# দ্বিতীয় অধ্যায়

**প্রথম ক্রম এবং প্রথম ঘাতের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [First order and first degree differential equation] ঃ**

সংজ্ঞা ঃ $M + N\dfrac{dy}{dx} = 0$, অথবা $Mdx + Ndy = 0$ এই আকারের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে প্রথম ক্রম এবং প্রথম ঘাতের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়, যখন M এবং N উভয়েই x ও y এর ফাংশন অথবা ধ্রুব সংখ্যা। [A differential equation of the form $M + N\dfrac{dy}{dx} = 0$, or $Mdx + Ndy = 0$ is called first order and first degree differential equation where both M and N are functions of x and y or constants].

**2.1** ঃ সমাধানের সুবিদার্থে এবং আকারের ভিত্তিতে ইহাকে প্রধানতঃ ছয়ভাবে বিভক্ত করা যায়।

1. চলক পৃথকীকরণ [Separation of Variables].
2. সমমাত্রিক সমীকরণ [Homogeneous equation].
3. সমমাত্রায় প্রকাশযোগ্য সমীকরণ [Equation reducible to homogeneous].
4. প্রকৃত সমীকরণ [Exact equation].
5. একমাত্রিক সমীকরণ [Linear equation].
6. একমাত্রিক সমীকরণে প্রকাশযোগ্য সমীকরণ [Reducible to linear equation].

# দ্বিতীয় অধ্যায়
## প্রথম পরিচ্ছেদ
## চলক পৃথকীকরণ
## [VARIABLES SEPARABLE]

**2-1.1 ঃ** যদি $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে $f(x)\,dx + \phi(y)\,dy = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায়, তবে তাহাকে চলক পৃথকীকরণ করা হইয়াছে বলা হয়। [If the differential equation $Mdx + Ndy = 0$ can be expressed in the form $f(x)dx + \phi(y)dy = 0$ then it is called variables are separable.]

**2-1.2 ঃ** চলক পৃথকীকরণ যোগ্য সমীকরণ **[Equation reducible to variables separable] ঃ**

যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ এই আকারে থাকে, তবে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি দ্বারা ইহাকে চলক পৃথকীকরণ যোগ্য সমীকরণে পরিনত করা হয়। অর্থাৎ $ax + by + c = z$. [If the differential equation of the form $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ it can be reduced to an equation in which variables can be separated by method of substitation. That is $ax + by + c = z$.]

যেমন, প্রদত্ত সমীকরণ [i. e. Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \cdots (1)$$

ধরি [We put] $ax + by + c = z$

$$\therefore a + b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\text{বা } b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - a$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left[\frac{dz}{dx} - a\right] \cdots (2)$$

এখন (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{1}{b}\left[\frac{dz}{dx} - a\right] = f(z)$$

বা $\frac{dz}{dx} - a = bf(z)$

বা $\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$

বা $\frac{dz}{a + bf(z)} = dx.$

উপরের সমীকরণটিতে চলক পৃথক করিয়া সাজানো হইয়াছে। এখন শুধু ইনটিগ্রেট করিলেই সমাধান পাওয়া যায়।

**নিয়ম-1 ঃ** যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $f(x)\, dx + f(y)\, dy = 0$ এই আকারে থাকে, অর্থাৎ dx এর সাথে x এর ফাংশন এবং dy এর সাথে y এর ফাংশন থাকে, তবে কেবলমাত্র ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

যেমন $f(x)\, dx + f(y)\, dy = 0$

$\Rightarrow \int f(x)\, dx + \int f(y)\, dy = 0$

$\Rightarrow F(x) + F(y) = c$ যখন $\int f(x)\, dx = F(x)$.

**নিয়ম-2 ঃ** যদি কোন ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $f(x)\, \varphi(y)\, dx + f(y)\, \varphi(x)\, dy = 0$ এই আকারে থাকে, তবে প্রদত্ত সমীকরণকে $\varphi(x)\, \varphi(y)$ দ্বারা ভাগ করিলে সমীকরণটি $\frac{f(x)}{\varphi(x)} dx + \frac{f(y)}{\varphi(y)} dy = 0$ আকার ধারণ করে। অর্থাৎ dx এর সাথে x এর ফাংশন এবং dy এর সাথে y এর ফাংশন থাকে। অতঃপর ইহাকে ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

**নিয়ম-3 ঃ** যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ এই আকারে থাকে, তবে $ax + by + c = z$ ধরিয়া সরলীকরণ করিয়া চলক পৃথকীকরণ করিতে হয়। অতঃপর কেবলমাত্র ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ-1 ঃ** সমাধান কর [Solve] ঃ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2 + y + 1}{x^2 + x + 1} = 0.$$ [চঃ বিঃ '86]

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2 + y + 1}{x^2 + x + 1} = 0$$

বা $\frac{dy}{y^2 + y + 1} + \frac{dx}{x^2 + x + 1} = 0$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

$$\int \frac{dy}{y^2+y+1} + \int \frac{dx}{x^2+x+1} = 0$$

বা $$\int \frac{dy}{(y+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} + \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} = 0$$

বা $$\frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\left(\frac{y+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = c$$

বা $$\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = c.$$

**উদাহরণ-2** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

(a). $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$ [চঃ বিঃ '84]

(b). $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0.$

(c). $y - x\dfrac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \dfrac{dy}{dx}\right).$

**সমাধান-(a)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই [Dividing both sida by $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ we get]

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating this]

i. e. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

বা $$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{-2y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

বা $$-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-y^2} = -c$$

যেহেতু [Since] $\displaystyle\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)}.$

বা $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = c.$

**সমাধান-(b)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$$

উভয় পক্ষকে tanx tany দ্বারা ভাগ করিয়া পাই [Dividing both sides by tanx. tany we get]

$$\frac{\sec^2 x\, dx}{\tan x} + \frac{\sec^2 y\, dy}{\tan y} = 0$$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating this]

i. e. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\tan x} + \int \frac{\sec^2 y\, dy}{\tan y} = 0$

বা $\ln(\tan x) + \ln(\tan y) = \ln c$; যেহেতু [Since] $\int \frac{f'(x)\, dx}{f(x)} = \ln f(x)$

বা $\ln(\tan x . \tan y) = \ln c$

$\therefore \tan x \tan y = c$.

**সমাধান-(c)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$$

বা $y dx - x dy = ay^2 dx + a dy$

বা $y(1 - ay)\, dx = (x + a)\, dy$

বা $\frac{dx}{x + a} = \frac{dy}{y(1 - ay)}$

বা $\frac{dx}{x + a} = \left\{\frac{1}{y(1 - 0)} + \frac{1}{(1/a)(1 - ay)}\right\} dy$

বা $\frac{dx}{x + a} = \frac{dy}{y} + \frac{a dy}{1 - ay}$

বা $\frac{dx}{x + a} - \frac{a dy}{1 - ay} = \frac{dy}{y}$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i. e. $\int \frac{dx}{x + a} - \int \frac{a dy}{1 - ay} = \int \frac{dy}{y}$

বা $\ln(x + a) + \ln(1 - ay) = \ln y + \ln c$

বা $\ln(x + a)(1 - ay) = \ln cy$

$\therefore (x + a)(1 - ay) = cy$.

**উদাহরণ-3 ঃ** সমাধান কর [Solve] ঃ

[চঃ বিঃ '85]

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y.$

(ii) $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$

**সমাধান–(i) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$$

বা $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y) \cdots (1)$

ধরি $x + y = z$ তবে $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \cdots (2)$

[We put $x + y = z$ then $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, or $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \cdots (2)$]

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \sin z$$

বা $\frac{dz}{dx} = 1 + \sin z$

বা $\frac{dz}{1 + \sin z} = dx$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i. e. $\int \frac{dz}{1 + \sin z} = \int dx$

বা $\int \frac{(1 - \sin z)\, dz}{1 - \sin^2 z} = \int dx$

বা $\int \frac{(1 - \sin z) dz}{\cos^2 z} = \int dx$

বা $\int \sec^2 z\, dz - \int \sec z \tan z\, dz = \int dx$

বা $\tan z - \sec z = x + c$

বা $\tan(x + y) - \sec(x + y) = x + c.$

**সমাধান–(ii) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2 \cdots (1)$$

ধরি $4x + y + 1 = z$ তবে $4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 4 \cdots (2)$

[We put $4x + y + 1 = z$ then $4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, or $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 4 \cdots (2)$]

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{dz}{dx} - 4 = z^2$$

বা $\frac{dz}{dx} = 4 + z^2$

বা $\frac{dz}{4 + z^2} = dx$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating both sides we get]

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2} = x + \frac{c}{2}$$

বা $\tan^{-1}\frac{z}{2} = 2x + c$

বা $\frac{z}{2} = \tan(2x + c)$

বা $4x + y + 1 = 2\tan(2x + c)$.

## প্রশ্নমালা–2(A)

সমাধান কর [Solve] ঃ

**1**(i). $dy = (y^2 - 1)\,dx$, [ঢাঃ বিঃ '73]

(ii). $\tan x\, dy = \cot y\, dx$

(iii). $\sqrt{1 - x^2}\, dy + \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0$

(iv). $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + x\cos x}{y(2\ln y + 1)}$

(v). $(3 + 2\sin x + \cos x)\, dy = (1 + 2\sin y + \cos y)\, dx$

(vi). $y\,dx + (1 + x^2)\tan^{-1}x\, dy = 0$

(vii). $(\cos x - \sin x)\, dx + (\sin x + \cos x)\, dy = 0$

(viii). $x\ln x\, dy + \sqrt{1 + y^2}\, dx = 0$.

**2a**(i). $y\,dx - x\,dy = xy\,dx$ [ঢাঃ বিঃ '73]

(ii). $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)\,dy = 0$ [রাঃ বিঃ '81]

(iii). $(xy + x)\,dy = (xy + y)\,dx$

(iv). $(1 - x^2)(1 - y)\,dx = xy(1 + y)\,dy$

(v). $x\sqrt{y}\,dx + (1 + y)\sqrt{1 + x}\,dy = 0$

(vi). $y\sqrt{x^2 - 1}\,dx + x\sqrt{y^2 - 1}\,dy = 0$ [চঃ বিঃ '80; ঢাঃ বিঃ সঃ '89, '91]

(vii). $xy(1 + x^2)\,dy - (1 + y^2)\,dx = 0$

(viii). $x(1 + y^2)\,dx = y(1 + x^2)\,dy$

(ix). $\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}\,dx + xy\,dy = 0$.

**b**(i). $\cos y\, ln(\sec x + \tan x)\,dx = \cos x\, ln(\sec y + \tan y)\,dy$

(ii). $3e^x \tan y\,dx + (1 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$

(iii). $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \sin x\,dy = 0$

(iv). $y\sec^2 x\,dx + (y + 7)\tan x\,dy = 0$.

**c**(i). $y - x\frac{dy}{dx} = b\left(1 + x^2\frac{dy}{dx}\right)$

(ii). $x(e^y + 4)\,dx + e^{x+y}\,dy = 0$

(iii). $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$

(iv). $ln\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$

**3**(i). $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y - x}$

(ii). $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$

(iii). $\frac{dy}{dx} = (2x + 3y - 5)^2$

(iv). $(x + y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$

(v). $\sqrt{x + y + 1}\,\frac{dy}{dx} = 1$

(vi). $(x + y)(dx - dy) = dx + dy$

(vii). $x\frac{dy}{dx} - y = x\sqrt{x^2 + y^2}$ ← (2F) এর অংশ

(viii). $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$

বাদ

(ix). $\left(\dfrac{x+y-a}{x+y-b}\right)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+a}{x+y+b}$

(x). $\dfrac{xdx + ydy}{xdy - ydx} = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$.

## উত্তরমালা

**1**(i). $ln\dfrac{y-1}{y+1} = 2x + c$

(ii). $\sin x \cos y = c$

(iii). $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = c$

(iv). $y^2\, ln y = x \sin x + c$

(v). $\tan^{-1}\left(1 + \tan\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\, ln\left(1 + 2\tan\dfrac{y}{2}\right) + c$

(vi). $y \tan^{-1}x = c$

(vii). $e^y\,[\sin x + \cos x] = c$

(viii). $ln x.\ [y + \sqrt{y^2 + 1}] = c$

**2a**(i). $ln\dfrac{x}{y} = x + c$

(ii). $(1 + x^2)(1 + y^2) = c$

(iii). $y - x = ln\dfrac{cx}{y}$

(iv). $ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + 2y + 2ln(1 - y) = c$

(v). $(x - 2)\sqrt{1 + x} + (y + 3)\sqrt{y} = c$

(vi). $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} - \sec^{-1}x - \sec^{-1}y = c$

(vii). $(1 + x^2)(1 + y^2) = cx^2$

(viii). $1 + y^2 = c(1 + x^2)$

(ix). $\sqrt{x^2 - 1} - \sec^{-1}x + \sqrt{y^2 - 1} = c$

**b**(i). $[\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c$

(ii). $(1 - e^x)^3 = c\tan y$

(iii). $\sin x.\,[e^y + 1] = c$

(iv). $y^7 \tan x = ce^{-y}$.

**c**(i). $x = c(y - b)(1 + bx)$

(ii). $\ln(e^y + 4) = (x + 1)e^{-x} + c$

(iii). $3[e^y - e^x] = x^3 + c$

(iv). $be^{ax} + ae^{-by} + c = 0$.

**3**(i). $2\sqrt{y - x} + 2\ln(\sqrt{y - x} - 1) = x + c$

(ii). $x + y = \tan(x + c)$

(iii). $\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1}\left\{\frac{(2x + 3y - 5)\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\} = x + c$

(iv). $a\tan^{-1}\left(\frac{x + y}{a}\right) = y + c$

(v). $x + y + 1 - 2\sqrt{x + y + 1} + 2\ln(1 + \sqrt{x + y + 1}) = x + c$

(vi). $\ln(x + y) = x - y + c$

(vii). $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + y^2/x^2} = ce^x$

(viii). $1 + \tan\left(\frac{x + y}{2}\right) = ae^x$

(ix). $(b - a)\ln\{(x + y)^2 - ab\} = 2(x - y) + c$

(x). $\sqrt{x^2 + y^2} = a\sin\left(\tan^{-1}\frac{y}{x} + c\right)$.

---x---

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

## সমমাত্রিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ
## [HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION]

**2-2.1 ঃ সমমাত্রিক সমীকরণ [Homogeneous equation]**

যে সমীকরণের প্রতি পদের x এবং y এর ঘাত যোগ করিলে সমান হয়, সেই সমীকরণকে সমমাত্রিক সমীকরণ বলা হয়।

An equation in which sum of the powers of x and y in every terms are equal, this equation is called homogeneous equation.

**যেমন ঃ** $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0$ এই সমীকরণটিতে প্রতি পদের x এবং y এর ঘাত যোগ করিলে 3 হয়; কাজেই ইহা 3 ঘাতের সমমাত্রিক সমীকরণ এবং $x + y = 0$ সমীকরণটি এক ঘাতের সমমাত্রিক সমীকরণ।

**2-2.2 ঃ সমমাত্রিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Homogeneous differential equation]**

যদি M(x, y) এবং N(x, y) ফাংশন দুইটি x ও y এর একই ঘাতের সমমাত্রিক ফাংশন হয় তবে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

এই আকারের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে সমমাত্রিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়। সমমাত্রিক সমীকরণকে $y = vx,\ \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ধরিয়া সমাধান করিতে হয়।

If the two functions M(x, y) and N(x, y) are homogeneous functions of x and y of the same degree then the equation of the form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

is called homogeneous differential equation. Homogeneous differential equation can be solved by putting

$$y = vx, \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}.$$

**কার্য্য পদ্ধতি [Working rule]** ঃ প্রথমে প্রদত্ত সমীকরণকে $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ এই আকারে লিখিয়া $y = vx$ প্রতিস্থাপন করিতে হয়। অতঃপর $y = vx$ কে অন্তরীকরণ করিলে $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ হয়। এই $y$ এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান প্রদত্ত সমীকরণে স্থাপন করিলে

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{M(v)}{N(v)} \text{ পাওয়া যায়}$$

$$\text{বা } v + x\frac{dv}{dx} = F(v), \text{ যখন } F(v) = \frac{M(v)}{N(v)}$$

$$\text{বা } x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

অতঃপর চলক পৃথকীকরণ করার পর ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ-1** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$2x\,dy - 2y\,dx - \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx = 0.$$

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$2x\,dy - 2y\,dx - \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx = 0$$

$$\text{বা } 2x\,dy = (2y + \sqrt{x^2 + 4y^2})\,dx$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{2y + \sqrt{x^2 + 4y^2}}{2x} \quad \cdots (1)$$

ধরি [we put] $y = vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \cdots (2)$

(2) নং হইতে $y$ এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করি পাই [From (2) putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2vx + \sqrt{x^2 + 4v^2x^2}}{2x}$$

$$\text{বা } v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{\sqrt{1 + 4v^2}}{2}$$

বা $x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\sqrt{1 + 4v^2}}{2}$

বা $\dfrac{2dv}{\sqrt{1 + 4v^2}} = \dfrac{dx}{x}$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sids] i, e. :

অর্থাৎ $\displaystyle\int \frac{2dv}{\sqrt{1 + 4v^2}} = \int \frac{dx}{x}$

বা $\displaystyle\int \frac{2dv}{2\sqrt{(1/2)^2 + v^2}} = \int \frac{dx}{x}$

বা $ln\left(v + \sqrt{\dfrac{1}{4} + v^2}\right) = lnx + lnc$

বা $ln\left(v + \sqrt{\dfrac{1}{4} + v^2}\right) = lncx$

বা $v + \sqrt{\dfrac{1}{4} + v^2} = cx$

বা $\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{y^2}{x^2}} = cx$

বা $\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{x^2 + 4y^2}{4x^2}} = cx$

বা $\dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2 + 4y^2}}{2x} = cx$

বা $2y + \sqrt{x^2 + 4y^2} = 2cx^2$.

**উদাহরণ-2 ঃ** সমাধান কর [Solve] ঃ

(i) $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$ **[জাঃ বিঃ সঃ '96; চঃ বিঃ '86]**

(ii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x - 2y)}{x(x - 3y)}$

**সমাধান-(i) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy$$

বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ ... (1)

ধরি [we put] $y = vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... (2)

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From (2) putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2x^2}{2xvx}$$

$$\text{বা } x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v} - v$$

$$\text{বা } x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - 2v^2}{2v}$$

$$\text{বা } x\frac{dv}{dx} = \frac{-(v^2 - 1)}{2v}$$

$$\text{বা } \frac{2v\,dv}{v^2 - 1} = -\frac{dx}{x}$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

$$\text{i, e. } \int \frac{2v\,dv}{v^2 - 1} + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\text{বা } ln\,(v^2 - 1) + ln x = ln c$$

$$\text{বা } ln(v^2 - 1)x = ln c$$

$$\text{বা } (v^2 - 1)x = c$$

$$\text{বা } \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)x = c$$

$$\text{বা } \frac{y^2 - x^2}{x} = c$$

$$\therefore y^2 - x^2 = cx.$$

**সমাধান (ii) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is] ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - 2y^2}{x^2 - 3xy} \quad \dots (1)$$

ধরি [we put] $y = vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... (2)

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From (2) putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{xvx - 2v^2x^2}{x^2 - 3x\,vx}$$

বা $x\frac{dv}{dx} = \frac{v - 2v^2}{1 - 3v} - v$

বা $x\frac{dv}{dx} = \frac{v - 2v^2 - v + 3v^2}{1 - 3v}$

বা $x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{1 - 3v}$

বা $\frac{(1 - 3v)\,dv}{v^2} = \frac{dx}{x}$

বা $\frac{dx}{x} - \frac{dv}{v^2} + 3\frac{dv}{v} = 0$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Inetgrating both sides]

i, e. $\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dv}{v^2} + 3\int\frac{dv}{v} = 0$

বা $lnx + \frac{1}{v} + 3lnv = a$

বা $lnx + lnv^3 = a - \frac{1}{v}$

বা $ln(xv^3) = a - \frac{1}{v}$

বা $ln\left(x.\frac{y^3}{x^3}\right) = a - \frac{x}{y}$

বা $\frac{y^3}{x^2} = e^{a-x/y}$

বা $y^3 = x^2.\ e^a.\ e^{-x/y}$

$\therefore\ y^3 = cx^2\ \ e^{-x/y}$ যখন $c = e^a$.

