

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Вологодский государственный университет
Администрация города Вологды
Международная академия наук экологии и безопасности
жизнедеятельности (МАНЭБ)
Всероссийское общество изобретателей и рационализаторов (ВОИР)
Ассоциация центров поддержки технологий и инноваций

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ БИЗНЕС (ИНФОС-2020)

*Материалы одиннадцатой заочной международной
научно-технической конференции*

29–30 июня 2020 г.

Вологда
2020

УДК 330:001
ББК 65.291.573
И73

Утверждено экспертным советом по научной литературе ВоГУ

Ответственный редактор
В. А. Горбунов, д-р физ.-мат. наук, профессор,
профессор кафедры автоматики и вычислительной техники

И73 **Интеллектуально-информационные технологии и интеллектуальный бизнес (ИНФОС-2020)** : материалы одиннадцатой заочной международной научно-технической конференции (29–30 июня 2020 г.) / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Вологодский государственный университет ; Администрация города Вологды ; Международная академия наук экологии и безопасности жизнедеятельности и др. ; [ответственный редактор В. А. Горбунов]. – Вологда : ВоГУ, 2020. – 183 с. : ил.

ISBN 978-5-87851-917-5

В сборнике представлены материалы по информатизации процессов управления в различных отраслях промышленного производства, компьютерному моделированию в теоретической и экспериментальной физике. Группа докладов посвящена автоматизированным системам дистанционного обучения и подготовке специалистов, внимание удалено системам компьютерных коммуникаций на основе ЛВС, корпоративных сетей, Internet и общесистемному программному обеспечению. Материалы конференции предназначены для научно-технических работников, преподавателей, студентов, аспирантов вузов и других учреждений.

УДК 330:001
ББК 65.291.573

ISBN 978-5-87851-917-5

© ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», 2020

Уважаемые коллеги, участники одиннадцатой заочной международной научно-технической конференции «ИНФОС-2020»!



Оргкомитет приветствует вас и выражает надежду, что наша конференция и дальше будет проходить ежегодно (в очном или заочном формате). Практика показала неподдельный интерес к обсуждаемым проблемам в рамках данной конференции – не случайно за годы проведения число участников как из российских регионов, так и из ближнего и дальнего зарубежья многократно возросло. В разные годы в ней принимали участие следующие европейские страны: Польша, Германия, Греция, Великобритания, Швеция, Канада, Австралия, Египет, а также страны ближнего зарубежья, среди которых Беларусь, Украина, Таджикистан, Узбекистан и, конечно, многие регионы Российской Федерации.

Хочется подчеркнуть, что, несмотря на сложную эпидемиологическую обстановку в стране и в мире, нам удалось перейти на заочный формат конференции и собрать достаточное число участников для дистанционного обсуждения. В рамках работы секций участники обсуждали проблемы машиностроения и технологии производственных процессов, информатизации процессов энергосбережения, управления социальной и экономической деятельностью, применения информационных систем в экологии и биомедицинских технологиях, вопросы интеллектуального бизнеса и ИТ/ИР-предпринимательства, применение компьютерного моделирования в экспериментальной, теоретической и вычислительной физике, физике конденсированного состояния, наноструктур и нанотехнологий.

Желаю всем участникам конференции активной жизненной позиции, здоровья и научного поиска в тех вопросах, которые поставлены остро в самых разных жизненных сферах.

*Председатель конференции
академик МАНЭБ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Горбунов*

РАЗДЕЛ I
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ
ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АСНИ, СУБД, САПР,
СИСТЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА
В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУКАХ

M.B. Бобырь, Н.А. Милостная, А.С. Якушев
Юго-Западный государственный университет, Россия

**НЕЧЕТКО-ЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ
ЦВЕТНЫХ МЕТОК**

Активное развитие науки и техники в области обработки изображений и техники, производящей фото- и видеофиксацию, позволяет решать множество задач методами распознавания и обработки изображений. Задачи, которые ранее решались с использованием контролирующего оператора или комплекса следящих датчиков, в настоящее время заменяются системами технического зрения [1, 2].

В условиях промышленного производства постоянно стоит задача маркировки изделий, их сортировки, а также выполнение измерений и определение расстояния смещения данных изделий в процессе производственного цикла [3]. Для решения этих задач применяются системы технического зрения. Основой современных систем технического зрения являются интеллектуальные алгоритмы и системы искусственного интеллекта [4, 5]. Основной недостаток многих интеллектуальных алгоритмов для обработки изображений – это невозможность работы в условиях реального времени, низкие показатели точности определения цветовых меток, используемых для маркировки изделий, вследствие чего происходит неправильное или несвоевременное определение расстояния, на которое переместилась данная метка. Авторами статьи предлагается применение нечеткой логики для определения цветовой метки.

Для определения цветовой метки строится нечеткая модель, состоящая из 7 шагов.

Шаг 1. Построение функций принадлежности.

Для того чтобы построить функции принадлежности, с каждого пикселя изображения получают параметры R, G, B (красный, зеленый, синий). После этого производится конвертация из модели RGB в модель HSV (H – hue (цветовой тон), S – saturation (насыщенность), V – value (яркость)). После этого формируются функции принадлежности треугольного вида.

Шаг 2. Построение базы нечетких правил и расчет степеней истинности нечетких правил (табл. 1) [6].

Таблица 1
База нечетких правил

| | S₁ | S₂ | S₃ |
|----------------------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| H₁ | $\alpha_1 = \min(S_1, H_1)$ | $\alpha_{10} = \min(S_2, H_1)$ | $\alpha_{19} = \min(S_3, H_1)$ |
| H₂ | $\alpha_2 = \min(S_1, H_2)$ | $\alpha_{11} = \min(S_2, H_2)$ | $\alpha_{20} = \min(S_3, H_2)$ |
| H₃ | $\alpha_3 = \min(S_1, H_3)$ | $\alpha_{12} = \min(S_2, H_3)$ | $\alpha_{21} = \min(S_3, H_3)$ |
| H₄ | $\alpha_4 = \min(S_1, H_4)$ | $\alpha_{13} = \min(S_2, H_4)$ | $\alpha_{22} = \min(S_3, H_4)$ |
| H₅ | $\alpha_5 = \min(S_1, H_5)$ | $\alpha_{14} = \min(S_2, H_5)$ | $\alpha_{23} = \min(S_3, H_5)$ |
| H₆ | $\alpha_6 = \min(S_1, H_6)$ | $\alpha_{15} = \min(S_2, H_6)$ | $\alpha_{24} = \min(S_3, H_6)$ |
| H₇ | $\alpha_7 = \min(S_1, H_7)$ | $\alpha_{16} = \min(S_2, H_7)$ | $\alpha_{25} = \min(S_3, H_7)$ |
| H₈ | $\alpha_8 = \min(S_1, H_8)$ | $\alpha_{17} = \min(S_2, H_8)$ | $\alpha_{26} = \min(S_3, H_8)$ |
| H₉ | $\alpha_9 = \min(S_1, H_9)$ | $\alpha_{18} = \min(S_2, H_9)$ | $\alpha_{27} = \min(S_3, H_9)$ |

Шаг 3. Дефазификация на основе упрощенного метода центра тяжести.

$$y_{\text{defuzz}} = \frac{\sum_{i=1}^{n=27} \alpha_i \cdot N_i}{\sum_{i=1}^{n=27} \alpha_i} = \frac{\alpha_1 \cdot N_1 + \alpha_2 \cdot N_2 + \dots + \alpha_{27} \cdot N_{27}}{N_1 + N_2 + \dots + N_{27}},$$

где N_i – постоянные коэффициенты от 1 до 27.

Шаг 4. Бинаризация.

$$I_B = \begin{cases} 1, & \text{if } y_{\text{defuzz}} = N_{26} (\text{розовый цвет}) \\ 0, & \text{else} \end{cases}.$$

Шаг 5. Фильтрация.

$$I_F = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I_{B_{m,n}} \geq 5 \\ 0, & \text{else} \end{cases},$$

где $m \times n (m=n=3)$ – размер окна, в котором осуществляется фильтрация.

Шаг 6. Вычисление координат центра тяжести.

$$\text{if } I_F = 1 \quad \text{then } X = \frac{\sum_{i=1}^w l_i}{\text{count}}, \quad \text{if } I_F = 1 \quad \text{then } Y = \frac{\sum_{j=1}^h l_j}{\text{count}},$$

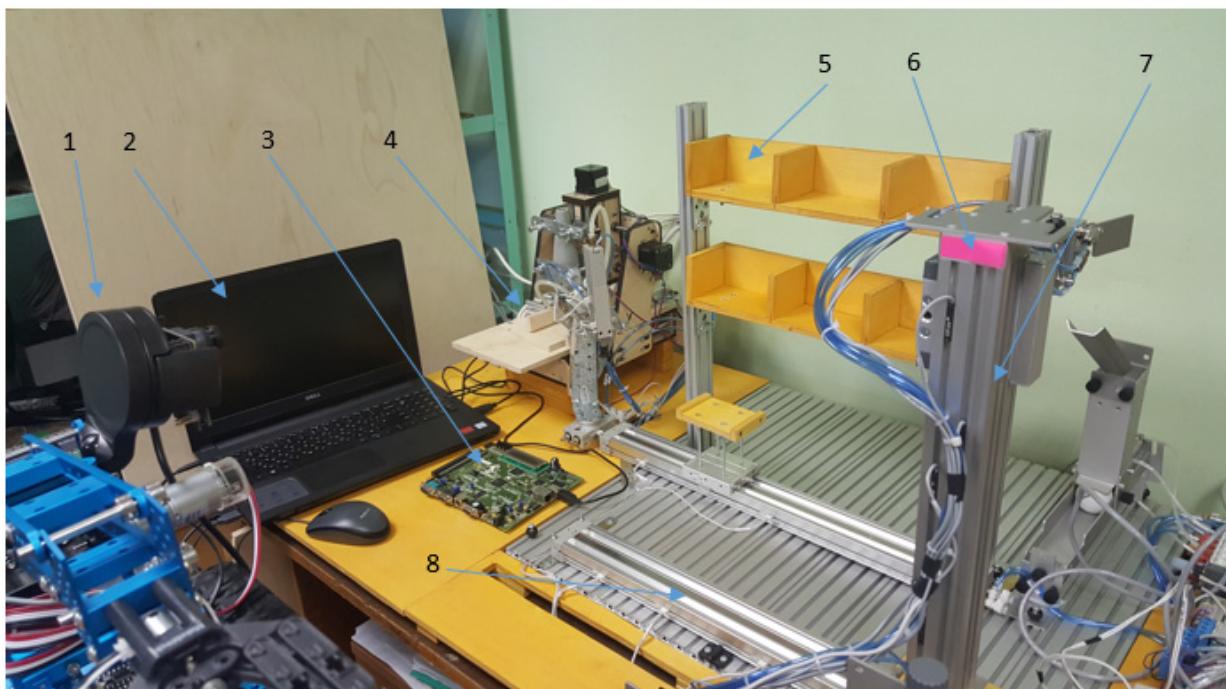
где X, Y – координата центра тяжести по осям X и Y ; l – расстояние от начала кадра до бинаризированной точки по оси X ; count – общее число бинаризованных точек; w – ширина кадра в пикселях; h – высота кадра в пикселях.

Шаг 7. Масштабирование и определение расстояния смещения цветовой метки.

$$\text{length} = \frac{X \cdot w_{\text{real}}}{w},$$

где w_{real} – действительная ширина кадра в сантиметрах.

Экспериментальное исследование нечеткой модели производилось на пневматическом мехатронном комплексе. На бесштоковый цилиндр закреплялась розовая метка, которая перемещалась в кадре, после чего нечеткой моделью определялось ее смещение в кадре [7, 8]. На рисунке представлена экспериментальная установка для распознавания цветной метки.



*Рис. Экспериментальная установка для распознавания цветной метки:
1 – камера; 2 – ноутбук; 3 – ПЛИС; 4 – трехосевой фрезерный станок с ЧПУ;
5 – ячейки склада готовых изделий; 6 – цветовая метка; 7, 8 – бесштоковые цилиндры*

В таблице 2 сведены результаты определения расстояния смещения цветовой метки и определены для экспериментальных данных коэффициенты MAPE и Accuracy, рассчитываемые по формулам [9, 10]:

$$\text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|Length - Length_{\text{set}}|}{Length} \rightarrow \min,$$

$$\text{Accuracy} = 1 - \text{MAPE} \rightarrow 100\%.$$

Таблица 2

**Экспериментальные данные и расчет коэффициентов MAPE
и Accuracy**

| Размер, см | 10 | 20 | 30 | 35 |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Min, см | 9,77 | 19,85 | 29,96 | 34,99 |
| Max, см | 10,03 | 20,07 | 30,08 | 35,15 |
| MAPE, % | 0,43 | 0,32 | 0,12 | 0,24 |
| Accuracy, % | 99,47 | 99,68 | 99,88 | 99,76 |

Проанализировав таблицу 2, можно сделать вывод, что определение цветовой метки и расстояния ее перемещения в кадре производится правильно, точность определения более 99 %, при этом средняя абсолютная ошибка (MAPE) стремится к минимуму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулик, А. С. Применение системы технического зрения в системе управления мобильного шагающего робота / А. С. Кулик, А. Н. Радомский // Электротехнические и компьютерные системы. – 2017. – № 25 (101). – С. 347–356.
2. Бобырь, М. В. Метод расчета карты глубин на основе мягких операторов / М. В. Бобырь, А. Е. Архипов, Н. А. Милостная // Системы и средства информатики. – 2019. – Т. 29, № 2. – С. 71–84.
3. Повышение качества классификации изображений за счет использования нечеткой логики в системах мониторинга контроля доступа / П. И. Карасев, М. А. Ивановский, Ю. В. Кулаков, И. В. Дидрих // Информационная безопасность. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 432–435.
4. Игнатьев, В. В. Адаптивные гибридные интеллектуальные системы управления / В. В. Игнатьев // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 12 (113). – С. 89–94.
5. M.V. Bobyr, N.A. A method of defuzzification based on the approach of areas' ratio / M.V. Bobyr, N.A. Milostnaya and S.A. Kulabuhov. – DOI: 10.1016/j.asoc.2017.05.040 // Applied Soft Computing Journal. – 2017. – Vol. 59. – P. 19–32.
6. System of stereovision based on fuzzy-logical method of constructing depth map / M.V. Bobyr, A.S. Yakushev, S.A. Kulabukhov, A.E. Arkhipov. – DOI:

10.1109/RUSAUTOCON.2018.8501701 // 2018 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – 2018.

7. Fuzzy model for capturing moving object with pneumatic mechanisms / M.V. Bobyr, A.S. Yakushev, S.A. Kulabukhov, A.V. Sorokoletova. – DOI: 10.1109/ICIEAM.2018.8728591 // 2018 International Conference of Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – 2018.

8. Бобырь, М. В. Устройство и программная модель управления пневматическим мехатронным комплексом / М. В. Бобырь, А. А. Дородных, А. С. Якушев. – DOI: 10.17587/mau.19.612-617 // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2018. – Т. 19, № 9. – С. 612–617.

9. Белевич, А. В. Использование критерия MAPE при выборе аппроксимирующего полинома оценки ширины диапазона управления исполнительными механизмами автоматизированных трансмиссий / А. В. Белевич,

О. С. Руктешель, В. А. Кусяк // Актуальные вопросы машиноведения. – 2017. – Т. 6. – С. 76–80.

10. Jung, B., Sukhatme G. S. Detecting moving objects using a single camera on a mobile robot in an outdoor environment / B. Jung, G. S. Sukhatme // 8th Conf. on Intelligent Autonomous Systems. – 2004. – P. 980–987.

A.B. Бурков, B.E. Марлей, B.G. Никифоров

*Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова, Россия*

РАСЧЕТ ЗАТРАТ НА ЭКСПЛУАТАЦИЮ ГРУППЫ ОДНОТИПНЫХ СУДОВ

При планировании обновления флота, помимо всех других расходов, важно правильно оценить затраты на его эксплуатацию и оперативно отслеживать их изменение: для этого нужны упрощенные методики расчета показателей. В статье [1] рассматривалась стратегия планирования обновления флота и была приведена такая методика расчета, но не был уточнен ряд деталей, что осуществляется в данной работе.

Изложим кратко рассмотренную в [1] методику расчета.

Для группы однотипных судов из состава флота с разным возрастом общая стоимость ремонтных работ в текущем периоде $P(t)$ будет выражена:

$$P(t) = \sum_{i=1}^k p_i \times n_i(t), \quad (1)$$

где: $n_i(t)$ – количество судов в возрасте i в заданном периоде t ; k – срок жизненного цикла судов данного тоннаже-типа, лет.

Общее число однотипных судов в текущем периоде $n(t)$ выражается:

$$n(t) = \sum_{i=1}^k n_i(t). \quad (2)$$

Средние годовые расходы на техническую эксплуатацию одного судна группы в текущем/заданном периоде $p(t)$ могут быть определены:

$$p(t) = \frac{P(t)}{n(t)}. \quad (3)$$

Средний возраст группы однотипных судов I в текущем периоде:

$$I(t) = \frac{1}{n(t)} \sum_{i=1}^k n_i(t) \times i. \quad (4)$$

Предполагается, что возможно принять $p(t)=P_I(t)$, где $P_I(t)$ – это расходы на судно, соответствующее среднему возрасту всей группы, тогда:

$$P(t) = P_I(t) \times n(t). \quad (5)$$

Рассмотрим, насколько справедливо предположение $p(t)=P_I(t)$. В дальнейшем предполагаем, что функция затрат от среднего возраста группы $P_I(t)$ монотонная неубывающая.

Очевидно, что утверждение $p(t)=P_I(t)$ будет справедливо только в случае, если затраты на эксплуатацию судов в зависимости от среднего возраста группы будут линейно зависимы: $P=aI(t)+b$, где a и b параметры линейной функции.

В реальности зависимость не будет линейной, и линейная функция может быть получена только в результате аппроксимации фактической функции линейной функцией. То есть возможно говорить о приближенном значении функции затрат, с учетом ошибки аппроксимации. Уменьшить ошибку аппроксимации возможно, если не аппроксимировать сразу на весь горизонт изменения $I(t)$, а разбить его на отдельные интервалы значений $I(t)$ и определять параметры линейных функций для каждого такого интервала.

Таким образом, использование (5) позволяет получить только приближенную оценку затрат на рассматриваемую группу судов и может служить лишь как ориентировочное значение при проведении практических расчетов.

Общая методика определения затрат на эксплуатацию судов будет следующая:

1. На основании анализа фактических затрат разделить весь горизонт изменения $I(t)$ на промежутки.
2. Провести аппроксимацию затрат для каждого промежутка.
3. Запомнить полученные результаты в базе данных.

В дальнейших расчетах для определения затрат из базы данных выбираются параметры линейной функции, соответствующие тому интервалу, в который попадает рассчитанное значение $I(t)$. Соответствующая формула пересчета среднего возраста группы однотипных судов, не требующая суммирования всех возрастов и численности возрастных групп, приведена в [1].

Несомненным преимуществом рассматриваемого подхода является простота его реализации на компьютере на основе Excel с использованием базы данных пароходства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков, А. В. Стратегия управления на основе прогрессивного планирования обновления состава флота / А. В. Бурков, В. Е. Марлей, В. Г. Никифоров // Сборник трудов Международной научно-практической конференции к 80-летию со дня рождения профессора А. С. Бутова. – 2019. – С. 64–70.

E.A. Панова, M.C. Панарина

*Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова, Россия*

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ВЫБОР И ПРОВЕРКА ТРАНСФОРМАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЯ СРЕДСТВАМИ САПР

При проектировании объектов электроэнергетики возникает проблема с выполнением однотипных расчетов, в ходе которых проектировщик нерационально использует свое время и совершает ошибки, обусловленные человеческим фактором.

Многообразие САПР в настоящее время позволяет свести к минимуму участие проектировщика в проектировании систем электроснабжения. Таким образом, существует множество учебных пособий, посвященных системам автоматизированного проектирования [1–3].

Одной из наиболее эффективных программ для автоматизированного расчета и проектирования освещения является DIALux [4], а автоматическое построение схем электроснабжения низкого напряжения описывается в [5].

Применение систем автоматизированного расчета молниезащиты представлено в [6]. Также существует САПР, позволяющие автоматизировать проектирование системы заземления подстанции [7].

В то же время представленный обзор программных комплексов для электротехнического проектирования [8] выявил, что большинство программ не обладают базами данных электрооборудования.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что в настоящее время не существует программного комплекса, который бы позволил осуществить комплексный подход к проектированию конкретного объекта. Поэтому актуальной является задача разработки оригинальной САПР понизительных подстанций, позволяющей автоматизировать весь процесс проектирования. Ниже изложен разработанный авторами алгоритм САПР [9].

Алгоритм выбора и проверки трансформаторов напряжения

Начальным этапом является выбор проектировщиком из базы данных трансформатора напряжения (ТН) требуемого типа. Выбор ТН осуществляется по напряжению установки, конструкции и схеме соединения обмоток, а также по классу точности.

Проверка трансформаторов напряжения осуществляется по вторичной нагрузке. Для проверки ТН по вторичной нагрузке необходимо предварительно определить количество и тип приборов, подключаемых в его вторичные цепи. Перечень контрольно-измерительных приборов в цепях различного оборудования подстанции определяется по таблице 5.12 [10].

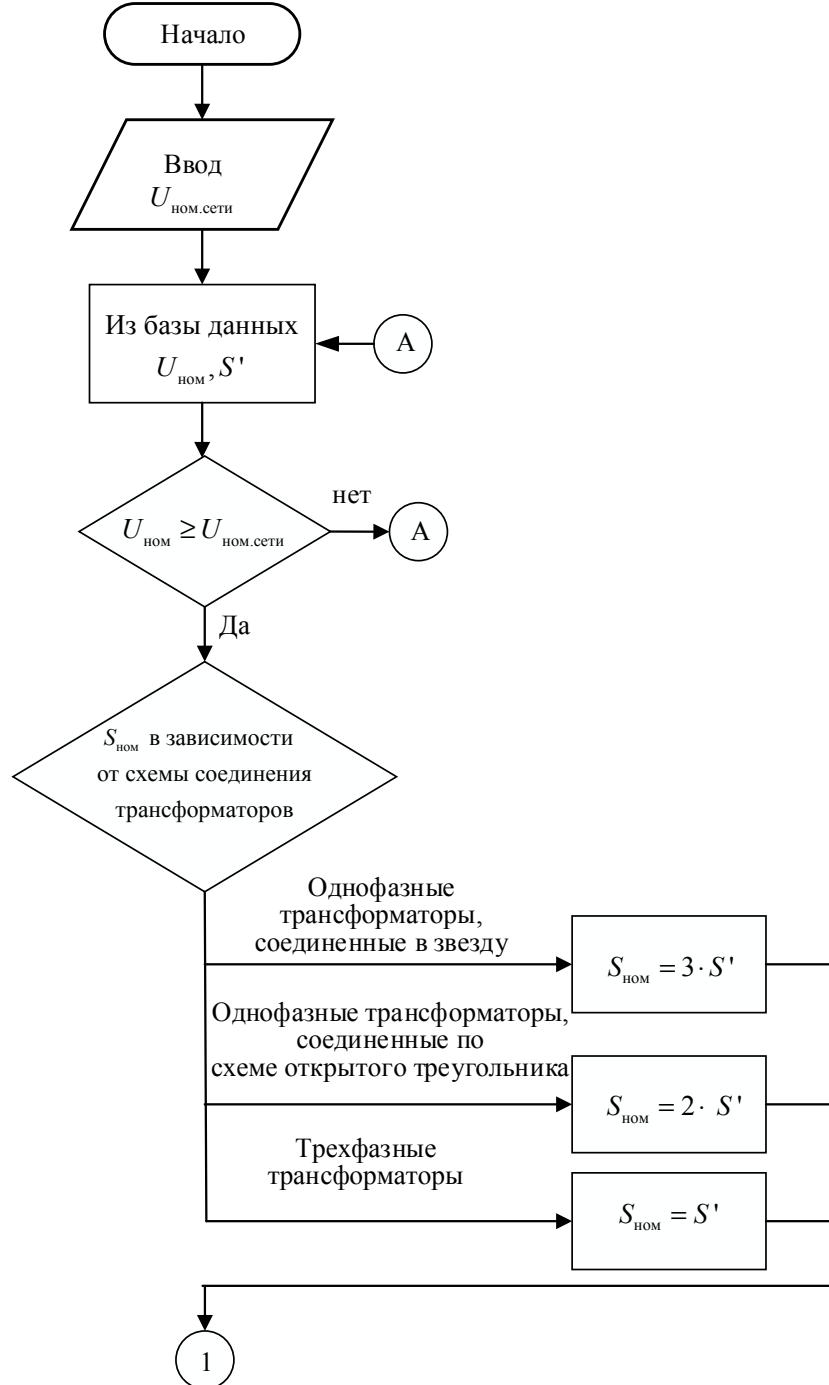


Рис. Блок-схема выбора трансформаторов напряжения (начало)

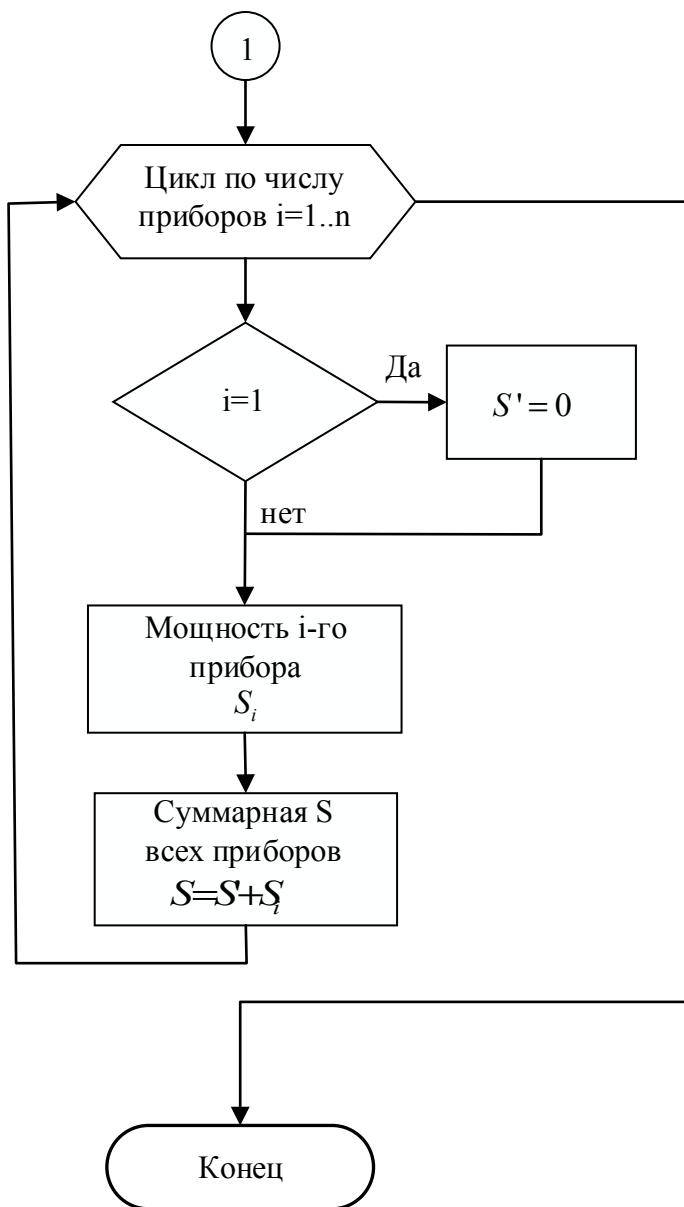


Рис. Блок-схема выбора трансформаторов напряжения (окончание)

Условие проверки ТН по вторичной нагрузке:

$$S_{\text{ном}} \geq S_{2\Sigma}, \quad (1)$$

где $S_{\text{ном}}$ – номинальная мощность в выбранном классе точности, ВА;

$S_{2\Sigma}$ – нагрузка всех измерительных приборов и реле, присоединенных к трансформатору напряжения, ВА (определяется в зависимости от числа и типов присоединений на распределительном устройстве).

С целью упрощения расчетов нагрузку приборов можно не разделять по фазам, в этом случае:

$$S_{2\Sigma} = \sqrt{(\sum S_{\text{приб}} \cdot \cos \phi_{\text{приб}})^2 + (\sum S_{\text{приб}} \cdot \sin \phi_{\text{приб}})^2} = \sqrt{P_{\text{приб}}^2 + Q_{\text{приб}}^2}. \quad (2)$$

Если вторичная нагрузка превышает номинальную мощность в выбранном классе точности, то устанавливают второй трансформатор напряжения и

часть приборов присоединяют к нему. Алгоритм выбора трансформаторов напряжения представлен на рисунке.

Номинальные параметры измерительных трансформаторов напряжения, подлежащих выбору и проверке в проекте, а также измерительных приборов импортируются из базы данных [11].

Авторами работы рассмотрен алгоритм автоматизированного выбора и проверки измерительных трансформаторов, реализованный в оригинальной САПР ЗРУ CAD [9]. Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых ученых – кандидатов наук, проект № МК-939.2019.8 «Разработка усовершенствованной системы автоматизированного проектирования электрической части подстанции».

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлюков, В. А. Учебная САПР электрической части станций и подстанций : учебное пособие / Павлюков В. А., Ткаченко С. Н., Коваленко А. В. – Харьков : ДНТУ, 2016. – 124 с.
2. Елисеев, Д. С. Алгоритмы САПР для выбора проводов и кабелей : учебное пособие / Д. С. Елисеев. – Волгоград : Нива, 2012. – 183 с.
3. Анцев, И. Б. Проектирование внутренних электрических сетей (учебное пособие) / Анцев И. Б., Асташев В. О. // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 5-2. – С. 217–218.
4. Елисеев, К. В. Применение информационных технологий при изучении методов проектирования освещения на базе программы DIALUX / Елисеев К. В., Ращевская М. А. // Фёдоровские чтения. – Москва, 2018. – С. 60–65.
5. Сыздыков, А. К. Автоматизированный расчет и построение схем электроснабжения в AutoCAD с применением языка программирования AutoLISP / А. К. Сыздыков // Молодой ученый. – 2014. – № 6. – С. 259–264.
6. Митрофанов, С. В. Программное обеспечение для расчета молниезащиты / Митрофанов С. В., Байкасов Д. К. // Ученые записки брянского государственного университета. – 2017. – №4 (8). – С. 14–20.
7. Pham, K. Design a safe grounding system for rural electric power distribution substations / Pham K. // 34th Annual Conference on Rural Electric Power. – USA : Orlando, FL, 1990. – Р. 1–4.
8. Пионкевич, В. А. Исследование возможностей векторных графических платформ для электротехнического проектирования / В. А. Пионкевич // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2016. – № 11 (118). – С. 143–156.
9. ЗРУ CAD: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ РФ. № 2019664573 : заявл. 01.11.2019 : опубл. 08.11.2019 / Варганова А. В., Панова Е. А., Кушмиль О. Е., Панарина М. С.
10. Проектирование электрической части понизительных подстанций промышленного предприятия : учебное пособие / В. А. Игуменщев,

В. К. Олейников, А. В. Малафеев [и др.]. – Москва : Издательство Магнитогорского Государственного технического университета им. Г.И. Носова, 2014. – 248 с.

11. Электрооборудование распределительных устройств 35–220 кВ к САПР «ОРУ CAD» : свидетельство о государственный регистрации базы данных РФ. № 2018621358 : заявл. 30.07.2018 : опубл. 23.08.2018 / А. В. Варганова, Е. А. Панова, Т. В. Хатюшина, В. С. Кононенко, Х. М. Багаева, А. С. Ирихов.

А.Г. Кузьмин, М.Ф. Умаров
Вологодский государственный университет, Россия

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ В ЛЕЧЕБНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ

В настоящее время интенсивно развиваются новые технологии в здравоохранении. Расширяющееся влияние компьютеров на общество ощущается и в медицине. По сути, все больницы и поликлиники зависят от компьютерных технологий, которые служат для административных функций, и все чаще играют важную клиническую роль. Естественно, что врачи и другие работники здравоохранения все больше чувствуют необходимость понимать вычислительные и коммуникационные технологии, а также иметь информированный взгляд на то, как успехи в этих областях влияют на практику медицины. Медицинская документация сейчас приобретает электронный вид [1]. Исследование сочетания информатики и биомедицины является актуальной темой.

Целью данной работы является исследование обработки медицинской информации, изучения применения медицинских сетей в лечебных учреждениях, а также их взаимосвязь.

Эффективная медицинская информационная система должна пройти проверку на степень удобства пользовательского интерфейса. Клиническая вычислительная система должны быть интегрирована в существующую практику без нарушения клинического рабочего процесса. Решение вопросов информационных медицинских технологий дает измеримые результаты для дальнейшего повышения качества обслуживания пациентов.

Медицинская информатика нацелена на биомедицинскую информацию (т.е. применение на практике, хранение, перемещение и обработку данных и знаний). А также она служит для нахождения и устранения неисправностей.

Обработка данных включает в себя сбор, формализацию, фильтрацию, сортировку, группировку, архивацию, защиту, транспортировку и преобразование данных.

Медицинскую информацию можно поделить на 4 типа:

1. Алфавитно-цифровая информация. Сюда будет относиться содержание истории болезни. То есть вся информация, которая представлена в словах, предложениях и цифрах (тесты, пробы, анализы и т.д.).
2. Визуальная информация. Сюда относят изображения отдельных компонентов системы органов, а также клеточных составляющих организма.
3. Звуковая информация. Здесь будет записана речь человека и ее исследования.
4. Комбинированная информация. Она содержит алфавитно-цифровую, визуальную и звуковую информации.

Одним из главных минусов нашей системы здравоохранения является отсутствие единой системы, обеспечивающей оптимизацию работы медицинских учреждений с одной единой базой данных. Эффективность медицинских работников сомнительна из-за бумажной работы, так как истории болезни можно легко потерять. Поэтому создание единого информационного пространства для сферы здравоохранения очень важно.

Система, предназначенная для автоматизации медицинских работников, под названием ЕМИАС (Единая медицинская информационно-аналитическая система) представляет собой электронные медицинские карты (ЭМК) с большинством прочих услуг, установленных в системе. Эта система позволяет записываться к врачам-специалистам в электронном виде. Внедрение этой системы началось в 2013 году с организацией одной компьютеризированной базы данных для всех пациентов в Москве. Немного позже проект распространился практически по всей России. Требования к информационным системам регламентируются ГОСТ Р 53395-2009 [2].

За последнее десятилетие медицинские устройства и информационные технологии (ИТ) стали неразрывно связаны как технологически, так и функционально. Медицинские устройства больше не подключены только к персональному компьютеру (ПК) для оценки данных, но и обладают также интегрированной картой сетевого интерфейса, определяющей возможность их подключения непосредственно к информационно-технологическим сетям (ИТ-сетям) для отправки данных по сети на сервер, для их сохранения в архиве или дальнейшей обработки. ИТ-сеть представляет собой локальную сеть передачи данных на расстоянии. Пользователь может получить доступ к этим медицинским данным пациента в любое время, в любом месте и в любой форме. Это означает, что ИТ-сеть в больнице приобретает всё большую значимость для лечения пациента, а также требования в отношении доступности, безопасности и эффективности сети постоянно возрастают.

Интеграция медицинского продукта в ИТ-сеть не преобразует ИТ-сеть в медицинский продукт.

Согласно определению IEC80000-1, термин медицинские сети включает как активные медицинские устройства (способы воздействия, программируе-

мые электрические медицинские системы (ПЭМС)), так и сетевые компоненты и ПК. Медицинская сеть интегрирует медицинские устройства.

Соединение и интеграция медицинских устройств в ИТ-сети представлена на рисунке. Это распространено в больницах, а также в других областях системы здравоохранения. Это приводит к тому, что ИТ-сети становятся более тесно связанными и соответственно более важными, а также всегда приобретают повышенную ответственность в отношении медицинской диагностики и терапии. В связи с этим они составляют неотъемлемую часть современного ухода за пациентами.

Медицинская сеть осуществляет выполнение следующих задач:

- предоставление записей об услугах, а в частном секторе – информацию о счетах;
- данные изображений и клинических исследований;
- показатели жизнедеятельности и данные сигналов оповещений от медицинских устройств.

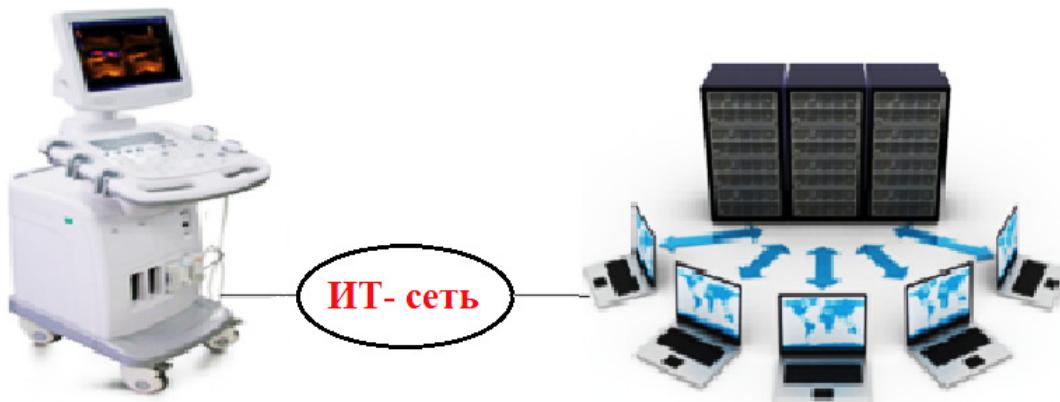


Рис. Медицинские устройства с сетевым соединением

Для передачи данных медицинские устройства выдвигают различные требования к сети, которые могут быть разделены на 3 класса:

1. Передача больших объемов данных (например, последовательность снимков компьютерной томографии (КТ)), требующая высокой скорости передачи (полосы пропускания).
2. Передачи критичных по времени показателей жизнедеятельности и данных сигналов оповещения (медицина интенсивной терапии), требующая надежности.
3. Передача конфиденциальных данных пациентов, требующая защиты и безопасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмин, А. Г. Использование электронных медицинских карт в лечебных учреждениях / А. Г. Кузьмин, М. Ф. Умаров // Вестник Вологодского государственного университета. – 2018. – № 1 (1). – С. 47–50.
2. ГОСТ Р 53395-2009. Информатизация здоровья. Основные положения : введен 2010-07-01. – Москва : Стандартинформ, 2010. – 8 с.

Г.Г. Рапаков, В.А. Горбунов

Вологодский государственный университет, Россия

С.В. Юрьева, П.А. Морозова

Северный государственный медицинский университет, Россия

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕННОСТНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ЗДОРОВОГО ОБРАЗА ЖИЗНИ В ВОСПРИЯТИИ МОЛОДЕЖИ

Системный подход к моделированию обеспечивает информационно-аналитическую поддержку коррекции смыслового контекста, в котором укоренены поведенческие стереотипы самосохранительного поведения массовой аудитории лиц молодого возраста. Актуальной является задача анализа влияния факторов риска (ФР) неинфекционных заболеваний (НИЗ) для молодежной целевой группы на основе данных медико-социологического опроса при помощи статистического подхода, что обуславливает практическую значимость работы. Цель исследования состоит в численном моделировании ценностных предпочтений здорового образа жизни (ЗОЖ) для студенческой целевой аудитории. Методологической основой работы являются алгоритмы и методы математической статистики. Информационной базой исследования выступают результаты пилотного опроса. Объем выборки обеспечивает точность оценки не ниже 10 % ($\alpha = 0,95$). Социологическая анкета содержит 38 пунктов, позволяющих выявить ФР НИЗ.

Для формирования обратной связи при проведении онлайн-тестирования студентов второго курса лечебного (62 %), педиатрического (23,9 %) факультетов и факультета медицинской профилактики (14,1 %) Северного государственного медицинского университета (14,1 % – мужчин; 85,9 % – женщин) и создания формы опроса использовались возможности онлайн сервиса Google Forms. Данные круглосуточно синхронизировались с Google Doc и Google Drive. В ходе сбора регулярно выполнялся анализ данных и актуализировались статистические результаты.

Анализ публикаций позволил ознакомиться с текущим состоянием исследования вопроса [1, 2, 3]. Статистические методы традиционно широко используются при построении рекомендательных систем в задачах здравоохранения [4]. Результаты применения описательных статистик и частотного анализа для показателей здоровья анкетируемых сведены в таблицы 1–2. Процентили ИМТ и АД дополняют их перечень для динамического анализа эффективности коррекции поведенческих ФР при проведении группового профилактического консультирования. Гистограммы ряда признаков представлены на рисунке.

