Kapitel 2

Integrationstheorie

2.1 Messbare Funktionen

Definition 2.1. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$. Dann heißt f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar (oder kurz messbar), falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.*

Es reicht die Eigenschaft $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ nur für Mengen B zu zeigen, die die σ-Algebra $\mathcal{B}$ erzeugen.

Lemma 2.2. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$, und sei $S \subseteq \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A}_\sigma(S) = \mathcal{B}$. Dann ist f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar genau dann, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in S$.*

Beweis. "$\Leftarrow$" Wir verwenden $f_*(\mathcal{A})$, siehe Beispiel 1.4. Nach Voraussetzung gilt $S \subseteq f_*(\mathcal{A})$. Damit ist auch $\mathcal{B} \subseteq f_*(\mathcal{A})$, und f ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar. □

Verknüpfungen stetiger und messbarer Funktionen sind messbar.

Lemma 2.3. *Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, Y und Z metrische Räume. Weiter seien $g : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(Y)$-messbar und $f : Y \to Z$ stetig. Dann ist $f \circ g$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(Z)$-messbar.*

Beweis. Sei $O \subseteq Z$ offen. Dann ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(Y)$ und $(f \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathcal{A}$. □

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{A})$ immer ein messbarer Raum.

Definition 2.1 werden wir für die Spezialfälle $Y = \mathbb{R}$ und $Y = \bar{\mathbb{R}}$ verwenden, wobei die Bildräume mit der Borel-σ-Algebra versehen werden. Sei $\mathcal{T}$ die Menge der offenen Mengen auf $\mathbb{R}^1$. Dann ist die Borel-σ-Algebra von $\bar{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T} \cup \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}),$$

also $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und die einelementigen Mengen $\{+\infty\}$, $\{-\infty\}$ enthält. Offensichtlich ist $\mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Mithilfe von Lemma 2.2 können wir die Anforderungen an eine messbare Funktion schon reduzieren.

Definition 2.4. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^1$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$.*

Analog heißt $f : X \to \mathbb{C}$ Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{C}$.

Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$.

Folgerung 2.5. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f $\mathcal{L}(n)$-$\mathcal{B}^1$-messbar und $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}^1$-messbar.*

Bemerkung 2.6. *Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muss allerdings nicht $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{L}(1)$-messbar sein. Das ist der Grund, warum auf dem Bildbereich $\mathbb{R}$ die Borel-σ-Algebra verwendet wird. Eine stetige aber nicht $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{L}(1)$-messbare Funktion kann mit der Cantor-Menge konstruiert werden, wir verweisen auf [Tao11, Remark 1.3.10].*

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue messbar, dann ist f auch messbar, wenn f als Funktion nach $\bar{\mathbb{R}}$ angesehen wird.

Definition 2.7. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere*

$$\{f < \alpha\} := \{x \in X : f(x) < \alpha\},$$

analog $\{f \leq \alpha\}$, $\{f > \alpha\}$, $\{f \geq \alpha\}$.

Satz 2.8. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(2.9) *f ist messbar,*

(2.10) *$\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.11) *$\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.12) *$\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.13) *$\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Beweis. Wir beweisen nur die Äquivalenz von (2.9) und (2.10). Ist f messbar, dann ist $\{f < \alpha\} = f^{-1}(\{-\infty\} \cup (-\infty, \alpha)) \in \mathcal{A}$. Sei nun $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle

$\alpha \in \mathbb{Q}$. Wir nutzen aus, dass $f_*(\mathcal{A})$, also die Menge aller Teilmengen $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ für die $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist, eine σ-Algebra ist, siehe Beispiel 1.4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge rationaler Zahlen (α_k) mit $\alpha_k \to \alpha$. Es folgt

$$\{f < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f < \alpha_k\} \in \mathcal{A}.$$

Damit ist auch $\{f \geq \alpha\} = \{f < \alpha\}^c \in \mathcal{A}$. Dann gilt für alle $\alpha < \beta$, dass $f^{-1}([\alpha, \beta)) \in \mathcal{A}$. Damit sind die Urbilder aller halboffenen Intervalle in $\mathcal{A}$. Damit ist auch $\mathcal{B}^1 \subseteq f_*(\mathcal{A})$. Weiter gilt

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f < -n\} \in \mathcal{A}.$$

Wegen $\{+\infty\} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^c$ ist auch $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$. Damit sind die Urbilder aller Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ in $\mathcal{A}$, und f ist messbar. □

Beispiel 2.14. *Sei $A \subseteq X$. Definiere die charakteristische Funktion von A durch*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist χ_A messbar genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}$. Ist $B \subseteq X$, dann ist

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A\cup B} = \max(\chi_A, \chi_B).$$

Beispiel 2.15. *Ist $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch die durch*

$$(\chi_A \cdot f)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion $\chi_A \cdot f$ messbar. Hier haben wir wieder die Konvention $0 \cdot \pm\infty := 0$ benutzt. Für $\alpha < 0$ ist

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A \cap \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

während für $\alpha \geq 0$ gilt

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A^c \cup \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

und $\chi_A \cdot f$ ist messbar.

Nun wollen wir beweisen, dass Summen, Produkte, etc, von messbaren Funktionen messbar sind. Wir starten mit zwei Hilfsresultaten.

Lemma 2.16. *Sei $g : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ monoton wachsend, das heißt für alle $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $x \leq y$ ist $g(x) \leq g(y)$. Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist auch $g \circ f$ messbar.*

Beweis. Wir benutzen Satz 2.8. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{g < \alpha\}$ ein Intervall: Definiere $\beta := \sup\{x \in \bar{\mathbb{R}} : \; g(x) < \alpha\} \in \bar{\mathbb{R}}$. Ist $g(\beta) = \alpha$ dann ist $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta)$, ansonsten ist $g(\beta) < \alpha$ und $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta]$. In beiden Fällen ist $f^{-1}(\{g < \alpha\}) = \{g \circ f < \alpha\}$ messbar. □

Damit bekommen wir folgendes Resultat.

Satz 2.17. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind die folgenden Funktionen messbar:*

(2.18) $c \cdot f$ *für alle* $c \in \bar{\mathbb{R}}$,

(2.19) $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := \min(f, 0)$,

(2.20) $\operatorname{sign}(f)$, *wobei*

$$\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \text{falls } y > 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \\ -1 & \text{falls } y < 0, \end{cases}$$

(2.21) $|f|^p$ *für alle* $p > 0$,

(2.22) $1/f$ *falls* $f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$.

Beweis. (2.18): Wir zeigen erst, dass $-f$ messbar ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{-f < \alpha\} = \{f > -\alpha\}$, also ist $-f$ messbar. Sei nun $c \in \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist $g(y) := |c| \cdot y$ monoton wachsend, und mit Lemma 2.16 ist $|c| \cdot f$ messbar, also auch $-|c| \cdot f$.

(2.19),(2.20): Die Funktionen $y \mapsto \max(y, 0)$, $y \mapsto \min(y, 0)$ und $y \mapsto \operatorname{sign}(y)$ sind monoton wachsend. Wegen Lemma 2.16 sind die Funktionen $\max(f, 0)$, $\min(f, 0)$ und $\operatorname{sign}(f)$ messbar.

(2.21): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{|f| < \alpha\} = \{f < \alpha\} \cap \{-f < \alpha\}$. Dies ist wegen (2.18) und Satz 2.8 in $\mathcal{A}$, also ist auch $|f|$ messbar. Die Abbildung $y \mapsto (\max(0, y))^p$ ist monoton wachsend, damit ist auch $|f|^p$ messbar.

(2.22): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{1/f < \alpha\} = (\{f < 0\} \cap \{\alpha f < 1\}) \cup (\{f > 0\} \cap \{\alpha f > 1\}) \in \mathcal{A},$$

also $1/f$ messbar. □

Desweiteren sind Summen, Produkte, Quotienten messbarer Funktionen wieder messbar.

Satz 2.23. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und f/g messbar, falls diese Funktionen auf ganz X definiert sind. Die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\pm\infty/\pm\infty$, $c/0$ für $c \in \bar{\mathbb{R}}$ sind nicht definiert.*

Beweis. Wir zeigen, dass $f + g$ messbar ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $f(x) + g(x) < \alpha$, woraus $f(x) < +\infty$ und $g(x) < +\infty$ folgt. Dann existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in (g(x), \alpha - f(x))$. Dann ist

$$\{f + g < \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < \alpha - q\} \cap \{g < q\}) \in \mathcal{A},$$

und $f + g$ ist messbar.

Seien zuerst f und g Abbildungen nach $\mathbb{R}$. Dann folgt die Messbarkeit von $f \cdot g$ aus $f \cdot g = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$. Seien nun f und g Abbildungen nach $\bar{\mathbb{R}}$. Wir definieren die messbare Menge

$$A := \{|f| < \infty\} \cap \{|g| < \infty\}$$

sowie die messbaren Funktionen (mit Wertebereich $\mathbb{R}$)

$$\tilde{f} := \chi_A f, \quad \tilde{g} := \chi_A g.$$

Dann ist $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ messbar. Außerdem gilt (beachte $0 \cdot \infty = 0$)

$$f \cdot g = \chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g} + \chi_{A^c} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g) \cdot \infty.$$

Beide Summanden sind messbar: $\chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ und $\chi_{A^c} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g)$ sind Produkte $\mathbb{R}$-wertiger messbarer Funktionen (Beispiel 2.15), Multipikation mit der Konstante $+\infty$ erhält Messbarkeit.

Sei g messbar, so dass $g(x) \neq 0$ für alle x. Dann ist $1/g$ messbar (2.22). Damit ist auch $f/g = f \cdot 1/g$ messbar. □

Aufgrund der Eigenschaften von σ-Algebren können wir recht einfach beweisen, dass punktweise Infima, Suprema und Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen wieder messbar sind.

Satz 2.24. *Seien (f_n) messbare Funktionen von X nach $\bar{\mathbb{R}}$. Dann sind auch $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ messbare Funktionen. Dabei ist $(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ punktweise definiert. Analog wird für die drei anderen Konstrukte verfahren.*

Beweis. Die Messbarkeit von Infimum und Supremum folgt aus Satz 2.8 und

$$\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Per Definition ist

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x).$$

Wegen des gerade Gezeigten ist $x \mapsto \inf_{k\geq n} f_k(x)$ messbar für alle n, und damit auch $x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Analog folgt der Beweis für lim sup. □

Folgerung 2.25. *Seien (f_n) messbare Funktionen von X nach $\bar{\mathbb{R}}$. Weiter sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle x. Dann ist auch f messbar.*

Wir zeigen nun, dass sich Lebesgue-messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren lassen.

Definition 2.26. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann heißt f einfache Funktion, wenn $f(X)$ eine endliche Menge ist.*

Lemma 2.27. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ einfach, dann existieren $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte, messbare Mengen $A_1 \dots A_n$, so dass $\bigcup_{j=1}^n A_j = X$ und*

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}.$$

Beweis. Da f einfach ist, ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Menge. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$ und $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ so, dass $f(X) = \{c_1 \dots c_n\}$. Mit $A_j := f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{A}$ folgt die Behauptung. □

Das heißt, eine Funktion ist einfach, wenn sie eine Linearkombination charakteristischer Funktionen ist.

Folgerung 2.28. *Sind f, g einfache Funktionen, dann sind auch $f+g$ und $f \cdot g$ einfache Funktionen.*

Beweis. Wegen Lemma 2.27 gibt es reelle Zahlen c_i und d_j sowie messbare Mengen A_i und B_j, so dass

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$$

und $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$, wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Dann ist $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$, $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \chi_{A_i\cap B_j}$, sowie analog $\chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i\cap B_j}$ und

$$f + g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j) \chi_{A_i\cap B_j}.$$

Für das Produkt erhalten wir

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i d_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

□

Satz 2.29. *Sei $f : X \to [0, +\infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge (f_n) nicht-negativer, einfacher Funktionen mit $f_n(x) \nearrow f(x)$ für alle x. Ist f beschränkt, dann ist die Folge (f_n) gleichmäßig beschränkt, und die Konvergenz $f_n \to f$ ist gleichmäßig.*

Beweis. Wir konstruieren die f_n durch eine Unterteilung des Bildbereichs. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen das Intervall $[0, n)$ in $n2^n$-viele Intervalle der Länge 2^{-n}. Setze für $j = 1 \dots n2^n$

$$A_{n,j} := f^{-1} \left(\left[\frac{j-1}{2^n} \frac{j}{2^n} \right) \right).$$

Damit definieren wir die einfache Funktion

$$f_n(x) := n\chi_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=1}^{n2^n} \chi_{A_{n,j}} \cdot \frac{j-1}{2^n}.$$

Damit gilt $f_n(x) \leq f(x)$. Wegen

$$A_{n,j} = A_{n+1,2j-1} \cup A_{n+1,2j}$$

folgt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Es bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Ist $f(x) < n$ dann ist $x \in A_{n,j}$ für ein passendes j, und es gilt $f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$. Damit bekommen wir $f_n(x) \to f(x)$ falls $f(x) < +\infty$. Ist $f(x) = +\infty$, dann ist $f_n(x) = n$ für alle n, und die Konvergenz $f_n(x) \to f(x) = +\infty$ folgt.

Sei f beschränkt. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < N$ für alle x. Daraus folgt $f_n(x) < N$ für alle n und x. Für $n > N$ ist dann $f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$ für alle x, woraus die gleichmäßige Konvergenz folgt. □

Im Folgenden werden wir die abkürzende Schreibweise

$$f_n \nearrow f \quad \Leftrightarrow \quad f_n(x) \nearrow f(x) \ \forall x \in X$$

benutzen.

Folgerung 2.30. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann existiert eine Folge (ϕ_n) einfacher Funktionen mit $|\phi_n(x)| \leq |f(x)|$ und $\phi_n(x) \to f(x)$ für alle x.*

Beweis. Wir approximieren $|f|$ durch eine Folge nicht negativer, einfacher Funktionen (ϕ_n), Satz 2.29. Die Funktion $\operatorname{sign}(f)$ ist eine einfache Funktion. Die Funktionen $\operatorname{sign}(f) \cdot \phi_n$ haben dann die gewünschten Eigenschaften, wobei wir Folgerung 2.28 benutzt haben. □

2.2 Das Lebesgue-Integral

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.31. *Sei $f : X \to [0, +\infty)$ eine einfache Funktion mit $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ mit paarweise disjunkten Mengen (A_i). Dann ist*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$$

das Lebesgue Integral von f.

