Vertiefung Analysis

Daniel Wachsmuth

Version: 7. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Maßtheorie

1.1 Messbare Räume

Im Folgenden sei X stets eine nichtleere Menge.

Definition 1.1. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt $\mathcal{A}$ σ-Algebra über X, falls gilt:*

(1) $X \in \mathcal{A}$,

(2) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathcal{A}$,

(3) $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}$.

Dann heißt $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$.

Hierbei ist A^c das Komplement von A in X, also $A^c = X \setminus A$, und $\mathcal{P}(X)$ ist die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X.

Satz 1.2. *Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X, dann gilt*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(2) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A},\ A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$,

(3) $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}$.

Beweis. Es ist $X \in \mathcal{A}$, also auch $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$. Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, dann sind auch

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c$$

und damit

$$A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap (A_1^c)$$

Elemente von $\mathcal{A}$. Die dritte Behauptung folgt aus

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \right)^c .$$

□

Beispiel 1.3. *$\{\emptyset, X\}$ und $\mathcal{P}(X)$ sind σ-Algebren.*

Beispiel 1.4. *Seien X, Y nichtleer, $f : X \to Y$ und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Algebren über X und Y. Dann sind auch*

- *$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ (Urbild σ-Algebra),*
- *$f_*(\mathcal{A}) := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ (direktes Bild)*

σ-Algebren. Dies lässt sich elementar mit den Eigenschaften des Urbildes beweisen. Achtung: die Menge

$$\{f(A) : \ A \in \mathcal{A}\}$$

ist im Allgemeinen keine σ-Algebra.

Wir wollen nun zu einer gegebenen Menge $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ-Algebra konstruieren, die S enthält. Dazu benötigen wir das folgende Resultat.

Lemma 1.5. *Sei I nichtleer, und seien $\mathcal{A}_i$ σ-Algebren über X für jedes $i \in I$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra über X.*

Beweis. Setze $\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Dann folgt direkt $X \in \mathcal{A}$. Ist $A \in \mathcal{A}$, dann ist $A \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, damit ist $A^c \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, also auch $A^c \in \mathcal{A}$. Seien nun Mengen $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist $A_j \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Damit folgt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, also auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Und $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra. □

Satz 1.6. *Sei $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist*

$$\mathcal{A}_\sigma(S) := \bigcap \Big\{ \mathcal{A} : \ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{A} \supseteq S \Big\}$$

eine σ-Algebra. Weiter ist $\mathcal{A}_\sigma(S)$ die kleinste σ-Algebra, die S enthält: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die S enthält, dann folgt $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_\sigma(S)$.

$\mathcal{A}_\sigma(S)$ heißt die von S erzeugte σ-Algebra.

Beweis. Da $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist, wird in der Konstruktion von $\mathcal{A}_\sigma(S)$ der Durchschnitt über mindestens eine σ-Algebra gebildet. Wegen Lemma 1.5 folgt, dass $\mathcal{A}_\sigma(S)$ eine σ-Algebra ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die S enthält, dann nimmt $\mathcal{A}$ an dem Durchschnitt teil, und es folgt $\mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}$. □

Beispiel 1.7. *Sei* $A \subseteq X$ *und* $S = \{A\}$, *dann ist* $\mathcal{A}_\sigma(S) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

Bemerkung 1.8. *Die Abbildung* $S \mapsto \mathcal{A}_\sigma(S)$ *hat die folgenden Eigenschaften, die einen Hüllenoperator charakterisieren:*

(1) $S \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S)$ *für alle* $S \subseteq \mathcal{P}(X)$,

(2) aus $S \subseteq T \subseteq \mathcal{P}(X)$ *folgt* $\mathcal{A}_\sigma(S) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(T)$,

(3) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_\sigma(S)) = \mathcal{A}_\sigma(S)$ *für alle* $S \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Analoge Eigenschaften haben auch die Abbildungen $S \mapsto \operatorname{span}(S)$, $S \mapsto \operatorname{cl}(S)$ *(Abschluss).*

Die Konstruktion von $\mathcal{A}_\sigma$ *folgt einem allgemeinen Konstruktionsprinzip: es wird der Durchschnitt über alle Mengen gebildet, die eine gewünschte Eigenschaft haben, und die die gegebene Menge enthalten. Auf analoge Art und Weise kann man den Abschluss, die konvexe Hülle, lineare Hülle, etc, konstruieren.*

Beispiel 1.9. *Sei* $S = \{\{x\} : x \in X\}$ *die Menge der einelementigen Teilmengen von* X. *Dann ist*

$$\mathcal{A}_\sigma(S) = \{A \subseteq X : \textit{ A oder } A^c \textit{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

Definition 1.10. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $\mathcal{T}$ *die Menge aller offenen Teilmengen von* X. *Dann heißt*

$$\mathcal{B}(X) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T})$$

Borel σ*-Algebra auf* X, $B \in \mathcal{B}(X)$ *heißt Borelmenge.*

Weiter führen wir noch folgende Abkürzung ein:

$$\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\mathbb{R}^n$ *mit der Euklidischen Norm versehen ist.*

Satz 1.11. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $\mathcal{C}$ *die Menge aller abgeschlossenen Mengen. Dann ist* $\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C})$.
Sei $\mathcal{K}$ *die Menge der kompakten Mengen. Existiert eine Folge* (K_j) *kompakter Mengen mit* $X = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$, *dann gilt* $\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K})$.

Beweis. Eine Menge ist offen genau dann, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist. Daraus folgt dann auch die erste Behauptung. Da $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ folgt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(X)$. Sei $C \in \mathcal{C}$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist

$$C = C \cap X = C \cap \bigcup_{j=1}^\infty K_j = \bigcup_{j=1}^\infty (C \cap K_j).$$

Weiter ist $C \cap K_j \in \mathcal{K}$ und damit auch $C = \bigcup_{j=1}^{\infty}(C \cap K_j) \in A_\sigma(\mathcal{K})$. Also ist $\mathcal{C} \subseteq A_\sigma(\mathcal{K})$, und daraus folgt $A_\sigma(\mathcal{C}) \subseteq A_\sigma(A_\sigma(\mathcal{K}))$. Im Beweis haben wir die Eigenschaften aus Bemerkung 1.8 benutzt. □

Für die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ können wir ein einfaches Erzeugendensystem angeben.

Definition 1.12. *Für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Relation*

$$a \le b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \le b_i \ \forall i = 1, \dots, n.$$

Analog definieren wir $\ge, <, >$ für Vektoren. Für $a \le b$ ist ein offener Quader definiert durch

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a < x < b\} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) =: \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$$

Analog werden halboffene Quader $(a, b], [a, b)$ und abgeschlossene Quader $[a, b]$ definiert. Falls $a \le b$ nicht gilt, dann definiere $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b] := \emptyset$.

Einen Quader (a, b) nennen wir Würfel, wenn alle Seiten gleich lang sind, also $|b_i - a_i| = |b_j - a_j|$ für alle $i, j = 1 \dots n$ ist.

Bemerkung 1.13. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Durchmesser von $A \subseteq X$ ist definiert als*

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : \ x, y \in A\}.$$

Für den Quader $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ (versehen mit der Euklidischen Metrik) ist der Durchmesser gleich der Länge der Diagonalen $b - a$:

$$\operatorname{diam}((a, b)) = \|b - a\|_2.$$

Es ist leicht zu sehen, dass jede offene Menge des $\mathbb{R}^n$ eine Vereinigung solcher Quader ist. Wir beweisen nun die folgende stärkere Aussage.

Satz 1.14. *Jede offene Menge des $\mathbb{R}^n$ ist eine disjunkte abzählbare Vereinigung von halboffenen Würfeln mit rationalen Eckpunkten.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$M_k := \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{i=1}^{n} [\frac{x_i}{2^k}, \frac{x_i + 1}{2^k}) \right). \tag{1.15}$$

Dann ist M_k eine abzählbare Menge disjunkter Würfel der Seitenlänge 2^{-k}. Sei nun O eine offene Menge. Dann definieren wir induktiv

$$W_1 := \{M \in M_1 : \ M \subseteq O\}$$

und für $k \in \mathbb{N}$

$$W_{k+1} := \{M \in M_{k+1} : \ M \subseteq O, \ M \not\subseteq M' \ \forall M' \in W_{k'}, \ k' \le k\}.$$

Wir setzen

$$U := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{M \in W_k} M.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $O = U$ ist. Per Konstruktion gilt $U \subseteq O$. Weiter ist U die gewünschte abzählbare Vereinigung disjunkter Würfel.

Sei nun $x \in O$. Dann existiert ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(x) \subseteq O$. Wir zeigen nun, dass die offene Kugel $B_\rho(x)$ einen Würfel aus W_k für hinreichend großes k enthält. Die Würfel aus M_k haben einen Durchmesser von $2^{-k}\sqrt{n}$. Sei nun k so, dass $2^{-k}\sqrt{n} < \rho$. Es ist $\bigcup_{M \in M_k} M = \mathbb{R}^n$, damit existiert ein $W \in M_k$ mit $x \in W$. Wegen der Wahl von k ist $W \subseteq B_\rho(x) \subseteq O$.

Ist $W \in W_k$, folgt $x \in U$. Gilt $W \notin W_k$, ist W Teilmenge eines Würfels aus $W_{k'}$ mit $k' < k$. Dies folgt aus der induktiven Konstruktion der W_k. Wieder ist dann $x \in U$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Damit können wir beweisen, dass die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ durch offene (halboffene, abgeschlossene) Quader erzeugt werden kann.

Satz 1.16. *Es seien*

$$\mathbb{J}(n) := \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}^n\},$$
$$\mathbb{J}_r(n) := \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}^n\},$$
$$\mathbb{J}_l(n) := \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}^n\},$$
$$\bar{\mathbb{J}}(n) := \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dann ist $\mathcal{B}^n = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J})$ *für alle* $\mathbb{J} \in \{\mathbb{J}(n), \mathbb{J}_r(n), \mathbb{J}_l(n), \bar{\mathbb{J}}(n)\}$.

Beweis. Die Quader (a,b) und $[a,b]$ sind offen beziehungsweise abgeschlossen, damit folgt $\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)) \subseteq \mathcal{B}^n$ per Definition und $\mathcal{A}_\sigma(\bar{\mathbb{J}}(n)) \subseteq \mathcal{B}^n$ aus Satz 1.11.

Ist $a \le b$ dann ist

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}e, b + \frac{1}{n}e) \in \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)),$$

wobei $e = (1, \dots, 1)^T$. Damit folgt $\mathcal{A}_\sigma(\bar{\mathbb{J}}(n)) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n))$. Analoge Konstruktionen können für alle Typen von Quadern gemacht werden, und es folgt

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_r(n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_l(n)) = \mathcal{A}_\sigma(\bar{\mathbb{J}}(n)) \subseteq \mathcal{B}^n.$$

Ist $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann folgt $O \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_r(n))$ aus Satz 1.14. Dies impliziert $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_r(n))$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume. Wie erzeugt man eine σ-Algebra auf $X_1 \times X_2$ mithilfe von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$? Im Allgemeinen ist

$$\mathcal{A}_1 \boxtimes \mathcal{A}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

keine σ-Algebra. Wir benutzen stattdessen die Produkt-σ-Algebra, welche definiert ist durch

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_1 \boxtimes \mathcal{A}_2). \tag{1.17}$$

Wir zeigen nun, dass Produkt- und σ-Algebra-Bildung in gewissem Sinne kommutieren.

Lemma 1.18. *Seien X_1, X_2 nichtleer, $S_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ für $i = 1, 2$. Dann gilt*

$$\mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S_1) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S_2).$$

Angenommen es existieren Folgen $(A_{1,j})$ und $(A_{2,j})$ mit $A_{i,j} \in S_i$ für alle $i = 1, 2$ und $j \in \mathbb{N}$, so dass $X_i = \bigcup_{j=1}^\infty A_{i,j}$ für alle $i = 1, 2$. Dann gilt

$$\mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2) = \mathcal{A}_\sigma(S_1) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S_2).$$

Beweis. "$\subseteq$": Sei $A \in S_1 \boxtimes S_2$, dann ist $A = A_1 \times A_2$ mit $A_i \in S_i$, $i = 1, 2$. Damit folgt $A_i \in \mathcal{A}_\sigma(S_i)$, $i = 1, 2$, und $A \in \mathcal{A}_\sigma(S_1) \boxtimes \mathcal{A}_\sigma(S_2) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S_1) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S_2)$. Und es gilt $\mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(S_1) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S_2)$.

"$\supseteq$": **[Komplett überarbeitet]** Sei $A_1 \in S_1$, dann folgt aus der Voraussetzung für den zweiten Teil der Behauptung

$$A_1 \times X_2 = A_1 \times \left(\bigcup_{j=1}^\infty A_{2,j} \right) = \bigcup_{j=1}^\infty \underbrace{(A_1 \times A_{2,j})}_{\in S_1 \boxtimes S_2} \in \mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2).$$

Wir zeigen nun, dass die Menge

$$\mathcal{B}_1 = \{A_1 \subseteq X_1 : \ A_1 \times X_2 \in \mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2)\}$$

eine σ-Algebra ist. Definiere dazu die Projektionen

$$p_i : X_1 \times X_2 \to X_i,\ p_i(x_1, x_2) = x_i,\ i = 1, 2.$$

Dann ist $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$ und es gilt

$$\mathcal{B}_1 = (p_1)_*(\mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2)),$$

was wegen Beispiel 1.4 eine σ-Algebra ist. Wir haben schon gezeigt, dass $S_1 \subseteq \mathcal{B}_1$. Dann folgt direkt $\mathcal{A}_\sigma(S_1) \subseteq \mathcal{B}_1$. Analog beweist man die Inklusion

$$\mathcal{A}_\sigma(S_2) \subseteq \mathcal{B}_2 := \{A_2 \in X_2 : \ X_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2)\}.$$

Sei nun $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_\sigma(S_1) \boxtimes \mathcal{A}_\sigma(S_2)$. Dann ist $A_1 \in \mathcal{B}_1$ und $A_2 \in \mathcal{B}_2$, und es folgt

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) \in \mathcal{A}_\sigma(S_1 \boxtimes S_2),$$

was die zweite Inklusion beweist. □

Satz 1.19. *Es gilt $\mathcal{B}^{m+n} = \mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n$.*

Beweis. Jeder Quader aus $\mathbb{J}(m+n)$ ist das Produkt zweier Quader aus $\mathbb{J}(m)$ und $\mathbb{J}(n)$, so dass $\mathbb{J}(m+n) = \mathbb{J}(m) \boxtimes \mathbb{J}(n)$ gilt. Weiter ist $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(-j, j)^n$. Mit dem obigen Hilfsresultat Lemma 1.18 und Satz 1.16 folgt

$$\mathcal{B}^{m+n} = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(m+n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(m) \boxtimes \mathbb{J}(n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(m)) \otimes \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}(n)) = \mathcal{B}^m \otimes \mathcal{B}^n.$$

□

Bemerkung. *Ohne die Bedingung, dass X_i abzählbare Vereinigung von Elementen aus S_i ist, gilt Gleichheit in Lemma 1.18 im Allgemeinen nicht: Sei $S := \{\{x\} : \ x \in \mathbb{R}\}$. Dann enthält $\mathcal{A}_\sigma(S \boxtimes S)$ alle Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, die abzählbar sind, oder deren Komplement abzählbar ist, siehe Beispiel 1.9. Das Produkt $\mathcal{A}_\sigma(S) \otimes \mathcal{A}_\sigma(S)$ enthält zum Beispiel die Menge $\{0\} \times \mathbb{R} \notin \mathcal{A}_\sigma(S \boxtimes S)$.*

1.2 Maße

Als Wertebereich für Maße verwenden wir die erweiterten reellen Zahlen, definiert durch

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

mit folgenden intuitiven Rechenregeln

$$a \pm \infty = \pm\infty \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty \cdot \operatorname{sgn}(a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Weiter ist es noch zweckmäßig

$$0 \cdot (\pm\infty) := 0$$

zu definieren. Dieser Ausdruck entsteht bei Integralen vom Typ

$$\int_{\mathbb{R}} 0 \,\mathrm{d}x = 0 \cdot \int_{\mathbb{R}} 1 \,\mathrm{d}x = 0 \cdot \infty = 0.$$

Nicht definiert sind die unbestimmten Ausdrücke $\infty - \infty$ und $-\infty + \infty$. Solange keine unbestimmten Ausdrücke entstehen, erfüllen Addition und Multiplikation auf $\bar{\mathbb{R}}$ die üblichen Rechenregeln (Assoziativität, Kommutativität, Distributivgesetze). Allerdings gilt die Implikation $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ nur falls $c \in \mathbb{R}$ ist.

Auf $\bar{\mathbb{R}}$ kann man die Ordnungstopologie definieren, als die kleinste Topologie, die die Mengen

$$[-\infty, a), (a, +\infty]$$

enthält, wobei $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Konvergenz einer Zahlenfolge in dieser Topologie entspricht der üblichen Konvergenz (falls der Grenzwert endlich ist) beziehungsweise der uneigentlichen Konvergenz gegen $\pm\infty$.

Definition 1.20. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{A}$. Dann heißt $\varphi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$ Mengenfunktion.*

(1) φ heißt σ-subadditiv, wenn für alle Folgen (A_j) mit $A_j \in \mathcal{A}$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ gilt

$$\varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$$

(φ heißt subadditiv, wenn die Eigenschaft für endlich viele $A_1, \ldots, A_n$ gilt.)

(2) φ heißt σ-additiv wenn für alle Folgen (A_j) paarweise disjunkter Menge $A_j \in \mathcal{A}$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ gilt

$$\varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$$

(φ heißt additiv, wenn die Eigenschaft für endlich viele $A_1, \ldots, A_n$ gilt.)

(3) φ heißt σ-endlich, falls es eine Folge (A_j) mit $A_j \in \mathcal{A}$ gibt mit $\varphi(A_j) < +\infty$ für alle j und $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X$.

(φ heißt endlich, falls $\varphi(X) < +\infty$.)

In obiger Definition wird nicht vorausgesetzt, dass die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$ in $\mathbb{R}$ konvergieren. Hier ist ausdrücklich $+\infty$ als Grenzwert oder Summe zugelassen.

Beispiel 1.21. *Sei*

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty], \quad \varphi(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Dann ist φ eine σ-subadditive und endliche Mengenfunktion. Enthält X mehr als ein Element, dann ist φ nicht σ-additiv.

Definition 1.22. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ eine σ-additive Mengenfunktion. Dann heißt μ Maß (über $\mathcal{A}$) und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Ist zusätzlich $\mu(X) = 1$, dann heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Wahrscheinlichkeitsraum.*

In der Literatur wird solche ein Maß manchmal auch positive Maß genannt.

Beispiel 1.23. *Sei $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum. Sei $a \in X$. Dann ist*

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

ein Maß, das Dirac-Maß.

Beispiel 1.24. *Für $A \subseteq X$ definiere $\mathcal{H}^0(A) := \#A$ =Anzahl der Elemente von A. Dabei ist $\mathcal{H}^0(A) = +\infty$ wenn A unendlich viele Elemente enthält. Dann ist $\mathcal{H}^0$ ein Maß, das Zählmaß. Das Maß $\mathcal{H}^0$ ist endlich genau dann, wenn X endlich viele Elemente hat, und σ-endlich, genau dann wenn X höchstens abzählbar viele Elemente hat.*

Satz 1.25. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A, B \in \mathcal{A}$, sowie (A_j) eine Folge in $\mathcal{A}$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1.26) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(1.27) *Falls $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$, so ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(1.28) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. *(Monotonie)*

(1.29) $\mu(A_k) \nearrow \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big)$, *falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \cdots$.*

(1.30) $\mu(A_k) \searrow \mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big)$, *falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \cdots$ und $\mu(A_1) < \infty$.*

(1.31) $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. *($\sigma$-Subadditivität)*

Beweis. (1.26): Wir schreiben $A \cup B$ und B als Vereinigung disjunkter Mengen wie folgt: $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Aus der Additivität bekommen wir $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ und $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$. Aus der Assoziativität der Addition auf $\bar{\mathbb{R}}$ erhalten wir

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(1.27) und (1.28) folgen direkt aus $B = A \cup (B \setminus A)$ für $A \subseteq B$. Aus der Additivität folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.

(1.29): Die Monotonie der Folge $(\mu(A_k))$ folgt aus (1.28). Wir setzen $B_1 = A_1$ und $B_{j+1} = A_{j+1} \setminus A_j$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$, und die (B_j) sind paarweise disjunkt. Dann folgt mit der σ-Additivität

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j)\\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m \mu(B_j) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).\end{aligned}$$

(1.30): Wenden (1.29) auf die Folge $B_k := A_1 \setminus A_k$ an. Dann folgt

$$\lim_{m\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_m) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_1 \setminus A_j)\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^\infty A_j\right).$$

Ausnutzen von (1.27) und Subtrahieren von $\mu(A_1)$ auf beiden Seiten beweist (1.30).

(1.31): Definiere $B_j := A_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \subseteq A_j$. Dann sind die B_j paarweise disjunkt. Weiterhin ist $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$, woraus mit der σ-Additivität und (1.28) folgt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) \le \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

□

Die Konstruktion der Folge disjunkter Mengen aus dem vorherigen Beweis halten wir noch als eigenes Resultat fest.

Lemma 1.32. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (A_j) eine Folge in $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine Folge (B_j) paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ mit $B_j \subseteq A_j$ und $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$.*

Definition 1.33. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt μ-Nullmenge. Man sagt Nullmenge, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welches Maß gemeint ist, Der Maßraum heißt vollständig, wenn gilt: $M \subseteq N$, N Nullmenge impliziert $M \in \mathcal{A}$.*

Folgerung 1.34. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge.*

Beweis. Folgt aus Satz 1.25 (1.31). □

Ein gegebener Maßraum kann mit einer einfachen Konstruktion vervollständigt werden.

Satz 1.35. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Definiere*

$$\bar{\mathcal{A}} := \{A \cup M : \ A \in \mathcal{A}, \ M \subseteq N \in \mathcal{A}, \ \mu(N) = 0\}$$

und

$$\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, +\infty], \quad \bar{\mu}(A \cup M) := \mu(A).$$

Dann ist $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Beweis. Sei $B = A \cup M \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $A \in \mathcal{A}$, $M \subseteq N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} B^c = (A \cup M)^c = A^c \cap M^c &= A^c \cap (N^c \cap M^c) \cup (N \cap M^c)) \\ &= (A^c \cap N^c) \cup (A^c \cap N \cap M^c). \end{aligned}$$

Hier ist $A^c \cap N^c \in \mathcal{A}$, $A^c \cap N \cap M^c$ Teilmenge einer Nullmenge, und $B^c \in \bar{\mathcal{A}}$. Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, ist $\bar{\mathcal{A}}$ abgeschlossen bezüglich abzählbaren Vereinigungen, und $\bar{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra.

Sei (B_j) eine Folge von paarweise disjunkten Mengen mit $B_j = A_j \cup M_j$, $A_j \in \mathcal{A}$, $M_j \subseteq N_j \in \mathcal{A}$, $\mu(N_j) = 0$. Dann ist $N := \bigcup_{j=1}^\infty N_j$ eine Nullmenge, und $\bigcup_{j=1}^\infty M_j \subseteq N$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j \cup \bigcup_{j=1}^\infty M_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \\ = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \bar{\mu}(A_j \cup M_j) = \sum_{j=1}^\infty \bar{\mu}(B_j), \end{aligned}$$

und $\bar{\mu}$ ist σ-additiv. □

1.3 Äußere Maße

Das große Ziel dieses Kapitels ist die Konstruktion eines Maßes auf dem $\mathbb{R}^n$, das für Quader im $\mathbb{R}^3$ (Rechtecke im $\mathbb{R}^2$, Strecken im $\mathbb{R}^1$) mit dem Volumen (Fläche, Länge) übereinstimmt. Zuerst konstruieren wir äußere Maße: eine gegebene Menge wird von Quadern überdeckt. Dann ergibt die Summe der Volumina dieser Quader eine obere Schranke an das "Maß" der Menge. Nun können wir die kleinste obere Schranke nehmen. Leider erhalten wir kein Maß, sondern ein äußeres Maß.

Wir werden nun nebeneinander abstrakte Begriffe einführen und deren Eigenschaften untersuchen und dann diese auf die Situation $\mathbb{R}^n$ anwenden.

Definition 1.36. *Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ heißt äußeres Maß, falls gilt:*

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(2) μ^* ist monoton, d.h., $A \subseteq B$ impliziert $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$,

(3) μ^* ist σ-subadditiv.

Wir abstrahieren die oben motivierte Konstruktion wie folgt.

Satz 1.37. *Es sei $K \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in K$. Weiter sei $\nu : K \to [0, \infty]$ gegeben mit $\nu(\emptyset) = 0$. Für $A \subseteq X$ definiere*

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \nu(K_j) : \ K_j \in K, \ \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supseteq A \right\}.$$

Dann ist μ^* ein äußeres Maß.

Hier wird $\inf \emptyset = +\infty$ verwendet, so dass $\mu^*(A) = +\infty$, falls es keine abzählbare Überdeckung von A mit Mengen aus K gibt.

Beweis. Da $\emptyset \in K$ ist $\mu^*(\emptyset) = 0$. Sei $A \subseteq B$ gegeben. Ist (K_j) eine Folge mit $K_j \in K$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supseteq B$, dann gilt auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supseteq A$, und es folgt $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. Existiert keine solche Folge (K_j), dann ist $\mu^*(B) = +\infty \ge \mu^*(A)$.

Es bleibt, die Subadditivität von μ^* zu beweisen. Sei nun (A_i) eine Folge mit $A_i \subseteq X$. Ist $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = +\infty$, dann ist nichts zu zeigen. Wir müssen nur noch den Fall $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) < +\infty$ betrachten. Dann ist $\mu^*(A_i) < +\infty$ für alle i. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jedem i eine Folge $(K_{i,j})$ in K mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j} \supseteq A$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu(K_{i,j}) \le \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Weiter folgt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j},$$

so dass die $(K_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ eine abzählbare Überdeckung von $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ sind. Aus der Definition von μ^* (und dem Doppelreihensatz Satz 1.38) folgt nun

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \nu(K_{i,j}).$$

Die Doppelsumme auf der rechten Seite können wir abschätzen durch

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \nu(K_{i,j}) \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\varepsilon > 0$, daraus folgt $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$, und μ^* ist σ-subadditiv. □

Dieser Beweis ist noch nicht komplett: die Aussage "$(K_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ ist eine abzählbare Überdeckung von $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$" bedeutet, dass für eine bijektive Funktion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ gilt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\tau(n)},$$

so dass aus der Definition von μ^* folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \nu(K_{\tau(n)}).$$

Dass die Reihe auf der rechten Seite konvergiert, und ihre Summe gleich der Doppelsumme $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \nu(K_{i,j})$ ist, beweisen wir jetzt noch. Insbesondere ist $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \nu(K_{i,j})$ keine Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(K_{\tau(n)})$.

1.3.1 Doppelreihensatz

Satz 1.38. *Für $i, j \in \mathbb{N}$ seien reelle Zahlen $a_{ij} \ge 0$ gegeben. Weiter setzen wir voraus:*

- *Die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ sind konvergent in $\mathbb{R}$ für alle i.*
- *Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right) =: s \in \mathbb{R}$ ist konvergent in $\mathbb{R}$.*

Dann gelten folgende Aussagen:

(1.39) *Für alle bijektiven Funktionen $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ in $\mathbb{R}$ und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = s$.*

(1.40) *Die Reihen* $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ *sind konvergent in* $\mathbb{R}$ *für alle* j.

(1.41) *Es gilt* $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = s$.

Beweis. (1.39): Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ bijektiv. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $\tau(\{1 \dots N\})$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^2$, und es existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\tau(\{1 \dots N\}) \subseteq \{1 \dots M\}^2$. Es folgt

$$\sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)} \le \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} a_{i,j} \le s, \tag{1.42}$$

und wir bekommen die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ sowie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} \le s$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $I > 0$ mit $\sum_{i=I+1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Für $i = 1 \dots I$ sind die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ konvergent. Darum existiert ein $J > 0$, so dass $\sum_{j=J+1}^{\infty} a_{ij} \le \frac{\varepsilon}{2I}$ für alle $i = 1 \dots I$. Dann bekommen wir

$$s = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\varepsilon}{2I} + \sum_{j=1}^{J} a_{ij}\right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_{ij} \tag{1.43}$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\tau(\{1 \dots N\}) \supseteq \{1 \dots I\} \times \{1 \dots J\}$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_{ij} \le \sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}.$$

Und wir bekommen die Ungleichung

$$s \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$.

(1.40) und (1.41) folgen aus (1.42) und (1.43) durch Vertauschung der Summationsreihenfolge $i \leftrightarrow j$ auf der rechten Seite der jeweiligen Ungleichungen. □

1.3.2 Das Lebesguessche äußere Maß

Für einen Quader definiert durch zwei Punkte a, b im $\mathbb{R}^n$ definieren wir sein Volumen als

$$\mathrm{vol}_n(a,b) := \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) & \text{falls } a \le b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist also $I = (a,b)$ (oder $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$), dann setzen wir $\mathrm{vol}_n(I) := \mathrm{vol}_n(a,b)$.

Damit können wir ein äußeres Maß definieren.

Satz 1.44. *Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiere*

$$\lambda_n^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}_n(I_j) : \ I_j \in \mathbb{J}(n), \ \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supseteq A \right\}.$$

Dann ist $\lambda_n^*(A)$ ein äußeres Maß - das Lebesguessche äußere Maß. Weiter gilt

$$\lambda_n^*(A) = \operatorname{vol}_n(a,b) \quad \forall a \leq b, \ (a,b) \subseteq A \subseteq [a,b].$$

Beweis. Wegen Satz 1.37 ist λ_n^* ein äußeres Maß. Sei nun $a \leq b$. Da λ_n^* monoton ist, gilt $\lambda_n^*((a,b)) \leq \lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*([a,b])$ für alle A mit $(a,b) \subseteq A \subseteq [a,b]$.

Schritt 1: $\lambda_n^*((a,b)) = \lambda_n^*([a,b])$. Es gilt

$$[a,b] = (a,b) \cup \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

wobei die B_j jeweils zwei gegenüberliegende Seitenflächen von (a,b) sind, also Mengen der Bauart

$$B_j = \left(\prod_{i=1}^{j-1} [a_i, b_i] \right) \times \{a_j, b_j\} \times \left(\prod_{i=j+1}^{n} [a_i, b_i] \right).$$

Die Menge B_j kann für $\varepsilon > 0$ überdeckt werden durch

$$\begin{aligned} J_1 \cup J_2 \ :=& \left(\prod_{i=1}^{j-1} (a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon) \right) \times (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon) \times \left(\prod_{i=j+1}^{n} (a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon) \right) \\ & \cup \left(\prod_{i=1}^{j-1} (a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon) \right) \times (b_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon) \times \left(\prod_{i=j+1}^{n} (a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon) \right), \end{aligned}$$

so dass

$$\lambda_n^*(B_j) \leq \operatorname{vol}_n(J_1) + \operatorname{vol}_n(J_2) = 4\varepsilon \cdot \prod_{i \neq j} (|b_i - a_i| + 2\varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lambda_n^*(B_j) = 0$ und $\lambda_n^*([a,b]) \leq \lambda_n^*((a,b))$.

Schritt 2: $\lambda_n^*((a,b)) \leq \operatorname{vol}_n(a,b)$. Mit der Überdeckung $I_1 := (a,b)$, $I_j = \emptyset$ für $j \geq 2$, folgt $\lambda_n^*((a,b)) \leq \operatorname{vol}_n(a,b)$.

Schritt 3: $\lambda_n^*([a,b]) \geq \operatorname{vol}_n(a,b)$. Sei (I_j) eine Überdeckung von $[a,b]$ mit Quadern aus $\mathbb{J}(n)$. Da $[a,b]$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, also $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^m I_j$. Mit dem noch zu beweisenden Satz 1.45 folgt $\operatorname{vol}_n(a,b) \leq \sum_{j=1}^m \operatorname{vol}_n(I_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol}_n(I_j)$. Das äußere Maß λ_n^* ist das Infimum über solche Summen, also folgt $\operatorname{vol}_n(a,b) \leq \lambda_n^*([a,b])$. □

Satz 1.45. *Seien* $I, I_1, \dots, I_m \in \mathbb{J}(n)$ *gegeben mit* $I \subseteq \bigcup_{j=1}^m I_j$. *Dann gilt*

$$\mathrm{vol}_n(I) \leq \sum_{j=1}^m \mathrm{vol}_n(I_j).$$

Das heißt, vol_n *ist subadditiv auf* $\mathbb{J}(n)$.

Beweis. Wir folgen [Fre04, 115B Lemma]. Der Beweis ist per Induktion nach n. Der Beweis des Induktionsanfangs $n = 1$ ist analog zum Induktionsschritt.

Induktionsschritt $n \to n + 1$. Sei die Behauptung des Satzes für ein $n \geq 1$ bewiesen. Seien $I, I_1, \dots I_m \in \mathbb{J}(n + 1)$ gegeben mit $I \subseteq \bigcup_{j=1}^m I_j$.

Wir führen folgende Notationen ein: $I = (a, b)$, $I_j = (a_j, b_j)$. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ schreiben wir $x = (x', x_{n+1})$ mit $x' \in \mathbb{R}^n$. Weiter setzen wir $I' := (a', b')$, $I'_j := (a'_j, b'_j)$. Hinzufügen des Apostrophs $(')$ streicht also die letzte Koordinate.

Für $t \in \mathbb{R}$ sei H_t der offene Halbraum

$$H_t := \{x \in \mathbb{R} : \ x_{n+1} < t\}.$$

Sind $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \leq y$ dann ist

$$(x, y) \cap H_t = (x', y') \times (\min(x_{n+1}, t), \min(y_{n+1}, t))$$

und

$$\mathrm{vol}_{n+1}((x, y) \cap H_t) = \mathrm{vol}_n((x', y')) \cdot (\min(y_{n+1}, t) - \min(x_{n+1}, t)). \tag{1.46}$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass $t \mapsto \mathrm{vol}_{n+1}((x, y) \cap H_t)$ stetig und monoton wachsend ist. Weiter definieren wir die 'gute' Menge

$$G := \left\{ t \in [a_{n+1}, b_{n+1}] : \ \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_t) \leq \sum_{j=1}^m \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) \right\}. \tag{1.47}$$

Wir zeigen nun, dass $b_{n+1} \in G$. Daraus folgt dann die Induktionsbehauptung, da $I \cap H_{b_{n+1}} = I$ und $\mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) \leq \mathrm{vol}_{n+1}(I_j)$ für alle t. Wir beweisen nun der Reihe nach, dass G nicht leer, abgeschlossen und in einem gewissen Sinne offen ist. Offensichtlich ist $a_{n+1} \in G$, da dann wegen $I \cap H_{a_{n+1}} = \emptyset$ die linke Seite der Ungleichung gleich Null ist.

G ist abgeschlossen. Wegen (1.46) sind die Funktionen $t \mapsto \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_t)$ und $t \mapsto \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t)$ stetig. Damit ist G das Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung. (Langfassung: Ist (t_k) eine Folge mit $t_k \in G$ und $t_k \to t$ dann können wir in der Ungleichung in (1.47) zur Grenze

gehen, und $t \in G$.)

G hat folgende Eigenschaft: ist $s \in G$ mit $s < b_{n+1}$, dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass $(s, s+\varepsilon) \subseteq G$. Sei $s \in G$ mit $s < b_{n+1}$. Für $t \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_t) &= \mathrm{vol}_n(I') \cdot (t - a_{n+1}) \\ &= \mathrm{vol}_n(I') \cdot (t - s + s - a_{n+1}) \\ &= \mathrm{vol}_n(I') \cdot (t - s) + \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_s). \end{aligned} \tag{1.48}$$

Eine analoge Umformung wollen wir auch für die Ausdrücke $\mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t)$ machen. Hier betrachten wir nur die Quader, die tatsächlich von H_s geschnitten werden.

Setze $J := \{j : \; s \in (a_{j,n+1}, b_{j,n+1})\}$. Da die I_j den Quader I überdecken folgt $I' \times \{s\} \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j$. Dann ist auch $I' \subseteq \bigcup_{j \in J} I'_j$, woraus per Induktionsvoraussetzung folgt

$$\mathrm{vol}_n(I') \le \sum_{j \in J} \mathrm{vol}_n(I'_j). \tag{1.49}$$

Setze

$$\varepsilon := \min\left(\{b_{n+1} - s\} \cup \{b_{j,n+1} - s : \; j \in J\}\right) > 0.$$

Dann folgt $(s, s+\varepsilon) \subseteq (a_{n+1}, b_{n+1})$ und $(s, s+\varepsilon) \subseteq (a_{j,n+1}, b_{j,n+1})$ für alle $j \in J$.

Sei nun $j \in J$ und $t \in [s, s+\varepsilon)$. Dann vereinfacht sich die Berechnung von $\mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t)$ (vergleiche (1.48)) zu

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) &= \mathrm{vol}_n(I'_j) \cdot (t - a_{j,n+1}) \\ &= \mathrm{vol}_n(I'_j) \cdot (t - s) + \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_s). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Weiter ist für $t \ge s$ und $j \notin J$ wegen (1.46)

$$\mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) \ge \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_s). \tag{1.51}$$

Jetzt kombinieren wir (1.48), (1.49), $s \in G$ und (1.47), (1.50) und (1.51) und erhalten

$$\mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_t) = \mathrm{vol}_n(I') \cdot (t - s) + \mathrm{vol}_{n+1}(I \cap H_s)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j\in J} \mathrm{vol}_n(I'_j)\right) \cdot (t-s) + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_s) \\
&= \sum_{j\in J} \big(\mathrm{vol}_n(I'_j) \cdot (t-s) + \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_s)\big) + \sum_{j\notin J} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_s) \\
&\leq \sum_{j\in J} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) + \sum_{j\notin J} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}_{n+1}(I_j \cap H_t),
\end{aligned}
$$

so dass $[s, s+\varepsilon) \subseteq G$.

Ende des Induktionsschrittes. Sei $s := \sup G$. Dann ist $s \in G$, weil G abgeschlossen ist. Ist $s < b_{n+1}$, dann wäre $[s, s+\varepsilon) \subseteq G$, ein Widerspruch zu $s = \sup G$. Also ist $s = b_{n+1}$, und der Induktionsschritt ist vollständig bewiesen.

