Jun Wei Tan
Mattis
Lieberman

Aufgabe 3.1: *Elastischer Stoß* .... (5 Punkte)

Zwei Massen $m_1 = m$ und $m_2 = \gamma m$ mit $\gamma > 1$ stoßen elastisch zentral zusammen. Für die Geschwindigkeiten vor dem Stoß gilt: $\vec{v}_1 = v_{1,x}\vec{e}_x$ und $\vec{v}_2 = v_{2,x}\vec{e}_x$.

(2 P) a) Leiten Sie mit Hilfe geeigneter Erhaltungssätze die x-Komponenten der Geschwindigkeiten $u_{1,x}$ und $u_{2,x}$ der Massen nach dem Stoß her.

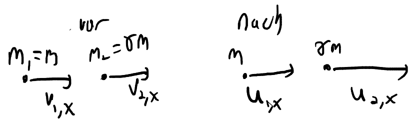
(2 P) b) Bestimmen Sie jeweils die Bedingungen für $\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}}$, so dass sich beide Massen nach dem Stoß in die gleiche Richtung beziehungsweise in entgegengesetzte Richtung bewegen. Betrachten Sie die beiden Fälle

i. $v_{1,x} > v_{2,x} > 0$: Beide Massen bewegen sich vor dem Stoß in die gleiche Richtung. Masse m_1 läuft Masse m_2 nach.

ii. $v_{1,x} > 0$, $v_{2,x} < 0$: Die Massen bewegen sich vor dem Stoß in entgegengesetzte Richtung.

(1 P) c) Für welchen Wert von $\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}}$ entspricht das System dem Schwerpunktsystem? Berechnen Sie für diesen Spezialfall, die x-Komponenten der Geschwindigkeiten der Massen nach dem Stoß. Was fällt Ihnen auf?

a)



Impuls: $\cancel{m} v_{1,x} + \gamma \cancel{m} v_{2,x} = \cancel{m} u_{1,x} + \gamma \cancel{m} u_{2,x}$ ---- (1)

Kinetische Energie: $\cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m} v_{1,x}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} \gamma \cancel{m} v_{2,x}^2$

$= \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m} u_{1,x}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} \gamma \cancel{m} u_{2,x}^2$ ---- (2)

(2): $v_{1,x}^2 - u_{1,x}^2 = \gamma\left[u_{2,x}^2 - v_{2,x}^2\right]$

$(v_{1,x} - u_{1,x})(v_{1,x} + u_{1,x}) = \gamma(u_{2,x} - v_{2,x})(u_{2,x} + v_{2,x})$

(1): $v_{1,x} - u_{1,x} = \gamma(u_{2,x} - v_{2,x})$ ----- (3)

Vergleich $\Rightarrow$ $v_{1,x} + u_{1,x} = u_{1,x} + v_{2,x}$ --- (4)

(3) + (4): $2 v_{1,x} - \cancel{u_{1,x}} + \cancel{v_{1,x}} + \cancel{u_{1,x}} = \gamma u_{2,x} - \gamma v_{2,x} + u_{2,x} + v_{2,x}$

$$2 v_{1,x} = (\gamma + 1) u_{2,x} - (\gamma - 1) v_{2,x}$$

$$u_{2,x} = \frac{2 v_{1,x}}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_{2,x}$$

Außerdem:

$$u_{1,x} = u_{2,x} + v_{2,x} - v_{1,x}$$

$$= \frac{2 v_{1,x}}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_{2,x} + v_{2,x} - v_{1,x}$$

$$= \frac{1 - \gamma}{\gamma + 1} v_{1,x} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} v_{2,x}$$

b i) $v_{1,x} > v_{2,x} > 0$

$$u_{2,x} = \underbrace{\frac{2 v_{1,x}}{\gamma + 1}}_{>0 \text{ immer}} + \frac{\overset{>0,\ \text{weil } \gamma > 1}{\boxed{\gamma - 1}}}{\gamma + 1} \underbrace{\boxed{v_{2,x}}}_{>0 \text{ (Voraussetzung)}}$$

> 0

$$u_{1,x} = \frac{1 - \gamma}{\gamma + 1} v_{1,x} + \overbrace{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} v_{2,x}}^{\text{immer} > 0}$$

$$= \frac{2\gamma}{\gamma + 1} v_{2,x} - \underbrace{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_{1,x}}_{\geq 0}$$

Entgegene Richtung

wir möchten $u_{1,x} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\gamma}{\cancel{\gamma+1}} v_{2,x} - \frac{\gamma-1}{\cancel{\gamma+1}} v_{1,x} < 0$$

$$2\gamma < (\gamma-1)\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}}$$

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} > \frac{2\gamma}{\gamma-1}$$

Wenn wir möchten, dass die Massen in der gleichen Richtung sich bewegen, ist

$$u_{1,x} > 0$$

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} < \frac{2\gamma}{\gamma-1}$$

ii)

$$u_{2,x} = \frac{2v_{1,x}}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_{2,x}$$

$$= \frac{2v_{1,x}}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(-v_{2,x})$$

$$u_{1,x} = \frac{1-\gamma}{\gamma+1} v_{1,x} + \frac{2\gamma}{\gamma+1} v_{2,x}$$

$$= -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_{1,x} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}(-v_{2,x})$$

< 0 immer

Gleiche Richtung: Wir brauchen $u_{2,x} < 0$

$$2v_{1,x} + (\gamma-1) v_{2,x} < 0$$

$$2v_{1,x} < (1-\gamma) v_{2,x}$$

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} > \frac{1-\gamma}{2}$$

Entgegene Richtung:

$$u_{2,x} > 0$$

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} < \frac{1-\gamma}{2}$$

c)

$$\sum p_x = m v_{1,x} + \gamma m v_{2,x} = 0$$

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} = -\gamma$$

$$u_{1,x} = \frac{1-\gamma}{\gamma+1} v_{1,x} + \frac{2\gamma}{\gamma+1} v_{2,x}$$

$$= v_{2,x}\left[\frac{1-\gamma}{\gamma+1}(-\gamma) + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]$$

$$= \frac{v_{2,x}}{\gamma+1}\left(\cancel{-\gamma} + \gamma^2 + \cancel{2}\gamma\right)$$

$$= \frac{v_{2,x}}{\gamma+1}(\gamma+1)\gamma = \gamma v_{2,x} = -v_{1,x}$$

$$u_{1,x} = u_{2,x} + v_{2,x} - v_{1,x}$$

$$u_{2,x} = \gamma v_{2,x} - v_{2,x} + v_{1,x}$$

$$= \gamma v_{2,x} - v_{2,x} - \gamma v_{2,x}$$

$$= -v_{2,x}$$

Die Geschwindigkeit ist durch eine 180° Winkel umgedreht

Aber das Betrag der Geschwindigkeit bleibt.