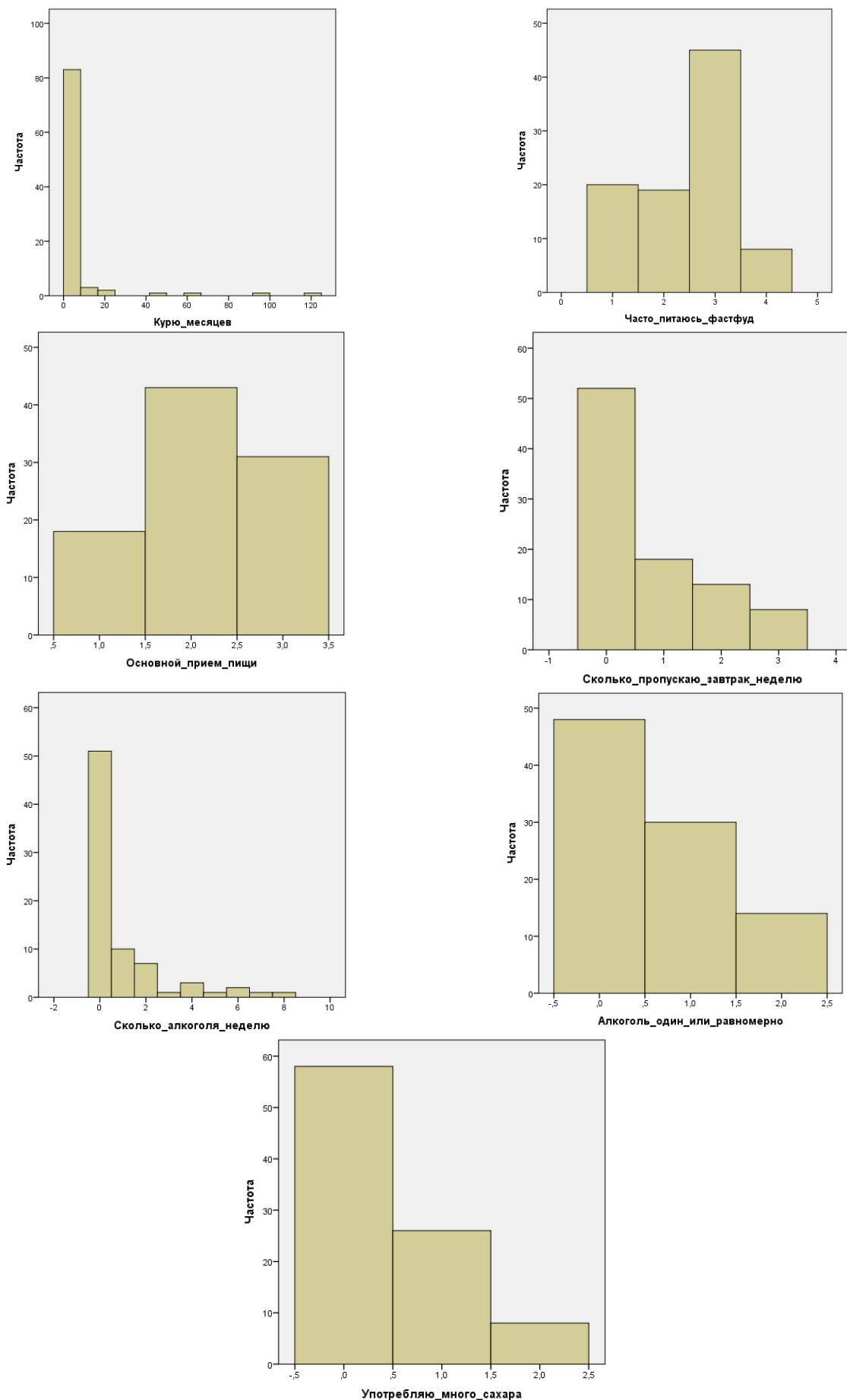


Рис. Гистограммы некоторых признаков

Таблица 1

Некоторые результаты анкетирования

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--------|----------------------|------------------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------------|------------------------|-------------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| <i>Что для Вас является основным приемом пищи?</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Завтрак | | | Обед | | | | Ужин | | | | | | | | | | |
| 19,6 % | | | 46,7 % | | | | 33,7 % | | | | | | | | | | |
| <i>Если Вы употребляете алкоголь, то распределяете его количество равномерно в течение недели или выпиваете за один раз?</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Не употребляю | | | За раз | | | | Равномерно в течение недели | | | | | | | | | | |
| 52,2 % | | | 32,6 % | | | | 15,2 % | | | | | | | | | | |
| <i>Употребляете ли Вы более 50 г сахара (12 чайных ложек) в сутки?</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Не употребляю | | | Несколько раз в неделю | | | | Ежедневно | | | | | | | | | | |
| 63,0 % | | | 28,3 % | | | | 8,7 % | | | | | | | | | | |
| <i>Ваше отношение к курению?</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Не курю | | Отказался от курения | | | Курю, но хочу бросить | | | Курю | | | | | | | | | |
| 80,5 % | | 6,5 % | | | 6,5 % | | | 6,5 % | | | | | | | | | |
| <i>Как часто Вы питаетесь в заведениях фастфуда?</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Не питаюсь | | Несколько раз в год | | | Несколько раз в месяц | | | Несколько раз в неделю | | | | | | | | | |
| 21,7 % | | 20,7 % | | | 48,9 % | | | 8,7 % | | | | | | | | | |
| <i>Сколько раз в неделю вы пропускаете завтрак?</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Нет | | 1–2 раза в неделю | | | 4–5 раз в неделю | | | Ежедневно | | | | | | | | | |
| 57,1 % | | 19,8 % | | | 14,3 % | | | 8,8 % | | | | | | | | | |
| <i>Если курите, то сколько месяцев?</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>В процентах от числа респондентов (0 месяцев – в случае отказа от курения)</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 5 | 7 | 12 | 18 | 24 | 48 | 60 | 96 | 120 и более | | | | | | | | |
| 87,0 % | 1,1 % | 2,2 % | 3,3 % | 1,1 % | 1,1 % | 1,1 % | 1,1 % | 1,1 % | 1,1 % | | | | | | | | |
| <i>Если употребляете алкоголь, то сколько единиц в неделю?</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>1 единица=125 мл вина или 250 мл пива? (0 единиц – в случае отказа от алкоголя)</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 и более | | | | | | | | |
| 66,2 % | 13,0 % | 9,1 % | 1,3 % | 3,9 % | 1,3 % | 2,6 % | 1,3 % | 1,3 % | 0 % | | | | | | | | |

Таблица 2

Физические показатели анкетируемых

| Показатель | Среднее значение | Стандартное отклонение | Процентиль, 25 % | Процентиль, 50 % | Процентиль, 75 % |
|--------------------------------------|------------------|------------------------|------------------|------------------|------------------|
| Возраст | 19,68 | 1,29 | 19,00 | 19,00 | 20,00 |
| Рост | 167,57 | 7,77 | 163,00 | 168,00 | 173,00 |
| Вес | 60,88 | 12,64 | 51,75 | 58,50 | 67,00 |
| Индекс массы тела (ИМТ) | 21,62 | 3,45 | 19,53 | 20,94 | 23,71 |
| Окружность талии | 69,69 | 11,34 | 64,00 | 66,00 | 73,00 |
| Артериальное давление (АД) (верхнее) | 116,33 | 10,41 | 110,00 | 120,00 | 120,00 |
| Артериальное давление (нижнее) | 73,19 | 10,14 | 70,00 | 70,00 | 80,00 |

Для оценки избыточной массы тела (МТ) используется метод ИМТ. Наличие избыточной МТ и ожирения увеличивает риск развития артериальной гипертонии в 3 раза, ишемической болезни сердца в 2 раза [3]. В результате проведения опроса были выявлены лица с избыточной МТ (5,75 %) и ожирением (4,6 %). Недостаточная масса тела обнаружена у 12,64 % опрошенных, 77,01 % респондентов имеют нормальную МТ. Для определения влияния независимой переменной – ИМТ, его направления и силы на зависимую переменную, в качестве которой выступает верхняя граница артериального давления, использовано моделирование по методу линейного регрессионного анализа. Дисперсионный анализ показал, что модель является значимой ($p=0,03$). Коэффициент корреляции R характеризует тесноту линейной связи между переменными регрессии. Значение $R=0,258$ говорит о том, что хотя связь между факторным признаком и результативным присутствует, ее нельзя назвать тесной. Стандартизованный коэффициент регрессии $\beta = 0,26$ определяет направление и силу влияния фактора. С ростом индекса массы тела артериальное давление увеличивается. Значения константы 99,17 и не стандартизированного коэффициента регрессии 0,78 формируют уравнение линейной регрессии. Величина стандартной ошибки коэффициента регрессии, равная 0,35, задает 95 % доверительный интервал его изменения.

Моделирование и интерпретация результатов медико-социологического мониторинга способствует выявлению поведенческих практик и социальных условий при формировании здоровьесберегающих активностей лиц молодого возраста в ходе реализации мероприятий по медицинской профилактике НИЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анализ данных медико-социологического мониторинга на основе методов машинного обучения / Г. Г. Рапаков, Г. Т. Банщикова, В. А. Горбунов [и др.] // Вестник Череповецкого государственного университета. – 2019. – № 1 (88). – С. 27–38.

2. Применение компьютерного моделирования при оценке показателей эффективности регионального здравоохранения / Г. Г. Рапаков, Г. Т. Банщикков, В. А. Горбунов [и др.] // Вестник Череповецкого государственного университета. – 2019. – № 2 (89). – С. 56–68.

3. Кардиоваскулярная профилактика – важнейшее условие снижения смертности населения: методические указания / Г. Т. Банщикков, Е. А. Барачевская, М. Н. Зайцева [и др.]. – Вологда : ВоГУ, 2014. – 73 с.

4. Рапаков, Г. Г. Прикладные методы анализа данных в системе медико-социальной поддержки населения (на примере г. Вологды) : монография / Г. Г. Рапаков. – Вологда : ВоГУ, 2017. – 104 с.

Г.Г. Рапаков, А.В. Ударатин

Вологодский государственный университет, Россия

С.В. Юрьева, П.А. Морозова

Северный государственный медицинский университет, Россия

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ РАСПРОСТРАНЕННОСТИ ФАКТОРОВ РИСКА ЗАБОЛЕВАНИЙ ДЛЯ СТУДЕНЧЕСКОЙ ЦЕЛЕВОЙ АУДИТОРИИ

Использование статистических методов, сведений и информации о молодежной аудитории позволяет региональным и муниципальным органам законодательной и исполнительной власти, субъектам процессов образования и воспитания оперативно и адресно выполнять целенаправленную коррекцию социальных установок современной молодежи при формировании когнитивного образа мира в части мировоззренческих ориентаций, понимания целей и смыслов, а также ведения здорового образа жизни (ЗОЖ). Актуальной является задача исследования статистических методов анализа данных в задаче контроля факторов риска (ФР) неинфекционных заболеваний (НИЗ), что обуславливает практическую значимость работы. Цель исследования состоит в оценке распространенности ФР заболеваний для студенческой целевой аудитории. Методологической основой работы являются приемы статистического анализа данных социологических опросов. Информационной базой исследования стали сведения медико-социологического мониторинга с ошибкой выборки не более 10 % и доверительной вероятностью $\alpha = 0,95$. Анкета для выявления ФР НИЗ насчитывала 38 пунктов. Опрос выполнялся с применением дистанционных технологий на базе платформы Google Marketing Platform. Контингенты представлены тремя группами респондентов: студенты второго курса лечебного (62 %), педиатрического (23,9 %) факультетов и факультета медицинской профилактики (14,1 %) Северного государственного медицинского университета. Из них 14,1 % принадлежат к мужскому, 85,9 % – к женскому полу.

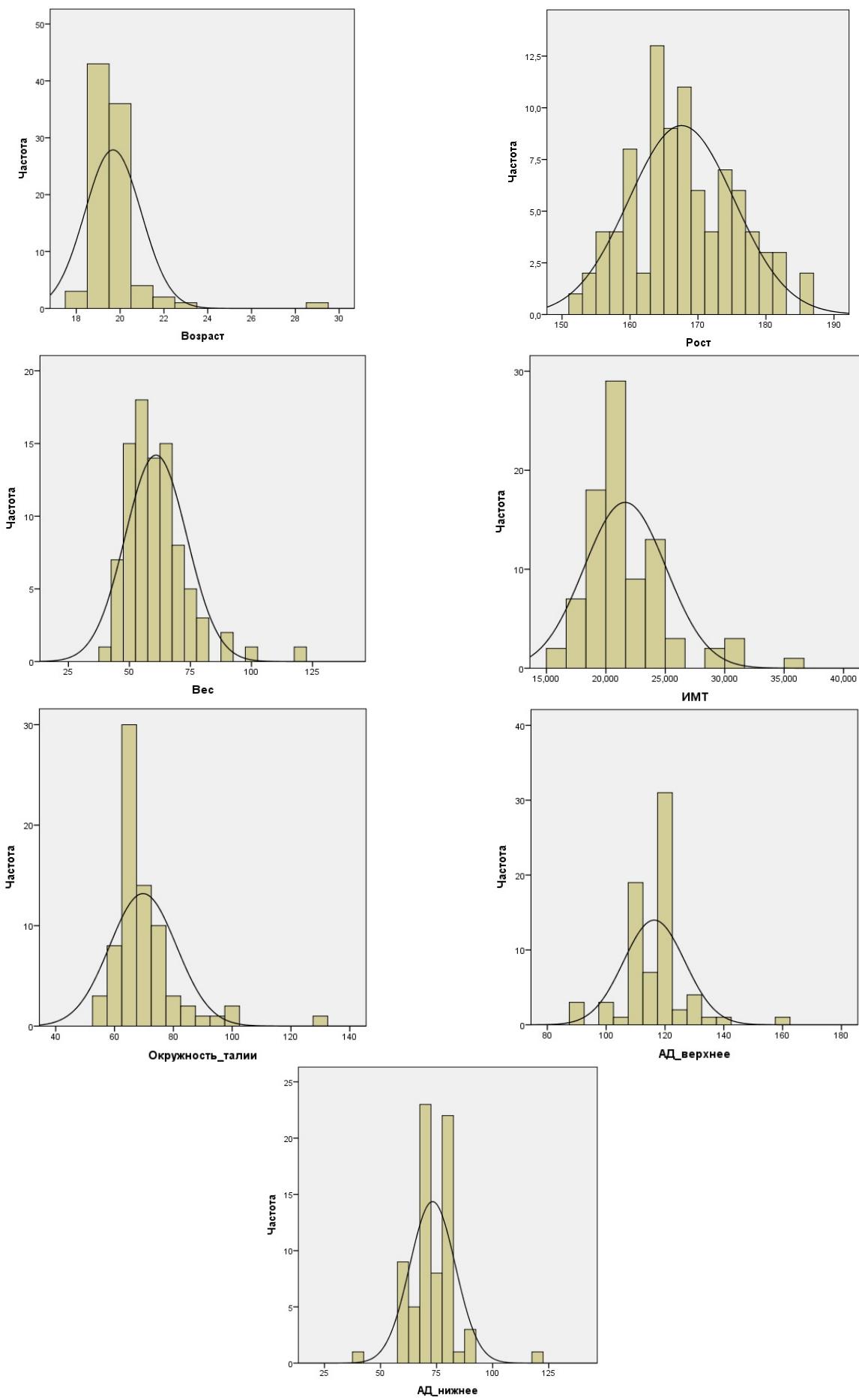


Рис. 1. Гистограммы некоторых показателей анкетируемых

Таблица 1
Результаты обработки данных

| Оценка состояния здоровья респондента | Да, % | Нет, % |
|--|-------|--------|
| 1. Являетесь ли Вы пассивным курильщиком? | 39,1 | 60,9 |
| 2. Выкуривают ли при вас 4 сигареты в день? | 18,5 | 81,5 |
| 3. Время на ходьбу, включая путь до учебы: не менее 30 мин. (более 3 км) | 56,5 | 43,5 |
| 4. Есть ли у Вас чрезмерные физические нагрузки (упражнения со штангой, бег в маске и т.д.)? | 17,4 | 82,6 |
| 5. Имели ли Вы в течение последнего месяца серьезный стресс (смерть близкого человека, увольнение с работы и т.д.)? | 20,7 | 79,3 |
| 6. Был ли инфаркт миокарда у Ваших близких родственников (матери или родных сестер в возрасте до 65 лет или у отца, родных братьев в возрасте до 55 лет)? | 12 | 88 |
| 7. Был ли инсульт у Ваших близких родственников (матери или сестер в возрасте до 65 лет; у отца или братьев в возрасте до 55 лет)? | 20,7 | 79,3 |
| 8. Были ли у Ваших близких родственников в молодом или среднем возрасте или в нескольких поколениях злокачественные новообразования (рак желудка, кишечника, семейные полипозы)? | 27,2 | 72,8 |
| 9. Употребляете ли Вы ежедневно около 400 г (или 4–5 порций) разных фруктов и овощей (не считая картофеля)? | 30,4 | 69,6 |
| 10. Обращаете ли Вы внимание на содержание жира и/или холестерина в продуктах при покупке (на этикетках, упаковках) или при приготовлении пищи? | 31,5 | 68,5 |
| 11. Употребляете ли Вы в сутки более 5 г. соли (больше 1 чай. л.)? | 9,8 | 90,2 |
| 12. Имеете ли Вы привычку подсаливать пищу, не пробуя ее? | 15,2 | 84,8 |
| 13. Соблюдаете ли Вы режим питания (3 основных приема пищи и 2 перекуса)? | 30,4 | 69,6 |
| 14. Завтракаете ли Вы? | 73,9 | 26,1 |
| 15. Сколько часов в сутки Вы тратите на сон? 7–8 часов и более? | 53,3 | 46,7 |
| 16. Выпиваете ли Вы 2 литра воды в сутки? | 45,7 | 54,3 |
| 17. Знаете ли Вы свой уровень холестерина в крови? | 3,3 | 96,7 |
| 18. Знаете ли Вы свой уровень сахара в крови? | 20,7 | 79,3 |
| 19. Работаете ли Вы в данный момент времени? | 6,5 | 93,5 |
| 20. Работаете ли Вы в ночное время суток? | 3,3 | 96,7 |
| 21. Принимаете ли Вы какие-либо лекарства на постоянной основе? | 22,8 | 77,2 |

Изучение источников позволило ознакомиться с современным состоянием исследования вопроса [1, 2, 3]. Статистические методы и алгоритмы эффективно используются для аналитической поддержки задач здравоохранения [4]. Результаты обработки данных на основе использования описательных статистик и частотного анализа состояния здоровья респондентов сведены в таблице. Гистограммы ряда показателей представлены на рисунке 1.

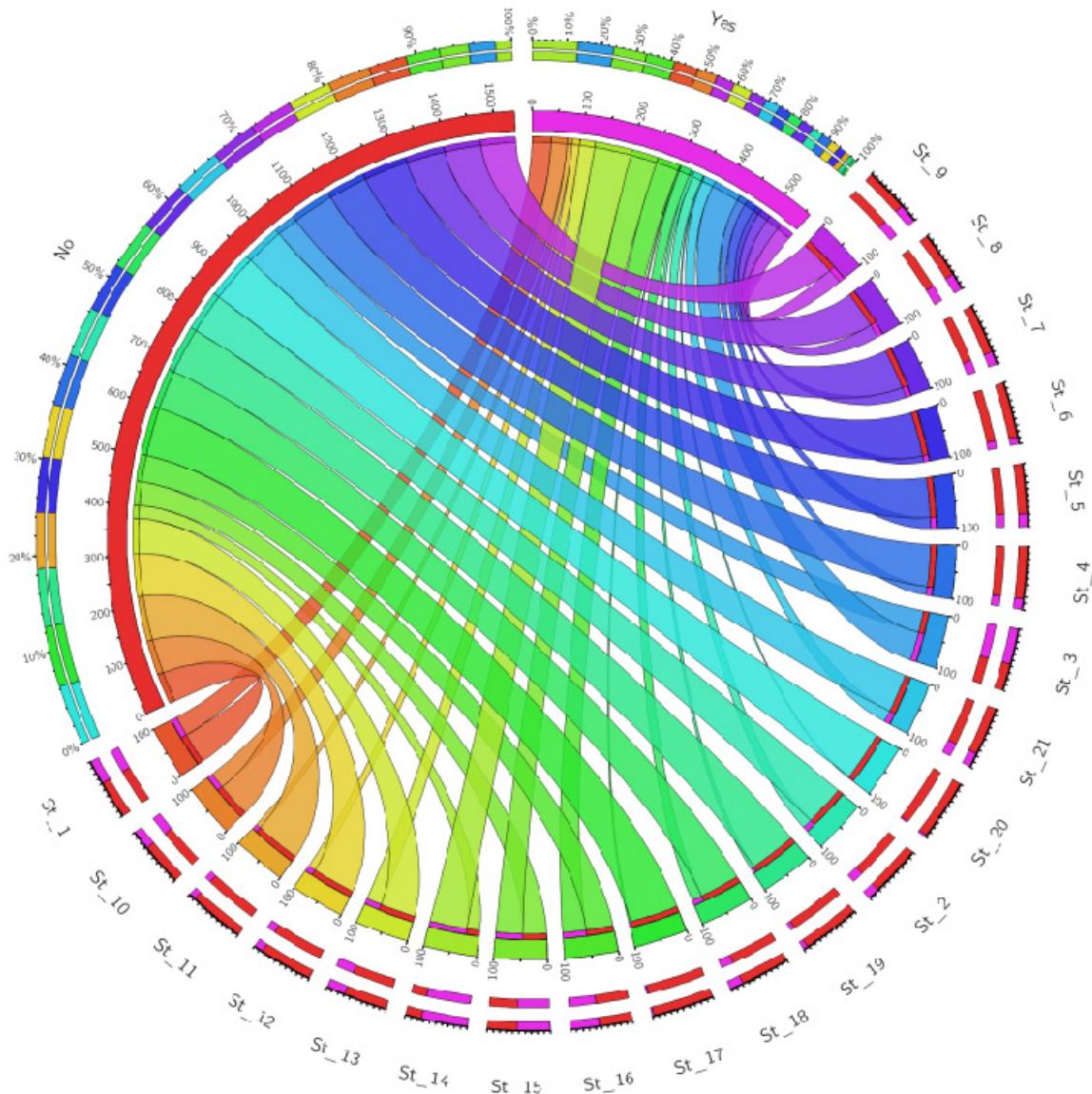


Рис. 2. Визуализация части результатов при помощи радиальной диаграммы

В целях удобства анализа лицом, принимающим решение, визуализация части результатов выполнена при помощи радиальной диаграммы, которая пригодна для наглядного представления сложных наборов данных (рис. 2).

Развитие сердечно-сосудистых заболеваний тесно связано с особенностями образа жизни и ФР. По результатам анализа данных для достижение целевых уровней ФР требуется обеспечить: усиление защиты от пассивного курения; соблюдение принципов здорового питания (в том числе за счет достаточного потребления овощей и фруктов, увеличение контроля за потреблением животных жиров и установления регулярного режима приема пищи); повышение физической активности; нормализацию сна, режима труда и отдыха; учет семейного анамнеза; мотивацию анкетируемых к мониторингу артериального давления, уровня холестерина и сахара крови; проведение активных профилактических мероприятий, в том числе с помощью мер немедикаментозной терапии. Статистическая оценка распространенности ФР способствует

повышению эффективности поддержки управленческих решений в системе медицинской профилактики в ходе исполнения мероприятий по формированию ЗОЖ для лиц молодого возраста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рапаков, Г. Г. Сравнительная оценка эффективности методов классификационного анализа в социологических исследованиях / Г. Г. Рапаков, В. А. Горбунов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2014. – № 4. – С. 54–62.
2. Рапаков, Г. Г. Мониторинг факторов риска болезней системы кровообращения с использованием статистических методов / Г. Г. Рапаков, Г. Т. Банщиков, К. А. Абдалов // Вузовская наука – региону : материалы XV Всероссийской научной конференции с международным участием. – Вологда : ВоГУ, 2017. – С. 93–96.
3. Кардиоваскулярная профилактика – важнейшее условие снижения смертности населения: методические указания / Г. Т. Банщиков, Е. А. Барачевская, М. Н. Зайцева [и др.]. – Вологда : ВоГУ, 2014. – 73 с.
4. Рапаков, Г. Г. Статистические методы в социально–экономических исследованиях здравоохранения Вологодской области: монография / Г. Г. Рапаков; Вологодский государственный университет, Международная академия наук экологии и безопасности жизнедеятельности. – Вологда : ВоГУ, 2016. – 127 с.

Л.Г. Русина

Санкт-Петербургский горный университет, Россия

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ПРИ ДИСТАНЦИОННОМ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ

В настоящее время в мире накоплен значительный опыт реализации систем дистанционного обучения. Системы обучения различаются не только методологией, но и зависят от особенностей той или иной страны, в которой практикуются методы и подходы к организации дистанционного образования. Однако, в целом, все признают, что будущее за дистанционным обучением не только в силу развития информационно-коммуникационных технологий, но и как следующий, закономерный этап развития образовательных систем [1].

Оперативный контроль усвоения знаний, умение вести статистику успеваемости и прогнозировать уровень подготовки каждого студента, а также группы в целом являются обязательными компонентами автоматизированной системы контроля знаний при дистанционном обучении. Суть контроля обу-

чения состоит в выявлении уровня знаний у студентов, который должен соответствовать образовательному стандарту по данной программе конкретной дисциплины. В настоящее время в условиях перевода студентов на дистанционное обучение важную роль играет организация промежуточного и итогового контроля за «степенью» и качеством усвоения студентами учебного материала.

Одной из форм промежуточного и итогового контроля является проведение тестирования по окончании изучения основных тем и разделов курса математики. При тестировании в рамках дистанционного обучения использовались следующие автоматизированные системы: «Google Формы» и «MyTest». Низкий уровень базовой школьной подготовки, вынужденный отрыв от занятий приводят к тому, что большой процент студентов не справляется с усвоением лекционного материала. Одной из основных задач методической работы кафедра считает изменение данной ситуации.

Для этого на первом этапе был переработан тематический план. В него после каждой темы были включены тесты по тематике лекционных занятий. В данных тестах систематизируются знания и практические навыки в решении задач по пройденной теме.

Второй этап включал разработку и издание тестов по подготовке к коллоквиуму и экзамену. Каждый такой тест имеет структуру:

1. Содержание теста (тематика теста).
2. Вопросы теста.
3. Четыре варианта ответа.

Приведем пример применения автоматизированной системы тестирования «Google Формы» на рисунке 1.

тест

Случайные события и случайные величины
* Обязательно

Фамилия Имя- номер группы (ГС-18-1 или ГС-18-2) *

Мой ответ

Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0.6; второй-0.5; третий-0.9. Тогда вероятность того, что студенты сданы по крайней мере два экзамена, равна: *

1. 0.34

Рис. 1. Пример автоматизированной системы «Google Формы»

Система «Google Формы» состоит из пяти модулей: тестового, регистрационного, отчетного, справочного и статистического.

1. Модуль регистрации

Позволяет заносить данные о тестируемых студентах в отдельную базу данных и оперировать с ними. Эти данные используются для отображения отчетной страницы и хранения следующей информации о студенте: фамилия, имя, отчество, группа, курс, факультет.

2. Справочный модуль

Структура приложения является простой и понятной, но наличие справки (помощи) является необходимым компонентом любой современной программы. Справочная система теста содержит информацию обо всех составляющих компонентах и позволяет быстро ориентироваться в структуре приложения.

3. Модуль тестирования

Одной из форм промежуточного и итогового контроля является проведение тестирования по окончании изучения основных тем и разделов курса математики. Модуль тестирования является основным модулем, который позволяет протестировать слушателей учебной группы по соответствующим темам учебной программы, например дисциплины «Математика». Тестирование является сетевым, что позволяет проводить занятия со всеми студентами одновременно, наблюдая за их подготовкой и качеством знаний. Результаты со всех компьютеров о каждом тестируемом заносятся в одну базу данных и передаются в отчетный модуль. Тесты представлены в традиционной форме: окно вопроса, варианты ответа и счетчик времени. Также есть возможность пропустить вопрос и прервать процесс на любом этапе с оценкой «неудовлетворительно».

4. Модуль отчетности

Является завершающим этапом тестирования. Представляет собой базу данных с отдельными объектами – страницами, на которых располагаются результаты обучения за разные месяцы. Включая сведения о студентах, результаты тестов, контрольных работ, предварительные и итоговые оценки за семестр, можно получить оперативную информацию об успеваемости студентов в учебной группе в семестре. Отчет представлен на рисунке 2 в виде редактируемой таблицы (в виде ведомости), которую напрямую можно распечатать на принтере.

| Отметка времени | Баллы | - номер группы (ГС-18-1.9. Тогда ве |
|---------------------|---------|-------------------------------------|
| 29.04.2020 9:50:05 | 17 / 25 | Киреева Маргарита (ГС 4. 0.75 |
| 29.04.2020 10:03:01 | 19 / 25 | Рубис Мария ГС-18-2 4. 0.75 |
| 29.04.2020 10:03:31 | 21 / 25 | Кудрявцев Иван - ГС-18-3. 0.75 |
| 29.04.2020 10:07:21 | 18 / 25 | Терентьев Никита- ГС-18-3. 0.75 |
| 29.04.2020 10:10:35 | 20 / 25 | Макаров Алексей ГС-18-3. 0.48 |
| 29.04.2020 10:11:08 | 21 / 25 | Коровин Роман - ГС-18-3. 0.48 |
| 29.04.2020 10:11:19 | 21 / 25 | Степанов Владимир ГС-18-3. 0.48 |

Рис. 2. Отчет в виде редактируемой таблицы

5. Статистический модуль

Отображает результаты тестирования в виде гистограммы (рис. 3) и позволяет сравнивать оценки студентов между собой и вести статистику, что помогает преподавателю сделать отдельные выводы как о каждом студенте в отдельности, так и о группе в целом.

III Статистика



Рис. 3. Результаты тестирования в виде гистограммы

Данная автоматизированная система тестирования позволит решить следующие задачи:

- обеспечить текущий контроль знаний студентов по отдельным темам дисциплины «Математика»;
- проверить степень готовности каждого студента к учебным занятиям;
- получить оперативную информацию об успеваемости каждого студента в группе.

Недостатком данной системы является недостаточная возможность набора математических формул в модуле тестирования. Поэтому по определенным темам раздела математики использовалась программа «MyTest 3». Она состоит из трех модулей: модуль тестирования «MyTestStudent» (рис. 4), редактор тестов «MyTestEditor» и журнал тестов «MyTestServer» (рис. 5).

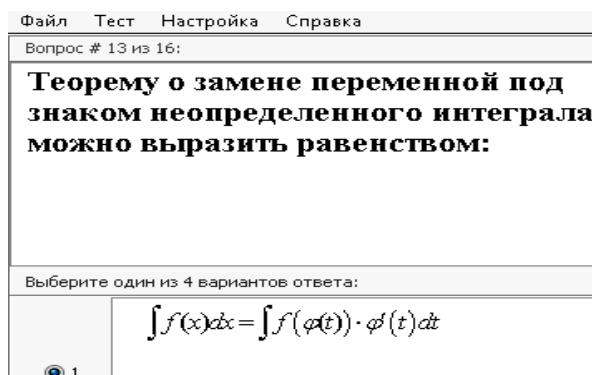


Рис. 4. Модуль тестирования

| Информация |
|--|
| Тест "" закончен... |
| Всего заданий в тесте: 16. Вами выполнено заданий: 16. |
| Из них правильно: 14 (87,5% выполненных заданий). |
| Из них ошибок: 2 (12,5% выполненных заданий). |
| Результативность: 87,5%. |
| Набрано баллов: 14,0 из 16 возможных. Ваш результат: 87,5%. |
| Оценка: 36 баллов. |
| Время начала: 14:09:10. |

Рис. 5. Журнал тестов

Программа «MyTest 3» работает с восемью типами заданий: одиночный выбор, множественный выбор, установление порядка следования, установление соответствия, указание истинности или ложности утверждений, ручной ввод числа, ручной ввод текста, выбор места на изображении. В teste можно использовать любое количество любых типов заданий.

При наличии компьютерной сети можно организовать сбор и обработку результатов тестирования, используя модуль журнала тестов «MyTestServer». Результаты выполнения заданий выводятся студенту и отправляются преподавателю. Преподаватель может оценить или проанализировать их в любое удобное для него время. Программа поддерживает несколько режимов: обучающий, штрафной и свободный. В обучающем режиме студенту выводятся сообщения об его допущенных ошибках и у преподавателя есть возможность подробного объяснения задания. В штрафном режиме за неверные ответы у тестируемого отнимаются баллы и можно пропустить задания (баллы не прибавляются и не отнимаются). В свободном режиме студент может отвечать на вопросы в любой последовательности, переходить (возвращаться) к любому вопросу самостоятельно. Параметры тестирования, задания, изображения к заданиям для каждого отдельного теста – все хранится в одном файле теста. Никаких баз данных, никаких лишних файлов – один тест – один файл. Файл с тестом зашифрован и сжат. При правильном отборе контрольного материала содержание теста может быть использовано не только для контроля, но и для обучения. Использование тестовых заданий в данных автоматизированных системах тестирования «Google Формы» и «MyTest 3» позволит студенту самостоятельно обнаружить пробелы в структуре своих знаний и принять меры для их ликвидации. В таких случаях можно говорить об обучающей функции тестовых заданий, и использование контрольной базы тестовых заданий станет одним из эффективных направлений практической реализации принципа единства и взаимосвязи обучения и контроля. При включении обучающего режима студент всегда получит информацию о своих ошибках и верных ответах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раззаков, Ш. И. Контроль знаний в системе дистанционного обучения / Раззаков Ш. И., Нарзиев У.З., Рахимов Р. Б. // Молодой ученый. – 2014. – № 7. – С. 70–73.

*А.П. Сергуничева, Е.Н. Давыдова
Вологодский государственный университет, Россия*

РАЗРАБОТКА ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ ПРОФОРИЕНТАЦИИ

Профориентация выпускников школ обычно входит в круг обязанностей педагогов средних специальных и высших образовательных заведений. Как правило, целью профориентационной работы преподавателей является агитация: обеспечение конкурса на бюджетные места и приема определенного количества абитуриентов в свои учебные заведения. В числе применяемых методов: информирование выпускников о направлениях подготовки учебных заведений, беседы о профессиях, встречи с достигшими успеха в своей предметной области выпускниками вузов, экскурсии в колледжи и университеты, экскурсии на предприятия и т.п.

Кроме информирующих методов в профориентации существуют еще и диагностические методы. Путем диагностики определяют интересы и склонности индивидуума, его показания и противопоказания (и психологические, и медицинские) к определенным профессиям. Выбор подходящей человеку профессии обеспечит ему в будущем успех, моральное удовлетворение от работы, реализацию индивидуальных возможностей. Будучи студентом, он больше мотивирован к обучению, лучше учится и, следовательно, станет специалистом более высокой квалификации. Однако для диагностики должен быть реализован индивидуальный подход, что требует значительных затрат времени, и поэтому чаще применяется для профотбора, чем для профориентации. Частично диагностика может быть автоматизирована посредством компьютерных систем. Как правило, такие системы включают один или несколько опросников и после ответов на определенное количество вопросов выдают список рекомендуемых профессий. Авторы данной работы предлагают решать задачу автоматизации диагностики путем реализации компьютерной системы профориентации на базе генетического алгоритма.

Генетические алгоритмы базируются на эволюционной теории, в соответствии с которой движущей и направляющей силой эволюции является естественный отбор. В числе их достоинств концептуальная простота и широкая применимость, устойчивость к динамическим изменениям окружающей среды и способность к самоорганизации.

Как и в биологических системах, в программных приложениях, реализующих генетические алгоритмы, многократно выполняется эволюционный цикл: создание новой популяции – скрещивание и размножение – отбор. В состав начальной популяции включают некоторое число случайно отобранных индивидуумов со случайным набором хромосом (числовых векторов). Оценивается их выживаемость. Скорее всего, первая популяция не будет соответст-

вовать принятым требованиям. В ходе скрещивания производится рекомбинация решений-кандидатов. Для получения потомка требуется два родителя: потомок наследует черты обоих родителей. Посредством нескольких случайных скрещиваний и мутаций (изменений параметров особей, которые позволяют повысить выживаемость потомков) к популяции добавляется некоторое количество новых индивидуумов. Из полученной популяции выбирают тех, кто «пойдет дальше». При этом долю «выживших» после отбора заранее определяют и указывают в виде параметра. Данный цикл повторяется несколько раз до получения приемлемого результата. Существуют проблемы выбора параметров (например, мощность популяции) алгоритма, критериев окончания работы алгоритма, определения функции приспособленности особей и некоторые другие. Тем не менее, генетические алгоритмы широко применяются для решения поисковых и оптимизационных задач в различных предметных областях.

Так как задачу выбора профессии также можно сформулировать как поисково-оптимизационную, то генетический алгоритм может быть построен и для диагностической системы профориентации. Исходной будем считать информацию о предпочтениях, индивидуальных особенностях человека и его успехах в изучении различных дисциплин. Существующие методики обычно определяют склонность индивидуума к одной из 5–7 областей деятельности. Поэтому поставим цель получить в результате работы алгоритма список из нескольких профессий с указанием ожидаемого процента успеха в освоении каждой из них.

Авторами рассмотрено несколько способов получения системой исходной информации. Можно провести анкетирование в соответствии с одной или несколькими методиками. Например, в соответствии с типологией личности человека (по Дж. Голланду, Е.А. Климову [1] или др.) определяют, с чем/кем (с другими людьми, с природой, с художественными образами, знаковыми системами или с техникой) он взаимодействует охотнее, какая деятельность (познавательная, преобразовательная или изыскательская) нравится ему больше. Другой способ – тестирование. Тестированием можно определить и личностные характеристики (интеллект, внимание и другие), и уровень знаний индивидуума в соответствующей предметной области, и его склонности к различным видам деятельности. Однако если список вопросов будет большим, потребуется значительное время на выполнение заданий, а если маленьким – точность оценок будет низкой. Между тем о предпочтениях и уровне знаний выпускника в различных предметных областях можно судить и по оценкам в его аттестате (дневнике). Ввод оценок не займет много времени и его достаточно просто реализовать в программной системе. Поэтому принято решение на данном этапе воспользоваться именно этим способом.

Для выявления предрасположенности индивидуума к конкретному виду деятельности необходимо иметь перечень требований и противопоказаний к

профессии. Обычно для этого используют профессиограммы, списки необходимых компетенций и другие подобные документы. Так как у нас склонности выпускника отражают оценки по школьным предметам, то и требования к профессии должны быть выражены аналогично. На данном этапе ограничим список необходимых для каждой профессии предметов тремя дисциплинами. Например, чтобы стать программистом, важно иметь хорошие оценки по математике, информатике и русскому языку. На оценках по этим предметам базируется расчет процента будущего успеха выпускника в освоении этой профессии.

Посредством генетического алгоритма осуществляем сопоставление личностных характеристик и требований. Сформируем начальную популяцию. Ген каждой из особей представлен в виде случайно сгенерированного списка профессий, к которому добавлены оценки выпускника по каждому из требуемых предметов.

Формирование следующей популяции будет выполнено путем скрещивания особей точным методом. Согласно этому методу выбираются пары особей из родительской популяции. Для каждой пары родителей случайным образом выбирается позиция гена, определяющая точку скрещивания (натуральное число, меньше длины хромосом каждого из родителей) Определение точки скрещивания будет являться, по своей сути, случайным выбором натурального числа на интервале [1, длина_хромосомы_родителя - 1]. В результате скрещивания получается потомок, хромосома которого на позициях от 1 до точки скрещивания состоит из генов первого родителя (первый список профессий), а на позициях от точки скрещивания +1 до конца хромосомы – из генов второго родителя (второй список профессий). Помимо скрещивания, существует маленький шанс того, что особь мутирует. В случае мутации особи, она заменит один из своих генов, т.е. одну из профессий в списке, выбранную случайным образом на другую, также выбранную случайным образом.

В ходе селекции будет выполнен отбор наиболее приспособленных особей и удаление из популяции менее приспособленных особей (в нашем случае менее подходящих профессий). Отбор осуществляется на основе процента успеха в освоении каждой из профессий в списке и функции приспособленности. Для определения приспособленности выпускника к той или иной профессии вычисляется сумма значений позиций, определяющих процент успеха, и сравнивается с функцией приспособленности. Считается, что чем выше процент соответствия значения приспособленности выпускника и значения функции приспособленности, тем больше приспособлен выпускник к рекомендованной профессии. После определения приспособленности выпускника к каждой из профессий, удаляется определенный процент наименее рекомендованных ему профессий и формируется новое поколение.

