勒贝格测度

===

$\S$1. 引言

1. **测度公理**:
   i. 非负性: $mI \leq 0$;
   ii. 有限可加性: $if\ I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow m(I_1 \cup I_2) = mI_1 + mI_2$
   iii. $m[0,1] = 1$。

$\S$2. 有界点集的外、内测度·可测集

1. **定义2.1** 设G为非空开集，则G有结构表示:

   $$G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$$

   其中(α_k, β_k)等互不相交，它们时G的构成区间。我们规定开集G的测度为一切构成区间的长度的和，并记作mG:

   $$mg = \sum_k (\beta_k - \alpha_k).$$

   显然，对任何自然数n，有$\bigcup_{k=1}^n (\alpha_k, \beta_k) \subset (a, b)$，从而推出

   $$\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) \leq b - a.$$

   令$n \to \infty$，即得到$\sum_{k=1}^\infty (\beta_k - \alpha_k) \leq b - a < \infty$，正向级数$\sum_{k=1}^\infty (\beta_k - \alpha_k)$收敛。
2. **定义2.2** 设F为闭集，任取一个包含F的开区间(a, b)，令G=(a, b) - F，则G为有界开集。定义闭集F的测度为

   $$mF = b - a - mG$$

3. **定理2.1** 开集的性质:

   i. 单调性：设G_1、G_2是两个有界开集，且$G_1 \subset G_2$，则$mG_1 \leq mG_2$；
   ii. 可加性：设有界开集G是有限个或可列个开集G_1，G_2，...的并集，则$mG \leq \sum_k mG_k$(半可加性)；若G_k互不相交，则$mG = \sum_k mG_k$(完全可加性)。
4. **引理2.1** 设F_1，F_2，$\ldots$，F_n均为闭集，$F_k \subset (\alpha_k, \beta_k)$，k=1，2，...，n，且$(\alpha_k, \beta_k)$互不相交，则

$$m\left(\bigcup_{k_1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} mF_k.$$

5. **定理2.2** 设F为闭集，G为开集，且$F \subset G$，则 $m(G - F) = mG - mF.$
6. **定义2.3** 设E是一个有界集，所有包含E的开集的测度的下确界称为E的<u>外侧度</u>，并记为m^*E：

$$m^*E = \inf_{G \supset E} mG.$$

   所有被包含于E中的闭集的测度的上确界称为E的<u>内侧度</u>，并记为m_*E：

$$m_*E = \sup_{F \subset E} mF.$$

   $m^*E \geq m_*E$，即任何有界集的内测度均不超过外侧度。
7. **定义2.4** 设E为有界集，当$m^*E = m_*E$时，称E为<u>勒贝格可测的</u>，简称E为<u>可测的</u>。这时E的内测度或外侧度都称为E的<u>测度</u>，几位mE。

$\S$3. 可测集的性质

1. **定理3.1** 有界集E为可测的充要条件是：$\forall \epsilon > 0, \exists 开集 G \supset E 与闭集 F \subset E$，使$m(G - F) < \epsilon$。
2. **定理3.2**
   i. 设基本集为$X = (a, b)$，若E可测，则E关于X的补集$\complement E$也可测。
   ii. 若E_1、E_2可测，则$E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 - E_2$均可测，如果$E_1, E_2$不相交，则$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$。
3. **定理3.3** 设E_1, E_2是两个可测集，$E_1 \subset E_2$，则$mE_1 \geq mE_2$(测度的单调性)。
4. **定理3.4**
   i. 设$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$，若每个$E_k$均可测，则E也可测。如果$E_k$互不相交，则还有$mE = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k$(测度的<u>完全可加性</u>)。
   ii. 设$E = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$，则E也可测(可测集关于可列并、可列交运算的<u>封闭性</u>)。
5. 因为任意一点的测度为0，所以任何可列集的测度为0.

