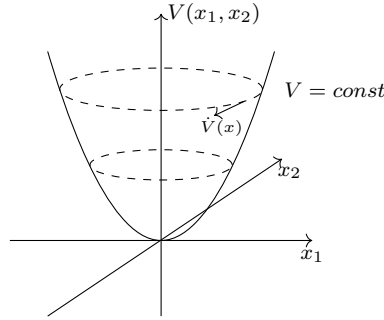


Abbildung 9: Niveaumengen einer typischen Lyapunovfunktion V (gestrichelte Linie)

Satz 11.7 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig und $x^* \in D$ mit $f(x^*) = 0$. Dann gilt

- (i) Gibt es eine Lyapunovfunktion V für $\dot{x} = f(x)$, so ist x^* stabil.
- (ii) Gibt es eine strikte Lyapunovfunktion V , so ist x^* asymptotisch stabil.

Beweis:

- (i) Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle $c > 0$, so dass

$$V^{-1}([0, c]) \subset B_\varepsilon(x^*) \cap D \quad (\text{dies ist wegen Stetigkeit von } V \text{ möglich}).$$

Dann gilt für $x_0 \in V^{-1}([0, c])$ für $t \in I_{\max}(x_0) \cap [0, \infty)$, dass

$$V(\varphi(t, x_0)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(\varphi(s, x_0)) ds \leq V(x_0) \leq c.$$

Daraus folgt $\varphi(t, x_0) \in V^{-1}([0, c]) \subset D$ für alle $t \in I_{\max}(x_0) \cap [0, \infty)$. Da $V^{-1}([0, c])$ kompakt ist, gilt $\text{dist}(\varphi(t, x_0), \partial D) > \theta > 0$ für eine geeignete Zahl $\theta > 0$. Also gilt (aus den Sätzen über Fortsetzbarkeit) $[0, \infty) \subset I_{\max}(x_0)$. Wähle nun $\sigma > 0$, so dass

$$B_\sigma(x^*) \subset V^{-1}([0, c]).$$

Diese Wahl ist wegen der Stetigkeit von V möglich. Dann gilt für alle $x_0 \in B_\sigma(x^*)$, dass

$$\varphi(t, x_0) \in V^{-1}([0, c]) \subset B_\varepsilon(x^*), \quad \forall t \geq 0.$$

Also ist x^* stabil.

(ii) Stabilität folgt aus (i). Insbesondere für ausreichend kleinen Anfangswert $\|x(0)\| < \delta$ bleibt die Lösung im ε -Ball für $t \geq 0$. Annahme: 0 ist nicht attraktiv. D.h. $\exists t_k \rightarrow \infty$ und $\eta > 0$ mit $\|x(t_k) - x^*\| > \eta$ für $k \in \mathbb{N}$. Auf der kompakten Menge $\eta \leq \|x - x^*\| \leq \varepsilon$ gilt (wegen Stetigkeit) $V(x) \geq \mu > 0$ und insbesondere $V(x(t_k)) \geq \mu > 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Da $t \rightarrow V(x(t))$ fallend ist, folgt $V(x(t)) \geq \mu > 0$ für alle $t \geq 0$. Sei $\delta_1 > 0$ sodass $V(x) < \mu$ für $\|x - x^*\| < \delta_1$. Solch ein δ_1 existiert wegen Stetigkeit von V . Die Lösung kann die δ_1 -Ball nicht betreten und erfüllt $\delta_1 \leq \|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon$ für alle $t \geq 0$. Sei $\beta := \min_{\delta_1 \leq \|x\| \leq \varepsilon} \dot{V}(x)$ so ist $\beta < 0$.

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \leq \beta \cdot t \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Attraktivität von x^* . \square

Beispiel 29 Untersuchen Sie die Stabilität von $x^* = 0$ für $\dot{x} = \sin x - x$. Hinweis: Betrachte $V(x) = x^2$.

Beispiel 30 Untersuchen Sie die triviale Lösung von

$$\dot{x} = y - x$$

$$\dot{y} = -x^3$$

auf Stabilität. Hinweis: Betrachte $V(x) = x^4 + 2y^2$.

Satz 11.8 Sei f stetig diff-bar mit $f(0) = 0$. Sei V eine LF für $\dot{x} = f(x)$. Sei $N := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$. Enthält N keine ganze Trajektorie außer $x \equiv 0$, so ist $x \equiv 0$ asymptotisch stabil.

Beweis: Unter diesen Bedingungen gilt die Stabilität, insbesondere gilt $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon$. Sei $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \varepsilon\}$. Im Satz 9.6 haben wir gezeigt, dass die ω -Grenzmenge Ω für jede solche Lösung aus ganzen Trajektorien besteht. Hier gilt $\Omega \subset S$. Die Funktion $t \rightarrow V(x(t))$ ist fallend und $\exists l := \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) \geq 0$. Sei $b \in \Omega$, dann gilt $b = \lim_{i \rightarrow \infty} x(t_i)$ für eine Folge $t_i \rightarrow \infty$. Wegen Stetigkeit folgt $V(b) = \lim_{i \rightarrow \infty} V(x(t_i)) = l$. Also gilt $V(x) = l$ auf Ω (weil $b \in \Omega$ beliebig war). Wegen Satz 9.6 gibt es eine Lösung $z = z(t)$ mit $z(0) = b$. Dann gilt $V(z(t)) = l$ für $t \geq 0$ und deswegen haben wir $\dot{V}(z(t)) \equiv 0$. Also ist die Trajektorie von z in N . Da N keine ganzen Trajektorien außer $x \equiv 0$ enthält, es folgt, dass $z(t) \equiv 0$ gilt und damit $b = 0$ gilt. Da b beliebig in Ω ist, folgt $\Omega = \{0\}$. Das bedeutet, dass jede Lösung mit $\|x(0)\| < \delta$ gegen 0 konvergiert. \square

Beispiel 31 Die Ruhelage von $\ddot{x} + a\dot{x} + x^3 = 0$ auf Stabilität zu untersuchen, wobei $a \geq 0$ ein Parameter ist.

Hinweis: Der Zustandsvektor ist $(x, \dot{x})^T$. Für $a = 0$ mit $V(x, \dot{x}) := x^4 + 2\dot{x}^2$ folgt die Stabilität (aber keine asymptotische Stabilität). Für $a > 0$, kann man dann mit dem letzten Satz die asymptotische Stabilität nachweisen.