Далее снова происходит скрещивание и цикл жизни и смерти повторяется, пока не будет найдена профессия с необходимым значением степени соот-

вествия или по достижению определенного количества повторений. В результате работы алгоритма будет сформирован список из нескольких профессий, подходящих выпускнику. Для каждой из них указан также ожидаемый в будущем процент успеха в освоении профессии.

Разработанный генетический алгоритм реализован в первой версии компьютерной системы профориентации. Поиск оптимума пока производится только на основании оценок выпускника по учебным дисциплинам, а список возможных профессий невелик.

Результаты исследования показывают, что применение генетических алгоритмов предоставляет удобные механизмы внедрения методов искусственного интеллекта в сферу профориентации, что позволяет за счет непрекращающейся генерации новых структур искомых объектов и выделения из них самых сильных и полезных экземпляров повысить качество рекомендаций по выбору профессии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов, Е. А. Психология профессионального самоопределения / Е. А. Климов. – Москва : Академия, 2004. – 304 с.

C.Б. Федотовский

Вологодский государственный университет, Россия

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО СЕТЕВЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ

Сегодня уже невозможно представить учебный процесс в вузах без информационно-технологического обеспечения, поэтому наличие вычислительной сети в учебном заведении является настоятельной необходимостью. Как правило, в таких случаях либо создаются специальные компьютерные учебные классы или лаборатории, либо кафедральные вычислительные машины (возможно только часть компьютеров) входят в состав общей вычислительной сети учебного заведения. В обоих случаях задачи администрирования такой сети возлагаются на специально созданный информационно-вычислительный центр (отдел, службу) предприятия.

С одной стороны несомненным плюсом такого подхода является достаточно тщательный подбор квалифицированных и опытных кадров для такого центра (отдела, службы), и, кроме того, на предприятии проводится общая политика администрирования и безопасности вычислительной сети. Конечные пользователи вычислительных ресурсов за время обучения также привыкают к определенному набору требований при работе в компьютеризированных ау-

диториях. Однако на этом преимущества централизованного администрирования сети, скорее всего, и заканчиваются.

Для ряда специальностей (например, «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети») желательно бы иметь свою локальную вычислительную сеть в рамках лаборатории, которая не входила бы ни в кафедральную, ни тем более в вычислительную сеть учебного заведения.

Во-первых, при изучении таких дисциплин, как операционные системы, сети и телекоммуникации, промышленные сети, системное программное обеспечение желательно проведение лабораторных работ не методом имитационного моделирования, а непосредственной инсталляции соответствующего системного программного обеспечения и проведению экспериментов по его настройке и администрированию. В таком случае исключаются ошибки эмулирующих пакетов, которые могут быть. Кроме того, все же эмуляция не дает абсолютно точного эффекта работы / инсталляции / настройки / администрирования на реальном хосте, в том числе и психологического.

Однако при этом обучающихся придется наделять административными правами, что, следовательно, автоматически подразумевает обеспечение безопасности всех остальных локальных вычислительных сетей вуза, в том числе и кафедральной. Понятно, что такое проведение лабораторного практикума в рамках общеуниверситетской сети невозможно. Кроме того, встает вопрос и о быстром восстановлении в первоначальное состояние операционной системы вычислительных машин, на которых проводились такие эксперименты. С другой стороны, такие лабораторные исследования позволяют получить обучающимся навыки системных администраторов. Следует заметить, что на ряде учебных занятий, возможно, потребуется установка других операционных систем или специализированного программного обеспечения, возможно и проприетарного. Даже если обучающиеся будут осваивать в рамках дисциплины только одну операционную систему (что, вообще-то, нереально), то все равно при инсталляции дополнительных служб, протоколов и сервисов и их исследовании предустановленная операционная система уже не будет соответствовать своему исходному функционалу, а deinсталляция исследуемого программного обеспечения, как правило, все равно не возвращает систему в первоначальное состояние. Особенно это касается операционных систем фирмы Microsoft. Восстановить исходное состояние операционной системы любой вычислительной машины в рамках такой условно изолированной лаборатории возможно в достаточно короткий срок и с минимальными усилиями. Такой подход, например, описан в [1].

Во-вторых, зачастую необходимо применять групповые политики безопасности не только к пользователям, но и к компьютерам. Особенно это может быть характерно для выпускающих кафедр, где часть компьютеров используется в качестве устройств управления каким-либо оборудованием (роботами, приводами, устройствами релейной защиты и автоматики и т.п.) и

разнесены по тематическим лабораториям. В рамках единой вычислительной сети вуза это однозначно невозможно.

В-третьих, при указанной ранее организации вычислительной сети нет достаточно гибкого разделения пользователей на группы, системные администраторы предприятия не очень заинтересованы в усложнении задач администрирования и, как правило, все обучающиеся, преподаватели и инженерно-технический персонал вуза отнесены к одной общей группе пользователей с одинаковыми правами.

Что касается установки, настройки и получения навыков администрирования различных операционных систем, то здесь, вероятно, большой необходимости в наличии сети, в общем-то, даже и нет. Вероятно, определяющую роль для процесса обучения будет играть количество компьютеров (желательно, чтобы каждый обучающийся работал на отдельной машине). Однако при изучении таких дисциплин, как сети и телекоммуникации, промышленные сети, системное программное обеспечение и ряда других наличие сети является обязательным условием. Здесь можно исследовать функционирование различных сетевых служб, в том числе и в гетерогенных сетях. Можно также исследовать работу сети при отключении / подключении тех или иных сетевых служб.

Естественно, может возникнуть вопрос, как в одной сети могут функционировать одновременно несколько серверов с полностью одинаковым функционалом (с абсолютно одинаковыми ролями в терминологии Microsoft). Например, в односегментной сети не могут существовать два или более DNS-сервера, являющихся носителями основной зоны. Это может касаться и других служб. Здесь автором предлагается следующий подход, который был апробирован в течение ряда лет.

В качестве примера ниже описывается инсталляция и администрирование вышеуказанной службы сервера DNS. Методика распространима и на другие сетевые службы и протоколы, за исключением, возможно, установки ActiveDirectory, но об этом чуть позднее.

Проведение лабораторной работы по исследованию службы сервера DNS кратко выглядит следующим образом.

Вначале обучающиеся настраивают хосты с предустановленной серверной операционной системой для работы в одноранговой сети. Сюда может входить смена имени компьютера и рабочей группы, установка параметров стека протокола TCP/IP (сетевой адрес, маска подсети) и отключение (по необходимости) некоторых служб, например встроенного брандмауэра. Производится проверка связи хостов по сети путем отправки тестовых пакетов (команда ping). Этим убеждаются в работоспособности стека протоколов и доступность хостов по сети. Далее каждый участник сетевого взаимодействия осуществляет инсталляцию службы сервера DNS, описание созданного домена (имени, доменного суффикса), создание зон прямого и обратного просмот-

ра, создание ресурсных записей всех хостов домена. При этом имя домена у всех серверов DNS является одинаковым, хотя и не обязательно. В последнем случае на всех остальных хостах придется переписывать доменный суффикс.

Далее на всех хостах, кроме одного, который в этом эксперименте будет действующим, осуществляется остановка и отключение службы DNS-сервера. На этих же хостах в настройке стека протоколов TCP/IP прописывается адрес действующего сервера DNS, перезапускается служба клиента DNS, возможно очищается кэш DNS и проверяется действие DNS-сервера по разрешению имен как в зоне прямого, так и обратного просмотра.

Дальнейший алгоритм действий заключается в следующем: останавливается и отключается служба сервера DNS на только что работающем хосте, запускается служба сервера DNS на следующей по очереди машине, на всех остальных хостах меняются настройки стека протоколов TCP/IP, перезапускаются службы DNS-клиентов и все тестируется вышеуказанным способом.

Аналогичным образом алгоритм происходит и для других изучаемых сетевых служб (WINS, DHCP, создание VLAN на портах коммутатора, исследование DNS серверов – носителей основной и дополнительных зон, и так далее).

Особенностью, возможно, будет инсталляция и исследование службы ActiveDirectory в семействах операционных систем Windows, но здесь также не видится серьезных проблем. В случае установки первичного контроллера домена каждый из обучающихся может задать эту роль своему хосту, при этом желательно, чтобы все создаваемые контроллеры домена находились бы в разных подсетях, что не является проблемой. Целесообразно с точки зрения обучения, чтобы одна из вычислительных машин не имела бы роли контроллера домена с целью возможности ее ввода и вывода в созданные домены. Это также является одним из аспектов обучения.

Аналогичным способом возможна установка первичного и вторичного контроллеров домена, при этом создание подсетей даже при наличии одного коммутатора не является сложностью.

Таким образом, изложенная в этой статье методика позволяет получить действительно практические навыки по инсталляции, настройке и администрированию сетевых служб и протоколов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федотовский, С. Б. Технология образов в лабораторном практикуме / С. Б. Федотовский // Вузовская наука – региону : материалы XV Всероссийской научной конференции с международным участием / Министерство образования и науки РФ, Вологодский государственный университет ; Правительство Вологодской области. – Вологда : ВоГУ, 2017. – С. 107–109.

РАЗДЕЛ II
СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ КОММУНИКАЦИЙ
НА ОСНОВЕ ЛВС, КОРПОРАТИВНЫХ СЕТЕЙ, ИНТЕРНЕТ
И ОБЩЕСИСТЕМНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

A.Н. Швецов

Вологодский государственный университет, Россия

**МОДЕЛИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АГЕНТОВ
ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ***

Современные информационно-телекоммуникационные системы (ИТС) являются многоуровневыми территориально-распределенными иерархическими программно-аппаратными комплексами, решающими задачи передачи и обработки информационных потоков, поступающих от разнородных источников информации [1]. Развитие ИТС направлено на интеграцию систем управления сетью передачи данных, корпоративных информационных систем, систем поддержки принятия решений и систем моделирования функционирования ИТС.

На верхних уровнях управления ИТС проявляются свойства неполноты, нечеткости, стохастичности функционирования компонентов, которые могут быть учтены в моделях ИА, включающих механизмы нечеткой логики и искусственных нейронных сетей. Модели таких нейро-нечетких ИА были представлены в работах [2–5] и показали удовлетворительные теоретические и экспериментальные результаты в условиях небольших дискретных систем с использованием известных методов обучения нейронных сетей. Использование подобных моделей в гетерогенных ИТС ограничивается производительностью известных методов обучения в ситуациях экспоненциального роста пространства состояний. Для преодоления этих ограничений требуется разработка иерархических моделей нейро-нечетких агентов, способных к самообучению в ИТС.

В соответствии с концепцией иерархического управления сетью связи в виде выделенной сети передачи данных TMN (Telecommunications Management Network) и идеологией OSS (Система поддержки функционирования предприятий связи) Международного союза по электросвязи (МСЭ/ITU) в ИТС выделяются следующие уровни иерархии: сетевых элементов (NE); управления элементами (NEM); управления сетью (NM); управления услугами (SM); административного управления (BM) [6].

В [7–8] исследованы модели базовых ИА, реализующих как точные, так и нечеткие модели поведения компонентов ИТС. Принимаемые агентом сигна-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ – грант № 18-47-350001 р_а и грант № 19-01-00103 А.

лы внешней среды являются сообщениями в определенном формальном языке (входной язык агента), а оказываемые на внешнюю по отношению к агенту среду воздействия, сообщениями в другом формальном языке (выходной язык агента). Принимаемые ИА сообщения могут носить как определенный, так и неопределенный (нечеткий) характер. На уровне аппаратных, технических средств входные сигналы могут быть достаточно точно известны (измерены техническими средствами, вычислены с определенной погрешностью) и соответственно будут характеризоваться обычными (точными) множествами. На более высоких уровнях интеллектуальной иерархии ИТС возникают сообщения и сигналы, о значении которых можно говорить только с некоторой степенью уверенности/определенности, которые целесообразно охарактеризовать нечеткими переменными, принимающими значения на соответствующих нечетких множествах. Для построения иерархии управления на уровнях NE–NEM–NM предложена модель базового интеллектуального агента (Fundamental Intelligent Agent – FIA), осуществляющего прием входных сообщений $M_{A_i}^{In}$ в обычном входном языке $L_{A_i}^{In}$ и нечетком входном языке $\tilde{L}_{A_i}^{In}$, создание сообщений на внутреннем языке (рассуждения, рефлексия) $L_{A_i}^{Int}$, и передачу во внешнюю среду точных и нечетких сообщений в соответствующих языках $L_{A_i}^{Out}$ и $\tilde{L}_{A_i}^{Out}$ (рис. 1).

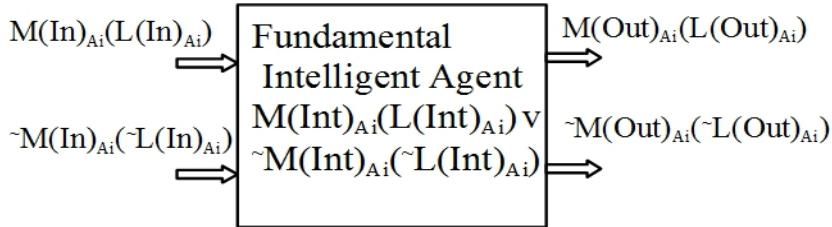


Рис. 1. Схема базового интеллектуального агента ИТС

FIA есть кортеж $FIA = \langle NB, A^o, Q, BM \rangle$, где NB – идентификатор базового агента в ИТС, A^o – множество атрибутов FIA, Q – множество агентов, структурно вложенных в данный, BM – модель поведения базового агента.

Множество атрибутов базового агента определяется как $A^o = \{A, \tilde{A}\}$, где A – множество точных атрибутов FIA, \tilde{A} – множество нечетких атрибутов FIA. Точный атрибут определяется кортежем $A_i = \langle NA_i, SA_i, VA_i \rangle$, где NA_i – имя i -го точного атрибута, SA_i – множество определения атрибута, VA_i – значение атрибута в рассматриваемый момент системного времени t .

Нечеткий атрибут определяется кортежем $\tilde{A}_j = \langle \tilde{NA}_j, X_j, \mu_j(x), x(t) \rangle$, где \tilde{NA}_j – имя j -го нечеткого атрибута, X_j – область определения функции принадлежности нечеткого множества $\{x | \mu(x)\}$ (универсум нечеткого мно-

жества атрибута \tilde{A}_j), $x(t)$ – значение элемента универсального множества в рассматриваемый момент системного времени t . $\{R, \tilde{R}\}$ – множество типов принимаемых данным агентом сообщений во входных языках $L_{A_i}^{In}$ и $\tilde{L}_{A_i}^{In}$, $\{T, \tilde{T}\}$ – множество передаваемых данным агентом типов сообщений в выходных языках $L_{A_i}^{Out}$ и $\tilde{L}_{A_i}^{Out}$, преобразования выполняются над множествами: $A^o = \{A, \tilde{A}\}, \{R, \tilde{R}\}$ и $\{T, \tilde{T}\}$. Выделяются два класса состояний в множестве $\{S\}$: а) состояния, в которых возможен прием элементов множества $\{R, \tilde{R}\}$; б) состояния, в которых невозможен прием $\{R, \tilde{R}\}$.

Так как в модели поведения необходимо учитывать соотношение атрибутов и содержание принимаемых агентом сообщений, то необходимо введение предикатов, образующих множество допустимых предикатов в логике первого порядка $\{\text{Pr}\} = (\text{Pr}1, \text{Pr}2, \dots, \text{Pr}\varphi)$. Для анализа сложных условий и отношений применяются формулы над предикатами F и логические формулы в нечеткой логике \tilde{F} над нечеткими атрибутами и сообщениями.

Алфавит исчисления K_{BM} определяется следующим образом: $A = (\{A, \tilde{A}\}, \{R, \tilde{R}\}, \{T, \tilde{T}\}, \{S\}, \{\text{Pr}\}, \&, \vee, (,), \neg, \rightarrow, @, \nabla, \emptyset, 0)$. Алфавит переменных есть $P = (p, q, f, hA)$, где p – последовательность входящих сообщений из множества $\{R, \tilde{R}\}$, q – последовательность выходящих сообщений из множества $\{T, \tilde{T}\}$, f – последовательность формул с предикатами Pr в исчислении предикатов и формул нечеткой логики, hA – список атрибутов базового агента $hA^o = \{hA, \tilde{hA}\}$. Аксиома исчисления конфигурируется следующим образом $Ax = (\emptyset @ S_0 @ hA^o(0) @ \emptyset @ \emptyset)$, где \emptyset означает пустое состояние переменной, $hA^o(0) = \{hA(0), \tilde{hA}(0)\}$ состоит из двух списков

$$hA(0) = < NA_1, SA_1, VA_1(0) >; < NA_2, SA_2, VA_2(0) >; \dots < NA_n, SA_n, VA_n(0) >;$$

$$\tilde{hA}(0) = < \tilde{NA}_1, X_1, \mu_1(x_1), x_1(0) >; < \tilde{NA}_2, X_2, \mu_2(x_2), x_2(0) >; \dots < \tilde{NA}_m, X_m, \mu_m(x_m), x_m(0) >;$$

где $VA_i(0)$ – значение i -го точного атрибута в момент времени $t = 0$, $x_j(0)$ – значение j -го нечеткого атрибута в момент времени $t = 0$.

Модель поведения ИА содержит следующие схемы правил вывода:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{R_i, p @ S_0 @ hA(0) @ q @ f}{p @ S_i @ hA(R_i) @ q, T_i @ f, F_i} & 2) \frac{R_i p @ S_0 @ hA(0) @ q @ f}{\nabla p @ S_i @ hA(R_i) @ q, T_i @ f, F_i} \\
 3) \frac{R_i p @ S_i @ hA @ q @ f}{p @ S_j @ hA(R_i) @ q, T_j @ f, F_j} & 4) \frac{R_i p @ S_i @ hA @ q @ f, F_i}{p @ S_j @ hA(R_i) @ q, T_j @ f} \\
 5) \frac{R_i p @ S_i @ hA @ q @ f}{\nabla p @ S_j @ hA(R_i) @ q, T_j @ f, F_j} & 6) \frac{R_i p @ S_i @ hA @ q @ f, F_i}{\nabla p @ S_j @ hA(R_i) @ q @ f}
 \end{array}$$

$$7) \frac{\nabla p @ S_i @ hA @ q @ f}{p @ S_j @ hA(R_i) @ q , T_j @ f, F_j} 8) \frac{\nabla p @ S_i @ hA @ q @ f, F_i}{p @ S_j @ hA(S_i) @ q , T_j @ f}$$

$$9) \frac{\nabla p @ S_i @ hA @ q @ f}{\nabla p @ S_j @ hA(S_i) @ q , T_j @ f, F_j} 10) \frac{\nabla p @ S_i @ hA @ q @ f, F_i}{\nabla p @ S_j @ hA(S_i) @ q , T_j @ f}.$$

Полагаем, что $R_i = (R_l, \tilde{R}_k)$, $T_j = (T_p, \tilde{T}_q)$, $F_j = F_j(F_e, \tilde{F}_r(W_r))$, где W_r – степень истинности нечеткой формулы, при которой нечеткая логическая функция становится активной и используется при выполнении правила.

Схемы 1 и 2 задают правила, выводящие из состояния S_0 в состояния типа a и b соответственно. Для обозначения невозможности обработки входной последовательности R_i используется служебный символ ∇ . В этих схемах порождаются выходящие сообщения T_i и формула F_i , при этом возможно, что $T_i = \emptyset$ и $F_i = \emptyset$, что позволяет избежать лишних схем вывода. Схемы 3 и 4 определяют переходы из состояний типа a в состояния типа a , с анализом истинности F_i или без такого анализа. Обработанная формула F_i исключается из дальнейшего процесса вывода. При циклическом поведении базового агента необходимая формула может снова порождаться схемами 3. Схема 5 задает переход из состояния типа a в состояние типа b без анализа F_i , а схема 6 – с анализом. Схемы 7, 8 определяют переходы из состояний типа b в состояния типа a , а схемы 9 и 10 из состояний типа b в состояния типа b . В этих схемах правил закладывается возможность возврата в состояние S_0 и останова при переходе в такое состояние S_j , из которого нет возможности дальнейшего вывода. В схемах правил вывода 1–10 в общем виде задаются функциональные преобразования $hA(S_i) = \{hA(S_i), h\tilde{A}(S_i)\}$, которые можно определить как преобразования над значениями атрибутов $VA_1(t), VA_2(t), \dots, VA_n(t)$ и $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

Модели ИА более высокого уровня абстракции используют формально-математический аппарат теории категорий [9] и элементы алгебраической теории продукций [10]. При этом антецеденты и консеквенты продукционных правил рассматриваются как кортежи объектов соответствующих категорий. Для каждого сегмента продукции определена собственная категория с соответствующим классом объектов категории и классом допустимых морфизмов.

Пространство поведения ИА, включающее возможные интерпретации для конкретных предметных областей, определяется структурой $\Pi = (\Omega, \Sigma, \Psi, \Theta, \Phi)$, где Ω – категория входящих сообщений, Σ – категория внутренних состояний ИА, Ψ – категория атрибутов ИА, Θ – категория выходящих сообщений, Φ – категория логических формул.

Для категории Ω класс объектов Ob_Ω есть множество $R = (r_i | i = 1, \dots, n; \emptyset, \nabla)$, где r_i – сообщение во входном языке L_{in} , \emptyset – символ пустого множества, ∇ – символ запрета. Класс морфизмов Hom_Ω включает

«стирающий» морфизм $\alpha_{\Omega} : R \rightarrow \emptyset$ и «запрещающий» морфизм $\beta_{\Omega} : R \rightarrow \nabla$, в качестве единичного морфизма устанавливается $id_R : R \rightarrow R$.

Класс объектов Ob_{Σ} категории внутренних состояний Σ есть $S = (S_i | i = 1, \dots, m)$. Класс морфизмов Hom_{Σ} включает единственный морфизм $\alpha_{\Sigma} : S \rightarrow S$, который играет и роль единичного морфизма $id_S : S \rightarrow S$.

Класс объектов Ob_{Ψ} категории атрибутов Ψ в первом приближении рассматривается как список лингвистических переменных $H = (h_i | i = 1, \dots, l)$, где h_i – строка символов в заданном алфавите атрибутов ИА. Класс морфизмов Hom_{Ψ} включает единственный морфизм $\alpha_{\Psi} : H \rightarrow H$, который играет и роль единичного морфизма $id_H : H \rightarrow H$.

Категория Θ включает класс объектов Ob_{Θ} , которые являются сообщениями выходного языка L_{out} , который в первом приближении можно считать конечным языком $T = (t_i | i = 1, \dots, k, \emptyset)$, где t_i – конкретное предложение входного языка, включая и пустое предложение \emptyset . Тогда Hom_{Θ} содержит единственный морфизм $\alpha_{\Theta} : T \rightarrow T$, который играет роль единичного морфизма $id_T : T \rightarrow T$.

Категория логических формул Φ включает класс объектов Ob_{Φ} , которые являются правильно построенными логическими формулами исчисления высказываний или исчисления предикатов первого порядка $F = (f_i | i = 1, \dots, g, \emptyset)$. Класс морфизмов Hom_{Φ} содержит единственный морфизм $\alpha_{\Phi} : F \rightarrow F$, который играет роль единичного морфизма $id_F : F \rightarrow F$.

В пространстве поведения ИА выделяются состояния пространства $\hat{\Pi}_i$, определяемые конкретными комбинациями пар объектов и морфизмов в соответствующих категориях:

$$\hat{\Pi}_i = \langle (Ob_{i\Omega}, Hom_{i\Omega}), (Ob_{i\Sigma}, Hom_{i\Sigma}), (Ob_{i\Psi}, Hom_{i\Psi}), (Ob_{i\Theta}, Hom_{i\Theta}), (Ob_{i\Phi}, Hom_{i\Phi}) \rangle.$$

Множества объектов всех категорий являются перечислимыми множествами, индекс i в каждой категории может иметь собственное значение. В пространстве поведения конкретного ИА выделяются два подмножества: допустимых состояний $\hat{\Pi}_D$, в которых ИА может находиться в процессе своего функционирования, и недопустимых состояний $\hat{\Pi}_N$, в которых ИА не должен находиться.

Для изменения модели поведения ИА к категориям пространства $\Pi = (\Omega, \Sigma, \Psi, \Theta, \Phi)$ предлагается применять функторы, преобразующие исходные категории в новые, необходимые для решения задач целесообразного

поведения ИА. Совокупность возможных пространств поведения ИА определяется как пространство эволюции E :

$E = \bigcup_{i=1}^n \Pi_i$ – при конечном числе возможных пространств поведения,

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Pi_i$ – при бесконечном числе возможных пространств поведения

ИА.

Целесообразно рассматривать и пространство функторов $F = (F_{\Omega}, F_{\Sigma}, F_{\Psi}, F_{\Theta}, F_{\Phi})$, где $F_{\Omega} = (F_{j\Omega} | j = 1, \dots, m_{\Omega})$, $F_{\Sigma} = (F_{j\Sigma} | j = 1, \dots, m_{\Sigma})$, $F_{\Psi} = (F_{j\Psi} | j = 1, \dots, m_{\Psi})$, $F_{\Theta} = (F_{j\Theta} | j = 1, \dots, m_{\Theta})$, $F_{\Phi} = (F_{j\Phi} | j = 1, \dots, m_{\Phi})$.

Конкретное состояние пространства функторов можно определить как кортеж $\hat{F}_j = \langle F_{j\Omega}, F_{j\Sigma}, F_{j\Psi}, F_{j\Theta}, F_{j\Phi} \rangle$, индекс j может принимать различное значение в различных группах функторов.

Развитие теоретико-категорной формализации ИА с нечеткими и комбинированными правилами продукций, построение возможных траекторий поведения интеллектуальных агентов ИТС в пространствах E и F позволяют исследовать модели компонентов эволюционирующих и саморазвивающихся ИТС на различных уровнях управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верзун, Н. А. Перспективные технологии инфокоммуникационного взаимодействия / Н. А. Верзун, М. О. Колбанев, А. В. Омельян. – Санкт-Петербург : СПбГЭУ, 2017. – 76 с.
2. Рапопорт, Г. Н., Герц А. Г. Биологический и искусственный разум. Сознание, мышление и эмоции / Рапопорт Г. Н., Герц А. Г. – Москва : URSS, 2017. – 184 с.
3. Редько, В. Г. Моделирование когнитивной эволюции: На пути к теории эволюционного происхождения мышления / В. Г. Редько. – Москва : URSS, 2020. – 264 с.
4. Raymond, S.T. Lee Fuzzy-Neuro Approach to Agent Applications: From the AI Perspective to Modern Ontology / Raymond, S. T. // Springer Science & Business Media, 2006. – 376 p.
5. Ostrosi, E. Fuzzy Agents for Product Configuration in Collaborative and Distributed Design Process / E. Ostrosi, A.-J. Fougères and M. Ferney // Applied Soft Computing. – 2012. – 12 (8). – p. 2091–2105.
6. РД 45.174-2001. Построение систем управления сетями связи операторов взаимосвязанной сети связи Российской Федерации. – Москва : Минсвязи России, 2001.

7. Распределенные интеллектуальные информационные системы и среды: монография / А. Н. Швецов, А. А. Сукинников, Д. В. Кочкин [и др.] ; под редакцией А. Н. Швецова и А. А. Сукинникова. – Курск : Университетская книга, 2017. – 197 с.
8. Shvetcov, A. Models of neuro-fuzzy agents in intelligent environments / Shvetcov A. // Procedia Computer Science 103. – 2017. – p. 135 – 141.
9. Маклейн, С. Категории для работающего математика : перевод с английского / Маклейн С ; под редакцией В. А. Артамонова. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 352 с.
10. Zhozhikashvili, A.V. Theory of Category Approach to Knowledge Based Programming / Zhozhikashvili A. V., Stefanuk V. L. // 11th Joint Conference, JCKBSE 2014 (Volgograd, September 17–20, 2014). – Volgograd, 2014. – p. 735–746.

A.Н. Швецов, К.С. Кинякин
Вологодский государственный университет, Россия

ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА С ПРИМЕНЕНИЕМ АНТРОПОМОРФНОГО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АГЕНТА^{*}

Задача подготовки квалифицированных специалистов, обладающих знаниями и умениями в области интеллектуальных систем, владеющих современными технологиями искусственного интеллекта (ИИ), становится особенно актуальной в свете принятия Указа Президента Российской Федерации от 10.10.2019 № 490 «О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации» [1]. В нем формулируются перспективные задачи развития ИИ в нашей стране, и выделяется направление использования автономного интеллектуального оборудования для формирования новых направлений деятельности.

В учебных планах подготовки бакалавров и магистров по направлениям 09.03.02 и 09.04.02 Информационные системы и технологии на кафедре информатики и информационных технологий Вологодского государственного университета направление ИИ представлено рядом дисциплин, охватывающих основные области ИИ и формирующих базовые умения и навыки в области разработки и эксплуатации интеллектуальных систем. В данных дисциплинах используются результаты, полученные в ходе научно-исследовательских проектов, посвященных исследованию и разработке агент-

^{*} Работа выполнена при поддержке РФФИ – грант № 19-01-00103 А и грант № 18-47-350001 р-а.

но-ориентированных (АОС) и мультиагентных интеллектуальных систем (МАИС). За последние 20 лет было выполнено 16 проектов в рамках Федеральных целевых программ, грантов Российского фонда фундаментальных исследований, грантов Правительства Вологодской области и других форм научно-технической деятельности [2].

Разработаны многочисленные модели интеллектуальных агентов, реализующих в том числе и выполнение сценариев целенаправленной деятельности «воплощенными», имеющими материальную физическую реализацию агентами. Таким интеллектуальным физическим агентом выступает антропоморфный робот NAO EvolutionV5 французской фирмы Aldebaran Robotics, применяемый для моделирования алгоритмов адаптивного поведения агента в определенной внешней среде и изучения возможностей разумного взаимодействия искусственного агента с человеком, носителем естественного интеллекта.

С помощью встроенного программного обеспечения робот NAO может идентифицировать конкретных людей, реагировать на голосовые команды, мимику окружающих, использовать выразительные жесты для общения, взаимодействовать с пользователями с помощью динамиков, микрофонов, камер, тактильных сенсоров, светодиодов, рук, телодвижений. Робот NAO распознает и воспроизводит речь на 19 языках, в том числе и на русском.

В рамках циклов лабораторных и практических занятий по таким дисциплинам, как «Представление знаний в информационных системах», «Системы искусственного интеллекта и принятия решений», «Интеллектуальные системы и технологии», было реализовано несколько учебно-исследовательских проектов.

Комплекс лабораторных работ по изучению робота NAO использует возможности встроенной операционной системы робота, программного пакета Choregraphe 2.1.4 и языка программирования Python и предусматривает освоение основных настроек и установок робота, изучение возможностей управления механическими движениями, формирования сложных образцов поведения с использованием голосовых функций, способностей к ориентации и распознаванию объектов, организации диалога с пользователями и применения методов делиберативного вывода (рис. 1).

Первая лабораторная работа «Изучение основных возможностей антропоморфного робота NAO H25 Evolution V5. Настройки и первоначальный запуск» предусматривает изучение вариантов правильного подключения и первоначальной настройки параметров, автономной работы и подключения к сети Wi-Fi, осуществления начального диалога с роботом, изучения правил безопасной работы и безаварийного использования данного дорогостоящего оборудования.

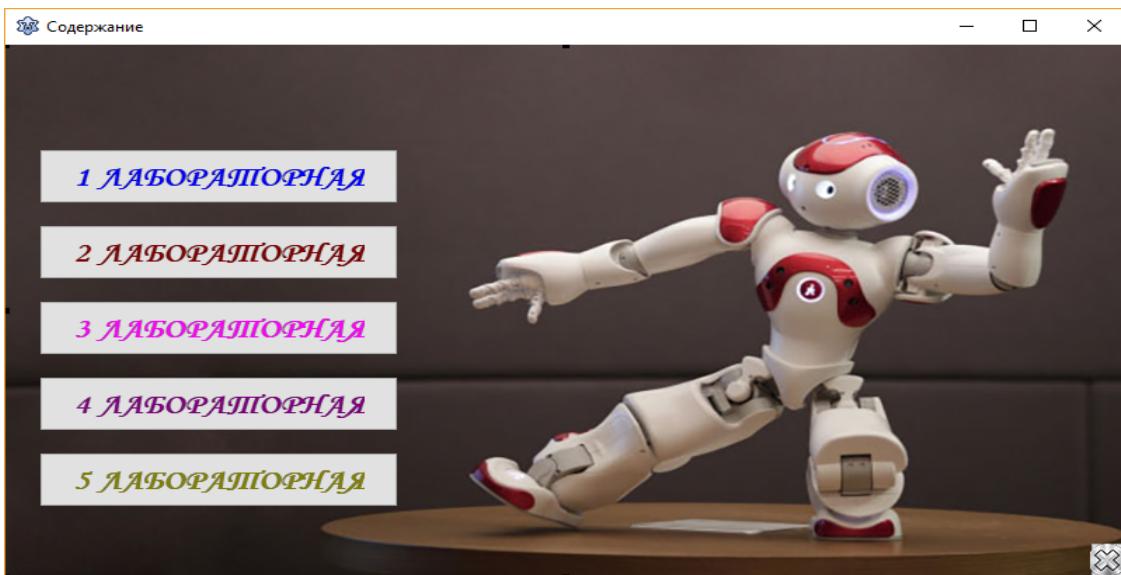


Рис. 1. Стартовая страница лабораторного комплекса

Во второй лабораторной работе «Среда разработки Choregraphe. Изучение возможностей приложения Monitor» описываются интерфейсы и возможности данных приложений. Программный пакет Choregraphe предоставляет диаграммный язык программирования и графический интерфейс к библиотеке движений робота, может взаимодействовать с языками Urbi и Python и оперировать с модулями языка C++. В практической части работы обучающие создают собственные позы для робота, проверяют устойчивость положения робота в режиме виртуального робота через панель Robotview, реализуют эти позы на реальном роботе и сохраняют их в библиотеке пакета Choregraphe (рис. 2).

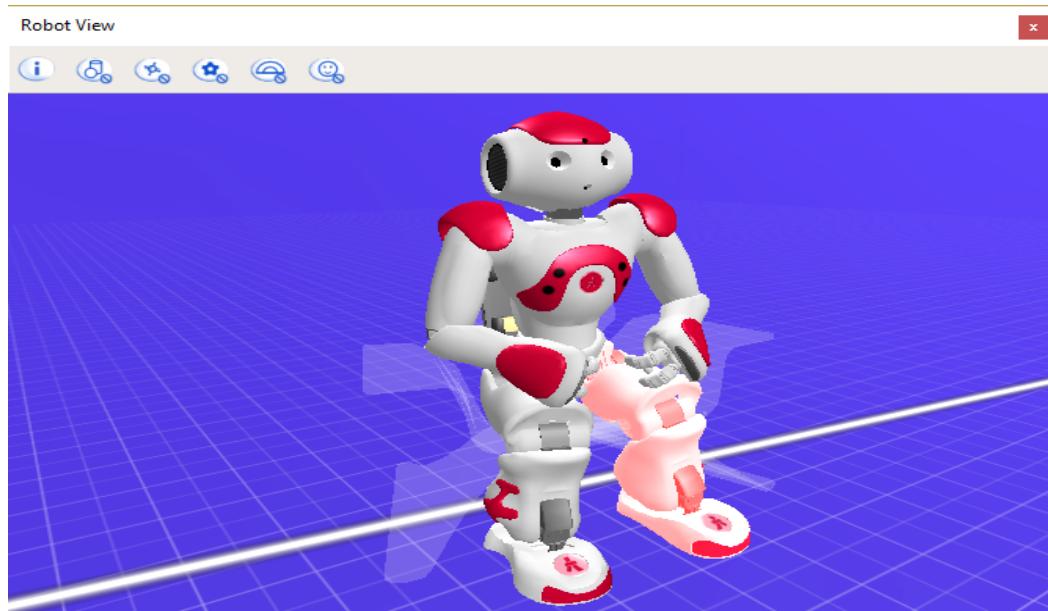


Рис. 2. Поза «Отдыхающий NAO»

Третья лабораторная работа «Изучение базовых и расширенных модулей программы Choregraphe. Составление поведения из комбинации модулей» направлено на детальное изучение имеющихся встроенных модулей реализации действий робота, которые подробно рассматриваются на практических примерах, анализируются их свойства и возможности. Исследуются возможности комбинации модулей в мини-программы, которые анализируются и проверяются на конкретных примерах. В ходе самостоятельной работы обучаемые исследуют и модифицируют программу самодиагностики робота (рис. 3).

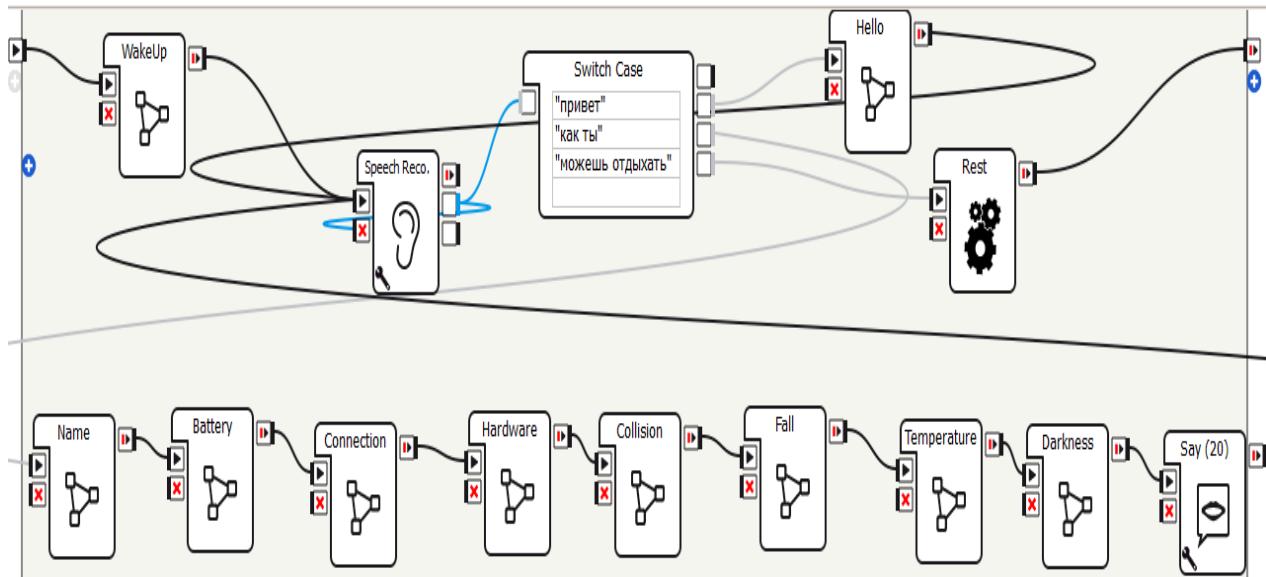


Рис. 3. Программа самодиагностики в пакете Choregraphe

Четвертая лабораторная работа «Обучение работе с модулем Timeline и изучение режимов анимации» предусматривает реализацию движений робота с использованием режима «Animation mode», а также расположение модулей на диаграмме времени (timeline). Режим «Animation mode» доступен только при подключенном реальном роботе, так как он заключается в том, что положение частей тела робота можно сохранить на линии времени просто дотронувшись до бампера части тела и передвинуть в нужное положение эту часть. Таким образом, можно сразу сделать программу с учетом положения реального робота и проблем, связанных с перемещением его центра тяжести, то есть, учитывая то, что он может упасть, если неправильно рассчитать движения на виртуальной модели. На диаграмме времени можно расположить множество движений робота во времени (рис. 4), а также одновременно на других дорожках указать, что он должен делать параллельно с выполняемыми движениями, тем самым создавая ему полноценное поведение.

