МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Механіко-математичний факультет

Кафедра алгебри та комп’ютерної математики

**Курсовий проект**

Програмування

(назва дисципліни)

на тему: «**Методи знаходження локальних екстремумів для одновимірної функції**»

Виконав: студент 3 курсу групи № 2

Спеціальності “Комп’ютерна математика”

(шифр і назва напряму підготовки (спеціальності))

Тищенко Тимофій Андрійович

(прізвище й ініціали студента)

Керівник:

доцент, к.т.н., Бородін В.А.

(посада, науковий ступінь прізвище й ініціали)

Національна шкала: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Кількість балів: \_\_\_\_\_

Оцінка: ECTS \_\_\_\_\_

Члени комісії:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис)(прізвище й ініціали)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище й ініціали)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище й ініціали)

Вступ

**Екстремум** в математиці - максимальне або мінімальне значення функції на заданій множині . Точка, в якій досягається екстремум, називається точкою екстремуму . Відповідно, якщо досягається мінімум – точка екстремуму називається точкою мінімуму , а якщо максимум – точкою максимуму . У математичному аналізі виділяють також поняття "локальний екстремум" (відповідно мінімум або максимум) .

Завдання знаходження екстремуму виникають у всіх галузях людського знання: теорія автоматичного управління , проблеми економіки , біологія , фізика і т. д.

Існує дуже багато способів знаходити ці точки, але у цій роботі я розібрав та запрограмував 4 з них:

1. Пошук золотого перетину (Golden section search).
2. Тернарній алгоритм пошуку (Ternary search).
3. Метод Ньютона.
4. Метод Брента.

Алгоритми

**1) Пошук золотого перетину**

Пошук золотого перетину (Golden section search) — це техніка пошуку екстремуму (мінімуму чи максимуму) функції всередині заданого інтервалу. Для строго унімодальної функції з екстремумом всередині інтервалу вона знайде цей екстремум, тоді як для інтервалу, що містить кілька екстремумів (можливо, включаючи межі інтервалу), вона збіжиться до одного з них. Якщо єдиний екстремум на інтервалі знаходиться на межі інтервалу, він сходиться до цієї граничної точки. Метод діє шляхом послідовного звуження діапазону значень на заданому інтервалі, що робить його відносно повільним, але дуже надійним. Метод отримав свою назву від того факту, що алгоритм підтримує значення функції для чотирьох точок, три ширини інтервалів яких знаходяться у співвідношенні *φ:1:φ* де *φ* – золотий перетин(golden ration). Ці співвідношення зберігаються для кожної ітерації і максимально ефективними. За винятком граничних точок, при пошуку мінімуму центральна точка завжди менша або дорівнює зовнішнім точкам, гарантують, що мінімум міститься між зовнішніми точками. При пошуку максимуму все навпаки. Пошук золотого перерізу був відкритий Кіфером (1953).

**Опис Алгоритму**

Нехай задана функція



Тоді для того, щоб знайти невизначене значення цієї функції на заданому відрізку, що відповідає критерію пошуку (нехай це буде мінімум), даний відрізок ділиться в пропорції золотого перерізу в обох напрямах, тобто вибираються дві точки 𝑥1 і 𝑥2 такі, що:

Shape

Description automatically generated with medium confidence, де Ф -золотий переріз.

Таким чином:

Shape

Description automatically generated with medium confidence

Тобто точка 𝑥1 ділить відрізок [𝑎,𝑥2] у відношенні золотого перерізу. Аналогічно 𝑥2 ділить відрізок [𝑥1,𝑏] у тій же пропорції. Ця властивість і використовується для побудови ітеративного процесу.

**Алгоритм**

*Крок 1.* Задаються початкові межі відрізку 𝑎,𝑏a,b і точність 𝑒𝑝𝑠eps.

*Крок 2.* Розраховують початкові точки ділення:



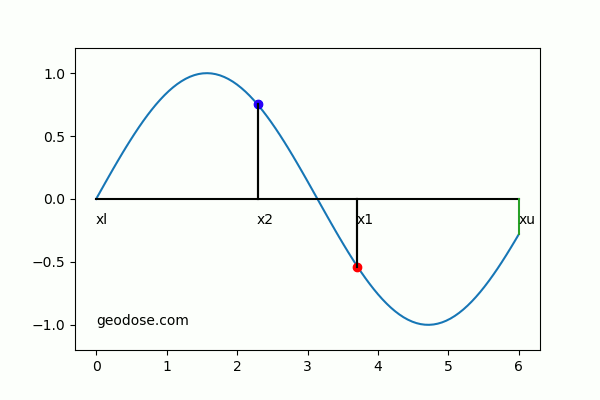
і значення в них цільової функції:

