Einfürung in die Algebra Hausaufgaben Blatt Nr. 4

Jun Wei Tan*

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: November 12, 2023)

Problem 1. Seien $n \in \mathbb{N}^*, T$ die Menge der positiven Teiler von n und G eine Gruppe der Ordnung n. Für $t \in T$ definieren wir die Mengen

$$M_t := \{g \in G | \mathrm{ord}(g) = t\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes $g \in G$ in genau einer der Mengen M_t mit $t \in T$ liegt.

(b) Sei nun zudem G zyklisch. Zeigen Sie, dass dann $|M_t| = \varphi(t)$ für alle $t \in T$ gilt.

(c) Folgern Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $n = \sum_{t|n,t>0} \varphi(t)$.

Proof. (a) Sei $g \in G$ beliebig und $H = \langle g \rangle$. H ist eine Untergruppe von G. Es gilt auch, dass $|H| = \mathrm{ord}(g)$. Wir wissen, dass $|H|$ teilt $|G|$. Daraus folgt, dass $\mathrm{ord}(g)$ teilt $|G|$, und g liegt in genau einer der Mengen M_t mit $t \in T$.

(b) h

□

Problem 2. Zeigen Sie, dass für eine Gruppe G der Ordnung $n \in \mathbb{N}^*$ äquivalent sind:

(a) G ist zyklisch.

(b) G besitzt zu jedem positiven Teiler t von n genau eine Untergruppe der Ordnung t.

Problem 3. (a) Bestimmen Sie die Ordnungen der Elemente für jede der Diedergruppen D_n mit $n \geq 3$.

(b) Zeigen Sie, dass Satz 2.23 für nicht-abelsche Gruppen im Allgemeinen falsch ist.

> (Satz 2.23) Sei n die größte Elementordnung in einer abelschen Gruppe G. Dann gilt $g^n = e$ für alle $g \in G$.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Problem 4. Sei $n \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $R := \{r^0, r^1, \ldots, r^{n-1}\}$ ein Normalteiler von D_n ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\langle x \rangle$ für kein $D_n \backslash R$ ein Normalteiler von D_n ist.