উদাহরণ-3 ঃ সমাধান কর [solve] ঃ

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$ [চঃ বিঃ '83, '85; ঢাঃ বিঃ '77, '83]

(ii). $\left(x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$. [ঢাঃ বিঃ '80]

সমাধান-(i) ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is] ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} \quad \cdots (1)$$

ধরি [we put] $y = vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... (2)

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From (2) putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \tan v$$

বা $x\frac{dv}{dx} = \tan v$

বা $\cot v \, dv = \frac{dx}{x}$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i, e. $\int \cot v \, dv = \int \frac{dx}{x}$

বা $ln(\sin v) = ln x + ln c$

বা $ln(\sin v) = ln cx$

বা $\sin v = cx$

$\therefore \sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx.$

**সমাধান-(ii) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is] ঃ

$$\left(x \sin\frac{y}{x} - y \cos\frac{y}{x}\right) dx + x \cos\frac{y}{x} dy = 0$$

বা $x \cos\frac{y}{x} dy = -\left(x \sin\frac{y}{x} - y \cos\frac{y}{x}\right)dx$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos(y/x) - x \sin(y/x)}{x \cos(y/x)}$ ... (1)

ধরি [we put] $y = vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... (2)

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From (2) putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx \cos v - x \sin v}{x \cos v}$$

বা $v + x\frac{dv}{dx} = v - \tan v$

বা $x\frac{dv}{dx} = -\tan v$

বা $\cot v \, dv = -\frac{dx}{x}$

বা $\cot v \, dv + \frac{dx}{x} = 0$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i, e, $\int \cot v \, dv + \int \frac{dx}{x} = 0$

বা $\ln(\sin v) + \ln x = \ln c$

বা $\ln(x \sin v) = \ln c$

বা $x \sin v = c$

$\therefore \; x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = c.$

## প্রশ্নমালা-2(B)

সমাধান কর[Solve] ঃ

1(i). $(2x + y)\,dx - y\,dy = 0$

(ii). $y\,dx - x\,dy = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '92]

(iii). $(x + y)\,dy + (y - x)\,dx = 0$

(iv). $2x + y\frac{dy}{dx} = 3y$

(v). $(3x + 5y)\,dx + (4x + 6y)\,dy = 0$ [জাঃ বিঃ সঃ '96]

(vi). $(2x - y)\,dy = (2y - x)\,dx$

(vii). $(x + y)\,dy + (x - y)\,dx = 0$

(viii). $x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '93]

2(i). $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ [জাঃ বিঃ সঃ '96]

(ii). $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$

(iii). $(x^2 + y^2)\,dy = xy\,dx$

(iv). $\frac{dy}{dx} + \frac{y(x+y)}{x^2} = 0$

(v). $\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$

(vi). $(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = xy$

(vii). $(x+y)^2 = xy\frac{dy}{dx}$

(xiii). $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0$

(ix). $(x^2 + y^2)\,dx - 2x^2\,dy = 0$

(x). $xy\,dy - (x^2 + 2y^2)\,dx = 0$

(xi). $y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$

(xii). $y(x - y)\,dx = x(x + y)\,dy$

(xiii). $(3xy - x^2)\,dx + x^2\,dy = 0$

(xiv). $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

(xv). $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

(xvi). $(3x^2 + y^2)\,dy + (x^2 + 3y^2)\,dx = 0$

(xvii). $y^2\,dx + (x^2 - xy + y^2)\,dy = 0$

(xviii). $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0$

(xix). $(x^2 - 2xy)\,dy + (x^2 - 3xy + 2y^2)\,dx = 0$

(xx). $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0$

(xxi). $(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2})dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = 0$ [জাঃ বিঃ সঃ '97]

(xxii). $x^2y\,dx - x^3dy = y^3\,dy$

(xxiii). $(x^4 + 4x^3y + 3x^2y^2)\,dx + (x^4 + 2x^3y + y^4)\,dy = 0$

3(i). $\left(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right)y = \left(y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x}\right)x\frac{dy}{dx}$

(ii). $x\sin\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y\sin\frac{y}{x} - x$

(iii). $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,dx = \left(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right)dy$.

# উত্তরমালা

**1**(i). $(x + y)(y - 2x)^2 = c$ (ii). $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$

(iii). $y^2 + 2xy - x^2 = c$ (iv). $(y - 2x)^2 = c(y - x)$

(v). $(x + 2y)(x + y)^2 = c$ (vi). $(x + y)^3 = c(y - x)$

(vii). $ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}(y/x) = c.$ (viii). $\sin{-1}\frac{y}{x} = ln\, x + c.$

**2**(i). $x\left(1 + \frac{3y^2}{x^2}\right)^{1/3} = c$

(ii). $y = ce^{y/x}$ (iii). $y = ce^{x^2/2y^2}$

(iv). $x^2 y = c(y + 2x)$ (v). $y^3 + 3x^2y + 2x^3 = c$

(vi). $\frac{x^2}{2y^2} + ln y = c$ (vii). $\frac{2y}{x} - ln(2yx^3 + x^4) = c$

(viii). $x\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = c\left(\frac{y}{x} + 1\right)$ (ix). $lncx = \frac{2x}{(x - y)}$

(x). $x^2 + y^2 = cx^4$ (xi). $cy = e^{y/x}$

(xii). $cxy = e^{x/y}$ (xiii). $x^3(4y - x) = c$

(xiv). $y^2 = cx(x - y)^2$ (xv). $x^2 + y^2 = cx$

(xvi). $ln(x + y) + \frac{2xy}{(x + y)^2} = c$ (xvii). $lny - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$

(xviii). $(y - x)(y + x)^2 = c$ (xix). $y + x\,lnx = cx$

(xx). $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = c$ (xxi). $(x^2 + y^2)^{3/2} = x^3\, lncx^3$

(xxii). $lny = \frac{x^3}{3y^3} + c$ (xxiii). $x^5 + 5x^4y + 5x^3y^2 + y^5 = c.$

**3**(i). $\sec\left(\frac{y}{x}\right) = cxy$ (ii). $lnx = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + c$

(iii). $y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = c.$

---------x---------

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## চতুর্থ পরিচ্ছেদ

## প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ

## [EXACT DIFFERENTIAL EQUATION]

**2-4.1 ঃ প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল [Perfect differential] ঃ**

মনে করি M এবং N উভয়েই x, y এর ফাংশন। যদি f(x, y) = c সমীকরণকে অন্তরীকরণ করিলে Mdx + Ndy = 0 হয় তবে Mdx + Ndy = 0 কে প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল বলা হয়।

[Let M and N both are functions of x, y. If Mdx + Ndy = 0 is obtained by differentiating f(x, y) = c then Mdx + Ndy = 0 is called exact differential.]

উদাহরণ [Example] $xy = c \cdots (1)$

$$\Rightarrow d(xy) = 0$$

$$\Rightarrow x\,dy + y\,dx = 0 \cdots (2)$$

যেহেতু (1) নং কে অন্তরীকরণ করিলে (2) নং পাওয়া যায়, কাজেই (2) নং কে প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল বলা হয়। [Since (2) is obtained by differentiating (1), so (2) is called exact differential]

**2-4.2 ঃ প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Exact differential equation] ঃ**

যদি কোন ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল থাকে তবে উহাকে প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়। [If any differential equation has exact differential then this is called exact differential equation.]

**2-4.3 ঃ উপপাদ্য ঃ** Mdx + Ndy = 0 সমীকরণটি প্রকৃত হওয়ার প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove the necessary and sufficient condition for exactness of the differential equation Mdx + Ndy = 0]

অথবা [or]

Mdx + Ndy = 0 সমীকরণটি প্রকৃত হইবে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হয়। [The differential equation Mdx + Ndy = 0 is exact if and only if $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.]

**প্রয়োজনীয় শর্ত [Necessary Condition] ঃ**

**বর্ণনা ঃ** যদি $Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটি প্রকৃত হয়, তবে $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হইবে।
[If the equation $Mdx + Ndy = 0$ is exact then $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.]

**প্রমাণ ঃ** মনে করি $Mdx + Ndy = 0 \cdots (1)$ সমীকরণটি প্রকৃত, কাজেই ইহার প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল আছে। মনেকরি ইহা df [Let the equation $Mdx + Ndy = 0 \cdots (1)$ is exact, so it has exact differential. Let it is df]

$$\text{অর্থাৎ } df = Mdx + Ndy \cdots (2)$$

যেহেতু $f = f(x, y)$ কাজেই আংশিক অন্তরকের সূত্র হইতে পাই [since $f = f(x, y)$ so from the theorem of total derivatives we get]

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\text{বা } Mdx + Ndy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \text{ (2) নং দ্বারা [by (2)]}$$

উভয় পক্ষ হইতে dx এবং dy এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই [Equating the coefficients of dx and dy from both sides we get]

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ এবং } N = \frac{\partial f}{\partial y} \cdots (3)$$

$$\text{এখন [Now] } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

$$\text{বা } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\text{বা } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}; \text{ (3) নং দ্বারা।}$$

ইহাই প্রকৃত হওয়ার প্রয়োজনীয় শর্ত [This is the necessary condition for exactness.]

**যথেষ্ট শর্ত [Sufficient condition] ঃ**

**বর্ণনা [Statement] ঃ** যদি $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হয় তবে $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ প্রকৃত হইবে। [If $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ then the differential equation $Mdx + Ndy = 0$ is exact]

**প্রমাণ ঃ** মনে করি [Let] $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \cdots (4)$

ধরি [we put] $F = \int Mdx$, যখন y ধ্রুবক [where y is constant]

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = M \cdots (5)$$

এখন [Now] $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial y}$ ; (5) নং দ্বারা [by (5)]

বা $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$

বা $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, (4) নং দ্বারা।

বা $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

বা $\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$

$\Rightarrow N - \frac{\partial F}{\partial y} = \varphi(y)$, যাহা x হইতে স্বাধীন [which is independent from x]

বা $N = \frac{\partial F}{\partial y} + \varphi(y) \cdots (6)$

এখন [Now] $Mdx + Ndy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi(y)\right] dy$

(5), (6) নং দ্বারা [by (5), (6)]

বা $Mdx + Ndy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \varphi(y)\, dy$

$$= dF + \varphi(y)\, dy$$

$$= dF + d\int \varphi(y)\, dy$$

$$= d[F + \int \varphi(y)\, dy]$$

$= df$; যখন [where] $f = F + \int \varphi(y)\, dy$ .

ইহাই প্রকৃত হওয়ার যথেষ্ট শর্ত [This is the sufficient condition for exactness.]

**2-4.4 ঃ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [Integrating factor] ঃ**

যে উৎপাদক দ্বারা কোন ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে গুন করিলে উহা ইনটিগ্রেশন যোগ্য হয়, সে উৎপাদককে ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক বলা হয়। উহাকে I. F. দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [A differential equation is multiplied by a factor and then the equation become integrable, such factor is called integrating factor. It is denoted by I. F.]

**2-4.5 ঃ উপপাদ্য ঃ** যদি $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$ হয় তবে $Mdx+Ndy=0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int f(x)\,dx}$ হইবে।

[If $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$ then $e^{\int f(x)\,dx}$ will be the integrating factor of the differential equation $Mdx+Ndy=0$]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$Mdx+Ndy=0 \cdots (1)$$

যখন M এবং N উভয়েই x, y এর ফাংশন [where M and N both are functions of x, y]

মনেকরি, (1) নং এর ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক F(x), তবে (1) নং কে F(x) দ্বারা গুণ করিলে ইনটিগ্রেশন যোগ্য সমীকরণ পাই [Let F(x) be the integrating factor of (1) then multiplying (1) by F(x) we get integrable equation]

$$FM\,dx+FN\,dy=0 \cdots (2) \text{ যখন [when] } F=F(x)$$

যেহেতু (2) নং সমীকরণ প্রকৃত, কাজেই [since equation (2) is exact so]

$$\frac{\partial}{\partial y}(FM)=\frac{\partial}{\partial x}(FN)$$

বা $F\frac{\partial M}{\partial y}=F\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial F}{\partial x}$

বা $F\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial F}{\partial x}$

বা $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}$

বা $f(x)=\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}$, যেহেতু $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$.

বা $f(x)\,\partial x=\frac{\partial F}{F}$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{dF}{F}$$

বা $\ln F=\int f(x)\,dx$

বা $\ln F = \ln e^{\int f(x)\,dx}$

$$\Rightarrow F = e^{\int f(x)\,dx}$$

ইহাই নির্ণেয় ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [This is the required integrating factor]

**2-4.6 ঃ** উপপাদ্য ঃ যদি $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(y)$ হয় তবে Mdx + Ndy = 0 ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int f(y)\,dy}$ হইবে।

[If $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(y)$ then $e^{\int f(y)\,dy}$ will be the integrating factor of the differential equation Mdx + Ndy = 0]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$Mdx + Ndy = 0 \cdots (1)$$

যখন M এবং N উভয়েই x, y এর ফাংশন [when M and N both are functions of x, y]

মনেকরি, (1) নং এর ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক F(y), তবে (1) নং কে F(y) দ্বারা গুন করিলে ইনটিগ্রেশন যোগ্য সমীকরণ পাই [Let F(y) be the integrating factor of (1) then multiplying (1) by F(y), we get integrable equation]

$$FM\,dx + FN\,dy = 0 \cdots (2)$$ যখন [when] $F = F(y)$.

যেহেতু (2) নং সমীকরণ প্রকৃত কাজেই [since the equation (2) is an exact, so]

$$\frac{\partial}{\partial y}(FM) = \frac{\partial}{\partial x}(FN)$$

বা $F\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x}$

বা $M\frac{\partial F}{\partial y} = F\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

বা $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

বা $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y} = f(y)$; যেহেতু [since] $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(y)$.

বা $\frac{\partial F}{F} = f(y)\,\partial y$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেটিং করি [Integrating both sides]

$$\int \frac{dF}{F} = \int f(y)\, dy$$

বা $\ln F = \int f(y)\, dy$

বা $\ln F = \ln e^{\int f(y)\, dy}$

$\Rightarrow F = e^{\int f(y)\, dy}$

ইহাই নির্ণেয় ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক। [This is the required integrating factor]

**2-4.7 ঃ কার্য্য পদ্ধতি [Working rule] ঃ** $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে সমাধান করার নিয়ম নিম্নে দেওয়া হইল। এখানে dx এর গুনিতক [বা সহগ] M এবং dy এর গুনিতক [বা সহগ] N.

**নিয়ম-1 ঃ** যদি $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হয়, তবে $Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটি প্রকৃত [Exact] হইবে। এইক্ষেত্রে $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} Mdx + \int (N$ এর x বর্জিত পদ$)\, dy = c.$

অর্থাৎ M এর y কে ধ্রুবক ধরিয়া x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিতে হয় এবং N এর কেবলমাত্র x বর্জিত পদগুলিকে y এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিতে হয়। অতঃপর উহাদেরকে যোগ করিয়া যোগফলেরর সমান ধ্রুবক লিখিলে সমাধান পাওয়া যায়।

**নিয়ম-2 ঃ** যদি $Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটি প্রকৃত [Exact] না হয়, অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু M, N উভয়েই সমমাত্রিক এবং $Mx + Ny \neq 0$, তবে প্রদত্ত সমীকরণকে ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $I.\ F = \frac{1}{Mx + Ny}$ দ্বারা গুণ করিলে প্রকৃত হইবে অর্থাৎ ইনটিগ্রেশন যোগ্য হইবে। অতঃপর নিয়ম–1 অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

**নিয়ম-3 ঃ** যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $f(xy)y\, dx + \varphi(xy)x\, dy = 0$ এই আকারে থাকে এবং ইহা প্রকৃত নয় অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু $Mx - Ny \neq 0$ তবে প্রদত্ত সমীকরণকে $I.\ F. = \frac{1}{Mx - Ny}$ দ্বারা গুন করিলে প্রকৃত হইবে। অতঃপর নিয়ম–1 ঃ অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

**নিয়ম-4 ঃ** যদি $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি প্রকৃত না হয় অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ কেবলমাত্র x এর ফাংশন হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ হয়, তবে $I.\ F. = e^{\int f(x) dx}$ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণকে গুন করিলে প্রকৃত হইবে। অতঃপর নিয়ম–1 ঃ অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

**নিয়ম-5 :** যদি $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি প্রকৃত না হয় অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, কিন্তু $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ কেবলমাত্র y এর ফাংশন হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(y)$ হয়, তবে I. F. $= e^{\int f(y)dy}$ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণকে গুন করিলে প্রকৃত হইবে। অতঃপর নিয়ম-1 : অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ–1 :** সমাধান কর [Solve] :

$$(3x + 2y - 5)dx + (2x + 3y - 5)dy = 0$$ [চঃ বিঃ '79]

**সমাধান :** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(3x + 2y - 5)dx + (2x + 3y - 5)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = 3x + 2y - 5$ এবং $N = 2x + 3y - 5$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 2$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণটি প্রকৃত [since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ so the equation (1) is exact]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y \text{ ধ্রুবক}} Mdx + \int [N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ}]\, dy = c_1$$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} (3x + 2y - 5)dx + \int (3y - 5)dy = c_1$

বা $3\int xdx + 2y\int dx - 5\int dx + 3\int ydy - 5\int dy = c_1$

বা $3\frac{x^2}{2} + 2yx - 5x + 3\frac{y^2}{2} - 5y = c_1$

বা $3x^2 + 4xy - 10x + 3y^2 - 10y = 2c_1$

বা $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y = c.$

**উদাহরণ–2 ঃ** সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$$ [চঃ বিঃ '78]

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = x^3 + 3xy^2$ এবং $N = y^3 + 3x^2y$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 6xy \qquad \text{এবং } \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy$$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত [Since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is exact.]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y \text{ ধ্রুবক}} Mdx + \int(N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c_1$$

$$\text{বা } \int_{y \text{ ধ্রুবক}} (x^3 + 3xy^2)\, dx + \int y^3\, dy = c_1$$

$$\text{বা } \int x^3\, dx + 3y^2 \int xdx + \int y^3\, dy = c_1$$

$$\text{বা } \frac{x^4}{4} + 3y^2\frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c_1$$

$$\text{বা } x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = c.$$

**উদাহরণ–3 ঃ** সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(1 + e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0.$$

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1 + e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = 1 + e^{x/y}$ এবং $N = e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$,

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = e^{x/y}\left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$\text{বা } \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xe^{x/y}}{y^2},$$

এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = e^{x/y}\left(0 - \frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{x/y}}{y} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{x/y}}{y} + \frac{e^{x/y}}{y} - \frac{xe^{x/y}}{y^2}$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xe^{x/y}}{y^2}$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত [Since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is exact]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y\text{ ধ্রুবক}} Mdx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$$

বা $\int_{y\text{ ধ্রুবক}} (1 + e^{x/y})\, dx + \int 0\, dy = c$

বা $\int dx + \int_{y\text{ ধ্রুবক}} e^{x/y}\, dx = c$

বা $x + \frac{e^{x/y}}{1/y} = c$

বা $x + ye^{x/y} = c.$

উদাহরণ–4 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(x^2y - 2xy^2)\, dx - (x^3 - 3x^2y)\, dy = 0.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = x^2y - 2xy^2$ এবং $N = -(x^3 - 3x^2y)$.

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = x^2 - 4xy$ এবং $N = 3x^2y - x^3$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 3x^2.$$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং প্রকৃত নহে, কিন্তু সমীকরণটি সমমাত্রিক [since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact, but the equation is homogeneous]

এখানে $Mx + Ny = (x^2y - 2xy^2)x + (3x^2y - x^3)y$ .

বা $Mx + Ny = x^3y - 2x^2y^2 + 3x^2y^2 - x^3y$

বা $Mx + Ny = x^2y^2 \neq 0$.

∴ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [Integrating factor]

$$\text{I. F.} = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{x^2y^2}.$$

এখন (1) নং কে $\frac{1}{x^2y^2}$ দ্বারা গুণ করিলে সমীকরণটি প্রকৃত হইবে [Now multiplying equation (1) by $\frac{1}{x^2y^2}$ then the equation will be exact]

$$\frac{(x^2y - 2xy^2)dx}{x^2y^2} - \frac{(x^3 - 3x^2y)dy}{x^2y^2} = 0$$

বা $\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right)dy = 0$

বা $\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$. ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে $M = \frac{1}{y} - \frac{2}{x}$ এবং $N = \frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}$.

∴ $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} Mdx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx + \int \frac{3}{y}dy = c$

বা $\frac{1}{y}\int dx - 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dy}{y} = c$

বা $\frac{x}{y} - 2\ln x + 3\ln y = c$.

**উদাহরণ-5** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(1 + xy)y\,dx + (1 - xy)x\,dy = 0$. [ঢাঃ বিঃ '89]

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$(1 + xy)y\,dx + (1 - xy)x\,dy = 0 \cdots (1)$

এখানে $M = (1 + xy)y$ এবং $N = (1 - xy)x$

বা $M = y + xy^2$ এবং $N - x - x^2y$

∴ $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 2xy$.

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে। কিন্তু সমীকরণটি $f(xy)y\,dx + \varphi(xy)x\,dy = 0$ আকারের। [since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact. But the equation is of the form $f(xy)y\,dx + \varphi(xy)x\,dy = 0$]

$\therefore\ Mx - Ny = (y + xy^2)x - (x - x^2y)y$

বা $Mx - Ny = xy + x^2y^2 - xy + x^2y^2$

বা $Mx - Ny = 2x^2y^2 \neq 0$ .

$\therefore$ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক I. F. $= \frac{1}{Mx - Ny}$

বা I. F. $= \frac{1}{2x^2y^2}$ .

(1) নং কে $\frac{1}{2x^2y^2}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying (1) by $\frac{1}{2x^2y^2}$ we get]

$$\frac{(1 + xy)y}{2x^2y^2}dx + \frac{(1 - xy)x}{2x^2y^2}dy = 0$$

বা $\left(\frac{1 + xy}{2x^2y}\right)dx + \left(\frac{1 - xy}{2xy^2}\right)dy = 0$

বা $\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$ ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে[Here] $M = \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}$ এবং $N = \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}$ .

