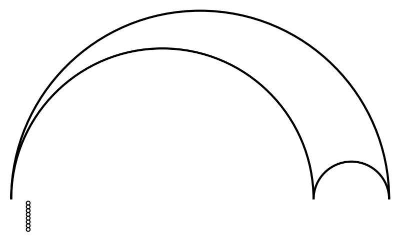
Einfürung in die Funktionentheorie Hausaufgaben Blatt Nr. 2

Jun Wei Tan* and Lucas Wollman

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

(Dated: May 7, 2024)

Aufgabe 1. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}_0$ Halbkreise mit Durchmessern AC, AB bzw. BC, sodass A, B und C auf einer Gerade liegen. Wir betrachten erner Kreise $\mathcal{C}_\setminus$ für $n \in \mathbb{N}$ tangential zu den Halbkreisen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$, sodass ferner $\mathcal{C}_n$ tangential zu $\mathcal{C}_{n-1}$ in einem Punkt P_n ist. Zeigen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, die alle Berührpunkte $P_0, P_1, \dots$ enthält.



Beweis. Wir führen ein Möbiustransformation durch. OBdA nehmen wir an, dass A das Ursprung ist.

Danach betrachten wir die Inversion $z \mapsto 1/z$. Die reelle Achse wird offensichtlich auf der reellen Achse abgebildet. Insbesondere bleiben B und C auf der reellen Achse.

🎉

Aufgabe 2. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_k) \subseteq \mathbb{C}$ und $K_R(z_0)$, $0 < R < \infty$, die Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,\ z \in K_R(z_0).$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $r \in [0, R)$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t$.

(b) Falls $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in K_R(z_0)$, so gilt $|a_k| \leq M \frac{1}{R^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

* jun-wei.tan@stud-mail.uni-wuerzburg.de

Aufgabe 3. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in K_r(z_0)$ folgende Identität gilt:

$$\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{(w-z)^k} \, \mathrm{d}w = 0.$$

Warum schließen wir $k = 1$ aus?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $z = z0$ *und versuchen Sie anschließend den allgemeinen Fall auf diesen zurückzuführen.*

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und $g(z) = zf(z)$.

(a) Sei $K \subset \mathbb{D}$ kompakt. Beweisen Sie, dass die Funktionreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g(z^n)$ gleichmäßig auf K konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g(z^n)$ nicht notwendigerweise gleichmäßig auf der ganzen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ konvergiert.