可测函数

==

§1. 可测函数的基本性质

1. 设$X=R^1$是基本集，E是X的一个可测子集(有界或无界)，$f(x)$是定义在E上的实函数(其值可以为无限大)。设α是任一实数，用$E(f>\alpha)$表示区间$(\alpha,\infty]$关于映射f的原象$f^{-1}((\alpha,\infty])$，即
$$E(f>\alpha)=\{x:x\in E,f(x)\in(\alpha,\infty]\}$$
2. **定义1.1** 设f是定义在可测集E上的实函数。若对每一实数α，集$E(f>\alpha)$恒(勒贝格)可测，则称f是E上的(勒贝格)可测函数。
   附注1：可测分为博雷尔可测和勒贝格可测，如果这里的可测是博雷尔可测，则相应的f被称为博雷尔可测函数。
3. 设f可测，由等式
$$E(f\geq\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\alpha-\frac{1}{n}\right)$$
   可知$E(f\geq\alpha)$可测。反之，如果给定可测集E上的实函数f，使$E(f=\infty)$与$E(\alpha<f<\infty)$恒可测，则由
$$E(f>\alpha)=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}E(\alpha<f<n)\cup E(f=\infty)$$
   其中$n_0>\alpha$，可知$E(f>\alpha)$可测。因此可得
   定义1.1的另一种形式 设$f(x)$是定义在在可测集E上的实函数，若$E(f=\infty)$可测并且对任意实数$\alpha,\beta(\beta>\alpha)$，集$E(\alpha<f<\beta)$恒可测，则称f为E的可测函数。
   类似地可以把条件“$E(f>\alpha)$恒可测”替换为：
   i. $E(f\geq\alpha)$可测;
   ii. $E(f<\alpha)$可测;
   iii. $E(f\leq\alpha)$可测。

   > 关于可测函数的定义书上写得特别啰嗦，个人理解为关键在于$E(f\geq\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\alpha-\frac{1}{n}\right)$这个公式

设R^1中开集G可以表示成互不相交的的区间的并，$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$，而

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-1}((\alpha_k,\beta_k))$$

故R^1上的可测函数的定义也可表述为:对于任何一维开集G，原象$f^{-1}(G)$是可测集。

4. 迪利克雷函数
5. 简单函数：设E为一可测集，$f(x)$在E上只去有限个实值$c_1,c_2,\ldots,c_n$，且$E(f=c_1),E=f(c_2),\ldots,E=f(c_n)$均可测，则这样的f称为E上的简单函数。若$c_k$互不相交，则任何简单函数可表示成如下形式：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\chi_{E_k}(x),$$

其中$\chi_{E_k}(x)$是关于E的特征函数：

$$\chi_{E_k}(x)=\begin{cases}1,若x\in E_k\\0,若x\notin E_k\end{cases}$$

6. **定义1.2** 设$f(x)$为定义在集E上的有限函数。如果对任何$x_n\to x(x_n\in E),f(x_n)\to f(x)$，则称$f(x)$于一点$x\in E$上连续。如果$f(x)$于E中的每一点连续，则称$f(x)$在E上连续。对于E的孤立点上，f(x)也是连续的。
7. **定义1.3 "几乎处处"** 如果命题S在集合E上除了零测度子集以外处处成立，则说S在E上几乎处处成立，记作$S,a,e.$
   例如：
   i. 两函数f和g在E上几乎处处相等(简称f与g对等，记作$f\sim g$)指的是：f与g不相等的点集$E_0=E(f\neq g)$的测度为0，而在$E-E_0$上处处有$f(x)=g(x)$。
   ii. 可测函数列$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛于函数f，简记为$f_n\xrightarrow{a.e}f$。
8. **定理1.1** 设$\{f_n(x)\}$是可测集E上定义的可列个(或有限个)可测函数，则$\sup f_n(x)$与$\inf f_n(x)$都是可测的。
9. 由定理1.1可得出两个推论：设用$f_+(x),f_-(x)$表示f(x)的正部与负部，即

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x),if\ f(x)\geq 0\\0,if\ f(x)<0\end{cases}$$

