Aufgabe 1 *Entropie des Universums* **4 P.**

Nehmen Sie ein System mit Wasser der Masse 2 kg an, das in Kontakt mit einem großen Wärmereservoir steht. Bevor beide Systeme in Kontakt gebracht wurden hatte das Wasser die Temperatur 10°C und das Reservoir 100°C.

a) Handelt es sich hierbei um einen reversiblen oder einen irreversiblen Prozess? Berechnen Sie die Entropieänderung ΔS_W des Wassers, nachdem es die Temperatur des Reservoirs erreicht hat. *2 P.*
Hinweis: Für die Wärmekapazität bei konstantem Volumen und bezogen auf eine Masse gilt: $C_V = \frac{1}{m}\frac{\delta Q}{dT}\Big|_V$. Sie beträgt für Wasser in etwa $4.2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$.

b) Berechnen Sie nun die Entropieänderung ΔS_R des Reservoirs. *1 P.*

c) Kombinieren Sie die Ergebnisse der beiden vorherigen Aufgaben, um Entropieänderung ΔS_{Univ} des Universums (Wasser + Wärmereservoir) bei diesem Prozess zu berechnen. *1 P.*

(a) irreversibler Prozess

$$\Delta T = 90K$$

$$\Delta S_w = \int \frac{dQ}{T}$$

$$= \int_0^{Q_{max}} \frac{1}{T_0 + \frac{Q}{mc}}\, dQ$$

$$= \left[mc \ln \left| T_0 + \frac{Q}{mc} \right| \right]_0^{Q_{max}}$$

$$= mc \ln \left[1 + \frac{Q_{max}}{mcT_0} \right]$$

$$Q_{max} = mc\Delta T$$

$$\Delta S_w = mc \ln \left| 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right|$$

$$= (2kg)(4200\,J kg^{-1} K^{-1}) \ln \left| 1 + \frac{90K}{283.15K} \right|$$

$$= 2318\,JK^{-1}$$

b) $$\Delta S_R = \int \frac{dQ}{T} = -\frac{\Delta Q}{T}$$

$$= \frac{(2kg)(4200\,J kg^{-1} K^{-1})(90K)}{373.15\,K}$$

$$= -2026\,JK^{-1}$$

c) $$\Delta S_{univ} = 292\,JK^{-1}$$

Aufgabe 2 *Das ideale Gas im mikrokanonischen Ensemble* **8 P.**

Wir betrachten das ideale Gas, welches aus N nicht wechselwirkenden Teilchen mit Masse m besteht und mir einer Hamiltonfunktion beschrieben wird,

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + V_{\text{pot}}(q_1, \ldots, q_{3N}).$$

Das Potential V_{pot} stelle die Wände des Gefäßes mit Volumen V dar, in dem sich das Gas befindet. Vereinfachend können wir von einem Kubus mit Kantenlänge L ausgehen,

$$V_{\text{pot}}(\vec{q}) = \begin{cases} 0 & \text{wenn alle } |q_i| < L/2 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie das Phasenraumvolumen $\Gamma(E)$ und die Entropie $S = k_B \ln \Gamma(E)$. *2 P.*

Hinweis: Das Volumen innerhalb einer d-dimensionalen Sphäre mit Radius R ist gegeben durch:

$$\nu_R^d = \frac{\pi^{d/2} R^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)},$$

wobei $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ die Gammafunktion ist.

Ferner können wir vereinfachend annehmen, dass die Teilchenzahl N gerade ist. Im Limes $N \to \infty$ gilt die Stirling Formel: $\ln N! \approx N \ln N - N$.

$$\text{Phasenraum} = \underbrace{\mathbb{R}^{3N}}_{\vec{p}} \times \underbrace{\mathbb{R}^{3N}}_{\vec{q}}$$

Offensichtlich dürfen die Teilchen innerhalb des Gefäßes sein, also $\vec{q}_i \in [0, L]^3 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$.

Die gesamte kinetische Energie muss innerhalb eines Bereiches mit Länge Δ sein, also $E_{tot} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} \in [E, E+\Delta]$

Für N hinreichend groß ist die Entropie gut geschätzt, wenn wir das Volumen innerhalb der Sphäre betrachten.

also

$$\text{Phasenraum} = S^{3N}\left(\sqrt{2mE}\right) \times [0, L]^{3N}$$

$$\Gamma(E) = \text{Vol}(\text{Phasenraum})$$

$$= \text{Vol}_{3N}\left[S^{3N}\left(\sqrt{2mE}\right)\right] \text{Vol}_{3N}\left([0,L]^{3N}\right)$$

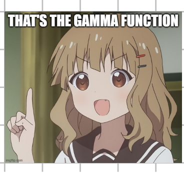
$$= \frac{\pi^{3N/2} (2mE)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)} L^{3N}$$

Phasenraumvolumen

Gamma-Funktion

Angenommen N ist gerade, also $\frac{N}{2}$ ist ganzzählig

$$\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right) = \left(\frac{3N}{2}\right)!$$



$$S/k_B = \ln\Gamma(E) = \frac{3N}{2}\left[\ln\pi + \ln 2 + \ln m + \ln E\right] + 3N\ln L - \ln\left[\left(\tfrac{3N}{2}\right)!\right]$$

$$\approx \frac{3N}{2}\left[\ln\pi + \ln 2 + \ln m + \ln E\right] + 3N\ln L - \frac{3N}{2}\ln\frac{3N}{2} + \frac{3N}{2}$$

$$S = k_B\left\{\frac{3N}{2}\left[\ln\pi + \ln 2 + \ln m + \ln E + 1\right] + 3N\ln L - \frac{3N}{2}\ln\frac{3N}{2}\right\}$$

b) Leiten Sie daraus die innere Energie E her, in dem Sie die inverse Temperatur betracheten: $T^{-1} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V}$. *2 P.*

b) $$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V} = \frac{3}{2}\frac{Nk_B}{E}$$

$$E = \frac{3}{2}Nk_BT$$

c) Berechnen Sie die Wärmekapazität C_V bei konstantem Volumen und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus der Thermodynamik. *2 P.*

Bei konstantem Volumen ist

$$dE = C_V\,dT = \delta Q$$

$$= \frac{3}{2}Nk_B\,\Delta T$$

und damit

$$\delta Q = dE = \frac{3}{2}Nk_B\,dT$$

$$C_V = \frac{3}{2}Nk_B$$

was gleich das bekannte Ergebnis ist.

d) Berechnen Sie den Druck p und stellen Sie die Zustandsgleichung für das ideale Gas auf. *2 P.*

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N}$$

Wir schreiben S als $S = k_B N \ln \overset{V}{\boxed{L^3}}$ + konstanten

$$\frac{p}{T} = \frac{Nk_B}{V}, \qquad pV = Nk_BT$$