Vertiefung Analysis Hausaufgabenblatt Nr. 9

Jun Wei Tan* and Lucas Wollmann

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: January 8, 2024)

Problem 1. Sei $R > 0$ und $a < b$. Definiere $Z := B_R(0) \times (a, b) \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ die (offene) Kreisscheibe um 0 mit Radius R ist. Definiere außerdem die Abbildung

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit $U := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (a, b)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $\Phi(U) = Z \backslash N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \to Z\backslash N$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det(\Phi'(r, \varphi, z)) = r$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to r$ definiert durch $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}$. Bestimmen Sie $\int_Z f \, \mathrm{d}\lambda_3$.

Proof. (a) Hypothese: $N = [0, R) \times \{0\} \times (a, b)$.

Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Z.$$

Wir finden die (x, y, z), für die die Gleichungen keine Lösung haben. Es ist klar, dass die dritte Gleichung trivialerweise immer erfüllt werden kann.

Jetzt betrachten wir $(x, y, z) \in N$. Weil $y = 0$, ist $\sin\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ($\varphi = 0$ ist keine Lösung in U). Dann ist $x = r\cos\varphi = -r$. Weil $r > 0$, ist dann $x < 0$, also $\Phi(U) \subseteq Z\backslash N$.

Sei jetzt $(x, y, z)^T \notin N$. Die (eindeutige) Lösungen sind

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

$$\tan\varphi = y/x$$

Man verfiziere sofort, dass r und φ Lösungen sind und außerdem in U liegen, insofern $(x,y,z)^T \notin N$. Daraus folgt:

$$\Phi(U) = Z\backslash N.$$

Jetzt zeigen wir: N ist eine Nullmenge. Da $N \subseteq [0,R)\times(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)$ für alle $\epsilon > 0$, ist N eine Nullmenge.

(b) Die Ableitung ist

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Komponente alle stetig sind, ist Φ' stetig, und Φ ist stetig differenzierbar. Die Determinante ist

$$\det\Phi' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_Z f \,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int_{Z\backslash N} f \,\mathrm{d}\lambda_3 && N \text{ Nullmenge} \\
&= \int_U |\det\Phi'|(f\circ\Phi)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_U r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_U rz\sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} \\
&= \int_U r^2 z\,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_{U_z}\int_a^b r^2 z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{U_z} r^2(b-a)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{(U_z)_\theta}\int_0^{2\pi} r^2(b-a)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{(U_z)_\theta} 2\pi r^2(b-a)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_0^R 2\pi r^2(b-a)\,\mathrm{d}\lambda_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi(b-a)\frac{r^3}{3}\Big|_0^R \\
&= \frac{2}{3}\pi(b-a)R^3. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Problem 2. Sei $R > 0$ und $K := B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3$. Definiere die Abbildung

$$
\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}
$$

mit $U := (0,R) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $\Phi(U) = K\backslash N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \to K\backslash N$ ein C^1-Diffeomorphismus ist mit $\det(\Phi'(r,\theta,\varphi)) = r^2\sin\theta$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := z\sqrt{x^2+y^2}$ und

$$
H := B_R(0) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}.
$$

Bestimmen Sie $\int_H f \, \mathrm{d}\lambda_3$.

Proof. (a) Ähnlich ist die Nullmenge $\{(0,0,R),(0,0,-R),(0,0,0)\}$. Wir lösen die Gleichungen

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}
$$

für $(x,y,z)^T \in B_R(0)$. Ähnlich ist $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tan\theta = (\sqrt{x^2+y^2})/z$ und $\tan\varphi = y/x$ eine Lösung, solange $z \neq \pm R$ (sonst wäre $\theta = 0$ oder π, welche nicht in U sind. Das Punkt $(0,0,0)$ ist auch ausgeschlossen, weil r nicht null sein darf. Als endliche Menge ist N eine Nullmenge.

(b) Es gilt

$$
\Phi' = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.
$$

Weil alle Komponente stetig sind, ist auch Φ' stetig, und Φ ist stetig differenzierbar. Für die Determinante führen wir eine Laplaceentwicklung mit der dritten Spalte durch:

$$\begin{aligned}\det\Phi' =& \cos\theta(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi)\\ &+ r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi)\\ =& r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta\\ =& r^2\sin\theta\end{aligned}$$

(c) Sei $U = (0, R) \times (0, \pi/2) \times (0, 2\pi)$. Es gilt $\Phi(U) = H\backslash N$.