Satz 11.9 (Satz von Chetaev) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig in x . Sei $x = 0$ eine Lösung von $\dot{x} = f(t, x)$. Sei $D \in \mathbb{R}^n$ so dass

- $D \subset B_\varepsilon(0)$ für ein $\varepsilon > 0$
- $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ so dass
- $0 \in \Gamma_0$ und $\|x\| < \varepsilon$ für $x \in \Gamma_0$
- $\|x\| = \varepsilon$ für $x \in \Gamma_1$

Sei $V : D \cup \Gamma$ stetig und stetig diffbar in D mit

- $V(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0$
- $V(x) > 0, \quad x \in D$
- $\frac{dV}{dt}|_{\dot{x}=f(t,x)} \geq w(x) > 0, \quad x \in D$ (mit w stetig auf $D \cup \Gamma$)

Dann ist $x = 0$ instabil.

Beweis: Annahme: Sei triviale Lösung stabil. $\Rightarrow \exists \delta > 0$ mit

$$x(t_0) \in D \text{ und } \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

Für $x(t) \in D$ gilt $\dot{V}(x(t)) > 0$ also $V(x(t))$ wächst und $V(x(t)) > V(x(t_0)) =: V_0$, solange $x(t) \in D$ gilt. Sei $D_0 := \{x \in D \cup \Gamma \mid V(x) \geq V_0\}$. So ist D_0 kompakt (wegen Stetigkeit von V). Die Lösung kann D_0 nicht verlassen: Auf Γ_0 gilt $V(x) = 0$ und auf Γ_1 gilt $\|x\| = \varepsilon$.

$$w(x) \geq \beta > 0, \quad x \in D_0$$

für ein β (wegen Stetigkeit von w). Also gilt auf D_0

$$\dot{V}(x(t)) \geq w(x(t)) \geq \beta \Rightarrow V(x(t)) - V(x(t_0)) \geq \beta(t - t_0) \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty$$

dies widerspricht der Endlichkeit von V auf D_0 . Also waqr die Annahme falsch. \square

Beispiel 32 Für $a, b, c, d > 0$ zeigen Sie, dass die Ruhelage $(0, 0)$ von

$$\dot{x} = ax + by - y^2$$

$$\dot{y} = cx + dy - x^2$$

instabil ist. Hinweis: Für $V(x, y) = xy$ und D definiert durch $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < \varepsilon$ folgt, dass $\dot{V}(x, y) = w(x, y) > 0$ auf D gilt.

Für nicht autonome DGL wird die LF wie folgt definiert. Sei $a \in \mathbb{R}, I = (a, \infty)$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Definition 11.10 Sei $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x . Sei $x^* \in D$ mit $f(t, x^*) = 0$ für alle $t \in I$. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lyapunovfunktion für $\dot{x} = f(t, x)$ wenn gilt

(i) $V(t, x) \geq W(x) > 0, x \neq x^*$ und $V(t, x^*) = W(0) = 0$ für eine stetige Funktion $W : D \rightarrow [0, \infty)$.

(ii) $\dot{V}(t, x) := \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(t, x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(t, x) \leq 0, (t, x) \in I \times D$.

Ist darüber hinaus $\dot{V}(x) \leq -w(x) < 0$ für alle $(t, x) \in I \times D$ mit $x \neq x^*$, wobei w stetig ist, so heißt V strikte LF.

Analog kann man Beweisen: gibt es eine (strikte) LF für $\dot{x} = f(t, x)$ so ist x^* (asymptotisch) stabil.

11.3 Linearisierungsmethode

Sei x^* eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$, d.h. $f(x^*) = 0$. In der Nähe von x^* kann man das f in die Taylorreihe entwickeln. Sei Df die Jacobi-Matrix von f . In einer Umgebung von x^* gilt dann $f(x) = Df(x^*)(x - x^*) + g(x - x^*)$, wobei $\frac{\|g(x - x^*)\|}{\|x - x^*\|} \rightarrow 0$ für $\|x - x^*\| \rightarrow 0$ gilt. Die Idee besteht nun darin, das g zunächst weg zu lassen, so dass man ein lineares Gleichungssystem bekommt, wofür wir eine Methode zur Stabilitätsuntersuchung schon haben. Es stellt sich heraus, dass man dann manchmal daraus auf die Stabilitätseigenschaften vom ursprünglichen System etwas schliessen kann:

Satz 11.11 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Sei ferner $x^* \in D$ mit $f(x^*) = 0$ und $A = Df(x^*)$.

- (i) Ist $\dot{y} = Ay$ asymptotisch stabil, so ist $\dot{x} = f(x)$ asymptotisch stabil in x^* .
- (ii) Besitzt A einen EW mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ so ist die Ruhelage x^* für $\dot{x} = f(x)$

instabil.

(iii) Gilt für die Eigenwerte von A , dass $\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ (kritischer Fall), so hängt die Stabilität nicht nur von A sondern auch von g ab.

Beweis: (i) Sei das linearisierte System $\dot{y} = Ay$ asymptotisch stabil. Nach Satz 11.4 existiert $P, Q > 0$ mit

$$A^\top P + PA = -Q.$$

Betrachte die Lyapunovfunktion $V(x) := (x - x^*)^\top P(x - x^*)$, dann gilt

$$V \geq 0, V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*.$$

Sei $f(x) = A(x - x^*) + g(x)$, wobei $\frac{\|g(x - x^*)\|}{\|x - x^*\|} \rightarrow 0$ für $\|x - x^*\| \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^\top P(x - x^*) + (x - x^*)^\top P \dot{x} \\ &= ((x - x^*)^\top A^\top + g(x - x^*)^\top) P(x - x^*) + (x - x^*)^\top P (A(x - x^*) + g(x - x^*)) \\ &= -(x - x^*)^\top Q(x - x^*) + 2(x - x^*)^\top P g(x - x^*) \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|x - x^*\|_2^2 + 2 \|x - x^*\|_2 \|P\|_2 \|g(x - x^*)\|_2 \\ &= \|x - x^*\|_2^2 \left(-\lambda_{\min}(Q) + 2 \|P\|_2 \frac{\|g(x - x^*)\|_2}{\|x - x^*\|_2} \right) < 0 \end{aligned}$$

für alle $\|x - x^*\|$ hinreichend klein. Dabei ist $\lambda_{\min}(Q)$ der kleinste Eigenwert von Q .