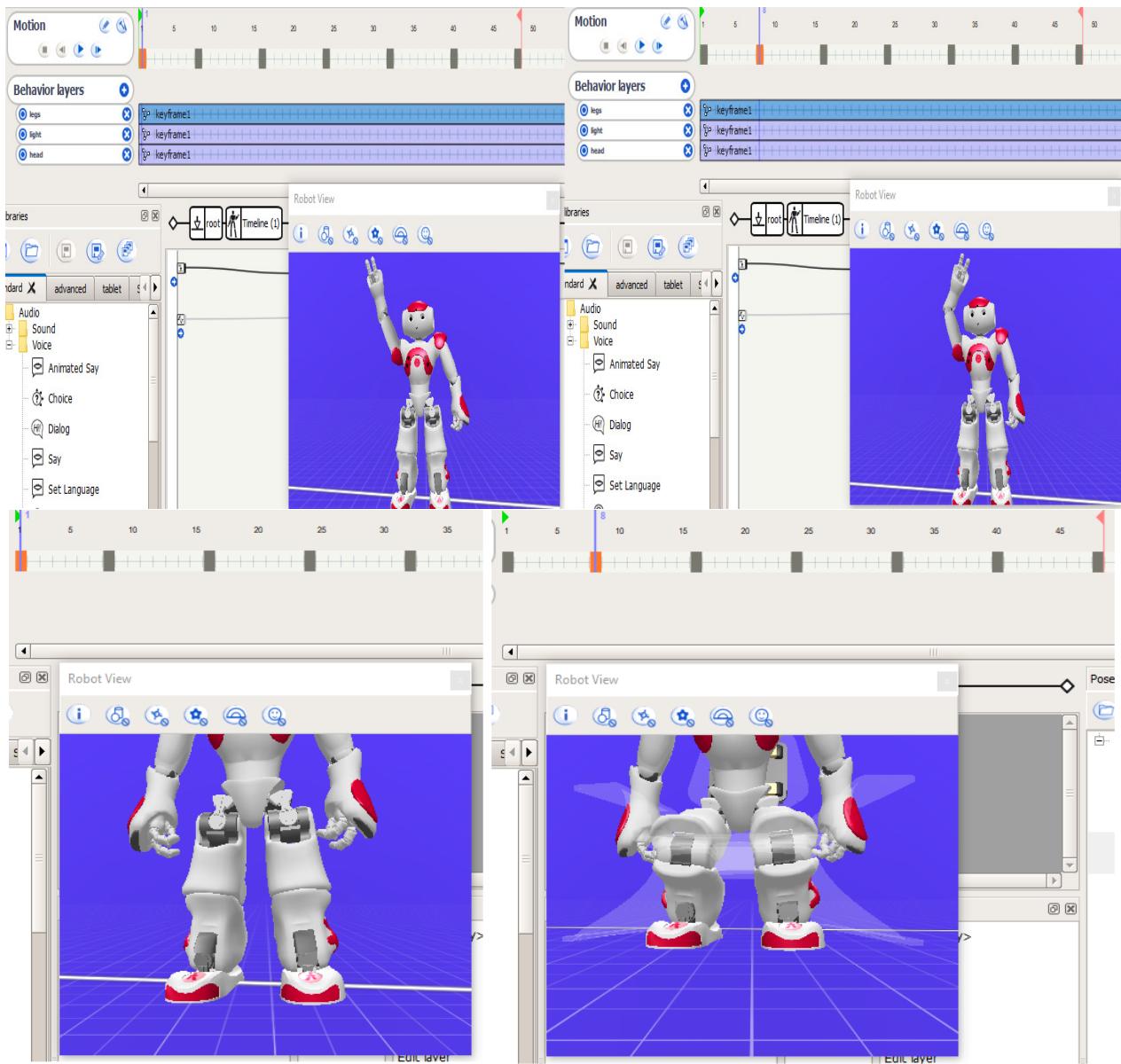


Рис. 4. Отображение положения робота на диаграмме времени

В пятой лабораторной работе «Создание проекта имитации танца антропоморфным роботом» с учетом полученных в предыдущих работах навыков и знаний разрабатывается модель известного танца «Яблочко» (рис. 5). Робототехнический вариант танца существенно отличается от настоящего вследствие того, что ноги робота не приспособлены для таких движений, которые используются в этом танце. В ходе выполнения лабораторной работы модельная программа проверяется на реальном роботе. Далее обучаемому предлагается самостоятельно разработать другой вариант танца в качестве контрольного итогового задания данного лабораторного комплекса.

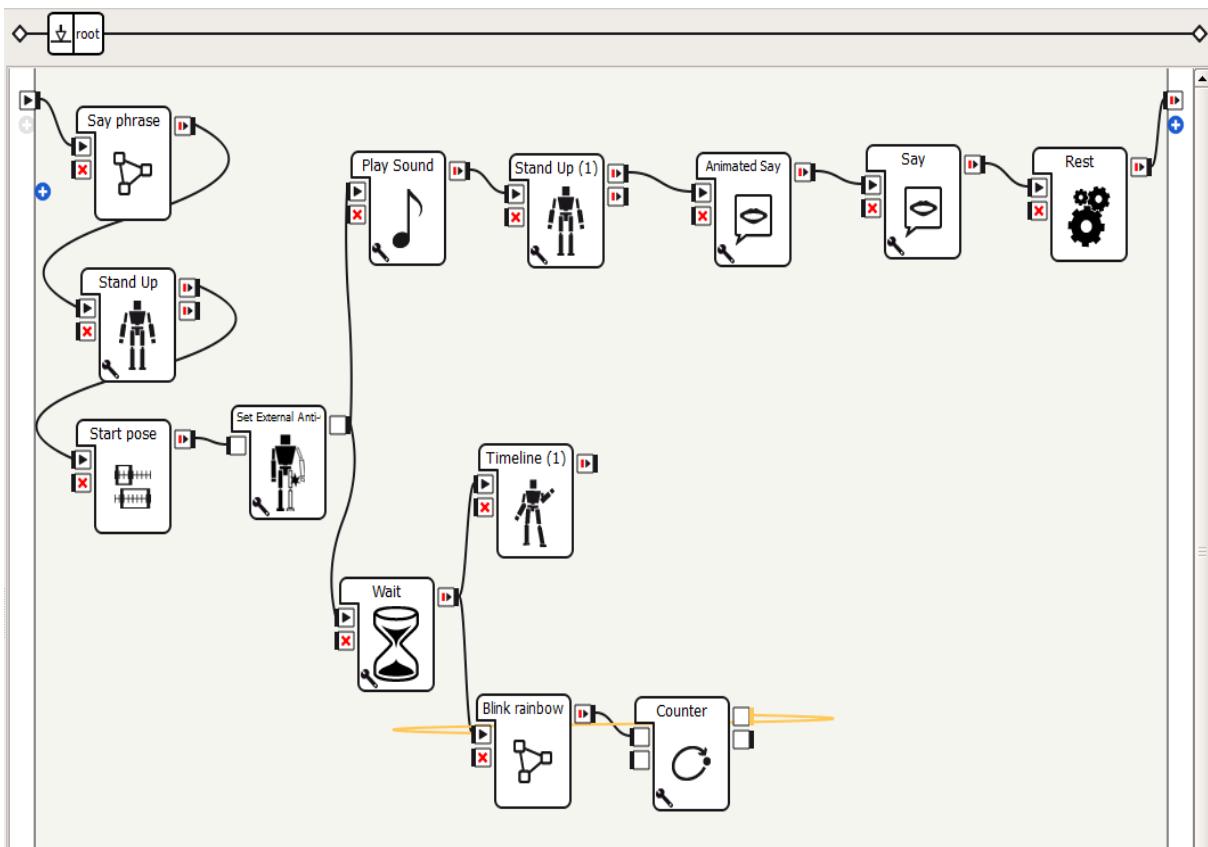


Рис. 5. Программа реализации танца в пакете Choreographe

Использование интеллектуальных робототехнических устройств в учебном процессе позволяет повысить мотивацию обучаемых, закрепить теоретические знания в ходе лабораторных работ, сформировать навыки командной работы при реализации комплексных проектов, расширить тематику и сферу потенциального применения результатов выпускных квалификационных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации : Указ Президента Российской Федерации от 10.10.2019 № 490 : официальный интернет-портал правовой информации. – <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001201910110003> (дата обращения: 16.09.2020). – Текст : электронный.
2. Ситуационные интеллектуальные системы поддержки принятия решений / Швецов А. Н., Сукачников А. А., Кочкин Д. В., Андрианов И. А. – Курск : Университетская книга, 2018. – 251 с.

А.Н. Швецов, А.А. Миронов

Вологодский государственный университет, Россия

ЕСТЕСТВЕННО-ЯЗЫКОВОЙ ДИАЛОГ С АНТРОПОМОРФНЫМ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫМ АГЕНТОМ^{*}

В Указе Президента Российской Федерации от 10.10.2019 № 490 «О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации» отдельно отмечается направление использования автономного интеллектуального оборудования и робототехнических комплексов для улучшения эффективности и формирования новых направлений деятельности хозяйствующих субъектов.

В настоящее время антропоморфные роботы широко используются в различных университетах мира для образовательных и исследовательских целей. В нашей стране получил известность антропоморфный робот NAO EvolutionV5 французской фирмы Aldebaran Robotics, применяемый для решения научных и образовательных задач в таких ведущих университетах, как Балтийский федеральный университет им. Э. Канта, Казанский федеральный университет, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Санкт-Петербургский университет телекоммуникаций им. М.А. Бонч-Бруевича, Сколковский институт науки и технологий, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники [1].

Для учебной и научно-исследовательской деятельности университета автономный программируемый робот NAO интересен тем, что предоставляет значительные аппаратно-технические и программные возможности для решения и моделирования широкого класса задач, традиционно относящихся к направлению ИИ [2] и обладает высокими техническими характеристиками (рост 58 см, вес 4.3 кг, время автономной работы 60 минут активной работы (90 минут в обычном режиме), степени свободы от 21 до 25, процессор Intel Atom @ 1.6 ГГц, встроенная ОС Linux, совместимые ОС Windows, Mac OS, Linux, языки программирования C++, Python, Java, MATLAB, Urbi, C, .Net, зрение осуществляется двумя камерами HD 1280×960, связь Ethernet, Wi-Fi) [3].

Встроенные программные модули включают функции распознавания и синтеза речи с регулированием голоса, робот может узнавать и запоминать лица и предметы, определять характер и направление источников звука, распознавать и воспроизводить речь на русском языке.

В рамках выпускных квалификационных работ бакалавров и магистров по направлению подготовки «Информационные системы и технологии» был реализован проект естественно-языкового диалога с роботом NAO.

Целью разработки данного проекта являлось создание программной системы, позволяющей роботу осмысленно общаться с человеком и выполнять

* Работа выполнена при поддержке РФФИ – грант № 19-01-00103 А и грант № 18-47-350001 р-а.

различные действия в зависимости от вариантов диалога. Такие возможности реализуются посредством модулей ALDialog API и QiChat среды разработки Choregraphe [4].

Речевое взаимодействие с человеком может осуществляться либо в письменном виде в специальном диалоговом окне путем написания фразы собеседником и ответом в этом же окне от робота, либо путем голосового обращения человека к NAO и соответственно вербальным ответом от него. В скобках после фразы собеседника показывается процент распознавания его слов. Разумеется, если ввести что-либо вручную, то процент будет равен ста.

Принцип работы модуля Dialog относительно прост. По умолчанию он имеет один вход, на который подается фраза человека, и несколько выходов. Их количество зависит от вариантов ответов робота, однако не на каждый ответ идет выход, это уже зависит от пользователя, захочет он использовать ответ как побуждение к действию или же нет. Модулю диалога задается имя, под которым он будет находиться на общей схеме, описание, которое нужно разработчику, чтобы не запутаться при построении большой программы, и иконка, чтобы каждый модуль диалога выглядел уникальным. Существует возможность создания связки модулей диалога.

У модуля Dialog имеется редактор входов и выходов, а также модуль настройки соответствующих параметров. Для них можно выбрать определенную команду, для входа, например, какое-то определенное событие или, по-стандартному, событие прихода сигнала на этот вход. Для выходов можно давать команды на выполнение определенных действий или цепочек действий.

Для запуска поведения модуля Dialog задается тема предполагаемого разговора, обозначаемая как Topic. Эта тема сохраняется отдельными файлами в проекте, папка называется именем темы, а сами файлы имеют расширения .top и .dlg.

Тема может редактироваться в текстовом виде в Scripteditor, поскольку по содержанию и является скриптом. Сначала прописывается тема, например, «topic: ~Znakomstvo()», затем указывается язык разговора «language: rur», а уже потом задаются возможные фразы собеседника и ответы на них. Синтаксис такой: сначала пишется «и:», затем в круглых скобках указывается слово или фраза, которую произносит человек, после пробела прописывается ответ NAO. Если же в заданной пользователем фразе есть слово, которое может там быть, а может и не быть, то его нужно занести в фигурные скобки. Также если есть разные варианты произнесения фразы, то нужно указать эти варианты произнесения в квадратных скобках через пробел, например «я чувствую себя [плохо «не очень хорошо»]». Как видно из примера, слово просто прописывается, а фраза заключается в кавычки.

Для выполнения конкретного действия, связанного с фразой, после ответа робота через знак \$ прописывается кодовое название выполняемого дейст-

вия, например `$hello=1`. Значение 1 присваивается затем, чтобы при активации действие сразу начало выполняться. Далее создается выход модуля Dialog, выбирается из списка появившееся название и производится подключение к этому выходу определенного действия либо последовательности действий.

Создание нескольких блоков диалога позволяет указать разные темы общения и построить разветвленные сценарии диалогов. Связь между этими модулями осуществляется через скрипт основной темы. Для этого первой в теме указывается ключевая фраза, активирующая данный диалог, а затем в каждой последующей строке вписывается «`^private`». Это ключевое слово показывает, что данные фразы будут активны только в этом диалоге. Такие выражения не будут распознаны, если будет активен другой топик. Переход между темами разговора осуществляется произнесением ключевой фразы, даже если уже ведется другой диалог.

Один из вариантов сценария организации диалога на естественном русском языке включает две темы. Схема программы представлена на рисунке.

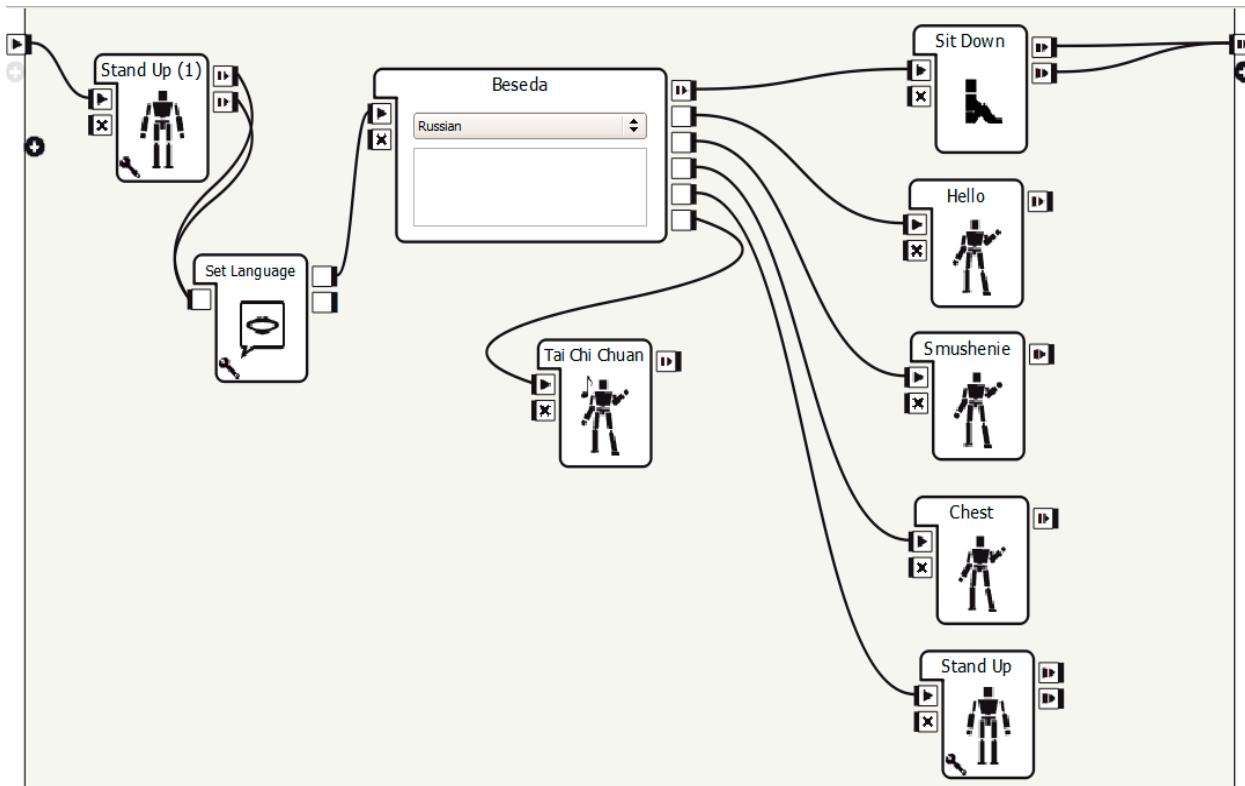


Рис. Блок-схема программы диалога

Вначале задается стоячее положение для робота, чтобы упростить выполнение возможных действий. Затем выбирается язык, на котором будет говорить робот. В модуле Dialog тоже задаем язык, на котором ведется разговор. К диалогбоксу внутри подключается нужный созданный топик, а снаружи подсоединяются отдельные модули действий на заранее созданные выходы действий фраз. Первое действие придает NAO сидячее положение, второе позволяет ему поздороваться с собеседником. Третий модуль «смущение» созда-

ется с помощью возможностей таймлайна, на котором последовательно заданы положения частей тела робота, а также звуковые эффекты. Четвертое действие заставляет NAO отдать честь, пятое – встать, а шестое – станцевать стандартный танец. После выполнения любого действия робот будет готов продолжить диалог.

В настоящее время исследуются возможности соединения различных тем разговора с переходами из одного диалога в другой с использованием инструмента создания диалогов QiChat. Он позволяет создавать различные правила поведения, управлять переходами, использовать концепты, фокусировки, а также множество других возможностей. Особенно интересна возможность подключение движка диалогов, который может не только сам генерировать ответы робота, но и подключаться к базам данных компании Aldebaran Robotics. Это позволит использовать существующую базу данных диалогов и алгоритмы распознавания и обработки запросов пользователя. Дальнейшее развитие способов естественно-языкового общения предполагает расширение модуля диалогов QiChat за счет составления скриптов на языке программирования Python.

ЛИТЕРАТУРА

1. Робототехника в России: образовательный ландшафт / Д. А. Гагарина, А. С. Гагарин ; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Институт образования. – Москва : НИУ ВШЭ, 2019. – Ч. 1. – 108 с. – (Современная аналитика образования. № 6 (27)).
2. Миронов, А. А. Применение антропоморфного робота NAO для решения интеллектуальных задач / Миронов А. А., Кинякин К. С., Швецов А. Н. // Вузовская наука – региону : материалы XV Всероссийской научной конференции с международным участием. – Вологда : ВоГУ, 2017. – С. 82–83.
3. Unveiling of NAO Evolution. – Текст : электронный // SoftBankRobotics : сайт. – URL: <https://www.aldebaran.com/en/press/press-releases/unveiling-of-nao-evolution-a-stronger-robot-and-a-more-comprehensive-operating> (дата обращения: 18.05.2020).
4. Choregraphe suite installation. – Текст : электронный // Aldebaran documentation : сайт. – URL: http://doc.aldebaran.com/2-1/getting_started/installing.html#desktop-installation (дата обращения: 18.05.2020).

C.B. Дианов

Вологодский научный центр РАН, Россия

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗМЕЩЕНИЯ СЕРВИСОВ ДЛЯ СИСТЕМ С МОБИЛЬНЫМИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯМИ*

В различных предметных областях имеется множество задач, в которых необходимо в соответствии с определенными критериями оптимальности расположить сервисы предоставления услуг пользователям. При этом и сервисы, и пользователи могут быть мобильными. Мобильность сервисов связана с тем, что они перемещаются к пользователям с целью предоставления услуги. А мобильность пользователей связана с их способностью выбирать определенные сервисы и перемещаться к местам их возможного получения. Примерами предметных областей, где встречаются подобные задачи, могут служить системы предоставления государственных услуг, системы предоставления медицинских услуг, системы предоставления информационно-коммуникационных услуг и многие другие. По своему виду они относятся к классу задач дискретной оптимизации [1]. Однако свойства мобильности по отношению друг к другу сервисов и клиентов усложняет использование традиционных подходов решения задач оптимизации в данном случае. Это вынуждает искать новые методы. Одним из возможных вариантов может стать агент-ориентированное моделирование. В связи с этим актуальной является описание постановки выше обозначенной задачи применительно к агент-ориентированному подходу.

В общем виде модель представляется следующим образом:

$$M = \langle U, R, S, C \rangle,$$

где U – узлы расположения сервисов и клиентов, R – связи между узлами, S – сервисы, C – пользователи.

Сервисы и пользователи могут располагаться в ограниченном количестве мест. Исходя из этого, в модели M может существовать определенное количествоузлов расположения сервисов и пользователей:

$$U = \{U_1, \dots, U_{UN}\}.$$

Между узлами может существовать множество связей – путей перемещения сервисов и клиентов:

$$R = \{R_1, \dots, R_{RN}\}.$$

Узлы и связи имеют набор характеризующих их атрибутов различной природы:

$$\begin{aligned} U: A^U &= \{A_1^U, \dots, A_{AUN}^U\}, \\ R: A^R &= \{A_1^R, \dots, A_{ARN}^R\}. \end{aligned}$$

* Работа поддержана грантами РФФИ № 20-010-00852 А, № 18-47-350001 р_а и № 19-01-00103А.

Модель содержит множество сервисов и клиентов:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{S_1, \dots, S_{SN}\}, \\ \mathcal{C} &= \{C_1, \dots, C_{CN}\}. \end{aligned}$$

Применительно к описываемой задаче они, обладая активным поведением, относятся к разряду агентов.

Агент Сервис может быть описан следующим образом:

$$S = \langle U_i, A^S, Bh^S \rangle,$$

где U_i – узел постоянной дислокации сервиса,

A^S – множество атрибутов сервиса ($A^S = \{A_1^S, \dots, A_{ASN}^S\}$),

Bh^S – модель поведения сервиса.

Аналогичное описание имеет агент Пользователь:

$$C = \langle U_i, A^C, Bh^C \rangle,$$

где U_i – узел постоянной дислокации сервиса,

A^C – множество атрибутов сервиса ($A^C = \{A_1^C, \dots, A_{ACN}^C\}$),

Bh^C – модель поведения сервиса.

Модели поведения содержат модули, в которых определяются сценарии поведения агентов. Модули состоят из набора правил, позволяющих агенту выбрать тот или иной сценарий в зависимости от текущих значений параметров элементов модели.

В модели поведения агента Сервис определены два модуля:

$$Bh^S = \{Md_s^S, Md_d^S\},$$

где Md_s^S – модуль сценариев оказания услуги,

Md_d^S – модуль сценариев передвижения.

Агенты Сервисов могут быть двух видов: стационарные, жестко привязанные к конкретному узлу, и перемещаемые. Для стационарных агентов модуль сценариев передвижения не определяется:

$$Md_d^S = \emptyset.$$

На уровне модуля сценариев оказания услуги определяется возможность и порядок оказания услуги конкретному пользователю. Исходя из этого, в правилах используются значения атрибутов пользователя и сервиса:

$$Md_s^S = \{Pr_1^{MdSs}(A^S, A^C), \dots, Pr_{PrMdSsN}^{MdSs}(A^S, A^C)\},$$

где $Pr_i^{Md...}(X_1, \dots, X_{XN})$ – i-е правило модуля, содержащее параметры X_1, \dots, X_{XN} .

На уровне модуля сценариев передвижения определяется необходимость, возможность, параметры и маршрут перемещения агента:

$$Md_d^S = \{Pr_1^{MdSd}(A^S, A^C, A^U, A^R), \dots, Pr_{PrMdSdN}^{MdSd}(A^S, A^C, A^U, A^R)\}.$$

В модели поведения агента Пользователь определены также два модуля:

$$Bh^C = \{Md_{gu}^C, Md_{pu}^C\},$$

где Md_{gu}^C – модуль сценариев генерации услуги,
 Md_{pu}^C – модуль сценариев получения услуги.

Модуль сценариев генерации услуги обеспечивает способность агента Пользователь инициировать появление у него необходимости и желания получить конкретную услугу. Это зависит от личных характеристик агента и факторов среды его существования:

$$Md_{gu}^C = \{Pr_1^{Md_{gu}^C}(A^C, A^U), \dots, Pr_{PrMd_{gu}^C}^{Md_{gu}^C}(A^C, A^U)\}.$$

С использованием правил модуля сценариев получения услуги агент Пользователь определяется с возможностью и способом получения сервиса, а также со своими действиями:

$$Md_{pu}^C = \{Pr_1^{Md_{pu}^C}(A^S, A^C, A^U, A^R), \dots, Pr_{PrMd_{pu}^C}^{Md_{pu}^C}(A^S, A^C, A^U, A^R)\}.$$

В модели должен быть определен критерий оптимальности. Он связан с оценкой динамики изменений свойств агентов Сервисов и Пользователей:

$$K = f(d(A^S), d(A^C)),$$

где $f(\cdot)$ – функция определения критерия оптимальности,
 $d(X)$ – функция, характеризующая динамику изменения параметра X.

Решение задачи связано с многократным моделированием ситуаций с различными комбинациями расположения агентов Сервисов в узлах. По результатам каждой итерации рассчитывается значение критерия оптимальности. Полученные значения критериев сравниваются. По результатам сравнения выбирается модель с наилучшим, в определенном смысле, значением критерия.

Практическая реализация решения обозначенной в статье задачи обеспечит поддержку принятия решений по оптимальному размещению сервисов в различных предметных областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев, М. М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование) / М. М. Ковалев. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.

Н.А. Хромцова, Т.А. Максимова, Е.В. Соловьева
Вологодский государственный университет, Россия

РЕГИСТРАЦИЯ, АВТОРИЗАЦИЯ И ЛЧНЫЙ КАБИНЕТ ДЛЯ НАУЧНОЙ БИБЛИОТЕКИ ВоГУ

На сайте научной библиотеки Вологодского государственного университета реализован следующий механизм получения электронной версии книги: существующие наборы паролей и логинов для каждого института ВоГУ сотрудник библиотеки выдает студентам и преподавателям, пользователь находит нужную литературу в базе электронных книг на сайте и для доступа к файлу вводит пароль и логин.

Такая система имеет существенные недостатки: невозможность заказа литературы гостям сайта и отсутствие личного кабинета пользователя. Функция регистрации стороннего пользователя и приобретение им электронных книг позволяют повысить популярность научной библиотеки ВоГУ и, в перспективе, смогут приносить доход, а личный кабинет пользователя сделает интерфейс сайта более удобным. В личном кабинете для пользователя появится возможность не только вносить информацию о себе, но и добавлять книгу в корзину, приобретать ее и просматривать список скачанных книг. Для достижения этих целей предлагается следующее решение: сделать формы регистрации и авторизации пользователей, создать базу пользователей и личный кабинет.

На данный момент полностью реализован личный кабинет пользователя и механизмы регистрации и авторизации пользователей, подключенных к базе данных. При создании WEB-страниц использовался сервер OpenServer, база данных на PhpMyAdmin, язык разметки гипертекста HTML, серверный язык программирования PHP, клиентский язык программирования JavaScript, каскадные таблицы стилей CSS, а также были импортированы внешние каскадные таблицы стилей [1, с. 242].

Изначально пользователь попадает на форму регистрации (рис. 1а), где его просят задать логин и пароль, а также указать адрес своей электронной почты. Все пароли, вводимые пользователем, хешируются [2, с. 272].

При введении логина, почты или пароля существуют требования, которые можно узнать при наведении курсора на соответствующие поля. Например, логин должен быть уникальным и иметь длину от 3 до 40 символов и в нем допускаются латинские строчные и заглавные буквы, цифры, точки, символ нижнего подчеркивания и тире. А пароль должен иметь длину от 6 до 50 символов, содержать хотя бы одну латинскую прописную и одну строчную букву, а также цифру. Когда пользователь вводит свои значения в форме, осуществляется проверка на соответствие требованиям. В случае некорректного ввода на форму выводятся предупреждения, реализованные с помощью сессии [3, с. 208], в случае успеха значения логина и пароля заносятся в базу данных, а пользователь попадает в свой личный кабинет.

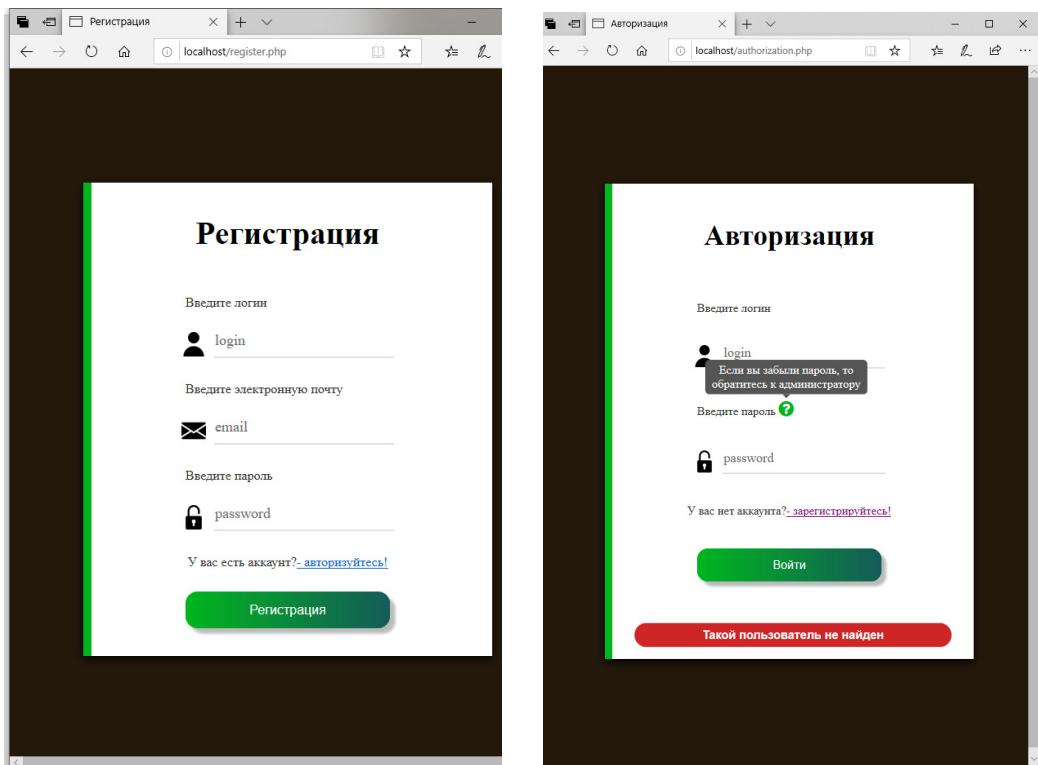


Рис. 1. Формы регистрации и авторизации



Рис. 2. Пример предупреждений в случае неверного ввода значений

Если у пользователя уже есть аккаунт, то он может перейти на форму авторизации, в которой также реализованы проверки корректности входных данных. Если пользователь вводит не существующие логин или пароль, то выводится предупреждение (рис. 1б), а случае успешного входа происходит переадресация в личный кабинет.

В личном кабинете пользователь может ввести или отредактировать такую информацию о себе, как фамилия, имя, наименование института, дата рождения, город и номер телефона (рис. 3).

| | <input type="button" value="←"/> | <input type="button" value="→"/> | <input type="button" value="▼"/> | id | login | password | email | fname | lname | uni | datab | city | phone |
|--------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------|--------------|--------------|---|--------------|-------------|--------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 1 | emmanuel21 | 1ede9451857ac6e40902371fa78d174a | frose@yahoo.com | Эммануил | Фросин | Инженерно-строительный институт | 12.09.1983 | Вологда | 89219991212 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2 | solovyeva-1 | 51040a2724b9c64df6f274cb44c5507 | julia45@chang.org | Юлия | Соловьева | Гуманитарный институт | 07.05.1999 | Вологда | 89814251136 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3 | miss.yevgeniya | 7b3d6a63a739f7d51c5bbb4f9ac0e1e0 | zmckay@gmail.com | Евгения | Ленская | Институт машиностроения, энергетики и транспорта | 02.01.2001 | Вологда | 89119999999 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 4 | petr_pavlov8 | 4116d95a2e9a130a7691594e482b41d | p3358@mail.com | Петр | Павлов | Институт культуры и туризма | 30.04.1983 | Вологда | 89219991299 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 5 | feliks07 | 61d255a40620c8a83bb3f39e5999d75f1 | uvettavub-5535@mail.ru | Феликс | Штайнер | Инженерно-строительный институт | 15.02.1997 | Вологда | 89814251111 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 6 | emma99 | 5dd6882dc164ca08d1806028a4f659c | danielleflowers@gmail.com | Эмма | Цветаева | Институт педагогики, психологии и физического восп... | 22.12.1991 | Вологда | 89814259911 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 7 | yeva05 | e52dcbaa4df005059eafbec858edfa13 | kodiqyrranno-1625@ymail.com | Ева | Соколова | Институт математики, естественных и компьютерных н... | 17.08.2000 | Вологда | 89814252222 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 8 | admin1 | 0e35ear7d214fbefd3375f05b6c6fa1f | tanyatanya@mail.ru | Татьяна | Максимова | Институт машиностроения, энергетики и транспорта | 25.01.1999 | Вологда | 89814251111 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 9 | katya123 | 53c7dd65f36c2492f8e0ee8ea3a33323b | www@site.ru | Екатерина | Скворцова | Институт управления, экономики и юриспруденции | 03.10.1998 | Вологда | 89113339999 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 10 | miloradovich.p_7 | bb7e7a0ec01b58a72e7b114f02262931 | tblair@gmail.com | Руслан | Милорадич | Гуманитарный институт | 28.04.1997 | Вологда | 89814233333 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 11 | kotov1994 | 8bc59cc8b6a86e045d56a14a4ebfdcb5 | kotov1994@gmail.com | Александр | Котов | Институт педагогики, психологии и физического восп... | 01.08.1965 | Вологда | 89814111122 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 12 | makhmudova.kharilina | fc093487630fce285be7736710810642 | makhmudova.6@yahoo.com | Харитина | Махмудова | Институт математики, естественных и компьютерных н... | 16.03.1965 | Вологда | 89111111111 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 13 | vorontsov.artemy | 30b6aaa3a21f4eb1c8e04ed8fe24ea4 | vorontsov43@yandex.ru | Артёмий | Воронцов | Университетский колледж | 25.11.1971 | Вологда | 89819999999 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 14 | camilla04 | df5139872bd33115c186d758f4326ef | camillaaaa@yandex.ru | Камилла | Семёнова | Институт культуры и туризма | 25.09.1999 | Вологда | 89854115181 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 15 | Raisa.kot-83 | 9cd3cd4db55c6e70ef4b326da28db94a | raaisaa@newman.com | Райса | Котова | Гуманитарный институт | 09.11.1985 | Вологда | 89814111111 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 16 | Sergey_Shubin | 5496c5c0db71ac8658e242a4502b6988 | Sergey_S42@soto-lloyd.com | Сергей | Шубин | Институт машиностроения, энергетики и транспорта | 02.12.1992 | Вологда | 89814233335 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 17 | egor_7 | 5d3cc73196b0d898dec00701a69339c | tegor_7@yandex.ru | Тюков | Егор | Университетский колледж | 28.07.2003 | Вологда | 89113339911 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 18 | kolosov.n_12 | e9b90adc96a7fab1c70706ea0cf9b40 | kolosov@yandex.ru | Николай | Колосов | Институт управления, экономики и юриспруденции | 27.07.1973 | Вологда | 89814111188 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 19 | arina-99 | 9fbe6151d3098741973dff28b34c2252 | arinak@mail.ru | Арина | Ордина | Университетский колледж | 15.02.1997 | Вологда | 89814233333 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 20 | admin | 9fbe6151d3098741973dff28b34c2252 | tanyammm@yandex.ru | NULL | NULL | NULL | NULL | NULL | NULL |

Рис. 3. База данных пользователей

Панель администратора

Данные профиля успешно обновлены!

Добро пожаловать, admin! Для выхода нажмите "выход".

| | |
|---------------|-----------------------|
| Имя | Юлия |
| Фамилия | Соловьева |
| Логин | solovyeva-1 |
| Email | julia45@chang.org |
| Институт | Гуманитарный институт |
| Дата рождения | 07.05.1999 |
| Город | Вологда |
| Телефон | 89814251136 |

Изменить логин и e-mail

СОХРАНИТЬ **ДОБАВИТЬ НОВОГО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ**

| Номер | Фамилия | Имя | Логин | Почта | Институт | Дата рождения | Город | Номер телефона | Функция | Функция |
|-------|----------|-----------|----------------|-------------------|-------------------------------------|---------------|---------|----------------|-------------------------|-------------------------------|
| 1) | Эммануил | Фросин | emmanuel21 | frose@yahoo.com | Инженерно-строительный институт | 12.09.1983 | Вологда | 89219991212 | Удалить | Редактировать |
| 2) | Юлия | Соловьева | solovyeva-1 | julia45@chang.org | Гуманитарный институт | 07.05.1999 | Вологда | 89814251136 | Удалить | Редактировать |
| 3) | Евгения | Ленская | miss.yevgeniya | zmckay@gmail.com | Институт машиностроения, энергетики | 02.01.2001 | Вологда | 89119999999 | Удалить | Редактировать |

Рис. 4. Панель администратора

Кроме рядовых пользователей в базе существует учетная запись администратора, который имеет возможность работать с базой пользователей: добавлять нового пользователя, удалять учетную запись пользователя и редактировать все введенные данные, включая логин и адрес электронной почты любого пользователя (рис. 4).

Зарегистрированные пользователи получают доступ к электронной базе книг научной библиотеки ВоГУ и в дальнейшем могут реализовать свой выбор электронной литературы через университетский интернет-магазин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириченко, А. HTML5 + CSS3. Основы современного WEB-дизайна / Кириченко А., Хрусталев А. – Санкт-Петербург : Наука и Техника, 2018. – 352 с.
2. Скляр, Д. Изучаем PHP7: руководство по созданию интерактивных веб-сайтов : перевод с английского / Девид Скляр. – Санкт-Петербург : Альфа-книга, 2017. – 464 с.
3. Кузнецов, М. В. Самоучитель PHP7 / Кузнецов М. В., Симдянов И. В. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2018. – 448 с.

РАЗДЕЛ III

ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

В РАЗЛИЧНЫХ ОТРАСЛЯХ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

В.Б. Анкудинов, А.В. Жеребицкая
Вологодский государственный университет, Россия

МИКРОПРОЦЕССОРНАЯ СИСТЕМА ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

В нашей стране в основе развития систем управления лежит отечественная элементная база. Значит и в вузах страны необходимо строить учебный процесс на основе современных отечественных микроконтроллеров (МК). В настоящее время отечественная электронная промышленность освоила выпуск большого количества однокристальных МК с высоким быстродействием, например ЗАО ПКК Миландр, ОАО Ангстрем, Интеграл, НИИЭТ, Микрон и другие. Их привлекательной особенностью является большое количество устройств: ввода/вывода, специализированных блоков (умножение), стандартных устройств последовательного обмена информацией, ЦАП и АЦП, программируемых таймеров, ШИМ и других, что позволяет оптимально подбирать среду для решения конкретной задачи.

Одна из целей этого доклада – спроектировать лабораторную установку (стенд) для обучения студентов, на которой можно будет применять современные отечественные МК в системах управления локальными объектами разного назначения. Главным преимуществом стенда будет то, что аппаратная часть не изменяется, а обучающийся разрабатывает только программу управления.

Первый этап проектирования системы управления – прием информации о состоянии объекта (датчик параметра), со всеми необходимыми характеристиками: точность, диапазон и запаздывание. Второй этап – разработка канала воздействия, удерживающего объект управления в требуемом состоянии, необходимом для выполнения технологической операции, при наличии возмущающего воздействия. А дальше, для точности поведения объекта управления, можно применять классические законы управления: пропорциональный, интегральный, дифференциальный и комбинированный.

В статье рассматривается первый этап.

Вначале проектируем систему с набором элементов, программируя которые можно решить задачу измерения интересующего параметра (температуры): МК и датчик температуры. Требования к МК – наличие следующих устройств: флэш-память команд, АЦП. В МК 1886ВЕ2У (ПКК «Миландр») есть все нужные для решения поставленной задачи программируемые устройства [1]. Требования к датчику температуры: низкая стоимость, простота получе-

ния тонкой проволоки в различной изоляции, превосходная линейность зависимости сопротивления от температуры, безопасность, соответствие ГОСТ 23125-95 «Сигнализаторы температурные». Всем этим требованиям соответствует термопреобразователь сопротивления ТСМ 1388/2 [2]. Основные технические характеристики приведены в таблице.

