勒贝格积分

===

$\S$1. 勒贝格积分的引入

1. **定义1.1** 简单函数的勒贝格积分：*(如无特殊说明，总假设E为有界可测集)*
   在E上定义的简单函数$\varphi(x)$的表达式为
   $$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\chi_{e_k}(x)$$
   其中$e_k=E(\varphi=y_k)$为互不相交的可测集，y_k互异，$\chi_{e_k}(x)$表示e_k上的特征函数。我们称和数$\sum_{k=1}^{n}y_kme_k$为简单函数$\varphi(x)$在E上的积分，并记为
   $$\int_E\varphi(x)dm=\sum_{k=1}^{n}y_kme_k,$$
   dm表示积分运算依赖的是测度m。
2. 简单函数的积分的性质：
   1. 可加性：$\int_{E_1}fdm+\int_{E_2}fdm=\int_E fdm(e=E_1\cup E_2,E_1\cap E_2=\emptyset)$
   2. 齐次性：设$c\in\mathbb{R},\int(cf)dm=c\int fdm$。
      若可积函数f属于$L^1(x)$，则这个函数的测度具有线性。
   3. 如果可测函数可分为正部和负部，则有$\int fdm=\int_+ fdm-\int_- fdm$。
3. **定义1.2** 一般可测函数的勒贝格积分：
   设f(x)是E上的可测函数。当$f(x)\geq 0$，取$\varphi(x)$为任意满足$0\leq\varphi(x)\leq f(x)(x\in E)$的简单函数，定义$f(x)$在E上的积分为
   $$\int_E f(x)dm=\sup_{0\leq\varphi\leq f}\int_E\varphi(x)dm$$
   如果上式右边为一非负有限值，则称为f(x)在E上可积；如果为$+\infty$，则称为$f(x)$在E上的积分为$+\infty$。
   当$\int_E f_+(x)dm$与$\int_E f_-(x)dm$不同时为$+\infty$时，定义$f(x)$在E上的积分为
   $$\int_E f(x)dm=\int_E f_+(x)dm-\int_E f_-(x)dm$$
   只有当上式右边两项都是有限数时，即f(x)的积分是有限的，我们称f(x)在E上可积，记为$f\in L_E$或$f\in L$。其他情况只能说f(x)在E上有积分($+\infty$、$-\infty$分别对应$+\infty-c$、$c-\infty,c\in R$)。出现$\infty-\infty$时积分没有意义。
4. 一般可测函数积分的性质：

i. 如果可测函数g(x)、f(x)在E上几乎处处满足$0 \leq g(x) \leq f(x)$，则当f可积时，g也可积。

ii. 有界可测函数必可积，可积函数必几乎处处有限。

iii. $f(x)$与$|f(x)|$的可测性相同。

iv. 在无界集上的积分：设f(x)是定义在R^n空间上的可测函数，取一渐张区列$\Delta_k: \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots$，且$\bigcup_k \Delta_k = R^n$。若极限

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\Delta_k} |f(x)| dm$$

存在且有限，就称$f(x)$在R^n上可积。

v. 勒贝格积分的几何意义：

§2. 积分的性质

1. **定理2.1** 有限可加性：设f(x)是有界可测集E上的可积函数，$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, E_k$等都可测，且两两互不相交，则：

$$\int_E f(x) dm = \int_{E_1} f(x) dm + \int_{E_2} f(x) dm + \cdots + \int_{E_n} f(x) dm.$$

2. **定理2.2** 绝对连续性：设f(x)在E上可积，则$\forall \varepsilon > 0$，有$\delta > 0$，使当$mE < \delta(e \in E)$时，有

$$\left| \int_e f(x) dm \right| < \varepsilon.$$

3. **定理2.3 σ可加性**：设f(x)为有界可测集E上的可积函数，$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k$等都是可测的且两两互不相交的，则

$$\int_E f(x) dm = \int_{E_1} f(x) dm + \int_{E_2} f(x) dm + \cdots + \int_{E_k} f(x) dm + \cdots.$$