Da $\mu(A_i) = +\infty$ sein kann, ist $\int f \, \mathrm{d}\mu$ im Allgemeinen in $\bar{\mathbb{R}}$. Um unbestimmte Ausdrücke zu vermeiden, haben wir das Integral nur für nicht negative Funktionen definiert.

Lemma 2.32. *Das Lebesgue-Integral für einfache Funktionen ist wohldefiniert: Gilt $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$ mit paarweise disjunkten Mengen (A_i) und paarweise disjunkten Mengen (B_j), dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$. Falls nicht setzen wir $A_{n+1} = (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$, $c_{n+1} = 0$.

Ist $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ dann folgt $c_i = d_j$: Sei $x \in A_i \cap B_j$, dann ist $f(x) = c_i = b_j$, da die Mengen (A_i) und die Mengen (B_j) paarweise disjunkt sind. Weiter ist $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ und $B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

□

Dieses Integral für einfache Funktionen hat folgende Eigenschaften.

Satz 2.33. *Seien $f, g : X \to [0, +\infty)$ einfache Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $\int (cf)\,\mathrm{d}\mu = c \int f\,\mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$,

(2) $\int f + g\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$,

(3) ist $f \leq g$, dann ist $\int f\,\mathrm{d}\mu \leq \int g\,\mathrm{d}\mu$,

(4) $\int \chi_A\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. (1) folgt sofort aus der Definition. (2) Wegen Lemma 2.27 gibt es reelle Zahlen c_i und d_j sowie messbare Mengen A_i und B_j, so dass

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j}$$

und $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Wie im Beweis von Folgerung 2.28 bekommen wir

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int f + g\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j) = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

(3) Sei $x \in A_i \cap B_j$. Dann gilt $f(x) = c_i \leq g(x) = d_j$. Mit Argumenten wie im Beweis von Lemma 2.32 bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) &= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&\leq \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j) = \int g\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

(4) χ_A ist eine einfache Funktion mit $\int \chi_A\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$. □

Wir können messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren. Dies werden wir benutzen, um das Lebesgue-Integral für messbare Funktionen zu definieren. Wir beginnen mit dem Integral nicht-negativer Funktionen, damit wir die Monotonie der Konvergenz aus Satz 2.29 benutzen können. In den Beweis des nächsten Satzes geht entscheidend die Stetigkeit von Maßen auf monoton wachsenden Folgen messbarer Mengen (1.29) ein.

Lemma 2.34. *Sei (f_n) eine Folge nichtnegativer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$, f einfache Funktion. Dann gilt*

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir betrachten die beiden Fälle $\int f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ und $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. (1) Angenommen $\int f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Da f eine einfache Funktion ist, existiert ein $c > 0$ und ein $A \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(A) = +\infty$ und $f \geq c$ auf A. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $A_n := \{x : \ f_n(x) \geq c/2\}$. Da $(f_n(x))$ monoton wachsend ist, folgt $A_n \subseteq A_{n+1}$. Aus der punktweisen Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ folgt $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \supseteq A$. Dann folgt $\mu(A_n) \to \mu(A) = +\infty$ aus (1.29). Aus der Ungleichung $\chi_{A_n} \frac{c}{2} \leq f_n$ folgt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \mu(A_n) \frac{c}{2} \to +\infty$ (Satz 2.33).

(2) Sei nun $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge, also konvergent. Weiter ist $B := \{f > 0\} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \infty$. Da f eine einfache Funktion ist, ist f beschränkt, und es existiert $M > 0$ mit $f(x) \leq M$ für alle x. Sei $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $B_n := B \cap \{f_n \geq f - \varepsilon\}$. Dann folgt $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = B$, und wir bekommen $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus B_n) = 0$ aus (1.29) und (1.30). Wir schätzen nun das Integral der einfachen und nicht-negativen Funktion $f - f_n$ von oben ab. Auf B_n ist $f - f_n \leq \varepsilon$, auf $B \setminus B_n$ ist $f - f_n \leq f \leq M$, während auf B^c gilt $f = f_n = 0$. Dann ist $f - f_n \leq \chi_{B_n}\varepsilon + \chi_{B\setminus B_n} M$ und es folgt

$$0 \leq \int f - f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int \chi_{B_n}\varepsilon + \chi_{B\setminus B_n} M \,\mathrm{d}\mu = \mu(B_n)\varepsilon + \mu(B \setminus B_n) M \to \mu(B)\varepsilon.$$

Da $\mu(B) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f \,\mathrm{d}\mu - \int f - f_n \,\mathrm{d}\mu \right) = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Nun zeigen wir, dass der Grenzwert von $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ für $f_n \nearrow f$ nur vom Grenzwert f abhängt, und nicht von der konkreten Wahl der (f_n). Dies ist ein wichtiger Schritt, um das Lebesgue-Integral definieren zu können.

Lemma 2.35. *Seien (f_n), (g_n) Folgen nichtnegativer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$, f messbar. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Für $m \in \mathbb{N}$ definiere

$$h_m := \min(f_n, g_m).$$

Dies ist eine einfache Funktion. Aus der Voraussetzung folgt $h_m \nearrow f_n$ für $m \to \infty$. Aus Lemma 2.34 bekommen wir dann

$$\lim_{m\to\infty} \int h_m \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Da $h_m \le g_m$ folgt mit der Monotonie des Integrals $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \int g_m \,\mathrm{d}\mu$. Grenzübergang auf beiden Seiten der Ungleichung ergibt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{m\to\infty} \int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int g_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Für $n \to \infty$ bekommen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int g_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Vertauschen wir in dieser Argumentation die Rollen von f_n und g_m erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Daraus folgt, dass die Grenzwerte existieren und gleich sind. □

Definition 2.36. *Sei $f : X \to [0, +\infty]$ messbar. Sei (f_n) eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen mit $f_n \nearrow f$. Dann ist das Lebesgue-Integral von f definiert als*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen Lemma 2.35 ist das Lebesgue-Integral von f wohldefiniert: der Wert $\int f \,\mathrm{d}\mu$ hängt nicht von der konkreten Wahl der approximierenden, einfachen Funktionen (f_n) ab.

Satz 2.37. *Seien $f, g : X \to [0, +\infty]$ messbare Funktionen. Dann gilt*

(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ *für alle* $c \ge 0$

(2) $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$,

(3) ist $f \le g$, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$,

(4) sind (f_m) messbare Funktionen von X nach $[0,+\infty]$ mit $f_m \nearrow f$, dann gilt $\int f_m \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. (1)–(3) Seien (f_n) und (g_n) Folgen einfacher, nichtnegativer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ und $g_n \nearrow g$. (1) und (2) folgen nun direkt aus Satz 2.33. Für (3) benutzen wir $\min(f_n, g_n) \nearrow f$ und $\int \min(f_n, g_n) \,\mathrm{d}\mu \le \int g_n \,\mathrm{d}\mu$.

(4) Für jedes m existiert eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen $(f_{m,n})$ mit $f_{m,n} \nearrow f_m$ für $n \to \infty$. Definiere die einfache Funktion h_m durch

$$h_m(x) := \max_{i,j \le m} f_{i,j}(x).$$

Dann ist $(h_m(x))$ monoton wachsend. Für $i, j \le m$ ist $f_{i,j} \le f_i \le f_m$. Dann ist $h_m \le f_m \le f$, und es folgt $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \int f_m \,\mathrm{d}\mu \le \int f \,\mathrm{d}\mu$. Wir zeigen $h_m \nearrow f$.

Seien $x \in X$ und $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s < f(x)$. Dann existiert m, so dass $s \le f_m(x)$. Weiter existiert ein n, so dass $r \le f_{m,n}(x)$. Daraus folgt $r \le h_{\max(m,n)}(x)$ und $r \le \lim_{m\to\infty} h_m(x)$. Da $r < f(x)$ beliebig war, folgt $h_m(x) \to f(x)$. Damit folgt $h_m \nearrow f$ und $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$, woraus die Behauptung folgt. □

2.3 Integrierbarkeit

Wir wollen nun messbare Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ integrieren. Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$$f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \min(f, 0).$$

Dann ist $f = f^+ + f^-$.

Definition 2.38. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Es sei eines der Integrale $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$ endlich. Dann ist das Lebesgue-Integral von f definiert als*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu.$$

Sind beide Integrale $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$ endlich, dann heißt f integrierbar.

Alternative Schreibweisen für dieses Integral sind

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int f(x) \mu(\,\mathrm{d}x).$$

Satz 2.39. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f integrierbar genau dann, wenn $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.*

Beweis. Sei f integrierbar. Wegen $|f| = f^+ + (-f^-)$ ist $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, wobei wir Satz 2.37 benutzt haben. Sei nun $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Da $f^+ \leq |f|$ und $0 \leq -f^- \leq |f|$ folgt die Behauptung mit der Monotonie des Integrals aus Satz 2.37. □

Lemma 2.40. *Seien $f_1, f_2 : X \to [0, +\infty]$ messbar, so dass $f := f_1 - f_2$ definiert ist und $\int f_i \,\mathrm{d}\mu < \infty$ für $i = 1, 2$. Dann ist f integrierbar, und es gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Es gilt $|f| \leq f_1 + f_2$, und mit Satz 2.37 folgt $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Wegen Satz 2.39 ist f integrierbar. Aufgrund der Konstruktion ist $f_1 \geq f^+$. Definiere die nichtnegative Funktion g durch

$$g := f_1 - f^+ = f - f^+ + f_2 = f^- + f_2.$$

Da $|g| \leq |f_1|$ ist g integrierbar. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu &= \int (g + f^+) \,\mathrm{d}\mu - \int (g - f^-) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int g \,\mathrm{d}\mu + \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \left(\int g \,\mathrm{d}\mu + \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu \right) \\
&= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir Satz 2.37 benutzt. □

Die Schwierigkeit des Beweises war, dass wir die Additivität des Integrals bisher nur für nichtnegative Funktionen haben.

Satz 2.41. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

(2) Ist $f + g$ definiert, dann ist $f + g$ integrierbar, und es gilt $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(3) Ist $f \leq g$, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(4) $\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. Wegen $|cf| \leq |c| \cdot |f|$ und $|f + g| \leq |f| + |g|$ folgt die Integrierbarkeit von cf und $f + g$ aus Satz 2.39 und Satz 2.37. Sei $c \geq 0$. Dann ist $(cf)^+ = cf^+$ und $(cf)^- = cf^-$, und es folgt (1). Analog wird der Fall $c < 0$ bewiesen. Wegen

Lemma 2.40 bekommen wir aus $f + g = (f^+ + g^+) - (-f^- - g^-)$

$$\begin{aligned}\int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \int f^+ + g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^- - g^-)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-)\,\mathrm{d}\mu - \int (-g^-)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Additivität aus Satz 2.37 benutzt haben. Damit ist (2) bewiesen. Zu (3): ist $f \le g$ dann ist $f^+ \le g^+$ und $f^- \le g^-$, woraus mit der Monotonie aus Satz 2.37

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-)\,\mathrm{d}\mu \le \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-g^-) \le \int g \,\mathrm{d}\mu$$

folgt. (4) bekommen wir aus $-|f| \le f \le |f|$ und (3), (1). □

Definition 2.42. *Es sei $\mathcal{L}^1(\mu)$ die Menge aller integrierbaren Funktionen von X nach $\bar{\mathbb{R}}$.*

Die Menge $\mathcal{L}^1(\mu)$ versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum wegen Satz 2.41.

Lemma 2.43. *Die Abbildung*

$$f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} := \int |f| \,\mathrm{d}\mu$$

ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$, d.h., es gilt:

(1) $\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ für alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

(2) $\|cf\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le |c|\ \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $c \in \mathbb{R}$.

Im Allgemeinen folgt aus $\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = 0$ nicht, dass $f = 0$.

Beispiel 2.44. *Dazu betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$. Setze $f := \chi_{\mathbb{Q}}$. Dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$ aber $f \neq 0$.*

Satz 2.45. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow \{f \neq 0\}$ ist eine μ-Nullmenge.

(2) Ist f integrierbar, dann ist $\{f = \pm\infty\}$ eine μ-Nullmenge.

(3) Sei $\{f \neq g\}$ eine μ-Nullmenge. Dann ist f integrierbar genau dann, wenn g integrierbar ist. In diesem Falle gilt $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. (1) Setze $A := \{f \neq 0\}$. Sei $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $A_k := \{\frac{1}{k} \leq |f|\}$. Dann ist $\frac{1}{k}\chi_{A_k} \leq \chi_{A_k}|f| \leq |f|$, woraus mit Satz 2.37 $\frac{1}{k}\mu(A_k) \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ folgt. Damit ist $\mu(A_k) = 0$ für alle k und $\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$. Sei $\mu(A) = 0$. Wegen $|f| \leq \infty \cdot \chi_A$ folgt $\int |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \infty \cdot \mu(A) = 0$.

(2) Setze $A := \{|f| = +\infty\}$. Dann ist $\infty \cdot \mu(A) \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ (Satz 2.37), also $\mu(A) = 0$.

(3) Sei $N := \{f \neq g\}$. Wegen (1) haben wir

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int (\chi_N + \chi_{N^c})|f| \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|f| \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|g| \,\mathrm{d}\mu = \int |g| \,\mathrm{d}\mu.$$

Damit ist f integrierbar genau dann, wenn g integrierbar ist. Sind f und g integrierbar, bekommen wir mit einer analogen Begründung, dass $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int g^+ \,\mathrm{d}\mu$ und $\int -f^- \,\mathrm{d}\mu = \int -g^+ \,\mathrm{d}\mu$. $\square$

Definition 2.46. *Sei $P : X \to \{wahr, falsch\}$ eine Abbildung (ein einstelliges Prädikat auf X im Sinne der Logik). Dann gilt P μ-fast überall (oder $P(x)$ gilt für μ-fast alle $x \in X$) genau dann, wenn es eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gibt, so dass $P(x)$ für alle $x \in N^c$ gilt.*

Damit lassen sich die Aussagen von Satz 2.45 wie folgt ausdrücken:

(1) $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-fast überall.