Induktionsanfang. Der Beweis für den Fall $n = 0$ kann aus dem Beweis für $n \geq 1$ wie folgt erhalten werden: Im obigen Beweis ersetzen wir $\mathrm{vol}_0(I')$ und $\mathrm{vol}_0(I'_j)$ durch 1. Dann gelten alle oben entwickelten Formeln auch für $n = 0$, denn (1.48), (1.50), (1.51) sind Längenberechnungen der Intervalle $I \cap H_t$ und $I_j \cap H_t$. □

Bemerkung 1.52. *[Fre04] beweist diesen Satz sogar für eine abzählbare Überdeckung, dadurch kann im Beweis von Satz 1.44 auf das Kompaktheitsargument verzichtet werden.*

Bemerkung 1.53. *Im obigen Beweis haben wir Induktion über reelle Zahlen durchgeführt, um zu zeigen, dass $G = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, siehe dazu auch [Cla12]. Das dahinterliegende Grundprinzip ist: ist $G \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer, offen und abgeschlossen, dann ist $G = \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist. (Eine Menge ist zusammenhängend, wenn sie nicht die disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer, offener Menge ist.)*

Bemerkung 1.54. *Mit mehr oder weniger großen Veränderungen im Beweis von Satz 1.45 kann man die Subadditivität von vol_n auf $\mathbb{J}_l(n)$, $\mathbb{J}_r(n)$, $\bar{\mathbb{J}}(n)$ beweisen. Mit der gleichen Beweisidee kann auch die Additivität von vol_n auf $\mathbb{J}(n)$ beweisen: Es muss noch argumentiert werden, warum die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist. Weiter muss die Wahl von ε angepasst werden, so dass in (1.51) Gleichheit für $t \in [s, s+\varepsilon)$ gilt.*

Das Lebesguessche äußere Maß kann auch durch Überdeckungen mit halboffenen oder abgeschlossenen Quadern erzeugt werden.

Satz 1.55. *Sei $\mathbb{J} \in \{\mathbb{J}(n), \mathbb{J}_l(n), \mathbb{J}_r(n), \bar{\mathbb{J}}(n)\}$. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist*

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(I_j) : \ I_j \in \mathbb{J}, \ \bigcup_{j=1}^\infty I_j \supseteq A \right\}.$$

Beweis. Es seien λ_l^*, λ_r^*, λ_a^* die durch Überdeckungen aus $\mathbb{J}_l(n)$, $\mathbb{J}_r(n)$, $\bar{\mathbb{J}}(n)$ erzeugten äußeren Maße. Wir beweisen nur $\lambda_n^*(A) \le \lambda_a^*(A)$. Mit offensichtlichen Vereinfachungen beweist man die Ungleichungen $\lambda_a^*(A) \le \lambda_l^*(A) \le \lambda_n^*(A)$ und $\lambda_a^*(A) \le \lambda_l^*(A) \le \lambda_n^*(A)$.

Sei nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung von A mit abgeschlossenen Quadern $I_j = [a_j, b_j]$, so dass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty [a_j, b_j]$ und

$$\sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(a_j, b_j) \le \lambda_a^*(A) + \varepsilon.$$

Diese abgeschlossenen Quader überdecken wir mit offenen Quadern

$$(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) := \big(a_j - \varepsilon(b_j - a_j), \ b_j + \varepsilon(b_j - a_j)\big) \supseteq [a_j, b_j],$$

woraus folgt

$$\mathrm{vol}_n(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) = (1 + 2\varepsilon)^n \,\mathrm{vol}_n(a_j, b_j).$$

Dann ist $\bigcup_{j=1}^\infty (\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ eine Überdeckung von A mit offenen Quadern, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(A) &\le \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) \\ &= (1 + 2\varepsilon)^n \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(a_j, b_j) \\ &\le (1 + 2\varepsilon)^n (\lambda_a^*(A) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, so dass $\lambda_n^*(A) \le \lambda_a^*(A)$ folgt. □

Aufgabe 1.56. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass $\lambda_n^*(A) = 0$.*

1.4 Messbare Mengen

Es sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Wir werden daraus einen Maß konstruieren. Die auf Caratheodory zurückgehende Idee ist, eine geschickte Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zu betrachten, so dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ ein Maß wird.

Für eine Motivation der folgenden Definition siehe [AE01, Abschnitt IX.4].

Definition 1.57. *wobei $\mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap D) \leq \mu^*(D) < +\infty$ ist. Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt μ^*-messbar, falls gilt*

$$\mu^*(D) = \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \qquad \forall D \subseteq X.$$

Es sei $\mathcal{A}(\mu^*)$ die Menge der μ^*-messbaren Mengen. Ist $\mu^*(N) = 0$, dann heißt N μ^*-Nullmenge.

Da μ^* subadditiv ist, ist die Messbarkeit von A ($A \in \mathcal{A}(\mu^*)$) äquivalent zu

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D) \qquad \forall D: \ \mu^*(D) < +\infty.$$

Folgerung 1.58. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Gibt es eine nicht μ^*-messbare Menge, dann ist μ^* nicht additiv.*

Beweis. Sei A nicht μ^*-messbar. Dann gibt es eine Menge $D \subseteq X$, so dass $\mu^*(D) < \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D)$. Die Mengen $A \cap D$ und $A^c \cap D$ sind disjunkt, also ist μ^* nicht additiv. □

Lemma 1.59. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Jede μ^*-Nullmenge ist μ^*-messbar.*

Beweis. Sei $N \subseteq X$ mit $\mu^*(N) = 0$. Sei $D \subseteq X$ mit $\mu^*(D) < +\infty$. Wegen der Monotonie von μ^* folgt

$$\mu^*(N \cap D) + \mu^*(N^c \cap D) \leq \mu^*(N) + \mu^*(D) = \mu^*(D),$$

und N ist messbar. □

Satz 1.60. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Dann ist $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ-Algebra, und $\mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ ist ein vollständiges Maß.*

Beweis. Offensichtlich ist $X \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Sei nun $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Da $(A^c)^c = A$ folgt sofort $A^c \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

Schritt 1: endliche Vereinigungen. Wir zeigen erst, dass endliche Vereinigungen μ^*-messbarer Mengen wieder μ^*-messbar sind. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Sei $D \subseteq X$ mit $\mu^*(D) < +\infty$. Wir müssen die Ungleichung

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap D) \leq \mu^*(D)$$

beweisen. Für den zweiten Summanden bekommen wir aus der Messbarkeit von

A_1 (mit Testmenge $A_2^c \cap D$)

$$\begin{aligned} \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap D) &= \mu^*(A_1^c \cap (A_2^c \cap D)) \\ &= \mu^*(A_2^c \cap D) - \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap D), \end{aligned} \tag{1.61}$$

Nun ist es zweckmäßig folgenden Fakt

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2^c) \cup A_2$$

zu benutzen, so dass aus der Subadditivität von μ^* folgt

$$\begin{aligned} \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) &= \mu^*((A_1 \cap A_2^c \cap D) \cup (A_2 \cap D)) \\ &\leq \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap D) + \mu^*(A_2 \cap D). \end{aligned} \tag{1.62}$$

Addieren von (1.61) und (1.62) sowie das Ausnutzen der Messbarkeit von A_2 ergibt die Behauptung:

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap D) \leq \mu^*(A_2^c \cap D) + \mu^*(A_2 \cap D)) \leq \mu^*(D).$$

Hier war $\mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap D) \leq \mu^*(D) < \infty$ wichtig. Es folgt $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Per Induktion zeigt man, dass die Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathcal{A}(\mu^*)$ wieder in $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist.

Schritt 2: abzählbare, disjunkte Vereinigungen; σ-Additivität von μ^*. Sei (A_j) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}(\mu^*)$. Sei $D \subseteq X$. Da A_1 messbar ist erhalten wir (Achtung: hier wird als Testmenge $(A_1 \cup A_2) \cap D$ verwendet!)

$$\begin{aligned} \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) &= \mu^*(A_1 \cap (A_1 \cup A_2) \cap D) + \mu^*(A_1^c \cap (A_1 \cup A_2) \cap D) \\ &= \mu^*(A_1 \cap D) + \mu^*(A_2 \cap D). \end{aligned}$$

Per Induktion folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^m (A_j \cap D)\right) = \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j \cap D) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Setze $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Wegen der Monotonie von μ^* folgt

$$\mu^*(A \cap D) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^m (A_j \cap D)\right) = \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j \cap D) \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.63}$$

Grenzübergang $m \to \infty$ liefert

$$\mu^*(A \cap D) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j \cap D).$$

Aus der σ-Subadditivität von μ^* folgt

$$\mu^*(A \cap D) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j \cap D) \geq \mu^*(A \cap D), \tag{1.64}$$

also sind alle Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt. Für $D := X$ bekommen wir hieraus die σ-Additiviät von μ^* auf $\mathcal{A}(\mu^*)$. Wir müssen noch $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$ zeigen. Nach dem in Schritt 1 bewiesenen gilt für alle m

$$\mu^*(D) \geq \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \cap D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right)^c \cap D\right).$$

Ausnutzen von (1.63) und $(\bigcup_{j=1}^{m} A_j)^c \supseteq A^c$ ergibt

$$\mu^*(D) \geq \left[\sum_{j=1}^{m} \mu^*(A_j \cap D)\right] + \mu^*(A^c \cap D).$$

Grenzübergang $m \to \infty$ ergibt die gewünschte Ungleichung, wobei (1.64) benutzt wurde, und A ist messbar.

Schritt 3: abzählbare (beliebige) Vereinigungen. Sei (A_j) eine Folge aus $\mathcal{A}(\mu^*)$. Wir benutzen die Konstruktion aus der Beweis von (1.31). Definiere $B_j := A_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \subseteq A_j$. Dann sind die B_j paarweise disjunkt, und es gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Wegen

$$B_{j+1} = A_{j+1} \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) = A_{j+1} \cap \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i^c = (A_{j+1}^c \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i)^c$$

kann man per Induktion mithilfe von Schritt 1 zeigen, dass $B_j \in \mathcal{A}(\mu^*)$ für alle j. Aus Schritt 2 folgt $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A}(\mu^*)$ und damit $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

Damit ist $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ-Algebra, und $\mu^*|_{\mathcal{A}(\mu^*)}$ ist ein Maß. Die Vollständigkeit folgt aus Lemma 1.59. □

Allerdings ist hier nicht klar, dass $\mathcal{A}(\mu^*)$ auch nicht-triviale Mengen enthält, also ob $\mathcal{A}(\mu^*) \neq \{\emptyset, X\}$.

Bemerkung 1.65. *Es gibt tatsächlich Beispiele für äußere Maße, für die nur $\emptyset$ und X messbar sind. Das folgende Beispiel ist aus [DT15, Example 2]. Sei*

$X = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, die obere, offene Halbebene. Für $x \in \mathbb{R}$, $s > 0$, definiere die offenen Mengen

$$T(x, s) = \{(y, t) \in X : \ t < s, \ |x - y| < s - t\},$$

diese Mengen sind "Zelte" (englisch: tents) mit Eckpunkten $(x-s, 0)$, $(x+s, 0)$, (x, s). Weiter wird $\nu(T(x, s)) := s$ und $K := \{T(x, s) : \ x \in \mathbb{R}, s > 0\} \cup \{\emptyset\}$ gesetzt. Für das per Satz 1.37 konstruierte Maß ist $\mathcal{A}(\mu^*) = \{\emptyset, X\}$.

Zuerst geben wir eine untere Schranke von μ^* an. Sei $E \subseteq X$ mit $(y, t) \in E$. Dann muss jede Überdeckung von E ein Zelt $T(x, s)$ mit $s > t$ enthalten, also ist $\mu^*(E) \geq t$. Daraus folgt auch $\mu^*(T(x, s)) = s$.

Sei $E \subsetneq X$ nicht leer. Dann hat E einen Randpunkt (x_0, s_0). Sei $T(x, s)$ so, dass $(x_0, s_0) \in T(x, s)$ und $s < 2s_0$. Dann gibt es Punkte $(y, t) \in E \cap T(x, s)$ und $(y', t') \in E^c \cap T(x, s)$ in der Umgebung von (x_0, s_0) mit $t + t' > s$. Damit ist $\mu^*(E \cap T(x, s)) \geq t$ und $\mu^*(E^c \cap T(x, s)) \geq t'$, woraus

$$\mu^*(T(x, s)) = s < t + t' \leq \mu^*(E \cap T(x, s)) + \mu^*(E^c \cap T(x, s))$$

folgt, und E ist nicht μ^*-messbar.

Für das Lebesguessche äußere Maß sind allerdings genug Mengen messbar.

Lemma 1.66. *Sei λ_n^* das Lebesguessche äußere Maß. Für $k \in \{1 \ldots n\}$ und $t \in \mathbb{R}$ definiere den offenen Halbraum $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_k < t\}$. Dann ist H λ_n^*-messbar.*

Beweis. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n^*(D) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung von D mit offenen Quadern (I_j), so dass $\sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(D) + \varepsilon$.

Die Mengen $I_j \cap H$ sind offene Quader, $\bar{I}_j \cap H^c$ abgeschlossene Quader. Weiter ist

$$\mathrm{vol}_n(I_j) = \mathrm{vol}_n(I_j \cap H) + \mathrm{vol}_n(\bar{I}_j \cap H^c).$$

Dann ist $(I_j \cap H)$ eine Überdeckung von $D \cap H$ mit offenen Quadern, während $(\bar{I}_j \cap H^c)$ eine Überdeckung von $D \cap H^c$ mit abgeschlossenen Quadern ist. Wegen Satz 1.55 bekommen wir

$$\begin{aligned}\lambda_n^*(D \cap H) + \lambda_n^*(D \cap H^c) &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(I_j \cap H)\right) + \left(\sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(\bar{I}_j \cap H^c)\right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(D) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Messbarkeit von H. $\square$

Satz 1.67. *Sei λ_n^* das Lebesguessche äußere Maß. Dann gilt $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{A}(\lambda_n^*)$.*

Beweis. Sei $a \le b$. Dann ist

$$[a,b) = \bigcap_{k=1}^{n} \left(\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_k < a_k\}^c \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_k < b_k\} \right).$$

Nach Lemma 1.66 sind alle beteiligten Mengen λ_n^*-messbar, also ist auch $[a,b)$ λ_n^*-messbar. Es folgt $\mathbb{J}_r(n) \subseteq \mathcal{A}(\lambda_n^*)$. Da $\mathcal{B}^n$ von den halboffenen Quadern erzeugt wird nach Satz 1.16 gilt $\mathcal{B}^n = \mathcal{A}_\sigma(\mathbb{J}_r(n)) \subseteq \mathcal{A}(\lambda_n^*)$. □

1.5 Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Wir vereinbaren folgende Abkürzungen.

Definition 1.68. *Die Menge*

$$\mathcal{L}(n) := \mathcal{A}(\lambda_n^*)$$

heißt Menge der Lebesgue-messbaren Mengen. Das dazugehörige Maß

$$\lambda_n := \lambda_n^*|_{\mathcal{L}(n)}$$

heißt Lebesgue-Maß.

Wir wissen bereits folgende Eigenschaften:

(1) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ ist ein vollständiger Maßraum (Satz 1.60),

(2) alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar, $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{L}(n)$, (Satz 1.67)

(3) damit ist auch $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda_n|_{\mathcal{B}^n})$ ein Maßraum, $\lambda_n|_{\mathcal{B}^n}$ heißt Borel-Lebesgue-Maß,

(4) $\lambda_n(A) = \mathrm{vol}_n(a,b)$ für alle A mit $(a,b) \subseteq A \subseteq [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}^n$ (Satz 1.44),

(5) ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und Lebesgue-messbar, dann ist $\lambda_n(A) < \infty$,

(6) λ_n ist σ-endlich: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^\infty [-j,+j]^n$.

Satz 1.69. *Das Lebesgue-Maß λ_n ist regulär in folgendem Sinne. Für $A \in \mathcal{L}(n)$ gilt*

$$\lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(O) : \ O \supseteq A, \ O \textit{ offen}\},$$

$$\lambda_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : \ K \subseteq A, \ K \textit{ kompakt}\}.$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(n)$. Ist $K \subseteq A \subseteq O$, dann folgt $\lambda_n(K) \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_n(O)$ aus der Monotonie von Maßen (1.28).

Schritt 1: äußere Regularität. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Konstruktion von λ_n (Satz 1.44) eine Folge (I_j) offener Quader mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon$$

Setze $O := \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, dann ist wegen $\mathrm{vol}_n(I_j) = \lambda_n(I_j)$

$$\lambda_n(O) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(I_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon.$$

Und die erste Behauptung folgt.

Schritt 2: innere Regularität für beschränktes A. Zunächst nehmen wir an, dass A beschränkt ist, dann ist $\lambda_n(A) < \infty$. Dann existiert eine kompakte Menge C mit $C \supseteq A$. Aufgrund des ersten Teils existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $O \supseteq C \setminus A$, so dass

$$\lambda_n(O) \leq \lambda_n(C \setminus A) + \varepsilon = \lambda_n(C) - \lambda_n(A) + \varepsilon.$$

Dann ist $K := C \setminus O$ kompakt, wobei $K = C \cap O^c \subseteq C \cap (C \cap A^c)^c = A$. Weiter ist

$$\lambda_n(C) \leq \lambda_n(K) + \lambda_n(O) \leq \lambda_n(K) + \lambda_n(C) - \lambda_n(A) + \varepsilon.$$

Da $\lambda_n(C) < \infty$ folgt $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(K) + \varepsilon$. Und die zweite Behauptung ist für beschränktes A bewiesen.

Schritt 3: innere Regularität. Sei nun $A \in \mathcal{L}(n)$ beliebig. Ist $\lambda(A) = 0$ dann folgt die Behauptung mit $K = \emptyset$. Sei also nun $\lambda(A) > 0$. Sei $\alpha \in (0, \lambda(A))$. Definiere die Funktion

$$t \mapsto \lambda_n(A \cap [-t, t]^n).$$

Wegen der Monotonie von Maßen (1.28),(1.29) ist diese Funktion für $t > 0$ monoton wachsend und stetig. Das heißt, es gibt ein $t > 0$, so dass $\lambda_n(A \cap [-t, t]^n) > \alpha$. Wegen Schritt 2 existiert eine kompakte Menge $K \subseteq A \cap [-t, t]^n$ mit $\lambda_n(K) > \alpha$. Da $\alpha < \lambda_n(A)$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Lebesgue-messbare Mengen lassen sich wie folgt charakterisieren.

Satz 1.70. *Sei $A \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $A \in \mathcal{L}(n)$ genau dann, wenn eine Folge kompakter Mengen (K_j) und eine Nullmenge $N \in \mathcal{L}(n)$ existieren, so dass $A = N \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.*

Beweis. Die Richtung "$\Leftarrow$" folgt sofort aus den Maßraumeigenschaften. Wir beweisen "$\Rightarrow$". Sei $A \in \mathcal{L}(n)$ mit $\lambda_n(A) < \infty$. Wegen der inneren Regularität von λ_n (Satz 1.69), existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine kompakte Menge $K_j \subseteq A$, so dass $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(K_j) + \frac{1}{j}$ ist. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \subseteq A$, und es folgt $\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) < \infty$. Wir setzen $N := A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Dann ist $N \subseteq A \setminus K_j$, woraus $\lambda_n(N) = \lambda_n(A) - \lambda_n(K_j) \leq \frac{1}{j}$ folgt. Dies gilt für alle j, also ist $\lambda_n(N) = 0$.

Sei nun $A \in \mathcal{L}(n)$. Dann hat $A_i := A \cap B_i(0)$ endliches Maß für alle i, und wegen des ersten Teils ist $A_i = N_i \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j}$ mit kompakten Mengen $K_{i,j}$ und Nullmengen N_i. Es folgt

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(N_i \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j} \right) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \right).$$

Da $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ wieder eine Nullmenge ist, hat A die gewünschte Darstellung. □

Bemerkung 1.71. *Mit Satz 1.70 und Lemma 1.18 kann man zeigen, dass gilt $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n) \subsetneq \mathcal{L}(m+n)$. Gleichheit gilt hier nicht! Ist $x \in \mathbb{R}^m$, dann ist $\{x\} \in \mathcal{L}(n)$ eine Nullmenge. Weiter sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig, dann ist $\{x\} \times B \in \mathcal{L}(m+n)$, da es eine λ^*_{m+n}-Nullmenge ist. Man kann zeigen, dass $\{x\} \times B$ nicht in $\mathcal{L}(m) \otimes \mathcal{L}(n)$ ist, wenn $B \notin \mathcal{L}(n)$.*

Eine Nullmenge lässt sich auch wie folgt charakterisieren.

Folgerung 1.72. *Sei A eine λ_n-Nullmenge. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ abzählbar viele kompakte Würfel (I_j) mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(I_j) < \varepsilon$.*

Beweis. Aus der Definition des äußeren Maßes λ_n^* bekommen wir eine Zerlegung mit offenen Quadern (I_j). Jeder dieser Quader ist eine abzählbare Vereinigung von halboffenen Würfeln (Satz 1.14). Nehmen wir den Abschluss aller dieser Würfel, erhalten wir eine abzählbare Vereinigung mit kompakten Würfeln. □

Satz 1.73. *Der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ ist die Vervollständigung des Maßraums $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda_n|_{\mathcal{B}^n})$.*

Beweis. Wir benutzen die Konstruktion aus Satz 1.35. Ist M eine Teilmenge einer $\lambda_n|_{\mathcal{B}^n}$-Nullmenge, dann folgt $M \in \mathcal{L}(n)$, und wir bekommen $\overline{\mathcal{B}^n} \subseteq \mathcal{L}(n)$. Die Rückrichtung beweisen wir mit Satz 1.70 und Folgerung 1.72. (Ist $N \in \mathcal{L}(n)$ eine λ_n-Nullmenge, dann zeigt man mit Folgerung 1.72, dass N Teilmenge einer $\lambda_n|_{\mathcal{B}^n}$-Nullmenge ist.) □

Wir beweisen nun, dass Bilder von Nullmengen unter gewissen Umständen wieder Nullmengen sind. Dazu benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma 1.74. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Es existiere $\delta > 0$, so dass $\|x - y\|_\infty \leq \delta$ für alle $x, y \in M$. Dann ist M in einem Würfel mit Seitenlänge δ enthalten.*

Beweis. Definiere $M_k := \{x_k : x \in M\}$. Setze $a_k := \inf M_k$ und $b_k := \sup M_k$. Dann folgt $|a_k - b_k| \le \delta$ und $M_k \subseteq [a_k, b_k]$. Damit ist $M \subseteq [a, b]$. Der Quader $[a, b]$ ist in einem Würfel mit Seitenlänge δ enthalten. □

Satz 1.75. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \ge n$, Lipschitz stetig, d.h. $\exists L > 0$:*

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \le L\|x - y\|_\infty \ \forall x, y \in U.$$

Sei $A \subseteq U$ eine λ_n-Nullmenge. Dann ist $f(A)$ eine λ_m-Nullmenge.

Beweis. Sei $A \subseteq U$ eine λ_n-Nullmenge. Sei $\varepsilon \in (0, 1)$ und (I_j) die Überdeckung von A durch kompakte Würfel mit $\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(I_j) < \varepsilon$ aus Folgerung 1.72.

Sei $I_j = [a, b]$, dann ist $x_j := \frac{1}{2}(a + b)$ der Mittelpunkt von I_j, und I_j ist eine 'Kugel' um x_j in der ∞-Norm: $I_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_j\|_\infty \le \frac{1}{2}\|b - a\|_\infty\}$. Seien nun $x, y \in I_j \cap U$. Dann können wir abschätzen

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \le L\|x - y\|_\infty \le L\|b - a\|_\infty.$$

Wegen Lemma 1.74 ist $f(I_j \cap U)$ in einem Würfel $\tilde{I}_j$ enthalten. Die Seitenlänge $L\|b - a\|_\infty$ von $\tilde{I}_j \subseteq \mathbb{R}^m$ ist das L-fache der Seitenlänge $\|b - a\|_\infty$ von $I_j \subseteq \mathbb{R}^n$. Das heißt,

$$\mathrm{vol}_m(\tilde{I}_j) = (L\|b - a\|_\infty)^m = L^m \,\mathrm{vol}_n(I_j)^{m/n}.$$

Dann folgt

$$f(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty f(I_j \cap U) \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty \tilde{I}_j$$

und

$$\lambda_m^*(f(A)) \le \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_m(\tilde{I}_j) = \sum_{j=1}^\infty L^m \,\mathrm{vol}_n(I_j)^{m/n}.$$

Da $\mathrm{vol}_n(I_j) < \varepsilon < 1$ folgt

$$\lambda_m^*(f(A)) \le L^m \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(I_j) \le L^m \varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in (0, 1)$ beliebig war, folgt $\lambda_m^*(f(A)) = 0$, und $f(A)$ ist eine λ_m-Nullmenge. Insbesondere ist $f(A)$ λ_m-messbar. □

Bemerkung 1.76. *Die Aussage ist nur richtig für $m \ge n$. Für $m < n$ ist sie im Allgemeinen falsch: Seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ beliebig, $B \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ eine Nullmenge. Dann ist $A \times B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Definiere $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$. Dann ist f linear und Lipschitz stetig mit $L = 1$ auf $\mathbb{R}^n$, aber $f(A \times B) = A$ muss keine Nullmenge, ja nicht einmal messbar sein.*

Bemerkung 1.77. *Die Aussage ist nicht richtig, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird. Die Peano-Kurve p ist eine stetige und surjektive Abbildung von $[0,1]$ nach $[0,1]^2$. Definiert man $f(x_1,x_2) = p(x_1)$, dann ist f stetig und $f([0,1]\times\{0\}) = [0,1]^2$, wobei $[0,1]\times\{0\}$ eine Nullmenge ist.*

Satz 1.78. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \bar{U} \to \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, Lipschitz stetig, d.h. $\exists L > 0$:*

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\|x-y\|_\infty \ \forall x,y \in U.$$

Sei $A \subseteq \bar{U}$ mit $A \in \mathcal{L}(n)$. Dann ist $f(A) \in \mathcal{L}(m)$.

Beweis. Wegen Satz 1.70 gibt es eine Folge kompakter Mengen (K_j) und eine Nullmenge N, so dass

$$A = N \cup \bigcup_{j=1}^\infty K_j = (N \cap \bar{U}) \cup \bigcup_{j=1}^\infty (K_j \cap \bar{U}).$$

Dann ist $f(N \cap \bar{U})$ eine Nullmenge, weiter sind die Mengen $f(K_j \cap \bar{U})$ kompakt. Also ist $f(A) = f(N \cap \bar{U}) \cup \bigcup_{j=1}^\infty f(K_j \cap \bar{U})$ in $\mathcal{L}(m)$. □

1.6 Translations- und Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes

Für $a \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$\tau_a(x) := x + a,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildung $x \mapsto \tau_a(x)$ realisiert eine Verschiebung von x (Translation) um den Vektor a. Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass das Lebesgue-Maß (bis auf eine multiplikative Konstante) durch die Invarianz gegenüber Translationen eindeutig bestimmt ist.

Satz 1.79. *$\mathcal{L}(n)$ und λ_n sind translationsinvariant: Für alle $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(n)$ gilt $\tau_a(A) \in \mathcal{L}(n)$ und $\lambda_n(A) = \lambda_n(\tau_a(A))$.*

Beweis. $\mathbb{J}(n)$ und vol_n sind translationsinvariant: $I \in \mathbb{J}(n)$ impliziert $\tau_a(I) \in \mathbb{J}(n)$ und $\mathrm{vol}_n(I) = \mathrm{vol}_n(\tau_a(I))$. Damit sind λ_n^* und $\mathcal{L}(n)$ translationsinvariant, also auch λ_n. □

Wir beweisen nun, dass ein translationsinvariantes Maß ein Vielfaches von λ_n ist.

Satz 1.80. *Es sei $\mathcal{M}$ eine translationsinvariante σ-Algebra mit $\mathbb{J}_r(n) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(n)$ und μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{M}$. Es sei $\alpha := \mu([0,1)^n) < \infty$. Dann gilt*

$$\mu(A) = \alpha\lambda_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

Beweis. Wegen Satz 1.14 enthält $\mathcal{M}$ alle offenen und damit alle Borel-Mengen.

Schritt 1: Quader mit ganzzahligen Eckpunkten. Sei $e := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen zuerst die Behauptung für Quader $[0, b)$ mit $b \in \mathbb{N}^n$. Diesen Quader können wir durch $\prod_{i=1}^n b_i$ verschobene Einheitsquader überdecken:

$$[0, b) = \bigcup_{a \in [0,b) \cap \mathbb{Z}^n} \tau_a([0, e).$$

Da μ und λ_n translationsinvariante Maße sind folgt

$$\begin{aligned} \mu([0, b)) &= \sum_{a \in [0,b) \cap \mathbb{Z}^n} \mu(\tau_a([0, e))) = \sum_{a \in [0,b) \cap \mathbb{Z}^n} \mu([0, e)) \\ &= \alpha \sum_{a \in [0,b) \cap \mathbb{Z}^n} \lambda_n([0, e)) = \alpha \sum_{a \in [0,b) \cap \mathbb{Z}^n} \lambda_n(\tau_a([0, e))) = \alpha \lambda_n([0, b)). \end{aligned}$$

Schritt 2: Quader mit rationalen Eckpunkten. Sei nun $b \in \mathbb{Q}^n$ mit $b \geq 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $kb \in \mathbb{N}^n$. Den Quader $[0, kb)$ können wir durch k^n Kopien von $[0, b)$ überdecken. Auf den Quader $[0, kb)$ können wir das Resultat von Schritt 1 anwenden. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} k^n \mu([0, b)) = \sum_{a \in \{0 \dots k-1\}^n} \mu(\tau_{ab}([0, b))) &= \mu([0, kb)) \\ &= \alpha \lambda_n([0, kb)) = \dots = \alpha k^n \lambda_n([0, b)). \end{aligned}$$

Hier haben wir verkürzt $ab := (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$ geschrieben. Da μ und λ translationsinvariant sind, folgt die Behauptung für alle Quader $[a, b)$ mit rationalen Eckpunkten $a, b \in \mathbb{Q}^n$.

Schritt 3: Offene Mengen. Sei O offen. Nach Satz 1.14 ist O eine disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Quader (I_j) mit rationalen Eckpunkten, $O = \bigcup_{j=1}^\infty I_j$, $I_j \in \mathbb{J}_r(n)$, und die (I_j) sind paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\mu(O) = \sum_{j=1}^\infty \mu(I_j) = \alpha \sum_{j=1}^\infty \lambda_n(I_j) = \alpha \lambda_n(O).$$

Schritt 4: Kompakte Mengen. Sei K kompakt, U eine offene und beschränkte Menge mit $K \subseteq U$. Damit ist $\lambda_n(U) < \infty$ und wegen Schritt 4 auch $\mu(U) < \infty$. Wegen Schritt 3 ist

$$\mu(K) = \mu(U) - \mu(U \setminus K) = \alpha(\lambda_n(U) - \lambda_n(U \setminus K)) = \alpha \lambda_n(K).$$

Schritt 5: Beschränkte Mengen. Sei $A \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(n)$ beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes Satz 1.69 existiert eine offene Menge

$O \supseteq A$ und eine kompakte Menge $K \subseteq A$, so dass

$$\lambda_n(O) - \varepsilon \le \lambda_n(A) \le \lambda_n(K) + \varepsilon.$$

Wegen der Schritte 4 und 5 folgt

$$\mu(O) - \alpha\varepsilon \le \alpha\lambda_n(A) \le \mu(K) + \alpha\varepsilon.$$

Aus der Monotonie von μ bekommen wir

$$\mu(A) - \alpha\varepsilon \le \alpha\lambda_n(A) \le \mu(A) + \alpha\varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $\mu(A) = \alpha\lambda_n(A)$. (Hier haben wir $\alpha < +\infty$ benötigt.)

Schritt 6: Beliebige Mengen. Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann gilt $\mu(A \cap B_k(0)) = \alpha\lambda_n(A \cap B_k(0))$ für alle k. Grenzübergang $k \to \infty$ mithilfe von (1.29) beweist die Behauptung. □

Lemma 1.81. *Es seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$ für alle $B \in \mathcal{B}(Y)$.*

Beweis. Wir betrachten $f_*(\mathcal{B}(X)) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)\}$, was nach Beispiel 1.4 eine σ-Algebra ist. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(X)$ für alle offenen Mengen $O \subseteq Y$, und damit $O \in f_*(\mathcal{B}(X))$. Also ist $f_*(\mathcal{B}(X))$ eine σ-Algebra, die alle offenen Mengen aus Y enthält, damit ist $\mathcal{B}(Y) \subseteq f_*(\mathcal{B}(X))$, was die Behauptung ist. □

Satz 1.82. *Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt $\lambda_n(A) = \lambda_n(QA)$ für alle $A \in \mathcal{B}^n$, wobei $QA := \{Qx : x \in A\}$.*

Beweis. Die Abbildung $x \mapsto Q^{-1}x$ ist stetig, und $QA \in \mathcal{B}^n$ für alle $A \in \mathcal{B}^n$ nach Lemma 1.81. Definiere $\mu(A) := \lambda_n(QA)$. Dann ist μ ein Maß auf $\mathcal{B}^n$. Weiter ist μ translationsinvariant: $\mu(\tau_a(A)) = \lambda_n(Q(A+a)) = \lambda_n(QA+Qa) = \lambda_n(QA) = \mu(A)$. Sei $A := [0,1)^n$. Dann ist QA in einer Kugel vom Radius $\operatorname{diam}(A) = \sqrt{n}$ enthalten. Damit ist $\mu(A) < \infty$. Nach Satz 1.80 ist $\mu(A) = \alpha\lambda_n(A)$. Wir zeigen nun $\alpha = 1$: Sei $B = B_1(0)$ die offene Einheitskugel. Dann ist $QB = B$ und $\alpha = 1$ folgt (denn $\lambda_n(B) < \infty$). □

Satz 1.83. *Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt $\lambda_n(SA) = |\det(S)|\lambda_n(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}^n$.*

Beweis. Der Beweis folgt dem von Satz 1.82. Definiere $\mu(A) := \lambda_n(SA)$. Dann ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^n$. Für $A := [0,1)^n$ ist SA in einer Kugel vom Radius $\sqrt{n}\|S\|_2$ enthalten. Damit ist $\mu(SA) < \infty$. Nach Satz 1.80 ist $\mu(A) = \alpha\lambda_n(A)$.

Wir benutzen nun die Singulärwertzerlegung von S: Die Matrix S^TS ist symmetrisch, also diagonalisierbar. Dann existiert eine orthogonale Matrix Q mit $Q^TS^TSQ = D$, wobei D diagonal mit positiven Diagonaleinträgen d_{ii} ist. Sei Σ die Matrix mit Diagonaleinträgen $d_{ii}^{1/2}$. Dann gilt $D = \Sigma^2$ und $\Sigma^{-1}Q^TS^TSQ\Sigma^{-1} = I_n$, also ist $P := \Sigma^{-1}Q^TS^T$ orthogonal, und es gilt $PSQ = \Sigma$. Dann bekommen wir für $A := [0,1)^n$

$$\mu(QA) = \lambda_n(SQA) = \lambda_n(P^T\Sigma A) = \lambda_n(\Sigma A),$$

wobei wir Satz 1.82 benutzt haben. Nun ist $\Sigma A = [0, \Sigma e)$ mit $e = (1,\dots,1)^T$, so dass $\lambda_n(\Sigma A) = \mathrm{vol}_n([0,\Sigma e)) = \prod_{i=1}^n d_{ii}^{1/2} = \det\Sigma$. Es gilt $\det\Sigma = (\det D)^{1/2} = |\det S|$. Damit ist

$$\mu(QA) = |\det S|\lambda_n(A) = |\det S|\lambda_n(QA),$$

und es folgt $\alpha = |\det S|$, was die Behauptung war. $\square$

Bemerkung 1.84. *Die Aussagen der beiden Sätze ist auch für alle $A \in \mathcal{L}(n)$ richtig. Hier muss im Beweis Satz 1.78 statt Lemma 1.81 benutzt werden.*

1.7 Existenz nicht Lebesgue-messbarer Mengen

Definition 1.85. *Das Auswahlaxiom der Mengenlehre ist: Es sei $(F_i)_{i\in I}$ ein System nicht-leerer Mengen. Dann existiert eine Abbildung f auf I mit $f(i) \in F_i$ für alle $i \in I$.*

Nimmt man $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ als System nicht-leerer Mengen, dann ist es schwierig (unmöglich?) eine Auswahlfunktion f anzugeben. Das Auswahlaxiom ist auch nötig, um zu beweisen, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist: die Existenz einer Abzählfunktion für jede der abzählbar vielen Mengen ist nicht klar ohne Auswahlaxiom. Als weitere Illustration des Auswahlaxioms soll folgendes auf Russell zurückgehendes Beispiel dienen: "Um aus unendlich vielen Paaren Socken jeweils eine Socke auszuwählen brauchen wir das Auswahlaxiom, für Schuhe wird es nicht benötigt: wir können jeweils den linken Schuh auswählen."

Satz 1.86. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu jeder der folgenden Aussagen:*

(1) Jeder Vektorraum hat eine Basis.

(2) Jede surjektive Funktion $f : X \to Y$ hat eine Rechtsinverse, d.h., es existiert $g : Y \to X$ mit $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

Lemma 1.87. *Gilt das Auswahlaxiom, dann existiert eine nicht λ_1-messbare Teilmenge A von $[0,1]$, d.h., $A \notin \mathcal{L}(1)$.*

Beweis. Wir betrachten auf $[0,1]$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Sei $K := [0,1]/\sim$ die Menge der dazugehörigen Äquivalenzklassen. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Abbildung $f : K \to [0,1]$ mit $f(\hat{x}) \in \hat{x}$, also eine Funktion, die jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten zuordnet (beziehungsweise aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten auswählt). Setze $V := f(K)$, was eine Auswahl von je einem Repräsentanten je Äquivalenzklasse ist. Wir zeigen nun, dass V nicht messbar ist.

Dazu zeigen wir, dass wir das Intervall $[0,1]$ mit abzählbar vielen disjunkten Kopien von V überdecken können. Wir zeigen zuerst $[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q+V)$. Sei $r \in [0,1]$. Dann gibt es ein $\hat{x} \in K$ mit $r \in \hat{x}$, weiter existiert $v \in V \cap \hat{x}$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $r = v + q$. Da $r, v \in [0,1]$ ist $q = r - v \in [-1,1]$. Offenbar gilt $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q+V) \subseteq [-1,2]$. Weiter bekommen wir: sind $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq q'$. Dann gilt $q + V \neq q' + V$.

Angenommen, V wäre messbar. Dann wäre auch $q + V$ messbar, und es würde folgen

$$1 = \lambda_1([0,1]) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda_1(q+V) \leq \lambda_1([-1,2]) = 3.$$

Nun ist aber $\lambda_1(q+V) = \lambda_1(V)$. Wegen der linken Ungleichung folgt $\lambda_1(V) > 0$, wegen der rechten Ungleichung aber $\lambda_1(V) \leq 0$. Ein Widerspruch. Also ist V nicht messbar. □

Gilt das Auswahlaxiom, dann ist das Lebesguessche äußere Maß λ_1^* nicht additiv.

1.8 Metrische Maße

Es sei (X,d) ein metrischer Raum, μ^* ein äußeres Maß auf X.

Definition 1.88. *μ^* heißt metrisches äußeres Maß, falls gilt:*

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n,\ d(A,B) > 0 \ \Rightarrow\ \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Dabei ist

$$d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b).$$

Satz 1.89. *Sei μ^* ein metrisches äußeres Maß auf X. Dann gilt $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}(\mu^*)$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass offene Mengen in X μ^*-messbar sind. Dann enthält $\mathcal{A}(\mu^*)$ alle offenen Mengen, und ist damit eine Obermenge von $\mathcal{B}(X)$.

Sei nun $O \subsetneq X$ offen. Wir benutzen eine Streifentechnik. Für $j \in \mathbb{N}$ definiere

$$O_j := \left\{x : \ d(x, O^c) > \frac{1}{j}\right\},$$

dann ist $d(O_j, O^c) \geq \frac{1}{j}$.

