Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 7

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: December 4, 2023)

Problem 1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Für $(E_j) \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ gilt

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, \mathrm{d}\mu \,.$$

(b) Sei nun $X := \mathbb{R}$ und $A_n := \{x \in \mathbb{R} | |x| \geq n\} = (-\infty, n] \cup [n, \infty)$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu \right| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt.

Proof. (a) Wir wissen (Satz 2.39), dass $|f|$ integrierbar ist mit Integral $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

Wir betrachten dann die Funktionfolge

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j} f.$$

f_n konvergiert gegen f, und es gilt $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ für alle x, also die Folge ist durch $|f(x)|$ dominiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_E f \, \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} f \, \mathrm{d}\mu \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{E_i} f \, \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, \mathrm{d}\mu \,. \end{aligned}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(b) Es gilt $\left|\int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_{A_n} |f| \, \mathrm{d}\mu$, also wir müssen es nur für $|f|$ beweisen. Wir betrachten die Funktionfolge $g_n = \chi_{A_n}|f|$. g_n konvergiert gegen 0 für alle x. Außerdem gilt $|g_n| \leq f$ für alle n. Wir verwenden dann den dominierte konvergenz Satz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu = \int 0 \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Aus dem Definition von Konvergenz einer Folge bekommen wir für jedes $\epsilon > 0$ eine ganze Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_{A_n} |f| \, \mathrm{d}\mu < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. □

Problem 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $f_k : X \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbare Funktionen, die gleichmäßig gegen ein Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass f integrierbar ist mit

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu \, .$$

(b) Zeigen Sie, dass auf Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ im Allgemein nicht verzichtet werden kann.

Proof. (a) f ist messbar (Folgerung 2.25).

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir bezeichnen mit ϵ gleichzeitig eine Zahl und die konstante Funktion $\epsilon(x) = \epsilon \; \forall x \in X$.

ϵ ist integrierbar, weil $\int |\epsilon| \, \mathrm{d}\mu = |\epsilon|\mu(X) < \infty$. Dann ist $|f| + \epsilon := g$ integrierbar. Weil f_k gleichmäßig konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Das heißt, dass

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + \epsilon.$$

Dann ist die Funktionfolge für alle $n \geq N$ durch g dominiert: $|f_n| \leq g$. Weil nur das Verhalten für n groß wichtig für Konvergenz ist, können wir den Satz von dominierte Konvergenz verwenden, also

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \, .$$

(b) Wir betrachten $(1,\infty)$ mit das eingeschränkte Lebesgue σ-Algebra und Maß. Sei ϵ_j eine Folge, $\epsilon_j \in \mathbb{R}$, $\epsilon_j \searrow 0$ und die Funktionfolge

$$f_j(x) = \frac{1}{x^{1+\epsilon_j}}.$$

Die Folge f_j konvergiert gegen $f(x) = 1/x$. Wir zeigen die Eigenschaften:

(i) Die Funktionfolge konvergiert gleichmäßig.

Wir berechnen den Fehler für beliebiges $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta(x) =& \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\epsilon}} \\
=& \frac{x^{\epsilon} - 1}{x^{1+\epsilon}} \\
\frac{\mathrm{d}\Delta(x)}{\mathrm{d}x} =& -x^{-2} + (1+\epsilon)x^{-(2+\epsilon)} = 0 \\
-1 + (1+\epsilon)x^{-\epsilon} =& 0 \\
x^{-\epsilon} =& \frac{1}{1+\epsilon} \\
x^{\epsilon} =& 1+\epsilon \\
x =& (1+\epsilon)^{1/\epsilon} \\
\Delta(x) \leq& \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} \\
=& \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{1+1/\epsilon}},
\end{aligned}$$

also der Fehler ist durch eine streng monoton fallende Funktion eingeschränkt, und die Folge konvergiert gleichmäßig.

(ii) f_j ist integrierbar für alle $j \in \mathbb{N}$.

