

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. Bài toán những con thỏ của Fibonacci. Một người đàn ông đặt 1 cặp thỏ vào 1 ô được bao bởi 4 bức tường. Hỏi có bao nhiêu cặp thỏ ở đó sau 1 năm nếu cặp thỏ (đực và cái) được bỏ vào ban đầu là mới sinh, và tất cả các cặp thỏ đều không có khả năng sinh sản trong tháng đầu tiên nhưng sau đó sẽ sinh ra một cặp đực/cái mới vào cuối mỗi tháng. Cho biết độ phức tạp của bài toán trên?

Giải

Để giải bài toán này, ta cần áp dụng quy luật sinh sản của thỏ. Trong mỗi tháng, một cặp thỏ mới sinh sẽ được thêm vào, và các cặp thỏ trưởng thành có khả năng sinh sản sẽ tạo ra một cặp thỏ con mới. Vì vậy, ta có thể tính toán số cặp thỏ sau mỗi tháng bằng cách sử dụng số cặp thỏ của tháng trước đó cộng với số cặp thỏ mới sinh ra từ các cặp thỏ trưởng thành.

Gọi $F(n)$ là số thỏ sau n tháng:

$$\begin{cases} F(n) = F(n-1) + F(n-2) \text{ với } n > 2 \\ F(1) = F(2) = 1 \end{cases}$$

$$F(3) = F(1) + F(2) = 2$$

$$F(4) = F(2) + F(3) = 3$$

$$F(5) = F(3) + F(4) = 5$$

...

$$F(12) = 144$$

Độ phức tạp là $O(n)$, với n là số tháng.

2. Xét thuật toán đệ quy sau:

Algorithm Riddle ($A[0..n-1]$)

//Input: An array $A[0..n-1]$ of real numbers

if $n = 1$ **return** $A[0]$

else $\text{temp} \leftarrow \text{Riddle}(A[0..n-2])$

if $\text{temp} \leq A[n-1]$ **return** temp

else return $A[n-1]$

a. Thuật toán này cho ra output là gì?

b. Thiết lập và giải hệ thức truy hồi của số lần thực hiện toán tử cơ bản của thuật toán.

Giải

a. Trả về phần tử nhỏ nhất trong mảng.

b. Basic operation: phép so sánh.

Gọi $T(n)$ là số lần thực hiện basic operation, ta có:

$$T(n) = T(n-1) + 1 \text{ với } T(1) = 1$$

$$\Rightarrow T(n) = T(n-1) + 1 = [T(n-2) + 1] + 1$$

$$= T(n-2) + 2 = T(n-3) + 3$$

$$= T(n - (n-1)) + n - 1 = T(1) + n - 1$$

$$= 1 + n - 1 = n$$