Aufgabe 6.3: *Trägheitsmomente* .... (4 Punkte)

Man berechne durch direkte Integration (keine Anwendung des Satz von Steiner) die Trägheitsmomente

Jun Wei Tan
Cyprian Long
Nicolas Braun

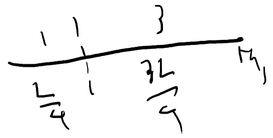
(1 P) a) eines dünnen Stabes mit homogener Dichte der Länge L und Masse M_S bezogen auf eine Achse, die den Stab im Verhältnis 3:1 teilt und senkrecht zum Stab steht. Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die verwendeten Größen hervorgehen.

(1 P) b) eines Hohlzylinders der Masse M_{HZ} mit Innenradius R_i und Außenradius R_a bezogen auf die Symmetrieachse.

(2 P) c) eines Zylinders mit radiusabhängiger Dichte $\rho(r) \propto r$, Masse M_Z und Radius R bezogen auf die Symmetrieachse.

Die Ergebnisse sollen nur die Größen L, M_S bzw. M_{HZ}, R_i, R_a bzw. M_Z, R enthalten.

a)



$$\rho = \frac{M_s}{L}$$

$$J = \int r^2 \, dm$$

$$= \int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} r^2 \rho \, dr$$

$$= \rho \left. \frac{r^3}{3} \right|_{-\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}}$$

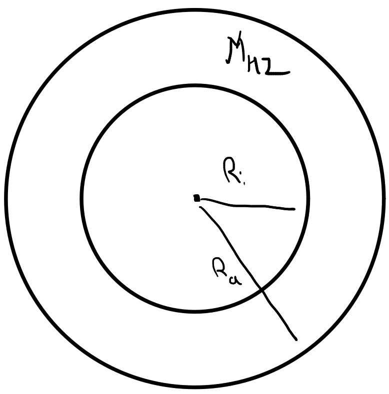
$$= \frac{\rho}{3} \left[\left(\frac{3L}{4}\right)^3 + \left(\frac{L}{4}\right)^3 \right]$$

$$= \frac{\rho L^3}{3} \left[\frac{27}{64} + \frac{1}{64} \right]$$

$$= \frac{7}{48} \rho L^3$$

$$= \frac{7}{48} M_s L^2$$

b)



$$\sigma = \frac{M_{HZ}}{\pi R_a^2 - \pi R_i^2}$$

$$J = \int r^2 \, dm$$

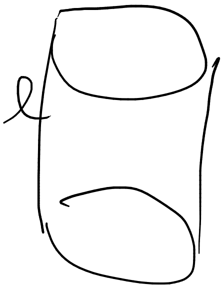
$$= \int_{R_i}^{R_a} r^2 (2\pi r) \sigma \, dr$$

$$= 2\pi \sigma \left. \frac{r^4}{4} \right|_{R_i}^{R_a}$$

$$= \frac{\pi \sigma}{4} \left[R_a^4 - R_i^4 \right]$$

$$= \frac{\cancel{\pi}}{4} \frac{M_{HZ}}{\cancel{\pi}\cancel{(R_a^2 - R_i^2)}} \cancel{(R_a^2 - R_i^2)} (R_a^2 + R_i^2) = \frac{1}{4} M_{HZ} (R_a^2 + R_i^2)$$

c)



$\rho = kr$

$$M_z = \ell\int_0^R dm$$

$$= \ell\int_0^R kr(2\pi r)\,dr$$

$$= 2\pi \ell k \int_0^R r^2\,dr$$

$$= 2\pi k\ell\, \frac{r^3}{3}\Big|_0^R$$

$$= \frac{2}{3}\pi k \ell R^3$$

$$k = \frac{3M}{2\pi\ell R^3}$$

$$I = \int r^2\,dm$$

$$= \int_0^R r^2 \ell\rho\, 2\pi r\, dr$$

$$= \int_0^R r^2 \ell kr(2\pi r)\,dr$$

$$= 2\pi k\ell\int_0^R r^4\,dr$$

$$= 2\pi k\ell\, \frac{r^5}{5}\Big|_0^R$$

$$= \frac{2}{5}\pi k\ell R^5$$

$$= \frac{\cancel{2}}{5}\cancel{\pi} R^{\cancel{5}\,2}\cancel{\ell}\,\frac{3M_z}{\cancel{2\pi}\cancel{\ell}\cancel{R^3}}$$

$$= \frac{3}{5} M_z R^2$$