4. **基本引理** 设f(x)是E上的非负可积函数，$\{f_n(x)\}$是满足条件

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots, \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)(x \in E)$$

的简单函数列，则

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n \to \infty} f_n(x) dm.$$

注：若不要求f(x)可积但f(x)有积分，结论仍然正确；如果f(x)不可积，得到$\lim\limits_{n \to \infty} \int_E f_n(x) dm = \infty.$

总结：基本引理的结论可以写成

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

5. **勒贝格积分的线性**:
   i. **定理2.4** 齐次性：设f(x)在E上可积，则$\forall c \in R, cf(x)$也可积，并且$c\int_E f(x)dm = \int_E cf(x)dm.$
   ii. **定理2.5** 可加性：设f，g是E上两可积函数，则f+g也可积，且$\int_E f(x)dm + \int_E g(x)dm = \int_E (f+g)(x)dm.$
6. **定理2.6** 设f, g在E上都可积，且$f(x) \le g(x)$，则$\int_E f(x)dm \le \int_E g(x)dm$。
7. **定理2.7** 唯一性定理：$\int_E |f(x)|dm = 0$的充要条件是$f \sim 0.$
8. **推论** 若$f(x) \sim g(x)$，则由f(x)的可积性可以推出g(x)的可积性，且积分值相同。
9. **引理2.1** 设f(x)是E上的可积函数，那么$\forall \varepsilon$，都$\exists f(x) \in E$，f(x)是简单函数，使

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|dm < \varepsilon$$

10. **引理2.2** 设E是闭区间[a, b]上的可测集，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists [a,b]$上的连续函数g(x)，使

$$\int_{[a,b]} |\chi_E(x) - g(x)|dm < \varepsilon,$$

$\chi_E(x)$为E的特征函数。

11. **定理2.8** 设f(x)是[a, b]上的可积函数，则$\forall \varepsilon > 0$，必然$\exists [a,b]$上的连续函数g(x)，使

$$\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|dm < \varepsilon.$$

定理2.8的另一种形式：当$\sup |f(x)| = M < \infty, \sup |g(x)| \le M.$

§3. 积分序列的极限

1. **定理3.1** 设$f(x), u_n(x)(n = 1, 2, \dots)$都是E上的非负可测函数，而$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，则

$$\int_E f(x)dm = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dm.$$

2. **定理3.2 列维(Levi)定理** 设可测函数列满足下列性质

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots, \ \lim f_n(x) = f(x),$$

则$f_n(x)$的积分序列收敛于f(x)的积分：

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

注：定理3.2并未假定f(x)的可积性，但当极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n dm$存在且有限时，则f(x)可积，因为如果f(x)不可积，根据定理3.2，将有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n dm=\infty.$

3. **定理3.3 法杜(Fatou)定理** 设f(x)是非负可测函数列，则

$$\int_E \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)dm \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dm.$$

4. **定理3.4 <u>勒贝格控制收敛定理</u>**
设可测函数列$\{f_n(x)\}$满足以下条件：$f_n(x)\exists\lim f_n(x), f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，且$\exists g(x)$使

$$|f_n(x)|\le g(x)\ (x\in E, n=1,2,\dots) \tag{1}$$

(g(x)为可测函数)，那么，f(x)可积且有

$$\int_E f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm. \tag{2}$$

推论 设$mE<\infty$，E上可测函数列$\{f_n(x)\}$满足$|f_n(x)|\le C\ (x\in E, n=1,2,\dots)$，C为常数，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，则f(x)可积且有(2)式成立。
注一：3.4的条件可以作明显的减弱，例如不等式(1)改为在E上几乎处处成立，极限$\lim_{n\to\infty}f_n(x)$也只需几乎处处存在，其他结论保持不变。这个注对3.1—3.3都成立。
注二：3.4可推广到含有连续参变量$\alpha\in I$的情形，即设含有连续参变量α的函数族$f_\alpha(x)$满足

$$|f_\alpha(x)|\le g(x)\quad (x\in E,\alpha\in I),$$

而g(x)可积，$\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}f_\alpha(x)=f(x)$($\alpha_0$是I上一聚点)，则f(x)可积且有(2)式成立。