* Якщо 𝑦1>= 𝑦2 (для пошуку max змінити нерівність на 𝑦1<=𝑦2), то 𝑎=𝑥1
* Інкше 𝑏=𝑥2

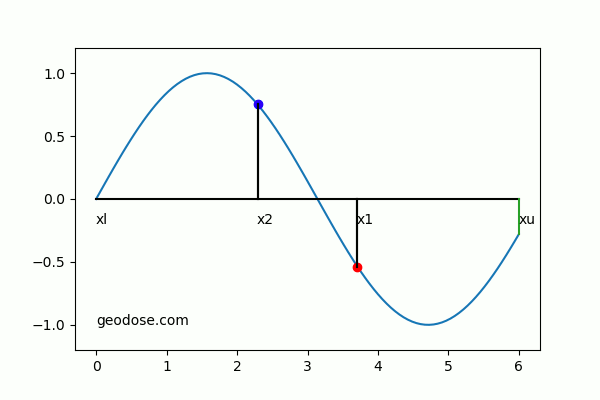
*Крок 3.*

* Якщо |𝑏−𝑎|<𝑒𝑝𝑠, то 𝑥=(𝑎+𝑏)/2 і завершуємо.
* Інакше повернення до кроку 2.

Іллюстарація знаходження точки максимуму за допомогою пошуку золотого перетину:



Точки мінімуму:



**2) Тернарний алгоритм пошуку**

Тернарний алгоритм пошуку (Ternary search) — це техніка для знаходження мінімуму або максимуму унімодальної функції . Потрійний пошук визначає, що мінімум або максимум не може бути в першій третині домену або що він не може бути в останній третині домену, а потім повторюється на решті двох третин. Потрійний пошук є прикладом алгоритму « розділяй і володарюй ».

Припустимо, ми шукаємо максимум 𝑓(𝑥) і що ми знаємо, що максимум лежить десь посередині А і 𝐵. Щоб алгоритм був застосовним, має бути якесь значення 𝑥 такe, що:

* для усіх 𝑎,𝑏 з 𝐴<=𝑎<𝑏<=𝑥, ми маємо 𝑓(𝑎)<𝑓(𝑏) і
* для усіх 𝑎,𝑏 з 𝑥<=𝑎<𝑏<=𝐵, ми маємо 𝑓(𝑎)>𝑓(𝑏).

**Алгоритм ( )**

Дозволяє f(x) бути унімодальною функцією на деякому інтервалі [𝑙;𝑟]. Візьміть будь-які дві точки 𝑚1m1 і 𝑚2m2 в цьому сегменті: 𝑙<𝑚1<𝑚2<𝑟. Тоді є три можливості:

* якщо 𝑓(𝑚1)<𝑓(𝑚2), то необхідний максимум не може бути розташований з лівого боку –[𝑙;𝑚1]. Це означає, що максимум далі має сенс дивитися тільки в проміжку [𝑚1;𝑟]
* якщо 𝑓(𝑚1)>𝑓(𝑚2), що ситуація схожа на попередню, аж до симетрії. Тепер необхідний максимум не може бути в правій частині –[𝑚2;𝑟], тож перейдіть до сегмента [𝑙;𝑚2]
* якщо 𝑓(𝑚1)=𝑓(𝑚2), то обшук слід провести в [𝑚1;𝑚2], але цей випадок можна віднести до будь-якого з двох попередніх (з метою спрощення коду). Рано чи пізно довжина відрізка буде трохи менше заданої константи, і процес можна зупинити.

точки вибору 𝑚1 i 𝑚2:

* 𝑚1=𝑙+(𝑟−𝑙)/3
* 𝑚2=𝑟−(𝑟−𝑙)/3

## 3) Метод Ньютона

У обчисленні метод Ньютона є ітераційним методом для знаходження коренів диференційованої функції 𝐹 , які є розв’язками рівняння 𝐹(𝑥)=0 . Таким чином, метод Ньютона можна застосувати до похідної 𝑓′ двічі диференційованої функції 𝑓, щоб знайти корені похідної (розв’язки 𝑓′(𝑥)=0), також відомі як критичні точки 𝑓. Ці рішення можуть бути мінімумами, максимумами або сідловими точками.

**Робота алгоритму**

Центральною проблемою оптимізації є мінімізація функцій.

Дано двічі диференційовану функцію 𝑓:𝑅→𝑅, ми прагнемо вирішити задачу оптимізації 𝑚𝑖𝑛хє𝑅𝑓(𝑥)).

