Wintersemester 2024/2025 — 14.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

5. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben werden zusammen mit ihrem Übungsleiter in den Übungen vom 18.11. und 19.11. gelöst.

Aufgabe P5.1

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = te^{x}, \quad x(0) = 1.$$

Bestimmen Sie eine Lösung und das maximale Existenzintervall I. Begründen Sie auch, dass I das maximale Existenzintervall ist.

Aufgabe P5.2

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stetig und stetig differenzierbar bezüglich x. Zeigen Sie, dass für jede Lösung φ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

genau eine der folgenden Aussagen zutrifft:

i) φ ist streng monoton wachsend,

ii) φ ist streng monoton fallend oder

iii) φ ist konstant.

Wintersemester 2024/2025 14.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy Andreas Schroll

5. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hausaufgaben

Die Abgabe der bearbeiteten Übungszettel ist auf WueCampus bis zum 21.11.2023 (bis 23:59 Uhr) möglich. Bis zu 3 Personen dürfen zusammen abgeben. Bitte laden Sie Ihre Abgabe nur einmal pro Gruppe hoch und schreiben Sie alle entsprechenden Namen auf die Abgabe.

Aufgabe H5.1 **(8 Punkte)**

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \begin{cases} +1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x > 0, \end{cases} \qquad x(0) = x_0.$$

Für welche Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ ist dieses Anfangswertproblem auf einem offenen Intervall um $t = 0$ eindeutig lösbar? Geben Sie für diese Fälle die eindeutige Lösung und das maximale Existenzintervall I an. Begründen Sie dabei, dass I wirklich das maximale Existenzintervall ist. (Das heißt, es ist zu zeigen, dass es kein größeres maximales Existenzintervall $\tilde{I}$ gibt.)

Aufgabe H5.2 **(3 + 4 = 7 Punkte)**

Gegeben seien die Anfangswertprobleme

a) $\dot{x} = \frac{1}{1+x}, \quad x(0) = 0$ und

b) $\dot{x} = x^2 \cos(t), \quad x(0) = -2.$

Bestimmen Sie jeweils die Lösung des Anfangswertproblems und geben Sie jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung an. Begründen Sie bei beiden Teilaufgaben auch, warum es das maximale Existenzintervall ist.

Aufgabe H5.3 **(3 + 2 + 4 = 9 Punkte)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+t^2}, \qquad x(0) = c, \qquad c \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: Ist I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1), so hat φ keine Nullstelle.

b) Bestimmen Sie eine Lösung $\varphi_c \colon I \to \mathbb{R}$ von (1) und begründen Sie, dass es ein derartiges Intervall I mit $0 \in I$ gibt.
(*Hinweis: I muss hier nicht bestimmt werden.*)

c) Ermitteln Sie das maximale Existenzintervall $I_{max,c} = (t_c^-, t_c^+)$ von φ_c. Wie verhält sich φ_c für $t \to t_c^-$ und $t \to t_c^+$?

Wintersemester 2024/2025 — 14.11.2023
Prof. Dr. Sergey Dashkovskiy — Andreas Schroll

5. Übungsblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Freiwillige Aufgaben

Bitte geben Sie diese Aufgaben nicht mit der Hausaufgabe ab.

Freiwillige Aufgabe F5.1

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \frac{6t}{1+3t^2}x + 5, \quad x(0) = 2.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine global eindeutige Lösung gibt.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.