(ii) Ohne Beweis.

(iii) Folgt aus dem Beispiel 34. □

Beispiel 33 Untersuchen sie die Ruhelage $(0, 0)$ auf Stabilität.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 8 \sin y, \\ \dot{y} &= 2 - e^x - 3y - \cos y, \end{aligned}$$

Das System kann in einer Umgebung von $(0, 0)$ wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 8y + g_1(x, y), \\ \dot{y} &= -x - 3y + g_2(x, y), \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix A haben negative Realteile, dahe ist die Ruhelage asymptotisch stabil.

Beispiel 34 Untersuchen sie die Ruhelage $(0, 0)$ auf Stabilität in Abhängigkeit von $b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - cx^3, \\ \dot{y} &= -bx^3 - cy^3\end{aligned}$$

Für $b = c = 0$ ist das System linear mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Da die geometrische Vielfachheit 1 ist, ist die Ruhelage instabil. Für andere b, c liegt ein kritischer Fall vor.

Sei $b > 0$. Sei $V(x, y) = bx^4 + 2y^2$, dann $\dot{V} = -4bcx^6 - 4cy^4$. Für $c > 0$ folgt $\dot{V} < 0$ (außer im Ursprung), daher ist die Ruhelage asymptotisch stabil. Ist $c = 0$, dann $\dot{V} \equiv 0$, dann ist die Ruhelage stabil, aber nicht asymptotisch stabil, weil $V(x, y) = \text{const} \neq 0$ gilt. Für $b \leq 0$ und $c \leq 0$ kann man die Instabilität mit $V(x) = xy$ und Chetaev-Satz nachweisen.

Beispiel 35 Zeigen Sie, dass für $a \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ die Ruhelage für

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + (2 - a)y, \\ \dot{y} &= ax - 3y + (a^2 - 2a - 3)x^2\end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.

12 Stetige Differenzierbarkeit der Lösung nach einem Parameter

Wir betrachten das AWP

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = a(\mu), \quad (70)$$

wobei $(t, x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\mu \in M = [a, b] \subset \mathbb{R}_+$. Sei $f = (f_1, \dots, f_n)^\top : D \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$ so, dass das AWP eine eindeutige Lösung hat. Diese Lösung hängt von μ ab und wird daher durch $x = x(t, \mu)$ bezeichnet.

Satz 12.1 Seien $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, a'$ stetig in ihren Definitionsbereichen für $i, j \in (1, \dots, n)$. Für jedes $\mu \in M$ sei $x(\cdot, \mu) : [t_1, t_2] \ni t_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung von AWP (70) mit dem Graph in D . Dann existieren die Ableitungen $u_i := \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$ in D und es gilt

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \quad u_i(t_0) = a'_i(\mu), \quad i = 1, \dots, n. \quad (71)$$

Ist für einen Parameterwert die Lösung bekannt, so kann man aus (71) deren Ableitung bei diesem Wert von μ berechnen. Das Gleichungssystem (71) bekommt man aus $\dot{x} = f(t, x, \mu)$, wenn man diese nach μ ableitet. Vor dem Beweis betrachten wir einen Anwendungsbeispiel.

Beispiel 36 Berechnen Sie $u = \frac{\partial x}{\partial \mu}$ bei $\mu = 0$ für die Lösung vom AWP

$$\dot{x} = x^2 + 4\mu t + \mu^2, \quad x(1) = 2\mu - 1.$$

Zunächst bestimmen wir die Lösung bei $\mu = 0$ aus $\dot{x} = x^2$ mit $x(1) = -1$. Diese Lösung ist $x(t) = -\frac{1}{t}$. Die Voraussetzungen vom letzten Satz sind hier erfüllt, daher aus (71) bekommen wir mit der berechneten Lösung und bei $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2xu + 4t + 2\mu, \quad u(1) = 2, \quad x = -\frac{1}{t}, \quad \mu = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \dot{u} &= -2u/t + 4t, \quad u(1) = 2. \\ \Leftrightarrow \quad u(t) &= t^2 + t^{-2}. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\mu \in M$ fest. Es gilt

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \lim_{\tilde{\mu} \rightarrow \mu} \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu}, \quad (72)$$

wobei $\tilde{x} = x(t, \tilde{\mu})$ die Lösung vom AWP (70) ist, in welcher μ durch $\tilde{\mu}$ ersetzt ist:

$$\dot{\tilde{x}} = f(t, \tilde{x}, \tilde{\mu}), \quad \tilde{x}(t_0) = a(\tilde{\mu}), \quad (73)$$

Wir definieren $v(t, \tilde{\mu}) := \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu}$, dann folgt aus (70) und (73) ein AWP:

$$\frac{dv(t, \tilde{\mu})}{dt} = \frac{f(t, \tilde{x}, \tilde{\mu}) - f(t, x, \mu)}{\tilde{\mu} - \mu}, \quad v(t_0, \tilde{\mu}) = \frac{a(\tilde{\mu}) - a(\mu)}{\tilde{\mu} - \mu} \quad (74)$$

Für $s \in [0, 1]$ sei

$$F(s) := f(t, x^*, \mu^*), \quad \text{mit } x^* := x + s(\tilde{x} - x), \quad \mu^* := \mu + s(\tilde{\mu} - \mu).$$

Dann gilt

$$f(t, \tilde{x}, \tilde{\mu}) - f(t, x, \mu) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds$$

$$F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x^*}(\tilde{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \mu^*}(\tilde{\mu} - \mu)$$

und daher aus (74) folgt

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu} \int_0^1 F'(s) ds = \int_0^1 \frac{\partial f(t, x^*, \mu^*)}{\partial x^*} ds \cdot \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu} + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mu^*} ds. \quad (75)$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ stetig sind, so sind die Integrale in (75) stetig bzgl. $t, x, \tilde{x}, \mu, \tilde{\mu}$. Die Lösung $x = x(t, x)$ stetig in t und \tilde{x} ist stetig in t und $\tilde{\mu}$ (Stetigkeit bzgl. Parameter wurde früher bewiesen). So sind $H(t, \mu) := \int_0^1 \frac{\partial f(t, x^*, \mu^*)}{\partial x^*} ds$ und $h(t, \tilde{\mu}) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mu^*} ds$ stetig in $(t, \tilde{\mu})$ und es gilt

