可测函数

==

=======

§1. 可测函数的基本性质

1. 设$X=R^1$是基本集，E是X的一个可测子集(有界或无界)，$f(x)$是定义在E上的实函数(其值可以为无限大)。设α是任一实数，用$E(f>\alpha)$表示区间$(\alpha,\infty]$关于映射f的原象$f^{-1}((\alpha,\infty])$，即

$$E(f>\alpha)=\{x:x\in E,f(x)\in(\alpha,\infty]\}$$

2. **定义1.1** 设f是定义在可测集E上的实函数。若对每一实数α，集$E(f>\alpha)$恒(勒贝格)可测，则称f是E上的(勒贝格)可测函数。
   附注1：可测分为博雷尔可测和勒贝格可测，如果这里的可测是博雷尔可测，则相应的f被称为博雷尔可测函数。
3. 设f可测，由等式

$$E(f\geq\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\alpha-\frac{1}{n}\right)$$

   [#]:<>"这里是注释"
   可知$E(f\geq\alpha)$可测。反之，如果给定可测集E上的实函数f，使$E(f=\infty)$与$E(\alpha<f<\infty)$恒可测，则由

$$E(f>\alpha)=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}E(\alpha<f<n)\cup E(f=\infty)$$

   其中$n_0>\alpha$，可知$E(f>\alpha)$可测。因此可得
   定义1.1的另一种形式 设$f(x)$是定义在在可测集E上的实函数，若$E(f=\infty)$可测并且对任意实数$\alpha,\beta(\beta>\alpha)$，集$E(\alpha<f<\beta)$恒可测，则称f为E的可测函数。
   类似地可以把条件“$E(f>\alpha)$恒可测”替换为：
   1.