(2) Ist f integrierbar, dann ist $f \notin \{\pm\infty\}$ μ-fast überall.

(3) Ist $f = g$ μ-fast überall, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Lemma 2.47. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben, so dass f messbar und $f = g$ μ-fast überall ist. Dann ist g messbar.*

Beweis. Sei N eine μ-Nullmenge, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in N^c$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$g^{-1}((-\infty, \alpha]) = \left(N^c \cap f^{-1}((-\infty, \alpha])\right) \cup \left(N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])\right).$$

Da N eine Nullmenge ist, und der Maßraum vollständig ist, ist $N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])$ als Teilmenge einer Nullmenge messbar. Es folgt, dass g messbar ist. $\square$

Definition 2.48. *Es sei $A \in \mathcal{A}$, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, so dass $\chi_A f$ messbar ist. Dann ist das Integral von f über A definiert als*

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int \chi_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 2.49. *Es sei $f \in X \to [0, +\infty]$ messbar. Dann ist die Abbildung ν definiert durch*

$$\nu(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$. Die Funktion f heißt Dichtefunktion von ν.

Definition 2.50. *Sei $f : X \to \mathbb{C}$ messbar. Dann heißt f integrierbar, falls* $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *integrierbar sind, und wir definieren*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + i \int \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Bei der Integration komplexwertiger Funktionen entstehen keine neuen Effekte: Die Abbildung $f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu$ ist $\mathbb{C}$-linear für komplexwertige Funktionen. Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist. Die Menge aller solcher integrierbarer Funktionen ist wieder ein Vektorraum.

2.4 Konvergenzsätze

Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Wir wollen nun untersuchen, wann gilt

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Dies ist eine nicht-triviale Frage, denn das Integral haben wir über einen Grenzwert definiert.

Beispiel 2.51. *Im Maßraum* $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ *definieren wir die folgenden Funktionenfolgen*

- $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$,
- $g_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x)$,
- $h_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x)$.

Dann konvergieren (f_n), (g_n) und (h_n) punktweise gegen Null, aber die Integrale nicht: $\int f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int g_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int h_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = 1$. Hier kann man Grenzwertbildung und Integral nicht vertauschen.

Satz 2.52 (Monotone Konvergenz)**.** *Seien (f_n) integrierbare Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ mit $f_n \nearrow f$ punktweise. Dann gilt $\int f_n \, \mathrm{d}\mu \nearrow \int f \, \mathrm{d}\mu$. Existiert ein $M > 0$, so dass $\int f_n \, \mathrm{d}\mu < M$ für alle n gilt, dann ist f integrierbar.*

Beweis. Definiere $g_n := f_n - f_1 \geq 0$, $g := f - f_1 \geq 0$. Dann gilt $g_n \nearrow g$, $\int g_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int g \,\mathrm{d}\mu$ (Satz 2.37). Da f_1 integrierbar ist, folgt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int f_1 \,\mathrm{d}\mu.$$

Ist $\int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$, dann ist $f - f_1$ integrierbar, und es folgt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$ aus der Linearität des Integrals (Satz 2.41). Wegen $0 \geq f^- \geq f_1$ ist f^- integrierbar, und aus $+\infty = \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ + f^- - f_1 \,\mathrm{d}\mu$ folgt

$$+\infty = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu = \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int f_1 \,\mathrm{d}\mu.$$

Weiter folgt

$$0 \leq \int g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq M - \int f_1 \,\mathrm{d}\mu,$$

also ist g integrierbar und damit auch f. □

Beispiel 2.53. *Die Funktionenfolgen $f_n = -\chi_{[n,+\infty)}$ und $g_n = \chi_{[0,n]}$ im Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ zeigen, dass monotone Konvergenz alleine nicht reicht für die Aussagen des Satzes.*

Satz 2.54 (Lemma von Fatou)**.** *Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, +\infty]$. Dann gilt*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Definiere $g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x)$. Dann sind die Funktionen g_n nichtnegativ und messbar. Weiter gilt $g_n \leq f_n$ und $g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$. Also bekommen wir aus Satz 2.37

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Beispiel 2.55. *Gleichheit gilt in Satz 2.54 im Allgemeinen nicht, siehe $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}$ aus Beispiel 2.51. Auf die Nichtnegativität kann nicht verzichtet werden: für $f_n(x) = -n\chi_{(0,1/n)}$ gilt die Behauptung nicht.*

Satz 2.56 (Dominierte Konvergenz)**.** *Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, $g : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Gilt $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und μ-fast alle x, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.*

Beweis. (1) Wir nehmen zuerst an, dass $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und alle x gilt. Daraus folgt $|f(x)| \leq g(x)$ für alle x. Damit sind die

Funktionen f und f_n integrierbar. Wir setzen $g_n := 2g - |f_n - f| \geq 0$. Nach Satz 2.54 ist

$$\begin{aligned} 2\int g \, \mathrm{d}\mu &= \int (\liminf_{n\to\infty} g_n(x)) \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int 2g - |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \\ &= 2\int g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \leq 2\int g \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Damit ist $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$, woraus mit Satz 2.41 die Behauptung folgt.

(2) Sei nun $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und μ-fast alle x. Dann existiert eine μ-Nullmenge N, so dass $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und alle $x \in N^c$. Die Funktionen $\chi_{N^c} f_n$, $\chi_{N^c} f$ erfüllen dann die Voraussetzungen von Beweisteil (1). Es folgt also $\lim_{n\to\infty} \int \chi_{N^c} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$. Da $\chi_{N^c}|f_n - f|$ und $|f_n - f|$ sich nur auf der Nullmenge N unterscheiden, gilt $\int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. □

Beispiel 2.57. *Auf die Existenz der integrierbaren gemeinsamen oberen Schranke kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden, wie Beispiel 2.51 zeigt.*

Satz 2.58 (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(\mu)$)**.** *Es sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen, die eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein N, so dass $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.*

Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. Weiter existiert ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und eine Teilfolge, so dass $f_{n_k}(x) \to f(x)$ und $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ für alle k und μ-fast alle x.

Beweis. (1) Wir nehmen zuerst an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$. Definiere die messbaren Funktionen

$$g_m := |f_1| + \sum_{n=1}^{m} |f_{n+1} - f_n|, \quad g := |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|.$$

Dann gilt $g_m \nearrow g$. Weiter ist $\int g_m \, \mathrm{d}\mu = \|f_1\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \sum_{n=1}^{m} \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$, woraus mit der monotonen Konvergenz $\int g \, \mathrm{d}\mu < \infty$ folgt. Dann ist (Satz 2.45) $g < +\infty$ fast überall, und es folgt $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| < +\infty$ fast überall. Damit ist $(f_n(x))$ für fast alle x eine Cauchyfolge, also konvergent. Wir definieren $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ falls der Grenzwert existiert, sonst setzen wir $f(x) := 0$. Da $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle x, folgt $|f| \leq g$ fast überall. Mit dominierter Konvergenz Satz 2.56 bekommen wir $\int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$.

(2) Sei m_k die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$, für die $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < 2^{-k}$ für alle $n, m \geq m_k$. Dann ist (m_k) monoton wachsend, und (n_k) definiert durch $n_k :=$

$m_k + k$ ist streng monoton wachsend. Definiere $\tilde{f}_k := f_{n_k}$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$. Wegen Teil (1) existiert $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so dass $\|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$ gilt und die Teilfolge $(f_{n_k}) = (\tilde{f}_k)$ alle weitere Behauptungen erfüllt.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle k so, dass $\|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon/2$ und $2^{-k} < \varepsilon/2$. Sei $n \geq n_k$. Dann ist $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f_n - \tilde{f}_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|\tilde{f}_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$. □

Beispiel 2.59. *Man bekommt im Allgemeinen die punktweise Konvergenz nur für eine Teilfolge. Wir betrachten den Maßraum* $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$. *Definiere* $f_n := 2^{j/2}\chi_{[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]}$ *für* $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$. *Dann ist* $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_1)} = 2^{-j/2} \to 0$. *Aber die Folge* f_n *ist nicht punktweise konvergent, und es existiert auch keine integrierbare gemeinsame obere Schranke.*

2.5 Vergleich mit Riemann-Integral

Sei $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Eine Abbildung $\phi : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ existieren mit $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} = b$ und $\phi|_{(a_i, a_{i+1})} = \phi_i$. Das Riemann-Integral von ϕ ist definiert durch

$$R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^{n} \phi_i(a_{i+1} - a_i).$$

Der Vektorraum aller solcher Treppenfunktionen sei $\mathcal{T}(I)$.

Definition 2.60. *Eine Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *heißt Riemann integrierbar, wenn gilt*

$$\begin{aligned} s := \sup\left\{ R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x :\ \phi \in \mathcal{T}(I),\ \phi \leq f \right\} \\ = \inf\left\{ R\text{–}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x :\ \phi \in \mathcal{T}(I),\ f \leq \phi \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Fall setzen wir

$$R\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := s.$$

Wir arbeiten hier im Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$.

Satz 2.61. *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *Riemann integrierbar. Dann ist* f λ_1*-integrierbar und es gilt*

$$R\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Beweis. Sei ϕ eine Treppenfunktion. Dann ist ϕ $\mathcal{B}^1 - \mathcal{B}^1$-messbar, und damit auch $\mathcal{L}(1) - \mathcal{B}^1$-messbar. Außerdem ist $R\text{–}\int_a^b \phi\,\mathrm{d}x = \int_I \phi\,\mathrm{d}\lambda_1$.

Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f bekommen wir für jedes n die Existenz von Treppenfunktionen ϕ_n und ψ_n mit $\phi_n \le f \le \psi_n$ und $R\text{-}\!\int_a^b (\psi_n - \phi_n)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}$. Daraus folgt $\|\psi_n - \phi_n\|_{L^1(\lambda_1)} = R\text{-}\!\int_a^b (\psi_n - \phi_n)\,\mathrm{d}x \to 0$.

Wegen Satz 2.58 gibt es eine Teilfolgen, so dass $\psi_{n_k} - \phi_{n_k} \to 0$ fast überall. Da $\phi_n \le f \le \psi_n$ folgt daraus $\lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} \phi_{n_k}(x) = f(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$. Da der Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ vollständig ist, folgt daraus die Messbarkeit von f. Aus der Integrierbarkeit von ϕ_n und ψ_n folgt die Integrierbarkeit von f. Grenzübergang in

$$R\text{-}\!\int_a^b \phi_n\,\mathrm{d}x = \int_I \phi_n\,\mathrm{d}\lambda_1 \le \int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1 \le \int_I \psi_n\,\mathrm{d}\lambda_1 = R\text{-}\!\int_a^b \psi_n\,\mathrm{d}x$$

liefert die Gleichheit von Riemann- und Lebesgue-Integral. □

Bemerkung 2.62. *Ein ähnliches Resultat gilt auch für den Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, \lambda_1)$: Nach Änderung auf einer λ_1-Nullmenge ist die Riemann-integrierbare Funktion f dann auch messbar und integrierbar, und die Integrale stimmen überein.*

Beispiel 2.63. *Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist λ_1-integrierbar aber nicht Riemann integrierbar.*

Beispiel 2.64. *Sei $s > 1$ und $f(x) = x^{-s}$ für $x > 1$. Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral*

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-s}(t^{1-s} - 1) = \frac{1}{s-1}.$$

Ähnlich argumentieren wir das Lebesgue-Integral

$$\int_{(1,\infty)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{(1,\infty)} \chi_{(1,n)} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^1 = \frac{1}{s-1}.$$

Hier haben wir die monotone Konvergenz benutzt.

Beispiel 2.65. *Das uneigentliche Riemann-Integral $R\text{-}\!\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existiert und ist endlich, während die Funktion f definiert durch $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nicht auf dem Intervall $[1, +\infty)$ λ_1-integrierbar ist, und das Integral $\int_{[1,\infty)} f\,\mathrm{d}\lambda_1$ ist nicht definiert.*

Da Lebesgue- und Riemann-Integral gleich sind, kann man auch für das Lebesgue-Integral die Riemann-Integral-Schreibweise verwenden, also

$$\int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $f : (a,b) \to \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar schreiben.

2.6 Produktmaße und Satz von Fubini

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Auf $X \times Y$ können wir ein äußere Maß definieren:

$$\lambda^*(M) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) : \; A_n \in \mathcal{A}, \; B_n \in \mathcal{B}, \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \supseteq M \right\}. \tag{2.66}$$

Wegen Satz 1.37 ist dies tatsächlich ein äußeres Maß.

Definition 2.67. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Wir definieren das durch μ und ν auf $X \times Y$ erzeugte Produktmaß $\mu \otimes \nu$ als das durch Satz 1.60 aus dem obigen äußeren Maß (2.66) erzeugte Maß. Die Menge der λ^*-messbaren Mengen nennen wir Λ.*

Dann ist $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$ ein vollständiger Maßraum. Wir zeigen, dass $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$.

Lemma 2.68. *Es gilt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$. Weiter ist*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Beweis. [Fre03, Proposition 251E] Wir zeigen, dass $A \times Y$ und $X \times B$ in Λ sind. Wegen $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ und der Definition von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist dies ausreichend, vergleiche Lemma 1.18.

Sei $A \in \mathcal{A}$ und $D \subseteq X \times Y$ mit $\lambda^*(D) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren Folgen (A_j) und (B_j) in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \times B_j) \supseteq D$ und $\lambda^*(D) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$. Dann ist

$$D \cap (A \times Y) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} ((A_j \cap A) \times B_j), \quad D \cap (A \times Y)^c \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} ((A_j \cap A^c) \times B_j).$$

Aus der Definition von λ^* folgt

$$\begin{aligned} &\lambda^*(D \cap (A \times Y)) + \lambda^*(D \cap (A \times Y)^c) \\ &\qquad \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A)\nu(B_j) \right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A^c)\nu(B_j) \right) \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) \leq \lambda^*(D) + \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist $A \times Y$ in Λ. Analog folgt $X \times B \in \Lambda$ für $B \in \mathcal{B}$.

Seien nun $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Dann gilt $\lambda^*(A \times B) \leq \mu(A)\nu(B)$. Es bleibt, die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Seien also Folgen (A_j) und (B_j) mit $\bigcup_{j=1}^\infty (A_j \times B_j) \supseteq A \times B$ gegeben. Definiere $S := \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\nu(B_j) \in [0, +\infty]$. Wir zeigen $\mu(A)\nu(B) \leq S$.