5. **定理3.5** 设$mE<\infty$，E上可测函数列$\{f_n(x)\}$满足条件：

$$|f_n(x)|\le g(x)\quad (x\in E, n=1,2,\dots)$$

g(x)可积，又设$f_n(x)$测度收敛于f(x)。那么f(x)可积且

$$\int_E f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

§4. 勒贝格积分与黎曼积分的比较

勒贝格积分简称L积分，黎曼积分简称R积分

1. L积分比R积分的可积函数的范围更广泛。
2. **定理4.1** 函数f(x)在[a, b]上R可积的充要条件是，当$\lambda\to 0$时，大和S和小和s趋于同一极限I。
3. **定理4.2** 定义在有限区间上的函数如果R可积，则必L可积，且积分值相等。
4. 如果令

$$m(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{t\in(x-\delta,x+\delta)} \{f(t)\},$$
$$M(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{t\in(x-\delta,x+\delta)} \{f(t)\},$$

可以证明

i. $f(x)$在点x处连续的充要条件是m(x)=M(x)；
ii. $\lim_i \overline{f_i}(x) = M(x),\ \lim_i \underline{f_i}(x) = m(x)(\lambda_i \to 0)$.

§5. 乘积测度和傅比尼定理(选修)

§6. 微分与积分

1. **定义6.1** 设f(x)是[a, b]上的有限增函数，f(x)的不连续点至多为可列集，用$\{\xi_k\}$表示f在区间(a, b)内的不连续点集。令

$$s(x) = \begin{cases} (f(a+0)-f(a)) + \sum\limits_{a<\xi_k<x} (f(\xi_k+0)-f(\xi_k-0)) + (f(x)-f(x-0)), & a < x \le b \\ 0, & x = a \end{cases}$$

我们称s(x)为f(x)的<u>跳跃函数</u>。称$f(\xi_k+0)-f(\xi_k-0)$为f(x)在ξ_k的<u>跃度</u>，同理有在a、b上的跃度。显然，s(x)在[a, b]上处处非负。若f(x)处处连续，则$s(x)\equiv 0$。若f(x)只有有限个不连续点，则s(x)为简单函数。一般情况下，s(x)是一个增函数，每一个ξ_k都是它的不连续点，且跃度与f(x)相同。

2. **定理6.1** 定义于[a, b]上的增函数f(x)可分解为一连续增函数与f(x)的跳跃函数之和。
3. **定义6.2** 设ff(x)是定义于区间[a, b]上的有限函数，$x_0 \in [a,b]$。若∃序列$h_n \to 0(h_n) \ne 0$，使极限

$$\lim_n \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \lambda$$

存在，则称λ为f(x)在x_0的一个<u>列导数</u>，记作$\lambda = Df(x_0)$。λ的值与序列h_n相关。若f(x)x_0的一切可能存在的列导数相等，则称f(x)于x_0(广义)<u>可微</u>。

4. **定义6.3** 设E为数直线上的任意子集，$\mathcal{M} = \{d\}$是长度为正的闭区间组成的集。若对于$\forall x \in E$，恒有一区间列$d_n \in \mathcal{M}$，使得

$$x \in d_n(n=1,2,\cdots), \quad md_n \to 0$$

则称<u>$\mathcal{M}$依维塔利(Vitali)意义覆盖E</u>。

5. **定理6.2 维塔利引理** 设E为有界集，$\mathcal{M}$依维塔利意义覆盖E。则可由$\mathcal{M}$中选出有限个或可列个闭区间集$\{d_k\}$，使

$$m\left(E - \bigcup_k d_k\right) = 0, \quad d_k \cap d_{k'} = \emptyset\ \ (k \ne k')$$