$$\begin{aligned}\int_H f\,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int_{H\backslash N} f\,\mathrm{d}\lambda_3\\ &= \int_U |\det\Phi'|(f\circ\Phi)\,\mathrm{d}\lambda_3\\ &= \int_U (r^2\sin\theta)r\cos\theta\sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2}\\ &= \int_U (r^2\sin\theta)r\cos\theta(r\sin\theta)\\ &= \int_U r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\lambda_3\\ &= \int_{U_\varphi}\int_0^{2\pi} r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\lambda_2\\ &= \int_{U_\varphi} 2\pi r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\lambda_2\\ &= \int_{(U_\varphi)_\theta}\int_0^{\pi/2} 2\pi r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda_1\\ &= \int_0^R 2\pi r^4(1/3)\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{2}{15}\pi r^5|_0^R\\ &= \frac{2\pi}{15}R^5.\end{aligned}$$

$\square$

Problem 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\bigl(-x^TAx\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Proof. Da A symmetrisch ist, ist A orthogonal diagonalisierbar, also $A = P^{-1}DP$ bzw. $A = P^TDP$, wobei P orthogonal ist. Die Matrix D besitzt nur positive Einträge, weil A

positiv definit ist. Dann besitzt A (mehr als) eine quadratische Würzel. Sei $A = P^T SSP = P^T S^T SP$, wobei $S^2 = D$.

Es gilt

$$\exp\bigl(-x^T Ax\bigr) = \exp\bigl(-x^T P^T S^T SPx\bigr) = \exp\bigl(-(SPx)^T SPx\bigr).$$

Dann betrachten wir $\Phi : x \to SPx$, was offenbar ein Diffeomorphismus ist, weil es linear ist. Es gilt (Transformationssatz):

$$\begin{aligned}\int \exp\bigl(-x^T x\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int |\det\Phi| \exp\bigl(-(SPx)^T(SPx)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\ &= \int |\det S||\det P| \exp\bigl(-(SPx)^T(SPx)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\ &= \sqrt{\det A} \int \exp\bigl(-(SPx)^T(SPx)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Wobei wir die folgende benutzt haben: Als orthogonale Matrix ist $\det P = 1$. Da S eine quadratische Würzel von A ist, ist $(\det S)^2 = \det A \geq 0$ und $|\det S| = \sqrt{\det A}$. Es genügt also, $\int \exp\bigl(-x^T x\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int \exp(-(x^2+y^2+z^2))\,\mathrm{d}\lambda_3$ zu berechnen.

Wir berechnen das Integral in Kugelkoordinaten. Sei alle Definitionen wie in Aufgabe 2 mit $R = \infty$. Hier ist $N = \{0\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}&\int \exp\bigl(-(x^2+y^2+z^2)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\ &= \int_{R\setminus N} \exp\bigl(-(x^2+y^2+z^2)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\ &= \int_U (r^2 \sin\theta) \exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 \\ &= \int_{U_\theta} \int_0^\pi r^2 \exp\bigl(-r^2\bigr) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= 2\int_{U_\theta} r^2 \exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= 2\int_{(U_\theta)_\varphi} \int_0^{2\pi} r^2 \exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\lambda_1 \\ &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi \left[-\frac{r}{2} \exp\bigl(-r^2\bigr)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}r \right] \\ &= 2\pi \int_0^\infty \exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}r \end{aligned} \tag{2}$$

Jetzt berechnen wir:

$$\left(\int_0^\infty \exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}r\right)^2 = \left(\int_0^\infty \exp\bigl(-x^2\bigr)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty \exp\bigl(-y^2\bigr)\,\mathrm{d}y\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\bigl(-(x^2+y^2)\bigr)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{(0,\infty)^2} \exp\bigl(-(x^2+y^2)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&\quad \text{Satz von Fubini} \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,\pi/2)} r\exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_2 \\
&\quad \text{Folgerung 2.121 (Polarkoordinaten)} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r\exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty r\exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}r \\
&=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty \exp(-u)\,\mathrm{d}u \\
&\quad u=r^2 \text{ ist Diffeomorphismus mit Ableitung } 2r \\
&= -\frac{\pi}{4}\exp(-u)\Big|_0^\infty \\
&=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Da $\exp(-r^2)$ immer positiv ist, ist auch $\int_0^\infty \exp(-r^2)\,\mathrm{d}r$ positiv, also wir nehmen das positive Würzel:

$$\int_0^\infty \exp\bigl(-r^2\bigr)\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Durch Einsetzen in alle den vorherigen Gleichungen erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\bigl(-x^T x\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_3 = \pi^{3/2} \tag{2}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\bigl(-x^T A x\bigr) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\det A}} \tag{1}$$

$\square$