$$\dot{v} = H(t, \mu)v + h(t, \mu). \quad (76)$$

v wurde definiert für $\tilde{\mu} \neq \mu$. Sei $v(t, \mu)$ die Lösung von (76) mit Anfangsbedingung $v(t_0, \mu) = a'(\mu)$. Diese bedingung bekommt man aus Anfangsbedingung im (74) durch Grenzwertübergang $\tilde{\mu} \rightarrow \mu$. Also ist v stetig bzgl. $\tilde{\mu}$ auch bei $\tilde{\mu} = \mu$. Bei $\tilde{\mu} = \mu$ gilt $x^* = x = x(t, \mu)$ und $\mu^* = \mu$ also sind die Funktionen unter den Integralen in (75) unabhängig von s , daher

$$H(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}, \quad h(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Damit ist gezeigt, dass die DGL für v und die Anfangsbedingung $v(t_0, \mu) = a'(\mu)$ stimmen mit dem AWP (71) also erfüllt v das AWP (71). Wegen Stetigkeit von v existiert $\lim_{\tilde{\mu} \rightarrow \mu} v(t, \tilde{\mu}) = v(t, \mu)$ also existiert in (72) die Ableitung $\frac{\partial x}{\partial \mu} = v(t, \mu)$ und die Komponenten u_i des Vektors $v(t, \mu)$ erfüllen (71).

Alle Funktionen in (71) sind stetig bezüglich $\mu \in M$, deswegen sind die Lösungen von (71) stetig in (t, μ) . \square

12.1 Differenzierbarkeit bzgl. Anfangswert

Satz 12.2 Seien f_i und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ stetig in D und die Lösung vom AWP

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, n \quad (77)$$

hat einen Graph in D für $t \in [t_1, t_2]$ mit $t_0 \in [t_1, t_2]$. Dann sind die Ableitungen $u_i := \frac{\partial x_i}{\partial x_k^0}$ stetig für $t \in [t_1, t_2]$ und

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j, \quad u_i(t_0) = \delta_{ik} \quad (78)$$

Beweis: Sei $x_k^0 = \mu$ Parameter und x_i^0 für $i \neq k$ unabhängig von μ . So sind die Bedingungen im Satz davor erfüllt und deswegen sind die Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial x_k^0} = \frac{\partial x_i}{\partial \mu} = u_i$ stetig und erfüllen (71), was in unserem Fall mit (78) übereinstimmt. \square

13 Erste Integrale

Wir betrachten das AWP (f stetig in (t, x) und Lipshitz-stetig in x)

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0. \quad (79)$$

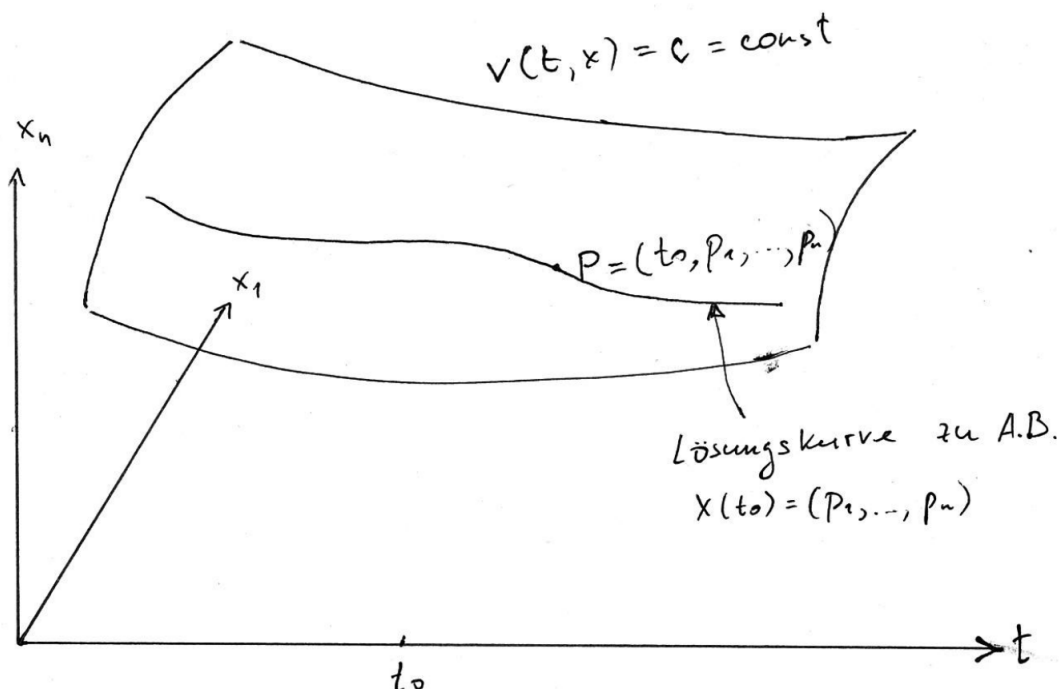
Erste Integrale haben oft eine physikalische Deutung (etwa Energieerhaltung oder Impulserhaltung). Sie sind bei der Suche nach Lösungen nützlich.

Definition 13.1 Eine stetig diffbare Funktion $v : D \subset D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt erstes Integral von wenn sie längs jeder Lösung konstant ist:

$$v(t, x(t)) = \text{const}$$

Manchmal wird die Gleichheit $v(t, x) = c$, ($c \in \mathbb{R}$) als erstes Integral genannt. Bemerkung: Ist $v : D \subset D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ konstant, so ist v ein erstes Integral für jede DGL, liefert aber keine nützliche Informationen und heißt trivial. Uns interessieren nicht triviale erste Integrale.

13.0.1 Geometrische Deutung



Sei v ein erstes Integral von $\dot{x} = f(t, x)$, so dass ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und $U \subset D$ existieren mit $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$ und c ein Wert, den v in D annimmt. Die Gleichheit $v(t, x) = c$ definiert eine n -dimensionale Oberfläche in \mathbb{R}^{n+1} .

Diese Oberfläche besteht aus Lösungskurven von $\dot{x} = f(t, x)$:

Für jeden Punkt $p = (t_0, p_1, \dots, p_n)$ auf der Oberfläche $v(t, x) = c$, d.h. $v(p) = c$ betrachten wir das AWP $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = (p_1, \dots, p_n)$.