$\therefore \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} M\,dx + \int(N$ এর $x$ বর্জিত পদ$)dy = c$

বা $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}}\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \int\left(-\frac{1}{y}\right)dy = c$

বা $\frac{1}{y}\int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x} - \int\frac{dy}{y} = c$

বা $\frac{1}{y}\left(-\frac{1}{x}\right) + \ln x - \ln y = c$

$\therefore -\frac{1}{xy} + \ln x - \ln y = c.$

**উদাহরণ–6 ঃ** সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)dx + 3(x + xy^2)dy = 0.$$

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)dx + 3(x + xy^2)dy = 0, \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = 12y + 4y^3 + 6x^2$ এবং $N = 3x(1 + y^2)$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 12 + 12y^2 \qquad \text{এবং} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3(1 + y^2).$$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে [since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact]

এখন [Now] $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (12 + 12y^2) - (3 + 3y^2)$

বা $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 9(1 + y^2)$

$$\therefore \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{9(1 + y^2)}{3x(1 + y^2)}$$

বা $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{3}{x} = f(x)$

$$\therefore \text{I. F.} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3,$$

(1) নং কে $x^3$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying (1) by $x^3$ we get]

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)\, x^3\, dx + 3(x + xy^2)x^3\, dy = 0$$

বা $(12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5)dx + 3(x^4 + x^4y^2)dy = 0$ ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে [Here] $M = 12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5$ এবং $N = 3(x^4 + x^4y^2)$.

$$\therefore \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} Mdx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$$

বা $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} (12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5)dx + \int 0\, dy = c$

বা $12y \int x^3 dx + 4y^3 \int x^3 dx + 6 \int x^5\, dx = c$

বা $12y \frac{x^4}{4} + 4y^3 \frac{x^4}{4} + 6\frac{x^6}{6} = c$

$$\therefore 3x^4 y + x^4 y^3 + x^6 = c.$$

**উদাহরণ–7 ঃ** সমাধান কর [Solve]

$y\ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0.$

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ[Given equation is]

$y\ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0 \cdots (1)$

এখানে [Here] $M = y\ln y$ এবং $N = x - \ln y$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = y.\frac{1}{y} + 1.\ln y$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 1.$

বা $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + \ln y$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে [Since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact]

এখন [Now] $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 1 - \ln y$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -\ln y$

$\therefore \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-\ln y}{y\ln y}$

বা $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{1}{y} = f(y)$

$\therefore$ I. F. $= e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = e^{\ln y^{-1}} = \frac{1}{y}.$

(1) নং কে $\frac{1}{y}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying (1) by $\frac{1}{y}$ we get]

$$\left(\frac{y\ln y}{y}\right)dx + \left(\frac{x - \ln y}{y}\right)dy = 0$$

বা $\ln y\, dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{\ln y}{y}\right)dy = 0$

এখানে [Here] $M = \ln y$ এবং $N = \frac{x}{y} - \frac{\ln y}{y}$

$\therefore \int_{y \text{ ধ্রুবক}} M dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} \ln y\, dx - \int \frac{\ln y}{y} dy = c$

বা $\ln y \int dx - \int \ln y\, d(\ln y) = c$

$\therefore x\ln y - \frac{1}{2}(\ln y)^2 = c.$

## প্রশ্নমালা–2(D)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0$

(ii). $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$

(iii). $(2x + 3y - 5)dy + (3x + 2y - 5)dx = 0$ [চঃ বিঃ '77; ঢাঃ বিঃ '78]

(iv). $(y - x + 1)dx + (x + y + 5)dy = 0$ [চঃ বিঃ '79]

(v). $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$ [চঃ বিঃ '72]

(vi). $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ [রাঃ বিঃ '79]

(vii). $(y + x + 5)dx = (y - x + 1)dy$ [ঢাঃ বিঃ '79]

(viii). $(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$ [রাঃ বিঃ '82]

(ix). $(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$ [রাঃ বিঃ '82, '84, '98]

(x). $(2x + y - 1)dy - (x - 2y + 5)dx = 0$ [রাঃ বিঃ '81]

(xi). $(2x + y + 3)dx + (x - 2y + 9)dy = 0$ . [ঢাঃ বিঃ সঃ '90]

2(i). $(x^2 - ay)dx + (y^2 - ax)dy = 0$ [ঢাঃ বিঃ '84]

(ii). $(x^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0$

(iii). $(x^3 + 3xy^2) dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$

(iv). $(y^4 + 4x^3y + 3x)dx + (x^4 + 4xy^3 + y + 1)dy = 0$

(v). $x(x^2 + y^2 - a^2)dx + y(x^2 - y^2 - b^2)dy = 0$

(vi). $(x^2 - 2xy + 3y^2)dx + (4y^3 + 6xy - x^2)dy = 0$

(vii). $(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$

(viii). $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y - 4xy - 2x^2)dy = 0$ .

3(i). $(e^y + 1) \cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$

(ii). $(x^2 - 2xy^2 + y^4)dx - (2x^2y - 4xy^3 + \sin y)dy = 0$

(iii). $(y + x \sin x)dx + (x - 2e^y)dy = 0$

(iv). $(\tan y - 3x^2)dx + x \sec^2 y\, dy = 0$

(v). $(\sin x \cos y + e^{2x})dx + (\cos x \sin y + \tan y)dy = 0$

(vi). $(2xy + y - \tan y)dx + (x^2 - x \tan^2 y + \sec^2 y)dy = 0.$

4(i). $xy\,dx - (x^2 + y^2)dy = 0$

(ii). $(x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0$

(iii). $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$

(iv). $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

(v). $(y^3 - 2x^2y)\,dx + (2xy^2 - x^3)dy = 0$

(vi). $(x^2y + y^3)dx - (x^3 + 2xy^2)dy = 0$

(vii). $y^2(ydx + 2xdy) - x^2(2ydx + xdy) = 0$ [ঢাঃ বিঃ '71]

(viii). $x^2y\,dx - (x^3 + y^3)dy = 0$

(ix). $(x^4 + y^4)dx - xy^3\,dy = 0$.

**5**(i). $(xy + 2x^2y^2)y\,dx + (xy - x^2y^2)x\,dy = 0$

(ii). $(x^2y^2 + xy)y\,dx + (x^2y^2 - 1)x\,dy = 0$

(iii). $(2y + 3xy^2)dx + (x + 2x^2y)dy = 0$

(iv). $(x^2y^2 + 2)y\,dx + (2 - 2x^2y^2)x\,dy = 0$

(v). $(2xy + 1)y\,dx + (1 + 2xy - x^3y^3)x\,dy = 0$

(vi). $(x^2y^2 + xy + 1)y\,dx - (x^2y^2 - xy + 1)x\,dy = 0$

(vii). $(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1)y\,dx + (x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1)x\,dy = 0$

(viii). $(xy\sin xy + \cos xy)y\,dx + (xy\sin xy - \cos xy)x\,dy = 0$.

**6**(i). $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\,dy = 0$

(ii). $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xy\,dy = 0$

(iii). $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$

(iv). $(x^3 - 2y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

(v). $\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)dx + \frac{1}{4}(x + xy^2)dy = 0$

(vi). $(x^3 + xy^4)dx + 2y^3\,dy = 0$

(vii). $[y^2(x + 1) + y]dx + (2xy + 1)dy = 0$ [জাঃ বিঃ সঃ '97]

**7**(i). $(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$

(ii). $(3x^2y^4 + 2xy)dx + (2x^3y^3 - x^2)dy = 0$.

## উত্তরমালা

**1**(i). $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 4y = c$

(ii). $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(iii). $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y = c$

(iv). $y^2 + 2xy - x^2 + 2x + 10y = c$

(v). $x^2 - 2xy - y^2 = c$

(vi). $x^2 - xy + y^2 + x - y = c$

(vii). $x^2 + 2xy - y^2 + 10x - 2y = c$

(viii). $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 5y = c$

(ix). $2x^2 + 3xy + y^2 + x + y = c$

(x). $x^2 - 4xy - y^2 + 10x + 2y = c$

(xi). $x^2 - y^2 + xy + 3x + 9y = c$.

**2**(i). $x^3 + y^3 - 3axy = c$

(ii). $x^3 - y^3 - 3xy\,(x + y) = c$

(iii). $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = c$

(iv). $2xy^4 + 2x^4y + 3x^2 + y^2 + 2y = c$

(v). $x^4 + 2x^2y^2 - y^4 - 2a^2x^2 - 2b^2y^2 = c$

(vi). $x^3 - 3x^2y + 9xy^2 + 3y^4 = c$

(vii). $x^4 + 6xy + y^2 - 2y = c$

(viii). $x^3 + y^3 - 6xy\,(x + y) = c$.

**3**(i). $(e^y + 1)\sin x = c$

(ii). $x^3 - 3x^2y^2 + 3xy^4 + 3\cos y = c$

(iii). $xy - x\cos x + \sin x - 2e^y = c$

(iv). $x\tan y - x^3 = c$

(v). $-\cos x.\cos y + \frac{1}{2}e^{2x} + ln(\sec y) = c$

(vi). $x^2y + xy - x\tan y + \tan y = c$.

**4**(i). $2\ln y - \frac{x^2}{y^2} = c$  (ii). $2x^2 \ln x = 2cx^2 + y^2$

(iii). $\ln y = c + \frac{y}{x}$  (iv). $(x - y)y^2 = c(x + y)$

(v). $x^2y^2(y^2 - x^2) = c$  (vi). $\ln\left(\frac{y^2}{x}\right) = c + \frac{x^2}{2y^2}$

(vii). $x^2y^2 (y^2 - x^2) = c$  (viii). $\frac{x^3}{3y^3} = \ln(cy)$

(ix). $\ln x - \frac{y^4}{4x^4} = c$.

**5**(i). $\ln\left(\frac{x^2}{y}\right) = c + \frac{1}{xy}$  (ii). $xy - \ln y = c$

(iii). $x^2y (1 + xy) = c$  (iv). $\ln\left(\frac{x}{y^2}\right) = c + \frac{1}{x^2y^2}$

(v). $\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{3x^3y^3} + \ln y = c$

(vi). $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}(xy) = c$

(vii). $xy - \frac{1}{xy} - \ln y^2 = c$  (viii). $x = cy\cos(xy)$.

**6**(i). $3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = c$

(ii). $x^2 - y^2 = cx + 1$  (iii). $(x^2 + y^2)e^x = c$

(iv). $x + \frac{y^2}{x^2} = c$  (v). $3x^4y + x^4y^3 + x^6 = c$

(vi). $(x^2 + y^4 - 1)e^{x^2} = c$  (vii). $(xy^2 + y)\, e^x = c$.

**7**(i). $xy^2 + 2x + y^4 = cy^2$  (ii). $x^3 y^3 + x^2 = cy$.

---x---

Linear

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## পঞ্চম পরিচ্ছেদ

## রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ

## [LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION]

**2-5.1 ঃ** রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ **[Linear differential equation] ঃ**

যদি P এবং Q কেবলমাত্র x এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক হয়, তবে $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ এই আকারের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে প্রথম ক্রম রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণকে $e^{\int Pdx}$ দ্বারা গুন করিয়া সমাধান করিতে হয়।

[If P and Q are only functions of x or constants then the differential equation of the form $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ is called first order linear differential equation. To solve this equation multiply by $e^{\int Pdx}$.

**2-5.2 ঃ** উপপাদ্য ঃ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের সাধারণ সমাধানের একটি সূত্র নির্ণয় কর যেখানে P এবং Q কেবলমাত্র x এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক।

[Find a rule of general solution of differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ where P and Q are only functions of x or constants]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \cdots (1)$$

মনে করি, (1) নং সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক R. কাজেই (1) নং কে R দ্বারা গুন করিয়া পাই [Let R be the integrating factor of (1), so multiplying (1) by R we get]

$$R\frac{dy}{dx} + PRy = QR \cdots (2)$$

এখানে R কে এমনভাবে নির্ধারন করা হইয়াছে যেন [Here we choose R such that]

(2) নং এর বামপক্ষ = $\frac{d}{dx}(yR)$ হয়

[Left hand side of (2) = $\frac{d}{dx}(yR)$]

$$\text{বা } R\frac{dy}{dx} + PRy = R\frac{dy}{dx} + y\frac{dR}{dx}$$

$$\text{বা } PRy = y\frac{dR}{dx}$$

$$\text{বা } PR = \frac{dR}{dx}$$

$$\text{বা } Pdx = \frac{dR}{R}$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেটিং করি অর্থাৎ [Integrating both sides, i. e.]

$$\int \frac{dR}{R} = \int P\,dx$$

$$\text{বা } \ln R = \int P\,dx$$

$$\text{বা } \ln R = \ln e^{\int Pdx}$$

$$\text{বা } R = e^{\int Pdx}.$$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int P\,dx}$ [$\therefore$ Integrating factor of (1) is $e^{\int P\,dx}$]

এখন (1) নং কে $e^{\int P\,dx}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Now multiplying both sides of (1) by $e^{\int P\,dx}$ we get ]

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + Py\,e^{\int Pdx} = Q\,e^{\int Pdx}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}[y\,e^{\int Pdx}] = Q\,e^{\int Pdx}$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating both sides w. r. to x we get]

$$y\,e^{\int Pdx} = \int Q\,e^{\int Pdx}\,dx + c.$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [This is the required solution]

**2-5.3 ঃ অনুসিদ্ধান্ত ঃ** যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$ এই আকারে থাকে যখন $P_1$ এবং $Q_1$ কেবলমাত্র y এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক হয় তবে এইক্ষেত্রে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int P_1\,dy}$. এবং ইহার সমাধান $xe^{\int P_1\,dy} = \int Q_1\,e^{\int P_1\,dy}\,dy + c.$

[Cor : If the differential equation of the form $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$ where $P_1$ and $Q_1$ are only functions of y or constants, then in this case the integrating factor of the differential equation is $e^{\int P_1 dy}$. and its solution is $xe^{\int P_1 dy} = \int Q_1 e^{\int P_1 dy} dy + c.$]

**2-5.4 ঃ বার্নোলীর সমীকরণ [Bernoulli's equation] ঃ**

যদি P এবং Q কেবলমাত্র x এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক হয় তবে $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$; $n \neq 1$ এই আকারের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে বার্নোলীর সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণকে $y^n$ দ্বারা ভাগ করিয়া অতি সহজেই রৈখিক সমীকরণে রূপান্তরিত করা যায়।

[If P and Q are only functions of x or constants, then the differential equation of the form $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$; $n \neq 1$ is called Bernoulli's equation. Dividing this equation by $y^n$, it can be easily reduced to linear differential equation]

**2-5.5 ঃ উপপাদ্য ঃ** $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$; $n \neq 1$ বার্নোলীর সমীকরণের সাধারণ সমাধান বাহির কর যেখানে P এবং Q কেবলমাত্র x এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক।

[Find the general solution of Bernoulli's equation $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$; $n \neq 1$ where P and Q are only functions of x or constants.]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

উভয় পক্ষকে $y^n$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই [Dividing both sides by $y^n$ we get]

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{n-1}}P = Q$$

বা $y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-n+1}P = Q \cdots (1)$

ধরি [we put] $y^{-n+1} = v$ তবে [then]

$$(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

বা $y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} \cdots (2)$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}+Pv=Q \quad \text{বা} \frac{dv}{dx}+(1-n)Pv=(1-n)Q \cdots (3)$$

ইহা রৈখিক সমীকরণ [It is a linear equation] I. F. $= e^{\int(1-n)Pdx}$.

(3) নং এর উভয় পক্ষকে $e^{\int(1-n)P\,dx}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying both sides of (3) by $e^{\int(1-n)P\,dx}$ we get]

$$e^{\int(1-n)Pdx}\frac{dv}{dx}+(1-n)Pv\,e^{\int(1-n)Pdx}=(1-n)Q\,e^{\int(1-n)Pdx}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}[ve^{\int(1-n)Pdx}]=(1-n)\,Qe^{\int(1-n)Pdx}$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$ve^{\int(1-n)Pdx}=\int(1-n)Q\,e^{\int(1-n)Pdx}\,dx+c.$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [This is the required solution]

**2-5.6 ঃ কার্য্য পদ্ধতি [Working rule] ঃ**

(i). প্রথমে সমীকরণকে $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ আকারে সাজাইতে হইবে। এখানে $\frac{dy}{dx}$ এর সহগ 1 [এক] এবং মধ্যপদ Py আকারে থাকিবে।

(ii). মধ্য পদ y এর সহগ P দিয়া ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক I. F. তৈরী করিতে হয়। যেমন I. F. $= e^{\int Pdx}$.

(iii). এখন প্রদত্ত সমীকরণকে ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int Pdx}$ দ্বারা গুণ করার পর x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

$$\text{যেমন ঃ } e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+Py\,e^{\int Pdx}=Qe^{\int Pdx} \ldots (1)$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}[ye^{\int Pdx}]=Qe^{\int Pdx} \ldots (2)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$y\,e^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}\,dx+c$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [This is the required solution]

**নোট ঃ** প্রদত্ত সমীকরণকে ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক I. F. দ্বারা গুন করার সময় (1) নং এর পরিবর্তে (2) নং সমীকরণ লিখিব। কারণ (2) নং এর বামপক্ষকে অন্তরীকরণ করিলে (1) নং এর বামপক্ষ পাওয়া যায়।

# উদাহরণমালা

**উদাহরণ-1** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

(i). $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=1$ [ঢাঃ বিঃ '81]

(ii). $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x$ [ঢাঃ বিঃ '85]

(iii). $(2+y^2)dx-(xy+2y+y^3)dy=0$ [ঢাঃ বিঃ '82]

**সমাধান-(i)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=1$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx}-\frac{xy}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2} \quad \cdots (1)$$

∴ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [Integrating factor] $I.F=e^{-\int\frac{xdx}{1-x^2}}$

বা $I.F=e^{\frac{1}{2}\int\frac{-2xdx}{1-x^2}}=e^{\frac{1}{2}ln(1-x^2)}=e^{ln(1-x^2)^{1/2}}$

বা $I.F.=(1-x^2)^{1/2}$.

(1) নং এর উভয় পক্ষকে $\sqrt{1-x^2}$ দ্বারা গুন করি [Mutiplying both sides of (1) by $\sqrt{1-x^2}$]

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}-\frac{xy\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

$$\text{বা } \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}[y\sqrt{1-x^2}]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$y\sqrt{1-x^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

$$\text{বা } y\sqrt{1-x^2}=\sin^{-1}x+c.$$

**সমাধান-(ii) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx}+\frac{y}{1+x^2}=\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} \cdots (1)$$

$$\therefore \text{ I. F.} = e^{\int\frac{dx}{1+x^2}} = e^{\tan^{-1}x}$$

(1) নং এর উভয় পক্ষকে $e^{\tan^{-1}x}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying both sides of (1) by $e^{\tan^{-1}x}$ we get]

$$\frac{d}{dx}[y\,e^{\tan^{-1}x}]=\frac{\tan^{-1}x.\ e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করি [Integrating this w. r. to x ]

$$ye^{\tan^{-1}x}=\int\frac{\tan^{-1}x.\ e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx \cdots (2)$$

ডানপক্ষে ধরি [In R. H. side we put] $\tan^{-1}x = z$

$$\text{তবে [then] } \frac{dx}{1+x^2}=dz$$

$$\therefore\ (2) \Rightarrow y e^{\tan^{-1}x}=\int ze^z\,dz$$

$$\text{বা } ye^{\tan^{-1}x}=z\int e^z\,dz-\int\left\{\frac{dz}{dz}\int e^z\,dz\right\}dz$$

$$\text{বা } ye^{\tan^{-1}x}=ze^z-\int 1e^z\,dz$$

$$\text{বা } ye^{\tan^{-1}x}=ze^z-e^z+c$$

$$\text{বা } ye^{\tan^{-1}x}=(z-1)e^z+c$$

$$\text{বা } ye^{\tan^{-1}x}=(\tan^{-1}x-1)\,e^{\tan^{-1}x}+c$$

$$\therefore\ y=\tan^{-1}x-1+ce^{-\tan^{-1}x}.$$

**সমাধান-(iii) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Giv equation is]

$$(2+y^2)dx=(xy+2y+y^3)dy$$

$$\text{বা } \frac{dx}{dy}=\frac{xy+2y+y^3}{2+y^2}$$

$$\text{বা } \frac{dx}{dy}=\frac{xy}{2+y^2}+\frac{y(2+y^2)}{2+y^2}$$

$$\text{বা } \frac{dx}{dy}-\frac{yx}{2+y^2}=y \cdots (1)$$

$$\therefore \text{I. F.} = e^{-\int \frac{y dy}{2+y^2}} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2y dy}{2+y^2}} = e^{-\frac{1}{2} ln(2+y^2)}$$

বা $\text{I. F.} = e^{ln(2+y^2)^{-1/2}} = (2+y^2)^{-1/2}$

বা $\text{I. F.} = \dfrac{1}{\sqrt{2+y^2}}$

(1) নং এর উভয় পক্ষকে $\dfrac{1}{\sqrt{2+y^2}}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both sides of (1) by $\dfrac{1}{\sqrt{2+y^2}}$ we get]

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{x}{\sqrt{2+y^2}}\right] = \frac{y}{\sqrt{2+y^2}}$$

ইহাকে y এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করি [Integrating this w. r. to y ]

$$\frac{x}{\sqrt{2+y^2}} = \int \frac{y\, dy}{\sqrt{2+y^2}}$$

বা $\dfrac{x}{\sqrt{2+y^2}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{2y\, dy}{\sqrt{2+y^2}}$

বা $\dfrac{x}{\sqrt{2+y^2}} = \dfrac{1}{2} . 2\sqrt{2+y^2} + c$

$\therefore x = 2 + y^2 + c\sqrt{2+y^2}$ .