6. 若3.4中的E_k不一定可测，则

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^* E_k,$$

   这叫做外侧度的半可加性。
7. 设(a,b)是基本集，当E或$\complement E$可测时，有等式

$$mE + m\complement E = b - a.$$

   当E未必可测时，我们有
   引理3.1 设$E \subset (a,b)$，$\complement E$是E关于(a,b)的补集。则有

$$mE + m^*\complement E = b - a$$

   这说明集E的内测度可以通过它的补集的外侧度来定义。
8. **定理3.5** 有界集E可测的另一个充要条件：对任何集A，等式$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \complement E)$成立。
9. **定理3.6**
   i. $\{E_k\}$是基本集(a,b)中的渐张可测集列，即$E_1 \subset E_2 \subset \ldots$，则$E = \cup_{k=1}^{\infty}$是可测的，且$mE = \lim\limits_{k\to\infty} mE_k$;
   ii. $\{E_k\}$是渐缩可测集列，即$E_1 \supset E_2 \supset \ldots$，则$E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$是可测的，且$mE = \lim\limits_{k\to\infty} mE_k$
   。
10. 可测集的性质中比较重要的是关于差集的可测性、测度的完全可加性与单调性。或者说，可测集关于于差集与可列并的运算是封闭的，因此一切可测集所成的类构成一个集合的环。同时，可列集关于可列交运算也是封闭的。
11. 以开集、闭集为对象，做至多可列次并、交运算，所得到的集统称为博雷尔(E.Borel)集。一切博雷尔集是可测的。博雷尔集中有这样的集是值得注意的：一种是可表示为可列个开集的交，称为G_δ集；另一种是可表示为可列个闭集的并，称为F_σ集。它们可以用来构造任意可测集的测度。
12. **定理3.7** 设E是可测集，则$\exists G_\delta$集A与F_σ集B，满足$A \subset E \subset B$且mE=mA=mB。
   如果E不可测，集A与集B满足关系

$$mA = m^*E, \quad mB = m_*E$$

$\S$4. 关于测度的其他知识点

1. 无界集的测度：
   i. 无界集的定义：设E是一维无界集，如果它与任何开区间的交都是可测的，就称E是可测的，定义为

   $$\lim_{\alpha\to\infty} m\{(-\alpha,\alpha)\cap E\},$$

   同样使用mE表示E的测度。
   ii. 设$\{E_k\}$是可列个可测集(有界或无界)，则它的并集$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$是可测的；若$E_k$互不相交，则$mE=\sum_{k=1}^{\infty}mE_k$。
   iii. 无界可测集的性质是相应的有界可测集的性质的发展，而证明方法也只是多加一道求极限的手续而已，其它的性质也极为类似。
2. 多维空间点集的测度：
   平面上的有界开集可表示成可列个两两无公共内点的半闭正方形的闭：$G=\bigcup I_k$，令mI_k表示面积，那么我们定义G的测度为所有mI_k的和，即$mG=\sum mI_k$，并且可以证明G的测度与表示法无关。
   定义了开集的测度以后，可以同一维的情况类似，逐步引进闭集的测度，任意有界集的外、内测度以及可测集的定义等。无界集仿照1中的方法。
3. 不可测集：
   i. 勒贝格测度的平移不变性：
   ii. **引理4.1** 设E是一维点集，具有正的测度，数α满足$0<\alpha<1$。那么，$\exists$开区间I，使$m(E\cap I)>\alpha mI$。
   iii. **引理4.2** 设E为正测度集，令$\Delta(E)=\{x-y:x,y\in E\}$，则$\Delta(E)$包含一个对称于原点的开区间J。
   iv. **定理4.1** 一维不可测集是存在的。

$\S$5. 环与环上的定义的测度（选修）

1. **定义5.1**：
   设X为基本集，$\mathcal{R}$为由X的子集所组成的非空类。如果满足以下条件：
   i. $\forall A,B\in\mathcal{R}\implies A-B\in\mathcal{R},A\cup B\in\mathcal{R}$
   则$\mathcal{R}$中的元素满足封闭性，$\mathcal{R}$称为集合的环。
   ii. 若有$A_1,A_2,\ldots,\in\mathcal{R}$，即$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{R}$
   则$\mathcal{R}$称为集合的σ环。若$\mathcal{R}$中含有X本身，则$\mathcal{R}$称为代数。

