

# 勒贝格测度

## §1. 引言

### 1. 测度公理:

- i. 非负性:  $mI \geq 0$ ;
- ii. 有限可加性:  $\text{if } I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow m(I_1 \cup I_2) = mI_1 + mI_2$
- iii.  $m[0, 1] = 1$ .

## §2. 有界点集的外、内测度·可测集

### 1. 定义2.1 设G为非空开集, 则G有结构表示:

$$G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$$

其中 $(\alpha_k, \beta_k)$ 等互不相交, 它们是G的构成区间。我们规定开集G的测度为一切构成区间的长度的和, 并记作 $mG$ :

$$mG = \sum_k (\beta_k - \alpha_k).$$

显然, 对任何自然数 $n$ , 有 $\bigcup_{k=1}^n (\alpha_k, \beta_k) \subset (a, b)$ , 从而推出

$$\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) \leq b - a.$$

令 $n \rightarrow \infty$ , 即得到 $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \leq b - a < \infty$ , 正向级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k)$ 收敛。

### 2. 定义2.2 设F为闭集, 任取一个包含F的开区间 $(a, b)$ , 令 $G = (a, b) - F$ , 则G为有界开集。定义闭集F的测度为

$$mF = b - a - mG$$

### 3. 定理2.1 开集的性质:

- i. 单调性：设 $G_1, G_2$ 是两个有界开集，且 $G_1 \subset G_2$ ，则 $mG_1 \leq mG_2$ ；
- ii. 可加性：设有界开集 $G$ 是有限个或可列个开集 $G_1, G_2, \dots$ 的并集，则 $mG \leq \sum_k mG_k$  (半可加性)；若 $G_k$ 互不相交，则 $mG = \sum_k mG_k$  (完全可加性)。
4. **引理2.1** 设 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 均为闭集， $F_k \subset (\alpha_k, \beta_k)$ ， $k=1, 2, \dots, n$ ，且 $(\alpha_k, \beta_k)$ 互不相交，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right) = \sum_{k=1}^n mF_k.$$

5. **定理2.2** 设 $F$ 为闭集， $G$ 为开集，且 $F \subset G$ ，则 $m(G - F) = mG - mF$ 。
6. **定义2.3** 设 $E$ 是一个有界集，所有包含 $E$ 的开集的测度的下确界称为 $E$ 的外侧度，并记为 $m^*E$ ：

$$m^*E = \inf_{G \supset E} mG.$$

所有被包含于 $E$ 中的闭集的测度的上确界称为 $E$ 的内侧度，并记为 $m_*E$ ：

$$m_*E = \sup_{F \subset E} mF.$$

$m^*E \geq m_*E$ ，即任何有界集的内测度均不超过外侧度。

7. **定义2.4** 设 $E$ 为有界集，当 $m^*E = m_*E$ 时，称 $E$ 为勒贝格可测的，简称 $E$ 为可测的。这时 $E$ 的内测度或外侧度都称为 $E$ 的测度，记为 $mE$ 。

## §3. 可测集的性质

1. **定理3.1** 有界集 $E$ 为可测的充要条件是： $\forall \epsilon > 0, \exists$ 开集 $G \supset E$ 与闭集 $F \subset E$ ，使 $m(G - F) < \epsilon$ 。
2. **定理3.2**
- i. 设基本集为 $X = (a, b)$ ，若 $E$ 可测，则 $E$ 关于 $X$ 的补集 $\complement E$ 也可测。
- ii. 若 $E_1, E_2$ 可测，则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 - E_2$ 均可测，如果 $E_1, E_2$ 不相交，则 $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$ 。
3. **定理3.3** 设 $E_1, E_2$ 是两个可测集， $E_1 \subset E_2$ ，则 $mE_1 \leq mE_2$  (测度的单调性)。
4. **定理3.4**
- i. 设 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ，若每个 $E_k$ 均可测，则 $E$ 也可测。如果 $E_k$ 互不相交，则还有 $mE = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k$  (测度的完全可加性)。
- ii. 设 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ ，则 $E$ 也可测 (可测集关于可列并、可列交运算的封闭性)。
5. 因为任意一点的测度为0，所以任何可列集的测度为0。