Метод Ньютона намагається вирішити цю проблему шляхом побудови послідовності 𝑥𝑘 з початкового припущення (початкова точка) 𝑥0є𝑅 що сходить до мінімізатора 𝑥∗ з 𝑓 за допомогою послідовності наближень Тейлора другого порядку 𝑓 навколо ітерацій. Розкладання Тейлора другого порядку 𝑓 навколо 𝑥𝑘 є



Наступна ітерація 𝑥𝑘+1 визначається так, щоб мінімізувати це квадратичне наближення до 𝑡, і налаштування 𝑥𝑘+1=𝑥𝑘+𝑡. Якщо друга похідна додатна, квадратичне наближення є опуклою функцією від 𝑡, а його мінімум можна знайти, встановивши похідну на нуль. Оскільки



досягається мінімум для

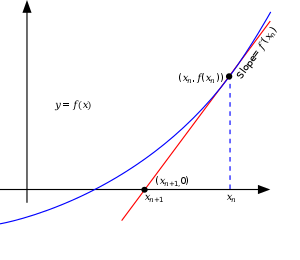
Shape

Description automatically generated with medium confidence

Зібравши все разом, метод Ньютона виконує ітерацію

Shape

Description automatically generated with medium confidence



## 4) Метод Брента

У чисельному аналізі метод Брента являє собою гібридний алгоритм пошуку коренів, що поєднує метод бісекції , метод січної та оборнено-квадратичну інтерполяцію . Він має надійність поділу навпіл, але може бути таким же швидким, як і деякі менш надійні методи. Алгоритм намагається використовувати потенційно швидко збіжний метод січної або обернено-квадратичну інтерполяцію, якщо це можливо, але, якщо необхідно, він повертається до більш надійного методу бісекції. Метод Брента створений Річардом Брентом і ґрунтується на попередньому алгоритмі Теодора Деккера. Отже, метод також відомий як Метод Брента-Деккера.

#### Розберемося з 3 методами, які викристовуюються у методі Брента.

##### ***Метод бісекції***

Метод бісекції також називають методом інтервального вдвічі, методом двійкового пошуку або методом дихотомії. Він заснований на теоремі Больцано для неперервних функцій.

**Теорема Больцано**: якщо функція 𝑓(𝑥)f(x) неперервна на інтервалі [𝑎,𝑏] і 𝑓(𝑎)∗𝑓(𝑏)<0, то існує значення 𝑐ϵ(𝑎,𝑏), для якого 𝑓(𝑐)=0f.

𝑓(𝑎)∗𝑓(𝑏), означає що вони обидва мають протилежні знаки. Значення 𝑥, для якого графік перетинає вісь 𝑥x, є коренем рівняння 𝑓(𝑥)=0. Близькість цього кореня до дійсного кореня залежить від допуску, який ми встановили для алгоритму.

Для даної функції 𝑓(𝑥) метод бісекції працює наступним чином:

* 1) Вибрати 𝑎a і 𝑏b, для яких 𝑓(𝑎)∗𝑓(𝑏)<0.
* 2) Середня точка c обчислюється як середнє значення 𝑎a і 𝑏b, 𝑐=(𝑎+𝑏)/2.
* 3) Оцініти 𝑓(𝑐).
* 4) Якщо 𝑓(𝑐)=0f, ми знайшли корінь. Повернути його (return).
* 5) Якщо 𝑓(𝑐)∗𝑓(𝑏)>0 замінити 𝑏 на 𝑐.
* 6) Перейти до кроку 2 або закінчити, якщо маквсимальна кількість ітерацій досягунта або допустиме відхілення задоволене.

##### ***Метод січної***

Метод січної вважається найбільш ефективним у знаходженні кореня нелінійного рівняння. Це відноситься до типу відкритого кронштейна. Цей метод використовує два початкових припущення та знаходить корінь функції за допомогою інтерполяції. При послідовній ітерації два останніх припущення використовуються для пошуку наступного наближення.

Метод січної працює наступним чином:

* 1) Отримати початкові значення припущень 𝑎,𝑏 і допустиме відхилення 𝑒.
* 2) Оцінити 𝑓(𝑎),𝑓(𝑏).
* 3) 𝑐=𝑏−(𝑓(𝑏)∗(𝑏−𝑎))/(𝑓(𝑏)−𝑓(𝑎)).
* 4) Перейти до кроку 2 або закінчити, якщо 𝑓(𝑐)=0 або |𝑐−𝑏|<е.