2. 设$\mathcal{E}$是X中子集的类，包含类$\mathcal{E}$的一切环的交集记为$\mathcal{R}(\mathcal{E})$，它是包含$\mathcal{E}$的最小环，称为由$\mathcal{E}$产生的环。σ代数、由$\mathcal{E}$产生的σ环可类似的定义。
3. i. 例1：[0,1]中的一切可测集构成环，也是σ环，并且是代数、σ代数。[0,1]中的一切开集都不是环，因为不满足封闭性。
   ii. 例2：X中一切子集所成的类是σ环也是σ代数。因而包含$\mathcal{E}$的环是存在的，$\mathcal{R}(\mathcal{E})$是有意义的。
   iii. 例3：考察任意半闭区间$[\alpha,\beta)$，这里$-\infty<\alpha<\beta<+\infty$。任意两个半闭区间的差可能是空集$\emptyset$，也可能是两个互不相交的半闭区间的并：$[\alpha_1,\beta_1)\cup[\alpha_2,\beta_2),\beta_1<\alpha_2$。这种新的集的差与并至多是有限个半闭区间的并。因此R^1的子类

$$\left\{\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i):\alpha_i,\beta_i\in R^1,n=1,2,3,\ldots\right\}$$

   满足构成一个环的条件。
4. **定理5.1**：由$\mathcal{E}$产生的环$\mathcal{R}(\mathcal{E})$中每个元素均含于$\mathcal{E}$的某有限个元的并中；由$\mathcal{E}$产生的σ环$\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{E})$中每个元均含于$\mathcal{E}$的某可列个元的并中。
5. **定义5.2**：设$\mathcal{M}$为X的自己所成的类，若$\mathcal{M}$满足：
   i. 对递增序列封闭。
   ii. 对递减序列封闭。
   则$\mathcal{M}$称为单调类。包含类$\mathcal{E}$的最小单调类为由$\mathcal{E}$产生的单调类，记作$\mathcal{M}(\mathcal{E})$。
6. **定理5.2**：设$\mathcal{E}$为集X的子集所成的环，则由$\mathcal{E}$产生的单调类$\mathcal{M}(\mathcal{E})$与由$\mathcal{E}$产生的σ环$\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{E})$相等，即$\mathcal{M}(\mathcal{E})=\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{E})$。
   推论：设$\mathcal{E}$为环，$\mathcal{M}$为单调类，$\mathcal{M}\supset\mathcal{E}$，则$\mathcal{M}\supset\mathcal{R}_\sigma$。
7. **定义5.3**：设X为基本集，$\mathcal{R}$为X的子集的类。称定义在$\mathcal{R}$上取值为实数或无穷大的广义实函数μ为集函数；若对每个$E\in\mathcal{R},\mu E\geq 0$，则称$\mu$为非负的；若$\mu E\neq\pm\infty(E\in\mathcal{R})$，称$\mu$为有限的；若对$\mathcal{R}$中互不相交的序列$\{E_n\}$，其并$\bigcup E_n\in\mathcal{R}$，恒有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n$$

   则称μ是σ可加的或完全可加的。
   最重要的是$\mathcal{R}$为环(或σ环)时，若$\mathcal{R}$上的μ满足
   i. μ是非负的，
   ii. μ是σ可加的，
   iii. $\mu\emptyset=0$，
   则称μ是环(或σ环)$\mathcal{R}$上的测度。当(i)不满足时，μ称为广义测度。
8. **定理5.3**：设μ是σ环$\mathcal{R}$上的测度，则有以下性质：
   i. 单调性。设$E_1,E_2\in\mathcal{R},E_1\subset E_2,$则$\mu E_1\leq\mu E_2$。

ii. 半可加性。设$E_n \in \mathcal{R}, n = 1, 2, \ldots,$ 则$\mu(\bigcup E_n) \le \sum \mu E_n$; 从而推出若$E \in \mathcal{R}, E \subset \bigcup E_n$, 则$\mu E \le \sum \mu E_n$。

iii. 对于$\mathcal{R}$中的渐张序列E_i，由$\mu(\bigcup E_i) = \lim \mu E_i$；对于检索序列$E_j$，若$\mu E_j < \infty$, 则有$\mu(\bigcap E_j) = \lim \mu E_j$。

§6. σ环上的外侧度·内测度·测度的扩张（选修）