点与点集

==

$\S$1. 集合及其运算

1. **定义1.1**
   当$B \subset A$时，差集$A - B$称为B关于A的补集，记作$\complement_A B$。
   设$\{A_a, \alpha \in I\}$是一组集，这里I是指标集,α在I中取值，那么它们的并与交分别定义为：

$$\bigcup_{\alpha} A = \{a : 有某个\alpha \in I, 使a \in A_a\}$$
$$\bigcap_{\alpha} A = \{a : 有某个\alpha \in I, 使a \in A_a\}$$

2. **定理1.2** 对于集E与任意一组集A_a，$\alpha \in I$，恒有分配律

$$E \cup (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (E \cap A_\alpha)$$

3. **基本集的定义** 如果研究一个问题时所考虑的一切集都是X的子集，这时称X为基本集。对于任意基本集X，差集$X - A$称为A关于X的补集或简称为A的补集。
4. **定理1.3** 德摩根定理

$\S$2. 映射、集的对等、可列集

1. **定义2.1** 映射、定义域、值域的定义（略）
2. **定义2.2** 互相对等的定义及其性质：(i)自反性;(ii)对称性;(iii)传递性.
3. **可列集**
   自然数集是最简单的无限集。如果一个集合与自然数集对等，就称这个集合为可列集。
4. **定理2.1** 可列个可列集的并集是可列的。
5. **定理2.2** 区间$[0, 1]$中的点是不可列的。

$\S$3. 一维开集、闭集及其性质

1. **定义3.1**
   设E为R中的一点集，$a \in R$，则含有a的任意开区间称为<u>a的邻域</u>。
   对于E中一点a，如果存在a的某个领域(α, β)整个含于E内，这时$a \in (\alpha, \beta) \subset E$，则称$a$为$E$的<u>内点</u>。
   若E的每一点都是E的内点，则称E为<u>开集</u>。
2. **定理3.1** 开集的性质：
   i. 任意个开集的并是开集；
   ii. 有限个开集的交是开集。
3. **定义3.2** 设E为R中的一点集，$a \in R$。若a的任一领域均含有E中除a以外的一点，则称<u>a是E的聚点</u>。
   注意：E的聚点不一定属于E。
4. **定义3.3** 点集E的一切聚点所组成的集称为E的<u>导集</u>，记作E'。$E - E'$中的点称为E的<u>孤立点</u>。
   E的<u>闭包</u>是指集$E \cup E'$，记作$\bar{E}$。若$E' = E$，则称E为<u>完全集</u>。
   如果$\complement E = R - E$为开集，则称E为闭集。
5. **定理3.2** 非空集E为闭集的充要条件是$E' \subset E$。
6. **定理3.3** 任何集E的导集是闭集。
7. **定理3.4**
   i. 设$A \subset B$，则$A' \subset B'$；
   ii. $(A \cup B)' = A' \cup B'$。
8. **定理3.5** 闭集有以下性质：
   i. 任意个闭集的交为闭集；
   ii. 有限个闭集的并为闭集。
9. 取基本集$I = (0, 1)$。$f(x)$是I上的连续实函数的充要条件是：对任何开集G，$f^{-1}(G)$总是开集。
   取基本集$I = [0, 1]$。$f(x)$是I上的连续实函数的充要条件是：对任何闭集G，$f^{-1}(G)$总是闭集。

$\S$4. 开集的构造

1. **定义** 设G是任一非空的有界开集。$\forall x_0 \in G$，$\exists$ 开区间(x, y)使$x_0 \in (x, y) \subset G$。显然，这种开区间有无穷多个，把他们的并记为U，那么U是含有x_0的这种区间的最大集合。即令$U = (\alpha, \beta)$，则有：
   i. $(\alpha, \beta) \in G$；
   ii. $\alpha \overline{\in} G$，$\beta \overline{\in} G$，

   我们把G中具有(i)、(ii)性质的区间称为G的一个<u>构成区间</u>。

2. **定理4.1** 有界非空开集G可表示成至多可列个互不相交的构成区间的并：$G = \cup(\alpha_k, \beta_k)$。这种表示被称为结构表示。
3. **康托(Cantor)三分集**