**উদাহরণ-2 ঃ** সমাধান কর [Solve] ঃ

(i). $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x} \sin 2y = x^3 \cos^2 y$ **[রাঃ বিঃ '81]**

(ii). $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 e^x$. **[ঢাঃ বিঃ '82, '88]**

**সমাধান-(i) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

বা $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x} 2\sin y \cos y = x^3 \cos^2 y$

বা $\dfrac{1}{\cos^2 y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}\dfrac{2\sin y \cos y}{\cos^2 y} = x^3$

বা $\sec^2 y \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2\tan y}{x} = x^3 \ldots (1)$

ধরি [we put] $\tan y = t$ তবে [then] $\sec^2 y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dt}{dx} + \frac{2t}{x} = x^3 \cdots (2)$

$\therefore$ I. F. $= e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

(2) নং এর উভয় পক্ষকে $x^2$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying both sides of (2) by $x^2$ we get]

$$\frac{d}{dx}[tx^2] = x^5$$

ইহাকে $x$ এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$tx^2 = \frac{x^6}{6} + \frac{c}{6}$$

বা $x^2 \tan y = \frac{x^6}{6} + \frac{c}{6}$

$\therefore\ 6x^2 \tan y = x^6 + c.$

**সমাধান-(ii)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2 e^x$$

বা $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = e^x \cdots (1)$

ধরি [we put] $\frac{1}{y} = z$ তবে [then] $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx} \cdots (2)$

$\therefore (1) \Rightarrow -\frac{dz}{dx} + z = e^x$

বা $\frac{dz}{dx} - z = -e^x \cdots (3)$

$\therefore$ I. F. $= e^{-\int 1\, dx} = e^{-x}$

(3) নং এর উভয় পক্ষকে $e^{-x}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying both sides of (2) by $e^{-x}$ we get]

$$\frac{d}{dx}[ze^{-x}] = -e^x . e^{-x}$$

বা $\frac{d}{dx}[ze^{-x}] = -1$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$ze^{-x} = -x + c$$

বা $\frac{1}{y} \cdot e^{-x} = -x + c$

বা $\frac{1}{ye^x} + x = c$

বা $1 + xye^x = cye^x$.

## প্রশ্নমালা-2(E)

সমাধান কর [Solve] :

1(i). $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$ [রাঃ বিঃ '80]

(ii). $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$ [চঃ বিঃ '77, '80, '84]

(iii). $(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ [চঃ বিঃ '79]

(iv). $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ [চঃ বিঃ '75]

(v). $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2\cos x$ [রাঃ বিঃ '80]

(vi). $\frac{dy}{dx} + y \sec x = \cos x$ [চঃ বিঃ '78]

(vii). $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$ [চঃ বিঃ '75]

(viii). $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$ [চঃ বিঃ '80, '82]

(ix). $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$ [ঢাঃ বিঃ '74]

(x). $\frac{dy}{dx} + y = x$ [চঃ বিঃ '81]

(xi). $\frac{dy}{dx} + \frac{(1 - 2x)y}{x^2} = 1$ [চঃ বিঃ '82, '85]

(xii). $\frac{dy}{dx} - y \cot x = \operatorname{cosec} x$

(xiii). $x(x - 1) \frac{dy}{dx} - y = x^2(x - 1)^2$

(xiv). $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\,lnx} = \frac{2}{x}$

(xv). $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 lnx$

(xvi). $(x^3 - x)\frac{dy}{dx} - (3x^2 - 1)y = x^5 - 2x^3 + x$

(xvii). $(1 + x)\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{1 + x + x^2}{(1 + x)^3}$

(xviii). $x\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{dy}{dx} + 4$

(xix). $\frac{dy}{dx} - 2y\cos x = -2\sin 2x$

(xx). $y\,lny\,dx + (x - lny)\,dy = 0$

(xxi). $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + xy = x^2$ [ঢাঃ বিঃ '83]

(xxii). $(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$

(xxiii). $(3xy - x^2)dx + x^2\,dy = 0$

(xxiv). $x\frac{dy}{dx} - 2y = x^2 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(xxv). $(1 + y^2)dx + (x - e^{-\tan^{-1}y})\,dy = 0$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '89, '92]

(xxvi). $x\frac{dy}{dx} - 2y = (x - 2)e^x$ [জাঃ বিঃ সঃ '96]

(xxvii). $x\frac{dy}{dx} + (x - 2)y = 3x^3 e^{-x},\ x > 0$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '92]

**2**(i). $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3}$ [চঃ বিঃ '74]

(ii). $\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1 + x} = (1 + x)\,e^x \sec y$ [রাঃ বিঃ '78]

(iii). $x\frac{dy}{dx} + y = y^2\,lnx$

(iv). $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$ [রাঃ বিঃ '75]

(v). $3\frac{dy}{dx} - y\cot x + 2e^x y^4 = 0$ [রাঃ বিঃ '78]

(vi). $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$ [ঢাঃ বিঃ '77]

(vii). $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+1=y^2$ [ঢাঃ বিঃ '77]

(viii). $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\ln y=\frac{y(\ln y)^2}{x^2}$

(ix). $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\tan y=\frac{1}{x^2}\tan y\sin y$

(x). $y(2xy+e^x)\,dx-e^x\,dy=0$

(xi). $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0$

(xii). $x^3\frac{dy}{dx}-x^2y=-y^4\cos x$

(xiii). $\frac{dy}{dx}=x^3y^3-xy$

(xiv). $\frac{dy}{dx}+xy=xy^2$

(xv). $\frac{dy}{dx}(x^2y^3+xy)=1$

(xvi). $\frac{dy}{dx}=1-x(y-x)-x^3(y-x)^3$

(xvii). $2\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$

(xviii). $(x-y^2)\,dx+2xy\,dy=0$

(xix). $\frac{dy}{dx}-2y\tan x=y^2\tan^2 x$

(xx). $x\frac{dy}{dx}-2y=xy^4$

(xxi). $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$ [চঃ বিঃ '86; ঢাঃ বিঃ সঃ '90]

(xxii). $\frac{dy}{dx}+1=e^{x-y}$ [চঃ বিঃ '83]

(xxiii). $\sec^2 y\frac{dy}{dx}+2x\tan y=x^3$

(xxiv). $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=xy^2$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '91]

(xxv). $xy^2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=a^2$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '89]

(xxvi). $\frac{dy}{dx}+y=xy^3$ [জাঃ বিঃ সঃ '97]

# উত্তরমালা

**1**(i). $ye^{x^2} = x + c$

(ii). $y = \tan x - 1 + ce^{-\tan x}$

(iii). $x = \tan^{-1}y - 1 + ce^{-\tan^{-1}y}$

(iv). $4xy = x^4 + c$

(v). $2y \sin x + \cos 2x = c$

(vi). $y(\sec x + \tan x) = x - \cos x + c$

(vii). $3y(1 + x^2) = 4x^3 + c$

(viii). $ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

(ix). $y \sec x = \tan x + c$

(x). $y - x + 1 = ce^{-x}$

(xi). $\frac{y}{x^2} = 1 + ce^{1/x}$

(xii). $y \operatorname{cosec} x + \cot x = c$

(xiii). $\frac{xy}{x-1} = \frac{1}{3}x^3 + c$

(xiv). $y\ln x = (\ln x)^2 + c$

(xv). $yx^2 = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + c$

(xvi). $\frac{y}{x^3 - x} = \ln x + c$

(xvii). $y(1 + x)^3 = \ln(1 + x) + \frac{x^2}{2} + c$

(xviii). $y(x - 1)^2 = 2(x - 1)^2 + c$

(xix). $y = 2\sin x + 1 + ce^{2\sin x}$

(xx). $x \ln y = \frac{1}{2}(\ln y)^2 + c$

(xxi). $y\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c$

(xxii). $x = y^3 + cy$

(xxiii). $yx^3 = \frac{x^4}{4} + c$

(xxiv). $\frac{y}{x^2} = \ln x + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x^2} + c$

(xxv). $xe^{\tan^{-1}y} = \tan^{-1}y + c$

(xxvi). $y = e^x + cx^2$

(xxvii). $ye^x = 3x^3 + cx^2$

**2**(i). $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3x^2} + cx^4$

(ii). $\sin y = (1 + x)(e^x + c)$

(iii). $y + y\ln x + cxy = 1$

(iv). $e^{x^2} = y^2(2x + c)$

(v). $\sin x = y^3e^x(\sin x - \cos x) + cy^3$

(vi). $\frac{1}{xy} + \ln x = c$

(vii). $\frac{1}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2} + c$

(viii). $\frac{1}{x\ln y} = \frac{1}{2x^2} + c$ (ix). $2x = (1 + 2cx^2)\sin y$

(x). $y(x^2 + c) + e^x = 0$ (xi). $e^x(x^2 + y^2) = c$

(xii). $x^3 = y^3(3\sin x + c)$ (xiii). $\frac{1}{y^2} = 1 + x^2 + ce^{x^2}$

(xiv). $\frac{1}{y} = ce^{x^2/2} + 1$

(xv). $\frac{1}{x} = (2 - y^2) - ce^{-y^2/2}$

(xvi). $(y - x)^{-2} = ce^{x^2} - (1 + x^2)$

(xvii). $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{c}{\sqrt{x}}$

(xviii). $\frac{y^2}{x} + \ln x = c$

(xix). $-\frac{\sec^2 x}{y} = \frac{\tan^3 x}{3} + c$

(xx). $-\frac{x^6}{y^3} = \frac{3x^7}{7} + c$

(xxi). $\frac{\sqrt{y}}{(x^2 - 1)^{1/4}} = \frac{(x^2 - 1)^{3/4}}{3} + c$

(xxii). $e^{x+y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

(xxiii). $e^{x^2}\tan y = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + c$

(xxiv). $\sqrt{x^2 - 1} = y\sqrt{x^2 - 1} + cy$

(xxv). $2x^3y^3 - 3a^2x^2 = c$

(xxvi). $\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$.

Exam

# চতুর্থ অধ্যায়

## ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ

## [LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS]

**4-1.** ঃ যদি $p_0\frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_ny = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের n সংখ্যক অনির্ভরশীল সমাধান $e^{m_1x}, e^{m_2x}, e^{m_3x}, \cdots, e^{m_nx}$ হয়, তবে উহার সাধারণ সমাধান।

$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x} + c_3 e^{m_3x} + \cdots + c_n e^{m_nx}$$

যখন $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ অবাধ ধ্রুবক।

[If $e^{m_1x}, e^{m_2x}, e^{m_3x}, \cdots, e^{m_nx}$ be the n independent solutions of the differential equation $p_0\frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_ny = 0$ then its general solution is

$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x} + c_3 e^{m_3x} + \cdots + c_n e^{m_nx}$$

where $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ are arbitrary constants]

**4-2** ঃ উপপাদ্য ঃ যদি $D^2y + p_1 Dy + p_2y = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের দুইটি অনির্ভরশীল সমাধান $y = e^{m_1x}$ এবং $y = e^{m_2x}$ হয়, তবে উহার সাধারণ সমাধান $y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$ যেখানে $c_1, c_2$ অবাধ ধ্রুবক এবং $D = \frac{d}{dx}$.

[If the differential equation $D^2y + p_1 Dy + p_2y = 0$ has two independent solutions $y = e^{m_1x}$ and $y = e^{m_2x}$ then its general solution is $y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$ where $c_1, c_2$ are arbitrary constants and $D = \frac{d}{dx}$.]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$D^2y + p_1Dy + p_2y = 0 \cdots (1)$$

যেহেতু (1) এর সমাধান $y = e^{m_1x}$ এবং $y = e^{m_2x}$ কাজেই ইহারা (1) নং কে সিদ্ধ করিবে, অর্থাৎ [Since $y = e^{m_1x}$ and $y = e^{m_2x}$ be the solutions of (1), so they satisfy (1), that is]

$$D^2 e^{m_1x} + p_1 De^{m_1x} + p_2 e^{m_1x} = 0 \cdots (2)$$

এবং $D^2 e^{m_2x} + p_1 De^{m_2x} + p_2 e^{m_2x} = 0 \cdots (3)$

এখন [Now] (2) × $c_1$ + (3) × $c_2$ ⇒

$$c_1 D^2e^{m_1x} + c_1 p_1 De^{m_1x} + c_1 p_2 e^{m_1x} + c_2 D^2 e^{m_2x} + c_2 p_1 De^{m_2x} + c_2p_2 e^{m_2x} = 0$$

বা $c_1 D^2 e^{m_1x} + c_2 D^2 e^{m_2x} + p_1(c_1 De^{m_1x} + c_2 De^{m_2x}) + p_2 (c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) = 0$

বা $D^2 c_1 e^{m_1x} + D^2 c_2 e^{m_2x} + p_1 (Dc_1 e^{m_1x} + Dc_2 e^{m_2x}) + p_2 (c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) = 0$

বা $D^2 (c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) + p_1 D(c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) + p_2 (c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) = 0 \cdots (4)$

(4) নং হইতে দেখা যায় যে $c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$ দ্বারা (1) নং সমীকরণ সিদ্ধ হয়, কাজেই (1) নং এর সাধারণ সমাধান $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$. [From (4) we see that the equation (1) is satisfied by $c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$ . so general solution of (1) is $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$.]

নোট ঃ অনুরুপভাবে তৃতীয় এবং চতুর্থ ক্রমের ক্ষেত্রেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়। [Similarly the theorem is proved in the case of third and fourth order].

**4-3 ঃ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation] ঃ**

মনেকরি, ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি [Let the differential equation be]

$$D^2y + p_1 Dy + p_2y = 0 \cdots (1)$$

মনে করি, (1) নং এর সমাধান $y = e^{mx}$ কাজেই উহা (1) নং কে সিদ্ধ করিবে, অর্থাৎ [Let the solution of (1) be $y = e^{mx}$. so it will satisfy (1), that is]

$$D^2 e^{mx} + p_1 De^{mx} + p_2 e^{mx} = 0$$

বা $m^2e^{mx} + p_1 me^{mx} + p_2 e^{mx} = 0$

বা $(m^2 + p_1m + p_2) e^{mx} = 0$

যেহেতু $e^{mx} \neq 0$, কাজেই $m^2 + p_1m + p_2 = 0$. এই সমীকরণকে সহায়ক সমীকরণ বলা হয়। অর্থাৎ $e^{mx}$ এর সহগ শুন্য ধরিলে সহায়ক সমীকরণ পাওয়া যায়। যেহেতু $m^2 + p_1m + p_2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণ, কাজেই ইহার দুইটি মূল আছে। অর্থাৎ m এর দুইটি মান থাকিবে। [Since $e^{mx} \neq 0$ so $m^2 + p_1m + p_2 = 0$ this equation is called Auxiliary equation. That is equating to zero the coefficient of $e^{mx}$ ~~to~~ obtain Auxiliary equation. Since $m^2 + p_1m + p_2 = 0$ is quadratic equation. so it has two roots. That is m has two values.]

**4-4 ঃ নিম্নের তিনটি অবস্থা স্মরণ রাখা প্রয়োজন [Following three cases should be remember] ঃ**

**প্রথম অবস্থা [Case–I] ঃ** মনে করি, মূলগুলি বাস্তব এবং অসমান

যদি $m = \alpha, \beta$ হয় তবে উহার সাধারণ সমাধান $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$

যদি $m = 2, -3$ হয়, তবে $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

Let the roots are real and unequal.

If $m = \alpha, \beta$ then its general solution is $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$

If $m = 2, -3$ then $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$.]

**দ্বিতীয় অবস্থা [Case–II] ঃ** মনেকরি, মূলগুলি বাস্তব এবং সমান। [Let the roots are real and equal.]

যদি $m = \alpha, \alpha$ হয়, তবে উহার সাধারণ সমাধান $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{\alpha x}$
[If $m = \alpha, \alpha$ then its general solution is $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{\alpha x}$]

**প্রমাণ ঃ** মনেকরি, ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \alpha$ তবে সমীকরণকে নিম্নরুপে লিখা যায় [Let $\alpha, \alpha$ be the roots of differential equation, then the differential equation can be written in the following form]

$$(D - \alpha)(D - \alpha)\, y = 0 \text{ যখন [when] } D = \frac{d}{dx}$$

বা $D^2 y - 2\alpha\, Dy + \alpha^2 y = 0 \cdots (1)$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান [Let the trial solution of (1) be]

$$y = e^{\alpha x} v \cdots (2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\alpha x}\frac{dv}{dx} + v\alpha\, e^{\alpha x}$$

এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{\alpha x}\dfrac{d^2v}{dx^2} + \alpha e^{\alpha x}\dfrac{dv}{dx} + \alpha e^{\alpha x}\dfrac{dv}{dx} + v\alpha^2 e^{\alpha x}$

এখন $y, \dfrac{dy}{dx}$ এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $y, \dfrac{dy}{dx}$ and $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ in (1) we get]

$$e^{\alpha x}\frac{d^2v}{dx^2} + 2\alpha e^{\alpha x}\frac{dv}{dx} + v\alpha^2 e^{\alpha x} - 2\alpha\left(e^{\alpha x}\frac{dv}{dx} + v\alpha e^{\alpha x}\right) + \alpha^2 e^{\alpha x} v = 0$$

বা $e^{\alpha x}\dfrac{d^2v}{dx^2} = 0$

বা $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$, যেহেতু [Since] $e^{\alpha x} \neq 0$.

বা $\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$\frac{dv}{dx} = c_2$ যখন $c_2$ অবাধ ধ্রুবক [where $c_2$ is an arbitrary constant]

আবার ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Again integrating this w. r. to x we get]

$$v = c_1 + c_2x$$

বা $\frac{y}{e^{\alpha x}} = c_1 + c_2x$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $y = (c_1 + c_2x)\, e^{\alpha x}$

তৃতীয় অবস্থা **[Case-III]** ঃ মনে করি, মূলগুলি অবাস্তব [Let the roots are imaginary]

যদি $m = \alpha \pm i\beta$ হয় তবে $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$

[If $m = \alpha \pm i\beta$, then $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$

প্রমাণ ঃ যদি $m = \alpha \pm i\beta$ হয়, অর্থাৎ $m = \alpha + i\beta,\ \alpha - i\beta$ হয়, তবে

[If $m = \alpha \pm i\beta$ that is $m = \alpha + i\beta,\ \alpha - i\beta$ then]

$y = a e^{(\alpha + i\beta)x} + b e^{(\alpha - i\beta)x}$; যখন a, b অবাধ ধ্রুবক। [Where a, b, are arbitrary constants]

বা $y = ae^{\alpha x} e^{i\beta x} + be^{\alpha x} e^{-i\beta x}$

$= e^{\alpha x}[a(\cos\beta x + i\sin\beta x) + b(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$

বা $y = e^{\alpha x}[(a + b)\cos\beta x + (ai - bi)\sin\beta x]$

বা $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$; যখন $c_1 = a + b$ এবং $c_2 = ai - bi$

নোট–1 ঃ যদি $m = -1 \pm 2i$ হয়, তবে $y = e^{-x}[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$

যদি $m = \pm 3i$ হয়, তবে $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

নোট–2 ঃ (i). $x = x_0$ হইলে যদি $y = y_0$ হয়, তবে ইহাকে $y(x_0) = y_0$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii). $x = x_0$ হইলে যদি $\frac{dy}{dx} = k$ হয়, তবে ইহাকে $y'(x_0) = k$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ–1** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0.$$ [ঢাঃ বিঃ '79]

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

এখন $y, \frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $y, \frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ in (1) we get]

$$2m^2 e^{mx} - 3me^{mx} + e^{mx} = 0$$

বা $(2m^2 - 3m + 1) e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation is]

$$2m^2 - 3m + 1 = 0 \text{ যেহেতু } e^{mx} \neq 0$$

বা $2m^2 - 2m - m + 1 = 0$

বা $2m(m - 1) - 1(m - 1) = 0$

বা $(2m - 1)(m - 1) = 0$

$\Rightarrow m = \frac{1}{2}, 1$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^x$; যখন $c_1, c_2$ অবাধ ধ্রুবক [where $c_1, c_2$ are arbitrary constants.]