Das AWP hat eine eindeutige Lösung. Längs dieser Lösung nimmt v einen konstanten Wert. Dieser Wert ist genau c wegen der Anfangsbedingung. Also liegt die Lösungskurve auf der Oberfläche $v(t, x) = c$.

Generell gibt es mehrere verschiedene erste Integrale für $\dot{x} = f(t, x)$. Aus der Definition folgt, dass $\frac{dv(t, x(t))}{dt} = 0$ längs jeder Lösung. Also hat jedes erste Integral folgende Eigenschaft: Ist v ein erstes Integral für $\dot{x} = f(t, x)$, so ist die Ableitung von v im Sinne der DGL gleich Null:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(t, x) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(t, x) = 0 \quad (80)$$

Ist ein erstes Integral v mit $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$ für $\dot{x} = f(t, x)$ bekannt so kann man $\dot{x} = f(t, x)$ um eine Dimension reduzieren:

$v(t, x) = c$ nach x_i lösen und in $\dot{x} = f(t, x)$ (außer i -ten Zeile) einsetzen.

Unabhängigkeit von ersten Integralen:

Seien v_1, \dots, v_k erste Integrale von $\dot{x} = f(t, x)$.

Eine Komposition $\phi(v_i(t, x))$ oder $\phi(v_1(t, x), \dots, v_k(t, x))$ mit $\phi \in C^1$ ist wieder ein erstes Integral für $\dot{x} = f(t, x)$

Definition 13.2 Erste Integrale v_1, \dots, v_k heißen unabhängig in D , wenn

$$\text{rank} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, n} = k, \quad p \in D.$$

Bemerkung: sind die Funktionen v_1, \dots, v_k linear abhängig, so sind sie abhängig im obigen Sinne. Sind v_1, \dots, v_k linear unabhängig, so sind sie nicht immer unabhängig im obigen Sinne:

$$v_1 = t - x_1, \quad v_2 = (t - x_1)^2$$

sind linear unabhängig, aber sie sind abhängig im obigen Sinne (für jedes D)
Wir brauchen folgenden Satz über die implizite Funktion aus Analysis:

Satz 13.3 Sei $\phi : Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}^m$ stetig diffbar in einer Umgebung U von (y_0, z_0) . Wir betrachten die Gleichung $\phi(y_0, z_0) = 0$. Aus

- $\phi(y, z) = 0$ in U
- $\det \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(y_0, z_0) \right) \neq 0$

folgt, dass es eine eindeutige C^1 -Funktion $y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

- $\phi(y(z), z) \equiv 0$
- $y(z_0) = y_0$

Satz 13.4 Sei $f : D_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar. Für jedes $p = (t, x_0) \in D_0$ gibt es n unabhängige erste Integrale von $\dot{x} = f(t, x)$ in einer Umgebung U von p .

Beweis: Für jeden Punkt $(t_0, c_1, \dots, c_n) \in D_0$ existiert eine eindeutige Lösung

$$x_i = \varphi_i(t, c_1, \dots, c_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (81)$$

die durch diesen Punkt geht. Wegen stetiger Diff-barkeit der Lösung bzgl. Anfangswert ist φ_i stetig diff-bar in allen Variablen. Da $\varphi_i(t_0, c_1, \dots, c_n) = c_i$ gilt für $i = 1, \dots, n$, ist die Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} \big|_{t=t_0} = I$, also gilt $\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}\right) = 1$. Im Satz über die implizite Funktion wählen wir $y_i = c_i$, $i = 1, \dots, n$, $z = (t, x_1, \dots, x_n)$. Dann folgt, dass das Gleichungssystem (81) in einer Umgebung von p eindeutig nach c_1, \dots, c_n lösbar ist:

$$c_i = v_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (82)$$

wobei v_i stetig differenzierbar ist.

Wir zeigen, dass v_i unabhängige erste Integrale sind. Die Zahlen c_1, \dots, c_n sind die selben in jedem Punkt der Lösung, die durch den Punkt (t_0, c_1, \dots, c_n) geht. Daher sind v_i konstant entlang der Lösungen, also die ersten Integrale. Für jedes t in einer Umgebung von t_0 sind die Gleichungssysteme (81) und (82) Umkehrungen von einander, daher gilt für ihre Jacobi-Matrizen

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} \cdot \det\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} = 1.$$

Insbesondere ist $\det\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$ und der Rang dieser Matrix ist n . So sind die ersten Integrale v_i für $i = 1, \dots, n$ unabhängig. \square

Beispiel 37

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2 - t}{y} \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Prüfen Sie, ob $v_1 = t^2 + 2xy$ und $v_2 = x^2 - ty$ erste Integrale für das System sind.

Wir prüfen die Bedingung (80) für v_1 und v_2 :

$$\dot{v}_1 = 2t + 2y\dot{x} + 2x\dot{y} = 2t + 2y\frac{x^2 - t}{y} - 2x^2 \equiv 0$$

$$\dot{v}_2 = -y + 2x\dot{x} - t\dot{y} = -y + 2x\frac{x^2 - t}{y} + tx \not\equiv 0$$

Also ist v_1 ein erstes Integral, aber v_2 nicht.

Beispiel 38

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

- Finden Sie zwei unabhängige erste Integrale.
- Gibt es zeitinvariante (der Form $v = v(x, z)$) erste Integrale?
- Zeigen Sie, dass das System keine nicht triviale Zeitinvariante erste Integrale in Umgebung vom Ursprung hat.

Man kann analog prüfen, dass $v_1 = \frac{x}{y}$ und $v_2 = e^{2t}xy$ erste Integrale sind.

$$\det \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & e^{2t}y \\ -\frac{x}{y^2} & e^{2t}x \end{pmatrix} = 2e^{2t}\frac{x}{y} \neq 0 \Rightarrow \text{rank} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j=1,2} = 2.$$

Deswegen sind v_1 und v_2 unabhängig.

v_1 hängt von t nicht ab, allerdings ist v_1 in keiner Umgebung vom Ursprung definiert. In der Tat gibt es keine zeitunabhängige Integrale in einer Umgebung von $(0, 0)$. Annahme: $v = v(x, y) = \text{const}$ in einer Umgebung von $(0, 0)$. Da jede Lösung gegen Null mit der Zeit konvergiert und v stetig ist, folgt, dass $v(x, y) = v(0, 0) = \text{const}$. Also ist v konstante Funktion und damit ein triviales erstes Integral.

