A-MECANIQUE
1-La Cinématique

Exercice 1 :
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire d'un mobile et donner sa nature.

a) $\begin{cases} x = 3\cos(2t+1)+2 \\ y = 3\sin(2t+1)-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3\mathrm{t}-2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 2sin2\pi t \\ y = 2cos4\pi t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = \sqrt{4t^2+6} \\ y = -t^2 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2t^3+4t^2+t \\ y = t^3+2t^2+\frac{1}{2}t+7 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x = 3cos2t+1 \\ y = 6sintcost+2 \end{cases}$ h) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

Exercice 2 :
Un point mobile répond aux équations paramétriques : $x = t+1$ et $y = t^2-2t+1$.
1) Quelle est l'équation de la trajectoire ? Quelle est sa nature ? Représenter cette trajectoire
2) Quelle est sa vitesse moyenne et son accélération moyenne entre les instants t_1=1 s et t_2=2 s.
3) Déterminer la vitesse et la position du mobile au sommet de sa trajectoire. Placer le mobile sur sa trajectoire à cet instant.
4) Que vaut le module de la vitesse du mobile en fonction du temps.
5) Exprimer les accélérations tangentielle et normale en fonction du temps ; en déduire le rayon de courbure de la trajectoire à la date t_1.
6) Sur quels intervalles de dates le mouvement est retardé ? Accéléré ?

Exercice 3 :
Une particule se déplace dans une région de l'espace avec une accélération $\vec{a} = -4.10^{13}\vec{k}$.
A l'instant t = 0, elle est animé d'un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = 2.10^6\vec{\imath}+10^7\vec{k}$ au point M_0 (0 ;0 ; 0,01).
1-Le mouvement est-il rectiligne ? justifier votre réponse.
2- Donner les équations paramétriques du mouvement de la particule.
3- En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire.
4- Déterminer les instants entre lesquels le mouvement est accéléré ? Retardé ?
Réponses : 2) $x = 2.10^6t$ et $z = -2.10^{13}t^2+10^7t+0{,}01$;4) mouvement accéléré pour $t > 2{,}5.10^{-7}$ s.

Exercice 4 :
Un mobile M est en mouvement dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
Le vecteur position de M est donnée par : $\overrightarrow{OM} = (bt+c)\vec{\imath}+(dt^2+e\,t+f)\vec{\jmath}$. Avec b, c, d, e et f sont des constantes.
1-a) Sachant qu'à la date t = 0 s ; $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{0}$ et $\vec{v}_0 = \vec{\imath}+4\vec{\jmath}$ et l'équation de la trajectoire du mouvement est $y = -x^2+4x$, déterminer les valeurs de ces constantes.
   b) Déterminer ainsi les expressions des vecteurs position et vitesse de M.
2-A quelle date t_1 passe-t-il par le point A (4 ;0) ?
3-Tracer la trajectoire de M pour $t \in [0,\ t_1]$. Echelle 2 cm pour 1 m.
4-Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse à la date t = 2 s.
5-Déterminer l'expression du vecteur vitesse au point A. Préciser si le mouvement est accéléré ou retardé lors du passage par ce point.

Exercice 5 :
Un point M est en mouvement dans un plan rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$. Ces coordonnées sont en fonction du temps : $x(t) = 2(1+cost)$ et $y(t) = 3(1+sint)$ en unités S.I.
1) Quelle est la trajectoire du point M ?
2) A quelle date la norme du vecteur vitesse est de 2 m.s^{-1}. **Réponses : 1) Ellipse ; 2) $t = \frac{\pi}{2}$ s.**

Exercice 6:

Le mouvement d'un point mobile M dans le plan rapporté a un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) est defini par les équations $\begin{cases} x = 2sin\omega t \\ y = 2cos2\omega t \end{cases}$

Les unités étant celle du système international (S.I).

1) Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la trajectoire du point mobile M.

2) Déterminer le module du vecteur vitesse à la date t. Exprimé cette vitesse en fonction de l'abscisse *x* de M à la même date.

3) Calculer les composantes du vecteur accélération à la date t. en quels points ce vecteur est-il normal à la trajectoire ?

Réponses : 1.T= $\frac{2\pi}{\omega}$; $y = 2 - x^2$; **2)** $\vartheta = 2|\omega cos\omega t|\sqrt{1+16sin^2\omega t}$; $\vartheta = |\omega|\sqrt{(4-x^2)(1+4x^2)}$ *(m/s)*

3) $a_x = -2\omega^2 sin\omega t = -\omega^2 x$; $a_y = -8\omega^2 cos2\omega t = -4\omega^2 y$ A $(-2,-2)$; B $(2,-2)$; S$(0,2)$; C $(\frac{\sqrt{30}}{4},\frac{1}{8})$; D $(-\frac{\sqrt{30}}{4},\frac{1}{8})$

Exercice 7 :

Les équations horaires d'un mouvement plan sont : $\begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{4(1-t^2)} \end{cases}$

Les unités sont celles du système international (S.I)

1) Quelle est la nature de la trajectoire ?