Таблица
Технические характеристики

| № | Показатели | Данные |
|---|--|-----------------|
| 1 | Класс допуска | B |
| 2 | Количество чувствительных элементов | 1 |
| 3 | Номинальная статическая характеристика | 50М |
| 4 | Рабочий диапазон температур | -50...1200 °C |
| 5 | Показатель тепловой инерции | не более 15 с |
| 6 | Материал защитной арматуры | Сталь 12Х18Н10Т |
| 7 | Максимальный измерительный ток | 5 мА |

Необходимо учесть главный недостаток применения аналоговых датчиков для цифровых систем – изменение точности при нагревании. В таких случаях принято применять схему измерительного моста. Для измерения температуры датчик подключают к измерительной схеме (рис. 1а), на выходе которой формируется напряжение, пропорциональное температуре. Если измерительный прибор G показывает отсутствие тока, то справедливо равенство $R_v = R_{Th}$, поскольку верхние параллельные сопротивления равны между собой.

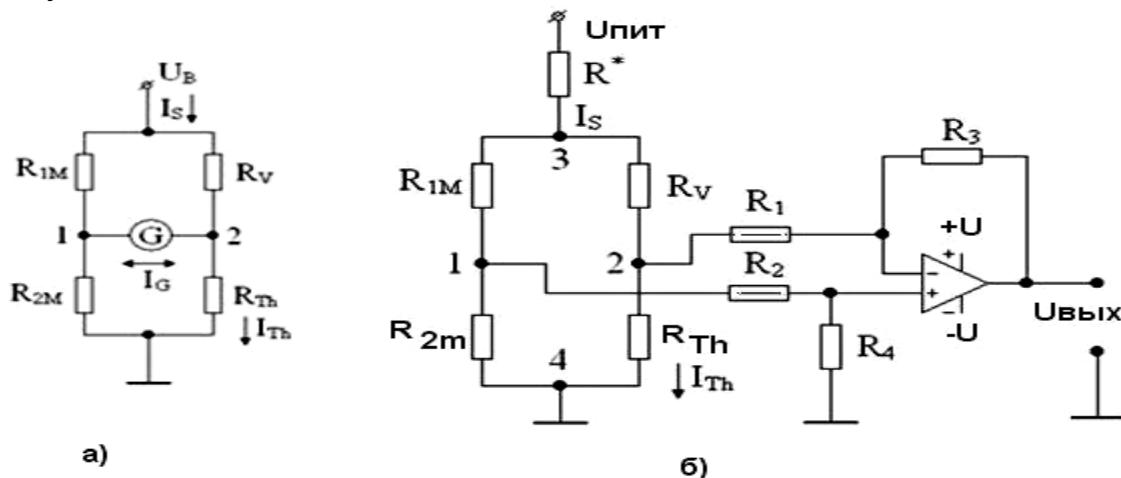


Рис. 1. Схемы: а) измерительный мост для терморезисторов;
б) схема для измерения

Такой способ измерения позволяет получать результаты в независимости от напряжения питания. В случае измерения напряжения:

$$U_m = \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_v}{R_v - R_{Th}} . \quad (1)$$

При этом нужно использовать высокоомный вольтметр, потому как между точками 1 и 2 не должен протекать ток. Практически применяемая схема, удовлетворяющая этим требованиям, приведена на рисунке 1б.

Выходной сигнал датчика необходимо подключить к входу АЦП. При этом нужно учитывать свойства входной цепи АЦП, схема аналогового входа которого приведена на рисунке 2.

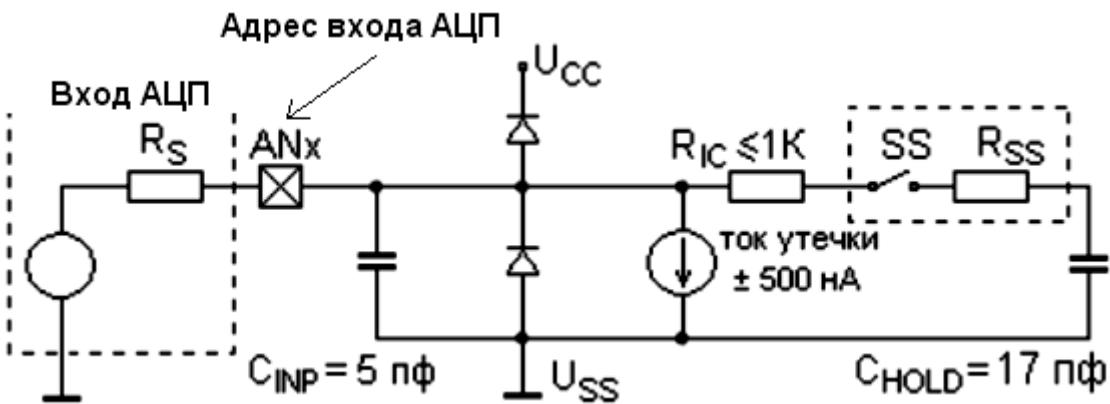


Рис. 2. Схема аналогового входа АЦП

На схеме R_S – входное сопротивление; U_{CC} – напряжение питания; U_{SS} – напряжение ключа выборки; R_{SS} – сопротивление ключа выборки; C_{HOLD} – емкость конденсатора.

Для уменьшения влияния входной цепи на показания АЦП необходимо обеспечить оптимальное время для зарядки конденсатора C_{HOLD} . Вычисление напряжения питания и времени зарядки конденсатора производится по методике, описанной в [1] разработчиком МК.

Вычисление напряжения конденсатора:

$$U_{HOLD} = (U_{REF} - (U_{REF}/2048)) * (1 - e(-T_C/C_{HOLD}(R_{IC} + R_{SS} + R_S))), \quad (2)$$

где U_{REF} – опорное напряжение; T_C – время зарядки конденсатора.

Для получения результата измерения надо взаимодействовать с элементами структурной схемы, поэтому необходимо программное управление. Сам опыт предназначен для снятия статической характеристики применяемого в стенде датчика температуры. Алгоритм снятия статической характеристики датчика температуры заключается в фиксации значения температуры с момента включения нагревателя и через заданные промежутки времени фиксировать значение температуры (возмущений нет). Таким образом, получаем график зависимости температуры от времени (в пределах 100 градусов). Когда преобразование завершено, 10-ти разрядный результат преобразования записывается в регистры ADRESH: ADRESL, бит GO/DONE (ADCON0<2>) сбрасывается и устанавливается флаг запроса прерывания ADIF. А по сигналу запроса на прерывание возможны различные алгоритмы программного воздействия. Один из возможных алгоритмов программы измерения представлен на рисунке 3. Проектирование программы измерения позволяет получить ин-

формацию для построения статической характеристики датчика температуры, реализованного в конкретных лабораторных условиях. Следовательно, получаем реальную характеристику датчика с учетом элементов, в которых он размещен. Таким образом, мы обеспечили прием информации о состоянии объекта для стенда с помощью разработанного программного управления и выбранных элементов: МК 1886ВЕ2У, ТСМ 1388/2.

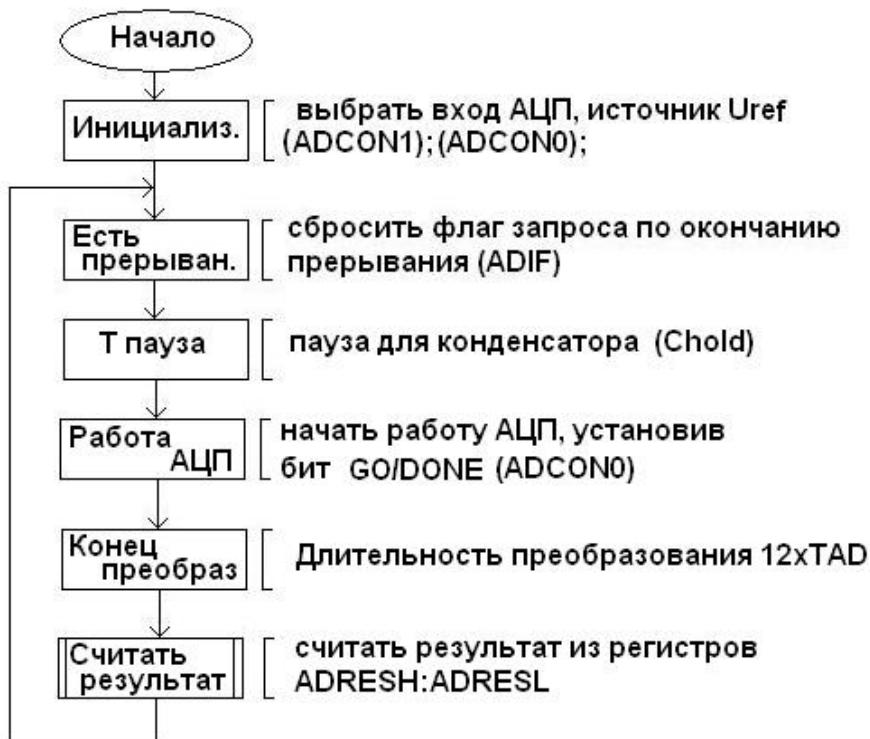


Рис. 3. Возможный алгоритм

Следует отметить основное достоинство этого проекта – возможность реализовать не один вариант применения алгоритмов управления, поддерживая требуемую температуру, которая задается кодом задания. Следовательно, появляется возможность внедрить в процесс обучения все известные законы управления, согласно дисциплине «Теория автоматического управления». А также у обучающихся появляется возможность приобрести навыки работы с современными микроконтроллерами отечественного производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микросхема однокристальной микро-ЭВМ с ЭСППЗУ : официальный сайт. – URL: <https://www.milandr.ru> (дата обращения: 16.09.2020). – Текст : электронный.

ГОСТ 23125-95. Сигнализаторы температурные. Общие технические условия : межгосударственный стандарт : введен 2000-01-01. – Текст : электронный // Техэксперт : информационно-справочная система / Консорциум «Кодекс» (дата обращения: 16.09.2020). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

В.Б. Анкудинов, Е.Н. Пантина
Вологодский государственный университет, Россия

СИСТЕМА ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ НА ОЭВМ

В результате научно-технического прогресса отечественная электронная промышленность увеличила выпуск однокристальных ЭВМ (ОЭВМ) с высоким быстродействием и большим количеством системных элементов. ЗАО ПКК Миландр, Ангстрем, НИИЭТ, Микрон – это далеко не весь список российских производителей интегральных микросхем. Они нашли применение как в информационно-измерительных, диагностических системах, так и в автоматизации систем управления. Привлекательной особенностью современных отечественных ОЭВМ является наличие в них большого количества устройств ввода/вывода, специализированных блоков, стандартных устройств последовательного обмена информацией, ЦАП и АЦП, программируемых таймеров, ШИМ и т.д. Также стоит отметить, что положительной стороной ОЭВМ можно считать присутствие различных наборов устройств, которые позволяют оптимально подбирать среду для решения конкретной задачи.

Развитие систем управления на основе отечественной элементной базы прослеживается на многих предприятиях нашей родины. Следовательно, в вузах страны необходимо строить учебный процесс на основе современных отечественных БИС. Одна из целей этого доклада заключается в том, чтобы спроектировать лабораторную установку (стенд) для обучения студентов освоению применения современных отечественных ОЭВМ в системах управления локальными объектами разного назначения.

При проектировании системы управления, во-первых, необходимо определиться с помощью чего и каким образом будет осуществляться прием информации о состоянии объекта; во-вторых, необходимо разработать канал воздействия на объект управления для выполнения технологической операции; в-третьих, для повышения точности поведения объекта управления необходимо применить классические законы управления: пропорциональный, интегральный, дифференциальный, комбинированный. К главному преимуществу будущего стенда можно отнести то, что аппаратная часть при работе изменяться не будет, а программная – разрабатывается обучающимся.

Для автоматизации любого процесса необходимо выбрать подходящую ОЭВМ, которая имеет необходимые технические характеристики. Для выполнения нашей задачи была выбрана ОЭВМ серии 1886 отечественного производителя ЗАО ПКК Миландр. Микросхема предназначена для применения в аппаратуре в качестве периферийного контроллера, организующего сбор и первичную обработку информации. Основные критерии выбора: наличие программируемого таймера, flash-памяти, широтно-импульсного модулятора (ШИМ) для задач по изменению скорости вращения вала. Это для расширения

возможности применения разрабатываемого стенда. Основные характеристики ОЭВМ К1886ВЕ2 представлены в таблице.

Таблица

Основные характеристики ОЭВМ для решения задачи

| | |
|---------------------------|------------|
| ЦПУ: F, МГц | от 0 до 33 |
| Память: Flash, КБайт | 64 |
| Таймеры: 8-бит, шт. | 2 |
| Таймеры: 16-бит, шт. | 2 |
| Таймеры: Каналов ШИМ, шт. | 3 |

В качестве датчика в лабораторном стенде будет использован кодовый диск с количеством прорезей n . Выбор такого устройства датчика обусловлен его возможностью максимально упростить аппаратную часть. Электронной частью датчика является оптопара. Процесс измерения скорости вращения будет заключаться в том, чтобы за одинаковые интервалы времени измерять количество импульсов с датчика.

Обобщенная формула имеет следующий вид:

$$V \left[\frac{\text{обор.}}{\text{мин}} \right] = \frac{N}{n * T}; \quad (1)$$

где V – скорость вращения; N – количество импульсов за время T ; n – число прорезей на кодовом диске; T – время [в мин], за которое поступают N импульсов.

Для выполнения процедуры измерения необходим программируемый таймер (ПТ), на вход которого подключен выход датчика. Схема преобразователя световых сигналов в электрические (один из множества вариантов) представлена на рисунке 1.

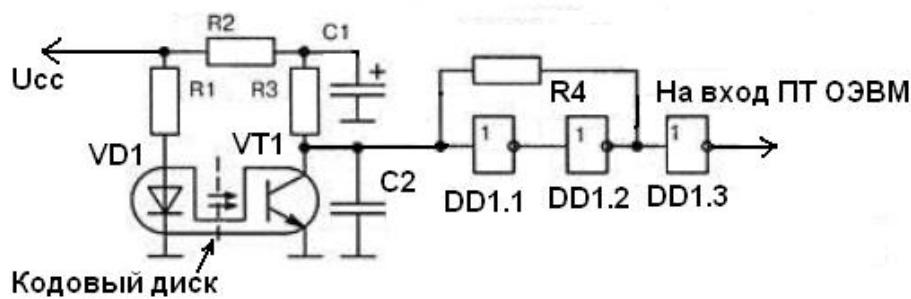


Рис. 1. Схема преобразователя световых сигналов в электрические

Выбор режима работы выбранного таймера связан с логикой структуры лабораторного стенда, которая представлена на рисунке 2. Из рисунка видно, что тактирование таймера осуществляется внешним сигналом (PA1/T0CLK – для таймера T0). Диапазон измеряемых скоростей определяется количеством прорезей на датчике и действительной скоростью вращения вала. Какое коли-

чество регистров потребуется – 8 или 16 разрядов, – это информация для выбора кодов управления при проектировании программы измерения скорости.

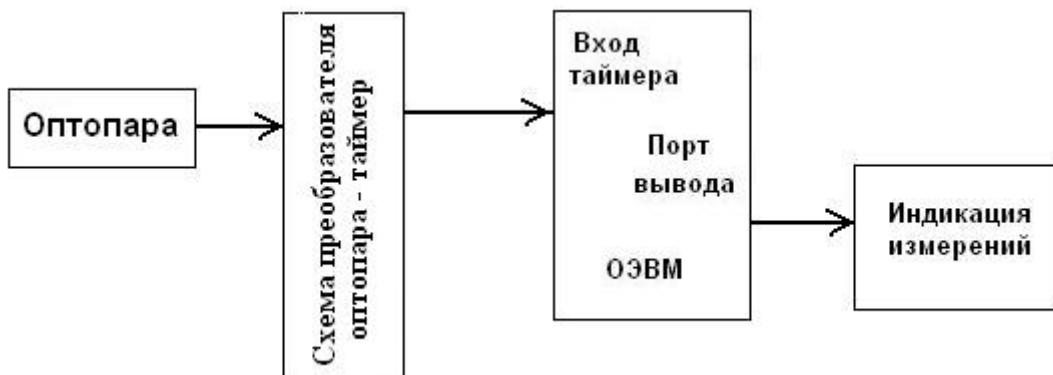


Рис. 2. Структурная схема лабораторного стенда

По завершении времени измерения результат находится в регистрах TMR0H и TMR0L. Дальнейшие действия программы измерения связаны с алгоритмом применения результата измерений. В простейшем случае – отображение результат на внешнем дисплее (бинарный код). Из рисунка 2 видно, что в программе должен быть код вывода содержимого регистров TMR0H и TMR0L напорт вывода. Для оценки точности программных измерений скорости вращения вала в опыте присутствует стробоскопический измеритель. Таким образом, обучающийся сможет сравнить расчетную и действительную погрешность программного способа измерения. Конечно в дальнейшем при применении этого измерителя в системе управления скоростью стробоскоп уже не потребуется, так как калибровка уже покажет действительную погрешность измерителя.

После всего высказанного, можно представить вариант укрупненного алгоритма управляющей программы с выводом результата на порт вывода (двоичный индикатор). Возможный алгоритм программы измерения скорости вращения вала представлен на рисунке 3.

Этот стенд является основой для расширения возможности применения информации о скорости вращения вала в системе на ОЭВМ, например, для поддержания заданной скорости вращения вала по коду управления. А это уже оттачивание знаний и приобретения умений обучающегося по дисциплине «Теория автоматического управления». Причем аппаратная часть не потребует серьезных изменений. В применяемой ОЭВМ есть порт ШИМ, при помощи которого, зная код скорости вращения вала, можно изменить и поддерживать напряжение питания двигателя, врачающего вал. Применение дорогостоящих программных продуктов для поддержки работы на стенде также не требуется. Два варианта доступны для использования – IDE 1886 версия 8.5 [1] или MPLAB IDE [2]. Для компиляции программ на языке Assembler: MPASMWIN.EXE из пакета MPLAB IDE фирмы «MICROCHIP». Для получения навыков проектирования программ управления на ОЭВМ из серии 1886,

разрабатываемый стенд, несомненно, даст хорошую возможность глубоко понять действия обучающегося при построении как аппаратной, так и программной части проекта в целом.



Рис. 3. Алгоритм определения скорости вращения

Таким образом, лаборатория по изучению микропроцессорных систем управления пополнится установкой, позволяющей внедрить в процесс обучения все известные законы управления, согласно дисциплине «Теория автоматического управления».

ЛИТЕРАТУРА

1. IDE 1886 версия 8.5 : официальный сайт ЗАО «ПКК Миландр». – URL: <http://www.milandr.ru> (дата обращения: 16.09.2020). – Текст : электронный.
2. MPLAB IDE : официальный сайт ООО «Микро-Чип». – URL: www.mikrochip.ru (дата обращения: 16.09.2020). – Текст : электронный.

О.Л. Ахремчик, В.А. Воронов

Тверской государственный технический университет, Россия

ОБЛАЧНЫЕ СЕРВИСЫ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКЕ ВЕНТИЛЕЙ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ ПОЕЗДОВ «ЛАСТОЧКА»

11 ноября 2013 г. на заводе «Уральские локомотивы» началось производство скоростных электропоездов «Ласточка», спроектированных концерном «Siemens AG» на основе платформы «Siemens Desiro». В головном вагоне электропоезда установлены четыре асинхронных тяговых электродвигателя, мощность каждого составляет 320 кВт. При преобразовании вида электроэнергии для работы электродвигателя в поезде применяются силовые тиристоры (вентили).

С целью увеличения межремонтных интервалов в эксплуатации электропоезда используются алгоритмы и программное обеспечение, позволяющие непрерывно осуществлять функциональную диагностику электрооборудования, передавать и архивировать полученные данные. Накопление информации и выявление трендов параметров электрооборудования требует использования ресурсов Data-центров. Соответственно актуальна задача выбора структуры и программно-технического обеспечения системы передачи данных с движущегося объекта (электропоезда) в единый Data-центр.

Авторами рассматриваются возможности применения в задачах функциональной диагностики элементов электрооборудования поездов (в частности вентилей) облачных сервисов, представляющих удаленные хранилища файлов и средств обработки информации на основе веб-интерфейса. Понимая важность выбора программно-технической составляющей серверной части основное внимание в данном докладе сосредоточим на анализе свойств оборудования на стороне диагностируемого объекта. Современные программно-технические средства имеют несколько групп свойств, одной из которых являются свойства работы в распределенных многоуровневых системах, учитываемые при выборе структуры [1].

В качестве объекта диагностирования рассматриваются вентили (тиристоры) преобразователей напряжения электропоезда. Структурная схема устройства для диагностирования вентилей полупроводниковых преобразователей включает преобразователи для измерения: падения напряжения на вентиле; падения напряжения на управляющем электроде; тока, протекающего через прибор; тока в цепи управления; температуры корпуса; температуры радиатора; температуры окружающей среды. Таким образом, необходимы измерения для каждого устройства четырех электрических и трех теплофизических параметров.

Задача контроля и передачи данных для расчета может быть решена с использованием модулей ввода-вывода с непрерывным считыванием облачным

сервисом. В качестве таких модулей могут применяться модули М210-101 российского производителя «Овен», рассчитанные на работу в тяжелых условиях эксплуатации. В структуру рассматриваемой части системы функциональной диагностики входят (рис.): измерительные преобразователи, коммутаторы, модули ввода аналоговых сигналов М210-101, модули для передачи данных ПМ210 этого же производителя (ранее использовался GSM-модем).

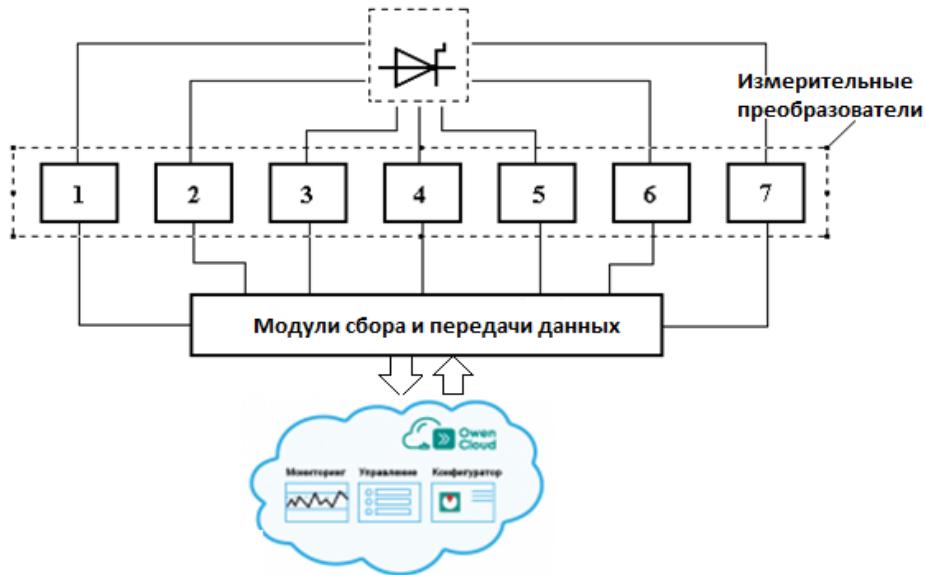


Рис. Структура системы функциональной диагностики вентилей

Диагностирование вентиля осуществляется на основе отклонений, рассчитываемых косвенным методом, значений температур корпуса и радиатора вентиля от заданных на данном участке дистанции пути.

Предложенная структура при наличии соответствующего математического обеспечения может быть расширена модулями МЭ210-701, также используемых при работе с облачными сервисами. Модули позволяют обеспечивать измерение параметров трехфазной сети питания тягового электродвигателя с предоставлением результатов расчетов значений активной, реактивной, прямой и обратной энергии за выбранные интервалы времени.

Рассматриваемые структуры ориентированы на диагностирование определенной глубины с использованием графотопологического метода определения полных неизбыточных совокупностей элементарных проверок [2].

Перед началом работы требуется конфигурация модулей сбора и передачи данных. Запись информации во Flash-память осуществляется с периодом, выбор которого является отдельной задачей и определяется исходя из смены режима движения (разгон, торможение, движение с постоянной скоростью).

Диагностика на основе измерений семи параметров каждого вентиля требует значительных вычислительных ресурсов и архивных данных, которые не предоставляют системы управления оборудованием поезда типа «Ласточка». Применение облачных сервисов позволяет осуществить декомпозицию задачи

функциональной диагностики, когда расчет базовых значений параметров вентиля обеспечивается с привязкой к дистанции пути и усредненным характеристикам множества вентилей разных преобразователей разных поездов применительно к условиям эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахремчик, О. Л. Расширение пространства свойств промышленных контроллеров при работе в составе отечественных HMI-систем / О. Л. Ахремчик // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2015. – № 11. – С. 32–36.
2. Осипов, О. И. Техническая диагностика автоматизированных электроприводов / Осипов О. И., Усынин Ю. С. – Москва : Энергоатомиздат, 1991. – 160 с.

A.B. Варганова, Н.А. Анисимова

*Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова, Россия*

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ ЗАТРАТ НА ВЫРАБОТКУ СВЕЖЕГО ПАРА В УСЛОВИЯХ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕПЛОВЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ

Энергоемкие предприятия характеризуются собственными системами электроснабжения, которые отличаются наличием местных тепловых электростанций, сложностью конфигурации сетей, различных классов напряжения от 0,4 кВ до 220 кВ, точками (точкой) прымыкания к энергосистеме. Промышленные электростанции в свою очередь также имеют ряд особенностей – генераторы от единиц до сотен мегаватт, использование в качестве первичного энергоносителя покупные (природный газ, уголь) и/или вторичные (коксовый, доменный газы) энергоресурсы. Все эти факторы усложняют оценку функционирования работы промышленного энергоузла в целом и тепловых электростанций в частности. В данной работе предлагается подход, позволяющий оценивать один из показателей эффективности функционирования работы электростанций – затраты на энергоносители.

Разработанный алгоритм [1, 2] позволяет на основе технико-экономических моделей котлов и генераторов [3] определять их оптимальную загрузку, а также осуществлять расчет затрат на используемый энергоноситель при различных суммарных выработках электростанции. Описанный подход реализован в оригинальном программном продукте КАТРАН-OptHeatPower [4].

Рассмотрим пример расчета затрат на энергоносители для тепловой электростанции, на которой установлено 7 энергетических котлов, 8 турбогенера-

торов, работающей на смеси природного, доменного и коксового газов. Технологическая схема станции приведена на рисунке 1. Каждый из котлоагрегатов имеет технико-экономическую модель, учитывающую его эксплуатационные характеристики (таблица 1, модель котла № 1).

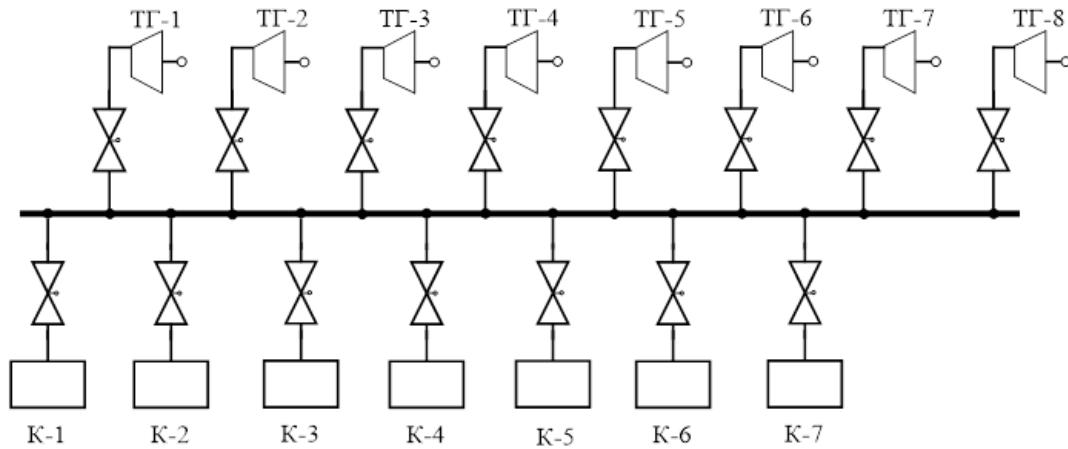


Рис. 1. Технологическая схема рассматриваемой промышленной тепловой электростанции

Таблица 1

Технико-экономическая модель котла № 1

| D_1 , т/ч | 10 | 10 | 11 | 12 | 10 | 11 | 11 | 13 | 13 | 15 | 16 | 16 |
|---------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| B_1 , м ³ /ч | 3 | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 |
| S_1 , руб/т | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 7 | 7 |

С использованием метода динамического программирования [1] построена эквивалентная модель котлов (фрагмент приведен в таблице 2).

Таблица 2

Фрагмент эквивалентной технико-экономической модели котлоагрегатов промышленной тепловой электростанции

| Расход доменного газа, $B_{ДГ}$, тыс. м ³ /ч | Расход природного газа, $B_{ПГ}$, тыс. м ³ /ч | Себестоимость пара, S , тыс. руб/т | Эквивалентная паропроизводительность котлов ЦЭС, $D_{экв}$, т/ч |
|--|---|--------------------------------------|--|
| 429,65134 | 11,2652577 | 96,5082417 | 630 |
| 430,622474 | 11,1827835 | 95,8980078 | 631 |
| 431,593608 | 11,1003093 | 95,2877739 | 632 |
| 432,564742 | 11,0178351 | 94,67754 | 633 |
| 433,535876 | 10,9353608 | 94,0673061 | 634 |

По полученной характеристике были рассчитаны оптимальные загрузки котлоагрегатов ТЭС, фрагмент расчетов приведен в таблице 3. После чего рассчитаны эквивалентные характеристики турбогенераторов по методике, описанной в [2, 3]. По ним построены зависимости оптимальных мощностей

генераторов при различных суммарных выработках электростанции, в качестве примера на рисунке 2 приведены данные зависимости для генератора 1 и 2.

Таблица 3

Эквивалентная характеристика паропроизводительности котлов промышленной ТЭС

| Суммарная мощность ТЭС, МВт | Оптимальная паропроизводительность котла, $D_{\text{опт}}$, т/ч | | | | | | |
|-----------------------------|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 169 | 90 | 170 | 155 | 90 | 210 | 121 | 170 |
| 173 | 90 | 170 | 170 | 90 | 210 | 121 | 171 |
| 174 | 90 | 170 | 170 | 90 | 210 | 121 | 176 |
| 195 | 160 | 170 | 156 | 150 | 210 | 121 | 220 |
| 196 | 160 | 170 | 156 | 150 | 210 | 121 | 220 |
| 197 | 160 | 170 | 156 | 150 | 210 | 121 | 220 |
| 212 | 160 | 170 | 156 | 150 | 210 | 121 | 220 |
| 213 | 160 | 170 | 162 | 150 | 210 | 190 | 170 |
| 214 | 160 | 170 | 170 | 150 | 210 | 190 | 188 |

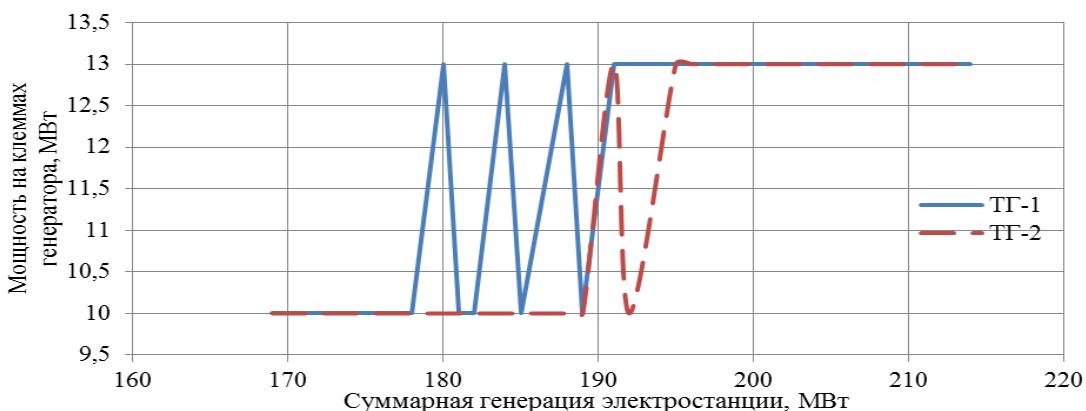


Рис. 2. Зависимость рекомендуемой мощности генераторов ТГ-1 и ТГ-2 от суммарной нагрузки электростанции

На основании определенных величин мощностей генераторов при различных выработках электростанции определяются, в зависимости от себестоимости пара и соответствующего его расхода, затраты на первичные энергоресурсы генераторов. На рисунке 3 представлена зависимость затрат на выработку электроэнергии и пара от мощности, вырабатываемой электростанцией.

Разработанный подход позволяет на основании схемы, моделей генераторов и котлов, стоимостных показателей ресурсов осуществлять автоматизированный расчет себестоимости свежего пара, суммарные затраты на пар и первичные энергоносители при различных суммарных выработках электростанции, что позволит осуществлять своевременное планирование оптимальных режимов работы основного оборудования ТЭС.

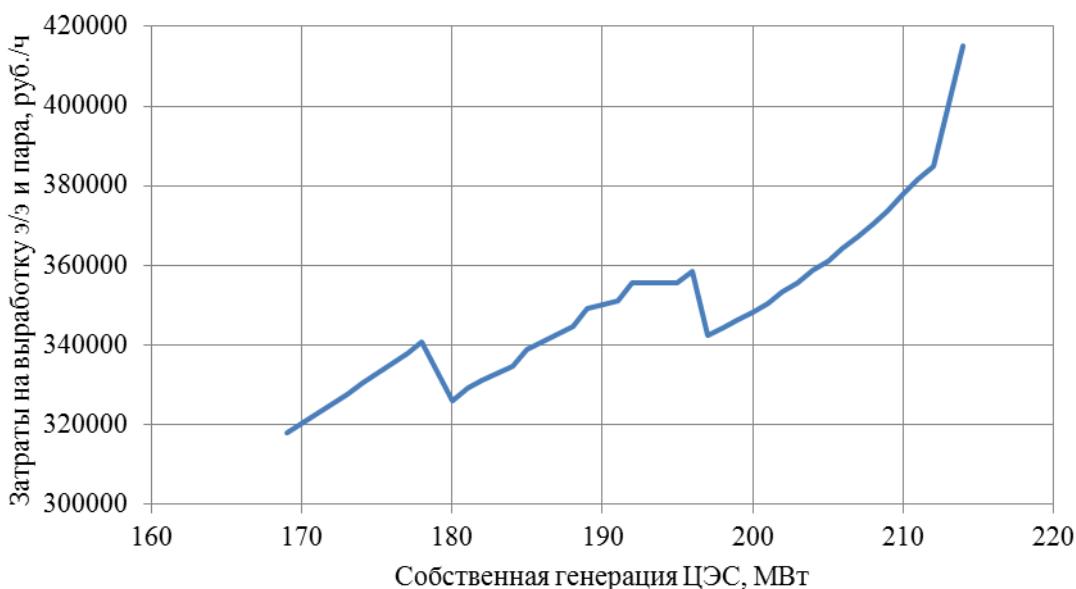


Рис. 3. Зависимость затрат на выработку электроэнергии и пара от мощности нагрузки ЦЭС

ЛИТЕРАТУРА

1. Малафеев, А. В. Алгоритм оптимизации распределения активной мощности между электростанциями промышленного предприятия и узлами связи с энергосистемой с учетом потерь в распределительной сети / Малафеев А. В., Игуменщев В. А., Хламова А. В. // Промышленная энергетика. – 2011. – № 9. – С. 16–21.
2. Кочкина, А. В. Применение метода динамического программирования для решения задач оптимального распределения активных мощностей между разнородными генерирующими источниками собственных электростанций предприятий черной металлургии / А. В. Кочкина // Наука и производство Урала. – 2012. – № 8. – С. 204–209.
3. Построение технико-экономических моделей турбогенераторов и котлоагрегатов собственных электростанций промышленных предприятий / Кочкина А. В., Малафеев А. В., Курилова Н. А., Нетупский Р. П. // Электротехнические системы и комплексы. – 2013. – № 21. – С. 247–252.
4. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019618345, 28.06.2019. КАТРАН-OptHeatPower : заявка № 2019616881 от 07.06.2019 / Малафеев А. В., Варганова А. В.

Я.М. Трофименко

Череповецкий государственный университет, Россия

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМЕ СЛЕЖЕНИЯ ЗА СТАЛЬКОВШАМИ

Необходимость контроля перемещения стальковшей в сталеплавильном производстве обуславливается тем, что стальковш представляет собой важную часть технологического процесса, который должен протекать согласно временным рамкам, определенным технологией выплавки, доводки, разливки стали. Стальковш является сложным объектом со своими характеристиками, такими как размер, возможные способы перемещения, температура на различных этапах технологического процесса и т.д. Кроме того, производство стали характеризуется высоким энергопотреблением на основных этапах процесса, таких как: выплавка стали, доводка стали и перемещение стали между агрегатами от выплавки до разливки.

Отслеживание перемещения объектов является многоуровневым процессом, состоящим из отдельных подпроцессов, каждый из которых реализуется при помощи специализированных алгоритмов обработки и анализа изображений. Подобные алгоритмы требуют значительных вычислительных мощностей и, в некоторых случаях, специализированного оборудования, такого как видеокамеры и тепловизоры.

Целью работы является разработка и реализация системы слежения за стальковшами в сталеплавильном производстве, которая позволит фиксировать перемещения стальковшей от агрегата к агрегату с привязкой ко времени. Для достижения поставленной цели должны быть решены следующие задачи:

1. Анализ предметной области отслеживания объектов.
2. Теоретическое обоснование решаемой задачи при помощи моделей и алгоритмов.
3. Проектирование информационного и программного обеспечения для системы слежения за стальковшами в сталеплавильном производстве.
4. Экспериментальная проверка разработанных технических решений.

В результате анализа предметной области было установлено, что к наиболее распространенным подходам отслеживания перемещения объектов можно отнести следующие:

- использование RFID-меток [1];
- использование спутниковой навигации [2];
- использование интеллектуальных систем технического зрения [3].

Каждый подход имеет ряд достоинств и недостатков, которые и определяют его применимость для поставленной задачи:

1. RFID-меткам не требуется прямая видимость со считывателем и неважна их взаимная ориентация в пространстве, кроме того, в метке может храниться объем данных, характеризующих отслеживаемый объект. При этом к недостаткам можно отнести необходимость размещения метки на объекте, подверженность помехам от электромагнитных полей и металлоконструкций, а также потерю работоспособности при частичном механическом повреждении. Стоит отметить, что для увеличения расстояния чтения требуется установка активной метки, которая работает только при наличии источника питания.

2. Достоинствами спутниковой навигации можно считать проработанность технологии и стандартов, а также большое количество различных устройств-приемников, работа которых почти не зависит от погодных условий. Недостатки спутниковой навигации – неработоспособность в помещениях и необходимость наличия источника питания для приемника.

3. Интеллектуальные системы технического зрения сочетают в себе многофункциональность, позволяющую выполнять ряд задач при работе, масштабируемость за счет гибкой конфигурации и отсутствие необходимости закреплять оборудование (метки, датчики, приемники и т.д.) на отслеживаемом объекте. Недостатками интеллектуальной системы технического зрения являются негативное влияние внешних условий на точность работы, необходимость разработки системы на заказ, если объект слежения нестандартный (специальное оборудование и т.п.), необходимость выбора соответствующей камеры и высокопроизводительного ПК или видеосервера.

Система слежения должна работать в условиях сталеплавильного производства, что в свою очередь накладывает следующие ограничения на применимость описанных подходов:

- наличие специализированного оборудования, металлоконструкций и агрегатов, которые могут вызвать помехи для прохождения сигналов;
- воздействие высоких температур на стальковш в процессе разливки стали из конвертера, доводки на агрегатах внепечной обработки, разливки на установках непрерывной разливки стали;
- возможность возникновения брызг расплавленного шлака или жидкого металла с температурой выше 1000 °C;
- токопроводящая пыль и шламы;
- перемещение стальковшей осуществляется преимущественно при помощи литейных кранов и сталевозов;
- вибрации, передающиеся стальковшу от оборудования.

