Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 9

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 13, 2024)

Problem 1. (Hyperbelfunktion) Sei $d \in \{1, 2, 3\}, R > 0, 1 \leq p < \infty$ und $\alpha > 0$. Definiere

$$B_R(d; 0) := \{x \in \mathbb{R}^d | \|x\| < R\}, \qquad f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \to \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{1}{\|x\|^\alpha} & x \neq 0. \end{cases}.$$

(a) Sei zunächst $d = 1$. Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{B_R(1;0)} f$ in $L^p(\lambda_1)$? Für welche α, p ist die Funktion $\chi_{\mathbb{R} \setminus B_R(1;0)} f$ in $L^p(\lambda_1)$?

(b) Welche Bedingungen müssen in den Fällen $d = 2, 3$ für α, p gelten, damit $\chi_{B_R(d;0)} f \in L^p(\lambda_d)$ ist?

(c) Sei $1 < p < r < q < \infty$. Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit $g \in L^r(\lambda_1)$, $g \notin L^p(\lambda_1)$, $g \notin L^q(\lambda_1)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ an, sodass $g \in L^p(\lambda_1)$ für alle $p \in [1, \infty)$ gilt, aber $g \notin L^\infty(\lambda_1)$.

Problem 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$ gilt und außerdem

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}^\theta \|f\|_{L^q(\mu)}^{1-\theta}$$

für alle $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ und $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1 - \theta}{q}.$$

(b) Sei der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nun endlich. Zeigen Sie, dass dan $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ und

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mu)}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

für alle $f \in L^q(\mu)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie den Raum $L^r(\mu)$ für $r := \frac{q}{p}$.

Problem 3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := |xyz|$ und

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_3$.