Dazu reicht es, den Fall $S < +\infty$ zu betrachten. Setze

$$I := \{j : \; \mu(A_j) = 0\}, \quad J := \{j : \nu(B_j) = 0\}, \quad K := \mathbb{N} \setminus (I \cup J).$$

Definiere

$$A' := A \setminus (\bigcup_{j \in I} A_j), \quad B' := B \setminus \bigcup_{j \in J} B_j.$$

Dann ist $\mu(A) = \mu(A')$ und $\nu(B) = \nu(B')$. Weiter ist $A' \subseteq \bigcup_{j \notin I} A_j$ und $B' \subseteq \bigcup_{j \notin J} B_j$. Außerdem gilt

$$A' \times B' \subseteq \bigcup_{j \in K} A_j \times B_j,$$

was man wie folgt sieht: Sei $(a,b) \in A' \times B'$, $I_a = \{j : \; a \in A_j\}$, $J_b = \{j : \; b' \in B_j\}$. Dann ist $I_a \subseteq I^c$, $J_b \subseteq J^c$, damit $I_a \cap J_b \subseteq K$, und wegen $(a,b) \in A$ ist $I' \cap J' \neq \emptyset$.

Weiter ist $S = \sum_{j \in K} \mu(A_j)\nu(B_j)$ und $\mu(A_j), \nu(B_j) \in \mathbb{R}$ für alle $j \in K$. Definiere $f_j : X \to \mathbb{R}$ durch $f_j := \chi_{A_j} \nu(B_j)$ falls $j \in K$, sonst $f_j := 0$. Dann ist f_j eine einfache Funktion. Die Folge $\sum_{j=1}^n f_j$ ist monoton wachsend, und wir setzen $g(x) := \sum_{j=1}^\infty f_j(x)$. Da $\int_X \sum_{j=1}^n f_j \,\mathrm{d}\mu \leq S$ für alle n folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz Satz 2.37

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \sum_{j=1}^n f_j \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j)\nu(B_j) = S.$$

Sei $x \in A'$ und setze $K_x := \{j \in K : \; x \in A_j\}$. Wegen $\{x\} \times B' \subseteq \bigcup_{j \in K} A_j \times B_j$ folgt $B' \subseteq \bigcup_{j \in K_x} B_j$ und

$$\nu(B) = \nu(B') \leq \sum_{j \in K_x} \nu(B_j) = \sum_{j \in K_x} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j) \leq g(x).$$

Also ist $\chi_{A'} \nu(B) \leq g$ und

$$\begin{aligned} \mu(A)\nu(B) = \mu(A')\nu(B) &= \int_X \chi_{A'} \nu(B) \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_X g(x) \,\mathrm{d}\mu = S = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\nu(B_j). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda^*(A \times B) \geq \mu(A)\nu(B)$. $\square$

Ein anderer Beweis findet sich zum Beispiel in [Tao11, Proposition 1.7.11].

Folgerung 2.69. *Sind μ und ν σ-endlich, dann sind die Maßräume $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ und $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$ σ-endlich.*

Folgerung 2.70. *Sei $\mu \otimes \nu$ σ-endlich. Für jede Menge $C \in \Lambda$ gibt es $D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $C \cup N = D$.*

Beweis. Sei $(\mu \otimes \nu)(C) < \infty$. Dann folgt aus der Konstruktion von λ^*, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Menge $D_k \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ existiert mit $C \subseteq D_k$ und $\lambda^*(D_k) \leq \lambda^*(C) + \frac{1}{k}$. Dann ist $\tilde{D} := \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $(\mu \otimes \nu)(C) = (\mu \otimes \nu)(\tilde{D})$, und $\tilde{N} := \tilde{D} \setminus C \in \Lambda$ ist eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge. Wenden wir diese Argumentation auf $\tilde{N}$ an, dann bekommen wir die Existenz einer $\mu \otimes \nu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $\tilde{N} \subseteq N$. Die Behauptung folgt mit $D = \tilde{D} \cup N$.

Sei nun $C \in \Lambda$ beliebig. Da das Produktmaß σ-endlich ist, existiert eine Folge (C_j) in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $(\mu \otimes \nu)(C_j) < \infty$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = X \times Y$. Für jedes j existieren dann $D_j, N_j \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $(\mu \otimes \nu)(N_j) = 0$ und $(C \cap C_j) \cup N_j = D_j$. Dann folgt die Behauptung mit $D := \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ und $N := \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$. □

Damit ist dann $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$ die Vervollständigung von $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, (\mu \otimes \nu)|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}})$.

Im Folgenden werden wir mit der symmetrischen Differenz $A \triangle B$ arbeiten, definiert durch

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Aufgabe 2.71. *[Bog07, Lemma 1.5.5] Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sind $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$ dann gilt $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$.*

Für die Eindeutigkeit des Produktmaßes ist die σ-Endlichkeit von μ und ν entscheidend.

Satz 2.72. *Es seien μ und ν σ-endlich. Sei $\lambda : \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}$ ein Maß mit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ und $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Dann gilt $\lambda = \mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{C} \cap \Lambda \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

Beweis. Sei λ^* das durch μ und ν auf $X \times Y$ erzeugte äußere Maß aus (2.66). Dann gilt $\lambda^*(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \lambda(A \times B)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ nach Lemma 2.68. Wir zeigen, dass $\lambda^*(C) = \lambda(C)$ für alle $C \in \mathcal{C}$.

(1) Wir zeigen zuerst $\lambda(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j) = \lambda^*(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j)$ für $A_j \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{B}$. Wir benutzen die Additivität der beiden Maße auf $\mathcal{C} \cap \Lambda \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Für $I \subseteq \{1 \dots n\}$ definieren wir

$$A_I := \{x \mid \forall i = 1 \dots n : \ x \in A_i \ \Leftrightarrow i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \notin I} A_i^c.$$

Ist $I' \subseteq \{1 \dots n\}$ mit $I' \neq I$ dann ist $A_I \cap A_{I'} = \emptyset$. Analog definieren wir B_I. Dann gilt

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j = \bigcup_{\substack{I,J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J \neq \emptyset}} A_I \times B_J,$$

wobei die Vereinigung auf der rechten Seite eine disjunkte Vereinigung ist, und

$$\begin{aligned} \lambda(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j) &= \sum_{\substack{I,J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J \neq \emptyset}} \lambda(A_I \times B_J) \\ &= \sum_{\substack{I,J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J \neq \emptyset}} \lambda^*(A_I \times B_J) = \lambda^*(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j). \end{aligned}$$

(2) Sei nun $C \in \mathcal{C} \cap \Lambda$ mit $\lambda^*(C) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Folge (C_j) mit $C_j \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, $C_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^\infty C_j \supseteq C$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda^*(C_j) \leq \lambda^*(C) + \varepsilon/6$. Dann folgt $\lambda^*(C_\varepsilon \setminus C) \leq \varepsilon/6$. Da die Folge $n \mapsto C \setminus \bigcup_{j=1}^n C_j$ monoton fällt mit $(\mu \otimes \nu)(C \setminus \bigcup_{j=1}^\infty C_j) = 0$ gibt es ein N, so dass

$$\lambda^*(C \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j) = (\mu \otimes \nu)(C \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j) \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Setze $C_N := \bigcup_{j=1}^N C_j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda^*(C_N \triangle C) = \lambda^*(C \triangle \bigcup_{j=1}^{N} C_j) &= \lambda^*(\bigcup_{j=1}^{N} C_j \setminus C) + \lambda^*(C \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j) \\ &\leq \lambda^*(C_\varepsilon \setminus C) + \frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Weiter gibt es eine Folge (D_j) mit $D_j \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ mit $\bigcup_{j=1}^\infty D_j \supseteq C_N \triangle C$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda^*(D_j) \leq \frac{2}{3}\varepsilon$. Dann ist

$$\lambda(C_N \triangle C) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(D_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(D_j) \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Aus dem oben in Teil (1) Gezeigten folgt $\lambda^*(C_N) = \lambda(C_N)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\lambda^*(C) - \lambda(C)| &\leq |\lambda^*(C) - \lambda^*(C_N)| + |\lambda(C_N) - \lambda(C)| \\ &\leq \lambda^*(C \triangle C_N) + \lambda(C_N \triangle C) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\lambda^*(C) = \lambda(C)$.

(3) Für allgemeines $C \in \mathcal{C} \cap \Lambda$ folgt $\lambda^*(C) = \lambda(C)$ aus der σ-Endlichkeit von

μ und ν. □

Der Beweis ist eine Kombination von Argumenten aus den Beweisen von [Bog07, Theorem 1.11.8, Theorem 1.5.6(iii)]. Eine andere Beweisvariante ist [Els05, Satz II.5.6].

Satz 2.73. *Es gilt* $\lambda_m \otimes \lambda_n = \lambda_{m+n}$ *auf* $\mathcal{L}(m+n)$.

Beweis. [Fre03, Theorem 251N] Es sei λ^* das durch λ_m und λ_n erzeugte äußere Maß auf $\mathbb{R}^{m+n}$. Wir zeigen $\lambda^* = \lambda^*_{m+n}$. Da $\mathbb{J}(m+n) = \mathbb{J}(m) \boxtimes \mathbb{J}(n) \subseteq \mathcal{L}(m) \boxtimes \mathcal{L}(n)$ ist $\lambda^* \le \lambda^*_{m+n}$.

(1) Wir zeigen, dass gilt $\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \lambda^*(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$ für alle $A \in \mathcal{L}(m)$ und $B \in \mathcal{L}(n)$. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda_m(A) < \infty$, $\lambda_n(B) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Überdeckungen (A_i) und (B_j) von A und B durch Quader des $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i) \le \lambda_m(A) + \varepsilon$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j) \le \lambda_n(B) + \varepsilon$. Dann ist $(A_i \times B_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $A \times B$ und es folgt mit dem Doppelreihensatz Satz 1.38

$$\begin{aligned}\lambda^*_{m+n}(A \times B) &\le \sum_{i,j=1}^\infty \lambda_m(A_i)\lambda_n(B_j) = \left(\sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i)\right)\left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j)\right)\\ &\le (\lambda_m(A) + \varepsilon)(\lambda_n(B) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda_m(A) = 0$ und $\lambda_n(B) = +\infty$. Dann gibt es eine Überdeckung von B durch eine Folge (B_j) mit $\lambda_n(B_j) < \infty$. Wegen der σ-Subadditivität von λ^*_{m+n} und dem gerade Bewiesenen ist

$$\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda^*_{m+n}(A \times B_j) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda_m(A)\lambda_n(B_j) = 0.$$

Damit ist die Ungleichung $\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \lambda^*(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$ für alle $A \in \mathcal{L}(m)$, $B \in \mathcal{L}(n)$ bewiesen.

(2) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. Weiter seien Folgen (A_i) und (B_i) in $\mathcal{L}(m)$ und $\mathcal{L}(n)$ mit $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \times B_i \supseteq C$ gegeben. Es folgt mit der σ-Subadditivität von λ^*_{m+n}

$$\lambda^*_{m+n}(C) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda^*_{m+n}(A_i \times B_i) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i)\lambda_n(B_i).$$

Damit ist $\lambda^*_{m+n} \le \lambda^*$, da λ^* als Infimum über solche Überdeckungen definiert ist. □

Nun wollen wir das Lebesgue-Integral bezüglich des Produktmaßes betrachten. Hier wollen wir beweisen, dass

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\,\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Angewandt auf den Spezialfall $\mu=\nu=\lambda_1$ bekommen wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\right)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\right)\,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Wir beginnen mit einem Hilfsresultat aus der Mengenlehre.

Definition 2.74. *Sei $X\neq\emptyset$. Eine Menge $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{P}(X)$ heißt monotone Klasse, wenn gilt:*

(1) Für (A_j) mit $A_j\in\mathcal{M}$ und $A_j\subseteq A_{j+1}$ folgt $\bigcup_{j=1}^\infty A_j\in\mathcal{M}$.

(2) Für (A_j) mit $A_j\in\mathcal{M}$ und $A_j\supseteq A_{j+1}$ folgt $\bigcap_{j=1}^\infty A_j\in\mathcal{M}$.

Beispiel 2.75. *Jede σ-Algebra ist eine monotone Klasse. Da Durchschnitte von monotonen Klassen wieder monotone Klassen sind, existiert für jedes $S\subseteq\mathcal{P}(X)$ die kleinste monotone Klasse, die S enthält.*

Satz 2.76. *Sei $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ eine (boolesche oder Mengen–) Algebra, d.h. es gilt*

(1) $X\in\mathcal{A}$,

(2) $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$,

(3) $A,B\in\mathcal{A}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{A}$.

Dann ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$ gleich der kleinsten monotonen Klasse, die $\mathcal{A}$ enthält.

Beweis. Es sei

$$\mathcal{M} := \bigcap\{\mathcal{M}' :\ \mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}',\ \mathcal{M}' \text{ monotone Klasse}\}.$$

Da $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, folgt $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$. Außerdem ist $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}$ und damit $X\in\mathcal{M}$. Wir zeigen $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{M}$.

Für $A\subseteq X$ definieren wir

$$\mathcal{M}(A) := \{B\subseteq X :\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A\in\mathcal{M}\}.$$

Die Definition ist symmetrisch in A und B, damit ist $B\in\mathcal{M}(A)$ genau dann, wenn $A\in\mathcal{M}(B)$.