Satz 13.5 Seien v_1, \dots, v_n unabhängige erste Integrale von $\dot{x} = f(t, x)$ in D . Sei $p = (t_0, x_0) \in D$ und $c_i := v_i(t, p)$, $i = 1, \dots, n$. Dann ist die Lösung mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ gegeben als folgende implizite Funktion

$$v_i(t, x_1, \dots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (83)$$

Beweis: Die gesuchte Lösung geht durch den Punkt p . Dieser Punkt erfüllt (83) und in diesem gilt

$$\det \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$$

wegen Unabhängigkeit der ersten Integrale. Mit dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass (83) nach x_1, \dots, x_n gelöst werden kann:

$$x_j = \varphi_j(t, c_1, \dots, c_n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (84)$$

Also erfüllen die Funktionen φ_j das Gleichungssystem (83). Die gesuchte Lösung erfüllt (83) bei $t = t_0$ (so wurden die Konstanten c_1, \dots, c_n gewählt). Da die ersten Integrale entlang dieser Lösung konstant sind, so erfüllt diese Lösung das Gleichungssystem (83) auch für $t \neq t_0$. Wegen Eindeutigkeit der impliziten Funktion stimmt die Lösung mit (84) überein. \square

Satz 13.6 *Seien v_1, \dots, v_n unabhängige erste Integrale von $\dot{x} = f(t, x)$ in einer Umgebung U von $p^* = (t_0, x^*)$. Jedes erste Integral w von $\dot{x} = f(t, x)$ ist dann in der Form $w = F(v_1, \dots, v_n)$ mit einer $F \in C^1$ gegeben.*

Beweis: Sei w ein erstes Integral. Für jedes $p = (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$ und $c_i := v_i(p)$, $i = 1, \dots, n$ definiert (83) die Lösung (84) vom (79). Für jede solche Lösung gilt

$$\begin{aligned} w(t, \varphi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \varphi_n(t, c_1, \dots, c_n)) \\ \equiv w(t_0, \varphi_1(t_0, c_1, \dots, c_n), \dots, \varphi_n(t_0, c_1, \dots, c_n)) \end{aligned}$$

Wir definieren $F(c_1, \dots, c_n) := w(t_0, \varphi_1(t_0, c_1, \dots, c_n), \dots, \varphi_n(t_0, c_1, \dots, c_n))$, dann ist $F \in C^1$. Wegen (83) und (84) gilt

$$w(t, x_1, \dots, x_n) \equiv F(v_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, v_n(t, x_1, \dots, x_n)).$$

\square

13.1 Erste Integrale für autonome DGL

Wir betrachten

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1. \quad (85)$$

Wir haben schon gezeigt, dass (85) n unabhängige Integrale besitzt. Allerdings hängen diese von t ab. Wie viele zeitunabhängige ersten Integrale gibt es für (85)? Die Antwort ist im nächsten Satz gegeben.

Bemerkung 13 *Seien $g, h \in C^1$. Gilt $x_1 = g(t)$ und $x_2 = h(t)$ mit $h' \neq 0$ so können wir $t = h^{-1}(x_2)$ ausschließen: $x_1 = g(h^{-1}(x_2))$ und mit der Kettenregel berechnen*

$$\frac{dx_1}{dx_2} = [g(h^{-1}(x_2))]' = g'(h^{-1}(x_2)) \cdot (h^{-1}(x_2))' = g'(t) \cdot \frac{1}{h'(t)} = \frac{g'(t)}{h'(t)} = \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}.$$

Satz 13.7 Sei $p \in \mathbb{R}^n$ so dass $f(p) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung von p , in der das System (85) $n - 1$ zeitinvariante unabhängige erste Integrale der Form $v_i = v_i(x)$, $i = 1, \dots, n - 1$ besitzt.

Beweis: $f(p) \neq 0 \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}$ mit $f_k(p) \neq 0$. Sei oBdA $f_n(p) \neq 0$. Wegen Stetigkeit $\exists U \ni p$ mit $f_n(x) \neq 0$, $x \in U$. So wie in Bemerkung 13 können wir schreiben

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}, \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (86)$$

Aus dem Satz 13.4 folgt, dass diese DGL-System $n - 1$ unabhängige erste integrale der Form $v_i = v_i(x_1, \dots, x_n)$ besitzt. Da sie konstant entlang der Lösungen von (86) sind, also bleiben sie konstant auf den Trajektorien von (85) und es gilt

$$\text{rank} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2,\dots,n-1} = n - 1$$

also sind diese ersten Integrale unabhängig für (85). \square

Bemerkung 14 Die Forderung $f(p) \neq 0$ darf man nicht weg lassen, wie das Beispiel 38 zeigt.

13.2 Gleichheit von Differentialformen

Betrachten wir

$$\frac{dx_0}{f_0(x_0, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_1}{f_1(x_0, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_0, x_1, \dots, x_n)} \quad (87)$$

Ein Vorteil: keine Variable x_i gilt hier als unabhängige. Dies erleichtern manchmal eine Herleitung von ersten Integralen.

Wir können setzen $dt = \frac{dx_0}{f_0(x_0, x_1, \dots, x_n)}$, dann folgt:

$$(87) \Leftrightarrow \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Außerdem, in jedem Gebiet, wo $f_i \neq 0$ kann (87) wie folgt dargestellt werden

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{f_j}{f_i}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad j \neq i$$

Betrachten wir ein Beispiel:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z}$$

Aus $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ folgt $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c_1| \Leftrightarrow \frac{y}{x} = c_1$ (erstes Integral). Weiter kann man entweder $y = c_1x$ aus dem System ausschließen oder ein weiteres erstes Integral finden.