Sei nun $D \subseteq X$ mit $\mu^*(D) < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu^*(O \cap D) + \mu^*(O^c \cap D) \\
&\leq \mu^*(O_j \cap D) + \mu^*((O \setminus O_j) \cap D) + \mu^*(O^c \cap D) \\
&= \mu^*((O_j \cup O^c) \cap D) + \mu^*((O \setminus O_j) \cap D) \\
&\leq \mu^*(D) + \mu^*((O \setminus O_j) \cap D),
\end{aligned} \tag{1.90}$$

wobei wir benutzt haben, dass μ^* subadditiv und metrisch ist, und $d(O_j, O^c) > 0$ aufgrund der Konstruktion. Es bleibt zu zeigen, dass $\mu^*((O \setminus O_j) \cap D) \to 0$.

Wir zerlegen O weiter in Streifen

$$A_i := \left\{x : \ \frac{1}{i+1} \leq d(x, O^c) \leq \frac{1}{i}\right\} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Damit bekommen wir

$$O \setminus O_j = \bigcup_{i=j}^{\infty} A_i$$

Die Mengen A_i und A_{i+1} haben keinen positiven Abstand, allerdings die Mengen A_i und A_{i+2}. Wir zeigen sogar, dass $d(A_i, A_{i+k}) > 0$ für $i, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$: Seien $x \in A_i$, $y \in A_{i+k}$, $z \in O^c$. Dann ist

$$d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z) \geq \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+k} = \frac{k-1}{(i+1)(i+k)} \geq \frac{1}{(i+1)(i+k)},$$

woraus $d(A_i, A_{i+k}) > 0$ folgt für $k \geq 2$. Dann haben alle an der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$ beteiligten Mengen positiven Abstand. Weil μ^* metrisch ist, kann per man Induktion beweisen, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \mu^*(A_{2i} \cap D) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{m} A_{2i} \cap D) \leq \mu^*(D).$$

Analog bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{m} \mu^*(A_{2i+1} \cap D) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{m} A_{2i+1} \cap D) \leq \mu^*(D).$$

Addieren dieser beiden Ungleichungen ergibt

$$\sum_{i=1}^{2m+1} \mu^*(A_i \cap D) \leq 2\mu^*(D) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

so dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap D) \leq 2\mu^*(D) < \infty. \tag{1.91}$$

Aus der Konstruktion der O_j und A_i (und Subadditivität) folgt

$$\mu^*((O \setminus O_j) \cap D) = \mu^* \left(\bigcup_{i=j}^{\infty} (A_i \cap D) \right) \leq \sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(A_i \cap D).$$

Wegen (1.91) folgt $\lim_{j\to\infty} \mu^*((O \setminus O_j) \cap D) = 0$, und mit (1.90) folgt die Behauptung: O ist μ^*-messbar. □

Satz 1.92. *λ_n^* ist ein metrisches äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $d(A, B) =: \delta > 0$ und $\lambda_n^*(A \cup B) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es wegen Satz 1.55 eine Überdeckung von $A \cup B$ mit halboffenen Quadern $I_j \in \mathbb{J}_r(n)$ mit $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Jeder Quader I_j kann wegen des noch zu beweisenden (offensichtlichen?) Resultats von Lemma 1.93 in eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Quader mit Durchmesser $\leq \delta/2$ zerlegt werden. Dabei ist die Summe der Volumina dieser Quader gleich $\mathrm{vol}_n(I_j)$. In der Zerlegung ersetzen wir I_j durch die endlich vielen kleinen Quader.

Daher können wir annehmen, dass wir eine Überdeckung von $A \cup B$ mit halboffenen Quadern $I_j \in \mathbb{J}_r(n)$, $\mathrm{diam}(I_j) < \delta$ für alle j, mit $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon$$

haben. Wir definieren jetzt zwei Indexmengen

$$J_A := \{j : \ I_j \cap A \neq \emptyset\}, \quad J_B := \{j : \ I_j \cap B \neq \emptyset\}.$$

Da $d(A, B) = \delta$ größer ist als der Durchmesser der I_j, ist $I_A \cap I_J = \emptyset$. Weiter gilt

$$\bigcup_{j\in J_A} I_j \supseteq A, \qquad \bigcup_{j\in J_A} I_j \supseteq B.$$

Daraus folgt

$$\lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) \le \sum_{j\in J_A} \mathrm{vol}_n(I_j) + \sum_{j\in J_B} \mathrm{vol}_n(I_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(I_j) \le \lambda_n^*(A\cup B) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Lemma 1.93. *Sei $I \in \mathbb{J}_r(n)$. Dann gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele, paarweise disjunkte $I_1 \dots I_m \in \mathbb{J}_r(n)$ mit den Eigenschaften*

(1) $I = \bigcup_{j=1}^m I_j$,

(2) $\mathrm{diam}(I_j) \le \varepsilon$ *für alle* j,

(3) $\mathrm{vol}_n(I) = \sum_{j=1}^m I_j$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass es ein $\rho \in (0,1)$ gibt, so dass wir für $\varepsilon := \rho\,\mathrm{diam}(I)$ die Menge I wie gewünscht in zwei Quader zerlegen können.

Sie also $I = [a,b) \in \mathbb{J}_r(n)$ gegeben. Die längste Kante von I sei entlang der Koordinatenrichtung k, also $|b_k - a_k| \ge |b_i - a_i|$ für alle $i = 1 \dots n$. Definiere $m := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ und

$$\begin{aligned} I_1 &:= [a_1,b_1) \times [a_{k-1},b_{k-1}) \times [a_k,m) \times [a_{k+1},b_{k+1}) \times [a_n,b_n),\\ I_2 &:= [a_1,b_1) \times [a_{k-1},b_{k-1}) \times [m,b_k) \times [a_{k+1},b_{k+1}) \times [a_n,b_n). \end{aligned}$$

Dann gilt $I = I_1 \cup I_2$ und $\mathrm{vol}_n(I) = \mathrm{vol}_n(I_1) + \mathrm{vol}_n(I_2)$. Weiter ist $\mathrm{diam}(I) = \|b-a\|_2$ und

$$\mathrm{diam}(I_1)^2 = \mathrm{diam}(I_2)^2 = \frac{1}{4}(b_k-a_k)^2 + \sum_{i\ne k}(b_i-a_i)^2.$$

Damit folgt

$$\frac{\mathrm{diam}(I_1)^2}{\mathrm{diam}(I)^2} = \frac{\frac14(b_k-a_k)^2 + \sum_{i\ne k}(b_i-a_i)^2}{(b_k-a_k)^2 + \sum_{i\ne k}(b_i-a_i)^2}.$$

Für $c_2 > c_1 > 0$ ist $x \mapsto \frac{c_1+x}{c_2+x} = 1 - \frac{c_2-c_1}{c_2+x}$ monoton wachsend für $x > 0$. Da $(b_i-a_i)^2 \le (b_k-a_k)^2$ nach Definition von k, bekommen wir

$$\frac{\mathrm{diam}(I_1)^2}{\mathrm{diam}(I)^2} \le \frac{\frac14 + (n-1)}{1+(n-1)} = \frac{n-\frac34}{n} =: \rho^2 \in (0,1).$$

Und wir haben die gewünschte Zerlegung in zwei Quader bekommen, so dass sich der Durchmesser um den Faktor ρ reduziert. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, wenden wir diese Zerlegung rekursiv an, und bekommen nach endlich vielen Schritten die gewünschte Zerlegung. □

Bemerkung 1.94. *In der Konstruktion im Beweis war es wichtig, die längste Kante von I zu halbieren. Warum?*

1.9 Hausdorff-Maße

Wir betrachten nun eine weitere Möglichkeit, äußere Maße zu konstruieren. Wir verwenden wieder die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.95. *Seien $s > 0$ und $\varepsilon > 0$. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiere*

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) := \inf \left\{ \alpha(s) \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2} \right)^s : \ \operatorname{diam}(O_j) < \varepsilon \ \forall j, \ \bigcup_{j=1}^\infty O_j \supseteq A \right\},$$

wobei $\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$.

Der Faktor α ist so gewählt, dass für Kugeln $O \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda_n(O) = \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2} \right)^n.$$

Offenbar ist

$$\mathcal{H}^s_{t\varepsilon}(tA) = t^s \mathcal{H}^s_\varepsilon(A) \quad \forall t > 0.$$

Wegen Satz 1.37 ist $\mathcal{H}^s_\varepsilon$ ein äußeres Maß. Weiter ist $\varepsilon \mapsto \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$ monoton fallend, deshalb existiert

$$\mathcal{H}^s_*(A) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A) \in [0, +\infty].$$

Satz 1.96. *Für $s > 0$ ist $\mathcal{H}^s_*$ ein äußeres Maß - das s-dimensionale Hausdorff-sche äußere Maß.*

Beweis. Die entsprechenden Eigenschaften bekommen wir direkt aus denen von $\mathcal{H}^s_\varepsilon$. □

Aus der Gleichung oben folgt

$$\mathcal{H}^s_*(tA) = t^s \mathcal{H}^s_*(A) \quad \forall t > 0.$$

Satz 1.97. *$\mathcal{H}^s_*$ ist ein metrisches äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ für alle $s > 0$.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ mit $d(A, B) =: \delta > 0$ und $\mathcal{H}^s_*(A \cup B) < \infty$. Sei $\varepsilon \in (0, \delta)$. Sei $\eta > 0$. Dann gibt es offene Mengen (O_j) mit $\operatorname{diam}(O_j) < \varepsilon$, $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty O_j$, und

$$\alpha(s) 2^{-s} \sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam}(O_j)^s \leq \eta + \mathcal{H}^s_\varepsilon(A \cup B).$$

Da $\operatorname{diam}(O_j) < \varepsilon < d(A, B)$, gilt für alle j: $A \cap O_j = \emptyset$ oder $B \cap O_j = \emptyset$. Es sei

$J := \{j : \ A \cap O_j \neq \emptyset\}$. Dann ist

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) + \mathcal{H}^s_\varepsilon(B) \le \sum_{j \in J} \operatorname{diam}(O_j)^s + \sum_{j \notin J} \operatorname{diam}(O_j)^s$$
$$= \sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam}(O_j)^s \le \eta + \mathcal{H}^s_\varepsilon(A \cup B).$$

Das gilt für alle $\eta > 0$, so dass $\mathcal{H}^s_\varepsilon(A)+\mathcal{H}^s_\varepsilon(B) \le \mathcal{H}^s_\varepsilon(A\cup B)$ folgt. Dies wiederum gilt für alle $\varepsilon \in (0, \delta)$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Das aus dem äußeren Maß $\mathcal{H}^s_*$ entstehende Maß (vergleiche Satz 1.60) nennen wir das Hausdorff-Maß

$$\mathcal{H}^s := \mathcal{H}^s_*|_{\mathcal{A}(\mathcal{H}^s_*)}.$$

Wir erhalten, dass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}(\mathcal{H}^s_*), \mathcal{H}^s)$ für jedes $s \ge 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein vollständiger Maßraum ist. Per Konstruktion ist das Hausdorff-Maß translationsinvariant.

Folgerung 1.98. *Es gilt $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{H}^s_*)$ für alle $s \ge 0$ und $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 1.89. □

Lemma 1.99. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

- *Ist $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$ für ein $s > 0$, dann ist $\mathcal{H}^t(A) = 0$ für alle $t > s$.*
- *Ist $\mathcal{H}^s(A) \in (0, +\infty)$ für ein $s > 0$, dann ist $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$ für alle $t \in (0, s)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$ für ein $s > 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung (O_j) von A mit $\operatorname{diam}(O_j) < \varepsilon$ und

$$\alpha(s) \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2}\right)^s \le \mathcal{H}^s(A) + \varepsilon.$$

Sei $t > s$. Dann ist

$$\mathcal{H}^t_\varepsilon(A) \le \alpha(t) \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2}\right)^t \le \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \varepsilon^{t-s} \alpha(s) \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2}\right)^s$$
$$\le \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \varepsilon^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + \varepsilon).$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt dann $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

Sei nun $\mathcal{H}^s(A) \in (0, +\infty)$ für $s > 0$, und sei $t < s$. Wäre $\mathcal{H}^t(A) < +\infty$, würde aus dem gerade bewiesenen folgen $\mathcal{H}^s(A) = 0$. □

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(A) \in (0, +\infty)$, dann nennt man diese Zahl Hausdorff-Dimension von A. Es gibt Mengen, deren Hausdorff-Dimension keine ganze Zahl ist. Zum Beispiel ist die Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge gleich $\frac{\log 2}{\log 3} \in (0, 1)$.

Lemma 1.100. *Sei* $(0,1)^n \subseteq C \subseteq [0,1]^n$. *Dann gilt* $\mathcal{H}^n(C) \in (0, +\infty)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $k^{-1}\sqrt{n} < \varepsilon$. Dann können wir C mit k^n abgeschlossenen Würfeln mit Seitenlänge k^{-1} und Durchmesser $k^{-1}\sqrt{n} < \varepsilon$ überdecken. Damit ist

$$\mathcal{H}^n_\varepsilon(C) \le \alpha(n) k^n \left(\frac{\sqrt{n}}{2k}\right)^n = \alpha(n) \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n.$$

Die rechte Seite ist unabhängig von ε, woraus $\mathcal{H}^n(C) < \infty$ folgt.

Sei nun (O_j) eine Überdeckung von C mit $\operatorname{diam}(O_j) < \varepsilon$. Dann ist $O_j \subseteq B_j$, wobei B_j eine Kugel mit Radius $\operatorname{diam} O_j$ ist. Damit ist

$$\lambda_n(B_j) = \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(B_j)}{2}\right)^n = 2^n \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2}\right)^n.$$

Aus den Eigenschaften von λ_n (Satz 1.44) bekommen wir

$$1 = \lambda_n(C) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j) \le 2^n \sum_{j=1}^\infty \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2}\right)^n.$$

Damit folgt $\mathcal{H}^n_\varepsilon(C) \ge 2^{-n}$ für alle $\varepsilon > 0$. □

Folgerung 1.101. *Sei* $s > n$. *Dann ist* $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$.

Beweis. Aus Lemmata 1.99 und 1.100 bekommen wir $\mathcal{H}^s([0,1]^n) = 0$. Mit der σ-Additivität von $\mathcal{H}^s$ ist dann $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$. □

Folgerung 1.102. *Sei* $s \in (0, n)$. *Dann ist* $\mathcal{H}^s$ *nicht* σ*-endlich auf* $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wäre $\mathcal{H}^s$ σ-endlich auf $\mathbb{R}^n$, dann wäre $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n) = 0$ nach Lemma 1.99, was ein Widerspruch zu Lemma 1.100 ist. □

Da das Hausdorff-Maß translationsinvariant ist, folgt mit Satz 1.80, dass ein $\alpha > 0$ existiert, so dass

$$\lambda_n(A) = \alpha \mathcal{H}^n(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}^n.$$

Aufgrund der unterschiedlichen Konstruktion der äußeren Maße λ_n^* und $\mathcal{H}^n_*$ ist der Beweis von $\alpha = 1$ im Fall $n > 1$ überraschend technisch. Wir beweisen sogar die stärkere Aussage, dass die äußeren Maße λ_n^* und $\mathcal{H}^n_*$ übereinstimmen.

Satz 1.103 (Isodiametrische Ungleichung)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\lambda_n^*(A) \le \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2} \right)^n .$$

Beweis. Siehe [Fre03, Theorem 264H]. □

Das folgende Resultat ist eine Variante des sogenannten Überdeckungssatzes von Vitali.

Lemma 1.104. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht leere, offene Menge mit $\lambda_n(O) < \infty$. Dann gibt es für jedes $\delta > 0$ abzählbar viele, disjunkte, abgeschlossene Kugeln (B_j) mit $\operatorname{diam}(B_j) < \delta$, $O \supseteq \bigcup_{j=1}^\infty B_j$ und*

$$O \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_j \cup \bigcup_{j=k+1}^{\infty} B_j' \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.105}$$

wobei B_j' die abgeschlossene Kugel mit dem gleichen Mittelpunkt wie B_j und fünffachem Radius ist.

Beweis. Siehe [Fre03, Theorem 261B]. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{ \overline{B_\rho(x)} : \ (x, \rho) \in \mathbb{Q}^{n+1}, \ \rho \in (0, \delta), \ \overline{B_\rho(x)} \subseteq O \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{C}$ abzählbar, und wir können die Kugeln in $\mathcal{C}$ durchnummerieren, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots\}$.

(1) Wir konstruieren die B_j nun induktiv. Seien $B_1 \dots B_j$, $j \ge 0$, gewählt. Definiere

$$\mathcal{C}_j := \{C \in \mathcal{C} : \ C \cap B_i = \emptyset \ \forall i = 1 \dots j\}, \quad \gamma_j := \sup_{C \in \mathcal{C}_j} \operatorname{diam}(C).$$

Da $\bigcup_{i=1}^j B_i$ kompakt ist, ist $O \setminus \bigcup_{i=1}^j B_i$ nicht leer und offen. Damit ist $\mathcal{C}_j \ne \emptyset$ und $\gamma_j > 0$. Dann definieren wir

$$B_{j+1} := C_k \text{ mit } k := \min \left\{ k : \ C_k \in \mathcal{C}_j, \ \operatorname{diam}(C_k) > \frac{1}{2}\gamma_j \right\}.$$

Die Kugeln (B_j) sind disjunkt, und es gilt

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j) \le \lambda_n(O),$$

woraus $\gamma_j \to 0$ folgt.

(2) Wir zeigen nun (1.105). Sei $x \in O \setminus \bigcup_{j=1}^k B_j$. Dann existiert $\rho > 0$ und $C \in \mathcal{C}$, so dass

$$x \in C \subseteq B_\rho(x) \subseteq O \setminus \bigcup_{j=1}^k B_j.$$

Damit ist $C \in \mathcal{C}_k$. Sei m der kleinste Index, für den $\gamma_m < \operatorname{diam}(C)$ ist. Damit ist $C \notin \mathcal{C}_m$. Es existiert also $i = k+1 \dots m$, so dass $C \cap B_i \neq \emptyset$. Nach Konstruktion von m ist $\operatorname{diam}(C) \le \gamma_i$. Sei $B_i = \overline{B(x_i, r_i)}$. Dann gelten folgende Relationen: $2r_i > \frac{1}{2}\gamma_i$, $d(x, x_i) \le \gamma_i + r_i$ und $5r_i \ge \gamma_i + r_i$. Es folgt $x \in B_i'$. $\square$

Satz 1.106. *Es gilt $\lambda_n^*(A) = \mathcal{H}_*^n(A)$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}_*^n(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei (O_j) eine Überdeckung von A mit $\operatorname{diam}(O_j) < \varepsilon$ und

$$\alpha(n) \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2} \right)^n \le \mathcal{H}_\varepsilon^n(A) + \varepsilon.$$

Aus der isodiametrischen Ungleichung Satz 1.103 folgt

$$\lambda_n(A) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda_n(O_j) \le \alpha(n) \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2} \right)^n \le \mathcal{H}_\varepsilon^n(A) + \varepsilon.$$

Das gilt für alle $\varepsilon > 0$, woraus $\lambda_n^*(A) \le \mathcal{H}_*^n(A)$ folgt.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_*^n(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen Satz 1.69 existiert eine offene Menge O, so dass

$$\lambda_n(O) \le \lambda_n(A) + \varepsilon.$$

Nach Lemma 1.104 gibt es abzählbar viele, disjunkte (abgeschlossene) Kugeln (B_j) mit $\operatorname{diam}(B_j) < \varepsilon$, $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \subseteq O$ und Eigenschaft (1.105). Es folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^n(A) &\le \alpha(n) \left(\sum_{j=1}^k \left(\frac{\operatorname{diam}(B_j)}{2} \right)^n + \sum_{j=k+1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(B_j')}{2} \right)^n \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_n(B_j) + \sum_{j=k+1}^\infty \lambda_n(B_j') \\ &= \sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j) + (5^n - 1) \sum_{j=k+1}^\infty \lambda_n(B_j). \end{aligned}$$

Da $\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j) \le \lambda_n(O) < \infty$ folgt mit $k \to \infty$

$$\mathcal{H}_\varepsilon^n(A) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j) \le \lambda_n(O) \le \lambda_n(A) + \varepsilon.$$

Daraus folgt $\mathcal{H}^n_*(A) = \lambda^*_n(A)$ mit $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

Damit folgt natürlich $\mathcal{L}(n) = \mathcal{A}(\mathcal{H}^n_*)$ und $\mathcal{H}^n = \lambda_n$.

Lemma 1.107. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, Lipschitz stetig, d.h. $\exists L > 0$:*

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2 \quad \forall x, y \in U.$$

Sei $A \subseteq U$ mit $A \in \mathcal{L}(n)$. Dann ist $f(A) \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^n_*)$, und es gilt

$$\mathcal{H}^n(f(A)) \leq L^n \mathcal{H}^n(A).$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(n)$. Dann ist $A = N \cup \bigcup_{j=1}^\infty K_j$ mit $\lambda_n(N) = 0$ und K_j kompakt. Da f stetig ist, ist $f(K_j)$ kompakt und damit in $\mathcal{A}(\mathcal{H}^n_*)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung (O_j) von N mit $\operatorname{diam}(O_j) < \varepsilon$, $O_j \subseteq U$ und

$$\alpha(n) \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2} \right)^n < \varepsilon.$$

Weiter ist $\operatorname{diam}(f(O_J)) < L\varepsilon$, woraus

$$\mathcal{H}^n_\varepsilon(f(N)) \leq L^n \alpha(n) \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(O_j)}{2} \right)^n < \varepsilon$$

folgt. Damit ist $\mathcal{H}^n_*(f(N)) = 0$. Es folgt $f(A) \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^n_*)$.

Sei nun (O_j) eine Überdeckung von A. Dann ist $(f(O_j \cap U))$ eine Überdeckung von $f(A)$ mit $\operatorname{diam}(f(O_j \cap U)) \leq L \operatorname{diam}(O_j)$. Es folgt $\mathcal{H}^n_{L\varepsilon}(f(A)) \leq L^n \mathcal{H}^n_\varepsilon(A)$, woraus wir $\mathcal{H}^n(f(A)) \leq L^n \mathcal{H}^n(A)$ bekommen. $\square$

Lemma 1.108. *Sei $S \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m \geq n$. Sei $A \in \mathcal{L}(n)$. Dann ist $SA \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^n_*)$, und es gilt*

$$\mathcal{H}^n(SA) = \sqrt{\det(S^T S)} \cdot \lambda_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{L}(n).$$

Beweis. Wegen Lemma 1.107 ist $\mathcal{H}^n(SA)$ in $\mathcal{A}(\mathcal{H}^n_*)$.

Sei S so, dass $S^T S = I_n$. Ist (O_j) eine Überdeckung von A, dann ist (SO_j) eine Überdeckung von SA. Da $S^T S = I_n$ ist, folgt $\operatorname{diam}(O) = \operatorname{diam}(SO)$. Damit ist $\mathcal{H}^n_\varepsilon(A) = \mathcal{H}^n_\varepsilon(SA)$ für alle ε. Es folgt $\mathcal{H}^n(SA) = \mathcal{H}^n(A) = \lambda_n(A)$.

Wir benutzen die QR-Zerlegung von S: Sei $S = QR$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$, $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $Q^T Q = I_n$. Dann ist $\det(S^T S) = \det(R)^2$. Und wir erhalten mit Satz 1.83

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(SA) = \mathcal{H}^n(QRA) = \mathcal{H}^n(RA) = \lambda_n(RA) \\ = |\det(R)|\lambda_n(A) = \sqrt{\det(S^T S)} \cdot \lambda_n(A) \end{aligned}$$

was die Behauptung ist. $\square$

Kapitel 2

Integrationstheorie

2.1 Messbare Funktionen

Definition 2.1. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$. Dann heißt f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar (oder kurz messbar), falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.*

Es reicht die Eigenschaft $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ nur für Mengen B zu zeigen, die die σ-Algebra $\mathcal{B}$ erzeugen.

Lemma 2.2. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \to Y$, und sei $S \subseteq \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A}_\sigma(S) = \mathcal{B}$. Dann ist f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar genau dann, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in S$.*

Beweis. "$\Leftarrow$" Wir verwenden $f_*(\mathcal{A})$, siehe Beispiel 1.4. Nach Voraussetzung gilt $S \subseteq f_*(\mathcal{A})$. Damit ist auch $\mathcal{B} \subseteq f_*(\mathcal{A})$, und f ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar. □

Verknüpfungen stetiger und messbarer Funktionen sind messbar.

Lemma 2.3. *Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, Y und Z metrische Räume. Weiter seien $g : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(Y)$-messbar und $f : Y \to Z$ stetig. Dann ist $f \circ g$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(Z)$-messbar.*

Beweis. Sei $O \subseteq Z$ offen. Dann ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(Y)$ und $(f \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathcal{A}$. □

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{A})$ immer ein messbarer Raum.

Definition 2.1 werden wir für die Spezialfälle $Y = \mathbb{R}$ und $Y = \bar{\mathbb{R}}$ verwenden, wobei die Bildräume mit der Borel-σ-Algebra versehen werden. Sei $\mathcal{T}$ die Menge der offenen Mengen auf $\mathbb{R}^1$. Dann ist die Borel-σ-Algebra von $\bar{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T} \cup \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}),$$

also $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und die einelementigen Mengen $\{+\infty\}$, $\{-\infty\}$ enthält. Offensichtlich ist $\mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Mithilfe von Lemma 2.2 können wir die Anforderungen an eine messbare Funktion schon reduzieren.

Definition 2.4. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^1$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$.*

Analog heißt $f : X \to \mathbb{C}$ Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{C}$.

Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt Lebesgue messbar (oder kurz: messbar), wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist, also wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$.

Folgerung 2.5. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f $\mathcal{L}(n)$-$\mathcal{B}^1$-messbar und $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}^1$messbar.*

Bemerkung 2.6. *Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muss allerdings nicht $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{L}(1)$-messbar sein. Das ist der Grund, warum auf dem Bildbereich $\mathbb{R}$ die Borel-σ-Algebra verwendet wird. Eine stetige aber nicht $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{L}(1)$-messbare Funktion kann mit der Cantor-Menge konstruiert werden, wir verweisen auf [Tao11, Remark 1.3.10].*

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue messbar, dann ist f auch messbar, wenn f als Funktion nach $\bar{\mathbb{R}}$ angesehen wird.

Definition 2.7. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere*

$$\{f < \alpha\} := \{x \in X : f(x) < \alpha\},$$

analog $\{f \leq \alpha\}$, $\{f > \alpha\}$, $\{f \geq \alpha\}$.

Satz 2.8. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(2.9) *f ist messbar,*

(2.10) *$\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.11) *$\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.12) *$\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$,*

(2.13) *$\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ oder für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Beweis. Wir beweisen nur die Äquivalenz von (2.9) und (2.10). Ist f messbar, dann ist $\{f < \alpha\} = f^{-1}(\{-\infty\} \cup (-\infty, \alpha)) \in \mathcal{A}$. Sei nun $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle

$\alpha \in \mathbb{Q}$. Wir nutzen aus, dass $f_*(\mathcal{A})$, also die Menge aller Teilmengen $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ für die $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist, eine σ-Algebra ist, siehe Beispiel 1.4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge rationaler Zahlen (α_k) mit $\alpha_k \to \alpha$. Es folgt

$$\{f < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f < \alpha_k\} \in \mathcal{A}.$$

Damit ist auch $\{f \geq \alpha\} = \{f < \alpha\}^c \in \mathcal{A}$. Dann gilt für alle $\alpha < \beta$, dass $f^{-1}([\alpha, \beta)) \in \mathcal{A}$. Damit sind die Urbilder aller halboffenen Intervalle in $\mathcal{A}$. Damit ist auch $\mathcal{B}^1 \subseteq f_*(\mathcal{A})$. Weiter gilt

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f < -n\} \in \mathcal{A}.$$

Wegen $\{+\infty\} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^c$ ist auch $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$. Damit sind die Urbilder aller Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ in $\mathcal{A}$, und f ist messbar. □

Beispiel 2.14. *Sei $A \subseteq X$. Definiere die charakteristische Funktion von A durch*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist χ_A messbar genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}$. Ist $B \subseteq X$, dann ist

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B).$$

Beispiel 2.15. *Ist $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch die durch*

$$(\chi_A \cdot f)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion $\chi_A \cdot f$ messbar. Hier haben wir wieder die Konvention $0 \cdot \pm\infty := 0$ benutzt. Für $\alpha < 0$ ist

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A \cap \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

während für $\alpha \geq 0$ gilt

$$\{\chi_A \cdot f < \alpha\} = A^c \cup \{f < \alpha\} \in \mathcal{A},$$

und $\chi_A \cdot f$ ist messbar.

Nun wollen wir beweisen, dass Summen, Produkte, etc, von messbaren Funktionen messbar sind. Wir starten mit zwei Hilfsresultaten.

Lemma 2.16. *Sei $g : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ monoton wachsend, das heißt für alle $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $x \leq y$ ist $g(x) \leq g(y)$. Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist auch $g \circ f$ messbar.*

Beweis. Wir benutzen Satz 2.8. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{g < \alpha\}$ ein Intervall: Definiere $\beta := \sup\{x \in \bar{\mathbb{R}} : \ g(x) < \alpha\} \in \bar{\mathbb{R}}$. Ist $g(\beta) = \alpha$ dann ist $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta)$, ansonsten ist $g(\beta) < \alpha$ und $\{g < \alpha\} = [-\infty, \beta]$. In beiden Fällen ist $f^{-1}(\{g < \alpha\}) = \{g \circ f < \alpha\}$ messbar. □

Damit bekommen wir folgendes Resultat.

Satz 2.17. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind die folgenden Funktionen messbar:*

(2.18) $c \cdot f$ *für alle* $c \in \bar{\mathbb{R}}$,

(2.19) $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := \min(f, 0)$,

(2.20) $\operatorname{sign}(f)$, *wobei*

$$\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \textit{falls } y > 0 \\ 0 & \textit{falls } y = 0 \\ -1 & \textit{falls } y < 0, \end{cases}$$

(2.21) $|f|^p$ *für alle* $p > 0$,

(2.22) $1/f$ *falls* $f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$.

Beweis. (2.18): Wir zeigen erst, dass $-f$ messbar ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{-f < \alpha\} = \{f > -\alpha\}$, also ist $-f$ messbar. Sei nun $c \in \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist $g(y) := |c| \cdot y$ monoton wachsend, und mit Lemma 2.16 ist $|c| \cdot f$ messbar, also auch $-|c| \cdot f$.

(2.19),(2.20): Die Funktionen $y \mapsto \max(y, 0)$, $y \mapsto \min(y, 0)$ und $y \mapsto \operatorname{sign}(y)$ sind monoton wachsend. Wegen Lemma 2.16 sind die Funktionen $\max(f, 0)$, $\min(f, 0)$ und $\operatorname{sign}(f)$ messbar.

(2.21): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{|f| < \alpha\} = \{f < \alpha\} \cap \{-f < \alpha\}$. Dies ist wegen (2.18) und Satz 2.8 in $\mathcal{A}$, also ist auch $|f|$ messbar. Die Abbildung $y \mapsto (\max(0, y))^p$ ist monoton wachsend, damit ist auch $|f|^p$ messbar.

(2.22): Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{1/f < \alpha\} = (\{f < 0\} \cap \{\alpha f < 1\}) \cup (\{f > 0\} \cap \{\alpha f > 1\}) \in \mathcal{A},$$

also $1/f$ messbar. □

Desweiteren sind Summen, Produkte, Quotienten messbarer Funktionen wieder messbar.

Satz 2.23. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und f/g messbar, falls diese Funktionen auf ganz X definiert sind. Die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\pm\infty/\pm\infty$, $c/0$ für $c \in \bar{\mathbb{R}}$ sind nicht definiert.*

Beweis. Wir zeigen, dass $f+g$ messbar ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $f(x)+g(x) < \alpha$, woraus $f(x) < +\infty$ und $g(x) < +\infty$ folgt. Dann existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in (g(x), \alpha - f(x))$. Dann ist

$$\{f+g<\alpha\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\{f < \alpha - q\} \cap \{g < q\}) \in \mathcal{A},$$

und $f+g$ ist messbar.

Seien zuerst f und g Abbildungen nach $\mathbb{R}$. Dann folgt die Messbarkeit von $f \cdot g$ aus $f \cdot g = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$. Seien nun f und g Abbildungen nach $\bar{\mathbb{R}}$. Wir definieren die messbare Menge

$$A := \{|f| < \infty\} \cap \{|g| < \infty\}$$

sowie die messbaren Funktionen (mit Wertebereich $\mathbb{R}$)

$$\tilde{f} := \chi_A f, \quad \tilde{g} := \chi_A g.$$

Dann ist $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ messbar. Außerdem gilt (beachte $0 \cdot \infty = 0$)

$$f \cdot g = \chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g} + \chi_{A^c} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g) \cdot \infty.$$

Beide Summanden sind messbar: $\chi_A \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ und $\chi_{A^c} \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot \operatorname{sign}(g)$ sind Produkte $\mathbb{R}$-wertiger messbarer Funktionen (Beispiel 2.15), Multipikation mit der Konstante $+\infty$ erhält Messbarkeit.

Sei g messbar, so dass $g(x) \neq 0$ für alle x. Dann ist $1/g$ messbar (2.22). Damit ist auch $f/g = f \cdot 1/g$ messbar. □

Aufgrund der Eigenschaften von σ-Algebren können wir recht einfach beweisen, dass punktweise Infima, Suprema und Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen wieder messbar sind.

Satz 2.24. *Seien (f_n) messbare Funktionen von X nach $\bar{\mathbb{R}}$. Dann sind auch $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ messbare Funktionen. Dabei ist $(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ punktweise definiert. Analog wird für die drei anderen Konstrukte verfahren.*

Beweis. Die Messbarkeit von Infimum und Supremum folgt aus Satz 2.8 und

$$\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \le \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \le \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Per Definition ist

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} f_k(x).$$

Wegen des gerade Gezeigten ist $x \mapsto \inf_{k\ge n} f_k(x)$ messbar für alle n, und damit auch $x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Analog folgt der Beweis für $\limsup$. □

Folgerung 2.25. *Seien (f_n) messbare Funktionen von X nach $\bar{\mathbb{R}}$. Weiter sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle x. Dann ist auch f messbar.*

Wir zeigen nun, dass sich Lebesgue-messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren lassen.

Definition 2.26. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann heißt f einfache Funktion, wenn $f(X)$ eine endliche Menge ist.*

Lemma 2.27. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ einfach, dann existieren $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte, messbare Mengen $A_1 \dots A_n$, so dass $\bigcup_{j=1}^n A_j = X$ und*

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}.$$

Beweis. Da f einfach ist, ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Menge. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$ und $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ so, dass $f(X) = \{c_1 \dots c_n\}$. Mit $A_j := f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{A}$ folgt die Behauptung. □

Das heißt, eine Funktion ist einfach, wenn sie eine Linearkombination charakteristischer Funktionen ist.

Folgerung 2.28. *Sind f, g einfache Funktionen, dann sind auch $f+g$ und $f \cdot g$ einfache Funktionen.*

Beweis. Wegen Lemma 2.27 gibt es reelle Zahlen c_i und d_j sowie messbare Mengen A_i und B_j, so dass

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$$

und $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$, wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Dann ist $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$, $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \chi_{A_i\cap B_j}$, sowie analog $\chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i\cap B_j}$ und

$$f + g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j) \chi_{A_i\cap B_j}.$$

Für das Produkt erhalten wir

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i d_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

□

Satz 2.29. *Sei $f : X \to [0, +\infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge (f_n) nicht-negativer, einfacher Funktionen mit $f_n(x) \nearrow f(x)$ für alle x. Ist f beschränkt, dann ist die Folge (f_n) gleichmäßig beschränkt, und die Konvergenz $f_n \to f$ ist gleichmäßig.*

Beweis. Wir konstruieren die f_n durch eine Unterteilung des Bildbereichs. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen das Intervall $[0, n)$ in $n2^n$-viele Intervalle der Länge 2^{-n}. Setze für $j = 1 \dots n2^n$

$$A_{n,j} := f^{-1} \left(\left[\frac{j-1}{2^n} \frac{j}{2^n} \right) \right).$$

Damit definieren wir die einfache Funktion

$$f_n(x) := n\chi_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=1}^{n2^n} \chi_{A_{n,j}} \cdot \frac{j-1}{2^n}.$$

Damit gilt $f_n(x) \leq f(x)$. Wegen

$$A_{n,j} = A_{n+1,2j-1} \cup A_{n+1,2j}$$

folgt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Es bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Ist $f(x) < n$ dann ist $x \in A_{n,j}$ für ein passendes j, und es gilt $f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$. Damit bekommen wir $f_n(x) \to f(x)$ falls $f(x) < +\infty$. Ist $f(x) = +\infty$, dann ist $f_n(x) = n$ für alle n, und die Konvergenz $f_n(x) \to f(x) = +\infty$ folgt.

Sei f beschränkt. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < N$ für alle x. Daraus folgt $f_n(x) < N$ für alle n und x. Für $n > N$ ist dann $f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$ für alle x, woraus die gleichmäßige Konvergenz folgt. □

Im Folgenden werden wir die abkürzende Schreibweise

$$f_n \nearrow f \quad \Leftrightarrow \quad f_n(x) \nearrow f(x)\ \forall x \in X$$

benutzen.

Folgerung 2.30. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann existiert eine Folge (φ_n) einfacher Funktionen mit $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ und $\varphi_n(x) \to f(x)$ für alle x.*

Beweis. Wir approximieren $|f|$ durch eine Folge nicht negativer, einfacher Funktionen (φ_n), Satz 2.29. Die Funktion $\operatorname{sign}(f)$ ist eine einfache Funktion. Die Funktionen $\operatorname{sign}(f) \cdot \varphi_n$ haben dann die gewünschten Eigenschaften, wobei wir Folgerung 2.28 benutzt haben. □

2.2 Das Lebesgue-Integral

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.31. *Sei $f : X \to [0, +\infty)$ eine einfache Funktion mit $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ mit paarweise disjunkten Mengen (A_i). Dann ist*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$$

das Lebesgue-Integral von f.

Da $\mu(A_i) = +\infty$ sein kann, ist $\int f \,\mathrm{d}\mu$ im Allgemeinen in $\bar{\mathbb{R}}$. Um unbestimmte Ausdrücke zu vermeiden, haben wir das Integral nur für nicht negative Funktionen definiert.

Lemma 2.32. *Das Lebesgue-Integral für einfache Funktionen ist wohldefiniert: Gilt $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$ mit paarweise disjunkten Mengen (A_i) und paarweise disjunkten Mengen (B_j), dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$. Falls nicht setzen wir $A_{n+1} = (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$, $c_{n+1} = 0$.

Ist $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ dann folgt $c_i = d_j$: Sei $x \in A_i \cap B_j$, dann ist $f(x) = c_i = b_j$, da die Mengen (A_i) und die Mengen (B_j) paarweise disjunkt sind. Weiter ist $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ und $B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

$\square$

Dieses Integral für einfache Funktionen hat folgende Eigenschaften.