Приняв во внимание указанные ограничения, следует отметить, что применение спутниковой навигации для решения задачи не представляется возможным, так как установка приемника спутникового сигнала с источником питания на стальковш затруднительна или невозможна, кроме того спутнико-

вый сигнал может не дойти до приемника из-за металлоконструкций цеха. Использование радиочастотных RFID-меток ограничено тем, что для передачи сигнала на расстояние более двух метров необходима установка активных меток с источником питания и установкой считывателей на всем пути следования стальковша. Реализация интеллектуальной системы технического зрения является наиболее подходящим способом отслеживания положения стальковшей, поскольку не требует установки приемников и датчиков на сам стальковш, что исключает возможность воздействия высоких температур и других опасных факторов на оборудование.

Обработка информации в интеллектуальной системе технического зрения может осуществляться несколькими способами:

- с использованием интеллектуальных камер, в которых имеется аппаратное и программное обеспечение, позволяющее выполнять анализ изображений и предоставлять результат этого анализа;
- с помощью камер с блоком предобработки изображений. Данный вид камер не выполняет анализ изображений, но позволяет выполнить обработку таким образом, чтобы выделить интересующие признаки объектов (контуры, изменения яркости и цвета и т.п.);
- используя централизованную систему с сервером видеоаналитики, на котором и производится вся обработка изображений, поступающих от видеокамер [4].

Обработка информации в системе слежения осуществляется в несколько этапов внутри каждой из подсистем:

1. Получение подсистемой захвата видеопотока кадров с камеры в реальном времени и их передача в подсистему предобработки.
2. Предобработка изображения средствами классического машинного зрения, такими как выравнивание яркости, размытие и обнаружение движения с целью удаления шумов и помех.
3. Подсистема распознавания объектов выполняет поиск стальковшей на предобработанном изображении при помощи сверточной искусственной нейронной сети заданной конфигурации, что позволяет с высокой степенью точности определить положение объекта в кадре.
4. Подсистема аналитики выполняет анализ данных плавки и сопоставляет требуемый маршрут ковша с его фактическим положением для более точной привязки ковша, найденного на изображении с имеющимися данными из АСУТП.
5. Результатом являются данные по отслеживанию маршрута, пройденного стальковшом с привязкой ко времени нахождения на том или ином агрегате. Такие данные позволяют оценить и оптимизировать маршрут ковша.

Структурная схема обработки информации в системе слежения за стальковшами представлена ниже на рисунке.

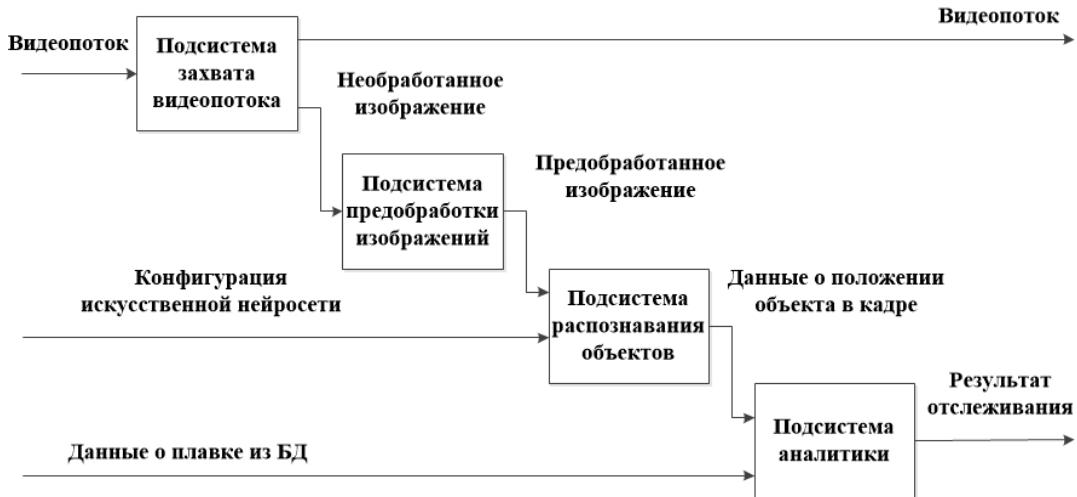


Рис. Структурная схема обработки информации в системе слежения за стальковищами

ЛИТЕРАТУРА

1. Chi-Biao Liu, Ming-Hua Zhang, Development of a Novel Ladle Monitoring System Based on Internet of Things Technologies // IOT Application Engineering Research Center of Fujian Province Colleges and Universities, School of Information Engineering, Sanming University Journal of Convergence Information Technology (JCIT). – Vol. 8, Number 10, 2013. – P. 1003–1011.
2. Серапинас, Б. Б. Глобальные системы позиционирования / Б. Б. Серапинас. – Москва : Каталог, 2002. – 106 с.
3. Кругль Герман. Профессиональное видеонаблюдение. Практика и технологии аналогового и цифрового CCTV / Герман Кругль. – Москва : Секьюрити Фокус, 2010. – 640 с.
4. Статья от компании Axis – лидера на рынке сетевого видео, о видеоаналитике. – URL: <https://www.axis.com/ru-ru/learning/web-articles/video-analytics> (дата обращения: 17.09.2020). – Текст : электронный.

В.Д. Чертовской
*Санкт-Петербургский государственный электротехнический
 университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Россия*

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОПЕРАТИВНО-КАЛЕНДАРНОМ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Введение. Продолжающаяся цифровизация экономики предполагает автоматизацию процесса планирования в производственной системе. Для этого необходимо построение оптимизационной модели с учетом многоуровневой структуры таких систем [1]. В настоящее время подробно изучена модель, охватывающая технико-экономическое и оперативное планирование. В то же

время этого нельзя сказать об оперативно-календарном планировании. В нем описаны [2–5] отдельные составляющие при отсутствии связей с более высокими уровнями планирования.

Постановка задачи. Имеется настоятельная необходимость в системном рассмотрении составляющих с учетом их связей с процессами экономико-оперативного управления. Этим вопросам посвящена настоящая работа.

Решение задачи. Рассматривается трехуровневая структура системы, показанная на рисунке 1.

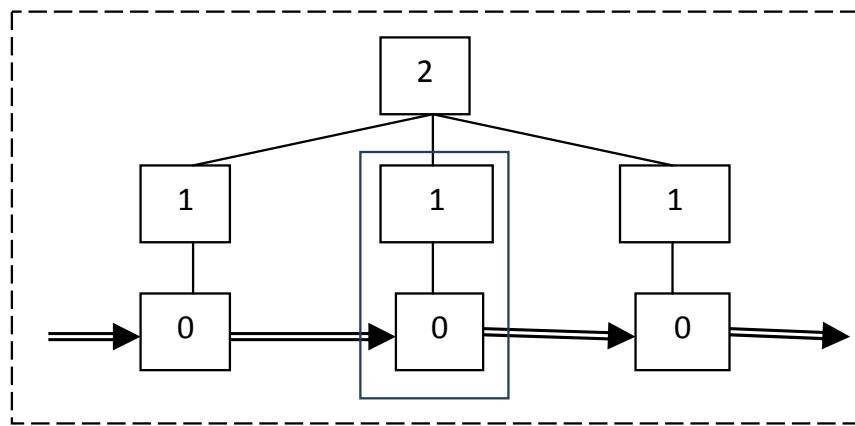


Рис. 1. Общая структура системы:
2 – начальник цеха; 1 – начальники участков; 0 – участки

Цех, описанный в работе [1], связывает элементы более высокого уровня с элементами процесса оперативно-календарного планирования.

В календарном планировании выделяют [3] три составляющие: размещение, согласование, упорядочение. Они рассмотрены порознь и потому задача данной работы заключается в их интеграции.

Схема интеграции составляющих представлена на рисунке 2.

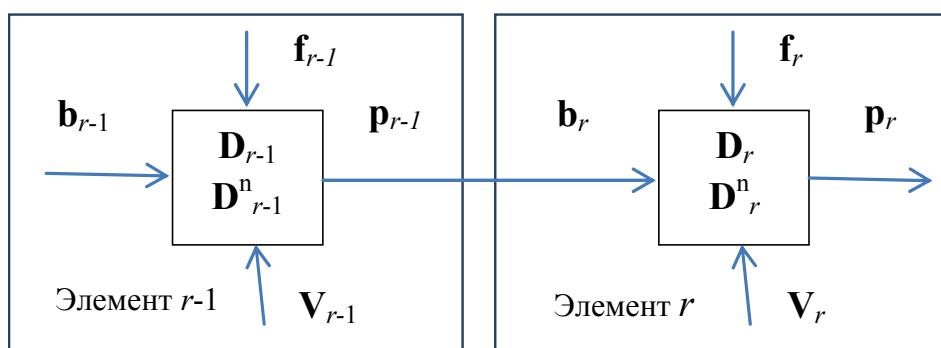


Рис. 2. Интеграция составляющих «распределение» и «согласование»

За основу представления составляющей «распределение» удобно принять – в соответствии с работой [3] – такое описание:

$$G_r = f_r p_r \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$D_r p_r \leq V_r, \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_r = -\mathbf{S}_r + \mathbf{y}_r \mathbf{T} - \mathbf{T}_{1r}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_r^m \mathbf{p}_r = \mathbf{b}_r^n, \quad (4)$$

где $\mathbf{D}_r = \{t_{qj}\}$ – матрица времени обработки j -й детали на q -м оборудовании, $\mathbf{T}_1 = \{t_q\}$ – вектор времени простоев, $\mathbf{S}_r = \{z_{qj} r_{qj}\}$ – матрица времени переналадки, r_{qj} – норма времени переналадки q -го оборудования на обработку деталей j -го типа, z_{qj} – количество оборудования q -го типа, которое будет использовано для обработки деталей j -го типа, $\mathbf{Y} = \{y_q\}$ – вектор количества единиц q -го оборудования, которое входит в состав производственного участка, $\mathbf{p}_r = (p_j)$ – количество обработанных деталей; T – интервал времени; r – номер структурного элемента участка; \mathbf{D}_r^m – матрица расхода материальных ресурсов (деталей); \mathbf{b}_r^w – количество этих ресурсов.

Если $\mathbf{D}_r^m = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – единичная матрица, то описывается процедура обработки. При $\mathbf{D}_r^m \neq \mathbf{E}$ рассматривается процедура сборки.

Это же описание может быть использовано при групповой обработке деталей, где переменная \mathbf{p}_r характеризует соответствующую группу деталей без изменения ее состава.

Если оборудование q имеет l разновидностей, то получается схема, показанная на рисунке 3.

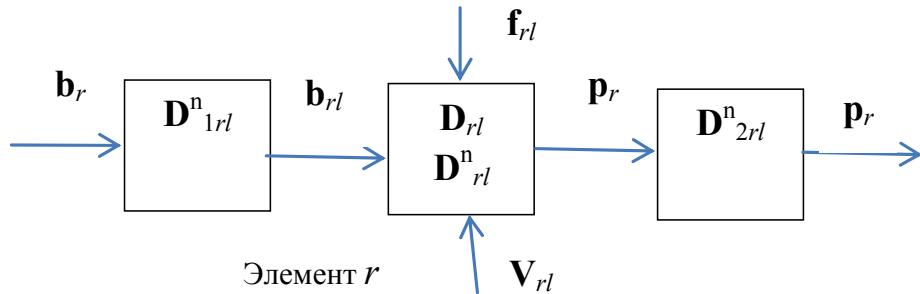


Рис. 3. Учет разновидностей оборудования

Она имеет следующее описание.

$$\mathbf{D}_r^{nn} \mathbf{p}_r = \mathbf{D}_{1rl}^n \mathbf{D}_{rl}^n \mathbf{D}_{2rl}^n \mathbf{p}_r = \mathbf{b}_r^n, \quad (5)$$

где \mathbf{D}_{1rl}^n – матрица разделения разновидностей; \mathbf{D}_{2rl}^n – матрица соединения разновидностей.

Выражение (4) позволяет связать составляющую «распределение» с составляющей «согласование»

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_r^m \mathbf{p}_r &= \mathbf{p}_{r-1}, \\ G = \sum_{r=1}^R G_r &\rightarrow \max, \end{aligned} \quad (6)$$

Случай переформатирования групп можно отразить так, как показано на рисунке 4.

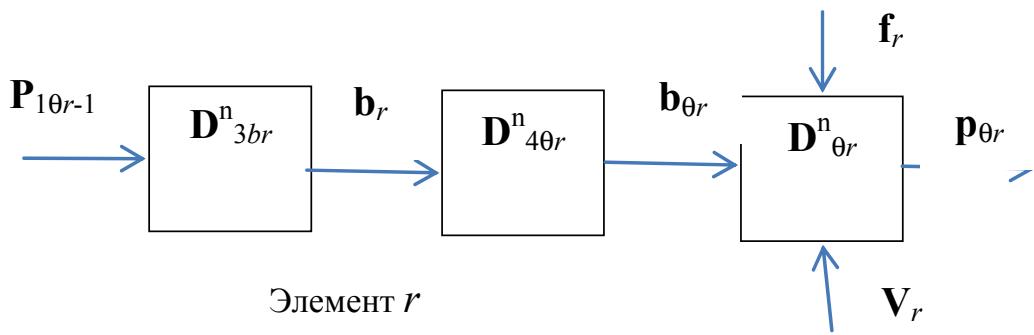


Рис. 4. Переформирование групп деталей

Описание элемента r при этом получается таким:

$$D_{\theta r}^n p_{\theta r} = D_{3br}^n D_{40r}^n D_{\theta r}^n p_{\theta r} = p_{10r-1} \quad (7)$$

где D_{3br}^n – матрица обращения групп в детали; D_{40r}^n – матрица соединения деталей в новые группы.

Дальнейшая оптимизация процесса планирования может быть достигнута в рамках составляющей «упорядочение» путем перестановки деталей в процедуре их обработки.

Матрица $D_r(d_{qj})$ (станок – деталь) позволяет ввести в описанную интегральную модель составляющую «упорядочение» и использовать комбинаторно-оптимизационный метод [4], который может быть использован как для процедуры обработки, так и для процедуры сборки.

Для метода характерна многоэтапность: определение необходимых и достаточных условий перестановок с построением соответствующего графа, выявление гамильтоновых путей; подсчет на каждом пути длительностей процедуры обработки и выбор наименьшей из них.

Метод отличается высокой трудоемкостью, резко растущей с увеличением величины q . Из-за трудоемкости математическое представление здесь не приводится.

В силу сказанного упорядочение применяют редко, ибо к тому же получающаяся неоптимальность по времени может быть легко скомпенсирована увеличением коэффициента загрузки оборудования u_r в выражении (3).

Заключение. В работе построена интегральная математическая модель оперативно-календарного оптимального планирования, которая легко соглашается с описанием процесса технико-экономического и оперативного планирования. Такая глобальная модель позволяет получить конкурентные преимущества. Следует отметить, что при прикладном использовании описанной модели имеет место большое количество неформальных моментов, обсуждение которых требует отдельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чертовской, В. Д. Моделирование процессов адаптивного автоматизированного управления производством / В. Д. Чертовский. – Санкт-Петербург : Лань, 2019. – 216 с.
2. Танаев, В. С. Теория расписаний: многостадийные системы / Танаев В. С., Сотсков Ю. Н., Струсевич В. А. – Москва : Наука, 1989. – 328 с.
3. Большаков, В. А. Задачи планирования дискретного (штучного) производства и численные методы их решения / Большаков В. А., Уздемир А. П., Шмелёв В. В. //Автоматика и телемеханика. – 1975. – № 9. – С. 115–122 ; 1975 № 10. – С. 98–112 ; 1976. – Вып. 1. – С. 146–156.
4. Хоботов, Е. Н. О некоторых моделях и методах решения задач планирования в дискретных производствах / Е. Н. Хоботов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – Вып. 12. – С. 85–100.
5. Павлов, К. С. Модели выбора и замены оборудования в производственных системах машиностроительных предприятий / Павлов К. С., Хоботов Е. Н. //Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 12. – С. 105–143.
6. Левин, В. И. Задача о станков при ограничениях на порядок следования деталей / В. И. Левин //Автоматика и телемеханика. – 2015. – Вып. 3. – С. 107–116.

*Д.А. Онохин, С.В. Карпов, М.И. Коноплев
Северный (Арктический) федеральный университет
им. М.В. Ломоносова, Россия*

ФИЗИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ЦИКЛОННЫХ ПЕЧАХ НАГРЕВА ДЛИННОМЕРНЫХ ЗАГОТОВОВОК

Введение

Применение высокотурбулентных закрученных потоков теплоносителей, генерируемых в циклонных устройствах, является перспективным направлением развития энергетического и технологического промышленного оборудования. Циклонно-вихревые устройства обладают высокими технико-экономическими характеристиками, простотой конструкции и универсальностью, а также возможностью существенной интенсификации процессов тепломассообмена.

Большое количество исследований по аэродинамике и конвективному теплообмену в циклонных камерах выполнено на их моделях сравнительно небольшой относительной длины $\bar{L}_k = L_k/D_k$ (L_k , D_k – длина и диаметр рабочего объема камеры) равной 1...2. Объясняется это тем, что именно такие циклонные камеры первоначально получили наибольшее применение в промышленности в качестве топочных и нагревательных устройств [1–3], рекуператоров,

воздухоподогревателей, сепараторов [4, 5] и других теплообменных энергетических установок [6].

Повышение производительности циклонных камер и расширение сфер их промышленного применения вызвали в ряде случаев необходимость увеличения длины рабочего объема и проведения дополнительных исследований движения газов и теплообмена для разработки рекомендаций по расчету и конструированию.

Рассматриваемая задача представляет интерес с точки зрения дальнейшего изучения возможностей интенсификации конвективного теплообмена в рабочем объеме циклонных устройств и совершенствования методики их расчета [3].

Настоящая работа является продолжением и развитием ранее выполненных исследований [7–9]. Целью работы является дальнейшее изучение особенностей конвективного теплообмена на боковой поверхности рабочего объема циклонной камеры при различных условиях ввода и вывода потока и разработка рекомендаций для расчета, проектирования и практического использования циклонных камер большой относительной длины.

Методика исследования

Исследование выполнено на экспериментальном стенде, основным элементом которого являлась циклонная камера с диаметром рабочего объема $D_k = 2R_k = 160$ мм (рис. 1).

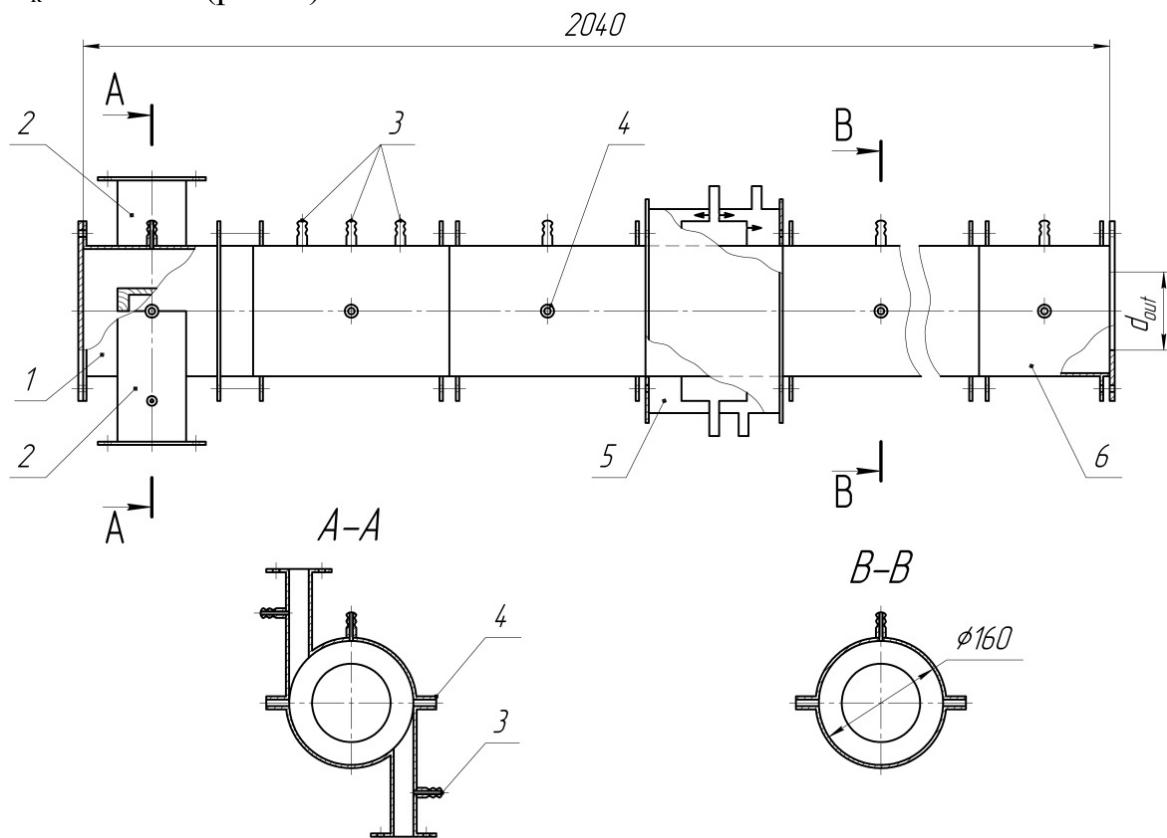


Рис. 1. Схема циклонной камеры: 1 – закручиватель; 2 – входные каналы (шилизы); 3 – штуцеры для измерения статического давления; 4 – штуцеры для крепления аэродинамического зонда; 5 – паровой калориметр; 6 – передвижные секции

Подвод воздуха в закручиватель камеры осуществляли тангенциально с диаметрально противоположных сторон двумя входными каналами (шлиницами), имеющими размеры поперечного сечения 24×84 мм. Оси шлищев находились в одной поперечной плоскости на расстоянии $0,5D_k$ от глухого торца закручивателя. Безразмерную площадь поперечного сечения входных каналов (площадь входа потока) $\bar{f}_{bx} = 4f_{bx}/\pi D_k^2$ изменяли специально с профилированными вкладышами. Относительный диаметр выходного отверстия камеры $\bar{d}_{vых} = d_{vых}/D_k$ варьировали сменными диафрагмами.

Воздух в камеру подавали воздуходувкой с номинальной производительностью $97 \text{ м}^3/\text{мин}$ и располагаемым напором 16 кПа. Опыты по конвективному теплообмену выполнены при $\bar{L}_k = 1\dots18,25$, $\bar{f}_{bx} = 0,02\dots0,21$ и $\bar{d}_{vых} = 0,2\dots1$ в диапазоне чисел $Re_{bx} = V_{bx}D_k/v_{bx} = (0,4\dots12,9) \cdot 10^5$ (где V_{bx} , v_{bx} – средняя скорость и кинематическая вязкость потока в шлищах).

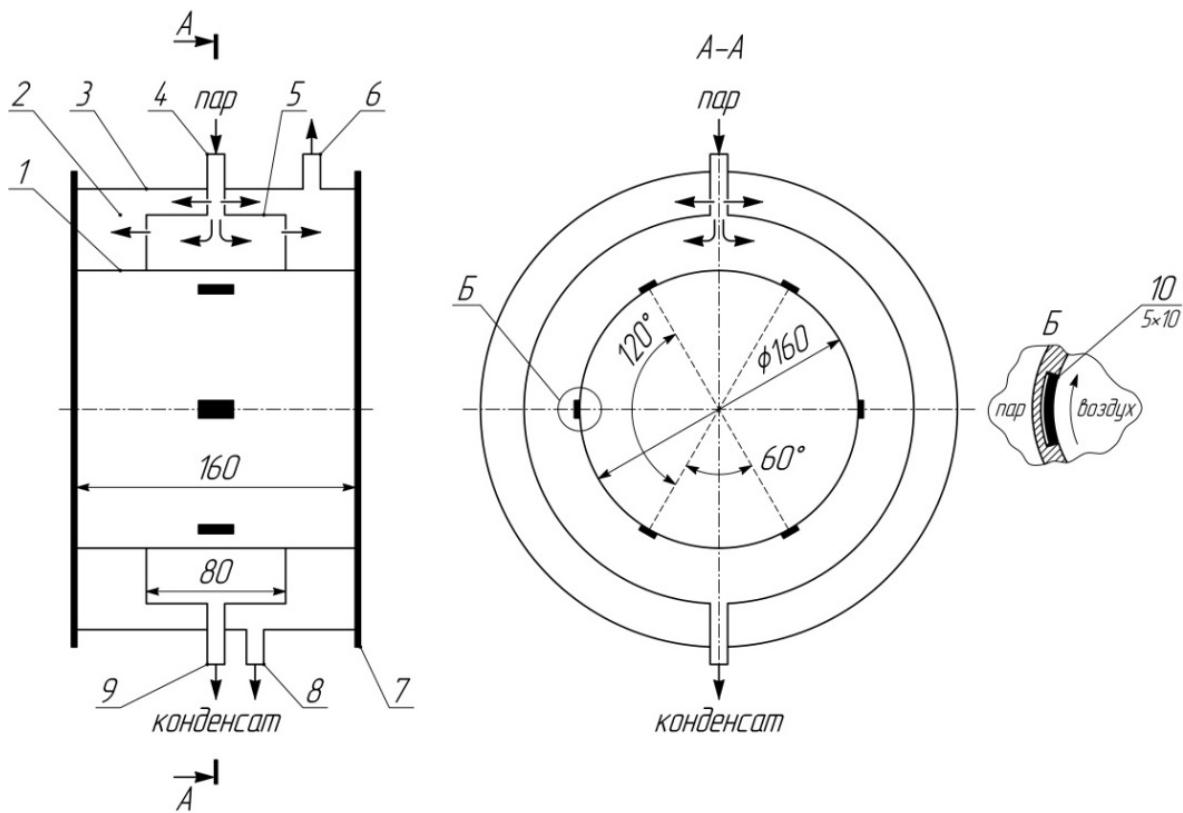


Рис. 2. Схема повышение калориметра онохин и расположения структур датчиков:

- 1 – внутренняя цилиндрическая стенка датчиков,
- 2 – охранный участок,
- 3 – наружная цилиндрическая стенка,
- 4 – штуцер подвода пара,
- 5 – рабочий участок,
- 6 – продувочный штуцер,
- 7 – фланец крепления калориметра к камере,
- 8 – штуцер отвода конденсата в дренаж,
- 9 – штуцер отвода конденсата на измерение,
- 10 – датчики теплового потока

Исследование теплоотдачи проводили с помощью градиентных датчиков теплового потока Captecs [10], установленных заподлицо с внутренней поверхностью калориметра (рис. 2), ранее применявшегося для аналогичных опытов

[11]. Внутренний диаметр калориметра равен диаметру рабочего объема циклонной камеры. Секционированная конструкция камеры позволяла менять расположение калориметра с установленными датчиками по ее длине. Продольную координату $\bar{z} = z/D_k$, определяющую местоположение датчиков (среднее сечение калориметра), отсчитывали от глухого торца закручивателя вдоль оси рабочего объема камеры.

Греющий пар из электрокотла через пароперегреватель поступал в рабочий участок калориметра. Отвод излишнего пара осуществляли в охранный участок калориметра, а оттуда – в дренаж. Температуру поверхности калориметра контролировали по встроенным в датчики термопарам.

Одновременно с экспериментом было выполнено численное моделирование аэродинамики и конвективного теплообмена циклонной камеры с характеристиками $\bar{L}_k = 12,75$, $\bar{f}_{bx} = 0,04$, $\bar{d}_{вых} = 0,43$. Численное решение задачи проводили в трехмерной постановке с использованием программного комплекса ANSYS Fluent 15.0. Течение описывалось уравнениями Рейнольдса, неразрывности и энергии. Замыкание уравнений выполнено с использованием двухпараметрической модели турбулентности SST (Shear Stress Transport) $k-\omega$ с поправкой на кривизну линий тока (curve correction) и стандартных пристеночных функций. Дискретизация дифференциальных уравнений выполнена с использованием второго порядка точности. Сеточная модель построена блочным методом и представляла собой структурированную гексаэдрическую сетку размером 1 млн ячеек. Для пристеночного пограничного слоя (включая вязкий подслой) было обеспечено сеточное разрешение $y^+ \approx 1$.

Полученные результаты

Обобщение опытных данных, полученных при помощи градиентных датчиков теплового потока, позволило получить следующее уравнение:

$$Nu = 0,203 Re_{bx}^{0,72} \varepsilon_r \varepsilon_z, \quad (1)$$

где произведение сомножителей

$$\varepsilon_r \varepsilon_z = \bar{f}_{bx}^{0,4} \bar{z}^{-0,139} \bar{f}_{bx}^{-0,24}. \quad (2)$$

Результаты численного моделирования теплоотдачи на боковой стенке незагруженных циклонных нагревательных устройств представлены на рисунке 3 в виде зависимости числа Nu от Re_{bx} :

$$Nu = 0,174 Re_{bx}^{0,74} \varepsilon_r \varepsilon_z, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_r \varepsilon_z = \bar{f}_{bx}^{0,4} \bar{z}^{-0,115} \bar{f}_{bx}^{-0,3}. \quad (4)$$

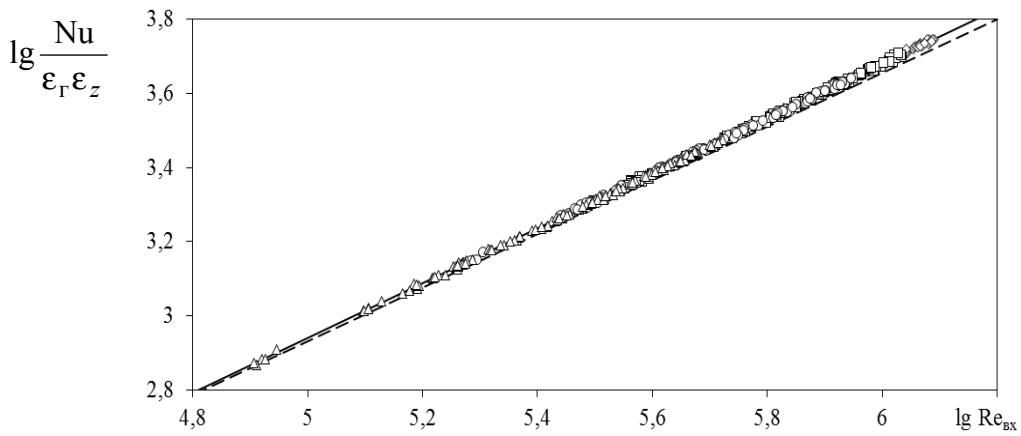


Рис. 3. Численное моделирование теплоотдачи на боковой поверхности рабочего объема циклонных камер. Обозначения: $\diamond - \bar{f}_{\text{вх}} = 0,02$; $\square - 0,04$; $\circ - 0,08$; $\Delta - 0,21$; сплошная линия – уравнение (3); сплошная линия с штриховкой – (1)

Разброс данных возле обобщающей прямой не превышает $\pm 2\%$, погрешность опытной методики по сравнению с расчетом не превышает 6% .

В ранее выполненной работе [12] при исследовании аэродинамики циклонного потока методом численного моделирования было обнаружено, что в рабочем объеме незагруженных относительно длинных циклонных камер в результате взаимодействия входных струй, периферийных прямого и обратного, осевого обратного и приторцевого потоков у глухого торца возникают симметричные крупные тороподобные вихри. Данные вихри, искривляясь и распространяясь далее по потоку, приводят к формированию крупномасштабных вихревых структур наподобие вихрей Тейлора–Гертлера. Возникновение и распространение таких вихревых структур оказывает влияние на распределение теплового потока и интенсивность теплоотдачи на боковой поверхности рабочего объема. На рисунке 4 представлены распределения по длине камеры полной скорости потока $\bar{V} = V/V_{\text{вх}}$ на расстоянии 2 мм от стенки и плотности теплового потока q на ней в циклонной камере с характеристиками $\bar{L}_k = 12,75$, $\bar{f}_{\text{вх}} = 0,08$, $\bar{d}_{\text{вых}} = 0,59$ при $\text{Re}_{\text{вх}} = 7,0 \cdot 10^5$ ($V_{\text{вх}} \approx 80$ м/с).

Хорошо видно, что распределения $\bar{V}(\bar{z})$ и $\bar{q}(\bar{z})$ качественно подобны, а их экстремумы расположены в местах возникновения обнаруженных вихрей. Чередование локальных максимумов и минимумов значений полной скорости потока можно объяснить тем, что вихревые течения переносят из циклонного потока к стенке частицы среды с большой скоростью и турбулентностью, а от стенки, наоборот, в поток выносятся частицы с меньшими их значениями. На рисунке 4 для сравнения нанесены опытные точки, полученные по результатам замеров на натурной модели циклонной камеры.

В качестве примера на рисунке 6 показаны контуры распределений коэффициента теплоотдачи на боковой стенке рабочего объема в незагруженной циклонной камере с характеристиками $\bar{L}_k = 12,75$, $\bar{f}_{bx} = 0,08$, $\bar{d}_{вых} = 0,59$ при $Re_{bx} = 7,0 \cdot 10^5$, полученные в результате численного моделирования.

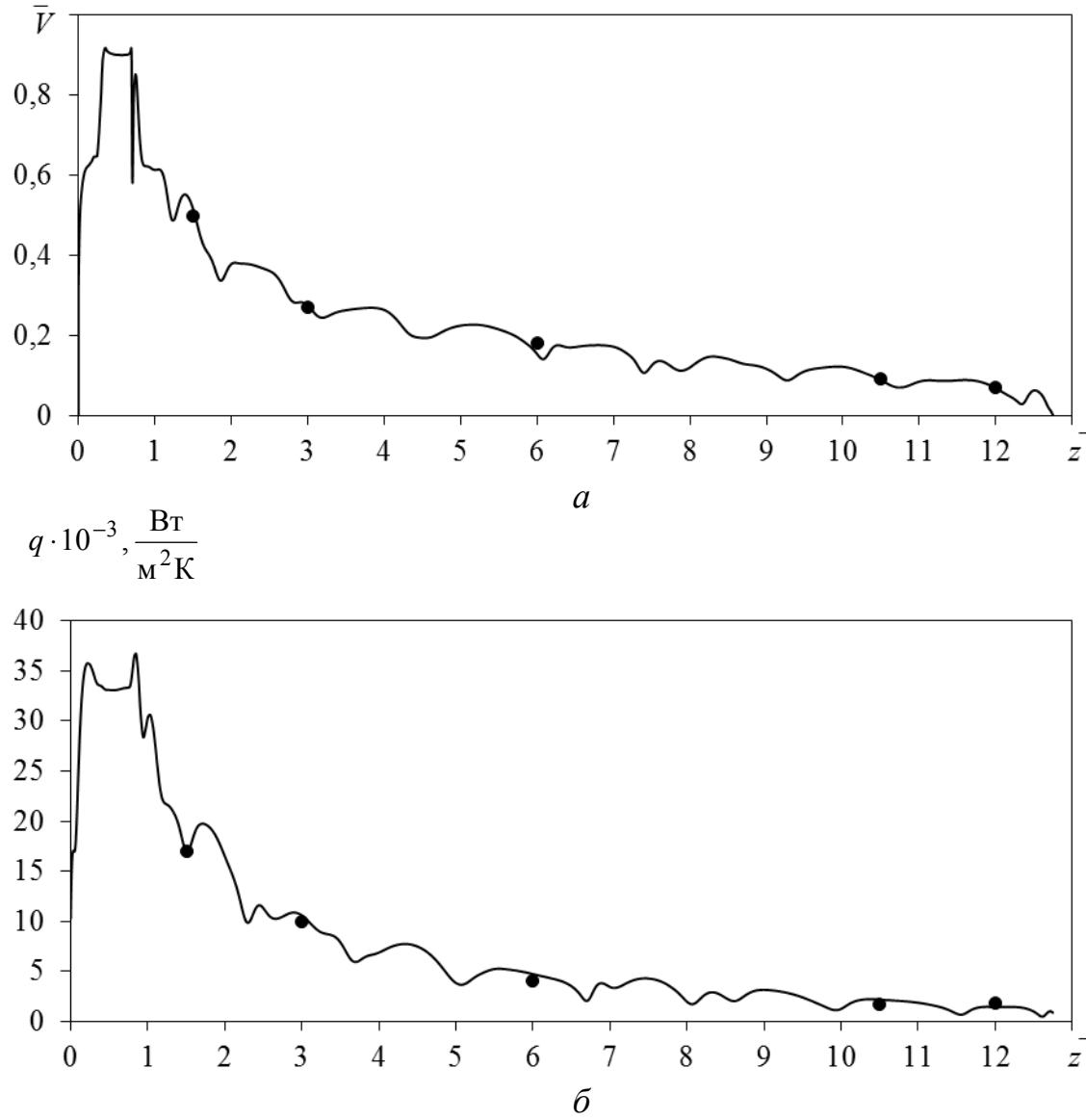


Рис. 4. Распределения $\bar{V}(\bar{z})$ (а) и $\bar{q}(\bar{z})$ (б) в циклонной камере

с $\bar{L}_k = 12,75$, $\bar{f}_{bx} = 0,08$, $\bar{d}_{вых} = 0,59$ при $Re_{bx} = 7,0 \cdot 10^5$ ($V_{bx} \approx 80$ м/с)

Таким образом, результаты моделирования конвективного теплообмена в циклонных нагревательных устройствах большой относительной длины хорошо согласуются с выводами, сделанными на основе анализа экспериментальных данных по двум апробированным методикам тепловых измерений.

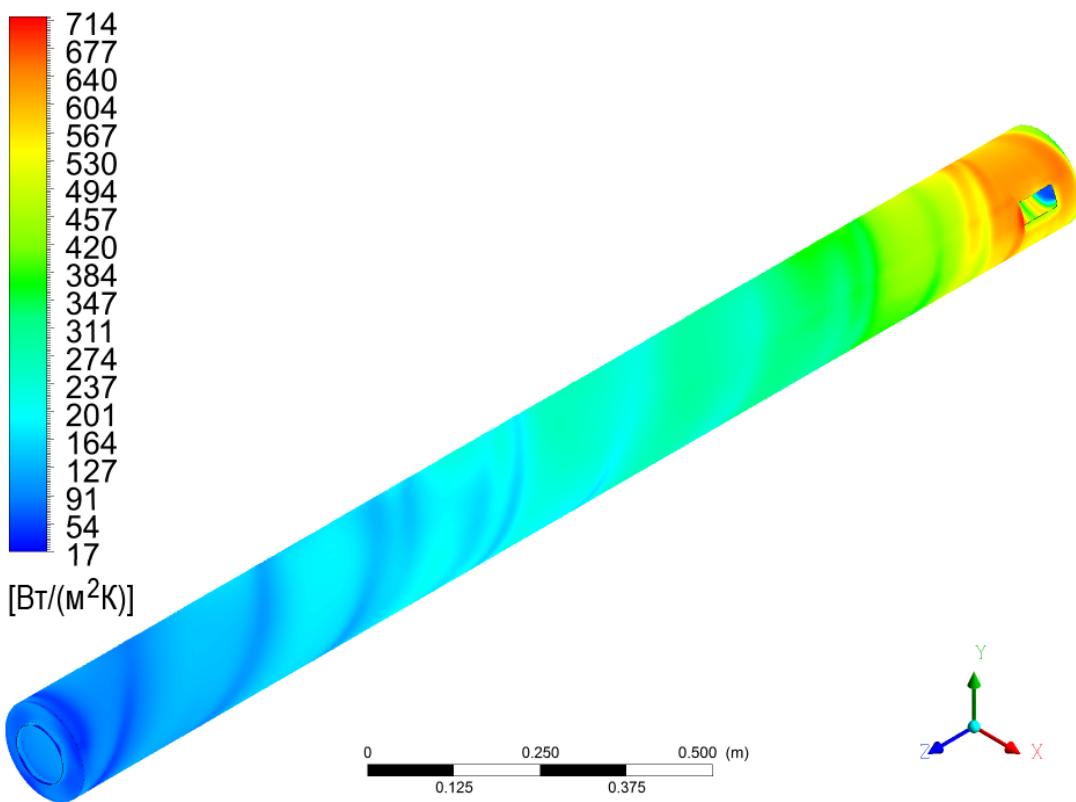


Рис. 5. Контур распределения коэффициента теплоотдачи на боковой стенке рабочего объема циклонной камеры с $\bar{L}_k = 12,75$, $\bar{f}_{\text{вх}} = 0,08$, $\bar{d}_{\text{вых}} = 0,59$ при $Re_{\text{ex}} = 7,0 \cdot 10^5$

На основе полученных результатов разработана инженерная методика расчета циклонных нагревательных устройств большой относительной длины, решена задача поиска их оптимальных конструктивных параметров [13, 14]. Оценен экономический эффект от их внедрения. Показано, что применение относительно длинных циклонных нагревательных устройств вместо циклонных секционных печей с аналогичными параметрами позволяет снизить удельный расход энергии на нагрев металла на 5...40 %, уменьшить удельный расход топлива на 6...39 % и повысить КПД на 3...25 %.