**উদাহরণ–2** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$$ [রাঃ বিঃ '80, '81]

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 12y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি, (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}, \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx} \text{ এবং } \frac{d^3y}{dx^3} = m^3 e^{mx}$$

এখন $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ and $\frac{d^3y}{dx^3}$ in (1) we get]

$$(m^3 - m^2 - 8m + 12)\, e^{mx} = 0,$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^3 - m^2 - 8m + 12 = 0 \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $m^2(m-2) + m(m-2) - 6(m-2) = 0$

বা $(m-2)(m^2 + m - 6) = 0$

বা $(m-2)(m+3)(m-2) = 0$

$\Rightarrow m = 2, 2, -3$

∴ সাধারণ সমাধান[G. S. is]

$$y = (c_1 + c_2x)\, e^{2x} + c_3e^{-3x}.$$

**উদাহরণ–3 ঃ** সমাধান কর [Solve] ঃ

$$5\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$$ **[ঢাঃ বিঃ '80]**

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$5\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি, (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

এখন $y, \frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $y, \frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ in (1) we get]

$$(5m^2 - 2m + 3)\, e^{mx} = 0$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$5m^2 - 2m + 3 = 0 \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 60}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{56i^2}}{10}$

বা $m = \frac{2 \pm 2i\sqrt{14}}{10} = \frac{1}{5} \pm \frac{i\sqrt{14}}{5}$.

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = e^{x/5}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{14}}{5}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{14}}{5}x\right].$$

উদাহরণ–4 ঃ (i). $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর, যখন $y(0) = 0$ এবং $y'(0) = 1$.

[Find the particular solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ when $y(0) = 0$ and $y'(0) = 1$] [ঢাঃ বিঃ '80]

(ii). $\frac{d^2s}{dt^2} + 8\frac{ds}{dt} + 25s = 0$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর যখন $s(0) = 4$ এবং $s'(0) = -16$.

[Find the particular solution of $\frac{d^2s}{dt^2} + 8\frac{ds}{dt} + 25s = 0$ when $s(0) = 4$ and $s'(0) = -16$.] [চঃ বিঃ '79]

**সমাধান-(i)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি, (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

এখন $y, \frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $y, \frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ in (1) we get]

$$(m^2 + 3m + 2)e^{mx} = 0$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 + 3m + 2 = 0, \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $(m + 1)(m + 2) = 0$

$\Rightarrow m = -1, -2$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} \cdots (2)$$

ইহাকে $x$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$y'(x) = -c_1e^{-x} - 2c_2\,e^{-2x} \cdots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (2) and (3) successively we get]

$$y(0) = c_1 + c_2$$

বা $0 = c_1 + c_2$; যেহেতু [since] $y(0) = 0$.

বা $c_1 = -c_2 \cdots (4)$

এবং $y'(0) = -c_1 - 2c_2$

বা $1 = -c_1 - 2c_2$ ; যেহেতু [since] $y'(0) = 1$

বা $1 = c_2 - 2c_2$, (4) নং দ্বারা [by (4)]

বা $c_2 = -1$

$\therefore (4) \Rightarrow c_1 = -(-1)$

বা $c_1 = 1$

এখন $c_1$, $c_2$ এর মান (2) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the values of $c_1$, $c_2$ in (2) we get]

$$y = e^{-x} - e^{-2x}$$

ইহাই নির্ণেয় বিশেষ সমাধান [This is the required particular solution]

সমাধান-([illegible]) ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 8\frac{ds}{dt} + 25s = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $s = e^{mt}$ তবে [Let $s = e^{mt}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{ds}{dt} = me^{mt} \text{ এবং } \frac{d^2s}{dt^2} = m^2e^{mt}$$

এখন $s$, $\frac{ds}{dt}$ এবং $\frac{d^2s}{dt^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $s$, $\frac{ds}{dt}$ and $\frac{d^2s}{dt^2}$ in (1) we get]

$$(m^2 + 8m + 25)\,e^{mt} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 + 8m + 25 = 0 \text{ যেহেতু [since] } e^{mt} \neq 0.$$

$$\therefore\ m = \frac{-8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36\, i^2}}{2}$$

$$\text{বা } m = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$s(t) = e^{-4t}\,[c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t] \cdots (2)$$

$$s'(t) = -4e^{-4t}\,[c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t]$$
$$+ e^{-4t}\,[-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t] \cdots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং এ পর্যায়ক্রমে $t = 0$ স্থাপন করিয়া পাই [Putting $t = 0$ in (2) and (3) successively we get]

$$s(0) = e^0\,[c_1 + 0]$$

বা $4 = c_1 \cdots (4)$ যেহেতু [since] $s(0) = 4$

এবং $s'(0) = -4e^0\,[c_1 + 0] + e^0\,[0 + 3c_2]$

বা $-16 = -4c_1 + 3c_2$; যেহেতু [since] $s'(0) = -16$

বা $-16 = -4(4) + 3c_2$; (4) নং দ্বারা [by (4)]

বা $c_2 = 0$

এখন $c_1$ এবং $c_2$ এর মান (2) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $c_1$ and $c_2$ in (2) we get]

$$s(t) = e^{-4t}\,[4 \cos 3t + 0]$$

বা $s(t) = 4e^{-4t} \cos 3t.$

ইহাই নির্ণেয় বিশেষ সমাধান [This is the required particular solution]

## প্রশ্নমালা–4

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

(ii). $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ [ঢাঃ বিঃ '73]

(iii). $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ [ঢাঃ বিঃ '73]

(iv). $(D^2 + D - 6)y = 0$ [চঃ বিঃ '81]

(v). $(D^2 - 5D + 6)\, y = 0$

(vi). $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ [চঃ বিঃ '84]

(vii). $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ [চঃ বিঃ '81]

(viii). $2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ [রাঃ বিঃ '79]

(ix). $(D^4 - 5D^2 + 4)y = 0$ [ঢাঃ বিঃ '83]

2(i). $(D + 3)^2\, y = 0$ [চঃ বিঃ '82]

(ii). $(D^2 - 4D + 4)\, y = 0$ [রাঃ বিঃ '78]

(iii). $(D^3 - D^2 - 8D + 12)\, y = 0$ [রাঃ বিঃ '76]

(iv). $(D^3 - 3D + 2)y = 0$

(v). $(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)\, y = 0$

(vi). $(D^4 - 4D^3 + D^2 + 12D - 12)\, y = 0$ [রাঃ বিঃ '74]

3(i). $5\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ [ঢাঃ বিঃ '78]

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$ [ঢাঃ বিঃ '79]

(iii). $(D^2 - 4D + 13)\, y = 0$ [চঃ বিঃ '80, ঢাঃ বিঃ '74]

(iv). $(D^3 + 3D + 4)y = 0$ [রাঃ বিঃ '62]

(v). $\frac{d^3y}{dx^3} + 8y = 0$

(vi). $\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$ [রাঃ বিঃ '74]

(vii). $(D^2 + 1)^3\, (D^2 + D + 1)^2\, y = 0$ .

4(i). সমাধান কর $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$, যখন $x(0) = 10$ এবং $x'(0) = 0$. [Solve $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$ when $x(0) = 10$ and $x'(0) = 0$. ] [ঢাঃ বিঃ '85]

(ii). $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ এর বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর। যখন $x(0) = 2$ এবং $x'(0) = 0$. [Find the particular solution of $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ when $x(0) = 2$ and $x'(0) = 0$.] [ঢাঃ বিঃ '81]

(iii). $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ এর বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর, যখন $y(0) = 0$ এবং $y'(0) = 1$. [Find the particular solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ when $y(0) = 0$ and $y'(0) = 1$] [ঢাঃ বিঃ '80]

(iv). বিশেষ সমাধান বাহির কর ঃ $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 8x = 0$. যখন $x(0) = 0$ এবং $x'(0) = 24$. [Find the particular solution of $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 8x = 0$ when $x(0) = 0$ and $x'(0) = 24$] [ঢাঃ বিঃ '75]

(v). $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর, যখন $x(0) = 0$ এবং $x'(0) = 3$. [Find the particular solution of $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$ when $x(0) = 0$ and $x'(0) = 3$.]

(vi). প্রমাণ কর যে $l\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\theta}{l} = 0$ এর বিশেষ সমাধান $\theta = \alpha\cos\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{l}\right)$ যখন $\theta(0) = \alpha$ এবং $\theta'(0) = 0$. [Prove that the particular solution of $l\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\theta}{l} = 0$ is $\theta = \alpha\cos\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{l}\right)$ when $\theta(0) = \alpha$ and $\theta'(0) = 0$.]

(vii). $(D^2 + 4D + 8)\,y = 0$ এর বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর, যখন $y(0) = 0$ এবং $y'(0) = 8$. [Find the particular solution of $(D^2 + 4D + 8)y = 0$ when $y(0) = 0$ and $y'(0) = 8$.]

(viii). $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর, যখন $y(0) = 4$ এবং $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. [Find the particular solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ when $y(0) = 4$ and $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.] [চঃ বিঃ '85]

## উত্তরমালা

1(i). $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

(ii). $y = e^{2x} [c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x}]$

(iii). $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

(iv). $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$

(v). $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

(vi). $y = e^{-3x} [c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x}]$

(vii). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$

(viii). $y = c_1 e^{x} + e^{-x} [c_2 e^{\sqrt{3}x} + c_3 e^{-\sqrt{3}x}]$

(ix). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x}$

2(i). $y = (c_1 + c_2 x) e^{-3x}$

(ii). $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$

(iii). $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + c_3 e^{-3x}$

(iv). $y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + c_3 e^{-2x}$

(v). $y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + (c_3 + c_4 x) e^{2x}$

(vi). $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + c_3 e^{-\sqrt{3}x} + c_4 e^{\sqrt{3}x}$ .

3(i). $y = e^{x/5}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{14}\,x}{5} + c_2 \sin\frac{\sqrt{14}\,x}{5}\right]$

(ii). $y = e^{-2x} [c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x]$

(iii). $y = e^{2x} [c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x]$

(iv). $y = e^{x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{15}\,x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{15}\,x}{2}\right] + c_3 e^{-x}$

(v). $y = e^{x} [c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x] + c_3 e^{-2x}$

(vi). $y = e^{-x} [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + e^{x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x]$

(vii). $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin x$

$$+ e^{-x/2}\left[(c_7 + c_8 x)\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + (c_9 + c_{10} x)\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$$

4(i). $x = 5(e^{-2t} + e^{2t})$

(ii) $x = 4e^{t} - 2e^{2t}$

(iii). $y = e^{-x} - e^{-2x}$

(iv) $x = 4(e^{2t} - e^{-4t})$

(v). $x = \frac{3}{4}(e^{2t} - e^{-2t})$

(vii) $y = 4e^{-2x} \sin 2x$

(viii). $y = 4 \cos x$ .

—x—

# পঞ্চম অধ্যায়

## প্রথম পরিচ্ছেদ

## রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ যাহার ডানপক্ষ শুন্য নয়

[LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH RIGHT HAND SIDE IS NON-ZERO]

**5-1.1** ঃ ডিফারেনসিয়াল অপারেটর এবং ইহার বিপরীত অপারেটর গুলো স্বরণ রাখা প্রয়োজন [Differential operator and its inverse operators should be remember]

(i). $\frac{d}{dx}$ কে D প্রতীক দ্বারা, $\frac{d^2}{dx^2}$ কে $D^2$ প্রতীক দ্বারা এবং $\frac{d^3}{dx^3}$ কে $D^3$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এইভাবে আরও অগ্রসর হওয়া যায়।

অর্থাৎ $\frac{d}{dx} = D; \frac{d^2}{dx^2} = D^2; \frac{d^3}{dx^3} = D^3, \cdots, \frac{d^n}{dx^n} = D^n.$

(ii). $D^3 x^3 = D^2 (Dx^3) = D.\ D (3x^2) = D(3.2x) = 3.2.1$

বা $D^3x^3 = 3!$

$\Rightarrow\ D^4 x^3 = 0$

অনুরুপভাবে [Similarly] $D^n x^n = n! \Rightarrow D^{n+1} x^n = 0.$

**(iii). বিপরীত অপারেটর [Inverse operator] ঃ**

$\frac{1}{D}$ কে $\int dx$ এবং $\frac{1}{D}x$ কে $\int x\,dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়,

[Denote $\frac{1}{D}$ by $\int dx$ and $\frac{1}{D}x$ by $\int x dx$]

অর্থাৎ [that is] $\frac{1}{D} = \int dx$ এবং $\frac{1}{D}x = \int x\,dx$

∴ নোট ঃ $\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)dx$

এখন [Now] $\frac{1}{D} = \int dx = x$

$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D} = \frac{1}{D} x = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{D^3} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D^2} = \frac{1}{D} \cdot \frac{x^2}{2} = \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{2.3} = \frac{x^3}{3!}$$

$$\frac{1}{D^4} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D^3} = \frac{1}{D} \cdot \frac{x^3}{3!} = \int \frac{x^3}{3!} dx = \frac{x^4}{4!}$$

অনুরূপভাবে [similarly] $\frac{1}{D^n} = \frac{x^n}{n!}$

আবার $\frac{1}{D^2}x = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D}x = \frac{1}{D}\int x\,dx = \frac{1}{D}\frac{x^2}{2} = \int \frac{x^2}{2}dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{D^2}x = \frac{x^3}{6}.$$

**5-1.2 ঃ রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Linear differential equation] ঃ**

$D^n y + p_1 D^{n-1}y + p_2 D^{n-2}y + \cdots + p_n y = R(x)$ এই আকারের সমীকরণকে n তম ক্রমের রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয় যখন $R(x)$ কেবলমাত্র x এর ফাংশন এবং $p_1, P_2, \cdots, p_n$ ধ্রুবক। [A differential equation of the form $D^n y + p_1 D^{n-1}y + p_2 D^{n-2}y + \cdots + p_n y = R(x)$ is called n-th order linear differential equation, when $R(x)$ is only function of x and $p_1, p_2, \cdots, p_n$ are constants.]

**5-1.3 ঃ উপপাদ্য ঃ $(D^2 + p_1 D + p_2)y = R(x)$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় [Determine general solution of $(D^2 + p_1 D + p_2)y = R(x)$] ঃ**

**বর্ণনা [Statement]** ঃ যদি $(D^2 + p_1 D + p_2)y = 0$ এর সম্পূর্ণ সমাধান $y = u$ এবং $(D^2 + p_1 D + p_2)y = R(x)$ এর বিশেষ সমাধান $y = v$ হয়, তবে $(D^2 + p_1 D + p_2)\,y = R(x)$ এর সাধারণ সমাধান $y = u + v$.

[If $y = u$ is the complete solution of $(D^2 + p_1 D + p_2)y = 0$ and $y = v$ is the particular solution of $(D^2 + p_1 D + p_2)y = R(x)$ then $y = u + v$ is the general solution of $(D^2 + p_1 D + p_2)y = R(x)$.]

**প্রমাণ** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + p_1 D + p_2)y = R(x) \cdots (1)$$

$$(D^2 + p_1 D + p_2)y = 0 \cdots (2)$$

যেহেতু (2) এর সম্পর্ণ সমাধান $y = u$ কাজেই (2) নং $y = u$ কর্তৃক সিদ্ধ হইবে। অর্থাৎ [Since the complete solution of (2) is $y = u$, so (2) is satisfied by $y = u$, that is]

$$(D^2 + p_1 D + p_2)\,u = 0 \cdots (3)$$

আবার যেহেতু (1) নং এর বিশেষ সমাধান $y = v$, কাজেই (1) নং ও $y = v$ কর্তৃক সিদ্ধ হইবে। [Again since $y = v$ is the particular solution of (1), so (1) is satisfied by v]

$$(D^2 + p_1 D + p_2)v = R(x) \cdots (4)$$

এখন (3) নং এবং (4) নং কে যোগ করিয়া পাই [Now adding (3) and (4) we get]

$$(D^2 + p_1D + p_2)(u + v) = R(x)$$

ইহা হইতে দেখা যায় যে $y = u + v$ দ্বারা (1) নং সমীকরণ সিদ্ধ হয়। সুতরাং (1) নং এর সাধারণ সমাধান $y = u + v$. কারণ ইহা দুইটি অবাধ ধ্রুবক ধারণ করে। [From this we see that the equation (1) is satisfied by $y = u + v$. Hence the general solution of (1) is $y = u + v$ because it contains two arbitrary constants]

সাধারণ সমাধান $y = u + v$ এর $u$ কে সম্পূরক ফাংশন বলা হয়, ইহাকে $y_c$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $v$ কে বিশেষ ইনটিগ্র্যাল বলা হয়, ইহাকে $y_p$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \text{সাধারণ সমাধান } y = y_c + y_p$$

[u is called complementary function of general solution $y = u + v$, it is denoted by $y_c$ and v is called particular integral of $y = u + v$, it is denoted by $y_p$.

[General solution is $y = y_c + y_p$]

নোট ঃ $y_c$ এবং $y_p$ প্রতীক ব্যবহার করা হইবে।

**5-1.4 ঃ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল নির্ণয় [Determination of particular integral] ঃ**

বর্ণনা ঃ যদি $f(D)\,y = R(x)$ এর বিশেষ ইনিটগ্র্যাল $\frac{1}{f(D)} R(x)$ এবং ইহাকে $y_p$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে $y_p = \frac{1}{f(D)} R(x)$.

[If $\frac{1}{f(D)} R(x)$ be the particular integral of $f(D)y = R(x)$ and it is denoted by $y_p$ then $y_p = \frac{1}{f(D)} R(x)$ ]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$f(D)\,y = R(x) \cdots (1)$$

$\frac{1}{f(D)} R(x)$ অবশ্যই (1) নং এর সমাধান হইবে যদি ইহা (1) নং কে সিদ্ধ করে। ইহার জন্য (1) নং এ $y$ এর স্থলে $\frac{1}{f(D)} R(x)$ স্থাপন করি।

[$\frac{1}{f(D)} R(x)$ must be a solution of (1) if it satisfies (1). For this substitating $\frac{1}{f(D)} R(x)$ in place of y in (1)]

$$f(D).\frac{1}{f(D)}R(x) = R(x)$$

বা $R(x) = R(x)$ ইহা সত্য [it is true]

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [Particular integral of (1)]

$$= \frac{1}{f(D)}R(x)$$

অর্থাৎ $y_p = \frac{1}{f(D)}R(x)$

**5-1.5 ঃ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল নির্ণয়ের সাধারণ পদ্ধতি [Determination general method of particular integral] ঃ**

**উপপাদ্য ঃ** যদি $R(x)$ কেবলমাত্র $x$ এর ফাংশন হয় তবে [If $R(x)$ is the only function of $x$ then]

$$\frac{1}{D-\alpha}R(x) = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx.$$

**প্রমাণ ঃ** ধরি [We put] $y = \frac{1}{D-\alpha}R(x) \cdots (1)$

উভয় পক্ষকে $D-\alpha$ দ্বারা অপারেট করি [Operating both sides by $D-\alpha$]

$$(D-\alpha)y = R(x)$$

বা $\frac{dy}{dx} - \alpha y = R(x) \cdots (2)$

ইহা রৈখিক ডিফাঃ সমীকরণ, যাহার ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [This a linear differential equation, whose integrating factor is]

$$I.F. = e^{-\int \alpha\, dx}$$

বা $I.F. = e^{-\alpha x}$

(2) নং এর উভয় পক্ষকে $e^{-\alpha x}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both sides of (2) by $e^{-\alpha x}$ we get]

$$\frac{d}{dx}[ye^{-\alpha x}] = e^{-\alpha x}R(x)$$

ইহাকে $x$ এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to $x$ we get]

$$ye^{-\alpha x} = \int e^{-\alpha x}R(x)\,dx$$

বা $y = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx$

বা $\frac{1}{D-\alpha}R(x) = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx$; (1) নং দ্বারা [by (1)]

অনুসিদ্ধান্ত **[Cor]** ঃ $\frac{1}{D+\alpha} R(x) = e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} R(x)\, dx.$

নোট ঃ যখন $R(x) = \sec ax, \operatorname{cosec} ax, \tan ax$ এবং $\cot ax$ দেওয়া থাকিবে তখন উপরের সূত্র প্রয়োগ করিতে হইবে। [When given that $R(x) = \sec ax, \operatorname{cosec} ax, \tan ax$ and $\cot ax$ then the above formula will be used]

**5-1.6** ঃ নিম্নে বর্ণিত সূত্রগুলি স্মরণ রাখা প্রয়োজন **[Following formulee should be remember]** ঃ

(i). $(1-D)^{-1} = 1 + D + D^2 + D^3 + \cdots$

(ii). $(1+D)^{-1} = 1 - D + D^2 - D^3 + \cdots$

(iii). $(1-D)^{-2} = 1 + 2D + 3D^2 + 4D^3 + \cdots$

(iv). $(1+D)^{-2} = 1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \cdots$.