Satz 2.33. *Seien $f, g : X \to [0, +\infty)$ einfache Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$,

(2) $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$,

(3) ist $f \leq g$, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$,

(4) $\int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. (1) folgt sofort aus der Definition. (2) Wegen Lemma 2.27 gibt es reelle Zahlen c_i und d_j sowie messbare Mengen A_i und B_j, so dass

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j}$$

und $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, wobei dies disjunkte Vereinigungen sind. Wie im Beweis von Folgerung 2.28 bekommen wir

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j) = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

(3) Sei $x \in A_i \cap B_j$. Dann gilt $f(x) = c_i \leq g(x) = d_j$. Mit Argumenten wie im Beweis von Lemma 2.32 bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) &= \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&\leq \sum_{i,j:\ A_i \cap B_j \neq \emptyset} d_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j) = \int g \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

(4) χ_A ist eine einfache Funktion mit $\int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$. $\square$

Wir können messbare Funktionen durch einfache Funktionen approximieren. Dies werden wir benutzen, um das Lebesgue-Integral für messbare Funktionen zu definieren. Wir beginnen mit dem Integral nicht-negativer Funktionen, damit wir die Monotonie der Konvergenz aus Satz 2.29 benutzen können. In den Beweis des nächsten Satzes geht entscheidend die Stetigkeit von Maßen auf monoton wachsenden Folgen messbarer Mengen (1.29) ein.

Lemma 2.34. *Sei (f_n) eine Folge nichtnegativer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$, f einfache Funktion. Dann gilt*

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir betrachten die beiden Fälle $\int f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ und $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. (1) Angenommen $\int f \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Da f eine einfache Funktion ist, existiert ein $c > 0$ und ein $A \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(A) = +\infty$ und $f \geq c$ auf A. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $A_n := \{x : \ f_n(x) \geq c/2\}$. Da $(f_n(x))$ monoton wachsend ist, folgt $A_n \subseteq A_{n+1}$. Aus der punktweisen Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ folgt $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \supseteq A$. Dann folgt $\mu(A_n) \to \mu(A) = +\infty$ aus (1.29). Aus der Ungleichung $\chi_{A_n} \frac{c}{2} \leq f_n$ folgt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \mu(A_n)\frac{c}{2} \to +\infty$ (Satz 2.33).

(2) Sei nun $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge, also konvergent. Weiter ist $B := \{f > 0\} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \infty$. Da f eine einfache Funktion ist, ist f beschränkt, und es existiert $M > 0$ mit $f(x) \leq M$ für alle x. Sei $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $B_n := B \cap \{f_n \geq f - \varepsilon\}$. Dann folgt $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = B$, und wir bekommen $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus B_n) = 0$ aus (1.29) und (1.30). Wir schätzen nun das Integral der einfachen und nicht-negativen Funktion $f - f_n$ von oben ab. Auf B_n ist $f - f_n \leq \varepsilon$, auf $B \setminus B_n$ ist $f - f_n \leq f \leq M$, während auf B^c gilt $f = f_n = 0$. Dann ist $f - f_n \leq \chi_{B_n}\varepsilon + \chi_{B\setminus B_n} M$ und es folgt

$$0 \leq \int f - f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int \chi_{B_n}\varepsilon + \chi_{B\setminus B_n} M \,\mathrm{d}\mu = \mu(B_n)\varepsilon + \mu(B \setminus B_n)M \to \mu(B)\varepsilon.$$

Da $\mu(B) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f \,\mathrm{d}\mu - \int f - f_n \,\mathrm{d}\mu \right) = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Nun zeigen wir, dass der Grenzwert von $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ für $f_n \nearrow f$ nur vom Grenzwert f abhängt, und nicht von der konkreten Wahl der (f_n). Dies ist ein wichtiger Schritt, um das Lebesgue-Integral definieren zu können.

Lemma 2.35. *Seien (f_n), (g_n) Folgen nichtnegativer, einfacher Funktionen mit $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$, f messbar. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Für $m \in \mathbb{N}$ definiere

$$h_m := \min(f_n, g_m).$$

Dies ist eine einfache Funktion. Aus der Voraussetzung folgt $h_m \nearrow f_n$ für $m \to \infty$. Aus Lemma 2.34 bekommen wir dann

$$\lim_{m\to\infty} \int h_m \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Da $h_m \le g_m$ folgt mit der Monotonie des Integrals $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \int g_m \,\mathrm{d}\mu$. Grenzübergang auf beiden Seiten der Ungleichung ergibt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{m\to\infty} \int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int g_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Für $n \to \infty$ bekommen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int g_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Vertauschen wir in dieser Argumentation die Rollen von f_n und g_m erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Daraus folgt, dass die Grenzwerte existieren und gleich sind. □

Definition 2.36. *Sei $f : X \to [0, +\infty]$ messbar. Sei (f_n) eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen mit $f_n \nearrow f$. Dann ist das Lebesgue-Integral von f definiert als*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen Lemma 2.35 ist das Lebesgue-Integral von f wohldefiniert: der Wert $\int f \,\mathrm{d}\mu$ hängt nicht von der konkreten Wahl der approximierenden, einfachen Funktionen (f_n) ab.

Satz 2.37. *Seien $f, g : X \to [0, +\infty]$ messbare Funktionen. Dann gilt*

(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ *für alle* $c \ge 0$

(2) $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$,

(3) ist $f \le g$, *dann ist* $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$,

(4) sind (f_m) *messbare Funktionen von* X *nach* $[0, +\infty]$ *mit* $f_m \nearrow f$, *dann gilt* $\int f_m \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. (1)–(3) Seien (f_n) und (g_n) Folgen einfacher, nichtnegativer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ und $g_n \nearrow g$. (1) und (2) folgen nun direkt aus Satz 2.33. Für (3) benutzen wir $\min(f_n, g_n) \nearrow f$ und $\int \min(f_n, g_n) \,\mathrm{d}\mu \le \int g_n \,\mathrm{d}\mu$.

(4) Für jedes m existiert eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen $(f_{m,n})$ mit $f_{m,n} \nearrow f_m$ für $n \to \infty$. Definiere die einfache Funktion h_m durch

$$h_m(x) := \max_{i,j \le m} f_{i,j}(x).$$

Dann ist $(h_m(x))$ monoton wachsend. Für $i, j \le m$ ist $f_{i,j} \le f_i \le f_m$. Dann ist $h_m \le f_m \le f$, und es folgt $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \le \int f_m \,\mathrm{d}\mu \le \int f \,\mathrm{d}\mu$. Wir zeigen $h_m \nearrow f$.

Seien $x \in X$ und $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s < f(x)$. Dann existiert m, so dass $s \le f_m(x)$. Weiter existiert ein n, so dass $r \le f_{m,n}(x)$. Daraus folgt $r \le h_{\max(m,n)}(x)$ und $r \le \lim_{m\to\infty} h_m(x)$. Da $r < f(x)$ beliebig war, folgt $h_m(x) \to f(x)$. Damit folgt $h_m \nearrow f$ und $\int h_m \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$, woraus die Behauptung folgt. □

2.3 Integrierbarkeit

Wir wollen nun messbare Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$ integrieren. Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$$f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \min(f, 0).$$

Dann ist $f = f^+ + f^-$.

Definition 2.38. *Sei* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *messbar. Es sei eines der Integrale* $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$ *endlich. Dann ist das Lebesgue-Integral von* f *definiert als*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu.$$

Sind beide Integrale $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu$ *endlich, dann heißt* f *integrierbar.*

Alternative Schreibweisen für dieses Integral sind

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int f(x) \mu(\,\mathrm{d}x).$$

Satz 2.39. *Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f integrierbar genau dann, wenn $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.*

Beweis. Sei f integrierbar. Wegen $|f| = f^+ + (-f^-)$ ist $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, wobei wir Satz 2.37 benutzt haben. Sei nun $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Da $f^+ \leq |f|$ und $0 \leq -f^- \leq |f|$ folgt die Behauptung mit der Monotonie des Integrals aus Satz 2.37. □

Lemma 2.40. *Seien $f_1, f_2 : X \to [0, +\infty]$ messbar, so dass $f := f_1 - f_2$ definiert ist und $\int f_i \,\mathrm{d}\mu < \infty$ für $i = 1, 2$. Dann ist f integrierbar, und es gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Es gilt $|f| \leq f_1 + f_2$, und mit Satz 2.37 folgt $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Wegen Satz 2.39 ist f integrierbar. Aufgrund der Konstruktion ist $f_1 \geq f^+$. Definiere die nichtnegative Funktion g durch

$$g := f_1 - f^+ = f - f^+ + f_2 = f^- + f_2.$$

Da $|g| \leq |f_1|$ ist g integrierbar. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu &= \int (g + f^+) \,\mathrm{d}\mu - \int (g - f^-) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int g \,\mathrm{d}\mu + \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \left(\int g \,\mathrm{d}\mu + \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu \right) \\
&= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir Satz 2.37 benutzt. □

Die Schwierigkeit des Beweises war, dass wir die Additivität des Integrals bisher nur für nichtnegative Funktionen haben.

Satz 2.41. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

(1) $\int (cf) \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

(2) Ist $f + g$ definiert, dann ist $f + g$ integrierbar, und es gilt $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(3) Ist $f \leq g$, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(4) $\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. Wegen $|cf| \leq |c| \cdot |f|$ und $|f + g| \leq |f| + |g|$ folgt die Integrierbarkeit von cf und $f + g$ aus Satz 2.39 und Satz 2.37. Sei $c \geq 0$. Dann ist $(cf)^+ = cf^+$

und $(cf)^- = cf^-$, und es folgt (1). Analog wird der Fall $c < 0$ bewiesen. Wegen Lemma 2.40 bekommen wir aus $f + g = (f^+ + g^+) - (-f^- - g^-)$

$$\begin{aligned}\int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \int f^+ + g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^- - g^-) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu - \int (-g^-) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Additivität aus Satz 2.37 benutzt haben. Damit ist (2) bewiesen. Zu (3): ist $f \le g$ dann ist $f^+ \le g^+$ und $f^- \le g^-$, woraus mit der Monotonie aus Satz 2.37

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-f^-) \,\mathrm{d}\mu \le \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (-g^-) \le \int g \,\mathrm{d}\mu$$

folgt. (4) bekommen wir aus $-|f| \le f \le |f|$ und (3), (1). □

Definition 2.42. *Es sei $\mathcal{L}^1(\mu)$ die Menge aller integrierbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$.*

Die Menge $\mathcal{L}^1(\mu)$ versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum wegen Satz 2.41.

Lemma 2.43. *Die Abbildung*

$$f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} := \int |f| \,\mathrm{d}\mu$$

ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$, d.h., es gilt:

(1) $\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ für alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

(2) $\|cf\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le |c| \; \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $c \in \mathbb{R}$.

Im Allgemeinen folgt aus $\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = 0$ nicht, dass $f = 0$.

Beispiel 2.44. *Dazu betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$. Setze $f := \chi_{\mathbb{Q}}$. Dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$ aber $f \neq 0$.*

Satz 2.45. *Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow \{f \neq 0\}$ ist eine μ-Nullmenge.

(2) Ist f integrierbar, dann ist $\{f = \pm\infty\}$ eine μ-Nullmenge.

(3) Sei $\{f \neq g\}$ eine μ-Nullmenge. Dann ist f integrierbar genau dann, wenn g integrierbar ist. In diesem Falle gilt $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. (1) Setze $A := \{f \neq 0\}$. Sei $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $A_k := \{\frac{1}{k} \leq |f|\}$. Dann ist $\frac{1}{k}\chi_{A_k} \leq \chi_{A_k}|f| \leq |f|$, woraus mit Satz 2.37 $\frac{1}{k}\mu(A_k) \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ folgt. Damit ist $\mu(A_k) = 0$ für alle k und $\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$. Sei $\mu(A) = 0$. Wegen $|f| \leq \infty \cdot \chi_A$ folgt $\int |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \infty \cdot \mu(A) = 0$.

(2) Setze $A := \{|f| = +\infty\}$. Dann ist $\infty \cdot \mu(A) \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ (Satz 2.37), also $\mu(A) = 0$.

(3) Sei $N := \{f \neq g\}$. Wegen (1) haben wir

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int (\chi_N + \chi_{N^c})|f| \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|f| \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|g| \,\mathrm{d}\mu = \int |g| \,\mathrm{d}\mu.$$

Damit ist f integrierbar genau dann, wenn g integrierbar ist. Sind f und g integrierbar, bekommen wir mit einer analogen Begründung, dass $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int g^+ \,\mathrm{d}\mu$ und $\int -f^- \,\mathrm{d}\mu = \int -g^+ \,\mathrm{d}\mu$. □

Definition 2.46. *Sei $P : X \to \{wahr, falsch\}$ eine Abbildung (ein einstelliges Prädikat auf X im Sinne der Logik). Dann gilt P μ-fast überall (oder $P(x)$ gilt für μ-fast alle $x \in X$) genau dann, wenn es eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gibt, so dass $P(x)$ für alle $x \in N^c$ gilt.*

Damit lassen sich die Aussagen von Satz 2.45 wie folgt ausdrücken:

(1) $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-fast überall.

(2) Ist f integrierbar, dann ist $f \notin \{\pm\infty\}$ μ-fast überall.

(3) Ist $f = g$ μ-fast überall, dann ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Lemma 2.47. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben, so dass f messbar und $f = g$ μ-fast überall ist. Dann ist g messbar.*

Beweis. Sei N eine μ-Nullmenge, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in N^c$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$g^{-1}((-\infty, \alpha]) = \left(N^c \cap f^{-1}((-\infty, \alpha])\right) \cup \left(N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])\right).$$

Da N eine Nullmenge ist, und der Maßraum vollständig ist, ist $N \cap g^{-1}((-\infty, \alpha])$ als Teilmenge einer Nullmenge messbar. Es folgt, dass g messbar ist. □

Definition 2.48. *Es sei $A \in \mathcal{A}$, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, so dass $\chi_A f$ messbar ist. Dann ist das Integral von f über A definiert als*

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int \chi_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 2.49. *Es sei $f \in X \to [0, +\infty]$ messbar. Dann ist die Abbildung ν definiert durch*

$$\nu(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$. Die Funktion f heißt Dichtefunktion von ν.

Definition 2.50. *Sei $f : X \to \mathbb{C}$ messbar. Dann heißt f integrierbar, falls* $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *integrierbar sind, und wir definieren*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + i \int \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Bei der Integration komplexwertiger Funktionen entstehen keine neuen Effekte: Die Abbildung $f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu$ ist $\mathbb{C}$-linear für komplexwertige Funktionen. Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist. Die Menge aller solcher integrierbarer Funktionen ist wieder ein Vektorraum.

2.4 Konvergenzsätze

Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Wir wollen nun untersuchen, wann gilt

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Dies ist eine nicht-triviale Frage, denn das Integral haben wir über einen Grenzwert definiert.

Beispiel 2.51. *Im Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ definieren wir die folgenden Funktionenfolgen*

- $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$,
- $g_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x)$,
- $h_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x)$.

Dann konvergieren (f_n), (g_n) und (h_n) punktweise gegen Null, aber die Integrale nicht: $\int f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int g_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int h_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = 1$. Hier kann man Grenzwertbildung und Integral nicht vertauschen.

Satz 2.52 (Monotone Konvergenz)**.** *Seien (f_n) integrierbare Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ mit $f_n \nearrow f$ punktweise. Dann gilt $\int f_n \, \mathrm{d}\mu \nearrow \int f \, \mathrm{d}\mu$. Existiert ein $M > 0$, so dass $\int f_n \, \mathrm{d}\mu < M$ für alle n gilt, dann ist f integrierbar.*

Beweis. Definiere $g_n := f_n - f_1 \geq 0$, $g := f - f_1 \geq 0$. Dann gilt $g_n \nearrow g$, $\int g_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int g \,\mathrm{d}\mu$ (Satz 2.37). Da f_1 integrierbar ist, folgt

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int f_1 \,\mathrm{d}\mu.$$

Ist $\int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$, dann ist $f - f_1$ integrierbar, und es folgt $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f \,\mathrm{d}\mu$ aus der Linearität des Integrals (Satz 2.41). Wegen $0 \geq f^- \geq f_1$ ist f^- integrierbar, und aus $+\infty = \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ + f^- - f_1 \,\mathrm{d}\mu$ folgt

$$+\infty = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu = \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int f_1 \,\mathrm{d}\mu.$$

Weiter folgt

$$0 \leq \int g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq M - \int f_1 \,\mathrm{d}\mu,$$

also ist g integrierbar und damit auch f. □

Beispiel 2.53. *Die Funktionenfolgen $f_n = -\chi_{[n,+\infty)}$ und $g_n = \chi_{[0,n]}$ im Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ zeigen, dass monotone Konvergenz alleine nicht reicht für die Aussagen des Satzes.*

Satz 2.54 (Lemma von Fatou)**.** *Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, +\infty]$. Dann gilt*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Definiere $g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x)$. Dann sind die Funktionen g_n nichtnegativ und messbar. Weiter gilt $g_n \leq f_n$ und $g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$. Also bekommen wir aus Satz 2.37

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Beispiel 2.55. *Gleichheit gilt in Satz 2.54 im Allgemeinen nicht, siehe $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}$ aus Beispiel 2.51. Auf die Nichtnegativität kann nicht verzichtet werden: für $f_n(x) = -n\chi_{(0,1/n)}$ gilt die Behauptung nicht.*

Satz 2.56 (Dominierte Konvergenz)**.** *Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, $g : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Gilt $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und μ-fast alle x, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.*

Beweis. (1) Wir nehmen zuerst an, dass $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und alle x gilt. Daraus folgt $|f(x)| \leq g(x)$ für alle x. Damit sind die

Funktionen f und f_n integrierbar. Wir setzen $g_n := 2g - |f_n - f| \geq 0$. Nach Satz 2.54 ist

$$\begin{aligned} 2\int g \,\mathrm{d}\mu &= \int (\liminf_{n\to\infty} g_n(x))\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int 2g - |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \\ &= 2\int g\,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \leq 2\int g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Damit ist $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$, woraus mit Satz 2.41 die Behauptung folgt.

(2) Sei nun $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und μ-fast alle x. Dann existiert eine μ-Nullmenge N, so dass $f_n(x) \to f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und alle $x \in N^c$. Die Funktionen $\chi_{N^c} f_n$, $\chi_{N^c} f$ erfüllen dann die Voraussetzungen von Beweisteil (1). Es folgt also $\lim_{n\to\infty} \int \chi_{N^c}|f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$. Da $\chi_{N^c}|f_n - f|$ und $|f_n - f|$ sich nur auf der Nullmenge N unterscheiden, gilt $\int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{N^c}|f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0$. □

Beispiel 2.57. *Auf die Existenz der integrierbaren gemeinsamen oberen Schranke kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden, wie Beispiel 2.51 zeigt.*

Satz 2.58 (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(\mu)$)**.** *Es sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen, die eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein N, so dass $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.*

Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. Weiter existiert ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und eine Teilfolge, so dass $f_{n_k}(x) \to f(x)$ und $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ für alle k und μ-fast alle x.

Beweis. (1) Wir nehmen zuerst an, dass $\sum_{n=1}^\infty \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$. Definiere die messbaren Funktionen

$$g_m := |f_1| + \sum_{n=1}^m |f_{n+1} - f_n|, \quad g := |f_1| + \sum_{n=1}^\infty |f_{n+1} - f_n|.$$

Dann gilt $g_m \nearrow g$. Weiter ist $\int g_m\,\mathrm{d}\mu = \|f_1\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \sum_{n=1}^m \|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$, woraus mit der monotonen Konvergenz $\int g\,\mathrm{d}\mu < \infty$ folgt. Dann ist (Satz 2.45) $g < +\infty$ fast überall, und es folgt $\sum_{n=1}^\infty |f_{n+1} - f_n| < +\infty$ fast überall. Damit ist $(f_n(x))$ für fast alle x eine Cauchyfolge, also konvergent. Wir definieren $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ falls der Grenzwert existiert, sonst setzen wir $f(x) := 0$. Da $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle x, folgt $|f| \leq g$ fast überall. Mit dominierter Konvergenz Satz 2.56 bekommen wir $\int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0$.

(2) Sei m_k die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$, für die $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < 2^{-k}$ für alle $n, m \geq m_k$. Dann ist (m_k) monoton wachsend, und (n_k) definiert durch $n_k :=$

m_k+k ist streng monoton wachsend. Definiere $\tilde f_k := f_{n_k}$. Dann ist $\sum_{k=1}^\infty \|\tilde f_{k+1} - \tilde f_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty$. Wegen Teil (1) existiert $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so dass $\|\tilde f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$ gilt und die Teilfolge $(f_{n_k}) = (\tilde f_k)$ alle weitere Behauptungen erfüllt.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle k so, dass $\|\tilde f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon/2$ und $2^{-k} < \varepsilon/2$. Sei $n \geq n_k$. Dann ist $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f_n - \tilde f_k\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|\tilde f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$. □

Beispiel 2.59. *Man bekommt im Allgemeinen die punktweise Konvergenz nur für eine Teilfolge. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$. Definiere $f_n := 2^{j/2}\chi_{[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]}$ für $n = 2^j+k$, $0 \leq k < 2^j$. Dann ist $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_1)} = 2^{-j/2} \to 0$. Aber die Folge f_n ist nicht punktweise konvergent, und es existiert auch keine integrierbare gemeinsame obere Schranke.*

2.5 Vergleich mit Riemann-Integral

Sei $I = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Eine Abbildung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ existieren mit $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b$ und $\varphi|_{(a_i,a_{i+1})} = \varphi_i$. Das Riemann-Integral von φ ist definiert durch

$$R\text{–}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^n \varphi_i(a_{i+1} - a_i).$$

Der Vektorraum aller solcher Treppenfunktionen sei $\mathcal{T}(I)$.

Definition 2.60. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Riemann integrierbar, wenn gilt*

$$\begin{aligned} s := \sup\left\{ R\text{–}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \ \varphi \in \mathcal{T}(I),\ \varphi \leq f \right\} \\ = \inf\left\{ R\text{–}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \ \varphi \in \mathcal{T}(I),\ f \leq \varphi \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Fall setzen wir

$$R\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := s.$$

Wir arbeiten hier im Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$.

Satz 2.61. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Dann ist f λ_1-integrierbar und es gilt*

$$R\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Beweis. Sei φ eine Treppenfunktion. Dann ist φ $\mathcal{B}^1$-$\mathcal{B}^1$-messbar, und damit auch $\mathcal{L}(1)$-$\mathcal{B}^1$-messbar. Außerdem ist $R\text{–}\int_a^b \varphi\,\mathrm{d}x = \int_I \varphi\,\mathrm{d}\lambda_1$.

Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f bekommen wir für jedes n die Existenz von Treppenfunktionen φ_n und ψ_n mit $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ und $R\text{-}\!\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$. Daraus folgt $\|\psi_n - \varphi_n\|_{L^1(\lambda_1)} = R\text{-}\!\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\,\mathrm{d}x \to 0$.

Wegen Satz 2.58 gibt es eine Teilfolgen, so dass $\psi_{n_k} - \varphi_{n_k} \to 0$ fast überall. Da $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ folgt daraus $\lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x) = f(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$. Da der Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(1), \lambda_1)$ vollständig ist, folgt daraus die Messbarkeit von f. Aus der Integrierbarkeit von φ_n und ψ_n folgt die Integrierbarkeit von f. Grenzübergang in

$$R\text{-}\!\int_a^b \varphi_n\,\mathrm{d}x = \int_I \varphi_n\,\mathrm{d}\lambda_1 \leq \int_I f\,\mathrm{d}\lambda_1 \leq \int_I \psi_n\,\mathrm{d}\lambda_1 = R\text{-}\!\int_a^b \psi_n\,\mathrm{d}x$$

liefert die Gleichheit von Riemann- und Lebesgue-Integral. □

Bemerkung 2.62. *Ein ähnliches Resultat gilt auch für den Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, \lambda_1)$: Nach Änderung auf einer λ_1-Nullmenge ist die Riemann-integrierbare Funktion f dann auch messbar und integrierbar, und die Integrale stimmen überein.*

Beispiel 2.63. *Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist λ_1-integrierbar aber nicht Riemann integrierbar.*

Beispiel 2.64. *Sei $s > 1$ und $f(x) = x^{-s}$ für $x > 1$. Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral*

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-s}(t^{1-s} - 1) = \frac{1}{s-1}.$$

Ähnlich argumentieren wir das Lebesgue-Integral

$$\int_{(1,\infty)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{(1,\infty)} \chi_{(1,n)} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^1 = \frac{1}{s-1}.$$

Hier haben wir die monotone Konvergenz benutzt.

Beispiel 2.65. *Das uneigentliche Riemann-Integral $R\text{-}\!\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existiert und ist endlich, während die Funktion f definiert durch $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nicht auf dem Intervall $[1,+\infty)$ λ_1-integrierbar ist, und das Integral $\int_{[1,\infty)} f\,\mathrm{d}\lambda_1$ ist nicht definiert.*

Da Lebesgue- und Riemann-Integral gleich sind, kann man auch für das Lebesgue-Integral die Riemann-Integral-Schreibweise verwenden, also

$$\int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $f : (a,b) \to \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar schreiben.

2.6 Produktmaße und Satz von Fubini

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Auf $X \times Y$ können wir ein äußere Maß definieren:

$$\lambda^*(M) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) : \ A_n \in \mathcal{A}, \ B_n \in \mathcal{B}, \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \times B_n) \supseteq M \right\}. \tag{2.66}$$

Wegen Satz 1.37 ist dies tatsächlich ein äußeres Maß.

Definition 2.67. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Wir definieren das durch μ und ν auf $X \times Y$ erzeugte Produktmaß $\mu \otimes \nu$ als das durch Satz 1.60 aus dem obigen äußeren Maß (2.66) erzeugte Maß. Die Menge der λ^*-messbaren Mengen nennen wir Λ.*

Dann ist $(X \times Y, \Lambda, \mu \otimes \nu)$ ein vollständiger Maßraum. Wir zeigen, dass $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$.

Lemma 2.68. *Es gilt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \Lambda$. Weiter ist*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Beweis. [Fre03, Proposition 251E] Wir zeigen, dass $A \times Y$ und $X \times B$ in Λ sind. Wegen $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ und der Definition von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist dies ausreichend, vergleiche Lemma 1.18.

Sei $A \in \mathcal{A}$ und $D \subseteq X \times Y$ mit $\lambda^*(D) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren Folgen (A_j) und (B_j) in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \times B_j) \supseteq D$ und $\lambda^*(D) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$. Dann ist

$$D \cap (A \times Y) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}((A_j \cap A) \times B_j), \quad D \cap (A \times Y)^c \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}((A_j \cap A^c) \times B_j).$$

Aus der Definition von λ^* folgt

$$\begin{aligned}
&\lambda^*(D \cap (A \times Y)) + \lambda^*(D \cap (A \times Y)^c) \\
&\qquad \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A)\nu(B_j) \right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A^c)\nu(B_j) \right) \\
&\qquad\qquad = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) \leq \lambda^*(D) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

also ist $A \times Y$ in Λ. Analog folgt $X \times B \in \Lambda$ für $B \in \mathcal{B}$.

Seien nun $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Dann gilt $\lambda^*(A \times B) \le \mu(A)\nu(B)$. Es bleibt, die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Seien also Folgen (A_j) und (B_j) mit $\bigcup_{j=1}^\infty (A_j \times B_j) \supseteq A \times B$ gegeben. Definiere $S := \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\nu(B_j) \in [0, +\infty]$. Wir zeigen $\mu(A)\nu(B) \le S$.

Dazu reicht es, den Fall $S < +\infty$ zu betrachten. Setze

$$I := \{j : \ \mu(A_j) = 0\}, \quad J := \{j : \nu(B_j) = 0\}, \quad K := \mathbb{N} \setminus (I \cup J).$$

Definiere

$$A' := A \setminus (\bigcup_{j \in I} A_j), \quad B' := B \setminus \bigcup_{j \in J} B_j.$$

Dann ist $\mu(A) = \mu(A')$ und $\nu(B) = \nu(B')$. Weiter ist $A' \subseteq \bigcup_{j \notin I} A_j$ und $B' \subseteq \bigcup_{j \notin J} B_j$. Außerdem gilt

$$A' \times B' \subseteq \bigcup_{j \in K} A_j \times B_j,$$

was man wie folgt sieht: Sei $(a, b) \in A' \times B'$, $I_a = \{j : \ a \in A_j\}$, $J_b = \{j : \ b' \in B_j\}$. Dann ist $I_a \subseteq I^c$, $J_b \subseteq J^c$, damit $I_a \cap J_b \subseteq K$, und wegen $(a, b) \in A$ ist $I' \cap J' \neq \emptyset$.

Weiter ist $S = \sum_{j \in K} \mu(A_j)\nu(B_j)$ und $\mu(A_j), \nu(B_j) \in \mathbb{R}$ für alle $j \in K$. Definiere $f_j : X \to \mathbb{R}$ durch $f_j := \chi_{A_j}\nu(B_j)$ falls $j \in K$, sonst $f_j := 0$. Dann ist f_j eine einfache Funktion. Die Folge $\sum_{j=1}^n f_j$ ist monoton wachsend, und wir setzen $g(x) := \sum_{j=1}^\infty f_j(x)$. Da $\int_X \sum_{j=1}^n f_j \, \mathrm{d}\mu \le S$ für alle n folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz Satz 2.37

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \sum_{j=1}^n f_j \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j)\nu(B_j) = S.$$

Sei $x \in A'$ und setze $K_x := \{j \in K : \ x \in A_j\}$. Wegen $\{x\} \times B' \subseteq \bigcup_{j \in K} A_j \times B_j$ folgt $B' \subseteq \bigcup_{j \in K_x} B_j$ und

$$\nu(B) = \nu(B') \le \sum_{j \in K_x} \nu(B_j) = \sum_{j \in K_x} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j) \le g(x).$$

Also ist $\chi_{A'}\nu(B) \le g$ und

$$\begin{aligned} \mu(A)\nu(B) = \mu(A')\nu(B) &= \int_X \chi_{A'}\nu(B) \, \mathrm{d}\mu \\ &\le \int_X g(x) \, \mathrm{d}\mu = S = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\nu(B_j). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda^*(A \times B) \ge \mu(A)\nu(B)$. $\square$

Ein anderer Beweis findet sich zum Beispiel in [Tao11, Proposition 1.7.11].

Folgerung 2.69. *Sind μ und ν σ-endlich, dann sind die Maßräume $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes \mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$ und $(X\times Y, \Lambda, \mu\otimes\nu)$ σ-endlich.*

Folgerung 2.70. *Sei $\mu\otimes\nu$ σ-endlich. Für jede Menge $C\in\Lambda$ gibt es $D\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und eine $\mu\otimes\nu$-Nullmenge $N\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $C\cup N = D$.*

Beweis. Sei $(\mu\otimes\nu)(C)<\infty$. Dann folgt aus der Konstruktion von λ^*, dass für jedes $k\in\mathbb{N}$ eine Menge $D_k\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ existiert mit $C\subseteq D_k$ und $\lambda^*(D_k)\le\lambda^*(C)+\frac{1}{k}$. Dann ist $\tilde D := \bigcap_{k=1}^\infty D_k\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $(\mu\otimes\nu)(C) = (\mu\otimes\nu)(\tilde D)$, und $\tilde N := \tilde D\setminus C\in\Lambda$ ist eine $\mu\otimes\nu$-Nullmenge. Wenden wir diese Argumentation auf $\tilde N$ an, dann bekommen wir die Existenz einer $\mu\otimes\nu$-Nullmenge $N\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $\tilde N\subseteq N$. Die Behauptung folgt mit $D=\tilde D\cup N$.

Sei nun $C\in\Lambda$ beliebig. Da das Produktmaß σ-endlich ist, existiert eine Folge (C_j) in $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $(\mu\otimes\nu)(C_j)<\infty$ und $\bigcup_{j=1}^\infty C_j = X\times Y$. Für jedes j existieren dann $D_j, N_j\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $(\mu\otimes\nu)(N_j)=0$ und $(C\cap C_j)\cup N_j = D_j$. Dann folgt die Behauptung mit $D:=\bigcup_{j=1}^\infty D_j$ und $N:=\bigcup_{j=1}^\infty N_j$. □

Damit ist dann $(X\times Y,\Lambda,\mu\otimes\nu)$ die Vervollständigung von $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, (\mu\otimes\nu)|_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}})$.

Im Folgenden werden wir mit der symmetrischen Differenz $A\triangle B$ arbeiten, definiert durch

$$A\triangle B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B).$$

Aufgabe 2.71. *[Bog07, Lemma 1.5.5] Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Sind $A,B\in\mathcal{A}$ mit $\mu(A)<\infty$ und $\mu(B)<\infty$ dann gilt $|\mu(A)-\mu(B)|\le\mu(A\triangle B)$.*

Für die Eindeutigkeit des Produktmaßes ist die σ-Endlichkeit von μ und ν entscheidend.

Satz 2.72. *Es seien μ und ν σ-endlich. Sei $\lambda:\mathcal{C}\to\bar{\mathbb{R}}$ ein Maß mit $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}$ und $\lambda(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$ für alle $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$. Dann gilt $\lambda=\mu\otimes\nu$ auf $\mathcal{C}\cap\Lambda\supseteq\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.*

Beweis. Sei λ^* das durch μ und ν auf $X\times Y$ erzeugte äußere Maß aus (2.66). Dann gilt $\lambda^*(A\times B)=\mu(A)\nu(B)=\lambda(A\times B)$ für alle $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$ nach Lemma 2.68. Wir zeigen, dass $\lambda^*(C)=\lambda(C)$ für alle $C\in\mathcal{C}$.

(1) Wir zeigen zuerst $\lambda(\bigcup_{j=1}^n A_j\times B_j) = \lambda^*(\bigcup_{j=1}^n A_j\times B_j)$ für $A_j\in\mathcal{A}$, $B_j\in\mathcal{B}$. Wir benutzen die Additivität der beiden Maße auf $\mathcal{C}\cap\Lambda\supseteq\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Für $I\subseteq\{1\dots n\}$ definieren wir

$$A_I := \{x \mid \forall i=1\dots n:\ x\in A_i \ \Leftrightarrow i\in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i\cap\bigcap_{i\notin I} A_i^c.$$

Ist $I' \subseteq \{1 \dots n\}$ mit $I' \neq I$ dann ist $A_I \cap A_{I'} = \emptyset$. Analog definieren wir B_I. Dann gilt

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j = \bigcup_{\substack{I,J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J \neq \emptyset}} A_I \times B_J,$$

wobei die Vereinigung auf der rechten Seite eine disjunkte Vereinigung ist, und

$$\begin{aligned} \lambda(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j) &= \sum_{\substack{I,J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J \neq \emptyset}} \lambda(A_I \times B_J) \\ &= \sum_{\substack{I,J \subseteq \{1 \dots n\} \\ I \cap J \neq \emptyset}} \lambda^*(A_I \times B_J) = \lambda^*(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j). \end{aligned}$$

(2) Sei nun $C \in \mathcal{C} \cap \Lambda$ mit $\lambda^*(C) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Folge (C_j) mit $C_j \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, $C_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^\infty C_j \supseteq C$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda^*(C_j) \leq \lambda^*(C) + \varepsilon/6$. Dann folgt $\lambda^*(C_\varepsilon \setminus C) \leq \varepsilon/6$. Da die Folge $n \mapsto C \setminus \bigcup_{j=1}^n C_j$ monoton fällt mit $(\mu \otimes \nu)(C \setminus \bigcup_{j=1}^\infty C_j) = 0$ gibt es ein N, so dass

$$\lambda^*(C \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j) = (\mu \otimes \nu)(C \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j) \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Setze $C_N := \bigcup_{j=1}^N C_j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda^*(C_N \triangle C) = \lambda^*(C \triangle \bigcup_{j=1}^{N} C_j) &= \lambda^*(\bigcup_{j=1}^{N} C_j \setminus C) + \lambda^*(C \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j) \\ &\leq \lambda^*(C_\varepsilon \setminus C) + \frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Weiter gibt es eine Folge (D_j) mit $D_j \in \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ mit $\bigcup_{j=1}^\infty D_j \supseteq C_N \triangle C$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda^*(D_j) \leq \frac{2}{3}\varepsilon$. Dann ist

$$\lambda(C_N \triangle C) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(D_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(D_j) \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Aus dem oben in Teil (1) Gezeigten folgt $\lambda^*(C_N) = \lambda(C_N)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\lambda^*(C) - \lambda(C)| &\leq |\lambda^*(C) - \lambda^*(C_N)| + |\lambda(C_N) - \lambda(C)| \\ &\leq \lambda^*(C \triangle C_N) + \lambda(C_N \triangle C) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\lambda^*(C) = \lambda(C)$.

(3) Für allgemeines $C \in \mathcal{C} \cap \Lambda$ folgt $\lambda^*(C) = \lambda(C)$ aus der σ-Endlichkeit von

μ und ν. □

Der Beweis ist eine Kombination von Argumenten aus den Beweisen von [Bog07, Theorem 1.11.8, Theorem 1.5.6(iii)]. Eine andere Beweisvariante ist [Els05, Satz II.5.6].

Satz 2.73. *Es gilt* $\lambda_m \otimes \lambda_n = \lambda_{m+n}$ *auf* $\mathcal{L}(m+n)$.

Beweis. [Fre03, Theorem 251N] Es sei λ^* das durch λ_m und λ_n erzeugte äußere Maß auf $\mathbb{R}^{m+n}$. Wir zeigen $\lambda^* = \lambda^*_{m+n}$. Da $\mathbb{J}(m+n) = \mathbb{J}(m) \boxtimes \mathbb{J}(n) \subseteq \mathcal{L}(m) \boxtimes \mathcal{L}(n)$ ist $\lambda^* \le \lambda^*_{m+n}$.

(1) Wir zeigen, dass gilt $\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \lambda^*(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$ für alle $A \in \mathcal{L}(m)$ und $B \in \mathcal{L}(n)$. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda_m(A) < \infty$, $\lambda_n(B) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Überdeckungen (A_i) und (B_j) von A und B durch Quader des $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i) \le \lambda_m(A) + \varepsilon$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j) \le \lambda_n(B) + \varepsilon$. Dann ist $(A_i \times B_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $A \times B$ und es folgt mit dem Doppelreihensatz Satz 1.38

$$\begin{aligned}\lambda^*_{m+n}(A \times B) &\le \sum_{i,j=1}^\infty \lambda_m(A_i)\lambda_n(B_j) = \left(\sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i)\right)\left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_n(B_j)\right)\\ &\le (\lambda_m(A)+\varepsilon)(\lambda_n(B)+\varepsilon).\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda_m(A) = 0$ und $\lambda_n(B) = +\infty$. Dann gibt es eine Überdeckung von B durch eine Folge (B_j) mit $\lambda_n(B_j) < \infty$. Wegen der σ-Subadditivität von λ^*_{m+n} und dem gerade Bewiesenen ist

$$\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda^*_{m+n}(A \times B_j) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda_m(A)\lambda_n(B_j) = 0.$$

Damit ist die Ungleichung $\lambda^*_{m+n}(A \times B) \le \lambda^*(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$ für alle $A \in \mathcal{L}(m)$, $B \in \mathcal{L}(n)$ bewiesen.

