Lehrstuhl für Mathematik VIII
Julius-Maximilians Universität Würzburg
Vorlesung Stochastik 1
Wintersemester 2024/25
Markus Bibinger / Adrian Grüber

Übungsblatt 2

Klausurübung 2.1

Bei einer Sportveranstaltung wird ein Dopingtest durchgeführt. Falls eine Person gedopt ist, so fällt der Test zu 99% auch positiv aus. Hat eine Person nicht gedopt, zeigt der Test trotzdem mit 5% Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis an. Aus Erfahrung sei bekannt, dass 20% der Teilnehmenden gedopt sind.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Dopingprobe positiv ausfällt.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test negativ ausfällt, obwohl die getestete Person gedopt ist.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person gedopt ist, deren Test negativ ausgefallen ist.

Übung 2.2

Betrachten Sie die Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und die Abbildung $p : \Omega \to [0, 1]$ mit $p(\omega) = \omega/6$, für $\omega \in \Omega$.

(a) Geben Sie vier verschiedene σ-Algebren auf Ω an.

(b) Geben Sie ein Beispiel an für σ-Algebren über der Menge Ω, so dass

$$\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} := \{A \cup B : A \in \mathcal{A} \text{ und } B \in \mathcal{B}\},$$

keine σ-Algebra ist.

(c) Zeigen Sie, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ existiert, so dass $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p(\omega) = \omega/6$.

(d) Bestimmen Sie die σ-Algebra, welche von $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) | \mathbb{P}(A) = 1/2\}$ erzeugt wird.

Aufgabe 2.3 (keine Abgabe)

(a) Wie viele natürliche Zahlen kleiner oder gleich 200 sind durch 2,3 oder 5 teilbar?

(b) Nach einem Arbeitstag in der Bibliothek liegen noch $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Bücher zur Rückgabe. Eine studentische Mitarbeiterin stellt die Bücher einfach zufällig an die n freien Plätze im passenden Regal, ohne auf die Nummern der Plätze zu achten. Was ist für $n = 4$ die Anzahl an Möglichkeiten, dass genau zwei Bücher am richtigen Platz stehen? Leiten Sie eine allgemeine Formel her für die Anzahl an Möglichkeiten, dass genau $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, Bücher am richtigen Platz stehen.

Aufgabe 2.4 (keine Abgabe)
Wir interessieren uns für „Geburtstagszwillinge“.

(a) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Tutorium mit $k = 25$ Teilnehmenden mindestens zwei am gleichen Tag (von $n = 365$ Tagen) Geburtstag haben?

Betrachten wir nun für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Laplace-Räumen $(\Omega_n, \mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}^{n+1}$ und $\tau_n \colon \Omega_n \to \{2, 3, \ldots, n+1\}$ definiert als

$$\tau_n(\omega) = \min \big\{ i \in \{2, 3, \ldots, n+1\} \mid \omega_i \in \{\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}\} \big\}, \quad \omega \in \Omega_n .$$

Also beschreibt τ_n den Zeitpunkt der ersten Übereinstimmung.

(b) Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}_n(\tau_n \leqslant k)$ an und zeigen Sie, dass für $t > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\tau_n \leqslant \sqrt{n}\, t) = 1 - \exp\big(-\frac{t^2}{2}\big) .$$

Bearbeitung bis Donnerstag, den 31.10.2024.