2) Déterminer le vecteur vitesse et sa valeur.

3) En déduire les composantes tangentielles et normales du vecteur accélération (repère de Frenet)

4) Déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération. En déduire que le module du vecteur accélération est indépendant du repère d'étude.

Rép :1) $x^2 + y^2 = 4$ **; 2)** $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\vec{\jmath}$, $v = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}$ **(m.s^{-1}) ; 3) a_t =**$\frac{2t}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$ **et a_N=**$\frac{2}{1-t^2}$ **,(m.s^{-2}) ; 4) a_x=0 ; a_y=** $-\frac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$; **a=** $\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_t^2 + a_N^2} = \frac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$ **m.s^{-2}**

Exercice 8 :

Sur une autoroute deux (2) voitures roulent sur la même file avec une vitesse de 40 m/s. Le pare-chocs avant A de la seconde voiture est à 40 m derrière le pare-chocs arrière B de la première voiture. Le véhicule B freine avec une décélération de 5 m/s^2. Le véhicule A distrait freine 2 s après avec la même décélération.

1) quelle distance parcourt le deuxième véhicule (A) avant de commencer à freiner ?

2) Quelle distance parcourt le premier véhicule (B) pendant ce même temps ?

3) Quelle est la distance séparant A et B lorsque le second véhicule commence à freiner ?

4) Quelle est la vitesse du premier véhicule à ce moment ?

5) En prenant comme origine des dates l'instant où débute le freinage du second véhicule et comme origine des espaces la position où il se trouve alors, établir les équations horaires des mouvements de A et B. Un choc aura-t-il lieu ? Si oui à quelle date ?

Réponses: 1) x_A=80 m ; 2) x_B=110m (A=origine des espaces) ;3) d=30m ;4) v_B=30 m/s ; 5) t=3s.

Exercice 9 :

Un canot descend un fleuve. Sa vitesse par rapport à l'eau est égale à 30 km/h.
Le courant d'eau a une vitesse de v_e == 5 km/h. A un certain moment une bouée tombe du canot. Le navigateur s'en aperçoit une demi-heure plus tard et fait demi-tour. Sachant qu'au retour le moteur fonctionne au même régime qu'aller, quelle distance aura parcourue la bouée au fil de l'eau lorsque le navigateur la rattrapera ? **Réponse : X**= $2v_e t$ =**5 km**

Exercice 10 :

Une automobile est arrêtée à un feu rouge à une distance $d_1 = 3$ m du feu. Quand le feu passe au vert, l'automobile démarre avec une accélération constante de 3 m/s^2. A l'instant de son démarrage, un motard roulant à la vitesse constante de 54 km/h se trouve à une distance d_2=24m de l'automobile avant celle-ci.
1) En choisissant comme origine des dates l'instant où le feu passe au vert et comme origine des espaces la position du feu tricolore, déterminer :
  a) Les dates des dépassements ;
  b) Les abscisses des dépassements ;
  c) Les vitesses de l'automobiles à ces instants.
2) Si le motard roulait à la vitesse de 36 km/h, pourrait-il rattraper l'automobile ? Justifier. Quelle serait la distance minimale entre le motard et l'automobile ?
Réponses : 1) a) $t_1 = 2\,s$; $t_2 = 8\,s$; b) $x_1 = 3\,m$; $x_2 = 93\,m$; 2) Non car $\Delta < 0$; $x_{min} = 7,33$ m.

Exercice 11 :
Un dispositif permet d'enregistrer à des intervalles de temps égaux, les positions d'un point matériel en mouvement rectiligne. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

t(s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x(cm)	05	15	29	47	69	95	124,5	154,5	184,5	214,5	244,5

1) Montrer que le mouvement admet une première phase uniformément accélère et calculer son accélération. Etablir l'équation du mouvement dans cette phase.
2) Montrer que le mouvement dévient uniforme vers la fin de l'enregistrement. Etablir l'équation horaire pour cette phase. On considère qu'à l'instant initial $v=v_0=0,8$ m.s^{-1}
Réponses: 1. *a=4 m.s^{-2} ; x=2t^2+0,8t+0,05 m ; 2. V=3 m.s^{-1} ; x=3t-0,555 m*

