

## Lineare Algebra 2 Hausaufgabenblatt Nr. 2

Jun Wei Tan\*

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: October 30, 2023)

**Problem 1.** Es seien die Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  mit  $x_i \in \mathbb{R}$  gegeben. Wir definieren den Operator

$$\Phi : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \rightarrow y, \text{ mit } p(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$$

wobei wir mit  $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$  den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchsten  $n$  bezeichnen und  $p(x)$  die Auswertung des Polynoms  $p$  im Punkt  $x$  beschreibt.

- (a) Zeigen Sie: Sind die Punkte  $x_i$  paarweise verschieden, so ist die Abbildung  $\Phi$  wohldefiniert und isomorph. (Eine Konsequenz hieraus ist die eindeutige Lösbarkeit der Polynominterpolation.)
- (b) Was passiert, wenn Sie nicht fordern, dass die  $x_i$  paarweise verschieden sind? Kann  $\Phi$  im Allgemeinen noch injektiv (surjektiv) sein?

*Proof.* (a) Injektiv: Nehme an, dass es zwei unterschiedliche Polynome  $p_1, p_2$  gibt, mit  $p_1(x_i) = p_2(x_i) \forall i = 0, \dots, n$ . Dann ist  $p(x) := p_1(x) - p_2(x)$  auch ein Polynom, mit  $p(x_i) := 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$ . Weil  $\deg(p) \leq n$  ist, folgt daraus, dass  $\forall x, p(x) = 0, p_1(x) = p_2(x)$ . Das ist ein Widerspruch.

Surjektive: Sei  $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist

$$p(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n)$$

auch ein Polynom mit  $\Phi(p) = (y_0, \dots, y_n)$ .

Linearität: Sei  $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x], a \in \mathbb{R}$ . Sei auch  $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ . Es gilt dann

$$p(x_i) = p_1(x_i) + p_2(x_i), i = 0, \dots, n$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(p_1 + p_2) = \Phi(p_1) + \Phi(p_2).$$

---

\* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Es gilt auch, für  $p(x) := ap_1(x)$ , dass

$$p(x_i) = ap_1(x_i), i = 0, \dots, n,$$

und daher

$$\Phi(p) = \Phi(ap_1) = a\Phi(p_1).$$

(b) Nein. Sei, zum Beispiel,  $n = 1$ ,  $x_0 = x_1 = 0$ . Dann gilt

$$\Phi(x) = (0, 0)^T$$

$$\Phi(x^2) = (0, 0)^T$$

Aber die zwei Polynome sind ungleich.

□

**Problem 2.** (a) Es sei eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gegeben. Wir bilden die erweiterte Matrix

$$B = (A | 1_n)$$

mit  $1_n$  die Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie:  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $A$  durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Verifizieren Sie weiterhin: Werden die dafür benötigten Zeilenumformungen auf ganz  $B$  angewendet, so ergibt sich im hinteren Teil, wo zu Beginn die Einheitsmatrix stand, genau  $A^{-1}$ .

(b) Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie  $A^{-1}$ .

*Proof.* (a) Definiert  $(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{K}^n$ ,  $y \in \mathbb{K}^m$  durch  $\mathbb{K}^{n+m} \ni (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ .

Eine solche erweiterte Matrix bedeutet ein Gleichungssystem durch

$$B(x, -y) = Ax - 1_n y = 0,$$

wobei  $x, y \in \mathbb{K}^n$ . Für jeder  $x \in \mathbb{K}^n$  gibt es  $y \in \mathbb{K}^n$ , so dass  $B(x, -y) = 0$ . Nehme an, dass wir durch elementare Zeilenumformung

$$B = (A|1_n) \rightarrow (1_n, A') := B'$$

kann. Die Gleichungssystem ist dann  $x = A'y$ . Dadurch können wir für jeder  $y \in \mathbb{K}^n$  eine  $A'y = x \in \mathbb{K}^n$  rechnen, für die gilt, dass  $Ax = y$ . Das heißt, dass  $A' = A^{-1}$ .

(b)

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 - 3R_1} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \times -1} \\
 & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + 2R_3} \\
 & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_4} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \times -\frac{1}{2}} \\
 & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_4} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_4} \\
 & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

□

**Problem 3.** Es seien die Vektorräume  $V, W$  über  $\mathbb{K}$  gegeben mit  $\dim(V) = n$  und  $\dim(W) = m$ . Wir betrachten eine lineare Abbildung

$$T : V \rightarrow W, v \rightarrow T(v)$$

Seien  $B_V$  und  $B_W$  Basen von  $V$ , bzw.  $W$ . Wir nehmen an  $T$  ist nicht die konstante Nullabbildung. Beweisen Sie:

- (a) Der Kern von  ${}_{B_W}[T]_{B_V}$  ist entweder trivial (d.h. nur die 0) oder hängt nur von der Wahl von  $B_V$  ab, aber nicht von  $B_W$ .
- (b) Das Bild von  ${}_{B_W}[T]_{B_V}$  ist entweder der ganze  $\mathbb{K}^m$  oder hängt nur von der Wahl von  $B_W$  ab, aber nicht von  $B_V$ .
- (c) Der Rang von  ${}_{B_W}[T]_{B_V}$  ist unabhängig von  $B_W$  und  $B_V$ , aber nicht von  $B_W$ .

*Proof.* Nach Korollar 5.43 gilt, für  $A, A' \subseteq V$  und  $B, B' \subseteq W$  Basen der Vektorräume  $V$  und  $W$  über  $\mathbb{K}$ , und  $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ .

$${}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'}.$$

**Lemma 1.** *Jeder Basiswechsel für sowohl  $B_V$  als auch  $B_W$  kann als zwei Basiswechseln interpretiert werden, wobei eine Basiswechsel nur  $B_V$  verändert, und die andere nur  $B_W$ .*

*Proof.*

$${}_{B'}[\Phi]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'} = {}_{B'}[\text{id}_W]_B ({}_B[\text{id}_W]_B \cdot {}_B[\Phi]_A \cdot {}_A[\text{id}_V]_{A'}) {}_A[\text{id}_V]_A.$$

(In den Klammern gibt es zuerst ein Basiswechsel in  $V$ , dann ein Basiswechsel in  $W$ ). Ein ähnliche Argument zeigt, dass wir zuerst ein Basiswechseln in  $W$  betrachten kann.  $\square$

**Corollary 2.** *In jedem Teilaufgabe muss man nur das Fall betrachten, in dem entweder  $B_V$  oder  $B_W$  sich verändert.*

- (a)

$\square$