**5-1.7** ঃ নিয়ম ঃ যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} R(x)$ এবং $R(x) = x^m$ হয়, অর্থাৎ $y_p = \frac{1}{f(D)} x^m$ হয়, তবে $[f(D)]^{-1}$ কে দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতির সাহায্যে $D^m$ পর্যন্ত বিস্তৃত করিয়া অপারেট করিলে $y_p$ এর মান পাওয়া যায়।

যেমন ঃ $y_p = \frac{1}{D-\alpha} x^m$

$$= \frac{1}{-\alpha\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)} x^m$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)^{-1} x^m$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[1 + \frac{D}{\alpha} + \frac{D^2}{\alpha^2} + \cdots + \frac{D^m}{\alpha^m} + \cdots\right] x^m$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[x^m + \frac{mx^{m-1}}{\alpha} + \frac{m(m-1)\,x^{m-2}}{\alpha^2} + \cdots + \frac{m!}{\alpha^m} + 0\right].$$

## উদাহরণমালা

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

(i). $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5x^2$ [চঃ বিঃ '84]

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 1 + x + x^2$ [ঢাঃ বিঃ '75]

সমাধান-(i) ঃ প্রদত্ত সমীকরণ Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5x^2 \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 9)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 + 9 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -9 = 9i^2$

$\Rightarrow m = \pm 3i$

$\therefore y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

এখন (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [Now (1) can be written in the following form]

$$(D^2 + 9)\, y = 5x^2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 9} 5x^2$$

$$= \frac{1}{9(1 + D^2/9)} 5x^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[1 + \frac{D^2}{9}\right]^{-1} 5x^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[1 - \frac{D^2}{9} + \cdots\right] 5x^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[5x^2 - \frac{1}{9} D^2(5x^2) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[5x^2 - \frac{5.2}{9}\right]$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{9}\left(5x^2 - \frac{10}{9}\right).$$

সমাধান-(ii) ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 1 + x + x^2 \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 6m + 9)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 6m + 9 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m - 3)^2 = 0$

বা $m = 3, 3$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)\, e^{3x}.$

এখন (1) নং কে নিম্নরুপে লিখা যায় [Now equation (1) can be written in the following form]

$$(D^2 - 6D + 9)y = 1 + x + x^2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 6D + 9}(1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{(3 - D)^2}(1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{9(1 - D/3)^2}(1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - \frac{D}{3}\right)^{-2}(1 + x + x^2)$$

$$\text{বা } y_p = \frac{1}{9}\left[1 + \frac{2D}{3} + 3\frac{D^2}{9} + \cdots\right](1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{9}\left[1(1 + x + x^2) + \frac{2}{3}D(1 + x + x^2) + \frac{1}{3}D^2(1 + x + x^2) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[1 + x + x^2 + \frac{2}{3}(1 + 2x) + \frac{1}{3}(2)\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[x^2 + \frac{7x}{3} + \frac{7}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{27}[3x^2 + 7x + 7]$$

∴ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2x) e^{3x} + \frac{1}{27}(3x^2 + 7x + 7).$$

**উদাহরণ–2** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(D^2 + a^2)y = \sec ax$$

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + a^2)\, y = \sec ax \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 + a^2)\, y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 + a^2)\, y = 0 \cdots (2)$ then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2e^{mx}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + a^2)\, e^{mx} = 0$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 + a^2 = 0 \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $m^2 = -a^2$

বা $m^2 = i^2a^2$

বা $m = \pm ia$

$$\therefore y_c = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + a^2} \sec ax$$

$$= \frac{1}{(D - ia)(D + ia)} \sec ax$$

$$= \frac{1}{2ia}\left[\frac{1}{D - ia} - \frac{1}{D + ia}\right] \sec ax$$

$$= \frac{1}{2ia}\left[\frac{1}{D - ia} \sec ax - \frac{1}{D + ia} \sec ax\right] \cdots (3)$$

এখন [Now] $\frac{1}{D - ia}$ secax $= e^{iax}\int e^{-iax}$ secax dx

$$= e^{iax}\int(\cos ax - i\sin ax)\frac{1}{\cos ax}dx$$

$$= e^{iax}\int(1 - i\tan ax)\,dx$$

$$= e^{iax}\left[x + \frac{i}{a}\ln(\cos ax)\right] \cdots (4)$$

এখন i এর স্থলে –i স্থাপন করিয়া পাই [Now substituting –i for i we get]

$$\frac{1}{D + ia}\sec ax = e^{-iax}\left[x - \frac{i}{a}\ln(\cos ax)\right] \cdots (5)$$

এখন (3), (4) এবং (5) নং হইতে পাই [From (3), (4) and (5) we get]

$$y_p = \frac{1}{2ia}\left[e^{iax}\left\{x + \frac{i}{a}\ln(\cos ax)\right\} - e^{-iax}\left\{x - \frac{i}{a}\ln(\cos ax)\right\}\right]$$

$$= \frac{x(e^{iax} - e^{-iax})}{2ia} + \frac{1}{a^2}\frac{(e^{iax} + e^{-iax})}{2}\ln(\cos ax)$$

$$= \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax.\ \ln(\cos ax)\ .$$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1\cos ax + c_2\sin ax + \left(\frac{x}{a}\right)\sin ax + \left(\frac{1}{a^2}\right)\cos ax.\ \ln(\cos ax)].$$

**উদাহরণ–3 ঃ** $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 3x$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর, যখন $y(0) = 0$ এবং $y'(0) = 0$. [Find the particular solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 3x$ when $y(0) = 0$ and $y'(0) = 0$]

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 3x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow (m^2 - 9)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 9 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

বা $(m + 3)(m - 3) = 0$

বা $m = -3, 3$

$\therefore\ y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$,

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$(D^2 - 9)\, y = 3x$

$$\therefore\ y_p = \frac{1}{D^2 - 9} 3x$$

$$\text{বা } y_p = \frac{1}{-9(1 - D^2/9)} 3x$$

$$= -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{D^2}{9}\right)^{-1} 3x$$

$$= -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{D^2}{9} + \cdots\right]x$$

$$= -\frac{1}{3}[x + 0] = -\frac{x}{3}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y(x) = y_c + y_p$

$$\text{বা } y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} - \frac{x}{3} \quad \cdots (3)$$

$$\therefore\ y'(x) = -3c_1 e^{-3x} + 3c_2 e^{3x} - \frac{1}{3} \quad \cdots (4)$$

(3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (3) and (4) successively we get]

$y(0) = c_1 + c_2 - 0$

বা $0 = c_1 + c_2$; যেহেতু [since] $y(0) = 0$

বা $c_1 = -c_2 \cdots (5)$

$$\text{এবং } y'(0) = -3c_1 + 3c_2 - \frac{1}{3}$$

বা $0 = -3c_1 + 3c_2 - \frac{1}{3}$ ; যেহেতু [since] $y'(0) = 0$

বা $0 = -3(-c_2) + 3c_2 - \frac{1}{3}$ ; (5) নং দ্বারা।

বা $6c_2 = \frac{1}{3}$

বা $c_2 = \frac{1}{18}$

$\therefore$ (5) $\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{18}$

এখন $c_1$ এবং $c_2$ এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $c_1$ and $c_2$ in (3) we get]

$$y(x) = \frac{1}{18}(e^{3x} - e^{-3x}) - \frac{x}{3}$$

ইহাই নির্ণেয় বিশেষ সমাধান [This is the required particular solution].

## প্রশ্নমালা–5(A)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = 20x$ [ঢাঃ বিঃ '75]

(ii). $(D^2 + 2D + 1)\,y = 2x + x^2$

(iii). $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5x^2$ [চঃ বিঃ '76]

(iv). $(D^2 - 4D + 4)\,y = x^3$ [চঃ বিঃ '79, '80]

(v). $2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 5 + 2x$

(vi). $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 7y = x^2 + 2x + 7$

(vii). $(D^2 + 4)y = x^2$ [চঃ বিঃ '83]

(viii). $(D^2 + 5D + 4)y = 2x$ [চঃ বিঃ '82]

(ix). $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = x$ [চঃ বিঃ '81]

(x). $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 7x + 4$

(xi). $(D^4 - a^4)y = x^3$

(xii). $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = x^3 + x^2 + x + 1.$

**2**(i). $(D^2 + a^2)y = \tan ax$

(ii). $(D^2 + 4)y = \tan 2x$

(iii). $(D^2 + a^2)\, y = \operatorname{cosec} ax$

(iv). $(D^2 + 1)\, y = \operatorname{cosec} x$

(v). $(D^2 + 1)y = \sec x$ .

**3**(i). $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 3t + 2$ এর বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর, যখন $x(0) = \frac{1}{2}$ এবং $x'(0) = -\frac{4}{9}$.

[Find the particular solution of $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 3t + 2$ when $x(0) = \frac{1}{2}$ and $x'(0) = -\frac{4}{9}$]

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x^2$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর, যখন $y(0) = 0$ এবং $y'(0) = 0$.

[Find the particular solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x^2$ when $y(0) = 0$ and $y'(0) = 0$]

## উত্তরমালা

**1**(i). $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{5x} + x + \frac{9}{20}$

(ii). $y = (c_1 + c_2x)\, e^{-x} + x^2 - 2x + 2$

(iii). $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{9}\left(5x^2 - \frac{10}{9}\right)$

(iv). $y = (c_1 + c_2x)\, e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^3 + 6x^2 + 9x + 6)$

(v). $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x/2} + x$

(vi). $y = e^{-x}[c_1 e^{2\sqrt{2}x} + c_2 e^{-2\sqrt{2}x}] - \frac{1}{7}\left(x^2 + \frac{18x}{7} + \frac{393}{49}\right)$

(vii). $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

(viii). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2} - 2x\right)$

(ix). $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{6}\right)$

(x). $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x - \frac{7x^3}{6} - \frac{11x^2}{2}$

(xi). $y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} + c_3 \cos ax + c_4 \sin ax - \frac{x^3}{a^4}$

(xii). $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) e^x + \frac{x^5}{20} + \frac{7x^4}{12} + \frac{23x^3}{6} + \frac{33x^2}{2}$

2(i). $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax - \frac{1}{a^2} \cos ax . \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

(ii). $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x . \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

(iii). $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{1}{a^2} \sin ax \ln (\sin ax) - \frac{x}{a} \cos ax$

(iv). $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln (\sin x)$

(v). $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln (\cos x)$.

3(i). $x = \frac{1}{72}(17e^{-t} + 19e^{3t}) - t$

(ii). $y = \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$.

—x—

## পঞ্চম অধ্যায়
### দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

**ডানপক্ষ $R(x) = e^{ax}$ হইলে বিশেষ ইনটিগ্র্যাল $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$ নির্ণয় পদ্ধতি**

**[Determine the method of particular integral $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$ when R. H.S. $R(x) = e^{ax}$] :**

**5-2.1 :** পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণের সাহায্যে আমরা দেখাইতে পারি [By successive differentiation we can show that]

$$De^{ax} = a\,e^{ax}$$

$$D^2 e^{ax} = a^2 e^{ax}$$

$$D^3 e^{ax} = a^3 e^{ax}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax}.$$

যেহেতু উপরের বামপক্ষের প্রত্যেকটিতে D এর স্থলে a স্থাপন করিলে ডানপক্ষ পাওয়া যায়, কাজেই $f(D)\, e^{ax} = f(a)\, e^{ax}$. [Since we put a for D in each of L. H. S. of the above, we get R. H. S., so $f(D)\, e^{ax} = f(a)\, e^{ax}$]

**5-2.2 :** উপপাদ্য : যদি $f(a) \neq 0$, তবে $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$.

[If $f(a) \neq 0$ then $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$]

প্রমাণ : আমরা জানি [we know]

$$f(D)\, e^{ax} = f(a)\, e^{ax}$$

উভয় পক্ষকে $\frac{1}{f(D)}$ দ্বারা অপারেট করি [Operating both sides by $\frac{1}{f(D)}$]

$$\frac{1}{f(D)} f(D)\, e^{ax} = \frac{1}{f(D)} f(a)\, e^{ax}$$

বা $e^{ax} = f(a).\, \frac{1}{f(D)} e^{ax}$

বা $\frac{e^{ax}}{f(a)} = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$ যদি [if] $f(a) \neq 0$.

i. e. $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}$ যদি [if] $f(a) \neq 0$. প্রমাণিত।

**5-2.3 ঃ উপপাদ্য ঃ** যদি $f(a) = 0$ এবং $f'(a) \neq 0$ তবে $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = x \frac{1}{f'(D)} e^{ax}$. [If $f(a) = 0$ and $f'(a) \neq 0$ then $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = x \frac{1}{f'(D)} e^{ax}$]

প্রমাণ ঃ যদি $f(a) = 0$ হয়, তবে $f(D)$ এর একটি উৎপাদক $D-a$. [If $f(a) = 0$ then $D - a$ is a factor of $f(D)$]

মনে করি [Let] $f(D) = (D-a)\,\varphi(D)$, ⋯ (1) যদি [if] $\varphi(a) \neq 0$

এখন [Now] $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{(D-a)\,\varphi(D)} e^{ax}$; (1) নং দ্বারা [by (1)]

বা $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{D-a} \cdot \frac{1}{\varphi(D)} e^{ax}$

বা $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{D-a} \cdot \frac{1}{\varphi(a)} e^{ax}$; 4-2.2 দ্বারা।

বা $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{1}{D-a} e^{ax}$

বা $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} \cdot e^{ax} \int e^{-ax} . e^{ax} dx$; 4-1.5 দ্বারা

বা $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} \cdot e^{ax} \int dx$

বা $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} x e^{ax}$ ⋯ (2)

এখন (1) নং এর উভয় পক্ষকে D এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Now differentiating both sides of (1) w. r. to D we get]

$$f'(D) = (D-a)\,\varphi'(D) + \varphi(D)$$

$D = a$ স্থাপন করিয়া পাই [Putting $D = a$ we get]

$$f'(a) = 0 + \varphi(a)$$

অর্থাৎ $\varphi(a) = f'(a)$ ⋯ (3)

(3) নং হইতে $\varphi(a)$ এর মান (2) নং এর স্থাপন করি [From (3) putting the value of $\varphi(a)$ in (2)]

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{xe^{ax}}{f'(a)}$$

$\therefore \frac{1}{f(D)} e^{ax} = x \frac{e^{ax}}{f'(D)}$ যদি $f'(a) \neq 0$. প্রমাণিত।

**5-2.4 ঃ অনুসিদ্ধান্ত [Cor] ঃ**

যদি $f'(a) = 0$ এবং $f''(a) \neq 0$ তবে [If $f'(a) = 0$ and $f''(a) \neq 0$ then]

$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = x^2 . \frac{1}{f''(D)} e^{ax}$. এইভাবে আরো অগ্রসর হওয়া যায়। [and so on]

i, e. $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = x^2 \frac{1}{f''(D)} e^{ax}$ যদি [if] $f''(a) \neq 0$.

এবং $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = x^3 \frac{1}{f'''(D)} e^{ax}$ যদি [if] $f'''(a) \neq 0$.

**5-2.5 ঃ নিয়ম–1** (i) ঃ যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$ এই আকারে থাকে, তবে D এর স্থলে a বসাইলে সমাধান পাওয়া যায়, যখন $f(a) \neq 0$.

অর্থাৎ, $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$

$= \frac{1}{f(a)} e^{ax}$ যদি [if] $f(a) \neq 0$.

(ii). যদি $y_p = \frac{1}{f(D)}$

$= \frac{1}{f(D)} e^{0x}$; যেহেতু $e^{0x} = 1$

$= \frac{1}{f(0)} e^{0x}$ যদি $f(0) \neq 0$.

যেমন $y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}$

$= \frac{1}{D^2 - 5D + 6} e^{0x}$; যেহেতু $e^{0x} = 1$

$= \frac{1}{0 - 0 + 6} e^{0x}$

$= \frac{1}{6}$.

**নিয়ম–2** ঃ (i). যদি $f(a) = 0$ হয়, তবে নিয়ম–1 প্রযোজ্য নহে।

এইক্ষেত্রে $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$

$= x . \frac{1}{f'(D)} e^{ax}$ যদি $f(a) = 0$ এবং $f'(a) \neq 0$.

$= x \frac{1}{f'(a)} e^{ax}$ যদি $f'(a) \neq 0$.

(ii). যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$ যদি $f(a) = 0$,

$$= x \frac{1}{f'(D)} e^{ax} \text{ যদি } f'(a) = 0$$

$$= x^2 \frac{1}{f''(D)} e^{ax}$$

$$= x^2 \frac{1}{f''(a)} e^{ax} \text{ যদি } f''(a) \neq 0.$$

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ–1** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x}$$ [ঢাঃ বিঃ **'81**]

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x} \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow (m^2 - 3m + 2)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 3m + 2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

বা $(m - 1)(m - 2) = 0 \Rightarrow m = 1, 2.$

$\therefore\ y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$

(1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [(1) can be written in the following form]

$$(D^2 - 3D + 2)\,y = e^{5x}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^{5x}$$

$$= \frac{1}{5^2 - 3.5 + 2} e^{5x}$$

$$= \frac{1}{12} e^{5x}$$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}.$$

**উদাহরণ–2** ঃ সমাধান কর [Solve] $(D^2 - a^2)y = e^{ax}$ [ঢাঃ বিঃ '81]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - a^2)\,y = e^{ax} \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - a^2)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - a^2)y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - a^2)\, e^{mx} = 0$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - a^2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m + a)(m - a) = 0 \Rightarrow m = -a, a$

$\therefore y_c = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax}$

এখন (1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - a^2} e^{ax}, \text{ যেহেতু [since] } f(a) = 0$$

$$= x \frac{1}{2D} e^{ax}$$

$$= \frac{xe^{ax}}{2a}$$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore\ y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} + \frac{xe^{ax}}{2a}.$$

**উদাহরণ–3** ঃ সমাধান কর [solve] ঃ

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y = 3 + e^{-x} + 5e^{2x}.$$ [চঃ বিঃ '84]

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y = 3 + e^{-x} + 5e^{2x} \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx} \text{ এবং } \frac{d^3y}{dx^3} = m^3e^{mx}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^3 + 1)\, e^{mx} = 0$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^3 + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m + 1)(m^2 - m + 1) = 0$

∴ $m + 1 = 0$ অথবা $m^2 - m + 1 = 0$

∴ $m = -1$ অথবা $m = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3i^2}}{2}$

বা $m = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore y_c = e^{x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + c_3 e^{-x},$$

এখন (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [Now (1) can be written in the following form]

$$(D^3 + 1)y = 3 + e^{-x} + 5e^{2x}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^3 + 1}(3 + e^{-x} + 5e^{2x})$$

$$= \frac{1}{D^3 + 1}3 + \frac{1}{D^3 + 1}e^{-x} + \frac{1}{D^3 + 1}5e^{2x}$$

$$\text{বা } y_p = \frac{1}{D^3+1} 3e^{0x} + x.\frac{1}{3D^2}e^{-x} + \frac{1}{2^3+1}5e^{2x}$$

$$= \frac{1}{0+1}3e^{0x} + x.\frac{1}{3(-1)^2}e^{-x} + \frac{5}{9}e^{2x}$$

$$= 3 + \frac{xe^{-x}}{3} + \frac{5}{9}e^{2x}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = e^{x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + c_3e^{-x} + 3 + \frac{xe^{-x}}{3} + \frac{5}{9}e^{2x}.$$

## প্রশ্নমালা-5(B)

সমাধান কর [Solve] ঃ

**1**(i). $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$ [ঢাঃ বিঃ '77]

(ii). $(D^2 + 2D + 2)y = 2e^{-x}$ [ঢাঃ বিঃ '76]

(iii). $(D^2 + D)\, y = e^x$ [ঢাঃ বিঃ '76]

(iv). $\frac{d^2y}{dx^2} - 2k\frac{dy}{dx} + k^2y = e^x,\ k \neq 1$ [ঢাঃ বিঃ '86]

(v). $(D^3 - 9D^2 + 26D - 24)y = e^x$ [চঃ বিঃ '78]

**2**(i). $(D^2 - 2D + 1)y = e^x$

(ii). $(D^2 - 9)\, y = e^{3x}$

(iii). $(D^2 + 4D + 3)y = e^{-3x}$

(iv). $(D^2 - 3D + 2)\, y = e^x$

(v). $(D^2 - 4D)\, y = 5$

(vi). $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)\, y = e^{-x}$

(vii). $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\, y = e^{3x}$. [জাঃ বিঃ সঃ '96]

**3**(i). $(D^2 + 4)y = e^x + x^2$

(ii). $(D^2 - 1)\, y = e^x + 2e^{3x} + e^{5x}$

(iii). $(D^2 - 9D + 18)\, y = \cosh 3x$ ; $\left[\cosh 3x = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x})\right]$

(iv). $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^x + e^{-x}$ [ঢাঃ বিঃ '85]

(v). $(D^2 + 4D + 4)y = e^{2x} + e^{-2x}$

(vi). $(D^2 + 4D + 4)y = 2\sinh 2x$ [illegible] $= e^{2x} - e^{-2x}$

(vii). $(D^3 + 8)y = 5e^{3x} - 7e^{-2x}$

(viii). $(D^3 - D)y = e^x + e^{-x}$

(ix). $(2D^3 - 3D^2 + 1)\, y = e^x + 1.$

4(i). সমাধান কর ঃ $(D^2 - 3D + 2)y = e^x$ যখন $y(0) = 3$ এবং $y'(0) = 3$

[Solve : $(D^2 - 3D + 2)y = e^x$ when $y(0) = 3$ and $y'(0) = 3$]

(ii). সমাধান কর ঃ $(D^2 - 1)\, y = 2$ যেখানে $y(2) = -1$ এবং $y'(2) = 3.$

[Solve : $(D^2 - 1)\, y = 2$ where $y(2) = -1$ and $y'(2) = 3$]

[ঢাঃ বিঃ '86]

## উত্তরমালা

**1**(i). $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$

(ii). $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 2e^{-x}$

(iii). $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x$

(iv). $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{kx} + \frac{e^x}{(1-k)^2}$; $k \neq 1$