(2) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. Weiter seien Folgen (A_i) und (B_i) in $\mathcal{L}(m)$ und $\mathcal{L}(n)$ mit $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \times B_i \supseteq C$ gegeben. Es folgt mit der σ-Subadditivität von λ^*_{m+n}

$$\lambda^*_{m+n}(C) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda^*_{m+n}(A_i \times B_i) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda_m(A_i)\lambda_n(B_i).$$

Damit ist $\lambda^*_{m+n} \le \lambda^*$, da λ^* als Infimum über solche Überdeckungen definiert ist. □

Nun wollen wir das Lebesgue-Integral bezüglich des Produktmaßes betrachten. Hier wollen wir beweisen, dass

$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\,\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Angewandt auf den Spezialfall $\mu = \nu = \lambda_1$ bekommen wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\right)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\right)\,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Wir beginnen mit einem Hilfsresultat aus der Mengenlehre.

Definition 2.74. *Sei $X \neq \emptyset$. Eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt monotone Klasse, wenn gilt:*

(1) Für (A_j) mit $A_j \in \mathcal{M}$ und $A_j \subseteq A_{j+1}$ folgt $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$.

(2) Für (A_j) mit $A_j \in \mathcal{M}$ und $A_j \supseteq A_{j+1}$ folgt $\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$.

Beispiel 2.75. *Jede σ-Algebra ist eine monotone Klasse. Da Durchschnitte von monotonen Klassen wieder monotone Klassen sind, existiert für jedes $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste monotone Klasse, die S enthält.*

Satz 2.76. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine (boolesche oder Mengen–) Algebra, d.h. es gilt*

(1) $X \in \mathcal{A}$,

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Dann ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$ gleich der kleinsten monotonen Klasse, die $\mathcal{A}$ enthält.

Beweis. Es sei

$$\mathcal{M} := \bigcap\{\mathcal{M}' :\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}',\ \mathcal{M}' \text{ monotone Klasse}\}.$$

Da $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, folgt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A})$. Außerdem ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ und damit $X \in \mathcal{M}$. Wir zeigen $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.

Für $A \subseteq X$ definieren wir

$$\mathcal{M}(A) := \{B \subseteq X :\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A \in \mathcal{M}\}.$$

Die Definition ist symmetrisch in A und B, damit ist $B \in \mathcal{M}(A)$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{M}(B)$.

Sei nun $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(A)$. Weiter ist $\mathcal{M}(A)$ eine monotone Klasse: Sei (B_j) eine Folge in $\mathcal{M}(A)$ mit $B_j \subseteq B_{j+1}$. Dann ist $A \cup B_j \in \mathcal{M}$,

$A \cup B_j \subseteq A \cup B_{j+1}$ und $A \cup (\bigcup_{j=1}^\infty B_j) = \bigcup_{j=1}^\infty (A \cup B_j) \in \mathcal{M}$. Also ist $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{M}$. Die restlichen Eigenschaften folgen analog, und es gilt $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{M}(A)$. Daraus folgt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Aus der Symmetrie folgt $A \subseteq \mathcal{M}(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{A}$. Damit ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(M)$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}$. Weil $X \in \mathcal{M}$ ist, ist $\mathcal{M}$ eine Algebra.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. Sei (A_j) eine Folge in $\mathcal{M}$. Definiere $B_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$. Da $\mathcal{M}$ eine Algebra ist, folgt $B_k \in \mathcal{M}$ für alle k. Weiter ist $B_k \subseteq B_{k+1}$. Da $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist, folgt $\bigcup_{k=1}^\infty B_k = \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$, also ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält, und damit $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$. □

Aufgabe 2.77. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann ist $C_x := \{y : (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$ und $C^y := \{x : (x, y) \in C\} \in \mathcal{A}$ für alle $y \in Y$.*

Aufgabe 2.78. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume, $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar. Dann ist für jedes $x \in X$ die Funktion $f_x(y) := f(x, y)$ $\mathcal{B}$-messbar. Analog ist für jedes $y \in Y$ die Funktion $f_y(x) := f(x, y)$ $\mathcal{A}$-messbar.*

Wir betrachten zuerst Integrale nicht-negativer Funktionen. Wir beginnen mit Integralen charakteristischer Funktionen. Außerdem zeigt der folgende Satz eine Alternative, um ein Produktmaß zu definieren.

Satz 2.79. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume, ν sei σ-endlich. Dann ist für jedes $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die Abbildung $x \mapsto \nu(C_x)$ $\mathcal{A}$-messbar, und*

$$\rho(C) := \int_X \nu(C_x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

ist ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \ B \in \mathcal{B}.$$

Beweis. (1) Wir betrachten erst den Fall, dass ν endlich ist. Der Beweis folgt dem Prinzip der guten Mengen: Wir definieren

$$\mathcal{M} := \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \ x \mapsto \nu(C_x) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist. Ist (C_j) eine monoton fallende Folge in $\mathcal{M}$ mit $C := \bigcap_{j=1}^\infty C_j$, dann gilt $\nu(C_x) = \lim_{j\to\infty} \nu(C_{j,x})$ für alle x wegen (1.30). Und damit ist $C \in \mathcal{M}$. Für eine monoton wachsende Folge (C_j) in $\mathcal{M}$ bekommen wir analog $\bigcup_{j=1}^\infty C_j \in \mathcal{M}$.

Wir betrachten nun die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j : \ n \in \mathbb{N}, \ A_j \in \mathcal{A}, \ B_j \in \mathcal{B} \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{C}$ eine Algebra: aus $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ folgt $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$. Wegen $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ ist

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} ((A_j^c \times Y) \cup (X \times B_j^c)) = \bigcup_{J \subseteq \{1 \dots n\}} \left(\bigcap_{j \in J} A_j^c \times \bigcap_{j \notin J} B_j^c \right),$$

und $\mathcal{C}$ ist eine Algebra.

Wir zeigen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Wie im Beweis von Satz 2.72 argumentiert, kann jede Vereinigung von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ als endliche, disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ geschrieben werden. Sei $C := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j \in \mathcal{C}$ mit disjunkten Mengen $A_j \times B_j$. Dann ist

$$x \mapsto \nu(C_x) = \sum_{j=1}^{n} \nu((A_j \times B_j)_x) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j)$$

eine messbare Funktion, und $C \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Nach Satz 2.76 ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{C})$ die kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{C}$ enthält, also folgt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

(2) Sei nun ν σ-endlich. Dann gibt es eine aufsteigende Folge (Y_j) mit $Y_j \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j = Y$ und $\nu(Y_j) < \infty$. Dann ist $B \mapsto \nu(B \cap Y_j)$ ein endliches Maß auf Y für alle j. Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Wegen (1) ist $x \mapsto \nu(C_x \cap Y_j)$ $\mathcal{A}$-messbar für alle j. Wegen der Konvergenz $\nu(C_x \cap Y_j) \to \nu(C_x)$ für alle x ist auch $x \mapsto \nu(C_x)$ $\mathcal{A}$-messbar.

(3) Es bleibt zu zeigen, dass ρ die behaupteten Eigenschaften hat. Sind $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, dann ist

$$\rho(A \times B) = \int_X \chi_A \nu(B) \,\mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\nu(B).$$

Sei (C_j) eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Setze $C := \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$. Dann ist $\nu(C_x) = \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{j,x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(C_{j,x})$ für alle x. Mithilfe der monotonen

Konvergenz (Satz 2.37) folgt

$$\begin{aligned}\int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu(C_{j,x})\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \nu(C_{j,x})\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{j=1}^{n} \nu(C_{j,x})\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(C_j),\end{aligned}$$

und ρ ist ein Maß. □

Bemerkung 2.80. *Der Umweg über die Menge $\mathcal{C}$ war nötig, denn man kann nicht zeigen, dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen gegenüber Durchschnittsbildung ist. In diesem Fall wäre $\mathcal{M}$ eine Algebra: Wegen (1.27) würde aus $C_1 \subseteq C_2$ mit $C_1, C_2 \in \mathcal{M}$ folgen, dass $C_2 \setminus C_1 \in \mathcal{M}$ ist, damit wäre $\mathcal{M}$ abgeschlossen gegenüber Komplementbildung.*

Satz 2.81. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann sind die Abbildungen $x \mapsto \nu(C_x)$ und $y \mapsto \mu(C^y)$ $\mathcal{A}$- und $\mathcal{B}$-messbar, und es gilt*

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Beweis. Folgt aus Satz 2.79 und Satz 2.72. □

Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann ist für alle $x \in X$ und $y \in Y$

$$\chi_C(x, y) = \chi_{C_x}(y).$$

Damit bekommen wir aus Satz 2.81

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_{X\times Y} \chi_C\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \int_Y \chi(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Folgerung 2.82 (Prinzip von Cavalieri)**.** *Seien $A, B \in \mathcal{L}(m+n)$. Gilt $\lambda_m(A_y) = \lambda_m(B_y)$ für λ_n-fast alle $y \in \mathbb{R}^n$, dann folgt $\lambda^{m+n}(A) = \lambda^{m+n}(B)$.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.81 und Satz 2.73. □

Beispiel 2.83. *Ohne σ-Endlichkeit ist die Behauptung von Satz 2.81 falsch. Sei $X = Y = \mathbb{R}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}^1$ und $\mu = \lambda_1$ sowie $\nu = \mathcal{H}^0$ (Zählmaß). Sei $D := \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$. Dann ist D abgeschlossen und gehört zu $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1$.*

Wir beweisen zuerst, dass $\lambda^*(D) = +\infty$ mit dem äußeren Maß λ^* aus (2.66). Seien (A_j) und (B_j) Folgen in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$. Wir zeigen, dass $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \times B_j$ keine Überdeckung von D sein kann.

Damit $\mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$ ist, muss B_j eine endliche Menge oder A_j eine λ_1-Nullmenge sein. Wir setzen

$$A := \bigcup_{j:\,\lambda_1(A_j)=0} A_j, \quad B := \bigcup_{j:\,\mathcal{H}^0(B_j)<\infty} B_j.$$

Dann ist A eine λ_1-Nullmenge und B eine abzählbare Menge.

Weiter ist $A_j \times B_j \subseteq (A\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times B)$ für alle j, und damit $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \times B_j \subseteq (A\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times B)$. Sei $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ die Projektion auf die erste Koordinate, also $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$. Dann ist $\pi_1(D\cap(A\times\mathbb{R})) = A$ und $\pi_1(D\cap(\mathbb{R}\times B)) = B$. Da $\pi_1(D) = [0,1]$ ist $\lambda_1(\pi_1(D)) = 1$. Weil aber $\lambda_1(\pi(A\cup B)) = 0$ ist, kann $\bigcup_{j=1}^\infty A_j\times B_j$ keine Überdeckung von D sein. Damit folgt $\lambda^*(D) = (\mu\otimes\nu)(D) = +\infty$.

Wertet man die Integrale in Satz 2.81 aus bekommt man allerdings andere Werte: es ist $\nu(D_x) = \chi_{[0,1]}(x)$ und $\mu(D^y) = 0$, so dass

$$\int_X \nu(D_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 1, \quad \int_Y \mu(D^y)\,\mathrm{d}\nu(y) = 0.$$

Außerdem zeigt dieses Beispiel, dass das Produktmaß nicht mehr eindeutig im Sinne von Satz 2.72 sein kann. Denn wegen Satz 2.79 ist $C \mapsto \int_Y \mu(C^y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ ein weiteres, von $\mu\otimes\nu$ verschiedenes Maß auf $X\times Y$.

Den folgenden Satz (Satz von Fubini) beweisen wir in vier Varianten: jeweils für nicht-negative Funktionen und integrierbare Funktionen, und $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbare und Λ-messbare Funktionen.

Satz 2.84. *Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-endliche Maßräume. Sei $f : X\times Y \to [0,+\infty]$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbar.*

Dann sind die Funktionen $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ und $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{A}$- und $\mathcal{B}$-messbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Beweis. Wegen Satz 2.81 gilt die Behauptung des Satzes für einfache Funktionen $f : X\times Y \to [0,+\infty)$.

Sei nun $f : X\times Y \to [0,+\infty]$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbar. Dann gibt es wegen Satz 2.29 eine Folge einfacher, nichtnegativer Funktionen (f_n) mit $f_n \nearrow f$. Dann ist die Funktion $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ als punktweiser Grenzwert der messbaren Funktionen $x \mapsto \int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Analog ist $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{B}$-messbar. Mit monotoner Konvergenz Satz 2.37 bekommen wir

$$\int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \nearrow \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

für alle x und

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} f_n\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X\left(\int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X\left(\lim_{n\to\infty}\int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Analog bekommen wir die zweite Gleichung. □

Satz 2.85. *Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-endliche Maßräume. Sei $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbar und integrierbar bezüglich $\mu\otimes\nu$.*

Dann sind die Funktionen $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ und $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ für μ-fast alle x und ν-fast alle y definiert und integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Diese Schreibweise birgt eine kleine Unsauberkeit: die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ muss nicht für alle x ν-integrierbar sein. Die Doppelintegrale sind deshalb wie folgt zu verstehen: Die Menge $N := \{x : \int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) = +\infty\}$ ist eine μ-Nullmenge nach der Behauptung von Satz 2.85, und wir setzen

$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) := \int_{N^c}\left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x). \tag{2.86}$$

Analog verfahren wir mit dem zweiten Doppelintegral.

Beweis von Satz 2.85. Wegen Satz 2.39 ist $|f|$ bezüglich $\mu\otimes\nu$ integrierbar, und Satz 2.84 ergibt $\int_{X\times Y}|f|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$. Nach Satz 2.45 ist die Menge $N := \{x : \int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) = +\infty\}$ eine μ-Nullmenge.

Ist $x \in N^c$ dann gilt

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) + \int_Y -f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Die Funktionen auf der rechten Seite sind $\mathcal{A}$-messbar und μ-integrierbar wegen Satz 2.84. Weiter ist $N \times Y$ eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge. Durch Integration und Anwenden von Satz 2.84 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{N^c} \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{N^c} \left(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) - \int_{N^c} \left(\int_Y -f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{X\times Y} \chi_{N^c\times Y} f^+\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} \chi_{N^c\times Y}\cdot(-f^-)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) \\
&= \int_{X\times Y} f^+\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} -f^-\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) \\
&= \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu).
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Da $\mu(N) = 0$, ist nach der Definition in (2.86)

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{N^c} \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt analog. □

Wir wollen nun noch Sätze analog zu Satz 2.84 und Satz 2.85 formulieren, für Funktionen, die Λ-messbar sind. Wegen $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \subseteq \Lambda$ ist das eine schwächere Voraussetzung als $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-Messbarkeit.

Lemma 2.88. *Sei $\mu\otimes\nu$ σ-endlich. Sei $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ Λ-messbar. Dann existiert eine Menge $N \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $(\mu\otimes\nu)(N) = 0$ und eine $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbare Funktion $\tilde f$, so dass $f = \tilde f$ auf N^c.*

Beweis. Sei zunächst $f = \chi_C$ mit $C \in \Lambda$. Nach Folgerung 2.70 existieren $D, N \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $C \cup N = D$ und $(\mu\otimes\nu)(D) = (\mu\otimes\nu)(C)$. Die Behauptung folgt mit $\tilde f = \chi_D$. Dann gilt die Behauptung auch für einfache Funktionen. Sei nun f Λ-messbar. Wir approximieren f durch eine Folge (f_n) einfacher Funktionen, die Λ-messbar sind (Folgerung 2.30). Dann gibt es für jedes n eine Nullmenge $N_n \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und eine (einfache) $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbare Funktion $\tilde f_n$ mit $\tilde f_n = f_n$ auf N_n^c. Setze $N := \bigcup_{n=1}^\infty N_n$. Dann ist $(\mu\otimes\nu)(N) = 0$. Die Behauptung folgt mit $\tilde f = \limsup_{n\to\infty} \tilde f_n$. □

Satz 2.89. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche und vollständige Maßräume mit Produkt $(X \times Y, \Lambda, \mu\otimes\nu)$. Sei $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ Λ-messbar.*

Dann gilt:

(1) *Für μ-fast alle x ist $y \mapsto f(x,y)$ $\mathcal{B}$-messbar. Weiter ist die (für fast alle x definierte) Abbildung $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar.*

(2) *Für ν-fast alle y ist $x \mapsto f(x,y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Weiter ist die (für fast alle y definierte) Abbildung $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ $\mathcal{B}$-messbar.*

(3)

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).$$

Beweis. Aus Lemma 2.88 bekommen wir eine $\mu\otimes\nu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und eine $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-messbare Funktion $\tilde f$ mit $f = \tilde f$ auf N^c. Dann ist $\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} \tilde f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)$. Satz 2.84 angewandt auf χ_N ergibt

$$0 = (\mu\otimes\nu)(N) = \int_X \nu(N_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(N^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Damit ist N_x ein ν-Nullmenge für μ-fast alle x, und N^y ist ein μ-Nullmenge für ν-fast alle y.

Sei $M := \{x:\ \nu(N_x) > 0\}$. Sei $x \in M^c$, also $\nu(N_x) = 0$. Dann ist $f(x,y) = \tilde f(x,y)$ für alle $y \in (N_x)^c$. Nun ist $y \mapsto \tilde f(x,y)$ $\mathcal{B}$-messbar, $\nu(N_x) = 0$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ vollständig, also $y \mapsto f(x,y)$ ist $\mathcal{B}$-messbar, und damit ist das Integral $\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ definiert. Und es gilt $\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$, weil sich $f(x,\cdot)$ und $\tilde f(x,\cdot)$ nur auf der Nullmenge N_x unterscheiden.

Da die Abbildung $x \mapsto \int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar (Satz 2.84), $\mu(M) = 0$ und $(X,\mathcal{A},\mu)$ vollständig ist, ist auch $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ $\mathcal{A}$-messbar. Integrieren bezüglich x gibt

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{M^c} \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_{M^c} \left(\int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \tilde f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

Analog argumentieren wir für $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$. Die Behauptung folgt mit Satz 2.84 angewandt auf $\tilde f$. □

Satz 2.90. *Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-endliche und vollständige Maßräume mit Produkt $(X\times Y,\Lambda,\mu\otimes\nu)$. Sei $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ Λ-messbar und integrierbar.*

Dann gilt:

(1) Für μ-fast alle x ist $y \mapsto f(x,y)$ ν-integrierbar. Weiter ist die (für fast alle x definierte) Abbildung $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ μ-integrierbar.

(2) Für ν-fast alle y ist $x \mapsto f(x,y)$ μ-integrierbar. Weiter ist die (für fast alle y definierte) Abbildung $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ ν-integrierbar.

(3)

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zu Satz 2.85. Da f integrierbar ist, sind auch f^+ und $-f^-$ integrierbar. Wir wenden Satz 2.89 auf $|f|$, f^+ und $-f^-$ an. Dann gibt es eine μ-Nullmenge N, so dass gilt: $y \mapsto f(x,y)$ ist $\mathcal{B}$-messbar und integrierbar für alle $x \in N^c$, und die Abbildungen $x \mapsto \chi_{N^c}\int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)$, $x \mapsto \chi_{N^c}\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$, $x \mapsto \chi_{N^c}\int_Y -f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ sind $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Wir können nun wie in (2.87) argumentieren. □

Beispiel 2.91. *[Els05, Beispiel V.2.3] Für die Funktion*

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

sind die iterierten Integrale

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4},\quad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = +\frac{\pi}{4},$$

also kann f nicht λ_1-integrierbar auf $(0,1)^2$ sein.

Lemma 2.92. *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ σ-endlich und $f: X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbar. Definiere*

$$A_f := \{(x,t):\ 0 \le t < f(x)\} \subseteq X\times\mathbb{R}.$$

Dann ist

$$(\mu\otimes\lambda_1)(A^f) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen

$$A_f = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}} (\{x:\ f(x) > t\}\times[0,t])$$

ist $A_f \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Da $\lambda_1((A_f)_x) = f(x)$, folgt die Behauptung mit Satz 2.81.

□

Lemma 2.93. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich und $f : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbar. Dann gilt*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x : \ f(x) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t),$$

wobei $t \mapsto \mu(\{x : \ f(x) > t\})$ $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist.

Beweis. Sei $Y := [0, +\infty)$. Es gilt $f(x) = \int_Y \chi_{(0,f(x))} \,\mathrm{d}\lambda_1$. Für $t \geq 0$ und $x \in X$ ist

$$\chi_{(0,f(x))}(t) = \chi_{(t,+\infty)}(f(x)).$$

Anwenden von Satz 2.84 gibt

$$\begin{aligned} \int_X f \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \left(\int_Y \chi_{(0,f(x))}(t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_{(0,f(x))}(t) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_{(t,+\infty)}(f(x)) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &= \int_Y \mu(\{x : \ f(x) > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t). \end{aligned}$$

□

Folgerung 2.94. *Sei $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ $\mathcal{L}(n)$-messbar. Dann gilt für alle $s \neq 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\lambda_1(x) = |s| \cdot \int_{\mathbb{R}} f(sx) \,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Beweis. Sei $t \geq 0$. Dann ist

$$\{y : \ f(y) > t\} = s \cdot \{x : \ f(sx) > t\}.$$

Wegen Satz 1.83 ist

$$\lambda_1(\{y : \ f(y) > t\}) = \lambda_1(s\{x : \ f(sx) > t\}) = |s| \cdot \lambda_1(\{x : \ f(sx) > t\}).$$

Integrieren bezüglich t ergibt mit Lemma 2.93 die Behauptung. □

Folgerung 2.95. *Sei $g : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ $\mathcal{L}(n)$-messbar. Dann gilt*

$$\left(\int_{(0,+\infty)} g \,\mathrm{d}\lambda_1 \right)^2 = 2 \int_{(0,+\infty)} \int_{(0,1)} g(xy) g(y) y \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \,\mathrm{d}\lambda_1(y).$$

Beweis. Mit Satz 2.84 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)}\int_{(0,y)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_{(0,+\infty)}\int_{(x,\infty)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \int_{(0,+\infty)}\int_{(y,\infty)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y),\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt nur die Buchstaben x und y vertauscht wurden. Dann bekommen wir

$$\begin{aligned}\left(\int_{(0,+\infty)} g\,\mathrm{d}\lambda_1\right)^2 &= \int_{(0,+\infty)}\int_{(0,+\infty)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\\ &= 2\int_{(0,+\infty)}\int_{(0,y)} g(x)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\\ &= 2\int_{(0,+\infty)}\int_{(0,1)} yg(xy)g(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Folgerung 2.94 angewendet haben. □

Damit können wir folgendes Integral berechnen:

$$\begin{aligned}\left(\int_{(0,+\infty)} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= 2\int_0^1\int_{(0,+\infty)} \exp(-(x^2+1)y^2)y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^1 \left[(-\frac{1}{2})\frac{1}{x^2+1}\exp(-(x^2+1)y^2)\right]_{y=0}^{y=\infty}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Wegen Folgerung 2.94 (mit $s=-1$) ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_{(0,+\infty)} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,0)}(x)\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_{(0,+\infty)} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

2.7 Approximationssätze

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum.

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass integrierbare Funktionen in der $\mathcal{L}^1(\mu)$-Norm durch Funktionen mit "besseren" Eigenschaften approximiert werden können.

Satz 2.96. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine beschränkte Funktion $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$.*

Beweis. Setze $f_n := \max(-n, \min(f, n))$. Dann ist f_n eine messbare und beschränkte Funktion. Mithilfe der dominierten Konvergenz Satz 2.56 folgt $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. □

Satz 2.97. *Sei μ σ-endlich. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine einfache Funktion $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\mu(\{x : f_\varepsilon(x) \neq 0\}) < +\infty$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$.*

Beweis. Nach Folgerung 2.30 existiert eine Folge einfacher Funktionen (φ_n) mit $\varphi_n \to f$ und $|\varphi_n| \leq |f|$. Wegen der σ-Endlichkeit existiert eine aufsteigende Folge (X_j) mit $\mu(X_j) < \infty$ und $\bigcup_{j=1}^\infty X_j = X$. Mit dominierter Konvergenz Satz 2.56 bekommen wir $\|\chi_{X_n}\varphi_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \to 0$. □

Sei nun (X, d) ein metrischer Raum.

Lemma 2.98. *Sei $A \subseteq X$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto d(x, A)$ stetig, wobei*

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Beweis. Sei $y \in A$, $x_1, x_2 \in X$. Dann ist

$$d(x_1, A) \leq d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y).$$

Nach bilden den Infimums über $y \in A$ auf der rechten Seite bekommen wir $d(x_1, A) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, A)$. □

Sei Y ein weiterer metrischer Raum. Wir definieren

$$C(X, Y) := \{f : X \to Y : \ f \text{ stetig } \}.$$

Lemma 2.99 (Urysohn-Funktion)**.** *Seien $A, B \subseteq X$ nicht leere, abgeschlossene, disjunkte Mengen. Dann existiert $\varphi \in C(X, [0,1])$ mit $\varphi|_A = 0$, $\varphi|_B = 1$, $\varphi(x) \in (0,1)$ für alle $x \in (A \cup B)^c$.*

Beweis. $\varphi := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. □

Satz 2.100. *Sei $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Sei μ σ-endlich und regulär (vgl. Satz 1.69). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap C(X, \mathbb{R})$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon$.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung zuerst für charakteristische Funktionen. Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Regularität existiert eine kompakte Menge K und eine offene Menge O mit $K \subseteq A \subseteq O$ und $\mu(O \setminus K) < \varepsilon$. Wegen Lemma 2.99 existiert $\varphi \in C(X, [0,1])$ mit $\varphi|_K = 1$ und $\varphi|_{O^c} = 0$. Es folgt

$$\|\chi_A - \varphi\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = \int \chi_{O \setminus K} |\chi_A - \varphi| \,\mathrm{d}\mu \leq 1 \cdot \mu(O \setminus K) = \varepsilon.$$

Damit ist φ integrierbar. Wegen Satz 2.97 folgt die Behauptung für alle integrierbare Funktionen. □

Für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x : \ f(x) \neq 0\}}$$

der Support (oder Träger). Wir definieren

$$C_c(X, \mathbb{R}) := \{f \in C(X, \mathbb{R}) : \ \operatorname{supp} f \text{ kompakt } \}$$

die Menge der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Diese Menge ist kein abgeschlossener Teilraum von $C(X, \mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm. Ist $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C_c(O, \mathbb{R})$, dann ist die Funktion $\hat{f}$ definiert durch

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in O, \\ 0 & \text{falls } x \notin O \end{cases}$$

stetig und gehört zu $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind λ^1-integrierbar.

Der zugrundeliegende Maßraum des nächsten Resultats ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$.

Satz 2.101. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.100 reicht es, die Behauptung für charakteristische Funktionen zu beweisen. Sei also $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der σ-Endlichkeit existiert eine beschränkte Teilmenge $A_\varepsilon \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes (Satz 1.69) existiert eine kompakte Menge K und eine offene Menge O mit $K \subseteq A_\varepsilon \subseteq O$ und $\mu(O \setminus K) < \varepsilon/2$. Die offene Menge kann beschränkt gewählt werden. Die Funktion φ aus Lemma 2.99 erfüllt $\varphi \in C(\mathbb{R}^n, [0,1])$ mit $\varphi|_K = 1$, $\varphi|_{O^c} = 0$ und $\|\chi_{A_\varepsilon} - \varphi\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \varepsilon/2$. Damit ist $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \bar{O}$, und φ hat kompakten Träger. □

Dieser Satz wird den Beweis im nächsten Abschnitt vereinfachen: zuerst wird die Behauptung für stetige Funktionen gezeigt, dann für integrierbare. Allerdings müssen wir den Träger von f_ε noch etwas besser kontrollieren können. Für die folgenden Resultate benutzen wir die Maximumnorm auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.102. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Dann gibt es eine aufsteigende Folge kompakter Mengen (K_j) mit $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = O$. Weiter gibt es eine aufsteigende Folge (ψ_j) nichtnegativer Funktionen $\psi_j \in C_c(O, \mathbb{R})$ mit $\psi_j(x) \nearrow 1$ für alle $x \in O$.*

Beweis. Setze

$$K_j := \left\{ x \in \bar{O} : \ \|x\|_\infty \leq j, \ d(x, \partial O) \geq \frac{1}{j} \right\},$$

was wegen Lemma 2.98 abgeschlossen ist. Dann gilt $K_j \subseteq O$ und $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = O$. Weiter sei $A_j := \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, K_j) < \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\}$. Dann ist A_j offen und $A_j \subseteq K_{j+1}$. Sei $\psi_j \in C(\mathbb{R}^n, [0,1])$ aus Lemma 2.99 mit $\psi_j = 0$ auf A_j^c und $\psi_j = 1$ auf K_j. Dann ist $\operatorname{supp} \psi_j \subseteq \overline{A_j} \subseteq K_{j+1}$. Daraus folgt dann $\psi_j \leq \psi_{j+1}$. □

Satz 2.103. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq O$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f_\varepsilon \in C_c(O, \mathbb{R})$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon$.*

Beweis. Nach Satz 2.101 existiert $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon/2$. Wegen $f = \chi_O f$ ist

$$\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_O + \chi_{O^c}) |f - \tilde{f}| \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f - \chi_O \tilde{f}| + \chi_{O^c} |\tilde{f}| \, \mathrm{d}\lambda_n,$$

woraus $\|f - \chi_O \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} < \varepsilon/2$ folgt. Allerdings ist $\chi_O f$ nicht stetig. Sei (ψ_j) die in Lemma 2.102 konstruierte Folge. Dann ist $\psi_j \tilde{f} \in C_c(O, \mathbb{R})$ für alle j, und mit dominierter Konvergenz folgt $\|\psi_j \tilde{f} - \chi_O \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \to 0$. Die Behauptung folgt mit $f_\varepsilon := \psi_j \tilde{f}$ für ein j, so dass $\|\psi_j \tilde{f} - \chi_O \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \leq \varepsilon/2$. □

Aufgabe 2.104. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien $K, U \subseteq X$ mit U offen, K kompakt und $K \subseteq U$. Dann ist*

$$0 < d(K, \partial U) = d(K, U^c) := \inf\{d(x, z) : \ x \in K, \ z \in U^c\}.$$

2.8 Transformationssatz

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Koordinatentransformation für Integrale der Bauart

$$\int_V f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_n$$

zu beweisen, wobei $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Wir arbeiten hier wieder im Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.105. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere, offene Mengen. Es sei $\Phi : U \to V$ bijektiv. Sind Φ und Φ^{-1} stetig differenzierbar, dann heißt Φ C^1-Diffeomorphismus.*

Die Ableitung von Φ ist die Matrix

$$\Phi'(x) = \left(\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1\ldots n}$$

Es folgt, dass $\Phi'(x)$ und $\Phi^{-1}(y)$ invertierbar sind: Differenzieren der Gleichung $\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x$ ergibt $(\Phi^{-1})'(\Phi(x))\cdot\Phi'(x) = I_n$, woraus $\Phi'(x)^{-1} = (\Phi^{-1})'(\Phi(x))$ folgt.

Die Ableitungen Φ' und $(\Phi^{-1})'$ sind Abbildungen nach $\mathbb{R}^{n,n}$, den wir wie folgt mit einer Norm versehen.

Definition 2.106. *Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ definiere*

$$\|A\|_\infty := \max_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_\infty.$$

Für die induzierte Matrixnorm gilt:

- $A \mapsto \|A\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{n,n}$,
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ (Zeilensummennorm),
- $\|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$,
- $\|AB\|_\infty \le \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Satz 2.107 (Mittelwertsatz)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ stetig differenzierbar. Es seien $x_1, x_2 \in U$, so dass $tx_1 + (1-t)x_2 \in U$ für alle $t \in (0,1)$ ist. Dann gilt*

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_\infty \le \sup_{t\in(0,1)} \|\Phi'(tx_1 + (1-t)x_2)\|_\infty \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

Anwenden des Mittelwertsatzes auf $h \mapsto \Phi(x+h) - \Phi'(x)h$ ergibt

$$\|\Phi(x+h) - \Phi(x) - \Phi'(x)h\|_\infty \le \sup_{t\in(0,1)} \|\Phi'(x+th) - \Phi'(x)\|_\infty \|h\|_\infty \tag{2.108}$$

wenn $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition 2.109. *Wir definieren den Würfel mit Seitenlänge $2r$ und Mittelpunkt x_0 als*

$$W(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\|_\infty \le r\}.$$

Damit folgt $\|x_1 - x_2\|_\infty \le 2r$ für alle $x_1, x_2 \in W(x_0, r)$ und $\lambda_n(W(x_0, r) = (2r)^n$.

Seien $x, x_0 \in U$. Ist $\|x - x_0\|_\infty$ klein, dann folgt aus der Differenzierbarkeit

$$\Phi(x) \approx \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0).$$

Ist $W \subseteq U$ ein kompakter Würfel mit $x_0 \in W$, dann erwarten wir

$$\Phi(W) \approx \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(W - x_0)$$

und damit

$$\lambda_n(\Phi(W)) \approx |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W).$$

Diese Idee wird im nächsten Lemma rigoros bewiesen.

Lemma 2.110. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $x_0 \in U$ gegeben. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle Würfel W mit Seitenlänge kleiner als δ_1 und $x_0 \in W \subseteq U$ gilt*

$$\Big|\lambda_n(\Phi(W)) - |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W)\Big| \le \varepsilon \lambda_n(W).$$

Beweis. Definiere

$$T := \Phi'(x_0),\ \ L(x) := \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0).$$

Sei $x_0 \in U$. Dann existiert ein $\rho > 0$, so dass $V_0 := W(\Phi(x_0), \rho) \subseteq V$. Hier ist wichtig, dass V_0 kompakt und konvex ist. Wähle $\delta_0 > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - x_0\|_\infty \le \delta_0$ gilt

$$x \in U,\ \ \Phi(x), L(x) \in V_0. \tag{2.111}$$

Setze

$$M := \max_{y \in V_0} \|(\Phi^{-1})'(y)\|_\infty. \tag{2.112}$$

Dann ist auch $\|T^{-1}\|_\infty = \|\Phi'(x_0)^{-1}\|_\infty = \|(\Phi^{-1})'(\Phi(x_0))\|_\infty \le M$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ so, dass

$$|(1 \pm 2\varepsilon_1)^n - 1| \le \varepsilon. \tag{2.113}$$

Dann existiert ein $\delta_1 \in (0, \delta_0)$, so dass

$$\sup_{x \in W(x_0, \delta_1)} \|\Phi'(x) - \Phi'(x_0)\|_\infty \le M^{-1}\varepsilon_1.$$

Daraus folgt für $x \in W(x_0, \delta_1)$ mit dem Mittelwertsatz (2.108)

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - L(x)\|_\infty &= \|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\|_\infty \\ &\leq \sup_{\tilde{x} \in W(x_0,\delta_1)} \|\Phi'(\tilde{x}) - \Phi'(x_0)\|_\infty \|x - x_0\|_\infty = M^{-1}\varepsilon_1 \|x - x_0\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Sei W ein Würfel mit Seitenlänge $\delta \in (0, \delta_1)$ und $x_0 \in W \subseteq U$. Es folgt $\|x - x_0\|_\infty \leq \delta \leq \delta_0$ für alle $x \in W$. Dann ist $\Phi(W), L(W) \subseteq V_0$.

(1) Wir zeigen, dass $T^{-1}\Phi(W)$ in einem Würfel mit Seitenlänge $(1 + 2\varepsilon_1)\delta$ enthalten ist. Sei $x \in W$. Dann folgt aus (2.112) und (2.114)

$$\|T^{-1}(\Phi(x) - L(x))\|_\infty \leq \|T^{-1}\|_\infty \|\Phi(x) - L(x)\|_\infty \leq \varepsilon_1 \delta.$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} T^{-1}(\Phi(W) - \Phi(x_0)) &\subseteq T^{-1}(L(W) - \Phi(x_0)) + W(0, \varepsilon_1\delta) \\ &= W - x_0 + W(0, \varepsilon_1\delta). \end{aligned}$$

Dabei ist $W + W(0, \varepsilon_1\delta)$ ein Würfel mit Seitenlänge $(1 + 2\varepsilon_1)\delta$. Es folgt mit Satz 1.83 und (2.113)

$$\begin{aligned} \lambda_n(\Phi(W)) &\leq |\det T|((1 + 2\varepsilon_1)\delta)^n \\ &= |\det T|(1 + 2\varepsilon_1)^n \lambda_n(W) \leq (1 + \varepsilon)|\det T|\lambda_n(W). \end{aligned}$$

(2) Sei $\tilde{W} = W(\tilde{x}, (1 - 2\varepsilon_1)\delta/2) \subseteq W$ der Würfel mit Seitenlänge $(1 - 2\varepsilon_1)\delta$, der den gleichen Mittelpunkt wie W hat. Wir zeigen nun, dass $\Phi^{-1}(L(\tilde{W})) \subseteq W$ ist. Dazu sei $x \in \tilde{W}$. Dann gilt mit dem Mittelwertsatz, (2.111) und (2.114)

$$\begin{aligned} \|\Phi^{-1}(L(x)) - \Phi^{-1}(\Phi(x))\|_\infty &\leq \sup_{y \in V_0} \|(\Phi^{-1})'(y)\|_\infty \cdot \|L(x) - \Phi(x)\|_\infty \\ &\leq MM^{-1}\varepsilon_1 \|x - x_0\|_\infty = \varepsilon_1 \|x - x_0\|_\infty \leq \varepsilon_1\delta. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|\Phi^{-1}(L(x)) - \tilde{x}\|_\infty \leq \varepsilon_1\delta + \|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \varepsilon_1\delta + (1 - 2\varepsilon_1)\delta/2 = \delta/2$$

und

$$\Phi^{-1}(L(\tilde{W})) \subseteq \tilde{x} + W(0, \delta/2) = W.$$

Es folgt $L(\tilde{W}) \subseteq \Phi(W)$ nach Anwenden von Φ, und mit Satz 1.83 bekommen wir

$$\lambda_n(\Phi(W)) \geq |\det T|\lambda_n(\tilde{W}) = |\det T|\lambda_n(W)(1 - 2\varepsilon_1)^n \geq (1 - \varepsilon)|\det T|\lambda_n(W).$$

Damit erhalten wir

$$\left|\lambda_n(\Phi(W)) - |\det(\Phi'(x_0))| \cdot \lambda_n(W)\right| \le \varepsilon |\det T| \lambda_n(W),$$

was die Behauptung ist. □

Lemma 2.115. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist Φ $\mathcal{L}(n)|_U$-$\mathcal{L}(n)|_V$-messbar. Ist $N \subseteq V$ eine λ_n-Nullmenge, dann ist auch $\Phi^{-1}(N)$ eine λ_n-Nullmenge.*

Hierbei ist $\mathcal{L}(n)|_U$ die Einschränkung von $\mathcal{L}(n)$ auf Teilmengen von U definiert durch

$$\mathcal{L}(n)|_U = \{A \subseteq U : \; A \in \mathcal{L}(n)\} = \{A \cap U : \; A \in \mathcal{L}(n)\}.$$

Beweis. Ist $O \subseteq V$ offen, dann ist $\Phi^{-1}(O)$ offen. Damit folgt, dass Φ $\mathcal{B}(U)$-$\mathcal{B}(V)$-messbar ist. Sei nun $A \in \mathcal{L}(n)|_V$. Nach Satz 1.70 existiert $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $N \in \mathcal{L}(n)$ mit $\lambda_n(N) = 0$ und $A = K \cup N$. Indem wir K und N durch $K \cap V$ und $N \cap V$ ersetzen, können wir annehmen, dass $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_V = \mathcal{B}(V)$ und $N \in \mathcal{L}(n)|_V$ ist. Aus der Zerlegung bekommen wir auch, dass $\Phi^{-1}(A) = \Phi^{-1}(K) \cup \Phi^{-1}(N)$ ist. Da $\Phi^{-1}(K) \in \mathcal{B}(U)$ ist, muss noch $\Phi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(n)|_U$ nachgewiesen werden.

