

勒贝格积分

§1. 勒贝格积分的引入

1. **定义1.1** 简单函数的勒贝格积分：(如无特殊说明，总假设 E 为有界可测集)
在 E 上定义的简单函数 $\varphi(x)$ 的表达式为

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n y_k \chi_{e_k}(x)$$

其中 $e_k = E(\varphi = y_k)$ 为互不相交的可测集， y_k 互异， $\chi_{e_k}(x)$ 表示 e_k 上的特征函数。我们称和数 $\sum_{k=1}^n y_k m e_k$ 为简单函数 $\varphi(x)$ 在 E 上的积分，并记为

$$\int_E \varphi(x) dm = \sum_{k=1}^n y_k m e_k,$$

dm 表示积分运算依赖的是测度 m 。

2. 简单函数的积分的性质：

i. 可加性： $\int_{E_1} f dm + \int_{E_2} f dm = \int_E f dm$ ($E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset$)

ii. 齐次性：设 $c \in \mathbb{R}$, $\int (cf) dm = c \int f dm$ 。

若可积函数 f 属于 $L^1(x)$ ，则这个函数的测度具有线性。

iii. 如果可测函数可分为正部和负部，则有 $\int f dm = \int_+ f dm - \int_- f dm$ 。

3. **定义1.2** 一般可测函数的勒贝格积分：

设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数。当 $f(x) \geq 0$ ，取 $\varphi(x)$ 为任意满足 $0 \leq \varphi(x) \leq f(x) (x \in E)$ 的简单函数，定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x) dm = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi(x) dm$$

如果上式右边为一非负有限值，则称为 $f(x)$ 在 E 上可积；如果为 $+\infty$ ，则称为 $f(x)$ 在 E 上的积分为 $+\infty$ 。

当 $\int_E f_+(x) dm$ 与 $\int_E f_-(x) dm$ 不同时为 $+\infty$ 时，定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x) dm = \int_E f_+(x) dm - \int_E f_-(x) dm$$

只有当上式右边两项都是有限数时，即 $f(x)$ 的积分是有限的，我们称 $f(x)$ 在 E 上可积，记为 $f \in L_E$ 或 $f \in L$ 。其他情况只能说 $f(x)$ 在 E 上有积分($+\infty$ 、 $-\infty$ 分别对应 $+\infty - c$ 、 $c - \infty$, $c \in R$)。出现 $\infty - \infty$ 时积分没有意义。

4. 一般可测函数积分的性质：

- i. 如果可测函数 $g(x)$ 、 $f(x)$ 在 E 上几乎处处满足 $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ，则当 f 可积时， g 也可积。
- ii. 有界可测函数必可积，可积函数必几乎处处有限。
- iii. $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的可测性相同。
- iv. 在无界集上的积分：设 $f(x)$ 是定义在 R^n 空间上的可测函数，取一渐张区列 $\Delta_k : \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots$ ，且 $\bigcup_k \Delta_k = R^n$ 。若极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta_k} |f(x)| dm$$

存在且有限，就称 $f(x)$ 在 R^n 上可积。

v. 勒贝格积分的几何意义：

§2. 积分的性质

1. **定理2.1** 有限可加性：设 $f(x)$ 是有界可测集 E 上的可积函数， $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ ， E_k 等都可测，且两两互不相交，则：

$$\int_E f(x) dm = \int_{E_1} f(x) dm + \int_{E_2} f(x) dm + \dots + \int_{E_n} f(x) dm.$$

2. **定理2.2** 绝对连续性：设 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，有 $\delta > 0$ ，使当 $mE < \delta$ ($e \in E$)时，有

$$\left| \int_e f(x) dm \right| < \varepsilon.$$

3. **定理2.3** σ 可加性：设 $f(x)$ 为有界可测集 E 上的可积函数， $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ， E_k 等都是可测的且两两互不相交的，则

$$\int_E f(x) dm = \int_{E_1} f(x) dm + \int_{E_2} f(x) dm + \dots + \int_{E_k} f(x) dm + \dots.$$

4. **基本引理** 设 $f(x)$ 是 E 上的非负可积函数， $\{f_n(x)\}$ 是满足条件

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) (x \in E)$$

的简单函数列，则

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm.$$

注：若不要求 $f(x)$ 可积但 $f(x)$ 有积分，结论仍然正确；如果 $f(x)$ 不可积，得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm = \infty$.