(v). $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{4x} - \frac{1}{6} e^x$

**2**(i). $y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2\right) e^x$

(ii). $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6} x e^{3x}$

(iii). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{2} x e^{-3x}$

(iv). $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x$

(v). $y = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{5x}{4}$

(vi). $y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{6}x^3\right) e^{-x}$

(vii). $y = c_1e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + \frac{1}{10} x e^{3x}$

**3**(i). $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{5} e^x + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

(ii). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{4} e^{3x} + \frac{1}{24} e^{5x}$

(iii). $y = c_1e^{3x} + c_2 e^{6x} - \frac{1}{6} xe^{3x} + \frac{1}{108} e^{-3x}$

(iv). $y = (c_1 + c_2x) e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$

(v). $y = (c_1 + c_2x) e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{16} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$

(vi). $y = (c_1 + c_2x) e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{16} - \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$

(vii). $y = e^x [c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x] + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{7} e^{3x} - \frac{7}{12} xe^{-2x}$

(viii). $y = c_1 + c_2e^x + c_3 e^{-x} + \frac{x}{2} (e^x + e^{-x})$

(ix). $y = (c_1 + c_2x) e^x + c_3 e^{-x/2} + \frac{1}{6} x^2e^x + 1$

**4**(i). $y = 2e^x + e^{2x} - xe^x$

(ii). $y = -e^2 e^{-x} + 2e^{-2} e^x - 2.$

# পঞ্চম অধ্যায়
## তৃতীয় পরিচ্ছেদ

**ডানপক্ষ $R(x) = \sin ax$ অথবা $\cos ax$ হইলে বিশেষ ইনটিগ্র্যাল**

**$y_p = \dfrac{1}{f(D^2)}\sin ax$ এবং $y_p = \dfrac{1}{f(D^2)}\cos ax$ নির্ণয় পদ্ধতি ঃ**

**5-3.1 ঃ** পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণের সাহায্যে আমরা দেখাইতে পারি [By successive differentiation we can show that]

$$D \sin ax = a \cos ax$$

$$\Rightarrow D^2 \sin ax = -a^2 \sin ax$$

$$\Rightarrow D^3 \sin ax = -a^3 \cos ax$$

$$\Rightarrow D^4 \sin ax = a^4 \sin ax$$

$$\Rightarrow (D^2)^2 \sin ax = (-a^2)^2 \sin ax$$

অনুরুপভাবে [Similarly] $(D^2)^n \sin ax = (-a^2)^n \sin ax$

এবং $D \cos ax = -a \sin ax$

$$\Rightarrow D^2 \cos ax = -a^2 \cos ax$$

$$\Rightarrow D^3 \cos ax = a^3 \sin ax$$

$$\Rightarrow D^4 \cos ax = a^4 \cos ax$$

$$\Rightarrow (D^2)^2 \cos ax = (-a^2)^2 \cos ax$$

অনুরুপভাবে [similarly] $(D^2)^n \cos ax = (-a^2)^n \cos ax$

সুতরাং [Hence] $f(D^2) \sin ax = f(-a^2) \sin ax$

এবং [and] $f(D^2) \cos ax = f(-a^2) \cos ax.$

নোট ঃ উপরের বামপক্ষে $D^2$ এর স্থলে $-a^2$ স্থাপন করিলে ডানপক্ষ পাওয়া যায়। কিন্তু D এর পরিবর্তে কোনকিছু [anything] স্থাপন করা যায় না। কারণ $D = \pm ia$, ইহা কাল্পনিক।

**5-3.2 ঃ** উপপাদ্য ঃ যদি $f(-a^2) \neq 0$ তবে $\dfrac{1}{f(D^2)}\sin ax = \dfrac{1}{f(-a^2)}\sin ax$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি [we know]

$$f(D^2) \sin ax = f(-a^2) \sin ax$$

উভয় পক্ষকে $\frac{1}{f(D^2)}$ দ্বারা অপারেট করিয়া পাই [Operating both sides by $\frac{1}{f(D^2)}$ we get]

$$\frac{1}{f(D^2)} f(D^2) \sin ax = \frac{1}{f(D^2)} f(-a^2) \sin ax$$

বা $\sin ax = f(-a^2) \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$

বা $\frac{\sin ax}{f(-a^2)} = \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$ যদি [if] $f(-a^2) \neq 0$.

$\therefore \frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{\sin ax}{f(-a^2)}$ যদি [if] $f(-a^2) \neq 0$. প্রমাণিত।

**5-3.3 ঃ উপপাদ্য ঃ** যদি [if] $f(-a^2) = 0$ এবং [and] $f'(-a^2) \neq 0$

তবে [then] $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = x \frac{1}{f'(D^2)} \cos ax$

এবং (and) $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = x \frac{1}{f'(D^2)} \sin ax$.

প্রমাণ ঃ যদি $f(-a^2) = 0$ হয়, তবে $f(D^2)$ এর একটি উৎপাদক $D^2 + a^2$. [If $f(-a^2)$ 0 = 0 then $D^2 + a^2$ is a factor of $f(D^2)$]

মনেকরি [Let] $f(D^2) = (D^2 + a^2)\, \varphi(D^2) \cdots (1)$ যখন [when] $\varphi(-a^2) \neq 0$.

এখন [Now] $\frac{1}{f(D^2)} [\cos ax + i \sin ax] = \frac{1}{f(D^2)} e^{iax}$

বা $\frac{1}{f(D^2)} [\cos ax + i \sin ax] = x \frac{1}{f'(D^2)} e^{iax}$; উপপাদ্য 5–2.3 দ্বারা।

বা $\frac{1}{f(D^2)} [\cos ax + i \sin ax] = x \frac{1}{f'(D^2)} [\cos ax + i \sin ax]$

উভয় পক্ষ হইতে বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করিয়া পাই [Equating real and imaginary parts from both sides we get]

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = x \frac{1}{f'(D^2)} \cos ax, \text{ যদি [if] } f'(-a^2) \neq 0$$

এবং $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = x \frac{1}{f'(D^2)} \sin ax$, যদি [if] $f'(-a^2) \neq 0$. প্রমাণিত।

**5-3.4 : অনুসিদ্ধান্ত [Cor] :** যদি $f(-a^2) = f'(-a^2) = 0$ এবং $f''(-a^2) \neq 0$

তবে $\frac{1}{f(D^2)}\cos ax = x^2\frac{1}{f''(D^2)}\cos ax$, যখন [when] $f''(-a^2) \neq 0$

এবং $\frac{1}{f(D^2)}\sin ax = x^2\frac{1}{f''(D^2)}\sin ax$ যখন [when] $f''(-a^2) \neq 0$.

**5-3.5 : নিয়ম–1 :** (i). যদি বিশেষ ইনটিগ্র্যাল $y_p = \frac{1}{f(D^2)}\sin ax$,

অথবা $y_p = \frac{1}{f(D^2)}\cos ax$ এই আকারে থাকে, তবে $D^2$ এর স্থলে $-a^2$ স্থাপন করিলে সমাধান পাওয়া যায় যখন $f(-a^2) \neq 0$.

যেমন $y_p = \frac{1}{D^2+1}\sin 2x$

$$= \frac{1}{-2^2+1}\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{3}\sin 2x$$

(ii). যদি $y_p = \frac{1}{D+\alpha}\sin ax$ তবে নিম্নে বর্ণিত নিয়মে অগ্রসর হইতে হইবে।

অর্থাৎ $y_p = \frac{1}{D+\alpha}\sin ax$

$$= \frac{(D-\alpha)}{(D-\alpha)(D+\alpha)}\sin ax$$

$$= \frac{(D-\alpha)}{D^2-\alpha^2}\sin ax$$

$$= \frac{(D-\alpha)}{-a^2-\alpha^2}\sin ax$$

বা $y_p = \frac{D\sin ax - \alpha\sin ax}{-(a^2+\alpha^2)}$

$$= \frac{a\cos ax - \alpha\sin ax}{-(a^2+\alpha^2)}.$$

**নিয়ম–2 :** (i). যদি $f(-a^2) = 0$ হয়, তবে নিয়ম –1 প্রযোজ্য নহে। এইক্ষেত্রে নিম্নে বর্ণিত পদ্ধতিতে সমাধান করিতে হইবে।

$y_p = \frac{1}{f(D^2)}\sin ax$, যদি [if] $f(-a^2) = 0$

$$= x\frac{1}{f'(D^2)}\sin ax,$$

$= x\frac{1}{f'(-a^2)}\sin ax$ যদি [if] $f'(-a^2) \neq 0$.

(ii). $y_p = \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$, যদি [if] $f(-a^2) = 0$

$= x \frac{1}{f'(D^2)} \sin ax$ যদি [if] $f'(-a^2) = 0$,

$= x^2 \frac{1}{f''(D^2)} \sin ax$

$= x^2 \frac{1}{f''(-a^2)} \sin ax$, যদি [if] $f''(-a^2) \neq 0$.

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ–1** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

(i) $(D^2 + 4)y = \sin 2x \sin x$.

(ii) $(D^2 - 3D + 4)y = \cos(4x + 5)$. **[চঃ বিঃ '76; চঃ বিঃ '76]**

**সমাধান-(i)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + 4)y = \sin 2x \sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 + 4)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 + 4)y = 0 \cdots (2)$ then]

তবে $Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 4) e^{mx} = 0$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 4 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -4$

বা $m^2 = 4i^2$

বা $m = \pm 2i$

$\therefore y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

এখন (1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \sin 2x \sin x$$

$$= \frac{1}{D^2 + 4} \frac{1}{2} [\cos(2x - x) - \cos(2x + x)]$$

$$= \frac{1}{D^2 + 4} \frac{1}{2} [\cos x - \cos 3x]$$

$$= \frac{1}{2(D^2 + 4)} \cos x - \frac{1}{2(D^2 + 4)} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{2(-1^2 + 4)} \cos x - \frac{1}{2(-3^2 + 4)} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{10} \cos 3x .$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{10} \cos 3x .$

**সমাধান-(ii)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 3D + 4)y = \cos(4x + 5) \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 3D + 4)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial soluton of $(D^2 - 3D + 4)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2 e^{mx}.$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 3m + 4) e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 3m + 4 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$\therefore m = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{7i^2}}{2}$$

বা $m = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$

$$\therefore y_c = e^{3x/2} \left[ c_1 \cos \frac{\sqrt{7}x}{2} + c_2 \sin \frac{\sqrt{7}x}{2} \right]$$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 4} \cos(4x + 5)$$

$$= \frac{1}{-4^2 - 3D + 4} \cos(4x + 5)$$

$$= \frac{1}{-3(D + 4)} \cos(4x + 5)$$

$$= \frac{(D - 4)}{-3(D - 4)(D + 4)} \cos(4x + 5)$$

$$= \frac{(D - 4) \cos(4x + 5)}{-3(D^2 - 16)}$$

$$= \frac{(D - 4) \cos(4x + 5)}{-3(-4^2 - 16)}$$

$$= \frac{1}{96} [D\cos(4x + 5) - 4\cos(4x + 5)]$$

$$= \frac{1}{96}[-4\sin(4x+5) - 4\cos(4x+5)]$$

$$= \frac{-1}{24}[\sin(4x+5) + \cos(4x+5)]$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = e^{3x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{7}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{7}x}{2}\right]$$

$$- \frac{1}{24}[\sin(4x+5) + \cos(4x+5)].$$

**উদাহরণ–2 ঃ** সমাধান কর [Solve]

$$(D^2 + a^2)y = \cos ax.$$

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + a^2)y = \cos ax \cdots (1)$$

মনেকরি, $(D^2 + a^2)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 + a^2)y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + a^2)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + a^2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

বা $m^2 = -a^2$

বা $m^2 = i^2 a^2$

বা $m = \pm ia$

$$\therefore y_c = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$$

এখন (1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + a^2}\cos ax \quad \text{যেহেতু [since] } f(-a^2) = 0.$$

$$= x.\frac{1}{2D}\cos ax$$

$$= \frac{x}{2}\int \cos ax\, dx$$

$$\text{বা } y_p = \frac{x}{2}\cdot\frac{\sin ax}{a}$$

$$= \frac{x \sin ax}{2a}$$

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

বা $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{x}{2a} x \sin ax.$

**উদাহরণ–3** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = e^x + \cos x$

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = e^x + \cos x \cdots (1)$

মনেকরি $(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)\, y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)\, y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$, $D^2y = m^2 e^{mx}$ এবং [and] $D^3y = m^3 e^{mx}$.

∴ $(2) \Rightarrow (m^3 - 3m^2 + 4m - 2)\, e^{mx} = 0$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^3 - 3m^2 + 4m - 2 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 (m - 1) - 2m(m - 1) + 2(m - 1) = 0$

বা $(m - 1)(m^2 - 2m + 2) = 0$

∴ $m - 1 = 0$ অথবা $m^2 - 2m + 2 = 0$

∴ $m = 1$ অথবা $m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2}$

বা $m = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$

∴ $y_c = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + c_3 e^x,$

এখন (1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} [e^x + \cos x]$$

$$= \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} e^x + \frac{1}{D^2D - 3D^2 + 4D - 2} \cos x$$

$$= x \frac{1}{3D^2 - 6D + 4} e^x + \frac{1}{(-1^2)\, D - 3\,(-1^2) + 4D - 2} \cos x$$

$$= x \frac{1}{3.1^2 - 6.1 + 4} e^x + \frac{1}{3D + 1} \cos x$$

$$= xe^x + \frac{(3D - 1)}{9D^2 - 1} \cos x$$

$$= xe^x + \frac{(3D-1)\cos x}{9(-1^2)-1}$$

$$= xe^x - \frac{1}{10}[3D\cos x - \cos x]$$

$$= xe^x - \frac{1}{10}[-3\sin x - \cos x]$$

$$= xe^x + \frac{1}{10}[3\sin x + \cos x]$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = e^x[c_1\cos x + c_2\sin x] + c_3 e^x + xe^x + \frac{1}{10}[3\sin x + \cos x].$$

## প্রশ্নমালা–5(C)

সমাধান কর [Solve] ঃ

**1**(i). $(D^2+4)y = \sin 3x$

(ii). $(D^2-a^2)y = \cos mx$

(iii). $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = \sin^2 x$ $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ **[চঃ বিঃ '77]**

(iv). $(D^2+9)y = \sin^2 2x$

(v). $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \sin 2x$

(vi). $\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 16x = 5\cos 3t$ **[ঢাঃ বিঃ '83]**

(vii). $(D^2-3D+2)y = \sin 3x$ **[ঢাঃ বিঃ '77]**

(viii). $(D^2-2D+5)y = 10\sin x$

(ix). $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \cos 3x$

(x). $(D^2-5D+6)y = \sin 3x$

(xi). $(D^2-5D+6)y = \sin 2x$ **[জাঃ বিঃ সঃ '96]**

(xii). $(D^3+1)y = \cos 2x$

(xiii). $(D^3-1)y = \sin(3x+1)$ **[চঃ বিঃ '81]**

2(i). $(D^2 + a^2)y = \sin ax$

(ii). $(D^2 + 4)y = \sin 2x$ [ঢাঃ বিঃ '88, রাঃ বিঃ '83]

(iii). $(D^2 + 1)y = \cos x$

(iv). $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$ [ঢাঃ বিঃ '81; চঃ বিঃ '86; রা বিঃ '79]

3(i). $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = \cos x + x^2$

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos 3x + \sin 2x$

(iii). $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin 2x \sin x$

(iv). $(D^2 + 1)y = \sin 3x \cos x$

(v). $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x - \sin x$ [ঢাঃ বিঃ '87, '89]

(vi). $(D^4 - a^4)\, y = \sin ax$ .

## উত্তরমালা

1(i). $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$

(ii). $y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} - [1/(m^2 + a^2)] \cos mx$

(iii). $y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)$

(iv). $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{18} + \frac{1}{14} \cos 4x$

(v). $y = e^{-x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$

$$- \frac{1}{13}[2\cos 2x + 3\sin 2x]$$

(vi). $x = (c_1 + c_2 t)\, e^{4t} + \frac{1}{125}(7\cos 3t - 24\sin 3t)$

(vii). $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{130}(9\cos 3x - 7\sin 3x)$

(viii). $y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + 2\sin x + \cos x$

(ix). $y = (c_1 + c_2 x)\, e^x - \frac{1}{50}(3\sin 3x + 4\cos 3x)$

(x). $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{78}(5\cos 3x - \sin 3x)$

(xi). $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - \frac{x}{41}[4\cos 2x + 5\sin 2x]$

(xii). $y = e^{x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + c_3 e^{-x}$

$+\frac{1}{65}(\cos 2x - 8\sin 2x)$

(xiii). $y = e^{-x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + c_3 e^{x}$

$+\frac{1}{730}[27\cos(3x+1) - \sin(3x+1)]$

**2**(i). $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax - \frac{1}{2a} x \cos ax$

(ii). $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x$

(iii). $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$

(iv). $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$

**3**(i). $y = e^{x}[c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x]$

$+\frac{1}{4}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{2}{9}\right)$

(ii). $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{6} x \sin 3x + \frac{1}{5}\sin 2x$

(iii). $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{4} x \sin x + \frac{1}{16}\cos 3x$

(iv). $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{30}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin 2x$

(v). $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3} e^{x} + \frac{1}{5}\sin x$

(vi). $y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} + c_3 \cos ax + c_4 \sin ax$

$+\frac{1}{4a^3} x \cos ax - \frac{\sin ax}{4a^4}$.

———×———

# পঞ্চম অধ্যায়

## চতুর্থ পরিচ্ছেদ

**ডানপক্ষ $R(x) = e^{ax}V$ হইলে বিশেষ ইনটিগ্র্যাল নির্ণয়ের পদ্ধতি যখন $v = \sin ax$, অথবা $\cos ax$, অথবা $x^m$.** [Determine method of particular intgral when R. H. S. $R(x) = e^{ax}V$ where $V = \sin ax$, or $\cos ax$, or $x^m$]

**নিয়ম–1 :** যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}V$ এই আকারে থাকে, তবে $e^{ax}$ কে $\frac{1}{f(D)}$ এর ডান হইতে বামে আনিতে হয় এবং D এর স্থলে D + a লিখিতে হয়। অতঃপর পূর্বে উল্লেখিত নিয়মে সমাধান করিতে হয়।

যেমন $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax} V$

$= e^{ax} \frac{1}{f(D + a)} V$; পূর্বে উল্লেখিত নিয়মে সমাধান করিতে হইবে।

**নিয়ম–2 :** যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} x^n \cos ax$, অথবা $y_p = \frac{1}{f(D)} x^n \sin ax \ (n \geq 1)$

এই আকারে থাকে, তবে $X = \frac{1}{f(D)} x^n \cos ax$

$Y = \frac{1}{f(D)} x^n \sin ax$ ধরিতে হয় এবং

$$X + iY = \frac{1}{f(D)} x^n (\cos ax + i\sin ax)$$

$$= \frac{1}{f(D)} x^n e^{iax}$$

$$= e^{iax} \frac{1}{f(D + ia)} x^n; \text{ নিয়ম–1 দ্বারা।}$$

অতঃপর পূর্বের নিয়মে সমাধান করিয়া উভয় পক্ষ হইতে বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করিতে হয়।

**নিয়ম–3 :** যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} xv$ এই আকারে থাকে, তবে

$$y_p = \frac{1}{f(D)} xv$$

$$= x. \frac{1}{f(D)} v - \frac{f'(D)}{[f(D)]^2} v.$$

# উদাহরণমালা

**উদাহরণ–1** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

(i). $(D^2 - 9)y = 2x\, e^{3x}$. [জাঃ বিঃ সঃ '96]

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2\, e^{2x}$. [ঢাঃ বিঃ '84]

**সমাধান (i)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 9)y = 2x\, e^{3x} \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 9)y = 0 \cdots$ (2) এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 9)y = 0 \cdots$ (2) then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2e^{mx}$$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow (m^2 - 9)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 9 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m + 3)(m - 3) = 0$

বা $m = -3, 3$.

$$\therefore y_c = c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{3x}$$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 9} 2x\, e^{3x}$$

$$= e^{3x} \frac{1}{(D + 3)^2 - 9} 2x$$

$$= e^{3x} \frac{1}{D^2 + 6D} 2x$$

$$= e^{3x} \frac{1}{6D(1 + D/6)} 2x$$

$$= e^{3x} \frac{1}{6D}\left(1 + \frac{D}{6}\right)^{-1} 2x$$

বা $y_p = e^{3x} \frac{1}{6D}\left[1 - \frac{D}{6} + \frac{D^2}{36} - \cdots\right]2x$

$$= \frac{e^{3x}}{6} \cdot \frac{1}{D}\left[2x - \frac{1}{6} D(2x) + 0\right]$$

$$= \frac{e^{3x}}{6} \cdot \frac{1}{D}\left[2x - \frac{1}{6} \cdot 2\right]$$

$$= \frac{e^{3x}}{6}\int\left(2x - \frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{6}\left[x^2 - \frac{x}{3}\right]$$

$$= \frac{e^{3x}}{18}(3x^2 - x),$$

$\therefore$ সাধারন সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{18} e^{3x}(3x^2 - x).$

**সমাধান-(ii)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 e^{2x} \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \cdots (2)$ then]

