Phân Tích Độ Phức Tạp Thuật Toán Đệ Quy
Nhóm 14

Bài 1:
Bài toán là một dạng bài tập về dãy fibonacci. Với F(0) = 1 và F(1) = 1.
Như vậy ta có:

$$F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0$$

- ⇨ Phương trình đặc trưng: $r^2 - r - 1 = 0$

Giải hệ ta có được: $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Do là 2 nghiệm phân biệt: $F(n) = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Vì F(0) = 1 và F(1) = 1 nên ta giải được: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

- ⇨ $F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Bài 2:
a. Thuật toán Riddle trả về phần tử nhỏ nhất trong mảng A.

b. Để thiết lập hệ thức truy hồi, ta giả sử số lượng phép tính cơ bản (basic operation) để tìm giá trị Riddle của một mảng kích thước n là T(n). Ta có thể chia thuật toán thành hai trường hợp như sau:

Nếu n = 1, thuật toán chỉ trả về phần tử đầu tiên của mảng, do đó không có phép tính cơ bản nào được thực hiện. Vì vậy, ta có T(1) = 0.

Nếu n > 1, thuật toán gọi đệ quy Riddle(A[0..n-2]) để tìm giá trị Riddle của mảng A[0..n-2], sau đó so sánh kết quả này với phần tử cuối cùng của mảng A[n-1]. Số lượng phép tính cơ bản để tìm giá trị Riddle của mảng A[n-1] là T(n-1). Vì vậy, số lượng phép tính cơ bản để tìm giá trị Riddle của mảng A[n] là T(n-1) + 1.

Do đó, hệ thức truy hồi cho số lượng phép tính cơ bản T(n) là:

T(n) = 0, n = 1
T(n) = T(n-1) + 1, n > 1

Ta có thể giải hệ thức truy hồi bằng cách suy ra công thức đó là:

T(n) = n - 1

Để chứng minh điều này, ta sử dụng phương pháp quy nạp (induction) như sau:

Bước cơ sở: Với n = 1, ta có T(1) = 0 = 1 - 1, vì vậy công thức đúng cho n = 1.

Bước giả định: Giả sử công thức đúng cho tất cả các giá trị n từ 1 đến k, tức là T(n) = n - 1 với mọi n từ 1 đến k.

Bước chứng minh: Ta cần chứng minh rằng công thức cũng đúng cho n = k+1.
Theo giả định quy nạp, ta có:

T(k+1) = T(k) + 1 = k - 1 + 1 = k

Vì vậy, công thức đúng cho n = k+1.

Do đó, ta kết luận rằng số lượng phép tính cơ bản để tìm giá trị Riddle của một mảng kích thước n là n-1.