Выводы:

1. Получены обобщенные уравнения подобия для расчета средних коэффициентов теплоотдачи на боковой поверхности рабочего объема.
2. Результаты опытов, выполненных с использованием градиентных датчиков теплового потока, обеспечили высокую надежность и хорошую повторяемость результатов эксперимента. Их применение позволило повысить точность и расширить диапазон применимости обобщенных уравнений подобия, а также получить распределения локальных значений коэффициента теплоотдачи по длине и периметру поверхности рабочего объема циклонной камеры. Полученные результаты подтверждены численным моделированием.
3. Полученные расчетные зависимости могут быть использованы в инженерной практике конструирования циклонных нагревательных печей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калишевский, Л. Л. Циклонные топки / Калишевский Л. Л., Кацнельсон Б. Д., Кнорре Г.Ф. ; под общей редакцией Г. Ф. Кнорре, М. А. Наджарова. – Москва : Госэнергоиздат, 1958. – 216 с.
2. Пуговкин, А. У. Рециркуляционные пламенные печи в машиностроении / А. У. Пуговкин. – Ленинград : Машиностроение, 1987. – 158 с.
3. Сабуров, Э. Н. Циклонные нагревательные устройства с интенсифицированным конвективным теплообменом / Э. Н. Сабуров. – Архангельск : Северо-Западное книжное издательство, 1995. – 341 с.
4. Сидельковский, Л. Н. Циклонные энергетические установки / Сидельковский, Л. Н., Шурыгин А. П. – Москва : Госэнергоиздат, 1962. – 80 с.
5. Карпов, С. В. Высокоэффективные циклонные устройства для очистки и теплового использования газовых выбросов / Карпов С. В., Сабуров Э. Н. – Архангельск : Издательство Архангельского государственного технического университета, 2002. – 504 с.
6. Сабуров, Э. Н. Циклонные устройства в деревообрабатывающем целлюлозно-бумажном производстве / Сабуров, Э. Н., Карпов С. В. – Москва : Экология, 1993. – 368 с.
7. Онохин, Д. А. Конвективный теплообмен в относительно длинных циклонных камерах / Онохин, Д. А., Сабуров Э. Н. // Вестник Череповецкого государственного университета. Технические науки. – 2016. – № 6 (75). – С. 29–33.
8. Onokhin D. A., Saburov E. N., Orekhov A. N. Research of the convective heat exchange of relatively long cyclone chamber with use gradient heat flux sensors // Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – Vol. 891, № 012089. – P. 1–5.
9. Онохин, Д. А. Исследование конвективного теплообмена на боковой поверхности рабочего объема циклонных камер / Онохин Д. А., Сабуров Э. Н. // Промышленная энергетика. Проекты и исследования. – 2018. – № 10. – С. 15–20.
10. Сапожников, С. З. Градиентные датчики теплового потока / С. З. Сапожников, В. Ю. Митяков, А. В. Митяков. – Санкт-Петербург : СПбГПУ, 2003. – 168 с.
11. Сабуров, Э. Н. Конвективный теплообмен на боковой поверхности рабочего объема относительно длинной циклонной камеры / Э. Н. Сабуров, А. Н. Орехов, Д. А. Онохин // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2016. – Т. 59. – № 6. – С. 573–581.
12. Сабуров, Э. Н. Аэродинамика и устойчивость потока в относительно длинных циклонных камерах / Сабуров, Э. Н., Онохин Д. А. // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2018. – Т. 61, № 6. – С. 527–538.
13. Onokhin, D. A. Aerodynamics and convective heat transfer at the inner wall of the relatively long cyclone chambers / Onokhin, D. A., Orekhov A. N., Karpov S. V.

// AIP Conf. Proc. Heat and Mass Transfer and Hydrodynamics in Swirling Flows (HMTHSF–2019): Proceedings of the Seventh International Conference (16–18 October 2019, Rybinsk, Russia). – 2020. – Vol. 2211, № 03005. – P. 1–7.

14. Аэродинамика, конвективный теплообмен и энергетическая эффективность циклонных устройств большой относительной длины / Онохин, Д. А., Орехов А. Н., Карпов С. В., Коноплев М. И. // Семинар вузов по теплофизике и энергетике : материалы Всероссийской научной конференции с международным участием (Санкт-Петербург, 21–23 октября 2019 г.). – Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. – С. 292–293.

Т.Б. Яконовская

Тверской государственный технический университет, Россия

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИЗАЦИИ АНАЛИЗА ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ПО ДОБЫЧЕ ТОРФА

Регионы России обладают различной минерально-сырьевой базой, но практически везде в ее состав входит торф, который достаточно успешно используется в сельском хозяйстве и в пищевой промышленности. Традиционно торф использовался в отраслях топливо-энергетического и сельскохозяйственного производства. Однако в современных условиях рынка больше востребована сельскохозяйственная продукция на основе торфа, такая как: различные грунты, удобрения, получаемые с использованием глубокой химической переработки, кормовые добавки для животноводства, торфяная подстилка, стимуляторы роста растений, дрожжи, технические спирты и т.д.

Но, несмотря на широкий ассортимент продукции получаемой из торфа, предприятия по добыче такого комплексного, ценного химического сырья находятся в сложном, кризисном положении. Это связано со многими факторами как общекономического, так и технического характера. Для повышения инвестиционной активности торфодобывающих предприятий необходимо снизить сроки проведения стадий подготовительных работ на торфяном месторождении (рис. 1) [1].

Главной особенностью производства торфопродукции с глубокой переработкой является использование торфосырья с определенными геологическими и техническими характеристиками. Например, для получения биостимулятора роста растений на его основе требуется торфосырье с высоким содержанием гуминовых кислот. А это означает, что предприятие должно обладать запасами торфа нужного геологического качества, и объемы таких запасов должны быть точно рассчитаны (табл. 1).

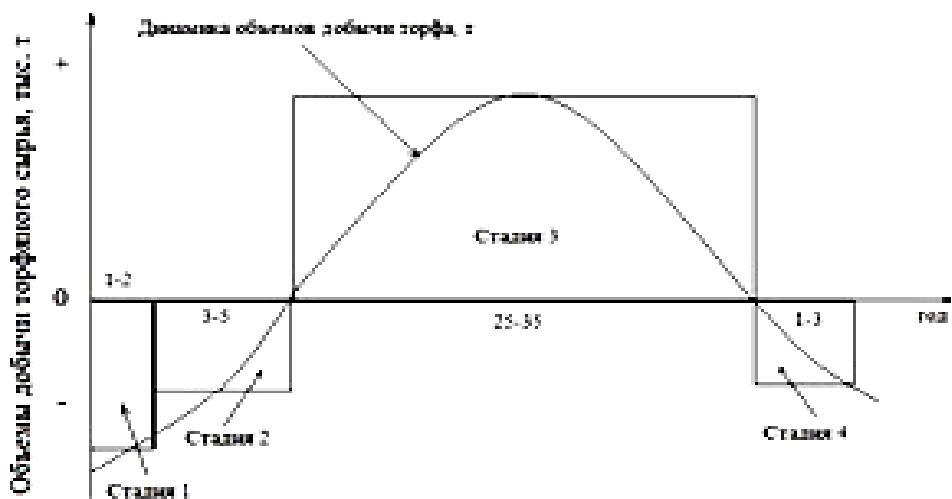


Рис. 1. Стадии жизненного цикла промышленного освоения месторождения торфа

На рисунке 1 стадия 1 (до 2 лет) – геологическая разведка, лабораторные исследования, опробование, подготовка паспорта месторождения и т.д., стадия 2 (3–5 лет) – строительство и подготовка месторождения к эксплуатации, стадия 3 (25–30 лет) – эксплуатация месторождения, стадия 4 (1–3 года) – рекультивация выработанного месторождения. Самой важной стадией развития торфопредприятия является первая, так как именно в этот период времени проводится огромный объем аналитической работы, от точности результатов которой зависит принятие экономически целесообразных решений связанных с дальнейшим развитием производства. Ввиду этого, первостепенной является задача информатизации геологоразведочных работ, а именно: повышение эффективности геологоразведочных работ, разработка актуальной модели месторождения, расчет объемов запасом торфяного сырья различного геологического качества и разработка ассортимента продукции на основе торфа.

Главной проблемой в автоматизации проектирования предприятий по добыче торфа является полное отсутствие методологического инструментария для всесторонней оценки объемов запасов торфяных ресурсов, учитывающего направления их промышленного использования и разработки ресурсосберегающих технологий добычи. Использование для этих целей широких возможностей геоинформационных систем (ГИС) поможет решить эту проблему, однако существенное ограничение на их применение накладывает их высочайшая стоимость (250–500 тыс. руб.) и необходимость доработки и усовершенствования для целей конкретного добывающего предприятия [3, 4]. Ввиду весьма низкой платежеспособности торфодобывающих производств, использование таких программ, как Micromine, K-MINE, Datamine, Maptek, Gemcom, довольно затруднительно. К тому же большая часть месторождений торфа была исследована еще в советское время и данные по ним собраны в Торфяном фонде Росгеологии до 1989 г., но в 2000 г. проводилась их переоценка, что привело к необходимости разработки геокадастров торфяных залежей по регионам РФ. Де-

тальную разведку осуществляли только для крупных месторождений торфа площадью свыше 1000 га, остальные исследованы рекогносцировочно. Однако в настоящее время большинство торфопредприятий ведут разработку небольших по площади месторождений до 500 га, исследованных слабо.

В тезисах представлены результаты построения 3D-модели торфяного месторождения «Межостровское» Тверской области, которое относится к разрабатываемому фонду и характеризуется следующими геологическими показателями: запасы торфа (15 853 тыс. т) и средней глубины залежи (2 м); сочетание различного видового состава торфяной залежи с преобладанием верхового. Оценка торфяных запасов проводится комплексным методом по категориям торфяных ресурсов: видовому составу торфа и погребенной древесины по 100 точкам геологического опробования. Каждая точка опробования отмечается изменчивостью видов торфяного сырья по глубине. Общее количество точек – 2150. Информация по распределению каждого вида торфа по глубинам и количеству горизонтов погребенной древесины в 100 точках опробования использовались при построении модели торфяного месторождения в программе Micromine 11.0. Основная проблема построения модели конкретного торфяного месторождения связана с определением границ видов и типов торфа, а также границ и количества слоев погребенной древесины, встречающихся в каждом месторождении торфа [2].

Таблица 1

Фрагмент базы распределения торфяного сырья по виду торфопродукции сельскохозяйственного назначения

| Продукция | A ^c , % | П, % | Виды торфяного сырья согласно требованиям ГОСТ на продукцию | | | | | | |
|--------------------------|--------------------|------|---|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | | R, % | | | | | | |
| | | | 1–5 | 6–11 | 12–16 | 17–21 | 22–26 | 16–20 | 32–36 |
| | | | B11 | B12 | B13 | B14 | P21 | H31 | H32 |
| Торфяной компост | 24–35 | 3–5 | | | - | - | - | + | + |
| Тепличный грунт | 16–23 | | + | + | - | - | - | - | - |
| Ростовой биостимулятор | 6–10 | 1–3 | + | + | - | - | - | - | - |
| Торфогуминовые удобрения | 11–15 | | - | - | - | - | + | + | + |

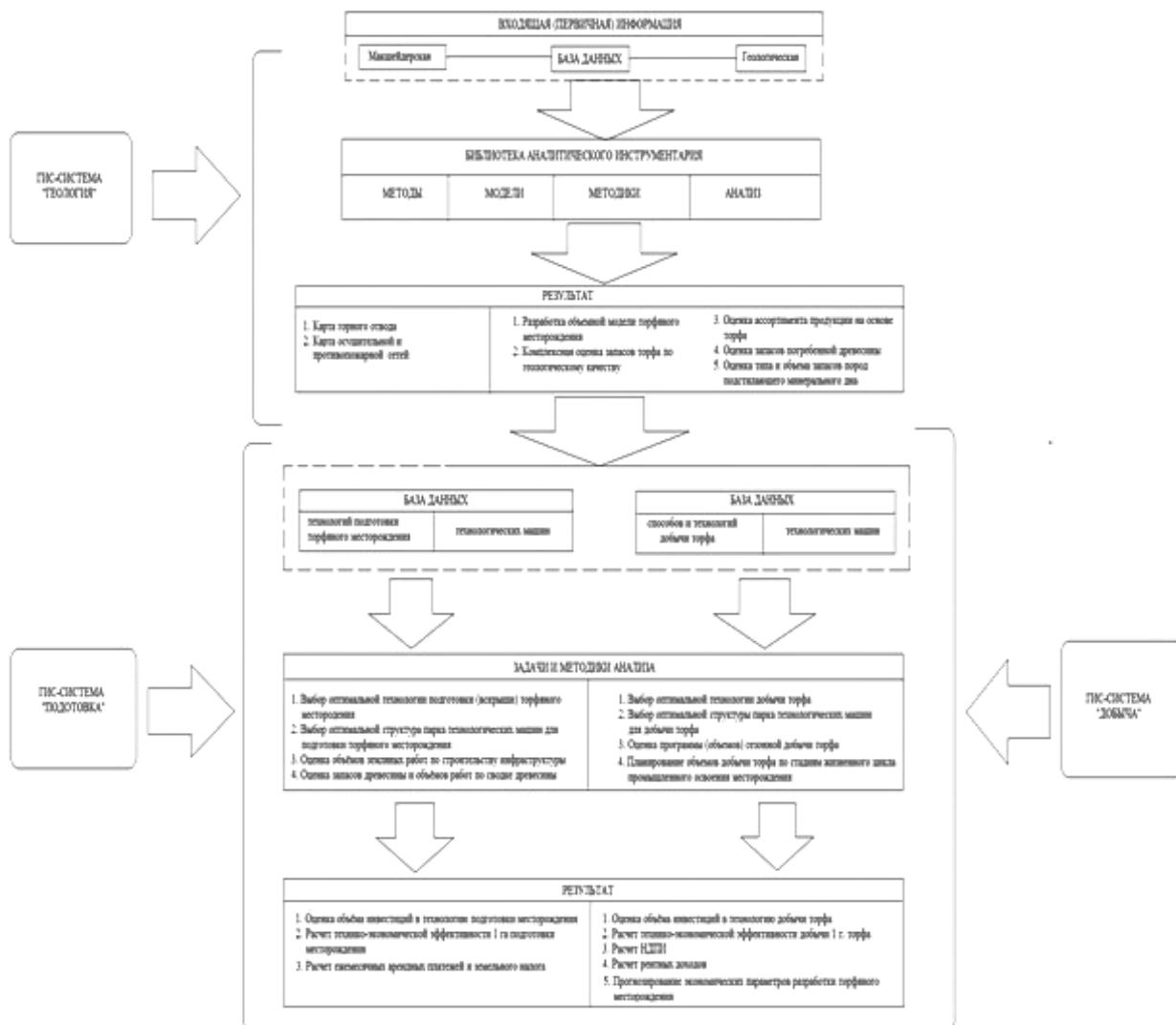
Примечание: A^c – зольность торфа; П – пнистость торфяной залежи; R – степень разложения торфа; «+» – торфяное сырье может использоваться; «-» – торфяное сырье не может использоваться; буквы В, П, Н – виды торфяного сырья (типы залежи: верховая, переходная, низинная).

Алгоритм построения модели торфяного месторождения Межостровское:

1. Оцифровка изолиний рельефа с указанием точек опробования и границ торфяной залежи.

2. Построение каркаса торфяной залежи.
3. Перенос точек – видов торфяного сырья.
4. Построение точек горизонтов погребенной древесины.
5. Построение каркасов – видов торфяного сырья.
6. Построение блочной 3D-модели торфяного месторождения.

Вся исходная макшайдерская и геологическая информация группируется в соответствующие базы данных (рис. 2), а затем анализируется в модуле ГИС-система «Геология». Полученные результаты используются в модулях ГИС-системы «Подготовка» и «Добыча», где проводится непосредственное планирование производственных процессов торфодобывающего предприятия, а именно: принимается решение по поиску оптимальной технологии разработки, структуры парка технологического оборудования, определяются первоочередные перспективные участки разработки торфа заданного качества, определяются объемы добычи торфа по стадиям жизненного цикла месторождения, приводятся технико-экономические расчеты по обоснованию эффективности инженерных решений.



Rис. 2. Связь модулей ГИС-систем

Существующие ГИС-технологии, бесспорно, дают возможность информатизировать анализ геологических данных и получить более эффективную их интерпретацию, существенно экономя время на принятие адекватного решения, но такие системы необходимо существенно дорабатывать под нужды конкретных отраслей и производств, учитывая технико-экономические условия работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов, А. В. Оценка этапов жизненного цикла разработки торфяного месторождения / Михайлов А. В., Жигульская А. И., Яконовская Т. Б. // Геология и минерально-сырьевые ресурсы Запада Восточно-Европейской платформы: проблемы изучения и рационального использования : материалы Международной научной конференции, посвященной 215-летию со дня рождения И. Домейко / редактор А. К. Карабанова. – Минск : Государственное научное учреждение «Институт природопользования Национальной академии наук Беларуси», 2017. – С. 196–199.
2. Жигульская, А. И. Новое оборудование и технологии комплексной безотходной добычи и переработки ресурсов торфяного месторождения : учебное пособие / Жигульская, А. И., Т. Б. Яконовская . – 2-е изд., перераб. и доп. – Тверь : ТГТУ, 2016. – 160 с.
3. Кузнецов, В. Н. Современные технологии разработки программного обеспечения / Кузнецов В. Н., Бородулин А. Н., Мартынов Д. В. // Перспективы развития Волжского региона : материалы Всероссийской заочной конференции. – Тверь : ТГТУ. – 1999. – С. 129–131
4. Ветров, А. Н. Компьютерные технологии работы с географическими данными : монография / Ветров А. Н., Борисов А. Л. – Тверь : ТГТУ. – 2017.– 196 с.

РАЗДЕЛ IV
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ЯЗЫКИ,
АВТОМАТЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

A.M. Маликов

*Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
Республика Таджикистан*

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СРЕДНЕМ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ
СУММАМИ ФУРЬЕ–ЭРМИТА**

В работе рассматривается задача о наилучшем приближении функций суммируемых с квадратом на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита. Получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина на множествах функций $L_{2,\rho}^{(r)}(R)$, связывающих величины наилучших приближений сверху через усредненные значения обобщенных модулей непрерывности m -го порядка, определяемые дифференциальными операторами второго порядка.

Пусть $L_{2,\rho} = L_{2,\rho}(R)$, где $R = (-\infty, +\infty)$, $\rho = \rho(x) = e^{-x^2}$ – пространство суммируемых на всей оси R вещественных функций f такие, что

$$\|f\|_{2,\rho} = \left(\int_R e^{-x^2} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Очевидно, что пространство $L_{2,\rho}$ со скалярным произведением

$$(f, g) := \int_R e^{-x^2} f(x)g(x)dx$$

и нормой $\|f\|_{L_{2,\rho}} := (f, f)^{1/2}$ является гильбертовым. Через P_n обозначим подпространство алгебраических полиномов степени не более n ,

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} := \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\rho} : p_{n-1} \in P_{n-1} \right\}$$

– величины наилучшего полиномиального приближения функции $f \in L_{2,\rho}$ элементами подпространства P_{n-1} . Хорошо известно [1], что любая функция $f \in L_{2,\rho}$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \quad (1)$$

где

$$H_k(x) := (-1)^k 2^{-k/2} (k!)^{-1/2} \pi^{-1/4} e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}),$$

$$c_k(f) = \int_R e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$$

– коэффициенты Фурье-Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$, а равенство в (1) понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$.

Если через $S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x)$ обозначить частичную сумму $(n-1)$ -го порядка ряда (1) функции $f \in L_{2,\rho}$, то

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

Рассмотрим оператор усреднения для функции $f \in L_{2,\rho}$:

$$T_t(f; x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x\sqrt{1-t^2} + ty) e^{-y^2} dy, |t| \leq 1, \quad (3)$$

для которой в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$ справедливо равенство [1]

$$T_t(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) (1-t^2)^{k/2} H_k(x). \quad (4)$$

Следуя [2], образуем аналоги конечных разностей следующими равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_t^1(f, x) &:= T_t(f, x) - f(x) = (T_t - E)f(x), \\ \Delta_t^m(f, x) &:= \Delta_t^1(\Delta_t^{m-1}(f, \cdot), x) = (T_t - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} T_t^k(f, x), \end{aligned} \quad (5)$$

где $m = 2, 3, \dots$, $T_t^k := T_t^1(T_t^{k-1})$, $T_t^1 := T_t$, $T_t^0 = E$, E – единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}$. Учитывая равенства (1) и (4) и воспользовавшись первым равенством (5), запишем

$$\Delta_t^1(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) ((1-t^2)^{k/2} - 1)^m H_k(x).$$

Применяя последовательно последнее равенство, получаем

$$\Delta_t^m(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) ((1-t^2)^{k/2} - 1)^m H_k(x), \quad (6)$$

откуда, используя равенство Парсеваля, имеем

$$\|\Delta_t^m(f, x)\|_{2,\rho}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} ((1-(1-t^2)^{k/2})^2)^m c_k^2(f).$$

С.Б. Вакарчук [2] для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}$ ввел в рассмотрение следующую обобщенную модуль непрерывности m -го порядка

$$\tilde{\omega}_m(f, \delta)_{2,\rho} := \sup \left\{ \|\Delta_t^m(f, \cdot)\|_{2,\rho}^2 : |t| \leq \delta \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) ((1-(1-\delta^2)^{k/2})^2)^m \right\}. \quad (7)$$

Пусть $L_{2,\rho}^{(r)} := L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R}) (r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\rho}^{(0)} \equiv L_{2,\rho})$ – множества функций $f \in L_{2,\rho}$, у которых производные порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны на любом

конечном интервале, а производные r -го порядка принадлежат пространству $L_{2,\rho}$. Всюду далее, ради краткости, полагаем

$$\alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1), \quad n \geq r, \quad n, r \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+(n \geq r), 0 < h \leq 1, \varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда при любом $h \in (0, 1]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r) \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{\frac{n-r-1}{2}} dt \right)^{1/p}} = \\ & = \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}]^{mp+1}} \right\}^{1/p}, \quad 0 < p \leq 2, n > r. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, из (9) при $h = \sqrt{2/(n-r)}, n > r, n, r \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^{(r)} \\ f \notin P_r}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r) \int_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{\frac{n-r-1}{2}} dt \right)^{1/p}} = \\ & = \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \left\{ \frac{mp+1}{\left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r} \right)^{(n-r)/2} \right]^{mp+1}} \right\}^{1/p} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{\left(1 - e^{-1} \right)^{m+1/p}} \end{aligned} \quad (10)$$

В свою очередь из равенства (10) при $p = 1/m, m \in \mathbb{N}$ следует равенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_{2,\rho}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r) \int_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \tilde{\omega}_m^{1/m}(f, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{\frac{n-r-1}{2}} dt \right)^m} = \frac{2^m}{\left(1 - e^{-1} \right)^{2m}}. \quad (11)$$

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n \geq r, 0 < h \leq 1$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\frac{1}{h} \int_0^h \tilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_{2,\rho} dt \right)^m} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{h} \int_0^h (1-t^2)^{(n-r)/2} dt \right)^m}. \quad (12)$$

В частности, при $h=1$ имеем

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int_0^1 \tilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_{2,\rho} dt \right)^m} = \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n-r}{n-r+1} \cdot \frac{\Gamma((n-r)/2)}{\Gamma((n-r+1)/2)} \right)^{-m},$$

где $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера.

Отметим, что аналогичные экстремальные задачи для обобщенных модулей непрерывности ранее рассматривались в работах [3–7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рафальсон, С. З. О приближении функций в среднем суммами Фурье-Эрмита / С. З. Рафальсон // Известия вузов. Математика. – 1968. – № 7. – С. 78–84.
2. Вакарчук, С. Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов / С. Б. Вакарчук // Математические заметки. – 2014. – Т. 95, № 5. – С. 666–684.
3. Шабозов, М. Ш. Неравенства Джексона-Стеккина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций / М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21. – № 4. – С. 315–331.
4. Шабозов, М. Ш. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве L_2 на отрезке $[0,1]$ со степенным весом и значение поперечников некоторых классов функций / М. Ш. Шабозов // Известия ТулГУ. – 2015. – № 4. – С. 93–108.
5. Тухлиев, К. Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье-Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов / К. Тухлиев // Чебышевский сборник. – 2016. – Т.17, Вып. 4 (60). – С. 141–156.
6. Тухлиев, К. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье-Чебышёва в пространстве L_2 . I. / К. Тухлиев / К. Тухлиев // Известия АН РТ, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2013. – №4 (153). – С. 33–46.
7. Маликов, А. М. Приближение функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита / А. М. Маликов // Труды международной летней математической Школы-Конференции С. Б. Стеккина по теории функций. РТ (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.). – Душанбе, 2016. – С. 161–166.

Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов
Вологодский государственный университет, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ТРАЕКТОРИЙ ТРЕХМЕРНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ*

Доклад посвящен исследованию ограниченных траекторий автономной системы следующего вида:

$$x'(t) = \nabla f(x(t)) + h(x(t)), \quad x(t) \in R^3. \quad (1)$$

Здесь ∇f – градиент гладкой функции $f : R^3 \mapsto R^1$. Предполагается, что f положительно однородна порядка $m > 2$, т.е. $f(\lambda x) \equiv \lambda^m f(x)$ при любом $\lambda > 0$, кроме того, $\nabla f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Отображение $h : R^3 \mapsto R^3$ непрерывно и удовлетворяет условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{1-m} |h(x)| = 0. \quad (2)$$

Ограниченные траектории систем уравнений вида (1) исследованы в работах [1, 2]. В связи с результатами указанных работ представляет интерес вопрос о построении таких систем, у которых ∇f имеет нулевое вращение $\gamma(\nabla f) = 0$ на единичной сфере $|x|=1$ и за счет выбора отображения h существуют нестационарные ограниченные траектории. Данный вопрос актуален тем, что автономная система (1) в общем является гиперболической: одна часть траекторий уходит в бесконечность при возрастании t , а другая часть траекторий уходит в бесконечность при убывании t . В общеизвестных работах существование ограниченных траекторий исследуется в основном в тех случаях, когда нет траекторий, уходящих в бесконечность при убывании или возрастании t . Например, в системе Лоренца нет траекторий, уходящих в бесконечность при возрастании t , и существует ограниченная хаотическая траектория.

В настоящей работе построен пример автономной системы вида (1), у которой $\gamma(\nabla f) = 0$, и имеющей нестационарные замкнутые ограниченные траектории. Исследуя устойчивые и неустойчивые замкнутые траектории, выявлены поверхности, состоящие из незамкнутых ограниченных траекторий. Приводятся графические иллюстрации ограниченных траекторий, полученные в результате численного решения построенной системы с применением пакета MatLab.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-47-350001р-а, № 19-01-00103а).

Решением автономной системы (1) называют непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, удовлетворяющую уравнениям системы (1). Траекторией решения $x(t)$ называют множество (кривую) $Tx = \{x(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$. Решение $x(t)$ называют ограниченным, если оно определено и ограничено на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Траекторию ограниченного решения называют ограниченной траекторией.

Построим автономную систему (1), задавая f и h следующими формулами:

$$f(x) = x_3(x_3^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad (3)$$

$$h(x) = 0, \text{ если } |x| \geq 1, \quad h(x) = -\nabla f(x) + P(x), \text{ если } |x| < 1, \quad (4)$$

где

$$P(x) = (P_1(x), P_2(x), P_3(x)),$$

$$P_1(x) = -2x_3(x_1 \cos 2\pi(1 - |x|^2) + x_2 \sin 2\pi(1 - |x|^2)),$$

$$P_2(x) = -2x_3(-x_1 \sin 2\pi(1 - |x|^2) + x_1 \cos 2\pi(1 - |x|^2)), \quad (5)$$

$$P_3(x) = 3x_3^2 - x_1^2 - x_2^2.$$

Если f и h заданы формулами (3)–(5), то легко проверить, что следующие вектор-функции являются периодическими решениями автономной системы (1):

$$x^+(t) = \left(\frac{3}{4} \cos \frac{2\sqrt{3}}{4}t, \frac{3}{4} \sin \frac{2\sqrt{3}}{4}t, \frac{\sqrt{3}}{4} \right),$$

$$x^-(t) = \left(\frac{3}{4} \sin \frac{2\sqrt{3}}{4}t, \frac{3}{4} \cos \frac{2\sqrt{3}}{4}t, -\frac{\sqrt{3}}{4} \right),$$

$$y^+(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \sin \frac{t}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \frac{t}{2}, \frac{1}{4} \right),$$

$$y^-(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \frac{t}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \frac{t}{2}, -\frac{1}{4} \right).$$

Их траектории Tx^+ , Tx^- , Ty^+ , Ty^- – окружности радиусов $3/4$ и $\sqrt{3}/4$ с центрами в точках $(0, 0, \pm\sqrt{3}/4)$, $(0, 0, \pm 1/4)$ и параллельны плоскости Ox_1x_2 .

Численное решение построенной автономной системы с применением пакета MatLab показывает, что траектории Ty^- и Ty^+ устойчивы при $t > 0$ и $t < 0$ соответственно, а траектории Tx^+ и Tx^- – неустойчивы. Для того чтобы убедиться в этом, вводя обозначение $w = x_1^2 + x_2^2$ систему (1) в области $|x| < 1$, сведем к системе

$$w' = -4wx_3 \cos 2\pi(1 - w - x_3^2), \quad x_3' = 3x_3^2 - w. \quad (6)$$

Автономную систему (6) рассмотрим в области $G = \{(w, x_3) : 0 < w < 1 - x_3^2\}$. В области G автономная система (6) имеет четыре стационарные точки:

$$A^+ \left(\frac{9}{16}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \quad A^- \left(\frac{9}{16}, -\frac{\sqrt{3}}{4} \right), \quad B^+ \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4} \right), \quad B^- \left(\frac{3}{16}, -\frac{1}{4} \right).$$

Эти точки соответствуют траекториям Tx^+ , Tx^- , Ty^+ , Ty^- . В окрестности каждой стационарной точки производя линеаризацию автономной системы (6) определим тип каждой стационарной точки:

- 1) B^- асимптотически устойчива при $t > 0$;
- 2) B^+ асимптотически устойчива при $t < 0$;
- 3) A^+ , A^- – седловые точки.

Более того,

- 4) имеются ограниченные траектории, соединяющие между собой точки B^- и B^+ , A^- и A^+ , A^+ и B^+ , A^- и B^- .

Фазовый портрет траекторий автономной системы (6) в окрестности стационарных точек представлен на рисунке 1.

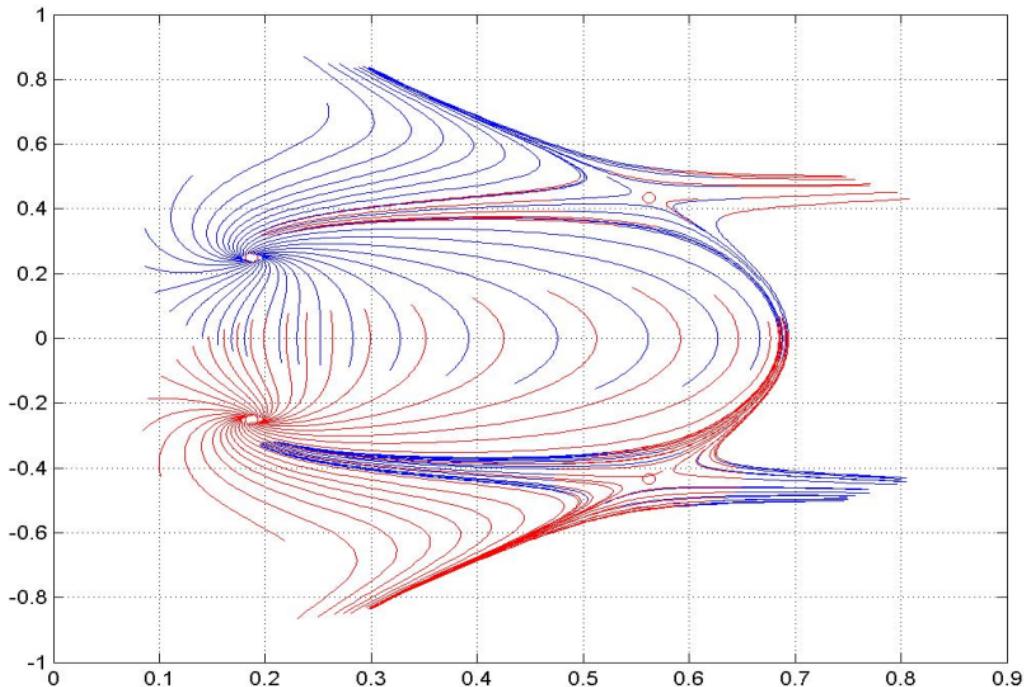


Рис. 1. Фазовый портрет траекторий автономной системы (6)

Из 1–3 следует, что траектории Ty^- и Ty^+ устойчивы при $t > 0$ и $t < 0$ соответственно, траектории Tx^+ и Tx^- – неустойчивы. Из 4 вытекает существование ограниченных траекторий автономной системы (1), соединяющих между собой соответствующие пары замкнутых траекторий. Каждая такая

траектория, если вращать ее вокруг оси Ox_3 , порождает поверхность, состоящую из незамкнутых ограниченных траекторий автономной системы (1). Графические иллюстрации этих поверхностей представлены в ниже приведенном рисунке 2.

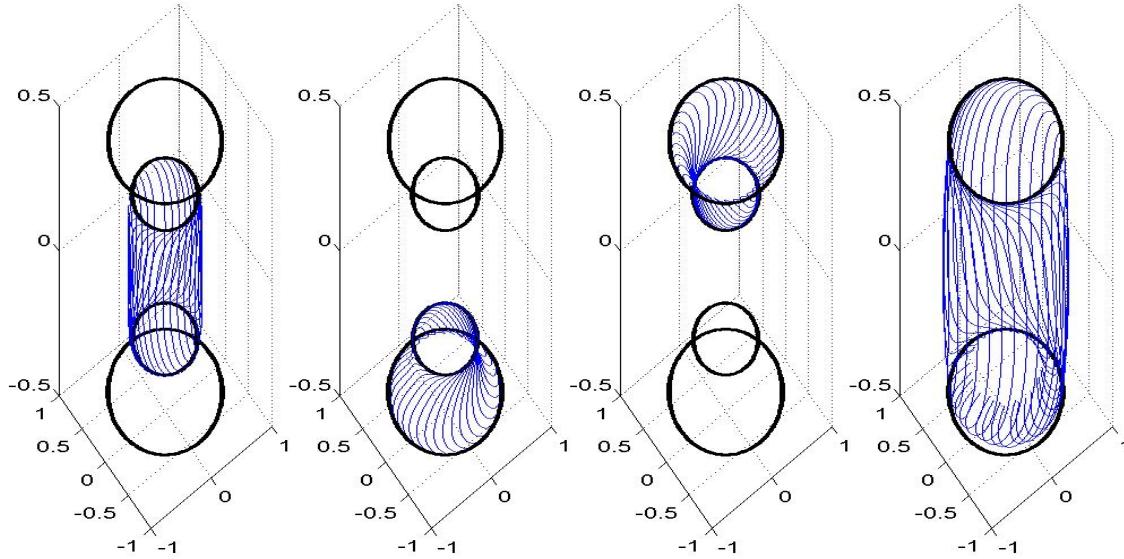


Рис. 2. Поверхности, состоящие из ограниченных траекторий автономной системы (1)

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухамадиев, Э. Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Доклады РАН. – 1996. – Т. 351, № 5. – С. 596–598.
2. Мухамадиев, Э. Число Морса направляющих функций и рекуррентные движения динамических систем / Э. Мухамадиев // Известия РАН. Серия МММИУ. – Самара, РАН. – 2000. – Т. 4, № 4. – С. 37–66.

B.B. Мухин

Череповецкий государственный университет, Россия

ТОПОЛОГИИ НА УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОБЕРТЫВАЮЩИХ ПОЛУГРУППАХ N-АРНЫХ ПОЛУГРУПП

ВВЕДЕНИЕ. В работе [1] показано, что для каждой n -арной полугруппы $\langle X; [] \rangle$ существует бинарная полугруппа $\langle Y; * \rangle$ такая, что $X \subseteq Y$, $x_1 * \dots * x_n = [x_1 \dots x_n]$ и Y есть объединение попарно непересекающихся множеств $X, X * X, \dots, \underbrace{X * \dots * X}_{n-1}$. Такие бинарные полугруппы называются

универсальными обертывающими полугруппами n -арных полугрупп. Построенная в [1] полугруппа $\langle S; \cdot \rangle$ является универсальной обертывающей полу-

группой для $\langle X; [] \rangle$, она обладает уникальными свойствами, ее называют свободной обертывающей полугруппой для $\langle X; [] \rangle$. В работе [2] для n-арной полугруппы, наделенной топологией, на ее свободной обертывающей полугруппе строится топология исходя из заданной топологии на n-арной полугруппе. Используя эту конструкцию, в [3] на произвольной универсальной обертывающей полугруппе построена топология, связанная с топологией на заданной n-арной полугруппе.

В данной работе предложена новая конструкция топологизации универсальной обертывающей полугруппы для n-арной полугруппы с топологией. Рассмотрены свойства построенной топологии, приведен пример.

Напомним, что непустое множество X с ассоциативной n-арной операцией $[] : X^n \mapsto X$ называется n-арной полугруппой. Последовательность x_1, \dots, x_n элементов X будем обозначать x_1^n , а результат n-арной операции $[]$ на этой последовательности через $[x_1^n]$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Пусть τ – топология на n-арной полугруппе $\langle X; [] \rangle$ и τ_S – топология на ее свободной обертывающей полугруппе $\langle S; \cdot \rangle$, построенная в соответствии с конструкцией из [2]. Как правило, для n-арной полугруппы могут существовать неизоморфные универсальные обертывающие полугруппы.

Пусть $\langle Y; * \rangle$ – универсальная обертывающая полугруппа для $\langle X; [] \rangle$. Отображение $i(x) = x$, ($x \in X$) из $\langle X; [] \rangle$ в $\langle Y; * \rangle$ является гомоморфизмом n-арных полугрупп. Из теоремы 3 работы [4] следует, что гомоморфизм $i(x)$ однозначно продолжает гомоморфизм бинарных полугрупп g из $\langle S; \cdot \rangle$ в $\langle Y; * \rangle$, причем $g(x_1 * \dots * x_k) = x_1 * \dots * x_k$, где $x_1^k \in X^k, k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Пусть τ_Y – топология на Y , определяемая отображением g , то есть сильнейшая топология на Y , для которой непрерывно отображение g .

ТЕОРЕМА 1. *Множества $X, X * X, \dots, \underbrace{X * \dots * X}_{n-1}$ являются открыто-замкнутыми подмножествами Y в топологии τ_Y .*

*Сдвиги $y \mapsto a * y$ и $y \mapsto y * a$ в $\langle Y; * \rangle$ являются непрерывными отображениями в топологии τ_Y для каждого $a \in Y$.*

n-арная полугруппа $\langle X; [] \rangle$, наделенная топологией, называется топологической n-арной полугруппой, если n-арная операция $[]$ непрерывна по совокупности аргументов.

ТЕОРЕМА 2. *Если алгебра $\langle X; [] \rangle$, наделенная топологией τ , является топологической n-арной полугруппой, то сужение топологии τ_Y на Y совпадает с топологией τ .*

ПРИМЕР. На множестве $X = (1, +\infty)$ тернарную операцию $[]$ определим следующим образом: $[x_1^3] = x_1 + x_2 + x_3$, где $x_1, x_2, x_3 \in (1, +\infty)$. Топологию τ на X зададим как сумму топологии τ_1 на $(1, 2]$, дискретной топологии на

$(2, 3]$ и обычной топологии на $(3, +\infty)$, где множества вида $(a, b], 1 \leq a \leq b \leq 2$ образуют базу топологии τ_1 . В результате получим топологическую тернарную полугруппу.

