函数空间L^p

==

§1. L^p空间·完备性

1. **定义1.1** 设$p \geq 1$。若$|f|^p$可积，称f是p幂可积的。一切p幂可积的函数可以构成一个类，记作$L^p(E)$或简记为L^p，称为L^p空间。即

$$L^p = \{f : \int_E |f|^p dm < \infty\}.$$

2. **定理1.1** L^p是一个线性空间。
3. 令数q满足等式$1/p + 1/q = 1$，并约定$p = 1$时$q = \infty$；$p = \infty$时$q = 1$。这时称p、q为相伴数。
4. **定理1.2** 设p，q互为相伴数，p>1，q>1，则$\forall f \in L^p, g \in L^p$，有$fg \in L$，且有不等式：

$$\left|\int_E fgdm\right| \leq \left(\int_E |f|^p dm\right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q dm\right)^{1/q}$$

   该不等式为霍尔德(Hölder)不等式-+
   注 当p或q为1时另一个数为∞，这时L^∞的意义是L^p空间的一极端情况，称为本性有界函数空间。对于L^p空间的元f，如果引进记号$||f||_p = (\int_E |f|^p dm)^{1/p}$，称为f的范数，那么霍尔德不等式可写成

$$\left|\int_E fgdm\right| \leq ||f||_p ||g||_q, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

   特别的，当p=q=2时，上述不等式化为施瓦茨(H. A. Schwarz)不等式：

$$\left|\int_E fgdm\right| \leq ||f||_2 ||g||_2, \quad f.g \in L^2.$$

5. **定理1.3** 利用霍尔德不等式可以证明关于L^p空间范数的三角不等式，称为明可夫斯基(Minkowski)不等式。
   设$f, g \in L^p, p \geq 1$，则有不等式

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

6. 范数公理：
    i. $||f||_p \geq 0$，等号成立的充要条件是$f \sim 0$；
    ii. $||af||_p = |a| \cdot ||f||_p, a \in C$；
    iii. $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$.
7. **定义1.2** 设$f, f_n \in L^p, n = 1, 2, \cdots, ||f_n - f||_p$收敛于0(当$n \to \infty$)，则称$f_n$强收敛于$f$或者$f_n$依范数收敛于$f$。这时称$f$为$f_n$的强极限，记为$f_n \xrightarrow{强} f$。
   由三角不等式可知$\left| \|f_n\|_p - \|f\|_p \right| \leq \|f_n - f\|_p$，因而当$f_n$强收敛于f时，可推出范数列$||f_n||_p$收敛于$||f||_p$。这被称为范数的连续性。
8. **定义1.3** 设f_n是L^p中的元列，若$m, n \to \infty$时，有$||f_m - f_n||_p \to 0$，则称f_n是L^p中的基本列。
9. **定理1.4** 设f_n是L^p中的基本列，即$||f_m - f_n|| \to 0(m, n \to \infty)$，则$\exists f \in L^p, f_n \xrightarrow{强} f$，$f$是$L^p$的一个元。
   注：
    i. 完备性：L^p空间的任何基本列必有强极限，且极限元属于L^p，这表明L^p空间是完备的；
    ii. 极限元的唯一性问题：在彼此对等的元算同一个元的情况下，极限元f唯一。

§2. L^p空间的可分性

1. **定义2.1** 设A是L^p的一个子类，若$\forall f \in L^p$，恒有元列$g_n \in A \Rightarrow g_n \xrightarrow{强} f$，则称A在$L^p$中稠密。如果存在可列子类A使A在$L^p$中稠密，则称$L^p$具有可分性。
2. **引理2.1** 设$f \in L^p$，则$\forall \varepsilon > 0, \exists g$是有界可测函数，使$||f - g|| < \varepsilon$。
3. **引理2.2** 设g为E上有界可测函数，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \varphi(x)$，使$||g - \varphi|| < \varepsilon$，$\varphi(x)$为简单函数。
4. **引理2.3** 设$\varphi(x) \in E$，$\varphi(x)$是简单函数，那么$\forall \varepsilon > 0$，$\exists G_1, G_2, \ldots, G_n(G_m \cap G_n, m, n = i, 2, \ldots, n, 且 m \neq n)$，以及$\exists s(x)$是$G_i$上取有理数$r_i$的简单函数($i = 1, 2, \cdots, n$)，它在E上限制适合
   $$||\varphi - s|| < \varepsilon.$$
5. **定理2.1** 设E是可测集，则$L^p(E)$是可分的。
6. **定义5.5** 用$C = C[a, b]$表示区间[a, b]上的一切连续函数的集合，成映射$L: C \to C$为C中的线性算子，如果L满足：
   $$L(af + bg) = aL(f) + bL(g) \quad (a, b \in R; f, g \in C)$$
   若对C中一切$f \geq 0$有$L(f) \geq 0$，则称L为正算子；如果对每一$f \in C$，$L(f)$恒为多项式，则称L为多项式算子。
   当$C = C[0, 1]$时，线性算子

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

为C中正算子且为多项式算子(和中每一项均为n次多项式)。这个算子被称为f的伯恩斯坦(Bernstein)多项式。

7. **定理2.2** 设L_n是$C[a,b]$中的正线性算子列，如果满足下列条件：对于$\alpha_i(x)=x^i, i=0,1,2, L_n(\alpha_i;x)$在$[a,b]$上一致收敛于$\alpha_i(x)$。那么，对于每一个$f\in C[a,b], L_n(f;x)$在$[a,b]$上一致收敛于f(x)。
8. **推论1 伯恩斯坦定理**
   $\forall f\in C[0,1]$，伯恩斯坦多项式在$[0,1]$上一致收敛于f(x)。
9. **推论2 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)定理**
   设$f(x)\in C[a,b],\forall\varepsilon>0,\exists P(x)$，使当$x\in[a,b]$时，一致有$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$。
10. 弱收敛：
    设$f_n\in L^p, p\in[1,\infty)$，若$\exists f\in L^p$，使$\forall g\in L^q(1/p+1/q=1)$有
    $$\lim_n\int_E f_ngdm=\int_E fgdm,$$
    则称f_n在L^p中弱收敛于f，记作$f_n\xrightarrow{强}f$。显然，强收敛包含弱收敛。
11. 内积：
    当$mE<\infty$时，可在$L^2(E)$中引入元f,g的内积
    $$(f,g)=\int_E fgdm$$
    使之成为内积空间。在$L^2(E)$可以考察标准直交系$\{\omega_n\}, n=1,2,3,\cdots$，即满足$(\omega_k,\omega_j)=0(k\neq j),(\omega_k,\omega_k)=1$。
12. 两个重要的直交系：
    i. 三角系；
    ii. 瓦尔希(J. L. Walsh)函数系。

§3. 傅里叶变换概要