勒贝格积分

==

§1. 勒贝格积分的引入

1. **定义1.1** 简单函数的勒贝格积分：*(如无特殊说明，总假设E为有界可测集)*
   在E上定义的简单函数$\varphi(x)$的表达式为

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{e_k}(x)$$

   其中$e_k=E(\varphi=y_k)$为互不相交的可测集，y_k互异，$\chi_{e_k}(x)$表示e_k上的特征函数。我们称和数$\sum_{k=1}^{n} y_k m e_k$为简单函数$\varphi(x)$在E上的积分，并记为

$$\int_E \varphi(x) dm=\sum_{k=1}^{n} y_k m e_k,$$

   dm表示积分运算依赖的是测度m。
2. 简单函数的积分的性质：
   i. 可加性：$\int_{E_1} f dm+\int_{E_2} f dm=\int_E f dm(e=E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2=\emptyset)$
   ii. 齐次性：设$c \in \mathbb{R}, \int(c f) dm=c \int f dm$。
   若可积函数f属于$L^1(x)$，则这个函数的测度具有线性。
   iii. 如果可测函数可分为正部和负部，则有$\int f dm=\int_{+} f dm-\int_{-} f dm$。
3. **定义1.2** 一般可测函数的勒贝格积分：
   设f(x)是E上的可测函数。当$f(x) \geq 0$，取$\varphi(x)$为任意满足$0 \leq \varphi(x) \leq f(x)(x \in E)$的简单函数，定义$f(x)$在E上的积分为

$$\int_E f(x) dm=\sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi(x) dm$$

   如果上式右边为一非负有限值，则称为f(x)在E上可积；如果为$+\infty$，则称为$f(x)$在E上的积分为$+\infty$。
   当$\int_E f_{+}(x) dm$与$\int_E f_{-}(x) dm$不同时为$+\infty$时，定义$f(x)$在E上的积分为

$$\int_E f(x) dm=\int_E f_{+}(x) dm-\int_E f_{-}(x) dm$$

只有当上式右边两项都是有限数时，即f(x)的积分是有限的，我们称f(x)在E上可积，记为$f \in L_E$或$f \in L$。其他情况只能说f(x)在E上有积分($+\infty$、$-\infty$分别对应$+\infty - c$、$c - \infty, c \in R$)。出现$\infty - \infty$时积分没有意义。

4. 一般可测函数积分的性质：
   i. 如果可测函数g(x)、f(x)在E上几乎处处满足$0 \le g(x) \le f(x)$，则当f可积时，g也可积。
   ii. 有界可测函数必可积，可积函数必几乎处处有限。
   iii. $f(x)$与$|f(x)|$的可测性相同。
   iv. 在无界集上的积分：设f(x)是定义在R^n空间上的可测函数，取一渐张区列$\Delta_k : \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots$，且$\bigcup_k \Delta_k = R^n$。若极限

   $$\lim_{k \to \infty} \int_{\Delta_k} |f(x)| dm$$

   存在且有限，就称$f(x)$在R^n上可积。
   v. 勒贝格积分的几何意义：

§2. 积分的性质

1. **定理2.1** 有限可加性：设f(x)是有界可测集E上的可积函数，$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, E_k$等都可测，且两两互不相交，则：

$$\int_E f(x)dm = \int_{E_1} f(x)dm + \int_{E_2} f(x)dm + \cdots + \int_{E_n} f(x)dm.$$

2. **定理2.2** 绝对连续性：设f(x)在E上可积，则$\forall \varepsilon > 0$，有$\delta > 0$，使当$mE < \delta (e \in E)$时，有

$$\left| \int_e f(x)dm \right| < \varepsilon.$$

3. **定理2.3 σ可加性**：设f(x)为有界可测集E上的可积函数，$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k$等都是可测的且两两互不相交的，则

$$\int_E f(x)dm = \int_{E_1} f(x)dm + \int_{E_2} f(x)dm + \cdots + \int_{E_k} f(x)dm + \cdots.$$

4. **基本引理** 设f(x)是E上的非负可积函数，$\{f_n(x)\}$是满足条件

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots, \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) (x \in E)$$

的简单函数列，则

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty} f_n(x)dm.$$

注：若不要求f(x)可积但f(x)有积分，结论仍然正确；如果f(x)不可积，得到$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm = \infty$.