推论 设有界集E依维塔利意义被闭区间集$\mathcal{M}$所覆盖，则$\forall\varepsilon>0$，可由$\mathcal{M}$中选有限个互不相交的闭区间$d_1,d_2,\ldots,d_n$，满足$m^*\left(E-\bigcup_{k=1}^{n}\right)<\varepsilon$。

6. **引理6.1** 设f(x)为[a, b]上的严格增函数。令E为这样的点x所组成的集，则∃一个列导数$Df(x)\leq p$，p为一非负常数。则

$$m^*f(E)\leq pm^*E,$$

这里的f(E)表示E的象集$\{f(x):x\in E\}$。
7. **引理6.2** 设f(x)为[a, b]上的严格增函数。令E表示这样的点x所组成的集，则∃一个列导数$Df(x)\leq q,q\leq 0$且为常数，使$m^*f(E)\leq qm^*E.$
8. **定理6.3** 设f(x)为[a, b]上的单调函数，则它在这个区间上几乎处处存在有限导数。
9. **定理6.4** 设f(x)是区间[a, b]上的增函数。则$f'(x)$可积，且有

$$\int_a^b f'(x)dm\leq f(b)-f(a)$$

10. **定义6.4** 设f(x)是区间[a, b]上的有限函数，考察区间[a, b]的任一组分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

当分点变动时，称上确界

$$\sup_{(x_0,x_1,\ldots,x_n)}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

为f(x)在[a, b]上的<u>总变分</u>，并记为$\bigvee_a^b(f)$。

若$\bigvee_a^b(f)<\infty$，则称f(x)为[a, b]上的<u>囿变函数</u>。

显然，若f(x)时[a, b]，则它在任一子区间$[a,t](a<t\leq b)$也是囿变函数，囿变函数关于线性计算是封闭的，一个囿变函数的绝对值函数也是囿变函数，单调函数显然是囿变的。
11. **定理6.5** f(x)是区间[a, b]上的囿变函数的充要条件时，它可以表示成两个单调增函数的差。
12. **定理6.6** 在闭区间上定义的囿变函数恒可表达为它的跳跃函数和一个连续囿变函数的和。
13. **定义6.5** 设f(x)是[a, b]上的囿变函数。考察[a, b]的任意分组点:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

令$P=\sum'[f(x_i)-f(x_{i-1})],N=-\sum''[f(x_i)-f(x_{i-1})]$，其中$'$表示对所有使$f(x_i)-f(x_{i-1})\geq 0$的i求和，$''$表示对剩余的i求和。当用区间[a, x]代替[a, b]时，相应的P、N分别记作P(x)、N(x)。当分组点变动时，取上确界得：

$$p(a,b)=\sup P,\quad n(a,b)=\sup N.$$

视上限b为变元x时，即得p(a, x)、n(a, x)，简记为p(x)、n(x)，并分别称为f(x)的<u>正变分(函数)</u>、<u>负变分(函</u>

数)。
14. 囿变函数的标准分解为$f(x)=p(x)-n(x)+f(a)$。
15. **定理6.7** 设f(x)是[a, b]上的囿变函数，f(a)=0.若f(x)有表示$f(x)=p_1(x)-n_1(x)$，这里的p_1,n_1均为增函数，且$p_1(a)=n_1(a)=0$。那么$p_1(x)-p(x)$、$n_1(x)-n(x)$也是非负的增函数，这里的p，n分别表示f的正变分和负变分。
当f(a)=0时，对于f(x)的任何单调(增加)分解$f(x)=p_1(x)-n_1(x),p_1(x)=0$，则必∃增函数r(x)满足：
$$p_1(x)=p(x)+r(x),\ n_1(x)=n(x)+r(x),\ r(a)=0$$
16. **定义6.6** 设$(a_1,b_1),(a_2,b_2),...$表示[a, b]中任意有限个互不相交的区间所组成的区间系，如果当$m(\bigcup\limits_k(a_k,b_k))\to0$，有
$$\sum_k[f(b_k)-f(a_k)]\to0,$$
则称f(x)为[a, b]上的绝对连续函数。
17. **引理6.3** 设绝对连续函数的导函数$f'(x)$几乎处处为零，则f(x)为常数。
18. **引理6.4** 设g(x)为区间[a, b]上的可积函数，则函数
$$f(x)\equiv\int_a^x g(t)dm+C,\quad C\text{为常数}$$
的导数几乎处处存在，且有$f'(x)\sim g(x)$。
19. **定理6.8** f(x)为[a, b]上的绝对连续函数的充要条件是：存在可积函数g(x)，使等式$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)dm$成立。
20. 绝对连续形式的牛顿-莱布尼茨公式：
$$\int_a^b f'(x)dm=f(b)-f(a).$$
21. **定义6.7** 设r(x)为连续囿变函数且不等于常数，$r'(x)\sim0$，则称r(x)为奇异函数。
22. **定理6.9** 定义于区间[a, b]上的囿变函数f(x)可以分解为
$$f(x)=\varphi(x)+r(x)+s(x),$$
其中$\varphi(x)$为绝对连续函数，r(x)为奇异函数或0，而s(x)为f(x)的跳跃函数。
当f(x)连续时，s(x)消失；当f(x)绝对连续时，r(x)与s(x)均消失。