Sei nun $A\in\mathcal{A}$. Dann gilt $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}(A)$. Weiter ist $\mathcal{M}(A)$ eine monotone Klasse: Sei (B_j) eine Folge in $\mathcal{M}(A)$ mit $B_j\subseteq B_{j+1}$. Dann ist $A\cup B_j\in\mathcal{M}$,

$A \cup B_j \subseteq A \cup B_{j+1}$ und $A \cup (\bigcup_{j=1}^\infty B_j) = \bigcup_{j=1}^\infty (A \cup B_j) \in \mathcal{M}$. Also ist $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{M}$. Die restlichen Eigenschaften folgen analog, und es gilt $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{M}(A)$. Daraus folgt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Aus der Symmetrie folgt $A \subseteq \mathcal{M}(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{A}$. Damit ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(M)$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}$. Weil $X \in \mathcal{M}$ ist, ist $\mathcal{M}$ eine Algebra.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. Sei (A_j) eine Folge in $\mathcal{M}$. Definiere $B_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$. Da $\mathcal{M}$ eine Algebra ist, folgt $B_k \in \mathcal{M}$ für alle k. Weiter ist $B_k \subseteq B_{k+1}$. Da $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist, folgt $\bigcup_{k=1}^\infty B_k = \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$, also ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält, und damit $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$. □

Aufgabe 2.77. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann ist $C_x := \{y : (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$ und $C^y := \{x : (x, y) \in C\} \in \mathcal{A}$ für alle $y \in Y$.*

Aufgabe 2.78. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar. Dann ist für jedes $x \in X$ die Funktion $f_x(y) := f(x, y)$ $\mathcal{B}$-messbar. Analog ist für jedes $y \in Y$ die Funktion $f_y(x) := f(x, y)$ $\mathcal{A}$-messbar.*

Wir betrachten zuerst Integrale nicht-negativer Funktionen. Wir beginnen mit Integralen charakteristischer Funktionen. Außerdem zeigt der folgende Satz eine Alternative, um ein Produktmaß zu definieren.

Satz 2.79. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume, ν sei σ-endlich. Dann ist für jedes $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die Abbildung $x \mapsto \nu(C_x)$ $\mathcal{A}$-messbar, und*

$$\rho(C) := \int_X \nu(C_x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

ist ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}.$$

Beweis. (1) Wir betrachten erst den Fall, dass ν endlich ist. Der Beweis folgt dem Prinzip der guten Mengen: Wir definieren

$$\mathcal{M} := \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} :\ x \mapsto \nu(C_x) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist. Ist (C_j) eine monoton fallende Folge in $\mathcal{M}$ mit $C := \bigcap_{j=1}^\infty C_j$, dann gilt $\nu(C_x) = \lim_{j\to\infty} \nu(C_{j,x})$ für alle x wegen (1.30). Und damit ist $C \in \mathcal{M}$. Für eine monoton wachsende Folge (C_j) in $\mathcal{M}$ bekommen wir analog $\bigcup_{j=1}^\infty C_j \in \mathcal{M}$.

Wir betrachten nun die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j : \ n \in \mathbb{N}, \ A_j \in \mathcal{A}, \ B_j \in \mathcal{B} \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{C}$ eine Algebra: aus $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ folgt $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$. Wegen $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ ist

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} ((A_j^c \times Y) \cup (X \times B_j^c)) = \bigcup_{J \subseteq \{1 \dots n\}} \left(\bigcap_{j \in J} A_j^c \times \bigcap_{j \notin J} B_j^c \right),$$

und $\mathcal{C}$ ist eine Algebra.

Wir zeigen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Wie im Beweis von Satz 2.72 argumentiert, kann jede Vereinigung von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ als endliche, disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ geschrieben werden. Sei $C := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j \in \mathcal{C}$ mit disjunkten Mengen $A_j \times B_j$. Dann ist

$$x \mapsto \nu(C_x) = \sum_{j=1}^{n} \nu((A_j \times B_j)_x) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x) \nu(B_j)$$

eine messbare Funktion, und $C \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Nach Satz 2.76 ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C})$ die kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{C}$ enthält, also folgt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

(2) Sei nun ν σ-endlich. Dann gibt es eine aufsteigende Folge (Y_j) mit $Y_j \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j = Y$ und $\nu(Y_j) < \infty$. Dann ist $B \mapsto \nu(B \cap Y_j)$ ein endliches Maß auf Y für alle j. Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Wegen (1) ist $x \mapsto \nu(C_x \cap Y_j)$ $\mathcal{A}$-messbar für alle j. Wegen der Konvergenz $\nu(C_x \cap Y_j) \to \nu(C_x)$ für alle x ist auch $x \mapsto \nu(C_x)$ $\mathcal{A}$-messbar.

(3) Es bleibt zu zeigen, dass ρ die behaupteten Eigenschaften hat. Sind $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, dann ist

$$\rho(A \times B) = \int_X \chi_A \nu(B) \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\nu(B).$$

Sei (C_j) eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Setze $C := \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$. Dann ist $\nu(C_x) = \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{j,x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(C_{j,x})$ für alle x. Mithilfe der monotonen

Konvergenz (Satz 2.37) folgt

$$\begin{aligned}\int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu(C_{j,x})\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \nu(C_{j,x})\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{j=1}^{n} \nu(C_{j,x})\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(C_j),\end{aligned}$$

und ρ ist ein Maß. □

Bemerkung 2.80. *Der Umweg über die Menge $\mathcal{C}$ war nötig, denn man kann nicht zeigen, dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen gegenüber Durchschnittsbildung ist. In diesem Fall wäre $\mathcal{M}$ eine Algebra: Wegen (1.27) würde aus $C_1 \subseteq C_2$ mit $C_1, C_2 \in \mathcal{M}$ folgen, dass $C_2 \setminus C_1 \in \mathcal{M}$ ist, damit wäre $\mathcal{M}$ abgeschlossen gegenüber Komplementbildung.*

Satz 2.81. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Sei $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Dann sind die Abbildungen $x \mapsto \nu(C_x)$ und $y \mapsto \mu(C^y)$ $\mathcal{A}$- und $\mathcal{B}$-messbar, und es gilt*

$$(\mu\otimes\nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Beweis. Folgt aus Satz 2.79 und Satz 2.72. □

Sei $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Dann ist für alle $x \in X$ und $y \in Y$

$$\chi_C(x, y) = \chi_{C_x}(y).$$

Damit bekommen wir aus Satz 2.81

$$(\mu\otimes\nu)(C) = \int_{X\times Y} \chi_C \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \int_Y \chi(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Folgerung 2.82 (Prinzip von Cavalieri)**.** *Seien $A, B \in \mathcal{L}(m+n)$. Gilt $\lambda_m(A_y) = \lambda_m(B_y)$ für λ_n-fast alle $y \in \mathbb{R}^n$, dann folgt $\lambda^{m+n}(A) = \lambda^{m+n}(B)$.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.81 und Satz 2.73. □

Beispiel 2.83. *Ohne σ-Endlichkeit ist die Behauptung von Satz 2.81 falsch. Sei $X = Y = \mathbb{R}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}^1$ und $\mu = \lambda_1$ sowie $\nu = \mathcal{H}^0$ (Zählmaß). Sei $D := \{(x, x) :\ x \in [0, 1]\}$. Dann ist D abgeschlossen und gehört zu $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^1\otimes\mathcal{B}^1$.*

Wir beweisen zuerst, dass $\lambda^*(D) = +\infty$ mit dem äußeren Maß λ^* aus (2.66). Seien (A_j) und (B_j) Folgen in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$. Wir zeigen, dass $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \times B_j$ keine Überdeckung von D sein kann.

Damit $\mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$ ist, muss B_j eine endliche Menge oder A_j eine λ_1-Nullmenge sein. Wir setzen

$$A := \bigcup_{j:\, \lambda_1(A_j)=0} A_j, \quad B := \bigcup_{j:\, \mathcal{H}^0(B_j)<\infty} B_j.$$

Dann ist A eine λ_1-Nullmenge und B eine abzählbare Menge.

Weiter ist $A_j \times B_j \subseteq (A\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times B)$ für alle j, und damit $\bigcup_{j=1}^\infty A_j\times B_j \subseteq (A\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times B)$. Sei $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ die Projektion auf die erste Koordinate, also $\pi_1(x_1,x_2) = x_1$. Dann ist $\pi_1(D\cap(A\times\mathbb{R})) = A$ und $\pi_1(D\cap(\mathbb{R}\times B)) = B$. Da $\pi_1(D) = [0,1]$ ist $\lambda_1(\pi_1(D)) = 1$. Weil aber $\lambda_1(\pi(A\cup B)) = 0$ ist, kann $\bigcup_{j=1}^\infty A_j\times B_j$ keine Überdeckung von D sein. Damit folgt $\lambda^*(D) = (\mu\otimes\nu)(D) = +\infty$.

Wertet man die Integrale in Satz 2.81 aus bekommt man allerdings andere Werte: es ist $\nu(D_x) = \chi_{[0,1]}(x)$ und $\mu(D^y) = 0$, so dass

$$\int_X \nu(D_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 1, \quad \int_Y \mu(D^y)\,\mathrm{d}\nu(y) = 0.$$

Außerdem zeigt dieses Beispiel, dass das Produktmaß nicht mehr eindeutig im Sinne von Satz 2.72 sein kann. Denn wegen Satz 2.79 ist $C \mapsto \int_Y \mu(C^y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ ein weiteres, von $\mu\otimes\nu$ verschiedenes Maß auf $X\times Y$.

Den folgenden Satz (Satz von Fubini) beweisen wir in vier Varianten: jeweils für nicht-negative Funktionen und integrierbare Funktionen, und $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbare und Λ-messbare Funktionen.

Satz 2.84. *Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-endliche Maßräume. Sei $f : X\times Y \to [0,+\infty]$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbar.*

Dann sind die Funktionen $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ und $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{A}$- und $\mathcal{B}$-messbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Beweis. Wegen Satz 2.81 gilt die Behauptung des Satzes für einfache Funktionen $f : X\times Y \to [0,+\infty)$.

Sei nun $f : X\times Y \to [0,+\infty]$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbar. Dann gibt es wegen Satz 2.29 eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen (f_n) mit $f_n \nearrow f$. Dann ist die Funktion $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ als punktweiser Grenzwert der messbaren Funktionen $x \mapsto \int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Analog ist $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{B}$-messbar. Mit monotoner Konvergenz Satz 2.37 bekommen wir

$$\int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \nearrow \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

für alle x und

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} f_n\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X\left(\int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X\left(\lim_{n\to\infty}\int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Analog bekommen wir die zweite Gleichung. □

Satz 2.85. *Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-endliche Maßräume. Sei $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbar und integrierbar bezüglich $\mu\otimes\nu$.*

Dann sind die Funktionen $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ und $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ für μ-fast alle x und ν-fast alle y definiert und integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)&\\ = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)&.\end{aligned}$$

Diese Schreibweise birgt eine kleine Unsauberkeit: die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ muss nicht für alle x ν-integrierbar sein. Die Doppelintegrale sind deshalb wie folgt zu verstehen: Die Menge $N := \{x : \int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) = +\infty\}$ ist eine μ-Nullmenge nach der Behauptung von Satz 2.85, und wir setzen

$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) := \int_{N^c}\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x). \qquad (2.86)$$

Analog verfahren wir mit dem zweiten Doppelintegral.

Beweis von Satz 2.85. Wegen Satz 2.39 ist $|f|$ bezüglich $\mu\otimes\nu$ integrierbar, und Satz 2.84 ergibt $\int_{X\times Y}|f|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$. Nach Satz 2.45 ist die Menge $N := \{x : \int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) = +\infty\}$ eine μ-Nullmenge.

Ist $x \in N^c$ dann gilt

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) + \int_Y -f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Die Funktionen auf der rechten Seite sind $\mathcal{A}$-messbar und μ-integrierbar wegen Satz 2.84. Weiter ist $N \times Y$ eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge. Durch Integration und Anwenden von Satz 2.84 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{N^c} \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{N^c} \left(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) - \int_{N^c} \left(\int_Y -f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{X\times Y} \chi_{N^c\times Y} f^+ \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} \chi_{N^c\times Y} \cdot (-f^-)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) \\
&= \int_{X\times Y} f^+ \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} -f^- \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) \\
&= \int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu).
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Da $\mu(N) = 0$, ist nach der Definition in (2.86)

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{N^c} \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt analog. □

Wir wollen nun noch Sätze analog zu Satz 2.84 und Satz 2.85 formulieren, für Funktionen, die Λ-messbar sind. Wegen $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ ist das eine schwächere Voraussetzung als $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-Messbarkeit.

Lemma 2.88. *Sei $\mu \otimes \nu$ σ-endlich. Sei $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ Λ-messbar. Dann existiert eine Menge $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$ und eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbare Funktion $\tilde{f}$, so dass $f = \tilde{f}$ auf N^c.*

Beweis. Sei zunächst $f = \chi_C$ mit $C \in \Lambda$. Nach Folgerung 2.70 existieren $D, N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $C \cup N = D$ und $(\mu \otimes \nu)(D) = (\mu \otimes \nu)(C)$. Die Behauptung folgt mit $\tilde{f} = \chi_D$. Dann gilt die Behauptung auch für einfache Funktionen. Sei nun f Λ-messbar. Wir approximieren f durch eine Folge (f_n) einfacher Funktionen, die Λ-messbar sind (Folgerung 2.30). Dann gibt es für jedes n eine Nullmenge $N_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und eine (einfache) $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbare Funktion $\tilde{f}_n$ mit $\tilde{f}_n = f_n$ auf N_n^c. Setze $N := \bigcup_{n=1}^\infty N_n$. Dann ist $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$. Die Behauptung folgt mit $\tilde{f} = \limsup_{n\to\infty} \tilde{f}_n$. □

Satz 2.89. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche und vollständige Maßräume mit Produkt $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$. Sei $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ Λ-messbar.*

Dann gilt:

(1) *Für μ-fast alle x ist $y \mapsto f(x,y)$ $\mathcal{B}$-messbar. Weiter ist die (für fast alle x definierte) Abbildung $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar.*

(2) *Für ν-fast alle y ist $x \mapsto f(x,y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Weiter ist die (für fast alle y definierte) Abbildung $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{B}$-messbar.*

(3)
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Beweis. Aus Lemma 2.88 bekommen wir eine $\mu\otimes\nu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und eine $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbare Funktion $\tilde f$ mit $f = \tilde f$ auf N^c. Dann ist $\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} \tilde f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)$. Satz 2.84 angewandt auf χ_N ergibt

$$0 = (\mu\otimes\nu)(N) = \int_X \nu(N_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(N^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Damit ist N_x ein ν-Nullmenge für μ-fast alle x, und N^y ist ein μ-Nullmenge für ν-fast alle y.

Sei $M := \{x : \ \nu(N_x) > 0\}$. Sei $x \in M^c$, also $\nu(N_x) = 0$. Dann ist $f(x,y) = \tilde f(x,y)$ für alle $y \in (N_x)^c$. Nun ist $y \mapsto \tilde f(x,y)$ $\mathcal{B}$-messbar, $\nu(N_x) = 0$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ vollständig, also $y \mapsto f(x,y)$ ist $\mathcal{B}$-messbar, und damit ist das Integral $\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ definiert. Und es gilt $\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$, weil sich $f(x,\cdot)$ und $\tilde f(x,\cdot)$ nur auf der Nullmenge N_x unterscheiden.

