BÀI TẬP VỀ NHÀ

Nhóm 5

1. **Bài toán những con thỏ của Fibonacci. Một người đàn ông đặt 1 cặp thỏ vào 1 ô được bao bởi 4 bức tường. Hỏi có bao nhiêu cặp thỏ ở đó sau 1 năm nếu cặp thỏ (đực và cái) được bỏ vào ban đầu là mới sinh, và tất cả các cặp thỏ đều không có khả năng sinh sản trong tháng đầu tiên nhưng sau đó sẽ sinh ra một cặp đực/cái mới vào cuối mỗi tháng. Cho biết độ phức tạp của bài toán trên?**

Giải:

Số cặp thỏ sau 1 năm?

Gọi $R(n)$ là số cặp thỏ ở cuối tháng thứ n. Ban đầu chỉ có 1 cặp thỏ mới sinh không có khả năng sinh sản trong tháng đầu tiên, do đó $R(0) = R(1) = 1$. Sau đó, tất cả các cặp thỏ (không phải mới sinh) sinh ra một cặp đực/cái vào cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng 2. Vậy, phương trình truy hồi sẽ là

$$R(n) = R(n-1) + R(n-2), \qquad \text{với } n \geq 2,$$
$$R(0) = R(1) = 1.$$

Từ phương trình trên suy ra

$$R(n) - R(n-1) - R(n-2) = 0.$$

Đây là phương trình truy hồi tuyến tính bậc 2 đồng nhất. Ta có phương trình đặc trưng

$$r^2 - r - 1 = 0$$

với 2 nghiệm là $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Do đó phương trình truy hồi trên sẽ có dạng

$$R(n) = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Từ $R(0) = 1$ và $R(1) = 1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} R(0) = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \alpha + \beta = 1 \\ R(1) = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta sẽ có được $\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ và $\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Lúc này, phương trình truy hồi có công thức tổng quát là

$$
\begin{aligned}
R(n) &= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
&= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\phi^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\hat{\phi}^n.
\end{aligned}
$$

Như vậy sau 1 năm, số cặp thỏ là $R(12) = 233$.

Độ phức tạp thuật toán?

Pseudocode của thuật toán này có thể viết như sau:

ALGORITHM $R(n)$

  if $n \leq 1$ **return** 1

  else return $R(n-1) + R(n-2)$

Basic operation của thuật toán chính là phép cộng. Gọi số phép cộng là $A(n)$ khi tính toán $R(n)$. Vậy số phép cộng khi tính $R(n-1)$ và $R(n-2)$ lần lượt là $A(n-1)$ và $A(n-2)$, và cần thêm một phép cộng nữa để tính tổng giữa chúng. Khi đó, phương trình truy hồi của $A(n)$ là

$$
\begin{aligned}
&A(n) = A(n-1) + A(n-2) + 1, \qquad \text{với } n > 1, \\
&A(0) = 0, \qquad A(1) = 0.
\end{aligned}
$$

Phương trình truy hồi $A(n) - A(n-1) - A(n-2) = 1$ là không đồng nhất. Giả sử $A(n) = c$ là một nghiệm riêng thì c phải thỏa mãn

$$c - c - c = 1,$$

tức là $c = -1$.

Xét phương trình truy hồi đồng nhất $A(n) - A(n-1) - A(n-2) = 0$, ta cũng sẽ giải tương tự như ở trên. Vậy lúc này phương trình truy hồi sẽ có công thức tổng quát là

$$A(n) = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1,$$

với $\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ và $\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ có được sau khi giải hệ phương trình suy ra từ $A(0) = 0$ và $A(1) = 0$. Như vậy, khi $n \to \infty$:

$$A(n) = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\phi^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\hat{\phi}^n + 2 \approx \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\phi^n \in \Theta(\phi^n).$$

2. Xét thuật toán đệ quy sau:

ALGORITHM *Riddle* (A[0..$n-1$])

//Input: An array A[0..$n-1$] of real numbers

if $n = 1$ **return** A[0]

else *temp* ← *Riddle*(A[0..$n-2$])

if *temp* ≤ A[$n-1$] **return** *temp*

else return A[$n-1$]

a. Thuật toán này cho ra output là gì?

b. Thiết lập và giải hệ thức truy hồi của số lần thực hiện toán tử cơ bản của thuật toán.

<u>Giải:</u>

a.

Output của thuật toán này là phần tử nhỏ nhất trong mảng.

b.

Basic operation của thuật toán là phép so sánh phần tử (*temp* ≤ A[$n-1$]). Phương trình truy hồi cho số lần thực thi basic operation là

$$C(n) = C(n-1) + 1, \qquad \text{với } n > 1,$$
$$C(1) = 0.$$

Dùng phương pháp thay thế ngược, ta có

$$\begin{aligned} C(n) &= C(n-1) + 1 \\ &= [C(n-2) + 1] + 1 \\ &= C(n-2) + 2 \\ &= [C(n-3) + 1] + 2 \\ &= C(n-3) + 3 \\ &= \cdots \\ &= C(n-i) + i \\ &= \cdots \\ &= C(1) + n - 1 = n - 1 \in \Theta(n). \end{aligned}$$