$\frac{dy}{dx} = me^{mx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 4m + 4)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 4m + 4 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m - 2)^2 = 0$

বা $m = 2, 2.$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)\, e^{2x}$

(1) নং কে নিম্নরুপে লিখা যায় [(1) can be written in the following form]

$$(D^2 - 4D + 4)\, y = x^2 e^{2x}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} x^2 e^{2x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)^2} x^2 e^{2x}$$

$$= e^{2x} \frac{1}{(D + 2 - 2)^2} x^2$$

বা $y_p = e^{2x}\frac{1}{D^2}x^2$

$= e^{2x}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D}x^2$

$= e^{2x}\frac{1}{D}\int x^2\,dx$

$= e^{2x}\cdot\frac{1}{D}\cdot\frac{x^3}{3}$

$= e^{2x}\int\frac{x^3}{3}\,dx$

$= \frac{1}{12}x^4 e^{2x}.$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = (c_1 + c_2x)\,e^{2x} + \frac{1}{12}x^4 e^{2x}.$

**উদাহরণ–2 ঃ** সমাধান কর [Sovle] ঃ

(i). $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \sin x.$ [ঢাঃ বিঃ **'84]**

(ii). $(D^4 - 1)y = e^x \cos x$

**সমাধান-(i) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \cdots (2)$ then]

$\frac{dy}{dx} = me^{mx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 1)\,e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m-1)^2 = 0$

বা $m = 1, 1$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)\,e^x$

(1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [(1) can be written in the following form]

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} e^x \sin x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} e^x \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{(D+1-1)^2} \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{-1^2} \sin x$$

$$= -e^x \sin x.$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2 x)e^x - e^x \sin x.$$

**সমাধান-(ii)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^4 - 1)y = e^x \cos x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^4 - 1)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^4 - 1)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$Dy = me^{mx},\ D^2y = m^2e^{mx},\ D^3y = m^3e^{mx} \text{ এবং } D^4y = m^4e^{mx}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^4 - 1)e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^4 - 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0$

$\therefore m^2 - 1 = 0$ অথবা $m^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow m = \pm 1,\ m = \pm i$$

$$\therefore y_c = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3\cos x + c_4\sin x,$$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^4 - 1} e^x \cos x$$

$$= \frac{1}{(D^2 - 1)(D^2 + 1)} e^x \cos x$$

বা $y_p = e^x \frac{1}{\{(D+1)^2-1\}\{(D+1)^2+1\}} \cos x$

$$= e^x \frac{1}{(D^2+2D)(D^2+2D+2)} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{(-1^2+2D)(-1^2+2D+2)} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{(2D-1)(2D+1)} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{4D^2-1} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{4(-1^2)-1} \cos x$$

$$= -\frac{1}{5} e^x \cos x.$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x - \frac{e^x \cos x}{5}.$$

**উদাহরণ–3** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(D^2 - 1)y = x^2 \cos x.$ [ঢাঃ বিঃ **'83**]

**সমাধান** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 1)y = x^2 \cos x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 1)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2-1)y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 1) e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 1 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m = -1, 1$

$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$,

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2-1} x^2 \cos x$$

ধরি [we put] $X = \frac{1}{D^2-1} x^2 \cos x$ এবং [and] $Y = \frac{1}{D^2-1} x^2 \sin x$

$$\therefore X+iY=\frac{1}{D^2-1}x^2(\cos x+i\sin x)$$

$$=\frac{1}{D^2-1}x^2e^{ix}$$

$$=e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2-1}x^2$$

$$=e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD-2}x^2$$

বা $$X+iY=e^{ix}\frac{1}{-2\,[1-iD-D^2/2]}x^2$$

$$=-\frac{e^{ix}}{2}\left[1-\left(iD+\frac{D^2}{2}\right)\right]^{-1}x^2$$

$$=-\frac{e^{ix}}{2}\left[1+\left(iD+\frac{D^2}{2}\right)+\left(iD+\frac{D^2}{2}\right)^2+\cdots\right]x^2$$

$$=\frac{-e^{ix}}{2}\left[1+iD+\frac{D^2}{2}-D^2+\cdots\right]x^2$$

$$=\frac{-e^{ix}}{2}\left[1x^2+iDx^2-\frac{1}{2}D^2x^2+0\right]$$

$$=-\frac{e^{ix}}{2}[x^2+2ix-1]$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos x+i\sin x)\,[(x^2-1)+2ix]$$

$$=-\frac{1}{2}[\{(x^2-1)\cos x-2x\sin x\}+i\{2x\cos x+(x^2-1)\sin x\}]$$

উভয় পক্ষ হইতে বাস্তব অংশ সমীকৃত করিয়া পাই [Equating real part from both sides we get]

$$X=-\frac{1}{2}(x^2-1)\cos x+x\sin x$$

বা $$\frac{1}{D^2-1}x^2\cos x=\frac{1}{2}(1-x^2)\cos x+x\sin x$$

$$\therefore y_p=\frac{1}{2}(1-x^2)\cos x+x\sin x$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y=y_c+y_p$$

বা $$y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{1}{2}(1-x^2)\cos x+x\sin x.$$

**উদাহরণ–4** ঃ সমাধান কর [Solve]

(i). $(D^2 - 2D + 1)y = x\sin x.$ [ঢাঃ বিঃ '77]

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$ [ঢাঃ বিঃ সাঃ '92]

**সমাধান-(i)** ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 2D + 1)y = x\sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$. তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 1)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m-1)^2 = 0$

বা $m = 1, 1$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)e^x$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} x\sin x$$

$$= x\frac{1}{D^2 - 2D + 1}\sin x - \frac{(2D-2)}{(D^2 - 2D + 1)^2}\sin x; \text{ নিয়ম–3 দ্বারা।}$$

$$= x\frac{1}{-1^2 - 2D + 1}\sin x - \frac{2(D-1)}{(-1^2 - 2D + 1)^2}\sin x$$

$$= -\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{D}\sin x - \frac{2(D-1)}{4D^2}\sin x$$

বা $y_p = -\frac{x}{2}\int \sin x\, dx - \frac{2(D-1)\sin x}{4(-1^2)}$

$$= -\frac{x}{2}\cdot(-\cos x) + \frac{1}{2}(D\sin x - 1\sin x)$$

$$= \frac{x\cos x}{2} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x),$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x).$$

**সমাধান-(ii) ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 1)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m-1)^2 = 0$

বা $m = 1, 1$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)e^x,$

(1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [(1) can be written in the following form]

$$(D^2 - 2D + 1)y = xe^x \sin x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} xe^x \sin x$$

$$\text{বা } y_p = \frac{1}{(D-1)^2} xe^x \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{(D+1-1)^2} x\sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} x\sin x,$$

$$= e^x \left[x.\frac{1}{D^2}\sin x - \frac{2D}{(D^2)^2}\sin x\right], \text{ নিয়ম-3 দ্বারা।}$$

$$= e^x \left[x\frac{1}{-1^2}\sin x - \frac{2D}{(-1^2)^2}\sin x\right]$$

$$= e^x[-x\sin x - 2D\sin x]$$

$$= e^x[-x\sin x - 2\cos x]$$

$$= -e^x(x\sin x + 2\cos x),$$

সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2x)e^x - e^x(x\sin x + 2\cos x).$$

# প্রশ্নমালা-5(D)

সমাধান কর[Solve] ঃ

1(i). $(D^2-1)y = 4x\,e^x$ [ঢাঃ বিঃ '82, '88]

(ii). $(D^2-5D+6)y = x^3\,e^{2x}$ [ঢাঃ বিঃ '79]

(iii). $(D^2-3D+2)y = e^x(1-2x)$

(iv). $(D^2-1)y = xe^{2x}$ [চঃ বিঃ '86]

(v). $(D-1)^2\,y = (x^2+2x-1)\,e^{2x}$

(vi). $(D^2-2D+1)y = x^2\,e^{3x}$

(vii). $(D^2+4D-12)y = (x-1)\,e^{2x}$

(viii). $(D-2)^3\,y = x^2\,e^{2x}$

(ix). $(D^3+1)y = x\,e^x$

(x). $(D^3-3D^2-D+3)y = x^2e^x$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '93]

(xi). $(D^2+2D+1)y = e^{-x}+\cos 2x$

(xii). $(D^2-2D+3)y = \cos x + x^2$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '90]

(xiii). $(D^2-3D+2)y = e^x + 5\sin 2x$

(xiv). $(D^2-4)y = e^x - \sin x$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '98]

(xv). $(D^2+1)\,(D^2+4)y = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$.

2(i). $(D^2-4)y = e^x\sin x$ [ঢাঃ বিঃ '73]

(ii). $(D^2-1)y = e^x\sin\dfrac{x}{2}$ [চঃ বিঃ '82, রাঃ বিঃ '78]

(iii). $(D^2+5D-24)y = e^{5x}\sin x$

(iv). $(D^2-9)y = e^{3x}\cos x$ [চঃ বিঃ '81, '85]

(v). $(D^2+3D+2)y = e^{2x}\sin x$

(vi). $(D^2-4D+1)y = e^{2x}\sin 2x$

(vii). $(D^2-1)y = e^x\cos x$

(viii). $D^2y = e^x\cos x$

(ix). $(D^2-2D)y = e^x\sin x$ [ঢাঃ বিঃ '87]

(x). $(D^3-2D+4)y = e^x\sin\dfrac{x}{2}$ [চঃ বিঃ '83]

(xi). $(D^3-D^2+4D-4)y = 68\,e^x\sin 2x$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '87]

3(i). $(D^2+4)y = x\sin^2 x$ [চঃ বিঃ '78]

(ii). $(D^2+a^2)y = x\cos ax$

(iii). $(D^2+1)^2\,y = 24x\cos x$

(iv). $(D^2+1)y = x^2\sin 2x$

(v). $(D^2-4D+4)y = 8x^2\,e^{2x}\sin 2x$.

4(i). $(D^2 + 9)y = x\cos x$ [ঢাঃ বিঃ '82, চঃ বিঃ '84]

(ii). $(D^2 + D)y = x\cos x$ [চঃ বিঃ '74]

(iii). $(D^2 + 4)y = x\sin x$ [চঃ বিঃ '83]

(iv). $(D^2 + 2D + 1)y = x\cos x$

(v). $(D^2 - 1)y = xe^x \sin x$.

## উত্তরমালা

1(i). $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + (x^2 - x)e^x$

(ii). $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - \frac{1}{4}e^{2x}(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x)$

(iii). $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^x(x^2 + x)$

(iv). $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + \frac{1}{9}e^{2x}(3x - 4)$

(v). $y = (c_1 + c_2x)e^x + (x - 1)^2e^{2x}$

(vi). $y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)e^{3x}$

(vii). $y = c_1e^{-6x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{64}(4x^2 - 9x)e^{2x}$

(viii). $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x} + \frac{1}{60}x^5e^{2x}$

(ix). $y = e^{x/2}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + c_3e^{-x} + \frac{1}{4}(2x - 3)e^x$

(x). $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3e^{-x} - \frac{e^x}{4}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]$

(xi). $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} + \frac{1}{25}(4\sin 2x - 3\cos 2x)$

(xii). $y = e^x[c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x] + \frac{1}{4}[\cos x - \sin x]$

$+\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{2}{9}\right]$

(xiii). $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x + \frac{1}{4}(3\cos 2x - \sin 2x)$

(xiv). $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} - \frac{e^x}{3} + \frac{\sin x}{5}$

(xv). $y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$

$+\frac{x}{12}\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]$

**2**(i). $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{e^x}{10}[\cos x + 2\sin x]$

(ii). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - \frac{4e^x}{17}\left[4\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right]$

(iii). $y = c_1 e^{-8x} + c_2 e^{3x} - \frac{e^{5x}}{170}[3\cos x - 5\sin x]$

(iv). $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} - \frac{e^{3x}}{37}[\cos x - 6\sin x]$

(v). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{170}[11\sin x - 7\cos x]$

(vi). $y = e^{2x}[c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x}] - \frac{1}{7} e^{2x}\sin 2x$

(vii). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{e^x}{5}(2\sin x - \cos x)$

(viii). $y = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} e^x \sin x$

(ix). $y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \sin x$

(x). $y = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x) + c_3 e^{-2x} - \frac{8e^x}{111}\left[\cos\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}\right]$

(xi). $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3 e^x - e^x[2\cos 2x + 8\sin 2x]$

**3**(i). $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{32}[4x - x\cos 2x - 2x^2\sin 2x]$

(ii). $y = c_1\cos ax + c_2\sin ax + \frac{1}{4a^2}[ax^2\sin ax + x\cos ax]$

(iii). $y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x - x^3\cos x + 3x^2\sin x$

(iv). $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{27}[24x\cos 2x + (9x^2 - 26)\sin 2x]$

(v). $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + e^{2x}[3\sin 2x - 2x^2\sin 2x - 4x\cos 2x]$

**4**(i). $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{1}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x$

(ii). $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}(2\cos x + \sin x)$

(iii). $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{9}[3x\sin x - 2\cos x]$

(iv). $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}[\cos x + (x-1)\sin x]$

(v). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{25}e^x[(10x + 2)\cos x + (5x - 14)\sin x]$.

---------x---------

# তৃতীয় অধ্যায়
## চতুর্থ পরিচ্ছেদ
# ক্লাইরোর সমীকরণ
## [CLAIRAUIT'S EQUATION]

**3-4.1. ক্লাইরোর সমীকরণ [Clairauit's equation]**

$y = px + f(p)$ আকারের সমীকরণকে ক্লাইরোর সমীকরণ বলা হয় যখন $p = \frac{dy}{dx}$.
[An equation of the form $y = px + f(p)$ is called clairauit's equation when $p = \frac{dy}{dx}$.]

**3-4.2.** সমাধান কর [Solve] ঃ $y = px + f(p)$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$y = px + f(p) \cdots (1)$$

(1) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating (1) w. r. to x]

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

বা $p = p + [x + f'(p)]\frac{dp}{dx}$

বা $[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dp}{dx} = 0 \cdots (2)$ অথবা $x + f'(p) = 0 \cdots (3)$

(2) নং কে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি [Integrating (2) w. r. to x]

$p = c$, যখন c অবাধ ধ্রুবক [When c is an arbitrary constant]

এখন p এর মান (1) নং এ স্থাপন করি [Now putting the value of p in (1)]

$$y = cx + f(c)$$

ইহাই (1) নং এর সাধারন সমাধান [This is the general solution of (1)]

আবার (1) নং এবং (3) নং হইতে p কে অপসারন করিয়া আরেকটি সমাধান পাওয়া যায়, যাহাতে কোন অবাধ ধ্রুবক থাকে না। এই সমাধানকে ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান বলা হয়। [Again eliminating p from (1) and (3), to obtain another solution involving no arbitrary constant. This solution is called the singular solution]

নোট ঃ ক্লাইরোর সমীকরণে p এর স্থলে c স্থাপন করিলে সাধারন সমাধান পাওয়া যায়।

**3-4.3. ল্যাগরেঞ্জের সমীকরণ [Lagrange's equation] ঃ**

$y = x\phi(p) + f(p)$ আকারের সমীকরণকে ল্যাগরেঞ্জের সমীকরণ বলা হয়। [An equation of the form $y = x\phi(p) + f(p)$ is called lagrange's equation]

**3-4.4.** সমাধান কর [Solve] ঃ $y = x\phi(p) + f(p)$.

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$y = x\phi(p) + f(p)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating this w. r. to x]

$$\frac{dy}{dx} = \phi(p) + x.\,\phi'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\text{বা } p - \phi(p) = [x\phi'(p) + f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

$$\text{বা } \frac{dx}{dp} = \frac{x\phi'(p) + f'(p)}{p - \phi(p)}$$

$$\text{বা } \frac{dx}{dp} - \frac{\phi'(p)}{p - \phi(p)}x = \frac{f'(p)}{p - \phi(p)}$$

ইহা রৈখিক সমীকরণ। ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক নির্ণয় করিয়া সমাধান করিতে হয়। [This is a linear equation. It can be solved by determining the integrating factor].

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ–1 ঃ** $p^2 - xp + y = 0$ সমীকরণটির সাধারন এবং ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান নির্ণয় কর। [Find the general and singular solution of $p^2 - xp + y = 0$].

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$p^2 - xp + y = 0$$

$$\text{বা } y = xp - p^2 \cdots (1)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating this w. r. to x]

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

বা $p = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$

বা $(x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dp}{dx} = 0 \cdots (2)$ অথবা $x - 2p = 0 \cdots (3)$

$\therefore (2) \Rightarrow dp = 0$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$p = c$ যখন c অবাধ ধ্রুবক [when c is an arbitrary constant]

(1) নং এ $p = c$ স্থাপন করি [Putting $p = c$ in (1)]

$$y = cx - c^2$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [This is the required solution]

(3) নং হইতে পাই [From (3) we get]

$$2p = x$$

বা $p = \frac{x}{2}$

(1) নং এ $p = \frac{x}{2}$ স্থাপন করি [Putting $p = \frac{x}{2}$ in (1)]

$$y = x.\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

বা $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$

বা $y = \frac{x^2}{4}$

বা $x^2 = 4y$

ইহাই ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান [This is the singular solution]

**উদাহরণ–2 ঃ** $x^2(y - px) = p^2y$ সমীকরণটির সম্পূর্ণ এবং ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান নির্ণয় কর। [Find the complete and singular solution of $x^2(y - px) = p^2y$].

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x^2(y - px) = p^2y \cdots (1)$$

ধরি [we put] $x^2 = u$ এবং $y^2 = v$

$$\Rightarrow 2x\,dx = du \text{ এবং } 2y\,dy = dv$$

$$\therefore \frac{2y}{2x}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}\dfrac{dv}{du}$

বা $p = \dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{dv}{du}$

এখন p এর মান (1) নং এ স্থাপন করি [Now putting the value of p in (1)]

$$x^2\left[y - x.\frac{x}{y}\frac{dv}{du}\right] = y.\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

বা $\dfrac{x^2}{y}\left[y^2 - x^2\dfrac{dv}{du}\right] = \dfrac{x^2}{y}\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$

বা $y^2 - x^2\dfrac{dv}{du} = \left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$.

বা $v - u\dfrac{dv}{du} = \left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$

বা $v = u\dfrac{dv}{du} + \left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$

বা $v = uq + q^2 \cdots (2)$ যখন [when] $q = \dfrac{dv}{du}$

ইহা ক্লাইরোর আকারের সমীকরণ [This equation is of clairauit's form]

(2) নং কে u এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating (2) w. r. to u]

$$\frac{dv}{du} = q + u\frac{dq}{du} + 2q\frac{dq}{du}$$

বা $q = q + (u + 2q)\dfrac{dq}{du}$

বা $(u + 2q)\dfrac{dq}{du} = 0$

$\therefore \dfrac{dq}{du} = 0 \cdots (3)$ অথবা $u + 2q = 0 \cdots (4)$

(3) নং কে u এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি [Integrating (3) w. r. to u]

q = c যখন c অবাধ ধ্রুবক [When c is an arbitrary contant]

(2) নং এ q = c স্থাপন করি [Putting q = c in (2)]

$$v = cu + c^2$$

বা $y^2 = cx^2 + c^2$

ইহাই সম্পূর্ণ সমাধান [This is the complete solution]

(4) নং হইতে পাই [From (4) we get]

$$2q = -u$$

বা $q = -\frac{u}{2}$

(2) নং এ $q = -\frac{u}{2}$ স্থাপন করি [Putting $q = -\frac{u}{2}$ in (2)]

$$v = u.\left(-\frac{u}{2}\right) + \left(-\frac{u}{2}\right)^2$$

বা $v = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^2}{4}$

বা $v = -\frac{u^2}{4}$

বা $u^2 + 4v = 0$

বা $x^4 + 4y^2 = 0$

ইহাই নির্ণেয় ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান [This is the required singular solution]

## প্রশ্নমালা-3(D)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $y = px + lnp$

(ii). $y = px + \frac{a}{p}$

(iii). $y = px - e^p$

(iv). $\sin(y - px) = p$

(v). $y = px + p^n$

(vi). $y = px + \sqrt{a^2p^2 + b^2}$

(vii). $y = p(x - b) + \frac{a}{p}$

(viii). $y - px = \sqrt{1 + p^2}$

(ix). $(x^2 - 1)p^2 - 2xyp + y^2 = 1$

2. $(px - y)(py + x) = a^2p$

(ii), (iii) এবং (vii) এর ব্যতিক্রমধর্মী সমাধান বাহির কর [Find the singular solution of (ii), (iii) and (vii)]

## উত্তরমালা

1(i). $y = cx + \ln c$

(ii). $y = cx + \frac{a}{c}$; $y^2 = 4ax$

(iii). $y = cx - e^c$; $y = x\ln x - x$

(iv). $\sin(y - cx) = c$

(v). $y = cx + c^n$

(vi). $y = cx + \sqrt{a^2c^2 + b^2}$

(vii). $y = c(x - b) + \frac{a}{c}$; $y^2 = 4a(x - b)$

(viii). $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$

(ix). $(x^2 - 1)c^2 - 2cxy + y^2 - 1 = 0$

2. $y^2 = cx^2 - \frac{a^2c}{1 + c}$

———×———