Im ersten Fall bekommen wir

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{x^2 + c_1^2 x^2 + z} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = x(1 + c_1^2) + \frac{z}{x},$$

also eine lineare DGL, die man mit bekannten Methoden Lösen kann

$$z(x) = c_2x + (1 + c_1^2)x^2.$$

Zusammen mit $y = c_1x$ haben wir dann die Lösung für den Fall $x \neq 0$. Für $x = 0$ vereinfacht sich das Gleichungssystem:

$$\frac{dz}{dy} = y + \frac{z}{y} \Rightarrow z = y^2 + c_2y.$$

Bei der Suche nach einem weiteren ersten Integrall ist es manchmal hilfreich folgende Eigenschaft zu benutzuen:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1},$$

außerdem kann man die a_i und b_i mit einem Faktor k_i skalieren. In unserem Beispiel skalieren wir zunächst, dann wenden wir die obige Eigenschaft an:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2xdx}{2x^2} = \frac{2ydy}{2y^2} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z} = \frac{dz - 2xdx - 2ydy}{z - x^2 - y^2}$$

also bekommen ein erstes Integral:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(z - x^2 - y^2)}{z - x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{z - x^2 - y^2}{x} = c_2$$

Man kann leicht prüfen, dass es von $\frac{y}{x} = c_1$ unabhängig ist. Die beiden ersten Integrale liefern die Lösungen für den Fall $x \neq 0$. Den Fall $x = 0$ muss man separat behandelt, was wir schon oben gemacht haben.

14 Differentialgleichungen mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung

14.1 Lineare homogene PDGL

Seien $a_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene C^1 -Funktionen, $i = 1, \dots, n$ so dass (nicht alle gleichzeitig verschwinden)

$$a_1^2(x) + \dots + a_n^2(x) \neq 0, \quad x \in D.$$

Gesucht ist eine C^1 -Funktion $z : D \rightarrow \mathbb{R}$ so dass

$$a_1(x) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_n(x) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \quad x \in D \quad (88)$$

gilt (lineare homogene partielle DGL 1. Ordnung).

Satz 14.1 $z \in C^1$ ist eine Lösung von (88) $\Leftrightarrow z$ ist ein zeitinvariantes erstes Integral für folgendes Gleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (89)$$

Beweis: (\Leftarrow) Ist v ein erstes Integral von (89), so erfüllt v die Bedingung (80):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} a_1(x) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} a_n(x) = 0$$

wobei nun $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, also erfüllt v die Gleichung (88).

(\Rightarrow) Sei z eine Lösung von (88). Die totale Ableitung von z längs Lösungen von (89) stimmt mit der linken Seite von (88) überein, also ist sie Null. Also ist z konstant längs Lösungen von (89) und damit ist z ein erstes Integral von (89). \square

Lemma 14.2 Seien $a_i \in C^1$ und $a_1 \neq 0$ in D . Seien $v_i = v_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n-1$ zeitinvariante unabhängige erste Integrale von (89) in D . Dann sind v_i unabhängige erste Integrale vom Gleichungssystem

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i}{a_1}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (90)$$

Beweis: Jedes v_i ist konstant längs Trajektorien von (89) und damit längs Lösungen von (90). So sind v_i erste Integrale für (90). Da v_i erfüllt (80) und hängt von t nicht ab, gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_1} a_1(x) + \cdots + \frac{\partial v_i}{\partial x_n} a_n(x) = 0.$$

Ersten Integrale v_i für (90) sind unabhängig genau dann, wenn für $A := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n-1 \\ j=2, \dots, n}}$ $\text{rank} A = n - 1$ gilt. Analog sind v_i unabhängige erste

Integrale für (89), wenn für $A_1 := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n-1 \\ j=1, \dots, n}}$ $\text{rank} A_1 = n - 1$ gilt.

Streicht man die erste Spalte in A_1 , so bekommt man A . Da $a_1 \neq 0$ gilt, ist die erste Spalte von A_1 eine Linearkombination der Spalten von A . Also gilt $\text{rank} A = \text{rank} A_1$. Die Unabhängigkeit von v_i für (89) impliziert ihre Unabhängigkeit für (90). \square

Satz 14.3 Sind $v_i = v_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n - 1$ unabh. erste integrale von (89) in D so ist für jedes $p \in D$ die allgemeine Lösung von (88) in einer Umgebung U von p gegeben durch

$$z = F(v_1(x_1, \dots, x_n), \dots, v_{n-1}(x_1, \dots, x_n)) \quad (91)$$

wobei F eine beliebige C^1 -Funktion. D.h. jede Lösung von (88) ist in der Form (91) gegeben.

Beweis: Für jedes $F \in C^1$ ist z in (91) konstant längs Lösungen von (89) und stellt ein erstes Integral von (89) dar. Wegen Satz 14.1 ist z eine Lösung von (88).

Umgekehrt, sei z eine Lösung von (88). Sei oBdA $a_1(p) \neq 0$. So ist z wegen Satz 14.1 ein erstes Integral von (89) und von (90). Laut Satz 13.6 angewand auf (90) existiert $F \in C^1$ so dass in einer Umgebung vom p die Gleichheit (89) gilt, wobei v_1, \dots, v_{n-1} unabhängige erste Integrale für (89) (oder auch für (90)) sind. \square

14.2 Quasilineare PDGL 1. Ordnung

Seien $a_1, \dots, a_n, b : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Funktionen und

$$a_1^2(x, z) + \cdots + a_n^2(x, z) \neq 0, \quad (x, z) \in D$$

Nun betrachten wir eine Gleichung der Form

$$a_1(x, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = b(x, z), \quad (x, z) \in D \quad (92)$$

Das system gew. DGL

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_n, z) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \dots, x_n, z) \\ \dot{z} = b(x_1, \dots, x_n, z) \end{cases} \quad (93)$$

heißt charakteristisches System für (92). Trajektorien von (93) heißen Charakteristiken von (92). Die Lösungen von (92) sind als n -dimensionale Oberflächen $z = f(x_1, \dots, x_n)$ darstellbar.

Satz 14.4 *Eine C^1 -Funktion $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ist eine Lösung von (92) dann und nur dann wenn ihr Graph aus Charakteristiken besteht. D.h. durch jeden Punkt auf der Oberfläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$ geht eine Charakteristik, die komplett dieser Oberfläche angehört.*

Beweis: (\Leftarrow) Betrachten wir einen Punkt $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf der Oberfläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$ und eine dadurch gehende Charakteristik. Der Tangentialvektor dieser Charakteristik ist $(a_1, \dots, a_n, b)^\top$. Normalenvektor zur Oberfläche ist $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1)^\top$. Da diese zwei Vektoren senkrecht zu einander sind, gilt in p :

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} - b = 0. \quad (94)$$

Da der Punkt p beliebig auf der Oberfläche ist, gilt (94) auf der ganzen Oberfläche. Damit erfüllt die Oberfläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$ die Gleichung (92).