Da die Abbildung $x \mapsto \int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar (Satz 2.84), $\mu(M) = 0$ und $(X,\mathcal{A},\mu)$ vollständig ist, ist auch $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Integrieren bezüglich x gibt

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_{M^c} \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{M^c} \left(\int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Analog argumentieren wir für $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$. Die Behauptung folgt mit Satz 2.84 angewandt auf $\tilde f$. □

Satz 2.90. *Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-endliche und vollständige Maßräume mit Produkt $(X\times Y,\Lambda,\mu\otimes\nu)$. Sei $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ Λ-messbar und integrierbar.*

Dann gilt:

(1) Für μ-fast alle x ist $y \mapsto f(x,y)$ ν-integrierbar. Weiter ist die (für fast alle x definierte) Abbildung $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ μ-integrierbar.

(2) Für ν-fast alle y ist $x \mapsto f(x,y)$ μ-integrierbar. Weiter ist die (für fast alle y definierte) Abbildung $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ ν-integrierbar.

(3)

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zu Satz 2.85. Da f integrierbar ist, sind auch f^+ und $-f^-$ integrierbar. Wir wenden Satz 2.89 auf $|f|$, f^+ und $-f^-$ an. Dann gibt es eine μ-Nullmenge N, so dass gilt: $y \mapsto f(x,y)$ ist $\mathcal{B}$-messbar und integrierbar für alle $x \in N^c$, und die Abbildungen $x \mapsto \chi_{N^c}\int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)$, $x \mapsto \chi_{N^c}\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$, $x \mapsto \chi_{N^c}\int_Y -f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ sind $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Wir können nun wie in (2.87) argumentieren. □

Beispiel 2.91. *[Els05, Beispiel V.2.3] Für die Funktion*

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\arctan(\frac{x}{y})$$

sind die iterierten Integrale

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4},\quad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = +\frac{\pi}{4},$$

also kann f nicht λ_1-integrierbar auf $(0,1)^2$ sein.

Lemma 2.92. *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ σ-endlich und $f : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbar. Definiere*

$$A_f := \{(x,t) :\ 0 \le t < f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$(\mu\otimes\lambda_1)(A^f) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen

$$A_f = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}} (\{x :\ f(x) > t\} \times [0,t])$$

ist $A_f \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Da $\lambda_1((A_f)_x) = f(x)$, folgt die Behauptung mit Satz 2.81.

□

Lemma 2.93. *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ σ-endlich und $f : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbar. Dann gilt*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x:\ f(x) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t),$$

wobei $t \mapsto \mu(\{x:\ f(x) > t\})$ $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist.

Beweis. Sei $Y := [0,+\infty)$. Es gilt $f(x) = \int_Y \chi_{(0,f(x))} \,\mathrm{d}\lambda_1$. Für $t \geq 0$ und $x \in X$ ist

$$\chi_{(0,f(x))}(t) = \chi_{(t,+\infty)}(f(x)).$$

Anwenden von Satz 2.84 gibt

$$\begin{aligned}
\int_X f \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \left(\int_Y \chi_{(0,f(x))}(t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_Y \left(\int_X \chi_{(0,f(x))}(t) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_Y \left(\int_X \chi_{(t,+\infty)}(f(x)) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\lambda_1(t) \\
&= \int_Y \mu(\{x:\ f(x) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t).
\end{aligned}$$

□

Folgerung 2.94. *Sei $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ $\mathcal{L}(n)$-messbar. Dann gilt für alle $s > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\lambda_1(x) = s \int_{\mathbb{R}} f(sx) \,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Beweis. Sei $t \geq 0$. Dann ist

$$\{y:\ f(y) > t\} = s \cdot \{x:\ f(sx) > t\}.$$

Wegen Satz 1.83 ist

$$\lambda_1(\{y:\ f(y) > t\}) = \lambda_1(s\{x:\ f(sx) > t\}) = s\lambda_1(\{x:\ f(sx) > t\}).$$

Integrieren bezüglich t ergibt mit Lemma 2.93 die Behauptung. □

Folgerung 2.95. *Sei $g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ $\mathcal{L}(n)$-messbar. Dann gilt*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\lambda_1 \right)^2 = 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{(0,1)} g(xy)g(y)y \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \,\mathrm{d}\lambda_1(y).$$

Beweis. Mit Satz 2.84 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{(0,y)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{(x,\infty)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{(y,\infty)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y),\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt nur die Buchstaben x und y vertauscht wurden. Dann bekommen wir

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\lambda_1\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\int_{(0,y)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\int_{(0,1)} yg(xy)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Folgerung 2.94 angewendet haben. □

Damit können wir folgendes Integral berechnen:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= 2\int_0^1\int_{\mathbb{R}} \exp(-(x^2+1)y^2)y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^1 \left[(-\frac{1}{2})\frac{1}{x^2+1}\exp(-(x^2+1)y^2)\right]_{y=0}^{y=\infty}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2.7 Approximationssätze

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum.

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass integrierbare Funktionen in der $\mathcal{L}^1(\mu)$-Norm durch Funktionen mit "besseren" Eigenschaften approximiert werden können.

Satz 2.96. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine beschränkte Funktion $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$.*

Beweis. Setze $f_n := \max(-n, \min(f, n))$. Dann ist f_n eine messbare und beschränkte Funktion. Mithilfe der dominierten Konvergenz Satz 2.56 folgt $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. □

Satz 2.97. *Sei μ σ-endlich. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine einfache Funktion $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\mu(\{x : f_\varepsilon(x) \neq 0\}) < +\infty$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$.*

Beweis. Nach Folgerung 2.30 existiert eine Folge einfacher Funktionen (ϕ_n) mit $\phi_n \to f$ und $|\phi_n| \leq |f|$. Wegen der σ-Endlichkeit existiert eine aufsteigende Folge (X_j) mit $\mu(X_j) < \infty$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X$. Mit dominierter Konvergenz Satz 2.56 bekommen wir $\|\chi_{X_n}\phi_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. □

Sei nun (X, d) ein metrischer Raum.

Lemma 2.98. *Sei $A \subseteq X$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto d(x, A)$ stetig, wobei*

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Beweis. Sei $y \in A$, $x_1, x_2 \in X$. Dann ist

$$d(x_1, A) \leq d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y).$$

Nach bilden den Infimums über $y \in A$ auf der rechten Seite bekommen wir $d(x_1, A) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, A)$. □

Sei Y ein weiterer metrischer Raum. Wir definieren

$$C(X, Y) := \{f : X \to Y : \ f \text{ stetig } \}.$$

Lemma 2.99 (Urysohn-Funktion)**.** *Seien $A, B \subseteq X$ nicht leere, abgeschlossene, disjunkte Mengen. Dann existiert $\phi \in C(X, [0,1])$ mit $\phi|_A = 0$, $\phi|_B = 1$, $\phi(x) \in (0,1)$ für alle $x \in (A \cup B)^c$.*

Beweis. $\phi := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. □

Satz 2.100. *Sei $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Sei μ σ-endlich und regulär (vgl. Satz 1.69). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap C(X, \mathbb{R})$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung zuerst für charakteristische Funktionen. Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Regularität existiert eine kompakte Menge K und eine offene Menge O mit $K \subseteq A \subseteq O$ und $\mu(O \backslash K) < \varepsilon$. Wegen Lemma 2.99 existiert $\phi \in C(X, [0,1])$ mit $\phi|_K = 1$ und $\phi|_{O^c} = 0$. Es folgt

$$\|\chi_A - \phi\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = \int \chi_{O\backslash K} |\chi_A - \phi| \, \mathrm{d}\mu \leq 1 \cdot \mu(O \setminus K) = \varepsilon.$$

Damit ist ϕ integrierbar. Wegen Satz 2.97 folgt die Behauptung für alle integrierbare Funktionen. □

Für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x : \ f(x) \neq 0\}}$$

der Support (oder Träger). Wir definieren

$$C_c(X,\mathbb{R}) := \{f \in C(X,\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt } \}$$

die Menge der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Diese Menge ist kein abgeschlossener Teilraum von $C(X,\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm. Ist $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C_c(O,\mathbb{R})$, dann ist die Funktion $\hat{f}$ definiert durch

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in O, \\ 0 & \text{falls } x \notin O \end{cases}$$

stetig und gehört zu $C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ sind λ^1-integrierbar.

Der zugrundeliegende Maßraum des nächsten Resultats ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$.

Satz 2.101. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.100 reicht es, die Behauptung für charakteristische Funktionen zu beweisen. Sei also $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der σ-Endlichkeit existiert eine beschränkte Teilmenge $A_\varepsilon \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes (Satz 1.69) existiert eine kompakte Menge K und eine offene Menge O mit $K \subseteq A_\varepsilon \subseteq O$ und $\mu(O \setminus K) < \varepsilon/2$. Die offene Menge kann beschränkt gewählt werden. Die Funktion ϕ aus Lemma 2.99 erfüllt $\phi \in C(\mathbb{R}^n,[0,1])$ mit $\phi|_K = 1$, $\phi|_{O^c} = 0$ und $\|\chi_{A_\varepsilon} - \phi\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon/2$. Damit ist $\operatorname{supp}\phi \subseteq \bar{O}$, und ϕ hat kompakten Träger. □

Dieser Satz wird den Beweis im nächsten Abschnitt vereinfachen: zuerst wird die Behauptung für stetige Funktionen gezeigt, dann für integrierbare. Allerdings müssen wir den Träger von f_ε noch etwas besser kontrollieren können. Für die folgenden Resultate benutzen wir die Maximumnorm auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.102. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Dann gibt es eine aufsteigende Folge kompakter Mengen (K_j) mit $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = O$. Weiter gibt es eine aufsteigende Folge (ψ_j) nichtnegativer Funktionen $\psi_j \in C_c(O,\mathbb{R})$ mit $\psi_j(x) \nearrow 1$ für alle $x \in O$.*

Beweis. Setze

$$K_j := \left\{ x \in \bar{O} : \ \|x\|_\infty \le j,\ d(x, \partial O) \ge \frac{1}{j} \right\},$$

was wegen Lemma 2.98 abgeschlossen ist. Dann gilt $K_j \subseteq O$ und $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = O$. Weiter sei $A_j := \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x,K_j) < \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\}$. Dann ist A_j offen und $A_j \subseteq K_{j+1}$. Sei $\psi_j \in C(\mathbb{R}^n,[0,1])$ aus Lemma 2.99 mit $\psi_j = 0$ auf A_j^c und $\psi_j = 1$ auf K_j. Dann ist $\operatorname{supp}\psi_j \subseteq \overline{A_j} \subseteq K_{j+1}$. Daraus folgt dann $\psi_j \le \psi_{j+1}$. □

Satz 2.103. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq O$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f_\varepsilon \in C_c(O, \mathbb{R})$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon$.*

Beweis. Nach Satz 2.101 existiert $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon/2$. Wegen $f = \chi_O f$ ist

$$\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_O + \chi_{O^c})|f - \tilde{f}| \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f - \chi_O \tilde{f}| + \chi_{O^c}|\tilde{f}| \,\mathrm{d}\lambda_n,$$

woraus $\|f - \chi_O \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon/2$ folgt. Allerdings ist $\chi_O f$ nicht stetig. Sei (ψ_j) die in Lemma 2.102 konstruierte Folge. Dann ist $\psi_j \tilde{f} \in C_c(O, \mathbb{R})$ für alle j, und mit dominierter Konvergenz folgt $\|\psi_j \tilde{f} - \chi_O \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \to 0$. Die Behauptung folgt mit $f_\varepsilon := \psi_j \tilde{f}$ für ein j, so dass $\|\psi_j \tilde{f} - \chi_O \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \leq \varepsilon/2$. □

Aufgabe 2.104. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien $K, U \subseteq X$ mit U offen, K kompakt und $K \subseteq U$. Dann ist*

$$0 < d(K, \partial U) = d(K, U^c) := \inf\{d(x, z) : \; x \in K, \; z \in U^c\}.$$

2.8 Transformationssatz

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Koordinatentransformation für Integrale der Bauart

$$\int_V f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \,\mathrm{d}\lambda_n$$

zu beweisen, wobei $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Wir arbeiten hier wieder im Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.105. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere, offene Mengen. Es sei $\Phi : U \to V$ bijektiv. Sind Φ und Φ^{-1} stetig differenzierbar, dann heißt Φ C^1-Diffeomorphismus.*

Die Ableitung von Φ ist die Matrix

$$\Phi'(x) = \left(\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1\dots n}$$

Es folgt, dass $\Phi'(x)$ und $\Phi^{-1}(y)$ invertierbar sind: Differenzieren der Gleichung $\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x$ ergibt $(\Phi^{-1})'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) = I_n$, woraus $\Phi'(x)^{-1} = (\Phi^{-1})'(\Phi(x))$ folgt.

Die Ableitungen Φ' und $(\Phi^{-1})'$ sind Abbildungen nach $\mathbb{R}^{n,n}$, den wir wie folgt mit einer Norm versehen.

Definition 2.106. *Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ definiere*

$$\|A\|_\infty := \max_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_\infty.$$

Für die induzierte Matrixnorm gilt:

- $A \mapsto \|A\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{n,n}$,
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ (Zeilensummennorm),
- $\|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$,
- $\|AB\|_\infty \le \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Satz 2.107 (Mittelwertsatz)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ stetig differenzierbar. Es seien $x_1, x_2 \in U$, so dass $tx_1 + (1-t)x_2 \in U$ für alle $t \in (0,1)$ ist. Dann gilt*

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_\infty \le \sup_{t \in (0,1)} \|\Phi'(tx_1 + (1-t)x_2)\|_\infty \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

Anwenden des Mittelwertsatzes auf $h \mapsto \Phi(x+h) - \Phi'(x)h$ ergibt

$$\|\Phi(x+h) - \Phi(x) - \Phi'(x)h\|_\infty \le \sup_{t \in (0,1)} \|\Phi'(x+th) - \Phi'(x)\|_\infty \|h\|_\infty \quad (2.108)$$

wenn $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition 2.109. *Wir definieren den Würfel mit Seitenlänge $2r$ und Mittelpunkt x_0 als*

$$W(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\|_\infty \le r\}.$$

Damit folgt $\|x_1 - x_2\|_\infty \le 2r$ für alle $x_1, x_2 \in W(x_0, r)$ und $\lambda_n(W(x_0, r) = (2r)^n$.