##### ***Метод оберненої квадратичної інтерполяції***

У цьому методі скажімо, що є три точки 𝑥𝑛–2, 𝑥𝑛–1і 𝑥𝑛 як початкові значення. Функція буде оцінена в кожній з цих точок, у результаті чого 𝑦𝑛–2=𝑓(𝑥𝑛–2), 𝑦𝑛–1=𝑓(𝑥𝑛–1) 𝑦𝑛=𝑓(𝑥𝑛), відповідно. Якщо вважати, що 𝑓 має обернену квадратичну функцію 𝑔, то 𝑥𝑛–2=𝑔(𝑦𝑛–2),

𝑥𝑛–1=𝑔(𝑦𝑛–1) і 𝑥𝑛=𝑔(𝑦𝑛) і так далі. Цей процес виконується шляхом обчислення параболи, яка проходить через ці три задані точки, і взяття перетину параболи з віссю 𝑥 як нової оцінки кореня. Підігнавши точки за допомогою параболи в 𝑦, маємо:

Text, letter

Description automatically generated

Цю форму також називають поліномом Лагранжа. Встановивши 𝑦=0, нова коренева оцінка, 𝑥𝑛+1, буде обчислена таким чином:

Text, letter

Description automatically generated

Однак він не може обчислити комплексні корені, оскільки завжди перетинатиме вісь 𝑥. Крім того, якщо вибрані три початкові значення припущення дуже далекі від кореня, цей метод не збіжиться.

#### Об'єднаємо ці методи в один, щоб вийшов метод Брента

На кожній ітерації метод Брента-Деккера спочатку пробує крок методу січної або ОКІ. Якщо цей крок незадовільний, що зазвичай означає занадто довгий, занадто короткий або занадто близький до кінцевої точки поточного інтервалу, то крок повертається до кроку поділу навпіл. Цей крок повернення захищає метод від виконання величезної кількості кроків із меншим збільшенням значення кореня.

#### Використання методу Брента для знаходження екстремумів

Метод Брента знаходить корені рівняння 𝑓(𝑥)=0, а як ми знаємо, точки ексремума, це точки в яких 𝑓′(𝑥)=0. Отже перед використанням методу Брента, потрібно продифернціювати нашу функцію. Я цей крок додам одразу до функції у своїй програмі.

Використання програми

Орієнтування у програмі

Кожен метод реалізовний у окремуму файлі, назва якого відповідає назві методу.

Також всі тестові файлі я зробив окремо для кожної функції.

Отже для 4 методів, у мене 8 Python файлів. Та ще один «допоміжний» файл function.py з функціями, які потрібні, але не стосуються методів.

Text

Description automatically generated with low confidence

Використання програми

Всі методи крім метода Ньютона знаходять екстремум для проміжку, який є унімодальний (який має тільки один екстремум), отже потрібно визначити інтервал.

У моїй програмі це змінні **a** і **b**.

Також у методі золотого перетину та тернарного пошуку, потрібно вказати, який екстрмум ми хочемо знайти: точку масимуму, або точку мінімуму.

Я створив для цього змінну **min\_max**, яка дає фунції знати, який екстрмум шукати. Функцію я запрограмував таким чином, щоб воно по цій змінній шукало те, що треба.

Знизу наведен приклад:

Graphical user interface, text, application

Description automatically generated

Щоб змінити інтервал, треба змінити значення **a** і **b**, а щоб змінити яку точку шукати треба вибрати **min\_max = ‘min’ / ‘max’**.

Всі ці значення знаходяться у тестових файлах для методів.

Метод Ньютона я вирішив реалізувати так, щоб знаходило всі екстремуми на інтервалі [-20, 20]. Я це зробив одразу створивши декілька точок припущення (дивитися алгоритм), і для кожної точки запускав метод Ньютона.

Висновки

Ми розглянули 4 методи знаходження екстремумів одновимірної функції, а саме:

1. Пошук золотого перетину (Golden section search).
2. Тернарній алгоритм пошуку (Ternary search).
3. Метод Ньютона.
4. Метод Брента.

Всі вони різні, але більше всього відрізняється метод Брента, бо він у собі об’єдную 3 різні алгоритми, а які використовувати, він вибирає по своїм правилам. Алгоритм намагається використовувати потенційно швидко збіжний метод січної або оборнено-квадратичну інтерполяцію, якщо це можливо, але, якщо необхідно, він повертається до більш надійного методу бісекції.

Тернарний пошук, в свою чергу, такой є цікавим, бо є прикладом викроситання методу розділяй та володаруй (divide and conquer).