Sei $x \in V$. Dann ist $d(x, \partial V) > 0$ und $W_x := W(x, d(x, \partial V)/2) \subseteq V$. Es folgt $V = \bigcup_{x \in V \cap \mathbb{Q}^n} W_x$. Sei $x \in V \cap \mathbb{Q}^n$. Da W_x kompakt und Φ^{-1} stetig differenzierbar ist, ist $(\Phi^{-1})'$ auf W_x beschränkt. Da W_x konvex ist, ist Φ^{-1} Lipschitz-stetig auf W_x wegen Satz 2.107. Nach Satz 1.75 ist dann $\Phi^{-1}(W_x \cap N)$ eine Nullmenge. Da $\Phi^{-1}(N) = \bigcup_{x \in V \cap \mathbb{Q}^n} \Phi^{-1}(W_x \cap N)$ ist $\Phi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(n)|_U$ und $\lambda_n(\Phi^{-1}(N)) = 0$. □

Folgerung 2.116. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $f : V \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}(n)|_V$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar. Dann ist $f \circ \Phi$ $\mathcal{L}(n)|_U$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar.*

Satz 2.117. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $f \in C_c(V, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\int_V f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Beweis. Da $\operatorname{supp} f$ kompakt ist, ist f beschränkt und integrierbar auf V. Weiter ist $\Phi^{-1}(\operatorname{supp} f)$ kompakt, damit ist $|\det \Phi'|$ beschränkt auf $\Phi^{-1}(\operatorname{supp} f)$, und $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ ist integrierbar auf V.

Wir beweisen folgende Aussage: es gilt

$$\int_{\Phi(W)} f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_W (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_n \tag{2.118}$$

für alle kompakten Würfel $W \subseteq U$.

Daraus folgt die Behauptung: Wegen Aufgabe 2.104 ist $d(\operatorname{supp}(f \circ \Phi), U^c) =: r > 0$. Wie im Beweis von Satz 1.14 überdecken wir den $\mathbb{R}^n$ durch eine disjunkte Vereinigung halboffener Würfel (W_j) der Seitenlänge $r/2$, siehe (1.15). Ist $W_j \cap \operatorname{supp}(f \circ \Phi) \neq \emptyset$ dann ist $\overline{W_j} \subseteq U$ wegen der Definition von r, und die Formel (2.118) gilt für $\overline{W_j}$. Aufsummieren über alle j mit $W_j \cap \operatorname{supp}(f \circ \Phi) \neq \emptyset$ ergibt dann die Behauptung.

Sei nun $W \subseteq U$ ein kompakter Würfel. Wir definieren

$$\Delta(W) := \int_{\Phi(W)} f \,\mathrm{d}\lambda_n - \int_W (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Wir zerlegen W in 2^n Würfel (W_j) mit halber Seitenlänge. Diese Würfel haben nur Randpunkte gemeinsam, und so ist $\lambda_n(W_j \cap W_{j'}) = 0$ für alle $j \neq j'$. Wegen Lemma 2.115 angewendet auf Φ^{-1} ist auch $\lambda_n(\Phi(W_j) \cap \Phi(W_{j'})) = \lambda_n(\Phi(W_j \cap W_{j'})) = 0$ für $j \neq j'$. Aus der Additivität der Integrale bekommen wir

$$\Delta(W) = \sum_{j=1}^{2^n} \Delta(W_j)$$

und

$$\frac{|\Delta(W)|}{\lambda_n(W)} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{|\Delta(W_j)|}{\lambda_n(W_j)}.$$

Damit gibt es ein W_j mit $\frac{\Delta(W_j)}{\lambda_n(W_j)} \geq \frac{|\Delta(W)|}{\lambda_n(W)}$.

Damit konstruieren wir uns eine absteigende Folge (W_k) kompakter Würfel mit $W_1 = W$, $\lambda_n(W_k) \searrow 0$, so dass $\frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)}$ monoton wachsend ist. Wir zeigen $\lim_{k\to\infty} \frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)} = 0$.

Da die W_k kompakt sind, existiert $x_0 \in \bigcap_{k=1}^\infty W_k$ (Aufgabe 2.119). Sei $y_0 := \Phi(x_0)$. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\Delta(W_k) = &\int_{\Phi(W_k)} f - f(y_0) \,\mathrm{d}\lambda_n - \\ &\int_{W_k} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| - (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \,\mathrm{d}\lambda_n \\ &\qquad + \int_{\Phi(W_k)} f(y_0) \,\mathrm{d}\lambda_n - \int_{W_k} (f \circ \Phi)(x_0) \cdot |\det \Phi'(x_0)| \,\mathrm{d}\lambda_n.\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass diese drei Summanden beliebig klein werden. Sei $\varepsilon > 0$. Da W und $\Phi(W)$ kompakt sind, bekommen wir aus der gleichmäßigen Stetigkeit von

f, $f\circ\Phi$ und $|\det\Phi'|$, dass

$$\int_{\Phi(W_k)} |f - f(y_0)|\,\mathrm{d}\lambda_n \le \varepsilon\lambda_n(\Phi(W_k)),$$

$$\int_{W_k} \Big|(f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'| - (f\circ\Phi)(x_0)\cdot|\det\Phi'(x_0)|\Big|\,\mathrm{d}\lambda_n \le \varepsilon\lambda_n(W_k)$$

für alle k groß genung. Durch zweimaliges Anwenden von Lemma 2.110 bekommen wir

$$\lambda_n(\Phi(W_k)) \le 2\,|\det\Phi'(x_0)|\lambda_n(W_k)$$

und

$$\left|\int_{\Phi(W_k)} f(y_0)\,\mathrm{d}\lambda_n - \int_{W_k} (f\circ\Phi)(x_0)\cdot|\det\Phi'(x_0)|\,\mathrm{d}\lambda_n\right|$$
$$= \cdot\big|\lambda_n(\Phi(W_k)) - |\det\Phi'(x_0)|\lambda_n(W_k)\big| \le \varepsilon|f(y_0)|\lambda_n(W_k)$$

für alle k groß genung. Es folgt

$$|\Delta(W_k)| \le \varepsilon\,\lambda_n(W_k)\,(1 + 2\,|\det\Phi'(x_0)| + |f(y_0)|)$$

für alle k groß genug. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{k\to\infty}\frac{|\Delta(W_k)|}{\lambda_n(W_k)} = 0$ und damit $|\Delta(W_k)| = 0$ für alle k, und insbesondere $\Delta(W) = 0$. □

Aufgabe 2.119. *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei (K_j) eine Folge kompakter Mengen mit $K_j \supseteq K_{j+1}$ für alle j. Dann ist $\bigcap_{j=1}^\infty K_j \neq \emptyset$.*

Satz 2.120 (Transformationssatz)**.** *Seien $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U\to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $f: V\to\mathbb{R}$. Dann ist f integrierbar auf U genau dann, wenn $(f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|$ auf V integrierbar ist. In diesem Falle gilt*

$$\int_V f\,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|\,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Beweis. (1) Sei f integrierbar. Wegen Folgerung 2.116 ist $g := (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|$ $\mathcal{L}(n)$-$\mathcal{B}^1$-messbar. Nach Satz 2.103 können wir f durch eine Folge von $C_c(V,\mathbb{R})$-Funktionen approximieren, die nach Satz 2.58 eine fast überall konvergente Teifolge hat. Es gibt also eine Folge (f_k) mit $f_k\in C_c(V)$, $\|f-f_k\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)}\to 0$ und $f_k(x)\to f(x)$ für alle $x\in V\setminus N$, wobei $N\subseteq V$ eine λ_n-Nullmenge ist.

Da $\Phi^{-1}(N)$ eine λ_n-Nullmenge ist, folgt auch

$$g_k := (f_k\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'| \to (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'| = g$$

λ_n-fast überall auf U.

Wegen Satz 2.117 gilt $\int_V f_k \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U g_k \,\mathrm{d}\lambda_n$. Da (f_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(\lambda_n)$ ist, ist auch (g_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(\lambda_n)$. (Hier haben wir stillschweigend f_k und g_k mit Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt.) Damit existiert $G \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$ mit $\|g_k - G\|_{\mathcal{L}^1(\lambda_n)} \to 0$. Da eine Teilfolge von (g_k) λ_n-fast überall gegen G konvergiert, folgt $g = G$ λ_n-fast überall und $g = (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ ist integrierbar. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_V f \,\mathrm{d}\lambda_n &= \lim_{k\to\infty} \int_V f_k \,\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_U g_k \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U G \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \,\mathrm{d}\lambda_n.\end{aligned}$$

(2) Sei nun $g = (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ integrierbar. Nach Teil (1) angewendet auf $\Psi := \Phi^{-1}$ ist dann auch $(g \circ \Psi)|\det \Psi'|$ integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_U g \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_V (g \circ \Psi)|\det \Psi'| \,\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_V f(\Phi(\Psi(x))) \underbrace{|\det \Phi'(\Psi(x))| \cdot |\det \Psi'(x)|}_{=1} \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \\ &= \int_V f \,\mathrm{d}\lambda_n,\end{aligned}$$

was die Behauptung ist. □

Folgerung 2.121 (Polarkoordinaten 2d)**.** *Definiere*

$$\Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist f integrierbar genau dann wenn $(r, \varphi) \mapsto r \cdot (f \circ \Phi)(r, \varphi)$ auf $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi.$$

Beweis. Das folgt aus dem Transformationssatz, Satz 2.120, und dem Satz von Fubini, Satz 2.89. Wir setzen

$$U := (0, \infty) \times (0, 2\pi), \quad V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : \ x \geq 0\}.$$

Dann ist $\Phi : U \to V$ bijektiv und differenzierbar. Weiter ist

$$\det(\Phi'(r, \varphi)) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r.$$

Also ist Φ' auf U invertierbar, und Φ ist ein Diffeomorphismus. Da die Ränder von U und V Nullmengen sind, folgt die Behauptung. □

Damit können wir folgendes Integral berechnen:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}\lambda_2 = 2\pi \int_{(0,+\infty)} \exp(-r^2) r\,\mathrm{d}r = \pi.$$

Folgerung 2.122. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich und $f : X \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = p \int_{(0,+\infty)} t^{p-1} \mu(\{x :\ f(x) > t\})\,\mathrm{d}\lambda_1(t)$$

für alle $p > 1$.

Beweis. Aus Lemma 2.93 bekommen wir

$$\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x :\ f(x)^p > t\})\,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Mit $t = \Phi(s) := s^p$ ist

$$\int_{(0,+\infty)} \mu(\{x :\ f(x) > t^{1/p}\})\,\mathrm{d}\lambda_1(t) = \int_{(0,+\infty)} \mu(\{x :\ f(x) > s\}) \cdot p s^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

□

2.9 $\mathcal{L}^p$- und L^p-Räume

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.123. *Für $p \in [1, \infty)$ definiere*

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \textit{ messbar und } \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty),$$

mit der Halbnorm $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} := (\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu)^{1/p}$. Für $p = \infty$ definiere

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \textit{ messbar und } \exists M > 0 \textit{ mit } |f(x)| \le M \ \mu\textit{-fast überall}\}$$

mit der Halbnorm

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf_{A \in \mathcal{A}:\ \mu(A)=0}\ \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)|.$$

Analog werden die Räume $\mathcal{L}^p(\mu)$ für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ definiert.

Beispiel 2.124.

- *Ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, dann gilt $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ für μ-fast alle $x \in X$.*

- *Für $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ folgt daraus $\|f+g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$.*

- *Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ für ein $p \in [1, +\infty]$. Dann ist $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ μ-fast überall.*

  Damit ist $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Für $p < \infty$ müssen wir noch die Dreiecksungleichung nachweisen.

- *Seien $p, q \in (1, +\infty)$. Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, dann ist $|f|^{p/q} \in \mathcal{L}^q(\mu)$:*

$$\|f\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} = \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int (|f|^{p/q})^q \,\mathrm{d}\mu = \left\| |f|^{p/q} \right\|^q_{L^q(\mu)}.$$

Lemma 2.125. *Der Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein Vektorraum $\forall p \in [1, \infty]$.*

Beweis. Sei $p \in [1, +\infty)$. Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Aus der Konvexität von $x \mapsto |x|^p$ bekommen wir

$$|f_1(x) + f_2(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f_1(x)|^p + |f_2(x)|^p).$$

Dann folgt $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^p(\mu)$ aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals. □

Lemma 2.126 (Youngsche Ungleichung)**.** *Es seien $a, b \geq 0$, $p, q \in (1, +\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Beweis. Sei $a > 0$, $b > 0$. Die Abbildung $x \mapsto \log(x)$ ist konkav auf $(0, +\infty)$, d.h., $\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \log x + (1-\lambda)\log y$ für alle $x, y \in (0, +\infty)$, $\lambda \in (0, 1)$. Daraus folgt

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) = \log(ab).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Monotonie von exp. □

Lemma 2.127 (Höldersche Ungleichung)**.** *Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $1/p + 1/q = 1$, $p, q \in [1, +\infty]$ mit der Konvention $1/\infty = 0$, dann ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt*

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(\mu)}.$$

Beweis. Die Behauptung gilt, falls f oder g μ-fast überall gleich Null ist. Ist $p = 1$, $q = \infty$, dann gilt wegen Beispiel 2.124

$$\int |fg| \,\mathrm{d}\mu \le \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \int |f| \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}.$$

Sei nun $p, q \in (1, \infty)$. Weiter sei $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = \|g\|_{\mathcal{L}^q(\mu)} = 1$. Aus der Youngschen Ungleichung folgt dann

$$\int |fg| \,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{p} \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \int |g|^q \,\mathrm{d}\mu = 1.$$

Sei nun $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} > 0$, $\|g\|_{\mathcal{L}^q(\mu)} > 0$. Dann gilt

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}} \frac{g}{\|g\|_{\mathcal{L}^q(\mu)}} \right\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le 1,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Beispiel 2.128. *Im Allgemeinen ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ keine Teilmenge von $\mathcal{L}^q(\mu)$ für $p \neq q$. Aus der Hölder-Ungleichung bekommt man aber $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$ für alle $r \in (p, q)$: Es gilt*

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \le \|f\|^{\theta}_{L^p(\mu)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(\mu)}$$

mit $\theta \in (0, 1)$ so, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Lemma 2.129 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Es sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt*

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Beweis. Für $p = 1$ folgt die Ungleichung direkt aus der Dreiecksungleichung für $|\cdot|$. Sei also nun $p > 1$. Wir beweisen die Ungleichung

$$\|f + g\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} \le \|f + g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mu)} (\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}).$$

Es gilt erst einmal

$$\begin{aligned} \|f + g\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} &= \int |f + g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int \left|(f + g) \cdot |f + g|^{p-1}\right| \,\mathrm{d}\mu \\ &= \|f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \\ &\le \|f(f + g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|g(f + g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}. \end{aligned}$$

Definiere $q := \frac{p}{p-1} \in (1, \infty)$, dann folgt $1/p + 1/q = 1$. Damit ist die Hölder-

Ungleichung anwendbar, um wie folgt abzuschätzen

$$\|f(f+g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|(f+g)^{p-1}\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mu)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mu)}.$$

Es folgt

$$\|f+g\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} \le (\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)})\|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mu)},$$

da $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum ist, ist $\|f+g\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} < \infty$, und die Behauptung folgt mit Division durch $\|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mu)}$. □

Der folgende Satz ist die Verallgemeinerung von Satz 2.58 für den Fall $p > 1$.

Satz 2.130 (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p(\mu)$)**.** *Sei $p \in [1, +\infty]$. Es sei (f_n) eine Cauchyfolge aus $\mathcal{L}^p(\mu)$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} < \varepsilon$ für alle $n, m > N$. Dann existiert $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \to 0$.*

Weiter existiert ein $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und eine Teilfolge (f_{n_k}), so dass $f_{n_k}(x) \to f(x)$ und $|f_{n_k}(x)| \le g(x)$ für alle k und μ-fast alle x.

Beweis. (1) Sei $p < +\infty$. Der Beweis geht wie der von Satz 2.58, wenn man nur $|f_{n+1} - f_n|$ und $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$ durch $|f_{n+1} - f_n|^p$ und $\|f_m - f_n\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)}$ ersetzt.

(2) Sei $p = +\infty$. Sei (f_n) eine CF in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Da die Vereinigung abzählbarer Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, existiert ein $M > 0$ und eine Nullmenge A, so dass für alle n, m

$$|f_n(x)| \le M, \quad |f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \quad \forall x \in X \setminus A$$

ist. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & x \in X \setminus A \\ 0 & x \in A. \end{cases}$$

Dieses f ist messbar. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert N, so dass $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ und alle $x \in X \setminus A$. Daraus folgt $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und alle $x \in X \setminus A$ und

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^\infty} \le \sup_{x \in X\setminus A} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

für alle $n > N$. Also $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \to 0$. □

Lemma 2.131. *Es sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_n \to f$ μ-fast überall und $\|f_n\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \to \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$. Dann folgt $\|f_n - f\|\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} \to 0$.*

Beweis. [Nov72] Die Funktionen $g_n := 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ sind nicht-negativ, und es folgt $g_n \to 2^p|f|^p$ μ-fast überall. Mit Fatou's Lemma Satz 2.54

bekommen wir

$$\begin{aligned} 2^p \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu &\le \liminf_{n\to\infty} \int 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &= 2^p \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|^p_{\mathcal{L}^p(\mu)} \, \mathrm{d}\mu = 0$. □

Es bleibt nur noch, aus den halbnormierten Räumen Banachräume zu machen.

Lemma 2.132. *Sei X ein Vektorraum mit einer Halbnorm $\|\cdot\|$. Sei $N := \{x : \|x\| = 0\}$. Dann gilt:*

(1) N ist ein Untervektorraum.

(2) Die Relation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$ ist eine Äquivalenzrelation.

(3) Der Quotientenraum X/N (als Menge aller Äquivalenzklassen unter $\sim$ auf X) ist ein Vektorraum versehen mit der Addition $[x] + [y] := [x + y]$ und Skalarmultiplikation $t \cdot [x] := [t \cdot x]$.

(4) Durch

$$\|[x]\|_{X/N} := \|x\|$$

ist eine Norm gegeben.

(5) Ist X vollständig, dann ist X/N ein Banachraum.

Beweis. (1) Folgt aus den Halbnormeigenschaften. (2) Folgt aus (1).

(3) Es ist zu zeigen, dass die Vektorraumoperationen wohldefiniert sind, das heißt, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Seien also $x_1, y_1 \in X$, $x_2 \in [x_1]$, $y_2 \in [x_2]$. Dann sind $x_1 - x_2 \in N$, $y_1 - y_2 \in N$, also auch $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in N$, woraus $x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$ folgt. Es gilt also $[x_1 + y_1] = [x_2 + y_2]$.

(4) $\|\cdot\|_{X/N}$ ist wohldefiniert, hängt also nicht vom gewählten Repräsentanten ab: Seien $x_1, x_2 \in [x]$. Dann ist $x_1 - x_2 \in N$ und $\|x_1 - x_2\| = 0$, damit $\|x_1\| \le \|x_2\| + \|x_1 - x_2\| = \|x_2\|$.

Seien nun $[x], [y] \in X/N$ gegeben. Dann ist

$$\|[x + y]\|_{X/N} = \|x + y\| \le \|x\| + \|y\| = \|[x]\|_{X/N} + \|[y]\|_{X/N}.$$

Aus $\|[x]\| = 0$ folgt $x \in N$, also $[x] = [0]$.

(5) Sei $([x_n])$ eine CF in X/N. Dann ist (x_n) eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $\|x - x_n\| \to 0$. Es folgt $\|[x - x_n]\|_{X/N} = \|x - x_n\| \to 0$, also ist $([x_n])$ konvergent gegen $[x]$. Da X/N ein normierter Raum ist, ist der Grenzwert auch eindeutig bestimmt. □

Das werden wir nun auf die $\mathcal{L}^p(\mu)$-Räume anwenden: Hier ist (unabhängig vom Exponenten p)

$$N = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar mit } f(x) = 0 \text{ fast überall}\}.$$

Wir setzen für $p \in [1, \infty]$

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/N$$

mit der induzierten Norm $\|\cdot\|_{L^p(\mu)} := \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mu)/N}$. Es folgt dann

Folgerung 2.133. *Es sei*

$$N := \{f : X \to \mathbb{R} \textit{ messbar}: \ f = 0 \ \mu\textit{-fast überall}\}.$$

Die Räume $L^p(\mu) := L^p(\mu)/N$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\mu)/N}$ sind Banachräume.

Folgerung 2.134. *Der Raum $L^2(\mu)$ wird versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mu)} := \int f \cdot \overline{g} \, \mathrm{d}\mu$$

zum Hilbertraum (vollständiger Raum mit Skalarprodukt).

Beweis. Wir zeigen, dass das Skalarprodukt wohldefiniert ist. Seien $f_1, g_1 \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $f_2 \in [f_1]$, $g_2 \in [g_1]$. Dann ist $f_1 = f_2$ und $g_1 = g_2$ μ-fast überall, und es folgt

$$\int f_1 \cdot \overline{g}_1 - f_2 \cdot \overline{g}_2 \, \mathrm{d}\mu = \int (f_1 - f_2) \cdot \overline{g}_1 + f_2 \overline{(g_1 - g_2)} \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

wobei wir Satz 2.45 benutzt haben. □

Die Elemente dieser Räume sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden. Man unterscheidet meistens nicht mehr zwischen der Äquivalenzklasse $[f] \in L^p(X)$ und dem Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^p(X)$.

Kapitel 3

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Ziel: Integrale über Kurven und Flächen. Anwendung: Längen- und Flächenberechnung, partielle Integration.

3.1 Untermannigfaltigkeiten

Dieses Kapitel folgt im Wesentlichen [For17, §14].

Definition 3.1. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α, $0 \leq k \leq n-1$, $\alpha \geq 1$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt mit*

(1) $M \cap U = \{x \in U : \ f(x) = 0\}$,

(2) $\operatorname{Rang}(f'(a)) = n - k$.

Beispiel 3.2. *(1) Jeder k-dimensionale lineare Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

(2) Sei $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 = 1\}$. Dann ist S_{n-1} eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α für alle α. Für $n = 2$ kann diese Menge lokal als Graph geschrieben werden: der obere (untere) Halbkreis kann als $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ dargestellt werden. In der Umgebung von $(\pm 1, 0)$ funktioniert diese Darstellung nicht, hier kann aber $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ gewählt werden.

(3) Ist $C \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Kurve, die sich selbst schneidet, dann ist C keine Untermannigfaltigkeit.

So eine Darstellung als Graph einer Funktion gilt tatsächlich für allgemeine Untermannigfaltigkeiten.

Satz 3.3 (Untermannigfaltigkeit lokal Graph einer Funktion)**.** *$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α, wenn es für jedes $a \in M$ — nach einer eventuellen Umnummerierung der Koordinaten — Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$ gibt, so dass*

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \ x'' = g(x')\}.$$

Beweis. Sei M k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Sei $a \in M$. Nach Voraussetzung existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $a \in U$, $M \cap U = \{x \in U : \ f(x) = 0\}$ und $\operatorname{Rang}(f'(a)) = n - k$.

Seien $i_1 \dots i_{n-k}$ linear unabhängige Spalten von $f'(a)$. Wir nummerieren die Koordinaten nun um, so dass $(i_1, \dots, i_{n-k}) = (k+1, \dots, n)$. Nun wenden wir den Satz über die implizite Funktion auf die Gleichung $f(x', x'') = 0$ an. Da $\frac{\partial}{\partial x''} f$ im Punkt $a = (a', a'')$ vollen Rang hat, folgt die Behauptung: es gibt Umgebungen U' und U'' von a' und a'' mit $U' \times U'' \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$, so dass $f(x', g(x')) = 0$. Weiter ist

$$g'(x') = -(\frac{\partial}{\partial x''} f(x', g(x')))^{-1} \frac{\partial}{\partial x'} f(x', g(x')).$$

Da $\frac{\partial}{\partial x''} f$ und $\frac{\partial}{\partial x'} f$ $(\alpha - 1)$-mal stetig differenzierbar sind, ist g α-mal stetig differenzierbar.

Sei $a \in M$ mit U', U'' und $g : U' \to U''$ wie oben. Setze $f(x) := x'' - g(x')$. Dann ist $M \cap U = \{x \in U : \ f(x) = 0\}$. Weiter ist $f'(x) = \begin{pmatrix} g'(x) \\ I_{n-k} \end{pmatrix}$, so dass $\operatorname{Rang}(f'(x)) = n - k$ ist. □

Definition 3.4. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere, offene Mengen. Es sei $\Phi : U \to V$ bijektiv. Sind Φ und Φ^{-1} α-mal stetig differenzierbar, dann heißt Φ C^α-Diffeomorphismus.*

Das nächste Ziel ist es, eine Koordinatentransformation zu finden, die eine Untermannigfaltigkeit (lokal) auf einen Unterraum transformiert.

Dazu definieren wir zur Abkürzung für $k \leq n$ den Unterraum

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Satz 3.5 (Koordinatentransformation auf einen Unterraum)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α genau dann, wenn zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ existiert, so dass*

$$F(M \cap U) = E_k \cap V.$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Sei $a \in M$. Seien U', U'', g wie in Satz 3.3, also dass gilt

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \ x'' = g(x')\}.$$

Definiere $U := U' \times U''$,

$$F(x', x'') := (x', x'' - g(x')),$$

und $V := F(U)$. Dann ist F α-mal stetig differenzierbar. Sei $x = (x', x'') \in M \cap U$. Dann ist $x'' = g(x')$ und $F(x', x'') = (x', 0) \in E_k$.

Seien $x, y \in U$ mit $F(x) = F(y)$. Dann folgt $x' = y'$ und $x'' = y''$, also ist F injektiv. Sei $z = (z', z'') \in V$. Dann ist $F(x', x'') = z$ für $x' = z'$ und $x'' = z'' + g(x') = z'' + g(z')$. Damit ist auch F^{-1} α-mal stetig differenzierbar.

($\Leftarrow$) Sei nun $a \in M$, U eine offene Umgebung von a, V offen, $F : U \to V$ ein C^α-Diffeomorphismus so, dass $F(M \cap U) = E_k \cap V$. Definiere $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$f(x) := (F_{k+1}(x), \dots, F_n(x))^T.$$

Dann ist $f'(a)$ eine Matrix, die die letzten $n-k$ Zeilen der invertierbaren Matrix $F'(a)$ enthält. Also sind diese Zeilen linear unabhängig, $f'(a)$ hat vollen Rang Rang $f'(a) = n - k$. □

Als letzte Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten wollen wir diese über eine Parameterdarstellung beschreiben. Um die Stetigkeit dieser Parameterdarstellung untersuchen zu können, müssen wir die Untermannigfaltigkeit M mit einer Topologie versehen.

Relativtopologie Es sei $d_2(x, y) := \|x - y\|_2$ die von der Euklidischen Norm induzierte Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist auch (M, d_2) ein metrischer Raum. Die offenen Mengen in (M, d_2) kann man folgendermaßen charakterisieren:

Lemma 3.6. *U ist offen in (M, d_2) genau dann, wenn eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen in $(\mathbb{R}^n, d_2)$) existiert mit $U = V \cap M$.*

Beweis. Definiere $B_\rho(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \; d_2(x,y) < \rho\}$. Sei U offen in (M, d_2). Sei $x \in U$. Dann existiert ein $r_x > 0$, so dass $B_{r_x}(x) \subseteq U$. [Zum Beispiel kann $r_x := \frac{1}{2}\sup\{r : \; B_r(x) \subseteq U\}$ gewählt werden.] Dann ist $M \cap B_{r_x}(x) \subseteq U$. Es folgt

$$U = \bigcup_{x \in U} (M \cap B_{r_x}(x)) = M \cap \left(\bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) \right),$$

was die Behauptung ist.

Sei nun $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ mit $U = V \cap M$. Sei $x \in U$. Dann existiert $\rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subseteq V$. Dann ist $x \in B_\rho(x) \cap M$. Die Menge $B_\rho(x) \cap M$ ist die Kugel mit Radius ρ um x in (M, d_2), und damit ist U offen in (M, d_2). $\square$

Wir vereinbaren folgende Sprechweise: $U \subseteq M$ *ist offen in* M genau dann, wenn U offen in (M, d_2) ist.

Definition 3.7. *Seien X_1, X_2 metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X_1 \to X_2$ heißt Homöomorphismus (oder topologischer Isomorphismus), wenn φ bijektiv ist, und φ, φ^{-1} stetig sind.*

Damit eine bijektive Abbildungen φ homöomorph ist, müssen Urbilder und *Bilder* offener Mengen wieder offen sein.

Satz 3.8 (Bild der Parameterabbildung ist Untermannigfaltigkeit)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ α-mal stetig differenzierbar mit $\operatorname{Rang}\big(\varphi'(t)\big) = k$ für alle $t \in U$. Dann existiert zu jedem $u \in U$ eine offene Umgebung $T \subseteq U$, so dass $\varphi(T)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ist, und $\varphi : T \to \varphi(T)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $(\varphi(T), d_2)$ der zugrundeliegende metrische Raum ist.*

Beweis. Sei $u \in U$. Dann ist $\operatorname{Rang} \varphi'(u) = k$. Nach einer Umnummerierung der Komponenten von φ ist $\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_k)}{\partial t}(u)$ invertierbar. Setze $\tilde{\varphi} := (\varphi_1 \dots \varphi_k)$. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung gibt es eine Umgebung $T \subseteq U$ von u, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^k$ so dass $\tilde{\varphi} : T \to V$ ein C^α-Diffeomorphismus ist. (Wegen $(\tilde{\varphi}^{-1})' = (\tilde{\varphi}')^{-1}$ ist $\tilde{\varphi}^{-1}$ α-mal stetig differenzierbar.)

Definiere $\Phi : T \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$\Phi_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k) \quad i = 1 \dots k,$$

$$\Phi_j(t) = \varphi_j(t_1, \dots, t_k) + t_j \quad j = k+1 \dots n.$$

Ist $v \times z \in V \times \mathbb{R}^{n-k}$, dann hat die Gleichung $\Phi(t, y) = (v, z)$ die eindeutige Lösung $t = \tilde{\varphi}^{-1}(v)$ und $y = z - (\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)(v)$. Damit ist Φ ein C^α-Diffeomorphismus. Weiter ist $\Phi(T \times \{0\}) = \varphi(T)$, wobei 0 der Nullvektor im $\mathbb{R}^{n-k}$ ist. Dann ist auch $T \times \{0\} = \Phi^{-1}(\varphi(T) \cap (V \times \mathbb{R}^{n-k}))$. Damit ist nach dem vorherigen Satz (Satz 3.5) angewendet auf $F := \Phi^{-1}$ die Menge $\varphi(T)$ eine Untermannigfaltigkeit.

Es bleibt, die Homöomorphismus-Eigenschaft zu zeigen. Sei O offen in $\varphi(T)$. Wegen Lemma 3.6 existiert eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $O = V \cap \varphi(T)$. Da φ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^k$. Dann ist $\varphi^{-1}(O) = \varphi^{-1}(V \cap \varphi(T)) = \varphi^{-1}(V) \cap T$ offen in $\mathbb{R}^k$.

Sei nun $O \subseteq T$ offen. Dann ist

$$\varphi(O) = \Phi(O \times \{0\}) = \Phi(T \times \{0\}) \cap \Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k}) = \varphi(T) \cap \Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k}).$$

Da Φ^{-1} stetig ist, ist $\Phi(O \times \mathbb{R}^{n-k})$ offen. Wegen Lemma 3.6 ist $\varphi(O)$ offen in $(\varphi(T), d_2)$. Und φ ist ein Homöomorphismus. □

Definition 3.9. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Sei V offen in M, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : T \to V$ ein Homöomorphismus, φ als Funktion von T nach $\mathbb{R}^n$ α-mal stetig differenzierbar mit* $\operatorname{Rang}(\varphi'(t)) = k$ *für alle $t \in T$. Dann heißt φ lokale Parameterdarstellung (oder auch Immersion) von M. Die Umkehrabbildung φ^{-1} heißt Karte auf M.*

Satz 3.10 (Parameterdarstellung von Untermannigfaltigkeiten)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α genau dann, wenn für jedes $a \in M$ eine in M offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert.*

Beweis. ($\Leftarrow$) Wir verwenden die Charakterisierung aus Satz 3.5. Sei $a \in A$. Dann gibt es eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ mit $a \in V$. Wegen Satz 3.8 gibt es eine offene Teilmenge $T' \subseteq T$ mit $\varphi^{-1}(a) \in T'$, so dass $\varphi(T')$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ist. Dann gibt es nach Satz 3.5 einen C^α-Diffeomorphismus $F : U \to \tilde{U}$ mit $a \in U$, so dass $F(\varphi(T') \cap U) = E_k \cap \tilde{U}$. Nun ist $\varphi(T') \subseteq M$ offen, das heißt, es existiert eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(T') = M \cap U'$ (Lemma 3.6). Es folgt $F(M \cap U' \cap U) = E_k \cap \tilde{U}$. Die Menge $U' \cap U$ ist eine offene Umgebung von a, damit ist M nach Satz 3.5 eine Untermannigfaltigkeit.

Wir beweisen nun ($\Rightarrow$). Sei $a \in M$. Wir wenden Satz 3.3 an. Sei $a \in M$. Dann gibt es nach einer eventuellen Umnummerierung der Koordinaten Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$, so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : \; x'' = g(x')\}.$$

Wir setzen $V := M \cap (U' \times U'')$, $T := U'$, und für $t \in T = U'$

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\varphi : T \to V$ bijektiv und α-mal stetig differenzierbar mit $\operatorname{Rang} \varphi'(t) = k$ für alle $t \in T$. Ist $z \in \varphi(T)$ dann ist $\varphi^{-1}(z) = (z_1 \dots z_k)$.

Wir benutzen Lemma 3.6. Sei O offen in $\varphi(T)$. Dann ist $O = \varphi(T) \cap \tilde{O}$ mit einer offenen Menge $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $\varphi^{-1}(O) = \varphi^{-1}(\tilde{O}) \cap T$. Sei nun $O \subseteq T$ offen in $\mathbb{R}^k$. Dann ist $\varphi(O) = \varphi(T) \cap (O \times \mathbb{R}^{n-k})$. □

Satz 3.11 (Koordinatentransformation oder Kartenwechsel)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Seien $\varphi_i : T_i \to V_i$, $i = 1, 2$ lokale Parameterdarstellungen von M mit $V_1 \cap V_2 =: V \neq \emptyset$.*

Dann sind $\varphi_i^{-1}(V) =: W_i$ offene Teilmengen von T_i, $i = 1, 2$, und $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$ ist ein C^α-Diffeomorphismus.

Beweis. Da τ die Verknüpfung stetiger, bijektiver Funktionen ist, ist τ stetig und bijektiv. Auch $\tau^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ ist stetig.

Wir zeigen die Differenzierbarkeit von τ. Sei $w_1 \in W_1$, $a := \varphi_1(w_1) \in V$. Wir benutzen Satz 3.5. Es existiert also eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a, eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^α-Diffeomorphismus $F : U \to \tilde{U}$, so dass

$$F(M \cap U) = E_k \cap \tilde{U}.$$

Da wir U durch $U \cap V$ ersetzen können, können wir $U \subseteq V$ annehmen.

Wir betrachten nun $F \circ \varphi_1$. Sei $w \in \varphi_1^{-1}(M \cap U)$. Dann ist

$$(F \circ \varphi_1)(w) = (g_1(w), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

mit $g_1(w) \in \mathbb{R}^k$. Es gilt

$$(F \circ \varphi_1)'(w) = F'(\varphi_1(w))\varphi_1(w).$$

Da $\varphi_1(w) \in U$ ist $F'(\varphi_1(w))$ invertierbar. Weiter ist $\operatorname{Rang} \varphi_1(w) = k$. Es folgt $\operatorname{Rang} g_1'(w) = k$. Also ist g_1 lokal invertierbar. Da $F \circ \varphi_1$ bijektiv ist, ist auch g_1 bijektiv und damit ein C^α-Diffeomorphismus. Analog bekommen wir einen C^α-Diffeomorphismus g_2 mit

$$(F \circ \varphi_2)(w) = (g_2(w), 0, \dots, 0) \quad w \in \varphi_2^{-1}(M \cap U).$$

Es folgt

$$\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ F^{-1} \circ F \circ \varphi_1 = g_2^{-1} g_1^{-1},$$

und τ ist ein C^α-Diffeomorphismus. Hier haben wir benutzt, dass $(F\circ\varphi_1)(w_1) = (F\circ\varphi_2)(w_2)$ genau dann, wenn $g_2(w_2) = g_1(w_1)$. $\square$

Definition 3.12. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Es sei (φ_j) gegeben mit*

(1) $\varphi_j : T_j \to V_j$ ist lokale Parameterdarstellung von M für alle $j \in \mathbb{N}$,

(2) $\bigcup_{j=1}^\infty V_j = M$.

Dann heißt (φ_j) ein (abzählbarer) Atlas von M der Klasse C^α.

Bemerkung 3.13. *Die Charakterisierung von Satz 3.10 ist die Grundlage für die Definition von Mannigfaltigkeiten. Diese kommt ohne den umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$ aus.*

Ein metrischer Raum (M,d) heißt k-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn für jedes $a \in M$ eine in M offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und ein Homöomorphismus $\varphi : T \to V$ existiert.

Differenzierbarkeit (eines Atlas) kommt durch die Aussage von Satz 3.11: man nimmt dann an, dass die Koordinatentransformationen τ α-mal stetig differenzierbar sind für alle Parameterdarstellungen durch Homöomorphismen φ_1, φ_2 eines Atlas.

3.2 k-dimensionales Volumen im $\mathbb{R}^n$

3.2.1 Kurvenlänge im $\mathbb{R}^n$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann ist $\varphi(I)$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Wie kann man die Länge der Kurve definieren?

Eine Möglichkeit ist es, die Kurve durch einen Polygonzug zu approximieren: seien $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ Punkte aus I. Dann ist die "wahre" Länge der Kurve größer als die Länge

$$\sum_{j=1}^{m-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi_(t_j)\|_2$$

des Polygonzugs. Unter geeigneten Annahmen ist das Supremum über die Längen aller Polygonzüge gleich dem Integral

$$\int_I \|\varphi'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t.$$

3.2.2 Oberfächeninhalt im $\mathbb{R}^3$

Für den Oberflächeninhalt einer Menge im $\mathbb{R}^3$ ist diese Prozedur nicht so einfach übertragbar. Wir wollen den Oberflächeninhalt des Zylinders

$$Z = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2=1, \ z \in [0,1]\}$$

bestimmen. Die Idee ist, die Oberfläche durch Dreiecke zu approximieren. Wir unterteilen den Umfang in n gleiche Teile, die Höhe des Zylinders in m gleiche Teile.

