Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 5

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 26, 2024)

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(U)$ und Δ ein Dreieck mit $\partial\Delta \subseteq U$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(b) Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

besitzt eine holomorphe Stammfunktion auf $\mathbb{C}$.

Beweis. (a) Falsch. Sei $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f : z \mapsto \frac{1}{z}$, was holomorph auf U ist. Wir betrachten ein Dreieck, der die Ursprung entschließt. Alle Voraussetzungen sind dann erfüllt, jedoch ist das Integral ungleich Null.

(b) Falsch. Wir integrieren über das Rand von $K_1(0)$, also der Weg $z = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Weil $e^z - 1$ holomorph ist, ist $\int_{K_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$, also die Funktion besitzt keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2. Es seien $a_2, a_3, \ldots, \in \mathbb{C}$ und es gelte

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < 1.$$

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Beweisen Sie, dass f injektiv auf $\mathbb{D}$ ist.

Hinweis: Versuchen Sie ein geeignetes Wegintegral zu betrachten

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Beweis. Die Potenzreihe konvergiert offensichtlich. Damit ist f glatt. Deren Ableitung kann durch eine Potenzreihe dargestellt werden

$$f'(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

f' besitzt eine holomorphe Stammfunktion f. Wir nehmen an, dass f nicht injektiv ist. Das heißt: Es gibt $a, b \in \mathbb{D}$, sodass $f(a) = f(b)$. Wir verbinden a und b mit einer Gerade $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{D}$ und betrachten das Integral

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = f(b) - f(a) = 0.$$

Das Integral ist auch

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right) \mathrm{d}z$$

Wir schätzen jetzt die Summe. Da γ eine Gerade zwischen a und b ist, ist $|z| \leq \min(|a|, |b|) =: r < 1$. Das heißt

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left| n a_n z^{n-1} \right| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r && r < 1 \\
&< r
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\operatorname{Re} f' > 1 - r$$

und

$$|\operatorname{Im} f'| < r.$$

Weil γ eine Gerade ist, ist $\gamma'(x) = \frac{b-a}{t_2 - t_1}$, also konstant. Wir rechnen dann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)(\operatorname{Re} \gamma' + i \operatorname{Im} \gamma')\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} \gamma') - (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Im} \gamma') \\
&\quad + i \left[(\operatorname{Re} f)(\operatorname{Im} \gamma') + (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Re} \gamma') \right] \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Falls
$$\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re}\gamma') - (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Im}\gamma')\,\mathrm{d}t \neq 0,$$
gibt es sofort ein Widerspruch, da $\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$. Wir nehmen an, dass dies nicht der Fall ist. Insbesondere ist $\operatorname{Im}\gamma' \neq 0$, da sonst $\operatorname{Re}\gamma' \neq 0$, und
$$|\operatorname{Re}\gamma'|\left|\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}t\right| > |\operatorname{Re}\gamma'|(1-r)(t_2-t_1) > 0,$$
ein Widerspruch. Es gilt also $|\operatorname{Re}\gamma'| \neq |\operatorname{Im}\gamma'|$, da dann gälte
$$|\operatorname{Re}\gamma'|\left|\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}t\right| > |\operatorname{Re}\gamma'|(1-r)(t_2-t_1)$$
und
$$\begin{aligned}|\operatorname{Im}\gamma'|\left|\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}t\right| &= |\operatorname{Re}\gamma'|\left|\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq |\operatorname{Re}\gamma'| r(t_2-t_1)\end{aligned}$$
und
$$(\operatorname{Re}\gamma')\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}t > (\operatorname{Im}\gamma')\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}t$$
ein Widerspruch. Das heißt:
$$(\operatorname{Re}\gamma')\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{Re} f)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\gamma'\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}t\,.$$
Dann betrachten wir das andere Integral
$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Im}\gamma') + (\operatorname{Im} f)(\operatorname{Re}\gamma')\,\mathrm{d}t \\ =&(\operatorname{Im}\gamma')\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{Re} f)\,\mathrm{d}t + (\operatorname{Re}\gamma')\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{Im} f)\,\mathrm{d}t \\ =&(\operatorname{Im}\gamma')\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}t + \frac{(\operatorname{Re}\gamma')^2}{\operatorname{Im}\gamma'}\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}t \\ =&\frac{(\operatorname{Im}\gamma')^2 - (\operatorname{Re}\gamma')^2}{\operatorname{Im}\gamma'}\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
Wir wissen aber, dass $|\operatorname{Im}\gamma'| \neq |\operatorname{Re}\gamma'|$. Das Integral ist $> (1-r)(t_2-t_1)$, also ungleich Null, also wir haben wieder einen Widerspruch. 🎉