

1. Bài toán những con thỏ của Fibonacci. Một người đàn ông đặt 1 cặp thỏ vào 1 ô được bao bởi 4 bức tường. Hỏi có bao nhiêu cặp thỏ ở đó sau 1 năm nếu cặp thỏ (đực và cái) được bỏ vào ban đầu là mới sinh, và tất cả các cặp thỏ đều không có khả năng sinh sản trong tháng đầu tiên nhưng sau đó sẽ sinh ra một cặp đực/cái mới vào cuối mỗi tháng. Cho biết độ phức tạp của bài toán trên?

A, Tính số cặp thỏ sau 1 năm:

Trong tháng đầu tiên chỉ có 1 cặp thỏ ban đầu nên: $F(1) = 1$

Tháng thứ 2 cặp thỏ ban đầu đã lớn nhưng chưa đẻ thêm nên: $F(2) = 1$

Tháng thứ 3, cặp thỏ ban đầu sinh thêm một cặp nên: $F(3) = 2$

Tháng thứ 4, cặp thỏ ban đầu sinh thêm một cặp nữa: $F(4) = 3$

Tháng thứ 5, cặp thỏ ban đầu và cặp thỏ ở tháng thứ 3 đẻ thêm: $F(5) = 5$

Nhận thấy số cặp thỏ ở tháng thứ N sẽ bằng tổng số cặp thỏ của 2 tháng trước đó, ta có phương trình sau:

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$$

Sau một năm số cặp thỏ là: $F(12) = 144$

B, Tính độ phức tạp của bài toán trên:

Ta có:

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$$

$$\Rightarrow F(n) - F(n - 1) - F(n - 2) = 0$$

Viết lại dưới dạng đa thức ta được

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Giải phương trình trên tìm được 2 nghiệm thực phân biệt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Đặt

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Ta được:

$$F(n) = \alpha\varphi^n + \beta(1 - \varphi)^n$$

Do $F(n)$ có dạng hàm mũ nên độ phức tạp là: $\Theta(2^n)$.

2. Xét thuật toán đệ quy sau:

Algorithm Riddle ($A[0..n - 1]$)

//Input: An array $A[0..n - 1]$ of real numbers

if $n = 1$ return $A[0]$

else temp \leftarrow Riddle($A[0..n - 2]$)

if temp $\leq A[n - 1]$ return temp

else return $A[n - 1]$

a. Thuật toán này cho ra output là gì?

b. Thiết lập và giải hệ thức truy hồi của số lần thực hiện toán tử cơ bản của thuật toán.

a, Thuật toán trên tìm ra phần tử nhỏ nhất của một mảng cho trước.

b, Quan hệ phụ thuộc:

$$M(n) = M(n - 1) + 1 \text{ với } n > 1 \text{ và } M(1) = 0$$

Dùng phương pháp thay thế ngược ta có:

$$\begin{aligned} M(n) &= M(n - 1) + 1 \\ &= (M(n - 2) + 1) + 1 \\ &= [(M(n - 3) + 1) + 1] + 1 \\ &= M(1) + n - 1 = n - 1 \end{aligned}$$

Vậy $M(n) = n - 1$