Die Länge einer Sehne ist dann gegeben durch

$$2\sin(\pi/n).$$

Liegen die Punkte auf den verschiedenen Schichten direkt übereinander, dann ergibt sich als Summe der Flächen der Dreiecke

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sin(\pi/n)\cdot\frac{1}{m}\right)\cdot 2 = 2n\sin(\pi/n).$$

Nach Grenzübergang $n\to\infty$ erhalten wir den korrekten Wert 2π.

Nun betrachten wir eine zweite Konfiguration, in der die Punkte in den einzelnen Schichten nicht direkt übereinander liegen, sondern wo die einzelnen Schichten gegeneinander um den Winkel π/n versetzt sind. Es entsteht eine Lampion-Struktur, der sogenannte Schwarz-Zylinder.

Die Höhe dieser Dreiecke ist dann nicht mehr $\frac{1}{m}$ sondern gleich

$$\left(\frac{1}{m^2}+(1-\cos(\pi/n))^2\right)^{1/2},$$

so dass sich als Gesamtfläche ergibt

$$\begin{aligned} A_{m,n} &:= m\cdot 2n\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sin(\pi/n)\cdot\left(\frac{1}{m^2}+(1-\cos(\pi/n))^2\right)^{1/2} \\ &= 2n\sin(\pi/n)\cdot\left(1+m^2(1-\cos(\pi/n))^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos(\pi/n)) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Wir wählen nun $m(n)$ so, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n^2}=q$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} m(n)(1-\cos(\pi/n)) = \frac{q\pi^2}{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} A_{m(n),n} = 2\pi \cdot \left(1 + \left(\frac{q\pi^2}{2}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Das richtige Ergebnis 2π erhalten wir nur für $q = 0$. Der Grenzwert wird beliebig groß für $q \to \infty$. Damit ist das Supremum der Flächeninhalte aller Dreiecksnetze auf der Zylinderoberfläche unendlich, was diesen (naiven) Zugang untauglich macht für Flächenberechnungen.

Wir werden daher nicht das Vorgehen für Kurven ($k = 1$) auf den Fall $k > 1$ verallgemeinern. Dies ist möglich aber sehr aufwendig. Stattdessen werden wir die Parameterdarstellung von Mannigfaltigkeiten verwenden, und die Integrale auf der Mannigfaltigkeit auf Integrale über die Parameterbereiche zurückführen. Im nächsten Abschnitt betrachten wir zunächst den einfachen Fall einer linearen Parameterdarstellung φ.

3.2.3 k-dimensionales Volumen eines Parallelotops im $\mathbb{R}^n$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $k < n$. Wir wollen das k-dimensionale Volumen von $\varphi([0,1]^k)$ bestimmen. Dies ist ein sogenanntes Parallelotop. Für $k = 1$ ist dies eine Strecke, für $k = 2$ ein Parallelogramm, für $k = 3$ ein Parallelepiped.

Sei $\varphi(x) = Vx$ mit einer Matrix $V \in \mathbb{R}^{n,k}$, deren Spalten wir mit v_i bezeichnen. Dann ist

$$\varphi([0,1]^k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \ \lambda_i \in [0,1] \right\}$$

Wir setzen

$$P_j := \left\{ \sum_{i=1}^j \lambda_i v_i : \ \lambda_i \in [0,1] \right\}.$$

Wir wollen nun das j-dimensionale Volumen von P_j berechnen unter folgender Annahme:

$$\operatorname{vol}_{j+1} P_{j+1} = \operatorname{vol}_j P_j \cdot h_{j+1} \tag{3.14}$$

wobei h_{j+1} die Höhe von v_{j+1} über P_j ist. Dann gilt

$$h_{j+1} = \operatorname{dist}(v_{j+1}, \ \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)).$$

Für $j = 1$ erhalten wir $\operatorname{vol}_1(P_1) = \|v_1\|_2$.

Lemma 3.15. *Unter den Voraussetzungen* (3.14) *und* $\operatorname{vol}_1(P_1) = \|v_1\|_2$ *gilt für alle* $j \leq k$

$$\operatorname{vol}_j P_j = \sqrt{\det(V_j^T V_j)},$$

wobei $V_j = (v_1, \ldots, v_j)$.

Beweis. Sei die Behauptung für $1 \leq j < k$ bewiesen. Aus der orthogonalen Zerlegung $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) \oplus (\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j))^\perp$ bekommen wir

$$v_{j+1} = u + w$$

mit $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$ und $u = (\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j))^\perp$. Sei $\tilde{w} \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$. Dann ist $\|v_{j+1} - \tilde{w}\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|w - \tilde{w}\|_2^2$, und damit gilt

$$h_{j+1} = \operatorname{dist}(v_{j+1},\ \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)) = \|u\|_2.$$

Da $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j)$ existiert $s \in \mathbb{R}^j$ mit $w = V_j s$. Weiter ist $V_j^T u = 0$. Dann ist

$$V_{j+1} = \begin{pmatrix} V_j & v_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j & V_j s + u \end{pmatrix}.$$

Um s zu eliminieren, multiplizieren wir V_{j+1} von rechts mit $R = \begin{pmatrix} I_j & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$V_{j+1} R = \begin{pmatrix} V_j & V_j s + u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_j & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j & u \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt wegen $V_j^T u = 0$

$$(V_{j+1} R)^T V_{j+1} R = \begin{pmatrix} V_j^T \\ u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_j & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_j^T V_j & 0 \\ 0 & \|u\|_2^2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(R) = 1$ bekommen wir

$$\det(V_{j+1}^T V_{j+1}) = \det(R^T V_{j+1}^T V_{j+1} R) = \det(V_j^T V_j) \cdot \|u\|_2^2.$$

Wegen der Voraussetzungen ist $\det(V_j^T V_j) \cdot \|u\|_2^2 = (\operatorname{vol}_{j+1} P_{j+1})^2$, und der Induktionsbeweis ist vollständig. □

Für $k = n$ erhalten wir das Resultat von Satz 1.83. Achtung: Da $V_j \in \mathbb{R}^{n,j}$ ist, lässt sich die Formel $\det(V_j^T V_j)$ für $j < n$ *nicht* zu $\det(V_j)^2$ vereinfachen. Mithilfe der Cauchy-Binet-Formel kann $\det(V_j^T V_j)$ allerdings über Determinanten von quadratischen Untermatrizen berechnet werden.

Lemma 3.16 (Cauchy-Binet-Formel)**.** *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $n > m$. Dann gilt*

$$\det(AB^T) = \sum_I \det(A_I) \det(B_I),$$

wobei die Summe über alle m-elementigen Teilmengen I von $\{1, \ldots, n\}$ geht, und A_I die Matrix bezeichnet, die die Spalten i von A mit $i \in I$ enthält.

Beweis. Für einen Beweis siehe [For17, Satz 14.6], welcher auch für Matrizen über einem kommutativen Ring mit Eins funktioniert. □

Dieses Resultat hat mithilfe von Lemma 3.15 auch eine geometrische Interpretation: das Quadrat des k-dimensionalen Volumen eines Parallelotops ist gleich der Summe der Quadrate der k-dimensionalen Volumen der Projektionen des Parallelotops auf alle Kombinationen k-dimensionaler Koordinatenebenen, siehe auch [Kon13]. Für $k = 1$ ist dies nichts anderes als der Satz von Pythagoras.

3.3 Lebesgue-Messbarkeit als lokale Eigenschaft

Wir beweisen noch eine lokale Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen. Wir starten mit einem Hilfsresultat.

Lemma 3.17 (Existenz von abzählbaren Teilüberdeckungen)**.** *Sei $\mathcal{O}$ eine Menge offener Mengen des $\mathbb{R}^n$. Sei $A \in \mathbb{R}^n$ eine Menge mit der Eigenschaft: für alle $x \in A$ existiert $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$. Dann existieren abzählbar viele (O_j) mit $O_j \in \mathcal{O}$ und $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty O_j$.*

Beweis. Definiere die abzählbare Menge $Q := \{(x, \rho) \in \mathbb{Q}^{n+1} : \ \rho > 0\}$. Sei $q = (x, \rho) \in Q$. Falls es eine Menge $O \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $B_\rho(x) \subseteq O$ ist, dann wählen wir eine solche Menge O und setzen $O_q := O$, sonst $O_q := \emptyset$. Mit dieser Strategie müssen wir nur abzählbar viele Auswahlen vornehmen.

Wir zeigen, dass gilt $A \subseteq \bigcup_{q\in Q} O_q$. Sei $x \in A$. Dann gibt es eine Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$. Dann existiert $r > 0$, so dass $B_r(x) \subseteq O$. Sei $\rho \in (0, r/2) \cap \mathbb{Q}$. Dann existiert $x' \in B_\rho(x) \cap \mathbb{Q}^n$. Damit ist $x \in B_\rho(x') \subseteq B_r(x) \subseteq O$. Für $q := (x', \rho)$ ist dann $O_q \neq \emptyset$. Aus der Konstruktion von O_q folgt $x \in B_\rho(x') \subseteq O_q$. □

Folgerung 3.18. *Sei I eine Indexmenge, $O_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen für alle $i \in I$. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$ so, dass*

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{j\in J} O_j.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.17 mit $\mathcal{O} = \{O_i : \ i \in I\}$. □

Bemerkung 3.19. *Die rationalen Kugeln $(B_\rho(x))_{(x,\rho)\in Q}$ im Beweis von Folgerung 3.18 sind eine abzählbare Basis der Topologie auf dem $\mathbb{R}^n$: jede offene Menge ist eine Vereinigung von Elementen der Basis. Die Behauptung von Folgerung 3.18 nennt man die Lindelöf-Eigenschaft (von $\mathbb{R}^n$).*

Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann ist die Existenz einer abzählbaren Basis und die Lindelöf-Eigenschaft äquivalent zur Separabilität von (X, d), siehe

[AE01, Satz IX.1.8]. Dabei ist (X, d) separabel, wenn es eine abzählbare, dichte Menge $D \subseteq X$ gibt, d.h. der Abschluss von D ist M. Ist (X, d) separabel, dann ist auch jeder Teilraum separabel.

Der Beweis von Lemma 3.17 lässt sich auf separable metrische Räume (X, d) übertragen: man ersetzt $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{Q}^n$ durch X und die abzählbare, dichte Teilmenge.

Folgerung 3.20. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $A \in \mathcal{L}(n)$ genau dann, wenn für alle $x \in A$ eine offene Umgebung $O \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $A \cap O \in \mathcal{L}(n)$ ist.*

Beweis. [AE01, Bemerkung IX.5.14(c)] Es ist nur die Richtung ($\Leftarrow$) zu beweisen. Aus Lemma 3.17 mit $\mathcal{O} = \{O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen mit } A \cap O \in \mathcal{L}(n)\}$ folgt $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ mit $O_j \in \mathcal{O}$. Dies impliziert $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(O_j \cap A) \subseteq A$, und $A \in \mathcal{L}(n)$. □

Folgerung 3.21. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. Dann hat M einen abzählbaren Atlas der Klasse C^α.*

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{O} = \{O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}: \ \exists \text{ lokale Parameterdarstellung } \varphi : T \to M \cap O\}.$$

Wegen Satz 3.10 existiert für jedes $a \in M$ ein $O \in \mathcal{O}$ mit $a \in O$. Mit Lemma 3.17 folgt $M \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ mit $O_j \in O$. Zu jedem O_j gehört eine lokale Parameterdarstellung $\varphi_j : T_j \to M \cap O_j$. Die Funktionen (φ_j) sind der gewünschte Atlas. □

Bemerkung 3.22. *Die Beweise in diesem Abschnitt benutzen nur das abzählbare Auswahlaxiom nicht das volle Auswahlaxiom. Der folgende Beweis von Folgerung 3.21 benutzt allerdings das volle Auswahlaxiom:*

Wegen Satz 3.10 existiert für jedes $a \in M$ eine lokale Parameterdarstellung $\varphi_a : T \to V_a$. Dann existiert eine offene Menge $O_a \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V_a = M \cap O_a$. Dann ist $M \subseteq \bigcup_{a \in A} O_a$. Nach Folgerung 3.18 gibt es ein abzählbare Teilüberdeckung. Der Schluss ist dann wie im Beweis von Folgerung 3.21. Zum Aufstellen der Behauptung $M \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$ müssen wir für jedes a eine Auswahl treffen, das sind im Allgemeinen überabzählbar viele.

3.4 Maß und Integral auf Untermannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Wir definieren nun Messbarkeit von Teilmengen von M analog zur lokalen Charakterisierung von messbaren Mengen in Folgerung 3.20. Wir folgen [AE01, Abschnitt XII.1], dort werden allerdings Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachtet.

Definition 3.23. *Es sei $A \subseteq M$. Dann heißt A messbar genau dann, wenn für alle $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq M$ und eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert, so dass $\varphi^{-1}(A \cap V) \in \mathcal{L}(k)$ ist.*

Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir φ als Abbildung nach M betrachten, und mit $\varphi^{-1}(A)$ das Urbild von A unter der Abbildung $\varphi : T \to M$ bezeichnen. An Stellen, wo wir die Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : V \to T$ brauchen, werden wir dann die Schreibweise $\varphi^{-1}(A \cap V)$ benutzen. Wir werden also im Folgenden

$$\varphi^{-1}(A \cap V) = \varphi^{-1}(A)$$

miteinander identifizieren.

Wir zeigen nun, dass die Definition der Messbarkeit unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung ist.

Satz 3.24. *Sei $A \subseteq M$. Dann ist A messbar genau dann, wenn für alle lokalen Parameterdarstellungen $\varphi : T \to V$ gilt $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$.*

Beweis. Es ist nur die Richtung ($\Rightarrow$) zu beweisen. Sei also $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung.

Sei $a \in V$. Dann gibt es nach Definition 3.23 $\varphi_a : T_a \to V_a$ mit $\varphi_a^{-1}(A \cap V_a) \in \mathcal{L}(k)$. Da V offen ist, ist

$$\varphi_a^{-1}(A \cap V_a \cap V) = \varphi_a^{-1}(A \cap V_a) \cap \varphi_a^{-1}(V_a \cap V) \in \mathcal{L}(k).$$

Da $\varphi^{-1} \circ \varphi_a$ ein Diffeomorphismus ist (Satz 3.11), ist wegen Lemma 2.115

$$\varphi^{-1}(A \cap V \cap V_a) = (\varphi^{-1} \circ \varphi_a) \left(\varphi_a^{-1}(A \cap V \cap V_a)\right) \in \mathcal{L}(k).$$

Nach Folgerung 3.18 angewendet auf $\mathcal{O} = \{O \text{ offen}: \ V_a \cap M = O, \ a \in V\}$ gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq V$, so dass $V = \bigcup_{a \in J}(V \cap V_a)$. Damit folgt

$$\varphi^{-1}(A \cap V) = \bigcup_{a \in J} \varphi^{-1}(A \cap V \cap V_a) \in \mathcal{L}(k),$$

was die Behauptung ist. □

Definition 3.25. *Es sei $\mathcal{L}_M := \{A \subseteq M : \ A \text{ messbar}\}$ die Menge der messbaren Mengen auf M.*

Lemma 3.26. *$\mathcal{L}_M$ ist eine σ-Algebra, und es gilt $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{L}_M$.*

Beweis. Dies ist eine Konsequenz von Satz 3.24. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Dann ist $M \in \mathcal{L}_M$, da $\varphi^{-1}(M) = T \in \mathcal{L}(k)$ ist.

Sei $A \in \mathcal{L}_M$. Dann ist $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$, und es folgt $\varphi^{-1}(A^c) = T \setminus \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$. Sind (A_j) abzählbar viele Mengen aus $\mathcal{L}_M$, dann ist $\varphi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \bigcup_{j=1}^\infty \varphi^{-1}(A_j) \in \mathcal{L}(k)$. Sei $O \subseteq M$ offen in (M, d_2). Dann ist $\varphi^{-1}(O)$ offen, also in $\mathcal{L}(k)$. Daraus folgt $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{L}(M)$. □

Wir konstruieren nun ein Maß auf M. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Ist $W \subseteq T$ ein Würfel mit $t \in W$, dann ist $\varphi(W) \approx \varphi(t) + \varphi'(t)(W - t)$. Nach den Berechnungen in Abschnitt 3.2.3 hat dann $\varphi(W)$ das "Maß" $\sqrt{\det \varphi'^T(t)\varphi'(t)}\,\mathrm{vol}_k(W)$. Das Integral über den Bildbereich $T = \varphi(V)$ sollte analog zum Transformationssatz Satz 2.120 wie folgt aussehen

$$\int_{\varphi(V)} \chi_A \,\mathrm{d}\lambda_M \stackrel{?}{=} \int_V (\chi_A \circ \varphi) \cdot \sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}\,\mathrm{d}\lambda_k, \tag{3.27}$$

wobei wir $\sqrt{\det \varphi'^T(t)\varphi'(t)}$ anstelle des in dieser Situation nicht definierten Ausdrucks $|\det \varphi'|$ geschrieben haben. Diese Gleichung (3.27) dient nur zur Motivation der folgenden Entwicklungen. Wir wollen nun ein Maß λ_M auf M konstruieren, welches (3.27) erfüllt.

Wir beginnen mit der folgenden Definition. Für $A \in \mathcal{L}_M$ definieren wir

$$\lambda_{M,V}(A) := \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}\ \mathrm{d}\lambda_k.$$

Hier ist $\chi_{\varphi^{-1}(A)} = \chi_A \circ \varphi$ die Transformation von χ_A. Der Ausdruck $\varphi'^T\varphi'$ heißt auch Maßtensor, und $\det \varphi'^T\varphi'$ Gramsche Determinante. Zuerst berechnen wir, wie sich dieser unter Koordinatentransformationen verhält.

Lemma 3.28. *Sei $V \subseteq M$ offen, $\varphi : T \to V$ und $\tilde\varphi : \tilde T \to V$ lokale Parameterdarstellungen. Sei $\tau = \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi : T \to \tilde T$. Dann ist*

$$(\sqrt{\det \tilde\varphi'^T\tilde\varphi'} \circ \tau) \cdot |\det \tau'| = \sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}$$

auf T.

Beweis. Sei $t \in T$. Dann ist $\varphi = \tilde\varphi \circ \tau$ und

$$\varphi'(t) = \tilde\varphi'(\tau(t)) \cdot \tau'(t).$$

Es folgt

$$\varphi'(t)^T\varphi(t) = \tau'(t)^T \cdot \tilde\varphi'(\tau(t))^T\tilde\varphi'(\tau(t)) \cdot \tau'(t),$$

woraus wir nach Anwenden der Determinante

$$\begin{aligned}\det(\varphi'(t)^T\varphi(t)) &= \det(\tau'(t))^2 \cdot \det\left(\tilde\varphi'(\tau(t))^T\tilde\varphi'(\tau(t))\right)\\ &= \det(\tau'(t))^2 \cdot (\det(\tilde\varphi'^T\tilde\varphi') \circ \tau)(t)\end{aligned}$$

bekommen, was die Behauptung ist. □

An diesem Resultat können wir schon sehen, dass die Wahl des Terms $\sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}$ vernünftig war: bei Koordinatentransformation auf eine andere Parameterdarstellung entsteht der zusätzliche Faktor $|\det \tau'|$, dieser wird dann durch die Anwendung des Transformationssatzes Satz 2.120 kompensiert.

Lemma 3.29. *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V}$ wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl von φ.*

Beweis. Sei $\tilde\varphi : \tilde T \to V$ eine weitere lokale Parameterdarstellung. Sei $\tau : T \to \tilde T$ die Koordinatentransformation $\tau = \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi$ von Satz 3.11. Dann ist nach dem Transformationssatz Satz 2.120

$$\int_{\tilde T} \chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde\varphi'^T\tilde\varphi'} \, \mathrm{d}\lambda_k = \int_T \left(\chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde\varphi'^T\tilde\varphi'}\right) \circ \tau \cdot \det|\tau'| \, \mathrm{d}\lambda_k.$$

Wegen

$$\chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \circ \tau = \chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \circ \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi = \chi_A \circ \varphi = \chi_{\varphi^{-1}(A)}$$

und der Transformation für den Maßtensor Lemma 3.28 erhalten wir

$$\int_{\tilde T} \chi_{\tilde\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det \tilde\varphi'^T\tilde\varphi'} \, \mathrm{d}\lambda_k = \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A)}(t) \sqrt{\det \varphi'^T\varphi'} \, \mathrm{d}\lambda_k.$$

Damit ist der Wert $\lambda_{M,V}(A)$ unabhängig von der Wahl von φ (und T). □

Folgerung 3.30. *Es sei $A \in \mathcal{L}_M$ und $V', V \subseteq M$ offen mit $A \subseteq V' \subseteq V$ und einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V'}(A) = \lambda_{M,V}(A)$.*

Beweis. Die Einschränkung von φ auf $\varphi^{-1}(V')$ ist eine lokale Parameterdarstellung mit Werten in V'. Die Behauptung folgt mit Lemma 3.29. □

Folgerung 3.31. *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Die Mengenfunktion $\lambda_{M,V}$ ist ein positives Maß auf $\mathcal{L}_M$.*

Beweis. Die σ-Additivität folgt aus der Bijektivität von φ und monotoner Konvergenz, siehe auch Aufgabe 2.49. □

Lemma 3.32. *Sei $V \subseteq M$ offen mit einer lokalen Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$. Dann ist $\lambda_{M,V}$ σ-endlich.*

Beweis. Definiere $T_r := \{x \in T : \ |x| \le r, \ d(x, \partial T) \ge r^{-1}\}$. Dann ist T_r eine kompakte Teilmenge von T, siehe auch Lemma 2.98. Auf T_r ist $\sqrt{\det \varphi'^T\varphi'}$ beschränkt, damit ist

$$\lambda_{M,V}(\varphi(T_r)) = \int_{T_r} \sqrt{\det \varphi'^T\varphi'} \, \mathrm{d}\lambda_k < \infty.$$

Setze $M_r := (M \cap V^c) \cup \varphi(T_r)$. Daraus folgt $\lambda_{M,V}(M_r) = \lambda_{M,V}(\varphi(T_r))$ und $\bigcup_{r=1}^\infty M_r = M$. Also ist $\lambda_{M,V}$ σ-endlich. □

Beispiel 3.33. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $t \in I$ eine offene Umgebung $T \subseteq I$, so dass $\varphi : T \to \varphi(T)$ eine lokale Parameterdarstellung ist. Weiter ist $\varphi'(t) \in \mathbb{R}^n$, so dass $\det(\varphi'(t)^T \varphi'(t)) = \|\varphi'(t)\|_2^2$ ist.*

Beispiel 3.34. *Sei M eine Untermannigfaltigkeit, die lokal durch den Graph von g parametrisiert ist, also $(x', g(x')) \in M$ gilt für $x' \in U'$. Dann ist $\varphi(x') := (x', g(x')) : U' \to \varphi(U')$ eine lokale Parameterdarstellung von M, siehe den Beweis von Satz 3.10. Daraus folgt dann $\varphi'(x') = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ g'(x') \end{pmatrix}$ und $\varphi'(x')^T \varphi'(x') = I_{n-1} + g'(x')^T g'(x')$. Die Determinante kann man mit der folgenden Faktorisierung berechnen: Sei $u := g'(x')^T$, $I := I_{n-1}$. Dann ist*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & I + uu^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \|u\|_2^2 & 0 \\ u & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u^T \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Und es gilt $\det(\varphi'(x')^T \varphi'(x')) = 1 + \|g'(x')\|_2^2$.

Aufgabe 3.35. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zeigen Sie: $\det(I_n + A^T B) = \det(I_m + BA^T)$.*

Sei $A \in \mathcal{L}_M$. Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$, welcher nach Folgerung 3.21 existiert. Wähle $A_j \subseteq V_j$ mit $A_j \in \mathcal{L}_M$ so, dass $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ eine disjunkte Vereinigung ist. Eine Möglichkeit ist $A_j = (A \cap V_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$. Dann definiere

$$\lambda_M(A) := \sum_{j=1}^\infty \lambda_{M,V_j}(A_j).$$

Dieses Maß wird auch als Volumenmaß oder Oberflächenmaß auf M bezeichnet.

Lemma 3.36. *λ_M ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Atlas (φ_j) und der Mengen (A_j).*

Beweis. Es sei $(\tilde\varphi_k)$ ein weiterer Atlas von M mit $\tilde\varphi_k : \tilde T_k \to \tilde V_k$ mit messbaren und disjunkten Mengen $\tilde A_k \subseteq \tilde V_k$ und $A = \bigcup_{k=1}^\infty \tilde A_k$.

Angenommen $\tilde A_k \cap A_j \neq \emptyset$. Dann ist $\tilde A_k \cap A_j \subseteq \tilde V_k \cap V_j$, und wegen Folgerung 3.30 gilt

$$\lambda_{M,\tilde V_k}(\tilde A_k \cap A_j) = \lambda_{M,\tilde V_k \cap V_j}(\tilde A_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(\tilde A_k \cap A_j).$$

Aufsummieren über k ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k \cap A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(\tilde{A}_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \cap A_j) = \lambda_{M,V_j}(A_j).$$

Aufsummieren über j ergibt aufgrund der σ-Additivität von $\lambda_{M,\tilde{V}_k}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k \cap A_j).$$

Anwenden von Fubini (Satz 2.84 mit den Maßräumen $X = Y = \mathbb{N}$ mit $\mu = \nu =$ Zählmaß) ergibt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k \cap A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,\tilde{V}_k}(\tilde{A}_k),$$

wobei wir die σ-Additivität von $\lambda_{M,\tilde{V}_k}$ benutzt haben. □

Satz 3.37. *λ_M ist ein positives Maß auf $(M, \mathcal{L}_M)$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\lambda_M \geq 0$ und $\lambda_M(\emptyset) = 0$.

Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Definiere die Mengen $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \in \mathcal{B}(M)$. Sei (A_k) eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{L}_M$. Setze $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist

$$\lambda_M(A_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j)$$

und mit dem Satz von Fubini (Satz 2.84) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_M(A_k) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A_k \cap U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(A \cap U_j) = \lambda_M(A),\end{aligned}$$

also ist λ_M σ-additiv. □

Aufgabe 3.38. *Sei $A \in \mathcal{L}_M$ und $\varphi : T \to V$ mit $A \subseteq V$. Dann ist $\lambda_M(A) = \lambda_{M,V}(A)$.*

Aufgabe 3.39. *Sei $N \in \mathcal{L}_M$ mit $\lambda_M(N) = 0$. Dann gilt $\lambda_{M,V} = 0$ für alle V, für die eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ existiert.*

Satz 3.40. *Das Maß λ_M ist vollständig, σ-endlich und regulär.*

Beweis. Sei $N \in \mathcal{L}_M$ mit $\lambda_M(N) = 0$. Sei $A \subseteq N$. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Dann ist $\varphi^{-1}(N) \in \mathcal{L}(k)$. Weiter ist $\lambda_{M,V}(N) = 0$ nach Aufgabe 3.39, also $\int_T \chi_{\varphi^{-1}(N)} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}\ d\lambda_k = 0$. Da $\sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} > 0$ auf T folgt $\chi_{\varphi^{-1}(N)} = 0$ λ_k-fast überall auf T (Satz 2.45), und $\varphi^{-1}(N)$ ist eine λ_k-Nullmenge. Damit ist $\varphi^{-1}(A)$ Teilmenge einer Nullmenge, also $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$. Nach Satz 3.24 ist $A \in \mathcal{L}_M$. Und λ_M ist vollständig.

Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Definiere die Mengen $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \in \mathcal{B}(M)$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = M$ eine disjunkte Vereinigung.

Da λ_{M,V_j} σ-endlich ist, existieren Folgen von Mengen $(M_{j,r})$ in $\mathcal{L}_M$ mit $\bigcup_{r=1}^{\infty} M_{j,r} = M$ und $\lambda_{M,V_j}(M_{j,r}) < \infty$. Weiter ist

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} M_{j,r} \cap U_j = M.$$

Definiere

$$M_k := \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{r=1}^{k} (M_{i,r} \cap U_i).$$

Dann ist

$$M_k \cap U_j = \begin{cases} \bigcup_{r=1}^{k} (M_{j,r} \cap U_j) & \text{falls } j \le k \\ \emptyset & \text{falls } j > k. \end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda_M(M_k) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{M,V_j}(M_k \cap U_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_{M,V_j}(M_k \cap U_j) \le \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{k} \lambda_{M,V_j}(M_{j,r} \cap U_j). \end{aligned}$$

Alle Summanden in dieser endlichen Summe sind endlich, also ist $\lambda_M(M_k) < \infty$, und wegen $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = M$ ist λ_M σ-endlich.

Für den Beweis der Regularität verweisen wir auf [AE01, Satz XII.1.5]. □

Damit ist $(M, \mathcal{L}_M, \lambda_M)$ ein vernünftiger Maßraum, und wir können die komplette Integrationstheorie anwenden. Im Rest dieses Abschnittes werden wir noch untersuchen, wann Funktionen von M nach $\bar{\mathbb{R}}$ messbar und integrierbar sind.

Satz 3.41. *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann ist f $\mathcal{L}_M$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar genau dann, wenn für jede lokale Parameterdarstellung $\varphi : T \to V$ die Funktion $f \circ \varphi$ $\mathcal{L}(k)$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar ist.*

Beweis. (1) Sei f $\mathcal{L}_M - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ messbar, $\varphi : T \to V$ lokale Parameterdarstellung.

Sei $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Dann ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}_M$, woraus $\varphi^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{L}(k)$ folgt. Da $(f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$ folgt die Behauptung.

(2) Wir zeigen nun, dass aus $(f \circ \varphi)^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$ folgt $f^{-1}(A) \cap V \in \mathcal{L}_M$. Sei $B := (f \circ \varphi)^{-1}(A)$. Dann ist $f^{-1}(A) \cap V = \varphi(B)$.

Sei nun $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to \tilde{V}$ eine weitere lokale Parameterdarstellung. Ist $\tilde{V} \cap V = \emptyset$ dann ist $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B)) = \emptyset$. Anderenfalls ist

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B)) = \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(B) \cap V \cap \tilde{V}) = (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(B \cap \varphi^{-1}(\tilde{V} \cap V)) \in \mathcal{L}(k),$$

da $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ ein Diffeomorphismus ist, $B \in \mathcal{L}(k)$, und $\varphi^{-1}(\tilde{V} \cap V)$ offen ist. Daraus folgt $\varphi(B) = f^{-1}(A) \cap V \in \mathcal{L}_M$ mit Satz 3.24.

(3) Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Sei $f \circ \varphi_j$ $\mathcal{L}(k)$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar für alle j. Sei $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Dann ist $\varphi_j^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{L}(k)$. Nach (2) folgt damit $f^{-1}(A) \cap V_j \in \mathcal{L}_M$. Damit ist auch $f^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^\infty (f^{-1}(A) \cap V_j) \in \mathcal{L}_M$. □

Das nächste Resultat ist eine lokale Charakterisierung von Integrierbarkeit.

Lemma 3.42. *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung.*

Dann ist $\chi_V \cdot f$ λ_M-integrierbar genau dann, wenn $f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'}$ λ_k-integrierbar ist.

Ist f nicht-negativ, oder ist $\chi_V \cdot f$ λ_M-integrierbar, dann gilt

$$\int \chi_V f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_T f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \;\mathrm{d}\lambda_k.$$

Beweis. Nach Definition ist f integrierbar genau dann, wenn f^+ und $-f^-$ integrierbar sind. Damit reicht es, die Gleichheit der Integrale für nicht negative Funktionen zu beweisen.

Sei zuerst $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$ eine einfache Funktion. Dann sind auch $\chi_V f$ und $(\chi_V f) \circ \varphi = f \circ \varphi$ einfache Funktionen, und nach der Definition des Lebesgue-Integrals für einfache Funktionen ist

$$\begin{aligned} \int_M \chi_V f \,\mathrm{d}\lambda_M &= \sum_{j=1}^n c_j \lambda_M(A_j \cap V) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_{M,V}(A_j \cap V) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \int_T \chi_{\varphi^{-1}(A_j)} \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \;\mathrm{d}\lambda_k \\ &= \int_T f \circ \varphi \sqrt{\det \varphi'^T \varphi'} \;\mathrm{d}\lambda_k. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nun sei $f \geq 0$ messbar. Dann approximieren wir f durch eine Folge einfacher Funktionen (f_j). Für jede Funktion f_j gilt die Gleichung (3.43). Mit monotoner

Konvergenz angewendet auf (3.43) folgt, dass f (3.43) erfüllt. Insbesondere ist eine Seite der Gleichung ein endlicher Wert genau dann, wenn es die andere Seite ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Es fehlt noch eine Möglichkeit, das Integral $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M$ zu berechnen. Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas von M mit $\varphi_j : T_j \to V_j$. Es sei (α_j) eine Zerlegung der Eins bezüglich (V_j), das heißt

(1) $\alpha_j : M \to [0, +\infty)$ messbar,

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in M$,

(3) $\alpha_j(x) = 0$ für alle $x \notin V_j$.

Zum Beispiel kann $\alpha_j := \chi_{U_j}$ gewählt werden mit $U_j := V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i$.

Satz 3.44. *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f integrierbar bezüglich λ_M genau dann, wenn für jeden Atlas (φ_j) von M und passender Zerlegung der Eins (α_j) gilt: $f \cdot \alpha_j$ ist λ_M-integrierbar für alle j und*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (|f| \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \,\mathrm{d}\lambda_k < \infty.$$

In diesem Fall ist

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (f \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Beweis. Wegen monotoner Konvergenz ist

$$\int |f| \,\mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f| \cdot \alpha_j \,\mathrm{d}\lambda_M.$$

Aus Lemma 3.42 bekommen wir

$$\int |f| \,\mathrm{d}\lambda_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{T_j} (|f| \cdot \alpha_j) \circ \varphi_j \sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'} \,\mathrm{d}\lambda_k,$$

woraus direkt die Charakterisierung der Integrierbarkeit folgt. Mit analogen Argumenten angewendet auf f^+ und $-f^-$ folgt die zweite Behauptung. □

Beispiel 3.45. *Sei M eine Untermannigfaltigkeit, die lokal durch den Graph von g parametrisiert ist, also $(x', g(x')) \in M$ gilt für $x' \in U'$. Dann ist $\varphi(x') := (x', g(x')) : U' \to \varphi(U')$ eine lokale Parameterdarstellung von M, siehe den Beweis von Satz 3.10. Wie in Beispiel 3.34 gezeigt, gilt dann* $\det(\varphi'(x')^T \varphi'(x')) =$

$1+\|g'(x')\|_2^2$. *Ist $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann kann das Integral von f über M wie folgt berechnet werden:*

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_M = \int_{U'} f(x', g(x'))\sqrt{1+\|g'(x')\|_2^2}\,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Lemma 3.46. *Sei $S_{n-1} = \{x : \ \|x\|_2 = 1\}$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar. Definiere $g : S_{n-1}\times(0,+\infty) \to [0,+\infty]$ durch $g(x',r) := f(rx')$.*

Dann ist g $(\mathcal{B}(M)\otimes\mathcal{B}^1)$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{(0,+\infty)}\int_{S_{n-1}} g(x',r)\,\mathrm{d}\lambda_{S_{n-1}}(x')\ r^{n-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(r).$$

Beweis. Setze $I := (0,+\infty)$. Die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2}$ ist stetig differenzierbar von $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ nach $\mathbb{R}^n$, also als Abbildung nach (S_{n-1}, d_2) stetig. Dann ist die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to S_{n-1}\times I$ mit $\pi(x) = (\frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2)$ stetig mit stetiger Umkehrfunktion $\pi^{-1}(x',r) = rx'$, und als Abbildung nach $\mathbb{R}^{n+1}$ stetig differenzierbar. Weiter ist $g = f\circ\pi^{-1}$. Nach Lemma 1.81 ist π^{-1} $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}(S_{n-1}\times I)$ messbar. Damit ist g $\mathcal{B}(S_{n-1}\times I)$-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$-messbar. Ähnlich zu Satz 1.19 zeigt man $\mathcal{B}(S_{n-1}\times I) = \mathcal{B}(S_{n-1})\otimes\mathcal{B}^1$.

Sei $\varphi : T \to V \subseteq S_{n-1}$ eine lokale Parameterdarstellung von S_{n-1} (mit $T\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$). Dann ist die Menge $U := \{x\in\mathbb{R}^n : \ x\neq 0, \ \frac{x}{\|x\|_2}\in V\}$ offen in $\mathbb{R}^n$. Definiere $\psi : T\times I \to U$ durch

$$\psi(t,r) = r\varphi(t) = \pi^{-1}(r,\varphi(t)).$$

Dann ist ψ bijektiv, stetig differenzierbar mit stetiger Umkehrfunktion. Die Ableitung von ψ ist

$$\psi'(t,r) = \begin{pmatrix} r\varphi'(t) & \varphi(t)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Wegen $\|\varphi(t)\|_2 = 1$ für alle $t\in T$, folgt $\varphi(t)^T\varphi'(t) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\det(\psi'(t,r)^T\psi'(t,r)) &= r^{2(n-1)}\det(\varphi'(t)^T\varphi'(t)),\\ |\det\psi'(t,r)| &= r^{n-1}\sqrt{\det(\varphi'(t)^T\varphi'(t))}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_U f\,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_{T\times I} f\circ\psi\cdot|\det\psi'|\,\mathrm{d}\lambda_n\\ &= \int_I\int_T g(r,\varphi(t))\cdot r^{n-1}\sqrt{\det(\varphi'(t)^T\varphi'(t))}\,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(r)\\ &= \int_I\int_V g(r,x')\,\mathrm{d}\lambda_{S_{n-1}}(x')\ r^{n-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(r).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mittels eines Überdeckungsarguments mithilfe eines abzählbaren Atlas von S_{n-1} und passender Zerlegung der Eins. $\square$

Für einen Beweis unter Benutzung der sogenannten co-area formula verweisen wir auf [EG92, Section 3.4.3].

Bemerkung 3.47. *Die Eigenschaft $M \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir entscheidend benutzt: sie steckt in der Definition des Maßtensors $\sqrt{\det \varphi_j'^T \varphi_j'}$, weil wir dort die Differenzierbarkeit von φ brauchen. Für allgemeine Mannigfaltigkeiten muss man die Existenz dieses Maßtensors voraussetzen, und annehmen, dass sich diese wie in Lemma 3.28 transformieren. Dies führt dann auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten.*

3.5 Mengen mit glattem Rand

Definition 3.48. *Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Sei $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor von M in a, wenn es eine stetig differenzierbare Kurve $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, gibt mit $\psi(0) = a$ und $\psi'(0) = v$. Die Menge aller Tangentialvektoren in a ist T_aM.*

Satz 3.49. *Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Sei $a \in M$. Dann gilt:*

(1) T_aM ist ein k-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

(2) Es sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung von M mit $\varphi(t) = a$. Dann sind die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \dots \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)$ eine Basis von T_aM.

(3) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a, $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{Rang} f'(a) = n - k$ und $M \cap U = \{x \in U : \ f(x) = 0\}$. Dann gilt

$$T_aM = \{v \in \mathbb{R}^n : \ f'(t)v = 0\}.$$

Beweis. Gelten (2) und (3) für offene Mengen U' und V' mit $a \in V' \subseteq M$ und $a \in U' \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gelten die Behauptungen auch für offene Mengen V und U mit $V' \subseteq V \subseteq M$ und $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$. Es reicht also, den Fall $V = M \cap U$ zu betrachten.

