Aufgabe 1 *Paramegnetisches Fermi-Gas* **10 P.**

Gegeben ist ein paramegnetisches System bestehend aus N nicht-wechselwirkenden Elektronen mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} - \mu_0 \sigma_j \cdot \mathbf{B}\,, \tag{1}$$

wobei $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$ und der Spin der einzelnen Elektronen entweder parallel (+) oder antiparallel (-) zum Magnetfeld ausgerichtet ist.

a) Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential durch folgenden Ausdruck gegeben ist: *4 P.*

$$\mathcal{J} = -k_B T \ln(Z_G) = -k_B T \left[\ln(Q_-(\mu + \mu_0 B)) + \ln(Q_+(\mu - \mu_0 B))\right] \tag{2}$$

mit

$$\ln(Q_\mp(\mu \pm \mu_0 B)) = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(1 + \exp\left\{-\beta\left(\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} \mp \mu_0 B - \mu\right)\right\}\right) \tag{3}$$

b) Benutzen Sie die Umformulierung der Summe zum Integral hin für makroskopisch große Volumina *4 P.*

$$\sum_j f(\mathbf{p}_j) \to \frac{V}{2\pi\hbar^3} \int d^3p f(\mathbf{p}) \tag{4}$$

und drücken Sie so die beiden Funktionen $\ln(Q_-(\mu + \mu_0 B))$ und $\ln(Q_+(\mu - \mu_0 B))$ durch die aus der Vorlesung bekannten Fermi-Integrale $f_n(z)$ aus.
Setzen Sie diese zwei neuen Ausdrücke in das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe ein und zeigen Sie so, dass:

$$\mathcal{J} = -k_B T \frac{V}{\lambda_T^3}\left[f_{5/2}(ze^{\beta\mu_0 B}) + f_{5/2}(ze^{-\beta\mu_0 B})\right] \tag{5}$$

Hierbei ist $\lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}$ die thermische De-Broglie-Wellenlänge und $z = e^{\beta\mu}$.
Hinweis: Der Wert der Gamma-Funktion $\Gamma(3/2) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist hilfreich.

Bitte wenden!

$$Z = tr\left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}\right)$$

In Besetzungszahlbasis sind $\hat{H}$ und $\hat{N}$ diagonal
Wir betrachten die Zustandssumme eines Teilchens

$$Z = tr\left(e^{\sum_\sigma -\beta\left(\varepsilon_{\vec{p}} - \mu_0 \vec{B}\cdot\vec{\sigma} - \mu\right) c^+_{\vec{p},\sigma} c_{\vec{p},\sigma}}\right)$$

$$= \prod_\sigma \sum_{n=0}^{1} e^{-\beta\left(\frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \mu_0 \vec{B}\cdot\vec{\sigma} - \mu\right) n}$$

$$= \prod_\sigma \left(1 + e^{-\beta\left(\frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \mu_0 \vec{B}\cdot\vec{\sigma} - \mu\right)}\right)$$

$$= \left[1 + \exp\left[-\beta\left(\frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \mu_0 B - \mu\right)\right]\right]\left[1 + \exp\left[-\beta\left(\frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \mu_0 B - \mu\right)\right]\right]$$

Die Zustandssumme von N Teilchen ist damit

$$Z = \prod_{n=1}^{N} \left[1 + \exp\left[-\beta\left(\frac{|\vec{p}_n|^2}{2m} - \mu_0 B - \mu\right)\right]\right]\left[1 + \exp\left[-\beta\left(\frac{|\vec{p}_n|^2}{2m} - \mu_0 B - \mu\right)\right]\right]$$

und das Großkanonische Potential

$$\mathcal{J} = -k_B T \ln Z$$

$$= -k_B T \left[\sum_{j=1}^{N} \ln\left(1+e^{-\beta\left(\frac{|\vec{p}_j|^2}{2m} - \mu_0 B - \mu\right)}\right) + \sum_{j=1}^{N} \ln\left(1+e^{-\beta\left(\frac{|\vec{p}_j|^2}{2m} + \mu_0 B - \mu\right)}\right)\right]$$

$$= -k_B T \left[\ln\left(Q_-(\mu+\mu_0 B)\right) + \ln\left(Q_+(\mu-\mu_0 B)\right)\right]$$

b)

b) Benutzen Sie die Umformulierung der Summe zum Integral hin für makroskopisch große Volumina *4 P.*

$$\sum_j f(\mathbf{p}_j) \to \frac{V}{2\pi\hbar^3}\int d^3p\, f(\mathbf{p}) \qquad (4)$$

und drücken Sie so die beiden Funktionen $\ln(Q_-(\mu+\mu_0 B))$ und $\ln(Q_+(\mu-\mu_0 B))$ durch die aus der Vorlesung bekannten Fermi-Integrale $f_n(z)$ aus.
Setzen Sie diese zwei neuen Ausdrücke in das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe ein und zeigen Sie so, dass:

$$\mathcal{J} = -k_B T \frac{V}{\lambda_T^3}\left[f_{5/2}(ze^{\beta\mu_0 B}) + f_{5/2}(ze^{-\beta\mu_0 B})\right] \qquad (5)$$