Exercice 12 :
Deux rames de métro R_1 et R_2 pénètrent dans une station où les voies sont rectilignes. R_1 entre, à la date $t = 0$, à la vitesse $v_1 = 8\,m.s^{-1}$. R_2 entre, à la date $t = 4$ s, à la vitesse $v_2 = 10\,m.s^{-1}$.
Les deux rames parcourent une distance L = 100 m avant de s'arrêter.
Pendant les phases de freinage, R_1 et R_2 possèdent des mouvements rectilignes uniformément retardés dont les accélérations sont respectivement égales en modules, à a_1 et a_2. La longueur des quais est égale à 100 m et les freinages se produisent dès l'entrée dans la station.
1) Calculer les valeurs numériques de a_1 et a_2.
2) Déterminer la date θ à la quelle a lieu le croisement des deux têtes de train
3) En quel lieu a lieu le croisement.
Réponses : 1) $|a_1| = 0,32\ m.s^{-2}$;$|a_2| = 0,50\ m.s^{-2}$; 2) $\theta \approx$ 8,8 s ; 3) $x = 58\,m$.

Exercice 13 :
Deux véhicules partent en même temps de deux villes A et B en allant à la rencontre l'un de l'autre. Leur mouvement est rectiligne et uniforme.
Quand le plus rapide atteint M, milieu du parcours, la distance qui les sépare est 96 km, ils se rencontrent 45 minutes plus tard.
En fin quand le second atteint le milieu, ils sont à 160 km l'un de l'autre.
Trouver la vitesse des deux véhicules ainsi que la distance des deux villes.
Réponses : $v_1 = 80\ km/h$; $v_2 = 48\ km/h$; $AB = 480\ km$

Exercice 14 :
1) Une rame de métro, partant du repos, parcourt 160 m en 20 s. Calculer l'accélération a_1, supposée constante du mouvement.

2) Partant de la station A, avec l'accélération a_1, au bout d'un temps t_1, le conducteur coupe le courant, compte tenu des actions de résistances, le mouvement a une décélération constante $a_2 = 0,2\ m/s^2$. La rame de métro arrive à la station B avec une vitesse nulle. La distance AB = 500 m.
Soient ℓ_1 et ℓ_2 les distances parcourues au cours de chaque phase du mouvement.
Etablir une relation entre ℓ_1, ℓ_2, a_1 et a_2.
3) Calculer la vitesse maximale de la rame et la durée du trajet AB
Réponses : 1) $a_1 = 0,8\ m/s^2$; 2) $a_1\ell_1 = -a_2\ell_2$; 3) $v_1 = v_{max} = 12,65\ m/s$; $t_{AB} = 79\ s$.

Exercice 15 :
Une rame de métro pénètre dans un tunnel avec un vecteur vitesse de norme v_0. Son mouvement est rectiligne uniformément varié avec le vecteur accélération $\vec{a}$. Elle parcourt 30 m en 2s puis 60 m en 3s.
a) Calculer a et v_0
b) Le mouvement devient uniforme pendant 38 s. Quelle est la distance parcourue ?
c) En fin le métro freine. Son mouvement devient rectiligne uniformément retardé jusqu'à l'arrêt avec un vecteur accélération opposé à celui du premier mouvement.
Calculer la distance totale parcourue depuis l'entrée dans le tunnel.
Réponses : a) $a = 2\ m.s^{-2}$; $v_0 = 13\ m.s^{-1}$; b) $x_3 = 874\ m$; $x = 1096,25\ m$.

Exercice 16 :
Les diagrammes des vitesses montrent qu'une voiture roulant à la vitesse v_1 peut s'arrêter sur une distance l_1. Quand elle roule à la vitesse v_2 elle s'arrête alors sur une distance l_2. En admettant que la durée θ de la réaction du conducteur et l'accélération a supposée constante durant le freinage sont les mêmes dans les deux cas, calculer :
1) Le temps θ de réaction du conducteur.
2) L'accélération a du freinage.
AN : $v_1 = 90$ km/h ; $v_2 = 40$ km/h ; $l_1 = 70$ m ; $l_2 = 20$ m.
NB : La distance d'arrêt du véhicule est parcourue pendant la durée de réaction du conducteur et de la durée de freinage proprement dit.
Réponses : $\theta = \frac{v_1^2 l_2 - v_2^2 l_1}{v_1 v_2 (v_1 - v_2)} = 1\ s$; $a = \frac{v_1 v_2 (v_1 - v_2)}{2(v_1 l_2 - v_2 l_1)} \approx -6,94\ m.s^{-2}$.

Exercice 17 :
Un automobiliste roulant à la vitesse de 40 $m.s^{-1}$ aperçoit à 80 m devant lui un camion roulant à vitesse constante de 15 $m.s^{-1}$ dans la même direction. Si le temps de reflexe de l'automobiliste est de 0,6 s ; quelle doit être la décélération minimale de la voiture afin d'éviter la collision ?
Réponses : $a \approx -4,81\ m.s^{-2}$.