Sei nun $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung von M mit $\varphi(t) = a$, und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ wie unter (3), so dass $V = M \cap U$.

Wir definieren die linearen Unterräume

$$T_1 := \operatorname{span}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)\right), \quad T_2 := \ker f'(a).$$

Da $\operatorname{Rang}(\varphi'(t)) = k$ und $\operatorname{Rang} f'(a) = n-k$, gilt $\dim T_1 = \dim T_2 = k$. Es reicht daher, zu zeigen, dass gilt $T_1 \subseteq T_aM \subseteq T_2$.

Sei $v \in T_1$, also $v = \varphi'(t)w$ mit $w \in \mathbb{R}^k$. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $t + sw \in V$ für alle $|s| < \varepsilon$. Definiere $\psi(s) := \varphi(t + sw)$. Dann folgt $\psi(0) = a$ und $\psi'(0) = \varphi'(t)w = v$.

Sei nun $v \in T_aM$, Dann existiert eine Kurve $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, mit $\psi(0) = a$ und $\psi'(0) = v$. Dann ist $f(\psi(s)) = 0$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, damit folgt $(f \circ \psi)'(s) = 0$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Damit ist $0 = (f \circ \psi)'(0) = f'(\psi(0))\psi'(0) = f'(a)v$. □

Definition 3.50. *Ein Vektor $v \in T_aM^\perp$ heißt Normalenvektor von M in a. Die Menge aller Normalenvektoren in a ist N_aM.*

Definition 3.51. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und nicht leer. Dann heißt A kompakte Menge mit C^α-Rand, wenn für jedes $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ existieren mit*

(1) $A \cap U = \{x \in U : \ \psi(x) \le 0\}$,

(2) $\psi'(u) \ne 0$ für alle $u \in U$.

Lemma 3.52. *Sei A eine kompakte Menge mit C^α-Rand. Für $a \in \partial A$ seien U, ψ wie in der Definition. Dann gilt $\partial A \cap U = \{x \in U : \ \psi(x) = 0\}$ und $\operatorname{int} A \cap U = \{x \in U : \ \psi(x) < 0\} \ne \emptyset$. Insbesondere ist das Innere von A nicht leer.*

Beweis. Sei $x \in \partial A \cap U$. Dann gibt Folgen (x_j) und (y_j) mit $x_j \in A \cap U$ und $y_j \in A^c \cap U$ mit $x_j \to x$ und $y_j \to x$. Es gilt $\psi(x_j) \le 0 < \psi(y_j)$, und $\psi(x) = 0$ folgt.

Sei nun $x \in U$ mit $\psi(x) = 0$. Nach Definition ist $\psi'(x) \ne 0$. Betrachte die Funktion $f(s) := \psi(x + \psi'(x)^T s)$. Dann ist $f(0) = \psi(x) = 0$ und $f'(0) = \psi'(t)\psi'(x)^T > 0$. (Achtung: $\psi'(t) \in \mathbb{R}^{n,1}$ ist ein Zeilenvektor.) Damit existiert $\varepsilon > 0$, so dass $f(s) > 0$ für $s \in (0, +\varepsilon)$. Damit gehören die Punkte $x - \psi'(x)^T s$ für kleine $s > 0$ zu U aber nicht $A \cap U$, also ist $x \in \partial A \cap U$.

Analog argumentieren wir, dass $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(s) < 0$ für alle $s \in (-\varepsilon, 0)$. Damit ist $\{x \in U : \ \psi(x) < 0\} \ne \emptyset$. Da $\operatorname{int} A \cap U = (A \setminus \partial A) \cap U = A \cap (\partial A)^c \cap U$, folgt $\operatorname{int} A \cap U = \{x \in U : \ \psi(x) < 0\} \ne \emptyset$. □

Folgerung 3.53. *Sei A eine kompakte Menge mit C^α-Rand. Dann ist ∂A eine $(n-1)$-dimensionale C^α Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 3.52 und Definition 3.1. □

Satz 3.54. *Sei A eine kompakte Menge mit C^1-Rand. Sei $a \in \partial A$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $\nu(a) \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften*

(1) $\nu \in N_a(\partial A)$,

(2) $\|\nu\|_2 = 1$,

(3) $\exists \varepsilon > 0$: $a + t\nu \notin A$ *für alle* $t \in (0, \varepsilon)$.

Der Vektor $\nu(a)$ heißt äußerer Normaleneinheitsvektor von A in a. Weiter ist die Abbildung $a \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig von $(\partial A, d_2)$ nach $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei U und ψ wie in Definition 3.51. Setze $\nu(a) := \frac{1}{\|\psi'(a)\|_2}\psi'(a)^T$. Dann ist $a \mapsto \nu(a)$ stetig von ∂A nach $\mathbb{R}^n$.

Wegen Satz 3.49 ist $T_a(\partial A) = \ker(\psi'(a))$. Damit ist $N_a(\partial A) = \operatorname{span}(\psi'(a)^T)$, und $\nu \in N_a$. Die Eigenschaft $a + t\nu \notin A$ für kleine $t > 0$ folgt wie in Lemma 3.52. Insgesamt ist $\nu(a)$ eindeutig bestimmt. □

Beispiel 3.55. *Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I := (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, $U := U' \times I$. Weiter sei $g : U' \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$\begin{aligned} A &:= \{(x', x_n) \in U : \ x_n \le g(x')\}, \\ M &:= \{(x', x_n) \in U : \ x_n = g(x')\}. \end{aligned}$$

Dann können wir in Definition 3.51

$$\psi(x) := x_n - g(x')$$

setzen und bekommen den äußeren Normaleneinheitsvektor

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|g'(x')\|_2^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(x') \\ 1 \end{pmatrix} \quad x \in M.$$

3.6 Der Gaußsche Integralsatz

In diesem Abschnitt werden wir den Gaußschen Integralsatz beweisen, der eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes ist. Dieser Abschnitt folgt [For17, §15].

Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist die Divergenz von f definiert durch

$$\operatorname{div} f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Eine andere Schreibweise ist $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f$. Sei nun A kompakt mit glattem Rand. Das Ziel ist es, zu beweisen, dass

$$\int_A \operatorname{div} f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} \nu^T f \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A}. \tag{3.56}$$

Für $n = 1$ und $A = (a, b)$ erhalten wir den Fundamentalsatz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wenden wir diese Gleichung angewendet auf das Vektorfeld $(0, \dots, 0, f, 0, \dots, 0)$ an, dann erhalten wir die komponentenweise Variante

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Gilt umgekehrt diese Gleichung für alle i, dann gilt auch (3.56). Wir beweisen die komponentenweise Gleichung zunächst für zwei Spezialfälle.

Lemma 3.57. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger (also $\operatorname{supp} f$ ist eine kompakte Teilmenge von U). Dann gilt*

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\lambda_n = 0 \quad \forall i = 1 \dots n.$$

Beweis. Definiere

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in U, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\tilde{f}'(x) = 0$ für alle $x \notin U$. Sei nun $R > 0$ so, dass $\operatorname{supp} f \subseteq [-R, +R]^n$. Sei $z \in U$. Dann ist

$$\int_{(-R,+R)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(z_1 \dots z_{i-1}, x, z_{i+1}, \dots, z_n) \,\mathrm{d}\lambda_1(x) = 0,$$

da $\tilde{f} = 0$ auf dem Rand von $[-R, +R]^n$. Mit dem Satz von Fubini (Satz 2.85) folgt dann die Behauptung. □

Lemma 3.58. *Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I := (\alpha, \beta)$, $U := U' \times I$. Weiter sei $g : U' \to I \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$A := \{(x', x_n) \in U : \ x_n \le g(x')\},$$
$$M := \{(x', x_n) \in U : \ x_n = g(x')\}.$$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_M f \ \nu_i \,\mathrm{d}\lambda_M \quad \forall i = 1 \dots n.$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|g'(x')\|_2^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(x') \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. (1) Sei $i = n$. Dann ist wegen $f(x', \alpha) = 0$

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_n} \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') \\ &= \int_{U'} f(x', g(x')) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x'). \end{aligned}$$

Letzteres Integral können wir wegen Beispiel 3.45 und Beispiel 3.55 schreiben als

$$\begin{aligned} &\int_{U'} f(x', g(x')) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1} \\ &\qquad = \int_{U'} f(x', g(x')) \nu_n(x', g(x')) \sqrt{1 + \|g'(x')\|_2^2} \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') \\ &\qquad = \int_M f \;\nu_n \,\mathrm{d}\lambda_M. \end{aligned}$$

(2) Sei $i \in \{1 \dots n-1\}$. Nach dem Satz von Fubini (Satz 2.85) ist

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x').$$

Wir werden nun das innere Integral berechnen. Definiere die Hilfsfunktion $F : U' \times I \to \mathbb{R}$ durch $F(x', z) := \int_\alpha^z f(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)$. Dann bekommen wir aus den Eigenschaften des Riemann-Integrals

$$\frac{\partial}{\partial z} F(x', z) = f(x', z), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', z) = \int_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_\alpha^{g(x')} f(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \right) &= \frac{\partial}{\partial z} F(x', g(x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x') + \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) \\ &= f(x', g(x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x') + \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t). \end{aligned}$$

Die Abbildung $x' \mapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x', t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)$ hat kompakten Träger in U', damit ist nach Lemma 3.57

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_\alpha^{g(x')} f(x',t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \right) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') = 0.$$

Wegen Beispiel 3.45 ist

$$\int_{U'} f(x', g(x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x') \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') = -\int_M f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}\lambda_M.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x',t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \,\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x') \\ &= -\int_{U'} f(x', g(x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x') = \int_M f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}\lambda_M,\end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Dieses Resultat bleibt auch richtig, falls eine Umnummerierung nötig ist, um ∂A lokal als Graph zu schreiben: Sei zum Beispiel x_j eine Funktion der anderen Koordinaten. Sei $\sigma : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}$ eine bijektive Abbildung mit $\sigma(n) = j$. Dann folgt

$$x_j = x_{\sigma(n)} = g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}).$$

Dann zeigt der Beweis von Lemma 3.58 (nun mit der Fallunterscheidung $i = j$, $i \neq j$)

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma(i)}} \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_M f \ \nu_{\sigma(i)} \,\mathrm{d}\lambda_M,$$

und die Umnummerierung hat keinen Einfluss.

Aufgabe 3.59. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq U$ kompakt. Zeigen Sie: $\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x',t) \in K,\ t \in \mathbb{R}\}$ ist kompakt.*

Konstruktion einer glatten Zerlegung der Eins Wir wollen nun unendlich oft stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger konstruieren, deren Summe überall gleich Eins ist. Definiere

$$g(x) := \begin{cases} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{1-x_i^2}} & \text{falls } x \in (-1,1)^n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist g unendlich oft stetig differenzierbar mit $\operatorname{supp} g = [-1,1]^n$. Setze

$$J(x) := \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} g(x - p).$$

Für gegebenes x sind nur endlich viele Terme nicht Null. Auch J ist unendlich oft stetig differenzierbar mit $J(x) > 0$ für alle x. Weiter ist J periodisch mit $J(x) = J(x-p)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{Z}^n$. Setze

$$h(x) := \frac{g(x)}{J(x)}.$$

Dann gilt $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} h(x-p) = 1$ für alle x. Für $p \in \mathbb{Z}^n$, $\varepsilon > 0$ definiere

$$\alpha_{p,\varepsilon}(x) := h\left(\frac{x}{\varepsilon} - p\right).$$

Dann ist $\operatorname{supp} \alpha_{p,\varepsilon} = \varepsilon(p + [-1,1]^n)$, und es folgt $\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \alpha_{p,\varepsilon}) = 2\varepsilon\sqrt{n}$. Es gilt $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{p,\varepsilon}(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 3.60. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann existiert ein $\lambda > 0$, so dass für alle $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \cap A \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(B) < \lambda$ ein $i \in I$ existiert mit $B \subseteq U_i$.*

Beweis. Definiere

$$\mathcal{O} := \{B_\rho(x) : \ x \in A, \ \rho > 0, \ \ B_{2\rho}(x) \subseteq U_i \text{ für ein } i \in I\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Überdeckung von A, $A \subseteq \bigcup_{O\in\mathcal{O}} O$. Es existiert also eine endliche Überdeckung, das heißt, es gilt $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_{\rho_j}(x_j)$ mit $x_j \in A$, und für jedes j existiert $i_j \in I$ mit $B_{2\rho_j}(x_j) \subseteq U_{i_j}$. Setze $\lambda := \min_{j=1\ldots m} \rho_j$.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \cap A \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(B) < \lambda$. Sei $x \in B \cap A$. Dann gibt es ein j, so dass $x \in B_{\rho_j}(x_j)$. Es folgt $B \subseteq B_{\rho_j + \operatorname{diam} B}(x_j)$. Da $\operatorname{diam}(B) < \lambda \leq \rho_j$ folgt $B \subseteq B_{2\rho_j}(x_j) \subseteq U_{i_j}$. □

Satz 3.61 (Gaußscher Integralsatz)**.** *Sei A eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand. Sei $U \supseteq A$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei ν der äußere Normaleneinheitsvektor von A. Dann gilt*

$$\int_A \operatorname{div} f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} \nu^T f \, \mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Beweis. Wir konstruieren eine Überdeckung von A durch ein System $\mathcal{O}$ von offenen Mengen. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Dann definieren wir $\mathcal{O}$ folgendermaßen: Es ist $O \in \mathcal{O}$ genau dann, wenn $O \subseteq \operatorname{int} A$ oder, wenn $O \subseteq U$ und $\partial A \cap O$ ein Graph einer Funktion gemäß Satz 3.3 ist.

Nach Lemma 3.60 existiert ein $\lambda > 0$, so dass für alle $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \cap A \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(B) < \lambda$ ein $O \in \mathcal{O}$ existiert mit $B \subseteq O$. Sei $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda}{2\sqrt{n}})$. Dann ist $\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \alpha_{p,\varepsilon}) < \lambda$. Sei $P := \{p \in \mathbb{Z}^n : \ \operatorname{supp} \alpha_{p,\varepsilon} \cap A \neq \emptyset\}$. Da A kompakt ist, ist P endlich. Weiter gilt

$$\int_A \operatorname{div} f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_A \operatorname{div}(f \cdot \sum_{p\in P} \alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n = \sum_{p\in P} \int_A \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n.$$

Die Funktionen $f\alpha_{p,\varepsilon}$ haben kompakten Träger und sind stetig differenzierbar.

Sei $p \in P$. Dann existiert eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $\operatorname{supp} \alpha_{p,\varepsilon} \subseteq O$. Damit ist $\operatorname{supp}(f\alpha_{p,\varepsilon})$ eine kompakte Teilmenge von O.

Angenommen $O \subseteq \operatorname{int} A$. Dann folgt mit Lemma 3.57

$$\int_A \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_O \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n = 0 = \int_{\partial A} \nu^T f \cdot \alpha_{p,\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Anderenfalls ist $O \subseteq U$ so, dass $\partial A \cap O$ ein Graph einer Funktion gemäß Satz 3.3 ist. Hier können wir Lemma 3.58 (inklusive Nachbemerkung) anwenden, und es folgt

$$\begin{aligned}\int_A \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n &= \int_O \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_{O\cap\partial A} \nu^T f \cdot \alpha_{p,\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A} \\ &= \int_{\partial A} \nu^T f \cdot \alpha_{p,\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.\end{aligned}$$

Da $\sum_{p\in P} \alpha_{p,\varepsilon}(x) = 1$ für alle $x \in A$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\int_A \operatorname{div} f \,\mathrm{d}\lambda_n &= \sum_{p\in P} \int_A \operatorname{div}(f\alpha_{p,\varepsilon}) \,\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \sum_{p\in P} \int_{\partial A} \nu^T f \cdot \alpha_{p,\varepsilon} \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A} = \int_{\partial A} \nu^T f \,\mathrm{d}\lambda_{\partial A},\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Wir beweisen noch zwei einfache aber wichtige Folgerungen dieses Satzes. Für stetig differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist der Gradient definiert durch

$$\nabla f(x) := f'(x)^T.$$

Der Laplace-Operator ist definiert durch

$$\Delta f(x) := \operatorname{div}(\nabla f(x)) = \operatorname{spur}(f''(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Dann gelten die folgende Formeln.

Folgerung 3.62 (Greensche Formeln)**.** *Sei A eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ mit*

C^1-Rand. Sei $U \supseteq A$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_A g\Delta f + (\nabla f)^T \nabla g \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} g(\nabla f)^T \nu \;\mathrm{d}\lambda_{\partial A}$$

und

$$\int_A g\Delta f - f\Delta g \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial A} (g\nabla f - f\nabla g)^T \cdot \nu \;\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Hier ist

$$(\nabla f(x))^T \nu(x) = f'(x)\nu(x) =: \frac{\partial f}{\partial n}(x)$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Normalenrichtung $\nu(x)$. Es ist üblich die das Transponieren-Zeichen wegzulassen, und zu schreiben

$$\nabla f \cdot \nabla g := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = (\nabla f)^T \nabla g$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt durch ausdifferenzieren von $\operatorname{div}(g\nabla f)$ und Satz 3.61

$$\int_A \operatorname{div}(g\nabla f) = \int_A g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_A \operatorname{div}(g\nabla f) = \int_A g\nabla f \cdot \nu \;\mathrm{d}\lambda_{\partial A}.$$

Die zweite Behauptung ist eine direkte Folge der ersten. □

3.7 Differentialformen erster Ordnung und Kurvenintegrale

Definition 3.63. *Sei $I = (a, b)$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt φ Kurve, wenn $\varphi(I)$ eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $\varphi : I \to \varphi(I)$ ein Parameterdarstellung von $\varphi(I)$ ist.*

Gilt $\varphi(a) = \varphi(b)$, dann heißt φ geschlossen.

Definition 3.64. *Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\varphi(I)$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist das Kurvenintegral von F entlang φ definiert als*

$$\int_\varphi F \,\mathrm{d}x := \int_\varphi \sum_{i=1}^n F_i \,\mathrm{d}x_i := \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi' \,\mathrm{d}\lambda^1 \in \mathbb{R}.$$

Im Unterschied zum Integral auf Untermannigfaltigkeiten steht hier φ' statt $|\varphi'|$.

Bemerkung 3.65. *(1) Der Ausdruck $\omega := \sum_{i=1}^n F_i \,\mathrm{d}x_i$ wird auch als Differentialform 1. Ordnung bezeichnet.*

(2) Setze $M := \varphi(I)$. Achtung: Die Ausdrücke $\int_\varphi F\,\mathrm{d}x$ und $\begin{pmatrix} \int_M F_1\,\mathrm{d}\lambda_M \\ \vdots \\ \int_M F_n\,\mathrm{d}\lambda_M \end{pmatrix}$ sind nicht gleich.

Satz 3.66. *Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Sei $\tilde\varphi : \tilde I \to \varphi(I)$ eine weitere Parameterdarstellung von $\varphi(I)$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\varphi(I)$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $\tau := \varphi^{-1} \circ \tilde\varphi$. Dann gilt*

$$\int_\varphi F\,\mathrm{d}x = \begin{cases} +\int_{\tilde\varphi} F\,\mathrm{d}x & \text{falls } \tau' > 0, \\ -\int_{\tilde\varphi} F\,\mathrm{d}x & \text{falls } \tau' < 0. \end{cases}$$

Beweis. Es gilt $\tilde\varphi'(s) = \varphi'(\tau(s))\tau'(s)$. Die Funktion τ ist ein Diffeomorphismus, damit ist $\tau'(s) \neq 0$ für alle $s \in \tilde I$. Da $\tau'(s) \in \mathbb{R}$, ist τ' positiv auf $\tilde I$ oder negativ of $\tilde I$. Es gibt also $\sigma \in \{-1, +1\}$, so dass $\tau'(s) = \sigma|\tau'(s)|$ für alle $s \in \tilde I$. Wir benutzen den Transformationssatz Satz 2.120. Dann ist

$$\int_\varphi F\,\mathrm{d}x = \int_I F^T \circ\varphi\cdot\varphi'\,\mathrm{d}\lambda^1 = \int_{\tilde I} (F^T \circ\varphi\circ\tau)\cdot(\varphi'\circ\tau)\cdot|\tau'|\,\mathrm{d}\lambda^1 = \sigma \int_{\tilde I} (F^T \circ\tilde\varphi)\cdot\tilde\varphi'\,\mathrm{d}\lambda^1,$$

was die Behauptung ist. □

Das obige Kurvenintegral hängt also nur von der Orientierung der Parameterdarstellung ab.

Satz 3.67. *Sei $I = (a, b)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\varphi(I)$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_\varphi \mathrm{d}f := \int_\varphi \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$

Den Ausdruck $\mathrm{d}f$ nennt man auch totales Differential von f.

Dieses Integral ist wegunabhängig. Es hängt nur von Start- und Endpunkt der Kurve ab, nicht von der konkreten Wahl der Kurve. Wir wollen nun Bedingungen an F finden, so dass diese Aussage auch für $\int_\varphi F\,\mathrm{d}x$ gilt.

Definition 3.68. *Sei $I = (a, b)$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt φ stückweise stetig differenzierbare Kurve, falls es $t_1 < t_2 < \dots t_m$ in (a, b) gibt, so dass $\varphi|_{(t_i,t_{i+1})}$ für alle $i = 0 \dots m$ eine Kurve ist, wobei hier $t_0 = a$ und $t_{m+1} = b$ gesetzt wurde.*

Ist φ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, dann definieren wir

$$\int_\varphi F\,\mathrm{d}x := \sum_{i=0}^m \int_{\varphi|_{(t_i,t_{i+1})}} F\,\mathrm{d}x.$$

Daraus folgt, dass $\int_\varphi \mathrm{d}f = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$ auch für stückweise stetig differenzierbare Kurven gilt.

Definition 3.69. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt U zusammenhängend, falls gilt: Ist $U \subseteq O_1 \cup O_2$ mit zwei nicht leeren, offenen disjunkten Mengen O_1 und O_2, dann ist $U \subseteq O_1$ oder $U \subseteq O_2$.*

Aufgabe 3.70. *$\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und U zusammenhängend, dann ist $f(U)$ zusammenhängend.*

Lemma 3.71. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann existiert für alle $x, y \in U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\varphi : (a, b) \to U$ mit $\varphi(a) = x$ und $\varphi(b) = y$.*

Beweis. Wir konstruieren einen Polygonzug, der x und y verbindet. Sei P die Menge aller Punkte x, für die es einen Polygonzug (stückweise differenzierbare Kurve mit stückweise konstanter Ableitung) von x nach y in U gibt.

Sei $\rho > 0$ so, dass $B_\rho(y) \subseteq U$. Dann ist $B_\rho(y) \subseteq P$, und P ist nicht leer.

Sei nun $x \in P$. Sei $\rho > 0$ so, dass $B_\rho(x) \subseteq U$. Sei $x' \in B_\rho(x)$. Dann gibt es einen Polygonzug von y nach x. Diesen können wir um die Strecke von x nach x' ergänzen. Damit ist $x' \in P$ und P ist offen.

Sei nun (x_j) eine Folge in P mit $x_j \to x$ und $x \in U$. Sei $\rho > 0$ so, dass $B_\rho(x) \subseteq U$. Dann ist $x_j \in B_\rho(x)$ für ein j, und wir können einen Polygonzug von y nach x konstruieren. Damit ist P abgeschlossen in U, oder äquivalent $U \setminus P$ ist offen.

Damit ist $U = P \cup (U \setminus P)$. Da U zusammenhängend ist, folgt $U \setminus P = \emptyset$ und $U = P$. $\square$

Satz 3.72. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer, offen und zusammenhängend, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert ein stetig differenzierbares $f : U \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla f$ genau dann, wenn $\int_\varphi F \,\mathrm{d}x = 0$ für alle geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven in U gilt.*

Beweis. Ist $F = \nabla f$, dann ist $\int_\varphi F \,\mathrm{d}x = 0$ für alle geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven in U nach Satz 3.67.

Sei nun $\int_\varphi F \,\mathrm{d}x = 0$ für alle geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven in U. Sei $x_0 \in U$.

Sei $x \in U$. Nach Lemma 3.71 existiert eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\varphi : (0, 1) \to U$ mit $\varphi(0) = x_0$ und $\varphi(1) = x$. Wir definieren

$$f(x) := \int_\varphi F \,\mathrm{d}x.$$

Die Funktion f ist wohldefiniert: Sei $\tilde{\varphi} : (0,1) \to U$ eine weitere Kurve mit $\tilde{\varphi}(0) = x_0$ und $\tilde{\varphi}(1) = x$. Sei $\psi : (0,2) \to U$ definiert durch $\psi(t) := \varphi(t)$ falls $t \leq 1$, $\psi(t) := \tilde{\varphi}(2-t)$ falls $t > 1$. Dann ist

$$\int_\varphi F\,\mathrm{d}x - \int_{\tilde{\varphi}} F\,\mathrm{d}x = \int_\psi F\,\mathrm{d}x = 0,$$

da ψ eine geschlossene Kurve ist.

Sei nun $B_\rho(x) \subseteq U$, $y \in B_\rho(x)$. Definiere $\varphi : [0,1] \to U$ durch $\varphi(t) = x + t(y-x)$. Dann ist

$$f(y) - f(x) = \int_\varphi F\,\mathrm{d}x = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi'\,\mathrm{d}\lambda^1 = \int_{(0,1)} F(x + t(y-x))^T (y-x)\,\mathrm{d}\lambda^1(t).$$

Die rechte Seite ist eine stetige Funktion in y, und f ist stetig. Ein Kandidat für die Ableitung von f ist $F(x)$:

$$f(y) - f(x) - F(x)(y-x) = \int_{(0,1)} [F(x + t(y-x)) - F(x)]^T (y-x)\,\mathrm{d}\lambda^1(t).$$

Da F stetig ist, ist $\|F(x + t(y-x)) - F(x)\|_2 < \varepsilon$ falls nur $\|y-x\|_2$ klein genug ist. Damit ist f differenzierbar. $\square$

Definition 3.73. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt sternförmig bezüglich $p \in U$, wenn für alle $x \in U$ die Verbindungsstrecke $\{p + t(x-p), t \in (0,1)\}$ in U liegt.*

Eine hinreichende Bedingung für die Wegunabhängigkeit des Integrals ist die folgende.

Satz 3.74. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich eines $p \in U$. Sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j.$$

Dann existiert ein zweimal stetig differenzierbares $f : U \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla f$.

Beweis. Durch Verschiebung können wir $p = 0$ annehmen.

Sei nun $x \in U$, $\varphi(t) := p + t(x-p) = tx$, $I := (0,1)$. Definiere

$$f(x) := \int_\varphi F\,\mathrm{d}x = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi'\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_I F(tx)^T x\,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\nabla f = F$ ist. Wir definieren die Hilfsfunktion $g : U \times [0,1] \to U$ durch

$$g(x,t) := F(tx)^T x.$$

Dann ist g stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) &= F(tx)^T + tx^T F'(tx)\\ &= F(tx)^T + tx^T F'(tx)^T = F(tx)^T + t(F'(tx)x)^T\\ &= F(tx)^T + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(tx)^T,\end{aligned}$$

wobei wir die Voraussetzung, dass F' symmetrisch ist, benutzt haben. Integrieren dieser Ableitung bezüglich t ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) &= \int_0^1 F(tx)^T + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(tx)^T\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\ &= \int_0^1 F(tx)^T\,\mathrm{d}\lambda_1(t) + F(x)^T - \int_0^1 F(tx)^T\,\mathrm{d}\lambda_1(t) = F(x)^T.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f(y) - f(x) - F(x)^T(y-x) &= \int_0^1 g(y,t) - g(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) - F(x)^T(y-x)\\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g(x+s(y-x),t)(y-x)\,\mathrm{d}\lambda_1(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) - F(x)^T(y-x)\\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g(x+s(y-x),t)(y-x)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) - F(x)^T(y-x)\\ &= \int_0^1 (F(x+s(y-x)) - F(x))^T(y-x)\,\mathrm{d}\lambda_1(s),\end{aligned}$$

wobei wir wieder den Satz von Fubini (Satz 2.85) benutzt haben. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da F stetig differenzierbar ist, existiert $\rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subseteq U$ und $\|F(y) - F(x)\|_2 < \varepsilon$ für alle $y \in B_\rho(x)$. Für solches y ist dann $|f(y) - f(x) - F(x)^T(y-x)| \le \varepsilon\|y-x\|_2$, damit ist $f'(x) = F(x)^T$. □

Beispiel 3.75. *Sei* $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix}$, $\varphi : [0,2\pi] := \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$. *Dann gilt*

$$\int_\varphi F\,\mathrm{d}x = 2\pi,$$

Das geschlossene Integral ist nicht wegunabhängig, damit existiert kein f*, so dass* $F = \nabla f$*. Weiter ist*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{x_2^1 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

damit ist obiges Integrabilitätskriterium erfüllt. Allerdings ist U *nicht sternförmig. Auf der sternförmigen Menge* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1,0) :\ x_1 \le 0\}$ *hat* F *tatsächlich* *eine Stammfunktion, die aus* $\arctan(\frac{x_1}{x_2})$ *und* $\arctan(\frac{x_2}{x_1})$ *zusammengesetzt werden kann.*

Satz 3.76 (Greenscher Satz)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit C^1-Rand. Sei U eine offene Umgebung von A, $F : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_\varphi F \, \mathrm{d}x = \int_A \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \, \mathrm{d}\lambda_2$$

für jede Parameterdarstellung von ∂A, die wie folgt orientiert ist: läuft man entsprechend φ entlang des Randes ∂A, dann liegt die Menge A links, und der äußere Normaleneinheitsvektor zeigt nach rechts.

Beweis. Sei $\varphi : I \to \partial A$ eine lokale Parameterdarstellung von ∂A mit $\varphi(\bar{I}) = \partial A$. Falls dies nicht möglich ist, kann wieder mit einem Überdeckungsargument gearbeitet werden. Dann ist

$$\int_\varphi F \, \mathrm{d}x = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \varphi' \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_I F^T \circ \varphi \cdot \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|_2} \|\varphi'\|_2 \, \mathrm{d}\lambda_1.$$

Der Vektor $\varphi'(t)$ ist Tangentialvektor an ∂A in $\varphi(t)$. Aufgrund der Annahme an die Orientierung von φ ist dann $\frac{1}{\|\varphi'\|_2}\begin{pmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{pmatrix}$ der äußere Normaleneinheitsvektor an ∂A. Aus dem Gaußschen Integralsatz bekommen wir nun

$$\begin{aligned} \int_\varphi F \, \mathrm{d}x &= \int_I F^T \circ \varphi \cdot \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|_2} \|\varphi'\|_2 \, \mathrm{d}\lambda_1 \\ &= \int_{\partial A} \begin{pmatrix} F_2 & -F_1 \end{pmatrix}^T \nu_A \, \mathrm{d}\lambda_{\partial A} \\ &= \int_A \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \, \mathrm{d}\lambda_2, \end{aligned}$$

was die Behauptung ist. □

3.8 Hausdorff-Maß und Volumenmaß

Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^1. Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass auf M gilt $\lambda_M = \mathcal{H}^k$.

Aufgabe 3.77. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar Sei $x \in U$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $T \subseteq U$ von x, so dass*

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x)(x_1 - x_2)\|_2 \le \varepsilon \|x_1 - x_2\|_2 \quad \forall x_1, x_2 \in T.$$

Lemma 3.78. *Sei $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung. Sei $a \in M$.*

Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ eine offene Umgebung $\tilde{V} \subseteq V$ von a und eine lokale Parameterdarstellung $\varphi : \tilde{T} \to \tilde{V}$, so dass gilt:

$$\|\tilde{\varphi}(t_1) - \tilde{\varphi}(t_2)\|_2 \le (1 + \varepsilon)\|t_1 - t_2\|_2 \quad \forall t_1, t_2 \in \tilde{T}, \tag{3.79}$$

$$\|t_1 - t_2\|_2 \le \frac{1}{1 - \varepsilon}\|\tilde{\varphi}(t_1) - \tilde{\varphi}(t_2)\|_2 \quad \forall t_1, t_2 \in \tilde{T}, \tag{3.80}$$

$$1 - \varepsilon \le \sqrt{\det \tilde{\varphi}'^T \tilde{\varphi}'} \le 1 + \varepsilon. \tag{3.81}$$

Beweis. Sei $a = \varphi(t)$. Wir benutzen die QR-Zerlegung von $\varphi'(t) = QR$, wobei $Q \in \mathbb{R}^{n,k}$ mit $Q^T Q = I_k$ und $R \in \mathbb{R}^{k,k}$ invertierbar ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{\varphi}(s) := \varphi(R^{-1}s).$$

Dann ist

$$\tilde{\varphi}(Rt) = \varphi(t),\ \tilde{\varphi}'(Rt) = \varphi'(t)R^{-1} = Q,\ \sqrt{\det(\tilde{\varphi}'(Rt)^T \tilde{\varphi}'(Rt))} = 1.$$

Es gibt also eine Kugel $\tilde{T}$ um Rt, so dass gilt

$$\|\tilde{\varphi}'(s)\|_2 \le 1 + \varepsilon,\ 1 - \varepsilon \le \sqrt{\det(\tilde{\varphi}'(s)^T \tilde{\varphi}'(s))} \le 1 + \varepsilon \quad \forall s \in \tilde{T}$$

und

$$\|\tilde{\varphi}(s_1) - \tilde{\varphi}(s_2) - \tilde{\varphi}'(Rt)(s_1 - s_2)\|_2 \le \varepsilon \|s_1 - s_2\|_2 \quad \forall s_1, s_2 \in \tilde{T}.$$

Dann folgt mit dem Mittelwertsatz Satz 2.107 (mit $\|\cdot\|_2$ anstelle $\|\cdot\|_\infty$)

$$\|\tilde{\varphi}(s_1) - \tilde{\varphi}(s_2)\|_2 \le (1 + \varepsilon)\|s_1 - s_2\|_2 \quad \forall s_1, s_2 \in \tilde{T}.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\|s_1 - s_2\|_2 = \|Q(s_1 - s_2)\|_2 &= \|\tilde\varphi'(Rt)(s_1 - s_2)\|_2\\ &\le \varepsilon\|s_1 - s_2\|_2 + \|\tilde\varphi(s_1) - \tilde\varphi(s_2)\|_2,\end{aligned}$$

woraus

$$\|s_1 - s_2\|_2 \le \frac{1}{1-\varepsilon}\|\tilde\varphi(s_1) - \tilde\varphi(s_2)\|_2$$

für alle $s_1, s_2 \in \tilde T$ folgt. □

Lemma 3.82. *Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\varphi : T \to V$ eine lokale Parameterdarstellung, die (3.79)–(3.81) erfüllt. Sei $A \in \mathcal{L}_M$. Dann ist $A \cap V \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^k_*)$, und es gilt*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{H}^k(A\cap V) \le \lambda_{M,V}(A) \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathcal{H}^k(A\cap V).$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}_M$ mit $A \subseteq V$. Da $A = \varphi(\varphi^{-1}(A))$ mit $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{L}(k)$, ist $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^k_*)$ wegen Lemma 1.107 und (3.80). Dann folgt mit Lemma 1.107, (3.80) und (3.81)

$$\begin{aligned}\lambda_{M,V}(A) &= \int_T \chi_A \circ \varphi \sqrt{\det(\varphi'^T\varphi)}\,\mathrm{d}\lambda_k\\ &\le (1+\varepsilon)\lambda_k(\varphi^{-1}(A))\\ &= (1+\varepsilon)\mathcal{H}^k(\varphi^{-1}(A))\\ &\le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathcal{H}^k(A).\end{aligned}$$

Analog bekommen wir aus (3.79) und (3.81)

$$\begin{aligned}\lambda_{M,V}(A) &= \int_T \chi_A \circ \varphi \sqrt{\det(\varphi'^T\varphi)}\,\mathrm{d}\lambda_k\\ &\ge (1-\varepsilon)\lambda_k(\varphi^{-1}(A))\\ &\ge \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{H}^k(\varphi(\varphi^{-1}(A))) = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{H}^k(A).\end{aligned}$$

□

Folgerung 3.83. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen abzählbaren Atlas (φ_j) der Klasse C^α, so dass die lokalen Parameterdarstellungen φ_j die Bedingungen (3.79)–(3.81) erfüllen.*

Beweis. Beweis ist analog zu dem von Folgerung 3.21. □

Satz 3.84. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse*

C^1. Dann ist $\mathcal{L}_M \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{H}^k_*)$, und es gilt

$$\mathcal{H}^k(A) = \lambda_M(A) \quad \forall A \in \mathcal{L}_M.$$

Beweis. Sei $A \subseteq \mathcal{L}_M$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei (φ_j) ein abzählbarer Atlas, so dass die lokalen Parameterdarstellungen φ_j die Bedingungen (3.79)–(3.81) erfüllen.

Definiere $A_j := V_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} V_i) \in \mathcal{L}_M$. Dann ist wegen Lemma 3.82 $A_j \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^k_*)$, und es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(A_j) = \mathcal{H}^k(A).$$

Aus Lemma 3.82 folgt dann

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{H}^k(A) \leq \lambda_M(A) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathcal{H}^k(A).$$

Damit ist $\lambda_M(A) = \mathcal{H}^k(A)$ falls eine der beiden Größen gleich $+\infty$ ist. Ansonsten bekommen wir die Gleichheit mit dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. $\square$

Literatur

[AE01] H. Amann und J. Escher. *Analysis. III.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. DOI: 10.1007/978-3-0348-8967-4.

[Bog07] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 2007, Vol. I: xviii+500 pp., Vol. II: xiv+575. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5.

[Cla12] P. L. Clark. *The Instructor's Guide to Real Induction.* 2012. arXiv: 1208.0973 [math.HO].

[DT15] Y. Do und C. Thiele. “L^p theory for outer measures and two themes of Lennart Carleson united”. In: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 52.2 (2015), S. 249–296. DOI: 10.1090/S0273-0979-2014-01474-0.

[EG92] L. C. Evans und R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992, S. viii+268.

[Els05] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie.* Fourth. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, 2005, S. xvi+434.

[For17] O. Forster. *Analysis 3.* 8. Aufl. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017, S. VIII+312. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-658-16746-2.

[Fre03] D. H. Fremlin. *Measure theory. Vol. 2.* Broad foundations, Corrected second printing of the 2001 original. Torres Fremlin, Colchester, 2003. URL: https://www1.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/mtcont.htm.

[Fre04] D. H. Fremlin. *Measure theory. Vol. 1.* The irreducible minimum, Corrected third printing of the 2000 original. Torres Fremlin, Colchester, 2004, 108+5 pp. (errata). URL: https://www1.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/mtcont.htm.

[Kon13] T. Konstantopoulos. “A multilinear algebra proof of the Cauchy-Binet formula and a multilinear version of Parseval’s identity”. In: *Linear Algebra Appl.* 439.9 (2013), S. 2651–2658. DOI: 10.1016/j.laa.2013.07.009.

[Nov72] W. P. Novinger. “Mean convergence in L^p spaces”. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 34 (1972), S. 627–628. DOI: 10.2307/2038420.

[Tao11] T. Tao. *An introduction to measure theory*. Bd. 126. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, S. xvi+206. DOI: 10.1090/gsm/126.

Index