   $f_-(x)$为-f(x)的正部，则有
   i. **推论1** 设$f(x)$是可测集E上的可测函数，则$f_+(x),f_-(x)$与$|f(x)|$均可测。

ii. **推论2** 设$f_1(x), f_2(x), ...$是可测集E上的可测函数列$\overline{\lim} f_n(x)$(上极限)与$\underline{\lim} f_n(x)$(下极限)都是可测的。当上极限和下极限一致时，序列的极限函数$\lim f_n(x)$可测。

10. **定理1.2** 设$f_1(x), f_2(x), ...$是可测集E上的可测函数列，则当$\lim f_n(x)$几乎处处存在时，它是E上的可测函数。

    注：当每个$f_n(x)$是E上的简单可测函数而$\lim f_n(x)$几乎处处存在时，此极限函数时E上的可测函数。

11. **定理1.3** 设f(x)是可测集E上的非负可测函数，则存在一列非负递增的简单函数$\varphi(x)$：

$$0 \le \varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \ldots,$$

    使等式$\lim \varphi_n(x) = f(x)$在E上处处成立。

    注：优于一般可测函数可表示成正部与负部之差，即$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$，所以可测函数可表示成简单函数列的极限。

12. f(x)是可测集E上的的可测函数的充要条件是它可以表示成一简单函数列的极限。
13. **定理1.4** 在可测集E上定义的两个可测函数的和、差、积、商都是可测的。

§2. 可测函数列的收敛性

1. **定义2.1** 集合序列$\{A_n\}(n = 1, 2, 3, \ldots)$的上限集、下限集分别定义为

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n, \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n。$$

    对于渐张序列$\{A_n\}$，极限存在且等于$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$；对于渐缩序列$\{A_n\}$，极限存在且等于$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$。当$\{A_n\}$是可测集列时，$\lim A_n$也可测，且测度为$\lim mA_n$。

2. **定理2.1 叶果洛夫(Egoroff)定理**

    设E是可测集，$mE < \infty, f_n(x)(n = 1, 2, 3, \ldots)$与$f(x)$是在E上几乎处处有限的可测函数，且$\{f_n(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$。则$\forall\delta > 0$，恒$\exists E_\delta$使$\{f_n(x)\} \xrightarrow{a.e.} f(x)$在$E$上，而$m(E - E_\delta) < \delta$。叶果洛夫定理的逆也成立。

3. **定义2.2** 设f, f_n是可测集E几乎处处有限的可测函数列。若$\forall\delta > 0$, 都$\exists E$的可测子集E_δ使E_δ上$f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 而$m(E - E_\delta) < \delta$，则称序列$f_n(x)$在E上近一致收敛于f(x)。

4. **定义2.3** 设$f_n(x)$是可测集E上的可测函数列，f(x)是E上的可测函数。若$\forall\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} mE(|f_n - f| \ge \varepsilon) = 0,$$

    则称$f_n(x)$为测度收敛于f。

一致收敛	近一致收敛	测度收敛
整个定义域E上所有的点	定义域上除去测度任意小的集合	不关心具体的点， 只关心整体的测度
一致收敛的一定近一致收敛，近一致收敛的一定测度收敛		

5. **定理2.2 黎斯(F. Riesz)定理**
   设$f_n(x)$在E上测度收敛于$f(x)$，而$mE < \infty$，则$\exists\{f_n(x)\}$的子序列$\{f_{n_k}(x)\}$几乎处处收敛于f(x)。
6. **定理2.3** 设$f_n(x)$在E上测度收敛于$f(x)$，$g_n(x)$测度收敛于$g(x)$，而$mE < \infty$，则有
   i. $af_n + bg_n$测度收敛于$af + bg$，a，b属于实数；
   ii. $|f_n|$测度收敛于$|f|$；
   iii. $\sup(f_n, g_n)$测度收敛于$\sup(f, g)$，$\inf(f_n, g_n)$测度收敛于$\inf(f, g)$。
7. 若f_n在E上测度收敛于f，又测度收敛于g，则$f \sim g$。

§3. 可测函数的构造

1. **定理3.1 鲁津(Luzin)定理**
   设f(x)是有界可测集E上的可测函数，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$闭集$F \subset E, m(E-F) < \varepsilon$，且f(x)在F上是连续的。