Dies folgt nicht aus Satz 2.61, weil wir nicht über einem kompakten Interval integrieren. Wir wissen nur, dass das Riemann-integral konvergent ist. Sei j fest und definiere

$$f_{j,n} = \chi_{[1,n]} f_h.$$

Dann stimmt das Lebesgue-integral mit das Riemann-Integral für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die Funktionfolge ist auch durch f_j dominiert, also

$$\begin{aligned}\int f_j \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int f_{j,n} \,\mathrm{d}\mu && \text{dominierte Konvergenz}\\ &= \lim_{n\to\infty} R-\int_1^n f_j(x)\,\mathrm{d}x && \text{Satz 2.61}\\ &= R-\int_1^\infty f_j(x)\,\mathrm{d}x && \text{Definition}\end{aligned}$$

Weil wir wissen, dass das uneigentliche Riemann-Integral existiert, ist f_j auch integrierbar für alle $j \in \mathbb{N}$.

(iii) Ähnlich haben wir

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\mu = R-\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Weil das Riemann-Integral auf der rechten Seite nicht existiert, ist $\frac{1}{x}$ auch nicht Lebesgue-integrierbar. □

Problem 3. (a) Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein σ-endlicher Maßraum mit $\mu(X) > 0$. Zeigen Sie, dass dann eine messbare Funktion $f : X \to \overline{R}$ existiert mit $f > 0$ auf X und $0 < \int |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$.

(b) Geben Sie einen Maßraum an, für den $\mathcal{L}^1(\mu) = \{0\}$ gilt.

Proof. (a) Per Definition gibt es eine Folge $(A_j), A_j \in \mathcal{A}$, so dass alle A_j endliche Maß haben und $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = X$. Wir definieren $f = \sum_{j=1}^\infty \frac{2^{-j}}{\mu(A_i)}\chi_{A_i}$. Per Definition als eine Reihe von einfache Funktionen gilt (f ist positiv, also wir müssen kein Betrag schreiben):

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \frac{2^{-j}}{\mu(A_i)}\mu(A_i) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}.$$

Die Summe konvergiert und ist endlich.

(b) $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}),\mu)$, wobei

$$\mu(X) = \begin{cases} 0 & X = \varnothing \\ \infty & \text{sonst.}\end{cases}.$$

Sei $f \neq 0$, also es gibt ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$,so dass $|f(x_0)| > 0$. Es gilt $|f| \geq |f(x_0)|\chi_{\{x_0\}}$. Es gilt auch

$$\int |f(x_0)|\chi_{\{x_0\}}\,\mathrm{d}\mu = |f(x_0)|\mu(\{x_0\}) = \infty,$$

also f ist nicht in $\mathcal{L}^1(\mu)$. □

Problem 4. (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$ gilt.

(b) Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume und $f : X \times Y \to \overline{R}$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann für jedes $x \in X$ die Funktion $f_x(y) := f(x, y)$ $\mathcal{B}$-messbar ist.

Proof. (a) Es gilt $\mu(A \triangle B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$. Wir nehmen oBdA an, dass $\mu(A) \geq \mu(B)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\mu(A) - \mu(B)| \leq & \mu(A) - \mu(B) \\ = & \mu(A) + \mu(B) - 2\mu\,(B) \\ \leq & \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B) \end{aligned}$$

da $A \supseteq A \cap B \subseteq B$ und daher $\mu(A) \geq \mu(A \cap B) \leq \mu(B)$.

(b) Wir betrachten $C = \{f \leq k\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (weil f messbar ist). Sei $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\{f_x \leq k\} = \{y | f(x, y) \leq k\} = \{y | (x, y) \in C\}\,.$$

Aber wir wissen aus Übungsblatt 4, Aufgabe 1(a), dass die Menge $\{y | (x, y) \in C\}$ $\mathcal{B}$-messbar ist, also f_x ist messbar für alle $x \in X$. $\square$