Exercice 18 :
Deux voitures se suivent à une distance d et avec une vitesse v_0. A $t = 0$, la première voiture freine avec une décélération a. La seconde ne commence qu'à freiner au bout d'un temps τ avec une décélération b.
1) Quelle condition doit satisfaire d pour que la seconde voiture s'arrête derrière la première ?
2) Calculer d pour $v_0 = 108$ km/h ; $a = 7,5\ m.s^{-2}$; $\tau = 0,6$ s ; $b = 6\ m.s^{-2}$.
Réponses : 1) $d \geq v_0\left[\tau + \frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]$ (m) ; 2) $d \geq 33$ m.

Exercice 19 :
Une route reliant deux localités A et B présente des parties horizontales, des montées et des descentes. La distance AB=78 km, et quand on marche dans le sens AB la longueur des descentes vaut les $^7/_{10}$ de la longueur des montées.

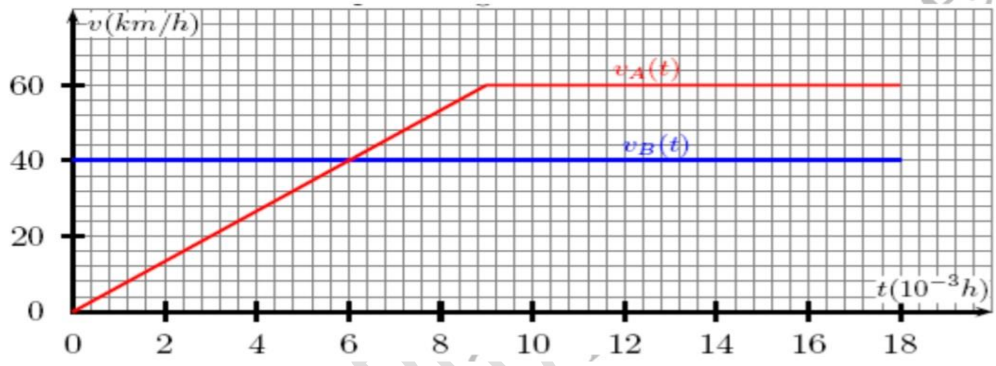
Un cycliste, qui a une vitesse de 25 km/h en terrain horizontal, de 15 km/h en montée et de 30 km/h en descente, va de A à B et revient de B à A. Sachant que la différence du temps qu'il a mis pour faire ces deux trajets est de 24 minutes, on demande :
1) Les longueurs des parties horizontales, des montés et des descentes en allant de A à B ;
2) Les temps employés pour aller de A à B et de B à A.
Réponses : 1) h=10 km ; m=40 km ; d=28 km ; 2) t_{AB} = 4h ; t_{BA}=3h36min

Exercice 20 :

Un cycliste parcourt un même trajet à l'aller et au retour sans s'arrêter.
Sa vitesse est de 20 km/h en montée et 40 km/h en descente. L'aller se compose d'une montée et d'une descente dont la longueur est deux fois plus courte que celle de la montée.
1) Calculer sa vitesse moyenne sur le parcours aller ;
2) Calculer sa vitesse moyenne sur le parcours retour ;
3) Calculer sa vitesse moyenne sur le parcours aller-retour.
Réponses : 1) $v_m = 24$ **km/h ; 2)** $v_m = 30$ **km/h ;** $v_m = 26{,}7$ **km/h.**

Exercice 21 :

Une voiture **A** est arrêtée à un feu rouge .Le feu devient vert et **A** démarre au même moment, une deuxième voiture **B** la dépasse, roulant à vitesse constante. Leurs courbes de vitesse en fonction du temps sont représentées sur la même figure ci-dessous.



1°)- Combien de temps la voiture **A** a-t-elle mis pour avoir la même vitesse que la voiture **B** ?
2°)- A ce moment, à quelle distance en avant de la voiture **A** se trouve la voiture **B** ?
3°)- Quelle est la voiture qui est en tête et de combien après **0.01h** ?
4°)- A quel instant la voiture **A** rattrape –t- elle la voiture **B** ?
Réponses : 1) t = 6.10^{-3}h ; 2) D=0,120 km ; 3) B en tête de x=0,070 km ; 4)t=0,0135 h.

Exercice 22 :

Anatole et Barnabé comparent les performances des voitures télécommandés que le Père Noël leur a apporté. La voiture d'Anatole a une accélération de 2 m.s^{-2} alors que celle de Barnabé accélère à 3 m.s^{-2}, mais la voiture d'Anatole peut atteindre 12 km/h alors que celle de Barnabé plafonne à 10 km/h.
1) Qui gagne la course dans l'allée du jardin, longue de 15 m ?
2) Grand prince, le gagnant accorde une revanche à son malheureux adversaire et lui laisse même choisir la distance de la course.
Quelle distance **d** le perdant doit-il proposer pour être sûr de gagner.
Réponses : 1) Anatole gagne ; 2) d = 6,2 m.