

Elektrodynamik Hausaufgabenblatt Nr. 1

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: April 21, 2024)

Problem 1. (a) Geben Sie die Definitionen von Gradient, Rotation und Divergenz an.

(b) Wir schreiben die Komponenten des dreidimensionalen Vektorprodukts als

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k,$$

wobei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor für \mathbb{R}^3 ist, mit $\epsilon_{ijk} = 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = \delta_{kl},$$

mit δ dem Kronecker- δ .

(c) Zeigen Sie mit den Formeln aus (b) die folgenden Identitäten für beliebige Vektorfelder \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c},$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(d) Zeigen Sie damit, dass für beliebige skalare Funktionen $F(\vec{x})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{x})$ gilt:

$$\nabla \times \nabla F = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times A &= \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \\ \nabla \cdot (F \vec{A}) &= (\nabla F) \cdot \vec{A} + F \nabla \cdot \vec{A},\end{aligned}$$

mit Δ dem Laplace-Operator.

Proof. (a)

$$\begin{aligned}\text{grad } F &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i} \hat{x}_i \\ \text{div } \vec{F} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \\ \text{curl } \vec{F} &= \nabla \times F\end{aligned}$$

(b) Bemerkung: j, k, l und m sind freie Indizes. i wird summiert.

Spezialfall $j = k$ oder $l = m$: Die Summe ist 0

Voraussetzung, um eine nicht Null Summe zu erhalten: i muss nicht gleich j, k, l oder m sein. Da es nur insgesamt 3 Möglichkeiten für die Indizes gibt, muss für die Mengen gelten:

$$\{j, k\} = \{l, m\}.$$

Wenn die vorherige Gleichung gilt, ist die Summe $\neq 0$ genau dann, wenn

$$i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j, k\}.$$

In diesem Fall ist die Summe eindeutig bestimmt.

Der eindeutige Ausdruck mit den gleichen Eigenschaften ist

$$\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

Für den zweiten Teil betrachten wir wieder die Fälle:

Wenn $k \neq l$, gälte einer der Fälle

- (i) $i = k$, oder
- (ii) $i = k$, oder $j = k$, oder
- (iii) $i = l$, oder $j = l$

Damit sind alle Terme in der Summe und auch die ganze Summe 0.

Im Fall $k = l$: Sei $\{1, 2, 3\} = \{a, b, k\} = \{a, b, l\}$. Dann gibt es nur nicht Null Terme: $\epsilon_{abk}\epsilon_{abl} = (\epsilon_{abl})^2$ und $(\epsilon_{bal})^2$.

Unabhängig vom Signum der Permutation ist dessen Quadrat 1. Die Summe ist damit 2 und der Ausdruck 1.

(c) Doppel auftretende Indizes werden immer implizit summiert.

(i)

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_i (\epsilon_{ijk} b_j c_k) \\
 &= c_j \epsilon_{kij} a_i b_j \\
 &= \vec{c} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) \\
 &= b_j \epsilon_{jki} c_k a_i \\
 &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \epsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k \\
 &= \epsilon_{ijk} a_j (\epsilon_{klm} b_l c_m) \\
 &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\
 &= b_i a_m c_m - c_i a_l b_l \\
 &= b_i (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_i (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\
 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b})_i (\vec{c} \times \vec{d})_i \\
 &= (\epsilon_{ijk} a_j b_k) (\epsilon_{ilm} c_l d_m) \\
 &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\
 &= a_l c_l b_m d_m - a_m d_m b_l c_l \\
 &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c})
 \end{aligned}$$

(d) Doppel auftretende Indizes werden immer implizit summiert.

(i)

$$\begin{aligned}
 [\nabla \times \nabla F]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k F \\
 &= -\epsilon_{ikj} \delta_j \delta_k F && \text{Indizes in } \epsilon \text{ vertauscht} \\
 &= -\epsilon_{ikj} \partial_k \partial_j F && \text{Satz von Schwarz} \\
 &= -\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k F && \text{Umnummerierung } j \leftrightarrow k \\
 &= -[\nabla \times \nabla F]_i \\
 [\nabla \times \nabla F]_i &= 0 && \forall i \\
 \nabla \times \nabla F &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \nabla \times A &= \partial_i (\nabla \times A)_i \\
 &= \partial_i (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

mit dem gleichen Argument, aber k ist kein freier Index.

(iii)

$$\begin{aligned}
 [\nabla \times \nabla \times \vec{A}]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \vec{A})_k \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m \\
 &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m \\
 &= \partial_m \partial_i A_m - \partial_l \partial_l A_i \\
 &= \partial_i \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_i \\
 \nabla \times \nabla \times A &= \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\nabla \cdot F \vec{A} = \partial_i (F A_i)$$

$$\begin{aligned}
&= A_i \partial_i F + F \partial_i A_i \\
&= \vec{A} \cdot \nabla F + F \nabla \cdot A
\end{aligned}$$

□

Problem 2. (a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ einer Punktladung q , die sich am Ort $\vec{x} = 0$ befindet.

(b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q , für Orte sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel.

Proof. (a) Wir betrachten $B_r(0)$. Aus Symmetrie ist $\vec{E} = E\hat{\mathbf{r}}$. Nach dem Satz von Gauss gilt

$$\begin{aligned}
\frac{q}{\epsilon_0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{B_r(0)} \rho \, dV \\
&= \iint_{\partial B_r(0)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \\
&= \iint_{\partial B_r(0)} E \, dS \\
&= 4\pi r^2 E
\end{aligned}$$

also

$$\vec{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

(b) Es gilt

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Ähnlich betrachten wir $B_r(0)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV &= \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho & r < R \\ Q & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{r^3}{R^3} Q & r < R \\ Q & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \iint_{\partial B_r(0)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \\
&= \iint_{\partial B_r(0)} E \, dS
\end{aligned}$$

$$=4\pi r^2 E$$

also

$$\vec{\mathbf{E}}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi r^2 \epsilon_0} \begin{cases} \frac{r^3}{R^3} Q & r < R \\ Q & \text{sonst.} \end{cases}.$$

□