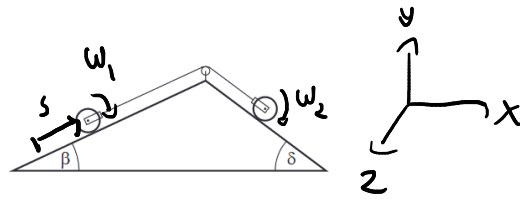


Aufgabe 7.2: Verbundene Kugeln (4 Punkte)

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

Zwei homogene Kugeln gleicher Masse M und unterschiedlicher Radien R_1 und R_2 (Trägheitsmoment Kugel: $J = \frac{2}{5}MR^2$) sind mit einem masselosen Seil der Länge L über eine masselose Rolle verbunden. Die Kugeln liegen auf den Schenkeln eines Dreiecks, die die Winkel β (Kugel 1) bzw. δ (Kugel 2) mit der Horizontalen einnehmen (siehe Abbildung). Der Energieverlust durch Rollreibung sei vernachlässigbar.



- (2 P) a) Stellen Sie mit dem Energieansatz die Bewegungsgleichung der Kugeln auf.
(2 P) b) Bestimmen Sie mit $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ das Drehmoment auf die linke Kugel. Mit dem Ergebnis aus der a) und $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ bestimmen Sie im Anschluss den Betrag der Seilkraft.

Angenommen: Rollen ohne Schlupf

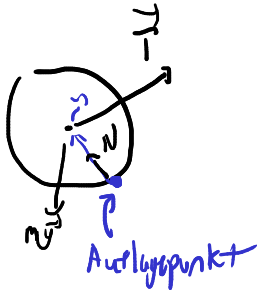
$$\dot{s} = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M R_1^2 \right) \omega_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M R_2^2 \right) \omega_2^2 + M g s \sin \beta - M g s \sin \delta \\ &= M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M \dot{s}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M \dot{s}^2 \right) + M g s (\sin \beta - \sin \delta) \\ &= \frac{7}{5} M \dot{s}^2 + M g s (\sin \beta - \sin \delta) \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{14}{5} M \dot{s} \ddot{s} + M g \dot{s} (\sin \beta - \sin \delta) = 0 \quad (\text{Erhaltung von Energie})$$

$$\frac{14}{5} \ddot{s} + g (\sin \beta - \sin \delta) = 0$$

b)



$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times m \vec{g} + \vec{r} \times \vec{T} \\ &= (m g R_1 \sin \beta) \hat{e}_2 - (T R_1 \cos \beta) \hat{e}_2 \\ &= R_1 (m g \sin \beta - T \cos \beta) \hat{e}_2 \end{aligned}$$

Da $\vec{L} = \frac{2}{5} M R_1^2 \vec{\omega}_1$ gilt, ist

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{2}{5} M R_1^2 \dot{\vec{\omega}}_1 \\ &= -\frac{2}{5} M R_1^2 \dot{\omega}_1 \hat{e}_2 \\ &= -\frac{2}{5} M R_1 \ddot{s} \\ &= R_1 (M g \sin \beta - T \cos \beta) \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{5} M \ddot{\theta} = M (g \sin \beta - T \cos \beta)$$

$$T \cos \beta = M g \sin \beta + \frac{2}{5} M \ddot{\theta}$$

$$= M g \sin \beta + \frac{2}{5} M \left[\frac{5}{14} g (\sin \beta - \sin \delta) \right]$$

$$= M g \sin \beta + \frac{1}{7} M g (\sin \beta - \sin \delta)$$

$$T = \frac{M g}{7 \cos \beta} [8 \sin \beta - \sin \delta]$$