§7. 勒贝格-斯蒂杰积分

勒贝格-斯蒂杰(Lebesgue-Stieltjes interal)简称LS积分

1. LS积分中使用的是μ测度，如果$\mu^*E=\mu_*E$，称E为可测，这时E的测度定义为$\mu E=\mu^*E$。
E为μ可测的充要条件是：$\forall A\in[a,b]$，有

$$\mu^* A=\mu*(A\cap E)+\mu^*(A\cap \complement E).$$

一切μ可测的集类用$\mathcal{M}_\mu$记之，$\mathcal{M}_\mu$构成一个σ环。关于μ完全可加性成立。

2. **引理7.1** 设μ_1,μ_2均为增函数，且$\forall[\alpha,\beta]$，有$\mu_1(\beta)-\mu_1(\alpha)\le\mu_2(\beta)-\mu_2(\alpha)$，则有$\mathcal{M}_{\mu_2}\subset\mathcal{M}_{\mu_1}$。
3. **引理7.2** 设μ_1,μ_2为增函数，则$E\in\mathcal{M}_{\mu_1+\mu+2}$的充要条件是$E\in(\mathcal{M}_{\mu_1}\cap\mathcal{M}_{\mu_2})$。
4. **引理7.3** 函数f关于μ为LS可积可记为$f\in L_\mu$。设μ_1,μ_2为有界增函数，且$\forall(\alpha,\beta)$有$\mu_1(\beta)-\mu_1(\alpha)\le\mu_2(\beta)-\mu_2(\alpha)$，则当f关于$\mu_2$LS可积时，f关于$\mu_1$也LS可积。
5. **引理7.4** 设μ_1,μ_2均为有界增函数，若函数$f\in L_{\mu_1\cap\mu_2}$，则$f\in L_{\mu_1+\mu_2}$，且有

$$\int_E fd(\mu_1+\mu_2)=\int_E fd\mu_1+\int_E fd\mu_2\text{。}$$

6. **定义7.1** 设μ为囿变函数。μ在$[\alpha,x]$的总变分、正变分、负变分分别为v(x), p(x), n(x)。设$f\in L_v$，则称f<u>关于μ为LS可积</u>，并且它的积分值定义为

$$\int_E fd\mu=\int_E fdp-\int_E fdn.$$

7. RS积分(黎曼-斯蒂杰积分)：设$f(x)$是$[a,b]$上的实有限函数，$\mu(x)$是$[a,b]$上的囿变函数，任取$[a,b]$上的分组点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

并且$\forall\xi_i\in[x_i,x_{i+1}](i=1,2,\cdots,n)$，作和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]$$

如果当$\lambda_i=\max(x_{i+1}-x_i)\to 0$时，它有有限极限$I$，那么称f关于μ为<u>RS可积</u>。且它的积分值I记为$\int_a^b f(x)d\mu(x)$.