Stochastik 1 Hausaufgaben Blatt 5

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 12, 2024)

Problem 1. Definieren Sie zwei diskrete Zufallsvariablen, welche

(a) den gleichen Erwartungswert, aber verschiedene Varianzen haben,

(b) verschiedene Erwartungswerte, aber die gleiche Varianz haben,

(c) den gleichen Erwartungswert und Varianz, aber unterschiedliche Verteilungen haben.

Proof. (a) Sei $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$, $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \mathbb{P}(\varnothing) = 0, \mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0.5$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist damit ein Wahrscheinlichkeitsraum. Definiere

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, X(0) = -1, X(1) = 1$$
$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, Y(0) = -2, Y(1) = 2$$

Damit ist $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, aber die Varianzen unterschiedlich.

(b) Sei Ω wie vorher, und

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, X(0) = -1, X(1) = 1$$
$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, Y(0) = -2, Y(1) = 0$$

damit ist $\mathbb{E}[X] = 0 \neq -1 = \mathbb{E}[Y]$, aber die Varianzen gleich.

(c) Sei X gleichverteilt auf $\{-3, -2, \dots, 3\}$. Der Erwartungswert ist 0 und die Varianz $\sigma^2 = 4$. Sei Y gleichverteilt auf $\{-2, 2\}$. Deren Erwartungswert ist wieder 0. Da $\mathbb{E}[Y^2] = 4$, ist die Varianz von Y auch 4. Die Verteilungen sind aber unterschiedlich.

□

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 2. (a) Es sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, also

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X^n] = \lambda \cdot \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutzen Sie dies zur Berechnung der Varianz von X.

(b) Es sei $Z = \sum_{r=1}^{\infty} X_r$, und $X_r \sim \mathrm{Poiss}(r^{-2})$, also Poisson-verteilt mit Parameter $1/r^2$. Zeigen Sie, dass Z endlichen Erwartungswert hat und leiten Sie $\mathbb{E}[Z]$ her.

Proof. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^n] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^n \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k+1)!} \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}].
\end{aligned}$$

Die Varianz ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \lambda \mathbb{E}[X+1] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \lambda \mathbb{E}[X] + \lambda - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \lambda + \mathbb{E}[X](\lambda - \mathbb{E}[X]) \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

(b) Der Erwartungswert ist linear. Nach dem Satz von monotonen Konvergenz (die Verteilugsfunktionen sind alle positiv) können wir $\mathbb{E}$ und die Summe vertauschen:

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_r] = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \square$$

Problem 3. (a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

(b) Für $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, betrachten wir $X(\omega) = \omega$ und für $\mathbb{P}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmt durch

$$\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(\{j\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha+1)} \frac{1}{j^{\alpha+1}}, \quad j \in \mathbb{N},$$

mit $\alpha > 1$ und der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^\infty k^{-s}, \quad s > 1.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] = (\zeta(\alpha+1))^{-1}\zeta(\alpha)$ gilt.

Proof. (a) $g_n = \sum_{k=1}^n f_n$ ist messbar und monoton steigend. Damit gilt nach dem Satz der monotonen Konvergenz

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^\infty k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{k}{\zeta(\alpha+1)} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{\zeta(\alpha+1)} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} \\ &= \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

□

Problem 4. Sei X eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}[X],$$

wobei die Reihe auf der linken Seite genau dann konvergiert, wenn der Erwartungswert der Zufallsvariablen auf der rechten Seite existiert.

Berechnen Sie mit Hilfe der Formel (erneut) den Erwartungswert einer geometrischen Verteilung.

Proof.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k[\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k[\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)] \\
&= \lim_{n\to\infty} [1\mathbb{P}(X \geq 1) - 1\mathbb{P}(X \geq 2) \\
&+ 2\mathbb{P}(X \geq 2) - 2\mathbb{P}(X \geq 3) \\
&+ 3\mathbb{P}(X \geq 3) - 3\mathbb{P}(X \geq 4) \\
&+ \dots \\
&+ n\mathbb{P}(X \geq n) - n\mathbb{P}(X \geq n+1)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq n) + n\mathbb{P}(X \geq n+1) \right]
\end{aligned}
$$

Wenn die erste Reihe konvergiert, muss $n\mathbb{P}(X \geq n+1) \to 0$. Dies beweisen wir durch Widerspruch. Angenommen $n\mathbb{P}(X \geq n+1) \not\to 0$, also es gibt ein $\epsilon > 0$ und Teilfolge n_k, sodass $n_k\mathbb{P}(X \geq n_k + 1) > \epsilon \forall k \in \mathbb{N}$. Damit konvergiert die Reihe

$$
\sum_{n_k \in \mathbb{N}} (n_k + 1)\mathbb{P}(X \geq n_k + 1)
$$

$\square$