# Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 5

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

*Julius-Maximilians-Universität Würzburg*

(Dated: June 6, 2024)

**Aufgabe 1.** Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen, die für alle $r > 0$ folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| \, \mathrm{d}t \leq r^n.$$

**Aufgabe 2.** Es sei $r > 0$ und $f \in \mathcal{H}(K_r(0))$. Ferner sei für $z \in \mathbb{C}$ die (formale) Potenzreihe

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k!)^2} z^k$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion definiert und dass für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $0 \leq R < r$ folgende Ungleichung gilt

$$F(z) \leq \|f\|_{\partial K_r(0)} \exp\left(\frac{|z|}{R}\right).$$

**Aufgabe 3.** Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze, nullstellenfreie Funktion mit der Eigenschaft

$$|f(2z)| \leq 2|f(z)|, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ konstant ist.

*Beweis.* Sei

$$M = \sup_{z \in \overline{K_r(0)}} f(z).$$

**Theorem 1.** *Sei $|z| < 2^n$. Dann gilt $|f(z)| \leq M2^n$.*

Das beweisen wir durch Induktion 🎉

**Aufgabe 4.** Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{z_0\})$. Zeigen Sie, dass jede der Voraussetzungen hinreichend für die Existenz einre holomorphen Fortsetzung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ von $f$ auf $U$ ist.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(a) $f(U \setminus \{z_0\}) \subseteq \mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(b) Es existieren $C > 0$ und $\alpha > -1$ derart, dass

$$|f(z)| \leq C|z - z_0|^\alpha$$

für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ ist.