(\Rightarrow) Sei $z = f(x_1, \dots, x_n)$ eine Lösung von (92). Dann gilt (92) in jedem Punkt der Oberfläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$. D.h. $(a_1, \dots, a_n, b)^\top$ ist orthogonal zum Normalenvektor und damit tangential zur Oberfläche. Sei $p_0 := (x_1^0, \dots, x_n^0, z^0)$ ein Punkt auf der Oberfläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$. Im Gebiet G der Projektion der Oberfläche auf den Unterraum (x_1, \dots, x_n) betrachten wir folgendes DGL-System

$$\dot{x}_i = a_i(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (95)$$

Betrachten wir die Lösung $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ dieses Systems, die durch den Punkt $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$ geht. Die Kurve K definiert durch

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), \quad z = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

liegt in der Oberfläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$ und geht durch den Punkt p_0 . Wir zeigen, dass diese Kurve eine Charakteristik ist. Sie erfüllt die ersten n

Gleichungen von (93) wegen (95) und weil $z = f(x, \dots, x_n)$ auf der Oberfläche gilt. Außerdem berechnen wir

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Die Oberfläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$ erfüllt (92) deswegen gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial f}{\partial x_i} = b(x_1, \dots, x_n, z)$$

also erfüllt die Kurve auch die letzte Gleichheit von (93) und deswegen ist sie eine Charakteristik. \square

Satz 14.5 *Sei v ein erstes Integral von (93) in D und $p \in D$ so, dass $v(p) = c$ und $\frac{\partial v}{\partial z}(p) \neq 0$. Dann definiert die Gleichheit $v(x_1, \dots, x_n, z) = c$ eine Lösung $z = z(x_1, \dots, x_n)$ von (92) als implizite Funktion.*

Beweis: Da v ein erstes Integrals für (93) ist, gilt

$$0 = \frac{dv}{dt} \Big|_{(93)} = a_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial v}{\partial x_n} + b \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (96)$$

Außerdem gilt für die implizite Funktion $z = z(x_1, \dots, x_n)$ in einer Umgebung von p :

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i} / \frac{\partial v}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Division von (96) durch $-\frac{\partial v}{\partial z}$ zeigt, dass die implizite Funktion $z = z(x_1, \dots, x_n)$ die Gleichheit (92) erfüllt. \square

Satz 14.6 (Allgemeine Lösung) *Seien $v_i = v_i(x_1, \dots, x_n, z)$, $i = 1, \dots, n$ unabh. erste Integrale von*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_n, z) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \dots, x_n, z) \\ \dot{z} = b(x_1, \dots, x_n, z) \end{cases} \quad (93)$$

Eine C^1 -Funktion $z = z(x_1, \dots, x_n)$ ist eine Lösung von

$$a_1(x, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_n(x, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = b(x, z), \quad x \in D \quad (92)$$

in einer Umgebung U eines Punktes $p = (x, z(x))$, dann und nur dann, wenn gilt

$$F(v_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, z)) = 0 \quad \text{in } U \quad (97)$$

für eine passende Funktion $F \in C^1$ mit $F(p) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0$.

Beweis: Für jedes $F \in C^1$ ist die linke Seite von (97) konstant längs Trajektorien von (93), deswegen stellt sie ein erstes Integrall dar. Ist $\frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0$, so stellt (97) in einer Umgebung von p die implizite Funktion $z = z(x_1, \dots, x_n)$ dar, die nach dem vorherigem Satz die Gleichheit (92) erfüllt. Zu zeigen bleibt, dass (97) alle Lösungen beschreibt.

OBdA gilt $a_1(p) \neq 0$, dann erfüllen die Charakteristiken von (92) in einer Umgebung von p folgende Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i}{a_1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad \frac{dz}{dx_1} = \frac{b}{a_1}. \quad (98)$$

Sei $z = f(x_1, \dots, x_n)$ eine Lösung von (92), also $f \in C^1$, und sei $p = (x_1^0, \dots, x_n^0, z^0)$ ein Punkt auf dem Graph von dieser Lösung. Die Lösung von DGL-System (98) zu Anfangsbedingung

$$x_i(x_1^0) = c_1, \quad i = 2, \dots, n, \quad z(x_1^0) = f(x_1^0, c_2, \dots, c_n) + c_{n+1} \quad (99)$$

bezeichnen wir durch

$$x_i = \varphi_i(x_1, c_2, \dots, c_{n+1}), \quad i = 2, \dots, n, \quad z = \varphi_{n+1}(x_1, c_2, \dots, c_{n+1}). \quad (100)$$

Setzen wir $x_1 = x_1^0$, $c_i = x_i^0$ für $i = 2, \dots, n$ und $c_{n+1} = 0$ in (100), so bekommen wir den Punkt p . Es gilt in diesem Punkt für die Jacobi-Matrix, dass $\det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} \right)_{i,j=2,\dots,n} = 1$, wegen (99). In einer Umgebung von p kann man dann das Gleichungssystem (100) nach c_2, \dots, c_{n+1} lösen:

$$c_i = w_i(x_1, \dots, x_n, z), \quad i = 2, \dots, n+1. \quad (101)$$

Wie im Beweis vom Satz über die $\exists n$ unabh. erste Integrale, kann man zeigen, dass w_i erste Ingrale von (98) sind.

Die Oberfläche $w_{n+1}(x_1, \dots, x_n, z) = 0$ stimmt mit der Oberfläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$ überein, da sie aus den selben Charakteristiken bestehen, welche Lösungen zu (98) mit A.B. (99) mit $c_{n+1} = 0$ sind.

v_1, \dots, v_n sind erste Intergale von (93) und gleichzeitig von (98), also $\exists F \in C^1$ mit $w_{n+1} = F(v_1, \dots, v_n)$.

Wir zeigen, dass $\frac{\partial w_{n+1}}{\partial z} \neq 0$ in p gilt.

In p gilt $x_i = x_i^0$, $i = 1, \dots, n$ und wegen (101),(99) gilt auch

$$w_{n+1}(x_1^0, \dots, x_n^0, z) = c_{n+1} = z - f(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Daraus folgt $\frac{\partial w_{n+1}}{\partial z} = 1 \neq 0$ in p . □