总结：基本引理的结论可以写成

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

5. **勒贝格积分的线性**：
   i. **定理2.4** 齐次性：设f(x)在E上可积，则$\forall c\in R, cf(x)$也可积，并且$c\int_E f(x)dm = \int_E cf(x)dm.$
   ii. **定理2.5** 可加性：设f，g是E上两可积函数，则f+g也可积，且$\int_E f(x)dm + \int_E g(x)dm = \int_E (f+g)(x)dm.$
6. **定理2.6** 设f, g在E上都可积，且$f(x)\le g(x)$，则$\int_E f(x)dm \le \int_E g(x)dm$。
7. **定理2.7** 唯一性定理：$\int_E |f(x)|dm = 0$的充要条件是$f\sim 0$.
8. **推论** 若$f(x)\sim g(x)$，则由f(x)的可积性可以推出g(x)的可积性，且积分值相同。
9. **引理2.1** 设f(x)是E上的可积函数，那么$\forall\varepsilon$，都$\exists f(x)\in E$，f(x)是简单函数，使

$$\int_E |f(x)-\varphi(x)|dm < \varepsilon$$

10. **引理2.2** 设E是闭区间[a, b]上的可测集，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists[a,b]$上的连续函数g(x)，使

$$\int_{[a,b]} |\chi_E(x)-g(x)|dm < \varepsilon,$$

$\chi_E(x)$为E的特征函数。

11. **定理2.8** 设f(x)是[a, b]上的可积函数，则$\forall\varepsilon>0$，必然$\exists[a,b]$上的连续函数g(x)，使

$$\int_{[a,b]} |f(x)-g(x)|dm < \varepsilon.$$

定理2.8的另一种形式：当$\sup|f(x)| = M < \infty, \sup|g(x)|\le M.$

§3. 积分序列的极限

1. **定理3.1** 设$f(x), u_n(x)(n=1,2,\ldots)$都是E上的非负可测函数，而$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，则

$$\int_E f(x)dm = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dm.$$

2. **定理3.2 列维(Levi)定理** 设可测函数列满足下列性质

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots, \ \lim f_n(x) = f(x),$$

则$f_n(x)$的积分序列收敛于f(x)的积分：

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dm.$$

注：定理3.2并未假定f(x)的可积性，但当极限$\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n dm$存在且有限时，则f(x)可积，因为如果f(x)不可积，根据定理3.2，将有$\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \infty$.

3. **定理3.3 法杜(Fatou)定理** 设f(x)是非负可测函数列，则

$$\int_E \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)dm \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)dm.$$

4. **定理3.4 勒贝格控制收敛定理**

设可测函数列$\{f_n(x)\}$满足以下条件：$f_n(x)\exists \lim f_n(x), f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，且$\exists g(x)$使

$$|f_n(x)| \le g(x) \ (x \in E, n = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

(g(x)为可测函数)，那么，f(x)可积且有

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dm. \tag{2}$$

推论 设$mE < \infty$，E上可测函数列$\{f_n(x)\}$满足$|f_n(x)| \le C \ (x \in E, n = 1, 2, \dots)$，C为常数，$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，则f(x)可积且有(2)式成立。

注一：3.4的条件可以作明显的减弱，例如不等式(1)改为在E上几乎处处成立，极限$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$也只需几乎处处存在，其他结论保持不变。这个注对3.1—3.3都成立。

注二：3.4可推广到含有连续参变量$\alpha \in I$的情形，即设含有连续参变量α的函数族$f_\alpha(x)$满足

$$|f_\alpha(x)| \le g(x) \quad (x \in E, \alpha \in I),$$

而g(x)可积，$\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(x) = f(x)$($\alpha_0$是I上一聚点)，则f(x)可积且有(2)式成立。

5. **定理3.5** 设$mE < \infty$，E上可测函数列$\{f_n(x)\}$满足条件：

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad (x \in E, n = 1, 2, \dots)$$

g(x)可积，又设$f_n(x)$测度收敛于f(x)。那么f(x)可积且

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

§4. 勒贝格积分与黎曼积分的比较

勒贝格积分简称L积分，黎曼积分简称R积分

1. L积分比R积分的可积函数的范围更广泛。
2. **定理4.1** 函数f(x)在[a, b]上R可积的充要条件是，当$\lambda \to 0$时，大和S和小和s趋于同一极限I。
3. **定理4.2** 定义在有限区间上的函数如果R可积，则必L可积，且积分值相等。
4. 如果令

$$m(x) = \sup_{\delta>0}\inf_{t\in(x-\delta,x+\delta)}\{f(t)\},$$
$$M(x) = \inf_{\delta>0}\sup_{t\in(x-\delta,x+\delta)}\{f(t)\},$$

   可以证明
   i. $f(x)$在点x处连续的充要条件是m(x)=M(x)；
   ii. $\lim_i \overline{f_i}(x) = M(x),\ \lim_i \underline{f_i}(x) = m(x)(\lambda_i \to 0)$.