勒贝格积分

==

$\S$1. 勒贝格积分的引入

1. **定义1.1** 简单函数的勒贝格积分：*(如无特殊说明，总假设E为有界可测集)*
   在E上定义的简单函数$\varphi(x)$的表达式为
   $$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{e_k}(x)$$
   其中$e_k=E(\varphi=y_k)$为互不相交的可测集，y_k互异，$\chi_{e_k}(x)$表示e_k上的特征函数。我们称和数$\sum_{k=1}^{n} y_k m e_k$为简单函数$\varphi(x)$在E上的积分，并记为
   $$\int_E \varphi(x) dm=\sum_{k=1}^{n} y_k m e_k,$$
   dm表示积分运算依赖的是测度m。
2. 简单函数的积分的性质：
   i. 可加性：$\int_{E_1} f dm+\int_{E_2} f dm=\int_E f dm (e=E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2=\emptyset)$
   ii. 齐次性：设$c \in \mathbb{R}, \int(c f) dm=c \int f dm$。
   若可积函数f属于$L^1(x)$，则这个函数的测度具有线性。
   iii. 如果可测函数可分为正部和负部，则有$\int f dm=\int_{+} f dm-\int_{-} f dm$。
3. **定义1.2** 一般可测函数的勒贝格积分：
   设f(x)是E上的可测函数。当$f(x) \geq 0$，取$\varphi(x)$为任意满足$0 \leq \varphi(x) \leq f(x)(x \in E)$的简单函数，定义$f(x)$在E上的积分为
   $$\int_E f(x) dm=\sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi(x) dm$$
   如果上式右边为一非负有限值，则称为f(x)在E上可积；如果为$+\infty$，则称为$f(x)$在E上的积分为$+\infty$。
   当$\int_E f_{+}(x) dm$与$\int_E f_{-}(x) dm$不同时为$+\infty$时，定义$f(x)$在E上的积分为
   $$\int_E f(x) dm=\int_E f_{+}(x) dm-\int_E f_{-}(x) dm$$

只有当上式右边两项都是有限数时，即f(x)的积分是有限的，我们称f(x)在E上可积，记为$f \in L_E$或$f \in L$。其他情况只能说f(x)在E上有积分($+\infty$、$-\infty$分别对应$+\infty - c$、$c - \infty, c \in R$)。出现$\infty - \infty$时积分没有意义。

4. 一般可测函数积分的性质：
   i. 如果可测函数g(x)、f(x)在E上几乎处处满足$0 \le g(x) \le f(x)$，则当f可积时，g也可积。
   ii. 有界可测函数必可积，可积函数必几乎处处有限。
   iii. $f(x)$与$|f(x)|$的可测性相同。
   iv. 在无界集上的积分：设f(x)是定义在R^n空间上的可测函数，取一渐张区列$\Delta_k : \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots$，且$\bigcup_k \Delta_k = R^n$。若极限

   $$\lim_{k \to \infty} \int_{\Delta_k} |f(x)| dm$$

   存在且有限，就称$f(x)$在R^n上可积。
   v. 勒贝格积分的几何意义：

$\S$2. 积分的性质

1. **定理2.1** 有限可加性：设f(x)是有界可测集E上的可积函数，$E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k, E_k$等都可测，且两两互不相交，则：

$$\int_E f(x)dm = \int_{E_1} f(x)dm + \int_{E_2} f(x)dm + \cdots + \int_{E_n} f(x)dm.$$

2. **定理2.2** 绝对连续性：设f(x)在E上可积，则$\forall \varepsilon > 0$，有$\delta > 0$，使当$mE < \delta (e \in E)$时，有

$$\left| \int_e f(x)dm \right| < \varepsilon.$$

3. **定理2.3 σ可加性**：设f(x)为有界可测集E上的可积函数，$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k$等都是可测的且两两互不相交的，则

$$\int_E f(x)dm = \int_{E_1} f(x)dm + \int_{E_2} f(x)dm + \cdots + \int_{E_k} f(x)dm + \cdots.$$

4. **基本引理** 设f(x)是E上的非负可积函数，$\{f_n(x)\}$是满足条件

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots, \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)(x \in E)$$

的简单函数列，则

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty} f_n(x)dm.$$

注：若不要求f(x)可积但f(x)有积分，结论仍然正确；如果f(x)不可积，得到$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm = \infty$.

总结：基本引理的结论可以写成

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

5. **勒贝格积分的线性**：
   i. **定理2.4** 齐次性：设f(x)在E上可积，则$\forall c \in R, cf(x)$也可积，并且$c\int_E f(x)dm = \int_E cf(x)dm.$
   ii. **定理2.5** 可加性：设f，g是E上两可积函数，则f+g也可积，且$\int_E f(x)dm + \int_E g(x)dm = \int_E (f+g)(x)dm.$
6. **定理2.6** 设f,g在E上都可积，且$f(x) \leq g(x)$，则$\int_E f(x)dm \leq \int_E g(x)dm$。
7. **定理2.7** 唯一性定理：$\int_E |f(x)|dm = 0$的充要条件是$f \sim 0$.
8. **推论** 若$f(x) \sim g(x)$，则由f(x)的可积性可以推出g(x)的可积性，且积分值相同。