6. 若3.4中的 $E_k$ 不一定可测, 则

$$m^* \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^* E_k,$$

这叫做外侧度的半可加性。

7. 设 $(a,b)$ 是基本集, 当 $E$ 或 $\complement E$ 可测时, 有等式

$$mE + m\complement E = b - a.$$

当 $E$ 未必可测时, 我们有

**引理3.1** 设 $E \subset (a,b)$ ,  $\complement E$ 是 $E$ 关于 $(a,b)$ 的补集。则有

$$mE + m^*\complement E = b - a$$

这说明集 $E$ 的内测度可以通过它的补集的外侧度来定义。

8. **定理3.5** 有界集 $E$ 可测的另一个充要条件: 对任何集 $A$ , 等式 $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \complement E)$ 成立。

9. **定理3.6**

i.  $\{E_k\}$ 是基本集 $(a,b)$ 中的渐张可测集列, 即 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , 则 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 是可测的, 且 $mE = \lim_{k \rightarrow \infty} mE_k$ ;

ii.  $\{E_k\}$ 是渐缩可测集列, 即 $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ , 则 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 是可测的, 且 $mE = \lim_{k \rightarrow \infty} mE_k$

。

10. 可测集的性质中比较重要的是关于差集的可测性、测度的完全可加性与单调性。或者说, 可测集关于差集与可列并的运算是封闭的, 因此一切可测集所成的类构成一个集合的环。同时, 可列集关于可列交运算也是封闭的。

11. 以开集、闭集为对象, 做至多可列次并、交运算, 所得到的集统称为博雷尔(E.Borel)集。一切博雷尔集是可测的。博雷尔集中有这样的集是值得注意的: 一种是可表示为可列个开集的交, 称为 $G_\delta$ 集; 另一种是可表示为可列个闭集的并, 称为 $F_\sigma$ 集。它们可以用来构造任意可测集的测度。

12. **定理3.7** 设 $E$ 是可测集, 则 $\exists G_\delta$ 集 $A$ 与 $F_\sigma$ 集 $B$ , 满足 $A \subset E \subset B$ 且 $mE = mA = mB$ 。

如果 $E$ 不可测, 集 $A$ 与集 $B$ 满足关系

$$mA = m^*E, \quad mB = m_*E$$

## §4. 关于测度的其他知识点

### 1. 无界集的测度：

- i. 无界集的定义：设 $E$ 是一维无界集，如果它与任何开区间的交都是可测的，就称 $E$ 是可测的，定义为

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} m\{(-\alpha, \alpha) \cap E\},$$

同样使用 $mE$ 表示 $E$ 的测度。

- ii. 设 $\{E_k\}$ 是可列个可测集(有界或无界)，则它的并集 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 是可测的；若 $E_k$ 互不相交，则 $mE = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k$ 。

- iii. 无界可测集的性质是相应的有界可测集的性质的发展，而证明方法也只是多加一道求极限的手续而已，其它的性质也极为类似。

### 2. 多维空间点集的测度：

平面上的有界开集可表示成可列个两两无公共内点的半闭正方形的闭： $G = \bigcup I_k$ ，令 $mI_k$ 表示面积，那么我们定义 $G$ 的测度为所有 $mI_k$ 的和，即 $mG = \sum mI_k$ ，并且可以证明 $G$ 的测度与表示法无关。

定义了开集的测度以后，可以同一维的情况类似，逐步引进闭集的测度，任意有界集的外、内测度以及可测集的定义等。无界集仿照1中的方法。

### 3. 不可测集：

- i. 勒贝格测度的平移不变性：
- ii. **引理4.1** 设 $E$ 是一维点集，具有正的测度，数 $\alpha$ 满足 $0 < \alpha < 1$ 。那么， $\exists$ 开区间 $I$ ，使 $m(E \cap I) > \alpha mI$ 。
- iii. **引理4.2** 设 $E$ 为正测度集，令 $\Delta(E) = \{x - y : x, y \in E\}$ ，则 $\Delta(E)$ 包含一个对称于原点的开区间 $J$ 。
- iv. **定理4.1** 一维不可测集是存在的。

## §5. 环与环上的定义的测度（选修）

## §6. $\sigma$ 环上的外侧度·内测度·测度的扩张（选修）