Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Institut für MATHEMATIK

Wintersemester 2024/2025 | 24.10.2024
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy | Andreas Schroll

2. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 28.10. und 29.10. gelöst.

Aufgabe P2.1

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $2te^x - 1 + \left(t^2 e^x + 1\right) \dot{x} = 0, \quad x(1) = 0$ exakt ist und finden Sie eine Stammfunktion.

Aufgabe P2.2

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$t\dot{x} = x + 2t^3, \quad x(1) = 1.$$

Wintersemester 2024/2025 — 24.10.2024
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

2. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 31.10.2024 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H2.1 — (2 + 4 = 6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der Anfangswertprobleme

a) $\dot{x} = (5t + 5x)^2, \quad x(0) = 0$ und

b) $\dot{x} = \frac{t^2 - x^2}{-5tx}, \quad x(1) = 1.$

(*Hinweis: Bei beiden Teilaufgaben kann man eine Substitution durchführen. Bei Teil b wäre es gut, die vorgegebene Gleichung für die Substitution umzuformen.*)

Aufgabe H2.2 — (2 + 3 = 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

a) $\cos(t) + \sin(x) + (t\cos(x) + x)\dot{x} = 0, \quad x(0) = 0$ exakt ist und bestimmen Sie die Stammfunktion $F_0(t, x)$,

b) $\frac{1}{4}t^4\dot{x} + 3x + t^2\dot{x} + t^3x = -3t\dot{x} - 5\dot{x} - 2tx, \quad x(0) = 1$ exakt ist, bestimmen Sie Stammfunktion $F_0(t, x)$ und bestimmen Sie eine Lösung.

Aufgabe H2.3 — (4 + 3 = 7 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung für $(t, x) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Form

$$M(t, x) + N(t, x)\dot{x} = 0, \tag{1}$$

die der Exaktheitsbedingung $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ *nicht* genügt.

a) Seien N, M stetig differenzierbare Funktionen auf $\tilde{D} \to \mathbb{R}$, wobei $M(t, x) \neq 0$ für alle $(t, x) \in \tilde{D}$ für ein offenes Rechteck $\tilde{D} \subset U$. Zeigen Sie: Hängt $\beta(t, x) := \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)$ allein von x ab, so ist $\mu(x) := \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \beta(s)\ \mathrm{d}s\right)$ für $(t_0, x_0) \in \tilde{D}$ ein integrierender Faktor von (1).

b) Überprüfen Sie die Differentialgleichung

$$-2tx + (3t^2 - x^2)\dot{x} = 0, \quad x(1) = 1$$

auf Exaktheit und bestimmen Sie dann eine Stammfunktion $F_0(t, x)$ im Falle der Exaktheit. Falls sie nicht exakt ist, finden Sie einen integrierenden Faktor und bestimmen Sie dann eine Stammfunktion $F_0(t, x)$.

Aufgabe H2.4 — (3 + 3 = 6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} - \frac{3t^2 + 4}{t^3 + 4t}x = t, \quad x(2) = 0.$$

b) Für welche Anfangswerte $x(1) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, hat die Differentialgleichung

$$t\dot{x} = x + 2t^3$$

eine Lösung? Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen des Anfangswertproblems.

Wintersemester 2024/2025
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy

24.10.2024
Andreas Schroll

2. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Freiwillige Aufgaben

Bitte geben Sie diese Aufgaben nicht mit der Hausaufgabe ab.

Aufgabe F2.1 **(frewillige Aufgabe, keine Abgabe)**

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$3e^{3t}x - 2t + e^{3t}\dot{x} = 0, \quad x(1) = 1$$

exakt ist, bestimmen Sie die Stammfunktion $F_0(t, x)$ und eine Lösung.

Aufgabe F2.2 **(frewillige Aufgabe, keine Abgabe)**

Finden Sie für die Differentialgleichung

$$x\ln(x) + x^2e^t + (t + xe^t)\dot{x} = 0, \quad x(0) = 1$$

einen integrierenden Faktor sowie eine Stammfunktion $F_0(t, x)$.

Aufgabe F2.3 **(freiwillige Aufgabe, keine Abgabe)**

Sei $D_1 \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge, $a, b : D_1 \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir definieren die Bernoullische Differentialgleichung auf der Definitionsmenge $D = D_1 \times \mathbb{R}^+$ durch

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha.$$

a) Zeigen Sie, dass man die Bernoullische Differentialgleichung mit Hilfe der Transformation $y(t) = x^{1-\alpha}(t)$ in eine lineare Differentialgleichung transformieren kann. Geben Sie eine allgemeine Lösungsformel an.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) - x(t) + tx^3(t) = 0, \quad x(0) = 1.$$