UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. DANIEL WACHSMUTH
BASTIAN DITTRICH

Wintersemester 2023/24

6. Übung zur Vertiefung Analysis - Lösung

22. November 2023

Aufgabe 6.1. (a) Für $\alpha > 0$ gilt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \geq \int \chi_{\{f \geq \alpha\}} f \, \mathrm{d}\mu \geq \int \chi_{\{f \geq \alpha\}} \alpha \, \mathrm{d}\mu = \alpha \mu(\{f \geq \alpha\}).$$

Dies zeigt die Behauptung.

(b) Da f integrierbar ist, sind die Funktionen f^+ und $(-f^-)$ nach Definition 2.38 integrierbar und nichtnegativ. Da $\alpha > 0$ ist, gilt außerdem $\{f \geq \alpha\} = \{f^+ \geq \alpha\}$ und $\{f \leq -\alpha\} = \{f^- \leq -\alpha\} = \{-f^- \geq \alpha\}$. Mit (a) folgt

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) = \mu\left(\{f^+ \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int f^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$
$$\mu(\{f \leq -\alpha\}) = \mu\left(\{-f^- \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int (-f^-) \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Aufgabe 6.2. (a) Es gilt

$$\left| \int_N f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_N |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$$

wegen Satz 2.41 (4) und Satz 2.45 (1). Dies zeigt $\int_N f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

(b) Es gilt

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int (\chi_A + \chi_B) f \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_A f \, \mathrm{d}\mu + \int \chi_B f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Allgemein gilt

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{A \setminus B} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{B \setminus A} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A \cap B} f \, \mathrm{d}\mu.$$

(c) Sei $N := \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_j(x) < 0\}$. Dann ist N als abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst eine Nullmenge und es gilt $f_j \geq 0$ auf N^c für alle $j \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist auch $f := \sum_{j=1}^{\infty} f_j \geq 0$ auf N^c. Sei nun $g := \chi_{N^c} f$ und $g_n := \chi_{N^c} \sum_{j=1}^{n} f_j$. Dann ist $0 \leq g_n \leq g$, $g_n(x) \to g(x)$ für alle $x \in X$ und g_n, g messbare nichtnegative Funktionen. Satz 2.37 (4) impliziert nun zusammen mit Satz 2.45 (3)

$$\int \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int \chi_{N^c} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right) \mathrm{d}\mu$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \int \chi_{N^c} f_j \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \int f_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 6.3. (a) Es gilt $\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_A 0 \,\mathrm{d}\mu = 0$ nach Satz 2.41 (3) und (1). Außerdem ist $\emptyset$ eine Nullmenge und somit gilt $\nu(\emptyset) = 0$ wegen Aufgabe 6.2 (a).

Sei nun $(A_j) \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen und $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Definiere $g_n := \chi_{A_n} f \leq f$ und $g := \chi_A f \leq f$. Dann ist (g_n) eine Folge integrierbarer nichtnegativer Funktionen mit $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g$ integrierbar, da die Mengen A_n paarweise disjunkt sind. Nach Aufgabe 6.2 (c) folgt

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Also ist ν ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Da f integrierbar ist gilt $\nu(X) = \int f \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, was die Endlichkeit des Maßraums zeigt.

(b) Sei A eine μ-Nullmenge. Dann folgt $\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$ aus Aufgabe 6.2 (a).

(c) Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ und $N := \{x \in X \mid f(x) \leq 0\}$. Dann ist N eine Nullmenge und es folgt $\mu(A \cap N^c) \geq \mu(A) - \mu(N) = \mu(A) > 0$ mit $f > 0$ auf $A \cap N^c$. Nach Aufgabe 5.1 existiert dann $B \subseteq A \cap N^c$ und $\varepsilon > 0$ mit $\mu(B) > 0$ und $f > \varepsilon$ auf B. Es folgt

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_B \varepsilon \,\mathrm{d}\mu = \varepsilon\mu(B) > 0.$$

(d) Sei g zunächst eine einfache nichtnegative Funktion, also $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$. Dann gilt

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^{n} c_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu = \int \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}\right) f \,\mathrm{d}\mu = \int g f \,\mathrm{d}\mu.$$

Sei nun g messbar und nichtnegativ. Dann existiert nach Satz 2.29 eine Folge (g_n) einfacher nichtnegativer Funktionen, die punktweise von unten gegen g konvergiert. Wegen $f \geq 0$ ist $(g_n f)$ dann eine Folge messbarer nichtnegativer Funktionen, die punktweise von unten gegen gf konvergiert und es folgt nach Satz 2.37 (4)

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int g_n f \,\mathrm{d}\mu = \int g f \,\mathrm{d}\mu.$$

Sei g nun messbar. Dann ist $|g|$ messbar und nichtnegativ und es folgt

$$\int |g| \,\mathrm{d}\nu = \int |g| f \,\mathrm{d}\mu = \int |gf| \,\mathrm{d}\mu,$$

da $f \geq 0$. Also ist g genau dann bezüglich ν integrierbar, wenn gf bezüglich μ integrierbar ist.

In diesem Fall sind g^+ und $(-g^-)$ integrierbare nichtnegative Funktionen und es folgt

$$\begin{aligned}\int g \,\mathrm{d}\nu &= \int g^+ \,\mathrm{d}\nu - \int (-g^-) \,\mathrm{d}\nu = \int g^+ f \,\mathrm{d}\mu - \int (-g^-) f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int (gf)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int -(gf)^- \,\mathrm{d}\mu = \int g f \,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

da $f \geq 0$.