总结：基本引理的结论可以写成

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm.$$

5. 勒贝格积分的线性：

i. **定理2.4** 齐次性：设 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $\forall c \in R, cf(x)$ 也可积，并且 $c \int_E f(x)dm = \int_E cf(x)dm$.

ii. **定理2.5** 可加性：设 f, g 是 E 上两可积函数，则 $f+g$ 也可积，且 $\int_E f(x)dm + \int_E g(x)dm = \int_E (f+g)(x)dm$.

6. **定理2.6** 设 f, g 在 E 上都可积，且 $f(x) \leq g(x)$ ，则 $\int_E f(x)dm \leq \int_E g(x)dm$.

7. **定理2.7** 唯一性定理： $\int_E |f(x)|dm = 0$ 的充要条件是 $f \sim 0$.

8. **推论** 若 $f(x) \sim g(x)$ ，则由 $f(x)$ 的可积性可以推出 $g(x)$ 的可积性，且积分值相同。

9. **引理2.1** 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数，那么 $\forall \varepsilon$ ，都 $\exists f(x) \in E$ ， $f(x)$ 是简单函数，使

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|dm < \varepsilon$$

10. **引理2.2** 设 E 是闭区间 $[a, b]$ 上的可测集，则 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists [a, b]$ 上的连续函数 $g(x)$ ，使

$$\int_{[a,b]} |\chi_E(x) - g(x)|dm < \varepsilon,$$

$\chi_E(x)$ 为 E 的特征函数。

11. **定理2.8** 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可积函数，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，必然 $\exists [a, b]$ 上的连续函数 $g(x)$ ，使

$$\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|dm < \varepsilon.$$

定理2.8的另一种形式：当 $\sup |f(x)| = M < \infty, \sup |g(x)| \leq M$.

§3. 积分序列的极限

1. **定理3.1** 设 $f(x), u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 都是 E 上的非负可测函数，而 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ，则

$$\int_E f(x)dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)dm.$$

2. **定理3.2 列维(Levi)定理** 设可测函数列满足下列性质

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

则 $f_n(x)$ 的积分序列收敛于 $f(x)$ 的积分:

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm.$$

注: 定理3.2并未假定 $f(x)$ 的可积性, 但当极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm$ 存在且有限时, 则 $f(x)$ 可积, 因为如果

$f(x)$ 不可积, 根据定理3.2, 将有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm = \infty$.

3. **定理3.3 法杜(Fatou)定理** 设 $f(x)$ 是非负可测函数列, 则

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm.$$

4. **定理3.4 勒贝格控制收敛定理**

设可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足以下条件: $f_n(x) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, 且 $\exists g(x)$ 使

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (x \in E, n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

($g(x)$ 为可测函数), 那么, $f(x)$ 可积且有

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm. \quad (2)$$

推论 设 $mE < \infty$, E 上可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $|f_n(x)| \leq C$ ($x \in E, n = 1, 2, \dots$), C 为常数, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 则 $f(x)$ 可积且有(2)式成立。

注一: 3.4的条件可以作明显的减弱, 例如不等式(1)改为在 E 上几乎处处成立, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 也只需几乎处处存在, 其他结论保持不变。这个注对3.1—3.3都成立。

注二: 3.4可推广到含有连续参变量 $\alpha \in I$ 的情形, 即设含有连续参变量 α 的函数族 $f_\alpha(x)$ 满足

$$|f_\alpha(x)| \leq g(x) \quad (x \in E, \alpha \in I),$$

而 $g(x)$ 可积, $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_\alpha(x) = f(x)$ (α_0 是 I 上一聚点), 则 $f(x)$ 可积且有(2)式成立。

5. **定理3.5** 设 $mE < \infty$, E 上可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足条件:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (x \in E, n = 1, 2, \dots)$$

$g(x)$ 可积, 又设 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$ 。那么 $f(x)$ 可积且

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm.$$