

函数空间 L^p

§1. L^p 空间·完备性

1. **定义1.1** 设 $p \geq 1$ 。若 $|f|^p$ 可积，称 f 是 p 幂可积的。一切 p 幂可积的函数可以构成一个类，记作 $L^p(E)$ 或简记为 L^p ，称为 L^p 空间。即

$$L^p = \{f : \int_E |f|^p dm < \infty\}.$$

2. **定理1.1** L^p 是一个线性空间。
3. 令数 q 满足等式 $1/p + 1/q = 1$ ，并约定 $p = 1$ 时 $q = \infty$ ； $p = \infty$ 时 $q = 1$ 。这时称 p 、 q 为相伴数。
4. **定理1.2** 设 p 、 q 互为相伴数， $p > 1$ ， $q > 1$ ，则 $\forall f \in L^p, g \in L^q$ ，有 $fg \in L$ ，且有不等式：

$$\left| \int_E fg dm \right| \leq \left(\int_E |f|^p dm \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q dm \right)^{1/q}$$

该不等式为霍尔德(Hölder)不等式。

注 当 p 或 q 为 1 时另一个数为 ∞ ，这时 L^∞ 的意义是 L^p 空间的一极端情况，称为本性有界函数空间。对于 L^p 空间的元 f ，如果引进记号 $\|f\|_p = (\int_E |f|^p dm)^{1/p}$ ，称为 f 的范数，那么霍尔德不等式可写成

$$\left| \int_E fg dm \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

特别的，当 $p=q=2$ 时，上述不等式化为施瓦茨(H. A. Schwarz)不等式：

$$\left| \int_E fg dm \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \quad f \cdot g \in L^2.$$

5. **定理1.3** 利用霍尔德不等式可以证明关于 L^p 空间范数的三角不等式，称为明可夫斯基(Minkowski)不等式。

设 $f, g \in L^p, p \geq 1$ ，则有不等式

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

6. 范数公理:

- i. $\|f\|_p \geq 0$, 等号成立的充要条件是 $f \sim 0$;
- ii. $\|af\|_p = |a| \cdot \|f\|_p, a \in C$;
- iii. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

7. **定义1.2** 设 $f, f_n \in L^p, n = 1, 2, \dots$, $\|f_n - f\|_p$ 收敛于 0 (当 $n \rightarrow \infty$), 则称 f_n 强收敛于 f 或者 f_n 依范数收敛于 f 。这时称 f 为 f_n 的强极限, 记为 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$ 。

由三角不等式可知 $\left| \|f_n\|_p - \|f\|_p \right| \leq \|f_n - f\|_p$, 因而当 f_n 强收敛于 f 时, 可推出范数列 $\|f_n\|_p$ 收敛于 $\|f\|_p$ 。这被称为范数的连续性。

8. **定义1.3** 设 f_n 是 L^p 中的元列, 若 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|f_m - f_n\|_p \rightarrow 0$, 则称 f_n 是 L^p 中的基本列。

9. **定理1.4** 设 f_n 是 L^p 中的基本列, 即 $\|f_m - f_n\| \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$, 则 $\exists f \in L^p, f_n \xrightarrow{\text{强}} f$, f 是 L^p 的一个元。

注:

- i. 完备性: L^p 空间的任何基本列必有强极限, 且极限元属于 L^p , 这表明 L^p 空间是完备的;
- ii. 极限元的唯一性问题: 在彼此对等的元算同一个元的情况下, 极限元 f 唯一。

§2. L^p 空间的可分性

1. **定义2.1** 设 A 是 L^p 的一个子类, 若 $\forall f \in L^p$, 恒有元列 $g_n \in A \Rightarrow g_n \xrightarrow{\text{强}} f$, 则称 A 在 L^p 中稠密。如果存在可列子类 A 使 A 在 L^p 中稠密, 则称 L^p 具有可分性。
2. **引理2.1** 设 $f \in L^p$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g$ 是有界可测函数, 使 $\|f - g\| < \varepsilon$ 。
3. **引理2.2** 设 g 为 E 上有界可测函数, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi(x)$, 使 $\|g - \varphi\| < \varepsilon$, $\varphi(x)$ 为简单函数。
4. **引理2.3** 设 $\varphi(x) \in E$, $\varphi(x)$ 是简单函数, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G_1, G_2, \dots, G_n (G_i \cap G_j, m, n = i, 2, \dots, n, \text{ 且 } m \neq n)$, 以及 $\exists s(x)$ 是 G_i 上取有理数 r_i 的简单函数 ($i = 1, 2, \dots, n$), 它在 E 上限制适合

$$\|\varphi - s\| < \varepsilon.$$