Hierbei ist $\lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}$ die thermische De-Broglie-Wellenlänge und $z = e^{\beta\mu}$.
Hinweis: Der Wert der Gamma-Funktion $\Gamma(3/2) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist hilfreich.

$$\ln\left(Q_\mp(\mu\pm\mu_0 B)\right) = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(1+\exp\left\{-\beta\left[\frac{|\vec{p}_j|^2}{2m} \mp \mu_0 B - \mu\right]\right\}\right)$$

$$\to \frac{V}{2\pi\hbar^3}\int \ln\left(1+\exp\left\{-\beta\left[\frac{|\vec{p}|^2}{2m} \mp \mu_0 B - \mu\right]\right\}\right) d^3p$$

$$\boxed{\text{Definition} \quad f_n(x) = \frac{1}{\Gamma(x+1)}\int_0^\infty \frac{t^n}{e^{t-x}+1}\,dt}$$

$$= \frac{V}{2\pi\hbar^3}(4\pi)\int_0^\infty p^2 \ln\left(1+\exp\left\{-\beta\left[\frac{p^2}{2m} \mp \mu_0 B - \mu\right]\right\}\right) dp$$

(Kugelkoordinaten)

$$= -\frac{2V}{\hbar^3}\int_0^\infty \frac{p^3}{3}\,\frac{1}{1+\exp(\dots)}\exp(\dots)\left(-\frac{\beta p}{m}\right)dp$$

(Partielle Integration)

$$= \frac{2V\beta}{3\hbar^3 m}\int_0^\infty \frac{p^4}{1+\exp\left\{\beta\left(\frac{p^2}{2m}\mp\mu_0 B-\mu\right)\right\}}\,dp$$

Substitution $\xi = \frac{\beta p^2}{2m}$, $d\xi = \frac{\beta p}{m}dp$

$$p^2 = \frac{2m\xi}{\beta}$$

$$dp = \frac{m}{\beta p}d\xi = \frac{m}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{2m\xi}}\,d\xi$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\beta\xi}}\,d\xi$$

$$= \frac{2V\beta}{3\hbar^3 m}\int_0^\infty \left(\frac{2m\xi}{\beta}\right)^2\left[1+\exp\left(\xi\mp\beta\mu_0 B-\beta\mu\right)\right]^{-1}\sqrt{\frac{m}{2\beta\xi}}\,d\xi$$

$$= \frac{V\beta}{3\hbar^3 m}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{5/2}\int_0^\infty \frac{\xi^{3/2}}{1+\exp(\xi\mp\beta\mu_0 B-\beta\mu)}\,d\xi$$

$$= \frac{V\beta}{3\hbar^3 m}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{5/2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\,f_{3/2}(\pm\beta\mu_0 B-\mu\beta)$$

Aufgabe 2 *Druck und innere Energie eines ultra-relativistischen Fermi-Gases* **5 P.**
Gegeben ist ein ultra-relativistisches Elektronen-Gas von N Teilchen welche jeweils einen Impuls $\mathbf{k}_i$ haben. Die Zahl der Teilchen in einem Energielevel ist durch n_i gegeben. Der Hamilton Operator ist somit durch den folgenden Audruck gegeben:

$$H = \sum_{i=1}^{N} c|\mathbf{k}_i| n_i \tag{6}$$

a) Berechnen Sie die innere Energie des Systems. *Hinweis: Vergessen Sie nicht den Spin der Teilchen beim Berechnen der Spur über alle Freiheitsgrade.* *2 P.*

$$Z = \mathrm{tr}\left(e^{-\beta(H-\mu N)}\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} (c|\vec{k}_i|-\mu) n_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}} \sum_{n_i=0}^{1} e^{-\beta(c|\vec{k}_i|-\mu)n_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \left(1 + e^{-\beta(c|\vec{k}_i|-\mu)}\right)$$

$$= \exp \sum_{i=1}^{N} \ln\left(1 + e^{-\beta(c|\vec{k}_i|-\mu)}\right)$$

Die Summe wird ein Integral im Limes $N \to \infty$

$$\ln Z \to \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int \ln\left(1 + e^{-\beta(c|\vec{k}|-\mu)}\right) d^3k$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z$$

$$= -\frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{-e^{-\beta(c|\vec{k}|-\mu)} (c|\vec{k}|-\mu)}{1 + e^{-\beta(c|\vec{k}|-\mu)}} d^3k$$

$$= \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{c|\vec{k}|-\mu}{1 + e^{\beta(c|\vec{k}|-\mu)}} d^3k$$

$$= \frac{8\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{(cp-\mu)p^2}{1 + e^{\beta(cp-\mu)}} dp$$

b) Berechnen Sie den Druck des Fermigases. 2 P.

$$J = -\frac{2k_BTV}{(2\pi\hbar)^3}\int \ln\left(1+e^{-\beta(c|\vec{k}|-\mu)}\right)d^3k$$

$$p = -\left(\frac{\partial J}{\partial V}\right)_{T,\mu}$$

$$= \frac{2k_BT}{(2\pi\hbar)^3}\int \ln\left(1+e^{-\beta(c|\vec{k}|-\mu)}\right)d^3k$$

$$= \frac{8\pi k_BT}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \rho^2 \ln\left(1+e^{-\beta(c\rho-\mu)}\right)d\rho$$