Seien $x, x_0 \in U$. Ist $\|x - x_0\|_\infty$ klein, dann folgt aus der Differenzierbarkeit

$$\Phi(x) \approx \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0).$$

Ist $W \subseteq U$ ein kompakter Würfel mit $x_0 \in W$, dann erwarten wir

$$\Phi(W) \approx \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(W - x_0)$$

und damit

$$\lambda_n(\Phi(W)) \approx |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W).$$

Diese Idee wird im nächsten Lemma rigoros bewiesen.

Lemma 2.110. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $x_0 \in U$ gegeben. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle Würfel W mit Seitenlänge kleiner als δ_1 und $x_0 \in W \subseteq U$ gilt*

$$\left|\lambda_n(\Phi(W)) - |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W)\right| \leq \varepsilon\lambda_n(W).$$

Beweis. Definiere

$$T := \Phi'(x_0), \;\; L(x) := \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0).$$

Sei $x_0 \in U$. Dann existiert ein $\rho > 0$, so dass $V_0 := W(\Phi(x_0), \rho) \subseteq V$. Hier ist wichtig, dass V_0 kompakt und konvex ist. Wähle $\delta_0 > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - x_0\|_\infty \leq \delta_0$ gilt

$$x \in U, \;\; \Phi(x), L(x) \in V_0. \tag{2.111}$$

Setze

$$M := \max_{y \in V_0} \|(\Phi^{-1})'(y)\|_\infty. \tag{2.112}$$

Dann ist auch $\|T^{-1}\|_\infty = \|\Phi'(x_0)^{-1}\|_\infty = \|(\Phi^{-1})'(\Phi(x_0))\|_\infty \leq M$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ so, dass

$$|(1 \pm 2\varepsilon_1)^n - 1| \leq \varepsilon. \tag{2.113}$$

Dann existiert ein $\delta_1 \in (0, \delta_0)$, so dass

$$\sup_{x \in W(x_0, \delta_1)} \|\Phi'(x) - \Phi'(x_0)\|_\infty \leq M^{-1}\varepsilon_1.$$

Daraus folgt für $x \in W(x_0, \delta_1)$ mit dem Mittelwertsatz (2.108)

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - L(x)\|_\infty &= \|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\|_\infty \\ &\leq \sup_{\tilde{x} \in W(x_0, \delta_1)} \|\Phi'(\tilde{x}) - \Phi'(x_0)\|_\infty \|x - x_0\|_\infty = M^{-1}\varepsilon_1 \|x - x_0\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Sei W ein Würfel mit Seitenlänge $\delta \in (0, \delta_1)$ und $x_0 \in W \subseteq U$. Es folgt $\|x - x_0\|_\infty \leq \delta \leq \delta_0$ für alle $x \in W$. Dann ist $\Phi(W), L(W) \subseteq V_0$.

(1) Wir zeigen, dass $T^{-1}\Phi(W)$ in einem Würfel mit Seitenlänge $(1 + 2\varepsilon_1)\delta$ enthalten ist. Sei $x \in W$. Dann folgt aus (2.112) und (2.114)

$$\|T^{-1}(\Phi(x) - L(x))\|_\infty \leq \|T^{-1}\|_\infty \|\Phi(x) - L(x)\|_\infty \leq \varepsilon_1\delta.$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} T^{-1}(\Phi(W) - \Phi(x_0)) &\subseteq T^{-1}(L(W) - \Phi(x_0)) + W(0, \varepsilon_1\delta) \\ &= W - x_0 + W(0, \varepsilon_1\delta). \end{aligned}$$

Dabei ist $W + W(0, \varepsilon_1\delta)$ ein Würfel mit Seitenlänge $(1 + 2\varepsilon_1)\delta$. Es folgt mit Satz 1.83 und (2.113)

$$\begin{aligned} \lambda_n(\Phi(W)) &\leq |\det T|((1 + 2\varepsilon_1)\delta)^n \\ &= |\det T|(1 + 2\varepsilon_1)^n \lambda_n(W) \leq (1 + \varepsilon)|\det T|\lambda_n(W). \end{aligned}$$

(2) Sei $\tilde{W} = W(\tilde{x}, (1 - 2\varepsilon_1)\delta/2) \subseteq W$ der Würfel mit Seitenlänge $(1 - 2\varepsilon_1)\delta$, der den gleichen Mittelpunkt wie W hat. Wir zeigen nun, dass $\Phi^{-1}(L(\tilde{W})) \subseteq W$ ist. Dazu sei $x \in \tilde{W}$. Dann gilt mit dem Mittelwertsatz, (2.111) und (2.114)

$$\begin{aligned} \|\Phi^{-1}(L(x)) - \Phi^{-1}(\Phi(x))\|_\infty &\leq \sup_{y \in V_0} \|(\Phi^{-1})'(y)\|_\infty \cdot \|L(x) - \Phi(x)\|_\infty \\ &\leq MM^{-1}\varepsilon_1\|x - x_0\|_\infty = \varepsilon_1\|x - x_0\|_\infty \leq \varepsilon_1\delta. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|\Phi^{-1}(L(x)) - \tilde{x}\|_\infty \leq \varepsilon_1\delta + \|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \varepsilon_1\delta + (1 - 2\varepsilon_1)\delta/2 = \delta/2$$

und

$$\Phi^{-1}(L(\tilde{W})) \subseteq \tilde{x} + W(0, \delta/2) = W.$$

Es folgt $L(\tilde{W}) \subseteq \Phi(W)$ nach Anwenden von Φ, und mit Satz 1.83 bekommen wir

$$\lambda_n(\Phi(W)) \geq |\det T|\lambda_n(\tilde{W}) = |\det T|\lambda_n(W)(1 - 2\varepsilon_1)^n \geq (1 - \varepsilon)|\det T|\lambda_n(W).$$

Damit erhalten wir

$$\big|\lambda_n(\Phi(W)) - |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W)\big| \leq \varepsilon|\det T|\lambda_n(W),$$

was die Behauptung ist. □

Lemma 2.115. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist Φ $\mathcal{L}(n)|_U - \mathcal{L}(n)|_V$-messbar. Ist $N \subseteq V$ eine λ_n-Nullmenge, dann ist auch $\Phi^{-1}(N)$ eine λ_n-Nullmenge.*

Hierbei ist $\mathcal{L}(n)|_U$ die Einschränkung von $\mathcal{L}(n)$ auf Teilmengen von U definiert durch

$$\mathcal{L}(n)|_U = \{A \subseteq U : \; A \in \mathcal{L}(n)\} = \{A \cap U : \; A \in \mathcal{L}(n)\}.$$

Beweis. Ist $O \subseteq V$ offen, dann ist $\Phi^{-1}(O)$ offen. Damit folgt, dass Φ $\mathcal{B}(U)-\mathcal{B}(V)$-messbar ist. Sei nun $A \in \mathcal{L}(n)|_V$. Nach Satz 1.70 existiert $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $N \in \mathcal{L}(n)$ mit $\lambda_n(N) = 0$ und $A = K \cup N$. Indem wir K und N durch $K \cap V$ und $N \cap V$ ersetzen, können wir annehmen, dass $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_V = \mathcal{B}(V)$ und $N \in \mathcal{L}(n)|_V$ ist. Aus der Zerlegung bekommen wir auch, dass $\Phi^{-1}(A) = \Phi^{-1}(K) \cup \Phi^{-1}(N)$ ist. Da $\Phi^{-1}(K) \in \mathcal{B}(U)$ ist, muss noch $\Phi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(n)|_U$ nachgewiesen werden.

Sei $x \in V$. Dann ist $d(x, \partial V) > 0$ und $W_x := W(x, d(x, \partial V)/2) \subseteq V$. Es folgt $V = \bigcup_{x \in V \cap \mathbb{Q}^n} W_x$. Sei $x \in V \cap \mathbb{Q}^n$. Da W_x kompakt und Φ^{-1} stetig differenzierbar ist, ist $(\Phi^{-1})'$ auf W_x beschränkt. Da W_x konvex ist, ist Φ^{-1} Lipschitz-stetig auf W_x wegen Satz 2.107. Nach Satz 1.75 ist dann $\Phi^{-1}(W_x \cap N)$ eine Nullmenge. Da $\Phi^{-1}(N) = \bigcup_{x \in V \cap \mathbb{Q}^n} \Phi^{-1}(W_x \cap N)$ ist $\Phi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(n)|_U$ und $\lambda_n(\Phi^{-1}(N)) = 0$. $\square$

Folgerung 2.116. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $f : V \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}(n)|_V - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar. Dann ist $f \circ \Phi$ $\mathcal{L}(n)|_U - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar.*

Satz 2.117. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $f \in C_c(V, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\int_V f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Beweis. Da $\operatorname{supp} f$ kompakt ist, ist f beschränkt und integrierbar auf V. Weiter ist $\Phi^{-1}(\operatorname{supp} f)$ kompakt, damit ist $|\det \Phi'|$ beschränkt auf $\Phi^{-1}(\operatorname{supp} f)$, und $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ ist integrierbar auf V.

Wir beweisen folgende Aussage: es gilt

$$\int_{\Phi(W)} f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_W (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_n \tag{2.118}$$

für alle kompakten Würfel $W \subseteq U$.

Daraus folgt die Behauptung: Wegen Aufgabe 2.104 ist $d(\operatorname{supp}(f \circ \Phi), U^c) =: r > 0$. Wie im Beweis von Satz 1.14 überdecken wir den $\mathbb{R}^n$ durch eine disjunkte Vereinigung halboffener Würfel (W_j) der Seitenlänge $r/2$, siehe (1.15). Ist $W_j \cap \operatorname{supp}(f \circ \Phi) \neq \emptyset$ dann ist $\overline{W_j} \subseteq U$ wegen der Definition von r, und die Formel (2.118) gilt für $\overline{W_j}$. Aufsummieren über alle j mit $W_j \cap \operatorname{supp}(f \circ \Phi) \neq \emptyset$ ergibt dann die Behauptung.

Sei nun $W \subseteq U$ ein kompakter Würfel. Wir definieren

$$\Delta(W) := \int_{\Phi(W)} f \,\mathrm{d}\lambda_n - \int_W (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Wir zerlegen W in 2^n Würfel (W_j) mit halber Seitenlänge. Diese Würfel haben nur Randpunkte gemeinsam, und so ist $\lambda_n(W_j \cap W_{j'}) = 0$ für alle $j \neq j'$. Wegen Lemma 2.115 angewendet auf Φ^{-1} ist auch $\lambda_n(\Phi(W_j) \cap \Phi(W_{j'})) = \lambda_n(\Phi(W_j \cap W_{j'})) = 0$ für $j \neq j'$. Aus der Additivität der Integrale bekommen wir

$$\Delta(W) = \sum_{j=1}^{2^n} \Delta(W_j)$$

und

$$\frac{|\Delta(W)|}{\lambda_n(W)} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{|\Delta(W_j)|}{\lambda_n(W_j)}.$$

Damit gibt es ein W_j mit $\frac{\Delta(W_j)}{\lambda_n(W_j)} \geq \frac{|\Delta(W)|}{\lambda_n(W)}$.

Damit konstruieren wir uns eine absteigende Folge (W_k) kompakter Würfel mit $W_1 = W$, $\lambda_n(W_k) \searrow 0$, so dass $\frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)}$ monoton wachsend ist. Wir zeigen $\lim_{k\to\infty} \frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)} = 0$.

Da die W_k kompakt sind, existiert $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} W_k$ (Aufgabe 2.119). Sei $y_0 := \Phi(x_0)$. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\Delta(W_k) = \int_{\Phi(W_k)} f - f(y_0) \,\mathrm{d}\lambda_n - &\\ \int_{W_k} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| - (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \,\mathrm{d}\lambda_n &\\ + \int_{\Phi(W_k)} f(y_0) \,\mathrm{d}\lambda_n - \int_{W_k} (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \,\mathrm{d}\lambda_n.&\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass diese drei Summanden beliebig klein werden. Sei $\varepsilon > 0$. Da W und $\Phi(W)$ kompakt sind, bekommen wir aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f, $f \circ \Phi$ und $|\det \Phi'|$, dass

$$\int_{\Phi(W_k)} |f - f(y_0)| \,\mathrm{d}\lambda_n \leq \varepsilon \lambda_n(\Phi(W_k)),$$

$$\int_{W_k} \Big|(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| - (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)|\Big| \,\mathrm{d}\lambda_n \leq \varepsilon \lambda_n(W_k)$$

für alle k groß genung. Durch zweimaliges Anwenden von Lemma 2.110 bekommen wir

$$\lambda_n(\Phi(W_k)) \leq 2\, |\det \Phi'(x_0)| \lambda_n(W_k)$$

und

$$\left| \int_{\Phi(W_k)} f(y_0) \,\mathrm{d}\lambda_n - \int_{W_k} (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \,\mathrm{d}\lambda_n \right|$$
$$= \cdot \left| \lambda_n(\Phi(W_k)) - |\det \Phi'(x_0)| \lambda_n(W_k) \right| \leq \varepsilon |f(y_0)| \lambda_n(W_k)$$

für alle k groß genung. Es folgt

$$|\Delta(W_k)| \leq \varepsilon \,\lambda_n(W_k) \left(1 + 2\, |\det \Phi'(x_0)| + |f(y_0)|\right)$$

für alle k groß genug. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{k\to\infty} \frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)} = 0$ und damit $|\Delta(W_k)| = 0$ für alle k, und insbesondere $\Delta(W) = 0$. □

Aufgabe 2.119. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei (K_j) eine Folge kompakter Mengen mit $K_j \supseteq K_{j+1}$ für alle j. Dann ist $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset$.*

Satz 2.120 (Transformationssatz)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $f : V \to \mathbb{R}$. Dann ist f integrierbar auf U genau dann, wenn $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ auf V integrierbar ist. In diesem Falle gilt*

$$\int_V f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Beweis. (1) Sei f integrierbar. Wegen Folgerung 2.116 ist $g := (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ $\mathcal{L}(n)-\mathcal{B}^1$-messbar. Nach Satz 2.103 können wir f durch eine Folge von $C_c(V, \mathbb{R})$-Funktionen approximieren, die nach Satz 2.58 eine fast überall konvergente Teifolge hat. Es gibt also eine Folge (f_k) mit $f_k \in C_c(V)$, $\|f - f_k\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \to 0$ und $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in V \setminus N$, wobei $N \subseteq V$ eine λ_n-Nullmenge ist.