§5. n维欧几里得空间

1. n维欧几里得空间记作$\mathbb{R}^n$。对于$\mathbb{R}^n$中任意两点

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

之间的距离为

$$\rho(x, y) = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2\}^{1/2}$$

距离有以下性质：
   i. 非负性；
   ii. 对称性；
   iii. 三点不等式。
   一个点集如果有能满足条件(i)~(iii)的距离，则称为距离空间。
2. **定理5.1** R^2中的非空开集G可表示为可列个互不相交的半闭正方形的并。
R^2中的非空集A的直径定义为

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} \rho(x, y).$$

当$d(A) < \infty$时，称A为有界的。
点a与集A的距离定义为

$$\rho(a, A) = \inf_{x \in A} \rho(a, x).$$

可以证明，若A为非空闭集，那么一定$\exists$点$b \in A$使$\rho(a, b) = \rho(a, A)$。

§6. 集的势、序集

1. **势的定义** 假设对所有集合进行分类，彼此相同的分为同一类，不同的分成不同类。对每类集给予一个标志，称这个标志为这类集的势。可列集的势为$\aleph_0$，与区间$[0, 1]$对等的集的势记作$\aleph$，称为连

续集的势。

2. **定理6.1** 设集A的势为μ，用2^μ表示A的一切子集所成的类的势，则有$2^\mu > \mu$。当A是可列集时，记作$2^{\aleph_0}$，有$2^{\aleph_0} = \aleph > \aleph_0$。$A$的所有子集组成的集写作$\mathcal{A}$。
3. **定理6.2** 设λ，μ为两个势，若$\lambda <= \mu$，$\mu <= \lambda$时，则有$\lambda = \mu$。
4. **定义6.1** 对于给定的集X，若在它的元素之间能引进$\leq$满足序公理：
   i. $\forall a \in X, a \leq a$,
   ii. $\forall a, b \in X, if \;\; a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$,
   iii. $\forall a, b, c \in X, if \;\; a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$。
   则称X为带有$\leq$的半序集。如果有
   iv. $\forall a, b \in X, 必有 a \leq b 或 b \leq a 或两者同时成立$
   则称X为带有$\leq$的全序集。
5. **定义6.2** 设X为半序集，X_0为X的子集。如果$b \in X$且对一切$x \in X_0$，有$x \leq b$，则称b为X_0的上界。如果b为X_0的上界，且对X_0的任一上界b'，均有$b \leq b'$，则称b为X_0的上确界。
   下界、下确界的定义亦然。
   设E为一非空集合，它的一切子集构成一个类X，则X为一半序集。
   设X_0为X的子类，易见

$$\sup X_0 = \bigcup_{A \in X_0} A, \inf X_0 = \bigcap_{A \in X_0} A$$

6. **定义6.3** 设X为非空半序集，它的每个非空全序子集均有上确界。取一确定的元$a \in X$与映射$f : X \to X$。如果X的子集A满足以下三个条件：
   i. $a \in A$;
   ii. $f(A) \subset A$;
   iii. $A 的每一个全序子集的上确界都属于 A$,
   则称A为容许集。
7. **定理6.3** 设X为一非空半序集，且X的每一非空全序子集均有一上确界，再设映射$f : X \to X$满足$f(x) \leq x (x \in X)$，那么，必有一个元$c \in X$，使得$f(c) = c$。
8. **定义6.4** 设X为一半序集，$x \in X$。若对任意一个$y \in X$，满足x<=y，即有y=x，则x称为X的极大元。极小元的定义亦然。
9. **定理6.4** 每一个半序集都含有极大全序子集。
10. **定理6.5：佐恩(M.Zorn)引理**
    设X为非空半序集。若X的每一非空全序子集都有上确界，则X有极大元。
11. **定理6.6：策莫罗选择公理**
    设$\mathcal{A}$为一非空集的类。则存在：

$$f : \mathcal{A} \to \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Longrightarrow \forall A \in \mathcal{A}, f(A) \in A$$