Da $\Phi^{-1}(N)$ eine λ_n-Nullmenge ist, folgt auch

$$g_k := (f_k \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \to (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| = g$$

λ_n-fast überall auf U.

Wegen Satz 2.117 gilt $\int_V f_k \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U g_k \,\mathrm{d}\lambda_n$. Da (f_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(\lambda_n)$ ist, ist auch (g_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(\lambda_n)$. (Hier haben wir stillschweigend f_k und g_k mit Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt.) Damit existiert $G \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ mit $\|g_k - G\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \to 0$. Da eine Teilfolge von (g_k) λ_n-fast überall gegen G konvergiert, folgt $g = G$ λ_n-fast überall und $g = (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ ist integrierbar. Weiter erhalten wir

$$\int_V f \,\mathrm{d}\lambda_n = \lim_{k\to\infty} \int_V f_k \,\mathrm{d}\lambda_n$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_U g_k \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U G \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \,\mathrm{d}\lambda_n.$$

(2) Sei nun $g = (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ integrierbar. Nach Teil (1) angewendet auf $\Psi := \Phi^{-1}$ ist dann auch $(g \circ \Psi)|\det \Psi'|$ integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_U g \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_V (g \circ \Psi)|\det \Psi'| \,\mathrm{d}\lambda_n \\
&= \int_V f(\Phi(\Psi(x))) \underbrace{|\det \Phi'(\Psi(x))| \cdot |\det \Psi'(x)|}_{=1} \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \\
&= \int_V f \,\mathrm{d}\lambda_n,
\end{aligned}$$

was die Behauptung ist. □

Folgerung 2.121 (Polarkoordinaten 2d)**.** *Definiere*

$$\Phi(r, \phi) := \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist f integrierbar genau dann wenn $(r, \phi) \mapsto r \cdot (f \circ \Phi)(r, \phi)$ auf $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi.$$

Beweis. Das folgt aus dem Transformationssatz, Satz 2.120, und dem Satz von Fubini, Satz 2.89. Wir setzen

$$U := (0, \infty) \times (0, 2\pi), \quad V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : \ x \geq 0\}.$$

Dann ist $\Phi : U \to V$ bijektiv und differenzierbar. Weiter ist

$$\det(\Phi'(r, \phi)) = \det \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = r.$$

Also ist Φ' auf U invertierbar, und Φ ist ein Diffeomorphismus. Da die Ränder von U und V Nullmengen sind, folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.122. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich und $f : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbar. Dann gilt*

$$\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = p \int_{(0,+\infty)} t^{p-1} \mu(\{x : \ f(x) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)$$

für alle $p > 1$.

Beweis. Aus Lemma 2.93 bekommen wir

$$\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x:\ f(x)^p > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Mit $t = \Phi(s) := s^p$ ist

$$\int_{(0,+\infty)} \mu(\{x:\ f(x) > t^{1/p}\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) = \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x:\ f(x) > s\}) \cdot ps^{p-1} \,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

□

2.9 $\mathcal{L}^p$- und L^p-Räume

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.123. *Für $p \in [1, \infty)$ definiere*

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar und } \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty),$$

mit der Halbnorm $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} := (\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu)^{1/p}$. Für $p = \infty$ definiere

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar und } \exists M > 0 \text{ mit } |f(x)| \le M \ \mu\text{-fast überall}\}$$

mit der Halbnorm

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf_{A \in \mathcal{A}:\ \mu(A)=0} \ \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)|.$$

Analog werden die Räume $\mathcal{L}^p(\mu)$ für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ definiert.

Beispiel 2.124.

- *Ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, dann gilt $|f(x)| \le \|f\|_{L^\infty}$ für μ-fast alle $x \in X$.*
- *Für $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ folgt daraus $\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$.*
- *Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ für ein $p \in [1, +\infty]$. Dann ist $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ μ-fast überall.*

  Damit ist $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Für $p < \infty$ müssen wir noch die Dreiecksungleichung nachweisen.
- *Seien $p, q \in (1, +\infty)$. Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, dann ist $|f|^{p/q} \in \mathcal{L}^q(\mu)$:*

$$\|f\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} = \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int (|f|^{p/q})^q \,\mathrm{d}\mu = \left\| |f|^{p/q} \right\|^q_{L^q(\mu)}.$$

Lemma 2.125. *Der Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein Vektorraum $\forall p \in [1, \infty]$.*

Beweis. Sei $p \in [1, +\infty)$. Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Aus der Konvexität von $x \mapsto |x|^p$ bekommen wir

$$|f_1(x) + f_2(x)|^p \le 2^{p-1}(|f_1(x)|^p + |f_2(x)|^p).$$

Dann folgt $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^p(\mu)$ aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals. $\square$

Lemma 2.126 (Youngsche Ungleichung)**.** *Es seien $a, b \ge 0$, $p, q \in (1, +\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Beweis. Sei $a > 0$, $b > 0$. Die Abbildung $x \mapsto \log(x)$ ist konkav auf $(0, +\infty)$, d.h., $\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda \log x + (1-\lambda) \log y$ für alle $x, y \in (0, +\infty)$, $\lambda \in (0, 1)$. Daraus folgt

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \ge \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) = \log(ab).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Monotonie von exp. $\square$

Lemma 2.127 (Höldersche Ungleichung)**.** *Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $1/p + 1/q = 1$, $p, q \in [1, +\infty]$ mit der Konvention $1/\infty = 0$, dann ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt*

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(\mu)}.$$

Beweis. Die Behauptung gilt, falls f oder g μ-fast überall gleich Null ist. Ist $p = 1$, $q = \infty$, dann gilt wegen Beispiel 2.124

$$\int |fg| \, \mathrm{d}\mu \le \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \int |f| \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}.$$

Sei nun $p, q \in (1, \infty)$. Weiter sei $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = \|g\|_{\mathcal{L}^q(\mu)} = 1$. Aus der Youngschen Ungleichung folgt dann

$$\int |fg| \, \mathrm{d}\mu \le \frac{1}{p} \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \int |g|^q \, \mathrm{d}\mu = 1.$$

Sei nun $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} > 0$, $\|g\|_{\mathcal{L}^q(\mu)} > 0$. Dann gilt

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}} \frac{g}{\|g\|_{\mathcal{L}^q(\mu)}} \right\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le 1,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel 2.128. *Im Allgemeinen ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ keine Teilmenge von $\mathcal{L}^q(\mu)$ für $p \neq q$. Aus der Hölder-Ungleichung bekommt man aber $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$ für alle $r \in (p,q)$: Es gilt*

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\mu)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(\mu)}$$

mit $\theta \in (0,1)$ so, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Lemma 2.129 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Es sei $p \in [1,\infty)$. Dann gilt*

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Beweis. Für $p=1$ folgt die Ungleichung direkt aus der Dreiecksungleichung für $|\cdot|$. Sei also nun $p>1$. Wir beweisen die Ungleichung

$$\|f+g\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} \leq \|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mu)} (\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}).$$

Es gilt erst einmal

$$\begin{aligned}\|f+g\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} &= \int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int \left|(f+g)\cdot|f+g|^{p-1}\right| \mathrm{d}\mu \\ &= \|f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \\ &\leq \|f(f+g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|g(f+g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}.\end{aligned}$$

Definiere $q := \frac{p}{p-1} \in (1,\infty)$, dann folgt $1/p + 1/q = 1$. Damit ist die Hölder-Ungleichung anwendbar, um wie folgt abzuschätzen

$$\|f(f+g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|(f+g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mu)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mu)}.$$

Es folgt

$$\|f+g\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} \leq (\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}) \|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mu)},$$

da $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum ist, ist $\|f+g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} < \infty$, und die Behauptung folgt mit Division durch $\|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mu)}$. □

Der folgende Satz ist die Verallgemeinerung von Satz 2.58 für den Fall $p>1$.

Satz 2.130 (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p(\mu)$)**.** *Sei $p \in [1,+\infty]$. Es sei (f_n) eine Cauchyfolge aus $\mathcal{L}^p(\mu)$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} < \varepsilon$ für alle $n,m > N$. Dann existiert $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \to 0$.*

Weiter existiert ein $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und eine Teilfolge (f_{n_k}), so dass $f_{n_k}(x) \to f(x)$ und $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ für alle k und μ-fast alle x.

Beweis. (1) Sei $p < +\infty$. Der Beweis geht wie der von Satz 2.58, wenn man nur $|f_{n+1} - f_n|$ und $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ durch $|f_{n+1} - f_n|^p$ und $\|f_m - f_n\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)}$ ersetzt.

(2) Sei $p = +\infty$. Sei (f_n) eine CF in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Da die Vereinigung abzählbarer Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, existiert ein $M > 0$ und eine Nullmenge A, so dass für alle n, m

$$|f_n(x)| \le M, \quad |f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \quad \forall x \in X \setminus A$$

ist. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & x \in X \setminus A \\ 0 & x \in A. \end{cases}$$

Dieses f ist messbar. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert N, so dass $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ und alle $x \in X \setminus A$. Daraus folgt $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und alle $x \in X \setminus A$ und

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^\infty} \le \sup_{x \in X\setminus A} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

für alle $n > N$. Also $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \to 0$. □

Lemma 2.131. *Es sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_n \to f$ μ-fast überall und $\|f_n\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \to \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$. Dann folgt $\|f_n - f\||_{\mathcal{L}^p(\mu)} \to 0$.*

Beweis. [Nov72] Die Funktionen $g_n := 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ sind nicht-negativ, und es folgt $g_n \to 2^p|f|^p$ μ-fast überall. Mit Fatou's Lemma Satz 2.54 bekommen wir

$$\begin{aligned} 2^p \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu &\le \liminf_{n\to\infty} \int 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &= 2^p \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} \,\mathrm{d}\mu = 0$. □

Es bleibt nur noch, aus den halbnormierten Räumen Banachräume zu machen.

Lemma 2.132. *Sei X ein Vektorraum mit einer Halbnorm $\|\cdot\|$. Sei $N := \{x : \|x\| = 0\}$. Dann gilt:*

(1) N ist ein Unterektorraum.

(2) Die Relation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$ ist eine Äquivalenzrelation.

(3) Der Quotientenraum X/N (als Menge aller Äquivalenzklassen unter $\sim$ auf X) ist ein Vektorraum versehen mit der Addition $[x]+[y] := [x+y]$ und Skalarmultiplikation $t\cdot[x] := [t\cdot x]$.

(4) Durch

$$\|[x]\|_{X/N} := \|x\|$$

ist eine Norm gegeben.

(5) Ist X vollständig, dann ist X/N ein Banachraum.

Beweis. (1) Folgt aus den Halbnormeigenschaften. (2) Folgt aus (1).

(3) Es ist zu zeigen, dass die Vektorraumoperationen wohldefiniert sind, das heißt, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Seien also $x_1, y_1 \in X$, $x_2 \in [x_1]$, $y_2 \in [x_2]$. Dann sind $x_1 - x_2 \in N$, $y_1 - y_2 \in N$, also auch $(x_1+y_1) - (x_2+y_2) \in N$, woraus $x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$ folgt. Es gilt also $[x_1+y_1] = [x_2+y_2]$.

(4) $\|\cdot\|_{X/N}$ ist wohldefiniert, hängt also nicht vom gewählten Repräsentanten ab: Seien $x_1, x_2 \in [x]$. Dann ist $x_1 - x_2 \in N$ und $\|x_1 - x_2\| = 0$, damit $\|x_1\| \le \|x_2\| + \|x_1 - x_2\| = \|x_2\|$.

Seien nun $[x],[y] \in X/N$ gegeben. Dann ist

$$\|[x+y]\|_{X/N} = \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| = \|[x]\|_{X/N} + \|[y]\|_{X/N}.$$

Aus $\|[x]\| = 0$ folgt $x \in N$, also $[x] = [0]$.

(5) Sei $([x_n])$ eine CF in X/N. Dann ist (x_n) eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $\|x - x_n\| \to 0$. Es folgt $\|[x - x_n]\|_{X/N} = \|x - x_n\| \to 0$, also ist $([x_n])$ konvergent gegen $[x]$. Da X/N ein normierter Raum ist, ist der Grenzwert auch eindeutig bestimmt. □

Das werden wir nun auf die $\mathcal{L}^p(\mu)$-Räume anwenden: Hier ist (unabhängig vom Exponenten p)

$$N = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar mit } f(x) = 0 \text{ fast überall}\}.$$

Wir setzen für $p \in [1,\infty]$

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/N$$

mit der induzierten Norm $\|\cdot\|_{L^p(\mu)} := \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mu)/N}$. Es folgt dann

Folgerung 2.133. *Es sei*

$$N := \{f : X \to \mathbb{R} \textit{ messbar}: \ f = 0 \ \mu\textit{-fast überall}\}.$$

Die Räume $L^p(\mu) := L^p(\mu)/N$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\mu)/N}$ sind Banachräume.

Folgerung 2.134. *Der Raum $L^2(\mu)$ wird versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mu)} := \int f \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

zum Hilbertraum (vollständiger Raum mit Skalarprodukt).

Beweis. Wir zeigen, dass das Skalarprodukt wohldefiniert ist. Seien $f_1, g_1 \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $f_2 \in [f_1]$, $g_2 \in [g_1]$. Dann ist $f_1 = f_2$ und $g_1 = g_2$ μ-fast überall, und es folgt

$$\int f_1 \cdot \overline{g}_1 - f_2 \cdot \overline{g}_2 \,\mathrm{d}\mu = \int (f_1 - f_2) \cdot \overline{g}_1 + f_2 \overline{(g_1 - g_2)} \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

wobei wir Satz 2.45 benutzt haben. □

Die Elemente dieser Räume sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden. Man unterscheidet meistens nicht mehr zwischen der Äquivalenzklasse $[f] \in L^p(X)$ und dem Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^p(X)$.