Для нее свободная обертывающая полугруппа изоморфна полугруппе $\langle S; \cdot \rangle$, где $S = X \cup X_1$, $X_1 = \{(a, b) \in X^2 | a + b \leq 4\} \cup \{(c, c) | c > 2\}$. Бинарная операция \cdot на S определяется следующим образом:

$$\text{для } x, y \in X \quad x \cdot y = \begin{cases} (x, y), & \text{если } x + y \leq 4, \\ \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) & \text{если } x + y > 4; \end{cases}$$

$$\text{для } (a, b) \text{ и } (c, d) \text{ из } X_1 \quad (a, b) \cdot (c, d) = \left(\frac{a+b+c+d}{2}, \frac{a+b+c+d}{2}\right);$$

$$\text{для } (a, b) \in X_1, x \in X \quad (a, b) \cdot x = x \cdot (a, b) = a + b + x.$$

Топология τ_S на S есть сумма топологии τ на X и топологий τ_1, τ_2, τ_3 соответственно на подмножествах B_1, B_2, B_3 множества X , где

$$B_1 = \{(a, b) \in X^2 | a + b \leq 4\},$$

$$B_2 = \{(c, c) \in X^2 | 2 < c \leq 3\},$$

$$B_3 = \{(c, c) \in X^2 | 3 < c\},$$

$$\tau_1 = \{C \subset B_1 | C \in \tau \times \tau\},$$

τ_2 – топология на B_2 , для которой множества вида $\{(c, c) \in B_2 | 2 \leq a < c \leq b \leq 3\}$ образуют базу этой топологии,

τ_3 – топология на B_3 , для которой множества вида $\{(c, c) \in B_3 | 3 < a < c < b\}$ образуют базу этой топологии.

Заметим, что бинарная полугруппа $\langle S; \cdot \rangle$ с топологией τ_S является топологической полугруппой.

Если на рассматриваемом множестве X рассмотреть операцию сложения двух чисел (ее будем по традиции обозначать символом $+$), то алгебра $\langle X; + \rangle$ будет обертывающей полугруппой для тернарной полугруппы $\langle X; [] \rangle$, рассмотренной выше. Легко убедиться в том, что полугруппа $\langle X; + \rangle$ с рассмотренной выше топологией τ на X , не является топологической полугруппой, более того, сдвиг $x \mapsto x + 1,5$ ($x \in X$) не является непрерывным отображением.

Бинарная полугруппа $Y = X \cup (2, +\infty) \times \{1\}$ с операцией $*$, определенной следующим образом: $x * y = (x + y, 1)$, $(x + 1, 1) * (y + 1, 1) = (x + y + 2, 1)$, $(x + 1, 1) * y = y * (x + 1, 1) = x + y + 1$, где $x, y \in X$, является универсальной обертывающей полугруппой для тернарной полугруппы $\langle X; [] \rangle = (1, +\infty)$.

Топология τ_Y , построенная на Y в соответствии с предложенной выше конструкцией, есть сумма топологии τ на X и топологии τ_1 на $(2, +\infty) \times \{1\}$, базу которой образуют множества вида: $(a, b] \times \{1\}$ и $(c, d) \times \{1\}$, где $2 < a \leq b \leq 4 \leq d$.

Пусть n -арная полугруппа $\langle X; [] \rangle$, наделенная топологией τ , удовлетворяет условию (A): она является топологической n -арной полугруппой, для нее существует универсальная обертывающая полугруппа $\langle Y; * \rangle$ с сокращениями и для некоторого $p \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ трансляция $x \mapsto [c_1^p x c_{p+1}^{n-1}]$ есть открытое отображение для каждой последовательности $c_1^{n-1} \in X^{n-1}$.

В теореме 5 из работы [5] показано, что если n -арная полугруппа $\langle X; [] \rangle$, наделенная топологией τ , удовлетворяет условию (A), то семейство $\{A_1 * A_2 * \dots * A_k | A_i \in \tau, i = 1, 2, \dots, k, k = 1, 2, \dots, n - 1\}$ является базой топологии τ_1 на Y , причем $\langle Y; * \rangle$, наделенная топологией τ_1 , является топологической полугруппой.

ТЕОРЕМА 3. *Если n -арная полугруппа $\langle X; [] \rangle$, наделенная топологией τ , удовлетворяет условию (A), то топология τ_1 совпадает с топологией τ_Y , построенной на Y в соответствии с предложенной выше конструкцией.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Čupona, G. On representation of n -associatives into semigroups / Čupona G., Celakoski N. // MANU. Contributions. – VR. 2, 1974. – P. 23–34.
2. Dudek, W. A. Free covering semigroups of topological n -ary semigroups / Dudek W. A, Mukhin V.V. // Quasigroups and Related Systems. – 2014. – № 22. – P. 31–34.
3. Dudek, W. A. Covering semigroups of topological n -ary semigroups / Dudek W. A., Mukhin V. V. // Quasigroups and Relates Systems. – 2017. – № 25. – P. 51–58.
4. Dudek, W. A. On the extensions of continuous homomorphisms of topological n -ary semigroups / Dudek W. A, Mukhin V. V. // Quasigroups and Relates Systems. – 2018. – № 26. – P. 211–216.
5. Mukhin, V. V. On topological n -semigroups / Mukhin V. V. // Quasigroups and Related systems 4 (1997). Institute mathematics Academy of Science. – Moldova Printed in Poland. – December 1999. – P. 39–49.

Олими А.Г. (Олимов А.Г.)

*Худжандский государственный университет
имени Б. Гафурова, республика Таджикистан*

ФОРМУЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ЗАДАЧА ТИПА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Рассматривается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с сингулярной точкой. Найдено интегральное представление решений указанного уравнения. Доказана единственность решения задачи типа линейного сопряжения для рассматриваемого уравнения и получена формула, представляющая это решение в явном виде.

Пусть Γ обозначает интервал (a, b) вещественной числовой оси, c есть точка этого интервала, далее $\Gamma_c = \Gamma \setminus \{c\}$. На множестве Γ_c рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} y''' + \frac{3p(x)}{|x-c|}y'' + \frac{r(x)}{(x-c)^2}y' + \frac{s(x)}{|x-c|^3}y &= \frac{f(x)}{|x-c|^3}, \\ y''' + \frac{3p(x)}{|x-c|}y'' + \frac{r(x)}{(x-c)^2}y' + \frac{s(x)}{|x-c|^3}y &= \frac{f(x)}{|x-c|^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p(x)$, $r(x)$, $s(x)$ и $f(x)$ – известные, а $y(x)$ – искомая функция.

Отметим, что проблеме нахождения интегральных представлений решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго и высшего порядков с сингулярной или сверхсингулярной точкой, изучения их свойств и поведения решений в окрестности особой точки, а также выяснению постановки задач для них посвящен ряд работ, например [1–6].

В настоящем сообщении для уравнения (1) доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть в уравнении (1):

1) $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$, $r(x)$, $r'(x)$, $s(x)$ и $f(x)$ – непрерывны на $\bar{\Gamma}$, кроме, быть может, точки c , в которой могут иметь разрыв первого рода, а также выполняются неравенства $p(c-0) < -2$, $p(c+0) > 2$;

2) функции

$$\begin{aligned} \Omega_{1,c}^{1,-}(x) &= 3(c-x)p'(x) + 3p(x) + 3p^2(x) - r(x), \\ \Omega_{1,c}^{2,-}(x) &= (c-x)^2 p''(x) + (3p(x) + 2)(c-x)p'(x) + \\ &\quad + 2p(x) + 3p^2(x) + p^3(x) - s(x) \end{aligned}$$

стремятся к нулю соответственно асимптотическому равенству

$$\Omega_{1,c}^{1,-}(x) = o\left((c-x)^{\delta_1^-}\right), \quad \Omega_{1,c}^{2,-}(x) = o\left((c-x)^{\delta_2^-}\right), \quad \delta_1^-, \delta_2^- > 2$$

при $x \rightarrow c - 0$;

3) функции

$$\begin{aligned} \Omega_{1,c}^{1,+}(x) &= 3(x-c)p'(x) - 3p(x) + 3p^2(x) - r(x), \\ \Omega_{1,c}^{2,+}(x) &= (x-c)^2 p''(x) + (3p(x) - 2)(x-c)p'(x) + \\ &\quad + 2p(x) - 3p^2(x) + p^3(x) - s(x), \end{aligned}$$

стремятся к нулю соответственно асимптотическому равенству

$$\Omega_{1,c}^{1,+}(x) = o\left((x-c)^{\delta_1^+}\right), \quad \Omega_{1,c}^{2,+}(x) = o\left((x-c)^{\delta_2^+}\right), \quad \delta_1^+, \delta_2^+ > 2$$

при $x \rightarrow c + 0$; $\Omega_{1,c}^{1,-}(x) = o\left((c-x)^{\delta_1^-}\right)$, $\Omega_{1,c}^{2,-}(x) = o\left((c-x)^{\delta_2^-}\right)$, $\delta_1^-, \delta_2^- > 2$

при $x \rightarrow c - 0$;

$$\Omega_{1,c}^{1,-}(x) = o\left((c-x)^{\delta_1^-}\right), \quad \Omega_{1,c}^{2,-}(x) = o\left((c-x)^{\delta_2^-}\right), \quad \delta_1^-, \delta_2^- > 2$$

при $x \rightarrow c + 0$.

Тогда общее решение уравнения (1) из класса $C^3(\Gamma_c)$ выражается формулой

$$y(x) = \begin{cases} Q_{1,c}^-(p(x), r(x), s(x), f(x), c_{10}, c_{11}, c_{12}), & a < x < c, \\ Q_{1,c}^+(p(x), r(x), s(x), f(x), c_{20}, c_{21}, c_{22}), & c < x < b, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{1,c}^-(p(x), r(x), s(x), f(x), c_{10}, c_{11}, c_{12}) &= \\ &= (c-x)^{p(c-0)} \exp(-w_{p,c}^{1,-}) \left\{ K_{1,c}^-(p(x), f(x), c_{10}, c_{11}, c_{12}) - \right. \\ &\quad \left. - \int_x^c \Gamma_{1,c}^-(x, \xi) K_{1,c}^-(p(\xi), f(\xi), c_{10}, c_{11}, c_{12}) d\xi \right\}, \\ Q_{1,c}^+(p(x), r(x), s(x), f(x), c_{20}, c_{21}, c_{22}) &= \\ &= (x-c)^{-p(c+0)} \exp(-w_{p,c}^{1,+}) \left\{ \int_c^x \Gamma_{1,c}^+(x, \xi) K_{1,c}^+(p(\xi), f(\xi), c_{20}, c_{21}, c_{22}) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + K_{1,c}^+(p(x), f(x), c_{20}, c_{21}, c_{22}) \right\}, \end{aligned}$$

$$K_{1,c}^-(p(x), f(x), c_{10}, c_{11}, c_{12}) = \frac{1}{2} c_{12} (c-x)^2 + c_{11} (c-x) + c_{10} -$$

$$-\int_x^c \frac{(x-\xi)^2}{2} f(\xi) (c-\xi)^{-p(c-0)-3} \exp(w_{p,c}^{1,-}(\xi)) d\xi,$$

$$K_{1,c}^+(p(x), f(x), c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \frac{1}{2} c_{22} (x-c)^2 + c_{21} (x-c) + c_{20} +$$

$$+\int_c^x \frac{(x-\xi)^2}{2} f(\xi) (\xi-c)^{p(c+0)-3} \exp(w_{p,c}^{1,+}(\xi)) d\xi,$$

$$w_{p,c}^{1,-}(x) = \int_x^c \frac{p(c-0) - p(t)}{c-t} dt, \quad w_{p,c}^{1,+}(x) = \int_c^x \frac{p(t) - p(c+0)}{t-c} dt,$$

$\Gamma_{a,c}^-(x, \xi)$, $\Gamma_{a,c}^+(x, \xi)$ – резольвента, соответственно следующих интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью

$$\varphi^-(x) + \int_x^c \left\{ (x-\xi)(c-\xi) \Omega_{1,c}^{1,-}(\xi) - \frac{(x-\xi)^2}{2} [(c-\xi) \Omega_{1,c}^{1,-}(\xi) + (p(\xi)+2) \Omega_{1,c}^{1,-}(\xi) - \Omega_{1,c}^{2,-}(\xi)] \right\} (c-\xi)^{-3} \varphi^-(\xi) d\xi =$$

$$= K_{1,c}^-(p(x), f(x), c_{10}, c_{11}, c_{12}), \quad x \in \bar{\Gamma}_1,$$

$$\varphi^+(x) - \int_c^x \left\{ (x-\xi)(\xi-c) \Omega_{1,c}^{1,+}(\xi) - \frac{(x-\xi)^2}{2} [(\xi-c) \Omega_{1,c}^{1,+}(\xi) + (p(\xi)-2) \Omega_{1,c}^{1,+}(\xi) - \Omega_{1,c}^{2,+}(\xi)] \right\} (\xi-c)^{-3} \varphi^+(\xi) d\xi =$$

$$= K_{1,c}^+(p(x), f(x), c_{20}, c_{21}, c_{22}), \quad x \in \bar{\Gamma}_2,$$

$$\varphi^-(x) = (c-x)^{-p(c-0)} \exp(w_{p,c}^{1,-}(x)) y(x),$$

$$\varphi^+(x) = (x-c)^{p(c+0)} \exp(w_{p,c}^{1,+}(x)) y(x),$$

c_{kj} , $k=1, 2$, $j=0, 1, 2$ – произвольные постоянные.

Замечание 1. Пусть в теореме 1 вместо условия $p(c-0) < -2$, $p(c+0) > 2$ выполняется одно из условий

$$p(c-0) \geq -2, \quad p(c+0) > 2;$$

$$p(c-0) < -2, \quad p(c+0) \leq 2;$$

$$p(c-0) \geq -2, \quad p(c+0) \leq 2,$$

а функция $f(x)$ стремиться к нулю при $x \rightarrow c \pm 0$ с соответствующим асимптотическим поведением. Тогда заключение теоремы опять имеет место.

Замечание 2. Из формулы (2) вытекает, что поведение решений уравнения (1) в окрестности точки c зависит от знака чисел $p(c-0)$ и $p(c+0)$. При $x \rightarrow c-0$ все решения стремятся к нулю, в случае $p(c-0) > 0$; к бесконечности, в случае $p(c-0) < 0$. При $x \rightarrow c+0$ все решения стремятся к бесконечности в случае $p(c+0) > 0$; к нулю в случае $p(c+0) < 0$. В окрестности точки c порядок решений определяется следующими равенствами:

$$y(x) = o\left((c-x)^{p(c-0)}\right) \text{ при } x \rightarrow c-0, \text{ в случае } p(c-0) > 0;$$

$$y(x) = O\left((c-x)^{p(c-0)}\right) \text{ при } x \rightarrow c-0, \text{ в случае } p(c-0) < 0;$$

$$y(x) = O\left((x-c)^{-p(c+0)}\right) \text{ при } x \rightarrow c+0, \text{ в случае } p(c+0) > 0;$$

$$y(x) = o\left((x-c)^{-p(c+0)}\right) \text{ при } x \rightarrow c+0, \text{ в случае } p(c+0) < 0.$$

Замечание 3. Из формулы (2) следует, что решения уравнения (1) подчиняются характеристическим равенствам вида

$$\begin{cases} \left[(c-x)^{-p(c-0)} B_{1,c}^j y(x) \right]_{x=c-0} = (-1)^j c_{1j} \\ \left[(x-c)^{p(c+0)} B_{1,c}^j y(x) \right]_{x=c+0} = c_{2j} \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \quad (3)$$

$$\text{где } B_{1,c}^0 y \equiv y, \quad B_{1,c}^1 y \equiv y' + \frac{p(x)}{|x-c|} y, \quad B_{1,c}^2 y = B_{1,c}(B_{1,c} y).$$

С помощью представления (2) и его формул обращения, то есть равенства (3), исследована следующая задача с условиями в сингулярной точке:

Задача типа линейного сопряжения. При выполнении условий теоремы 1 найти решение уравнения (1) из класса $C^3(\Gamma_c)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^2 b_{kj} \left[(c-x)^{-p(c-0)} B_{1,c}^j y(x) \right]_{x=c-0} + \\ & + \sum_{j=3}^5 b_{kj} \left[(x-c)^{p(c+0)} B_{1,c}^{j-3} y(x) \right]_{x=c+0} = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad (4)$$

где d_k , b_{kj} , $j = 0, 1, \dots, 5$ – заданные числа такие, что определитель $\Delta = \left| b_{kj} \right|_{\substack{k=1,2,\dots,6 \\ j=0,1,\dots,5}}$ не равен нулю. Доказано следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, задача типа линейного сопряжения для уравнения (1) имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y(x) = \begin{cases} Q_{1,c}^-(p(x), r(x), s(x), f(x), \frac{\Delta_{10}}{\Delta}, \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \frac{\Delta_{12}}{\Delta}), & a < x < c, \\ Q_{1,c}^+(p(x), r(x), s(x), f(x), \frac{\Delta_{20}}{\Delta}, \frac{\Delta_{21}}{\Delta}, \frac{\Delta_{22}}{\Delta}), & c < x < b, \end{cases}$$

где определители Δ_{1j} и Δ_{2j} получаются из определителя Δ заменой, соответственно j и $j+3$ -го столбцов, столбцом правой части системы (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов, Н. Интегральные представления для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной и суперсингулярной точкой / Н. Раджабов // Доклад АН Республики Таджикистан. 2000. – Т. XLIII, № 3. – С. 33–39.
2. Раджабов, Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков со сверхсингулярной точкой / Н. Раджабов // Известия АН Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических и геологических наук. – Душанбе, 1994. – № 1–2 (81). – С. 4–9.
3. Раджабов, Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной и суперсингулярной точкой / Н. Раджабов // Доклад АН Республики Таджикистан. – 1998. – Т. XLII, № 4 б. – С. 31–34.
4. Олимов, А. Г. Интегральное представление, задача Коши-Рикье и типа линейного сопряжения для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сверхсингулярной точкой / А. Г. Олимов, М. Я. Дадоджанова // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. Душанбе : Сино, 2016. – 1/1 (192). – С. 88–93.
5. Олимов, А. Г. Интегральное представление общего решения и задача типа Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с правой граничной сингулярной точкой / А. Г. Олимов, О. Солихов // Современные задачи математики и их приложения : материалы международной научно-теоретической конференции, посвященной 70-летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата (Душанбе, 25–26 сентября 2018 г.). – Душанбе : ТНУ, 2018. – С. 142–147.
6. Олими, А. Г. (Олимов А. Г.) Интегральное представление общего решения и задача типа Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с левой сингулярной точкой / А. Г. Олимов // Материалы республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества», посвященной 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан (Худжанд, 26–27 октября 2018 г.). – Худжанд : ХГУ, 2018. – С. 115–119.

М.А. Очилова

*Худжандский государственный университет
им. Б. Гафурова, Республика Таджикистан*

А.Б. Назимов

Вологодский государственный университет, Россия

УСЛОВИЯ ПРИВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ОДНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассматривается однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами n -го порядка. Исследуется вопрос, когда данную систему можно привести к одному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами n -го порядка. Ответ на поставленный вопрос дается, когда собственные значения матрицы коэффициентов системы являются вещественными числами.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛДУсПК)

$$x' = Ax, \quad (1)$$

где A – вещественная квадратная матрица порядка n , $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – неизвестная вектор-функция, $x_j = x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$.

Исследуется задача нахождение условия, при котором СЛДУсПК (1) можно привести к одному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (ЛДУсПК) n -го порядка:

$$x_j^{(n)} + p_1 x_j^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} x_j' + p_n x_j = 0, \quad (2)$$

где p_1, \dots, p_n – заданные вещественные числа, а x_j ($j = 1, \dots, n$) – некоторая из координат неизвестной вектор-функции x .

Пусть матрица U приводит матрицу коэффициентов системы к жордановой форме:

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где матрицы J_1 и J_2 определяются ниже.

Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим отдельные модельные случаи.

1. Пусть A_1 – квадратная матрица порядка k ($k \leq n$), жордановой формой которой является матрица

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где λ_j ($j=1,\dots,k$) – собственные значения матрицы A_1 , а

$$u_j = (u_{j1}, \dots, u_{jk})^T \quad (5)$$

– собственные вектора, отвечающие собственным значениям λ_j ($j=1,\dots,k$).

Рассмотрим СЛДУсПК

$$y' = A_1 y, \quad (6)$$

где $y = (y_1, \dots, y_k)^T$, а $y_j = y_j(t)$ – j -я координата вектор-функции $y = y(t)$.

Если числа λ_j ($j=1,\dots,k$) являются попарно различными, то функции

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t} \quad (7)$$

составляют линейно независимую систему на всей числовой оси. Поэтому функция

$$y(t) = C_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 u_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_k u_k e^{\lambda_k t}, \quad (8)$$

где C_1, C_2, \dots, C_k – является общим решением СЛДУсПК (6).

Если СЛДУсПК (6) приводится к одному ЛДУсПК

$$y_j^{(k)} + q_1 y_j^{(k-1)} + \dots + q_{k-1} y_j' + q_k y_j = 0, \quad (9)$$

где y_j – одна из координат вектор функции y . Так как система функций (7) линейно независимая, а функция (8) – общее решение СЛДУсПК (6), то функция

$$y_j(t) = C_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2^{(1)} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_k^{(1)} e^{\lambda_k t}, \quad (10)$$

где $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_k^{(1)}$ – произвольные постоянные, является общим решением ЛДУсПК (9). Связь между произвольными постоянными $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_k^{(1)}$ и C_1, C_2, \dots, C_k записывается равенствами:

$$C_1^{(1)} = C_1 u_{1j}, \quad C_2^{(1)} = C_2 u_{2j}, \dots, \quad C_k^{(1)} = C_k u_{kj}. \quad (11)$$

Общее решение (10) ЛДУсПК (9) получается из общего решения (8) СЛДУсПК (6), если выделить в этой вектор-функции j -ю координату. Так как в правой части (10) имеется k слагаемых, то это означает, что у всех собственных векторов u_1, u_2, \dots, u_k координаты с номером j , являются ненулевыми.

Следовательно, нами доказано, что если СЛДУсПК (6) можно привести к одному ЛДУсПК (9) относительно j -ой координаты, порядок которого совпадает с порядком системы (6), то j -ые координаты всех собственных векторов u_1, u_2, \dots, u_k матрицы A_1 не равны нулю.

Верно и обратное утверждение: если для некоторого номера j , где $1 \leq j \leq k$, у всех собственных векторов u_1, u_2, \dots, u_k j -ые координаты не равны нулю, то СЛДУсПК (6) можно привести к одному ЛДУсПК (9) порядка k , относительно этой координаты.

Таким образом, мы доказали утверждение:

Теорема 1. *Пусть собственные значения матрицы A_1 вещественные и различные. Для того, чтобы СЛДУсПК (6) можно было привести к одному ЛДУсПК (9) порядка k , необходимо и достаточно существование номера $j: 1 \leq j \leq k$, чтобы у всех собственных векторов u_1, u_2, \dots, u_k матрицы A_1 j -ые координаты являлись ненулевыми.*

Пусть A_2 – квадратная матрица порядка m ($m \leq n$), жордановой формой которой является матрица

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{2r} \end{bmatrix}, \quad J_{2l} = \begin{bmatrix} \mu_l & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \mu_l \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где J_{2l} – квадратная матрица порядка m_l ; $m_1 + m_2 + \dots + m_r = m$; μ_l ($l = 1, \dots, r$) – собственные значения матрицы A_2 , с алгебраическими кратностями $m_l \geq 2$ и геометрическими кратностями, равными 1. Каждому собственному значению μ_l соответствует один собственный вектор v_{l0} и $m_l - 1$ присоединенных векторов v_{ls} ($s = 1, \dots, m_l - 1$):

$$A_2 v_{l0} = \mu_l v_{l0}; \quad A_2 v_{l1} = \mu_l v_{l1} + v_{l0}, \dots, \quad A_2 v_{l,r-1} = \mu_l v_{l,r-1} + v_{l,r-2}. \quad (13)$$

Рассмотрим СЛДУсПК

$$z' = A_2 z, \quad (14)$$

где $z = (z_1, \dots, z_m)^T$, а $z_l = z_l(t)$ – l -я координата вектор-функции $z = z(t)$.

Пусть матрица U_2 приводит матрицу A_2 к жордановой форме: $U_2^{-1} A_2 U_2 = J_2$. Тогда СЛДУсПК (14) можно записать в виде

$$(U_2^{-1} z)' = (U_2^{-1} A_2 U_2)(U_2^{-1} z)$$

или, используя обозначения $w = U_2^{-1}z$, $J_2 = U_2^{-1}A_2U_2$, в виде:

$$w' = J_2 w. \quad (15)$$

Для удобства записи, координаты вектора w обозначим двойными индексами:

$$w = (w_1; \dots; w_r)^T = (w_{1,1}, \dots, w_{1,m_1}; \dots; w_{r,1}, \dots, w_{r,m_r})^T, \quad (16)$$

которые позволяют расчленить СЛДУсПК (15) в более мелкие:

$$w'_1 = J_{21}w_1, \quad w'_2 = J_{22}w_2, \quad \dots, \quad w'_r = J_{2r}w_r. \quad (17)$$

Развернутая запись каждой из систем (17) имеет вид:

$$\begin{cases} w'_{l,1} = \mu_l w_{l,1} + w_{l,2}, \\ \dots \\ w'_{l,m_l-1} = \mu_l w_{l,m_l-1} + w_{l,m_l-2}, \\ w'_{l,m_l} = \mu_l w_{l,m_l}, \end{cases} \quad (l=1, \dots, r). \quad (18)$$

Общим решением системы (18) является:

$$\begin{bmatrix} w_{l,1} \\ w_{l,2} \\ \dots \\ w_{l,m_l-1} \\ w_{l,m_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1!}t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(m_l-1)!}t^{m_l-1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!}t & \dots & \frac{1}{(m_l-2)!}t^{m_l-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1!}t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} e^{\mu_l t} \begin{bmatrix} C_{l,1} \\ C_{l,2} \\ \dots \\ C_{l,m_l-1} \\ C_{l,m_l} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $C_{l,1}, \dots, C_{l,m_l}$, ($l=1, \dots, r$) – произвольные постоянные.

Используя обозначения:

$$e_{l,1} = \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{m_l}^T, \quad e_{l,2} = \underbrace{(0, 1, \dots, 0)}_{m_l}^T, \quad e_{l,m_l} = \underbrace{(0, 0, \dots, 1)}_{m_l}^T, \quad (20)$$

($l=1, \dots, r$), общее решение (19) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} w_l = & \left(C_{l,1} + C_{l,2} \frac{1}{1!}t + C_{l,3} \frac{1}{2!}t^2 + \dots + C_{l,m_l} \frac{1}{(m_l-1)!}t^{m_l-1} \right) e^{\mu_l t} e_{l,1} + \\ & + \left(C_{l,2} + C_{l,3} t + \dots + C_{l,m_l-1} \frac{1}{(m_l-3)!}t^{m_l-3} + C_{l,m_l} \frac{1}{(m_l-2)!}t^{m_l-2} \right) e^{\mu_l t} e_{l,2} + \\ & + \dots + \left(C_{l,m_l-1} + C_{l,m_l} t \right) e^{\mu_l t} e_{l,m_l-1} + C_{l,m_l} e^{\mu_l t} e_{l,m_l}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для того, чтобы продолжить исследование поставленного вопроса, вернемся с уравнений (17) к уравнениям (15) и (14). Для этого введем обозначения:

$$e_{l_1} = \begin{bmatrix} e_{l_1,1} \\ 0_2 \\ \dots \\ 0_r \end{bmatrix}, \quad e_{m_1+l_2} = \begin{bmatrix} 0_1 \\ e_{l_2,2} \\ \dots \\ 0_r \end{bmatrix}, \quad \dots \quad e_{m_1+\dots+m_{r-1}+l_r} = \begin{bmatrix} 0_1 \\ \dots \\ 0_{r-1} \\ e_{l_r,r} \end{bmatrix}$$

$$C_{l_1} = C_{1,l_1}, \quad C_{m_1+l_2} = C_{2,l_2}, \quad \dots \quad C_{m_1+\dots+m_{r-1}+l_r} = C_{r,l_r},$$

$$l_1 = 1, \dots, m_1; \quad l_2 = 1, \dots, m_2; \quad \dots \quad l_r = 1, \dots, m_r.$$

Вектора $e_1, e_{m_1+1}, e_{m_1+m_2+1}, \dots, e_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}$ являются r собственными векторами матрицы J_2 , остальные – присоединенными векторами, а их образы:

$$v_1 = U_2 e_1, \quad v_{m_1+1} = U_2 e_{m_1+1}, \quad \dots, \quad v_{m_1+\dots+m_{r-1}+1} = U_2 e_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}$$

– собственными векторами матрицы A_2 , образы остальных – присоединенными векторами этой матрицы.

Общим решением СЛДУсПК (14), является:

$$z(t) = C_1 v_1 e^{\mu_1 t} + C_{m_1+1} v_{m_1+1} e^{\mu_2 t} + \dots + C_{m_1+\dots+m_{r-1}+1} v_{m_1+\dots+m_{r-1}+1} e^{\mu_r t} + Z(t; C; v),$$

где $Z(t; C; v)$ состоит из всех слагаемых, которые содержат произведение степени t на показательную функцию $e^{\mu t}$.

Справедливо утверждение:

Теорема 2. Пусть собственные значения матрицы A_2 вещественные; их алгебраические кратности больше единицы, а геометрические кратности равны единице. Для того чтобы СЛДУсПК (14) можно было привести к одному ЛДУсПК порядка t , необходимо и достаточно существование номера $l : 1 \leq l \leq m$, чтобы у всех собственных векторов $v_1, v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}$ матрицы A_2 координаты с номером l были ненулевыми, а от присоединенных векторов не требуется никакие условия.

ЛИТЕРАТУРА

- Понtryгин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / Л. С. Понtryгин. – Москва : Наука, 1974. – 331 с.

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С УПОРЯДОЧЕНИЕМ НА ОСНОВЕ ДИАГРАММ ЮНГА

В настоящей работе рассмотрена динамика системы однотипных элементов, которые могут находиться в состояниях, упорядоченных по невозрастанию заселенностей.

Распределения, в которых числа следуют в невозрастающем порядке, известны как ранговые. Именно к ним относятся закон Парето в экономике и закон Ципфа в лингвистике. Рассматриваемая в данной работе модель позволяет анализировать динамику ранговых распределений в системах, элементы которых могут случайным образом изменять свои состояния в дискретные моменты времени. Примером может служить изменение рангового распределения интернет-ресурсов по загруженности при фиксированном общем числе пользователей, если считать, что за единицу времени не более одного пользователя может переключиться на другой ресурс. Другой пример – ранговое распределение капиталов участников игры при условии сохранения суммарного капитала и при допущении, что за одну партию не более одной единицы денег совершают переход от игрока к игроку.

Наглядно такую систему можно представить как совокупность n одинаковых монет, расположенных по выстроенным в ряд столбикам невозрастающей высоты. За единицу времени ровно одна монета перекладывается с одного случайно выбранного столбика на другой, либо на свободное место следом за последним столбиком, чтобы сформировать новый, либо кладется на прежнее место. При необходимости стопки с монетами переставляют так, чтобы они снова следовали в невозрастающем порядке.

Каждое состояние этой системы можно представить *разбиением* числа монет n , т.е. разложением его в сумму невозрастающих слагаемых – *частей*

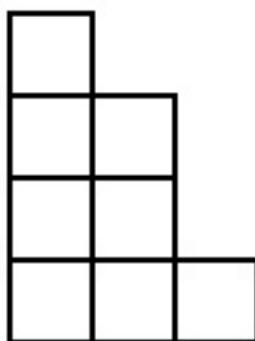


Рис. 1.

*Диаграмма Юнга
для разбиения
(3, 2, 2, 1) числа 8*

разбиения. Графическим способом изображения разбиений служат диаграммы Юнга – таблицы из клеток, расположенных в строках невозрастающей высоты. Ранговые распределения, таким образом, представляют собой не что иное, как диаграммы Юнга. В нашей работе мы будем изображать состояние системы диаграммой, высоты столбцов в которой равны соответственно высотам стопок монет. Диаграммы λ и λ' , которые получаются одна из другой транспонированием, называются *сопряженными*. На рисунке 1 изображена диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $(3, 2, 2, 1)$ числа 8.

Поскольку вероятность перехода из одного состояния в другое не зависит от того, в каких состояниях система находилась раньше, данную модель можно рассматривать как конечную марковскую цепь. Состояния системы и переходы между ними естественно представить в форме графа, вершины которого соответствуют состояниям, а дуги – возможным переходам. Тогда процесс перекладывания монет будет случайным блужданием по этому графу. На рисунке 2 изображен график, соответствующий случаю $n = 6$.

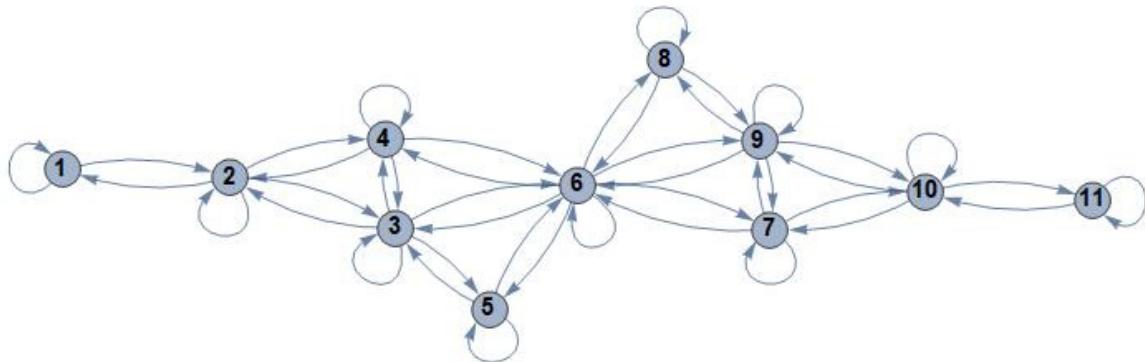


Рис. 2. Возможные переходы между диаграммами Юнга с 6 клетками

Один и тот же переход может быть осуществлен несколькими способами. Вероятность перехода из состояния i в состояние j записывается как $p_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$, где n_{ij} – число способов осуществления перехода из состояния i в состояние j . Вероятность a_i того, что блуждание начнется из состояния i , была выбрана пропорциональной числу n_i способов перехода в данное состояние из соседних: $a_i = \frac{n_i}{\sum_i n_i}$, суммирование в знаменателе ведется по всем состояниям.

Выпишем ненулевые вероятности переходов для случая 6 состояний:

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{12} = \frac{1}{2}, & p_{21} &= \frac{1}{5}, & p_{22} &= \frac{2}{5}, & p_{23} &= p_{24} = \frac{1}{5}, & p_{32} &= \frac{1}{6}, & p_{33} &= \frac{1}{3}, \\ p_{34} &= p_{35} = p_{36} = \frac{1}{6}, & p_{42} &= p_{43} = \frac{1}{5}, & p_{44} &= \frac{2}{5}, & p_{46} &= \frac{1}{5}, & p_{53} &= p_{55} = p_{56} = \frac{1}{3}, \\ p_{63} &= p_{64} = p_{65} = \frac{1}{11}, & p_{66} &= \frac{5}{11}, & p_{67} &= p_{68} = p_{69} = \frac{1}{11}, & p_{76} &= p_{77} = \frac{3}{8}, & p_{79} &= \frac{3}{16}, \\ p_{7,10} &= \frac{1}{16}, & p_{86} &= \frac{1}{2}, & p_{88} = p_{89} &= \frac{1}{4}, & p_{96} &= \frac{4}{19}, & p_{97} = p_{98} &= \frac{2}{19}, & p_{99} &= \frac{9}{19}, & p_{9,10} &= \frac{2}{19}, \\ p_{10,7} &= \frac{4}{29}, & p_{10,9} = p_{10,10} &= \frac{12}{29}, & p_{10,11} &= \frac{1}{29}, & p_{11,10} &= \frac{30}{41}, & p_{11,11} &= \frac{11}{41}. \end{aligned}$$

Распределение вероятностей выбора a -й вершины в качестве начальной имеет вид: $a_1 = \frac{2}{157}$, $a_2 = \frac{6}{157}$, $a_3 = \frac{8}{157}$, $a_4 = \frac{7}{157}$, $a_5 = \frac{4}{157}$, $a_6 = \frac{26}{157}$, $a_7 = \frac{13}{157}$, $a_8 = \frac{6}{157}$, $a_9 = \frac{28}{157}$, $a_{10} = \frac{45}{157}$, $a_{11} = \frac{12}{157}$.

Процесс перекладывания 6 монет был смоделирован в Wolfram Mathematica как цепь Маркова с указанными распределениями. После 10^6 шагов получены относительные частоты f_i , $i = 1, \dots, 6$, наблюдения различных состояний системы. По этим частотам вычислены средние

значения следующих параметров, характеризующих систему: высота y самой большой стопки, или количество элементов в самом заселенном состоянии; количество стопок x , т.е. количество непустых состояний; количество различных высот стопок в данной конфигурации (уровней заселенности состояний) m ; число l столбцов одинаковой высоты (состояний одинаковой заселенности) в конфигурации.

Все средние значения вместе с частотами состояний системы собраны в таблице. Номера состояний системы соответствуют номерам вершин графа.

Таблица

**Средние значения некоторых величин в модели
процесса перекладывания $n = 6$ монет
и относительные частоты возможных состояний системы**

| Номер вершины i и соответствующее разбиение | y | x | m | l | f_i |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 – (1, 1, 1, 1, 1, 1) | 6 | 1 | 1 | 1 | 0.047 |
| 2 – (2, 1, 1, 1, 1) | 5 | 2 | 2 | 1 | 0.118 |
| 3 – (2, 2, 1, 1) | 4 | 2 | 2 | 1 | 0.141 |
| 4 – (3, 1, 1, 1) | 4 | 3 | 2 | 1.5 | 0.117 |
| 5 – (2, 2, 2) | 3 | 2 | 1 | 2 | 0.070 |
| 6 – (3, 2, 1) | 3 | 3 | 3 | 1 | 0.257 |
| 7 – (4, 1, 1) | 3 | 4 | 2 | 2 | 0.062 |
| 8 – (3, 3) | 2 | 3 | 1 | 3 | 0.046 |
| 9 – (4, 2) | 2 | 4 | 2 | 2 | 0.110 |
| 10 – (5, 1) | 2 | 5 | 2 | 2.5 | 0.028 |
| 11 – (6) | 1 | 6 | 1 | 6 | 0.001 |
| Среднее значение: | 3.350 | 2.810 | 2.092 | 1.443 | – |

Из таблицы видно, в частности, что при перекладывании 6 монет чаще других появляется конфигурация, в которой высоты стопок равны 3, 2, 1. В целом, хотя обычно в диаграммах Юнга строки и столбцы равноправны, полученное распределение относительных частот не симметрично относительно сопряжения диаграмм. Так, состояние, когда все монеты находятся в одной стопке, встретилось в десятки раз чаще состояния, когда в каждой стопке имеется только по одной монете. В среднем в одном и том же состоянии наблюдаются стопки двух различных размеров.

Так как однотипность и даже неразличимость является характерным свойством денежных единиц, описанная в работе модель может представлять интерес для экономических исследований. Благодаря упорядоченности рассмотренной модели, использованный подход может быть применен к анализу динамики ранговых распределений в стохастических системах.

А.М. Туйчиев

*Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
Республика Таджикистан*

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА

Даны точные оценки скорости сходимости ряда Фурье–Чебышева на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся обобщенным модулем непрерывности определенного порядка в пространстве весовых. Найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения функций частными суммами Фурье–Чебышева и обобщенными модулями непрерывности определенного порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка.

Приведем ряд необходимых обозначений и вспомогательные факты из работ [1–5]. Пусть $L_{2,\mu} = L_{2,\mu}[-1;1]$ – множество измеримых на отрезке $[-1;1]$ функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$, имеющие конечную норму:

$$\|f\|_{2,\mu} = \left(\int_{-1}^1 \mu(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

В [1–5] изучена задача отыскания точной константы в неравенстве типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего среднеквадратического приближения функций $f \in L_{2,\mu}$ и обобщенного модуля непрерывности, порожденного оператором обобщенного сдвига

$$F_h f(x) = \frac{1}{2} [f(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h) + f(x \cosh - \sqrt{1-x^2} \sinh)]$$

и имеющего вид

$$\Omega_m^2(D^r; t)_{2,\mu} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f) : |h| \leq t \right\},$$

где $D = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор Чебышева второго порядка, $D^r f = D(D^{r-1} f), r \geq 2, r \in N, P_n$. – множество алгебраических полиномов степени не более n . Пусть

$$\varepsilon_{n-1}(f) = \inf \{ \|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in P_{n-1}\} \quad (1)$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства P_{n-1} . В [6, с. 26] доказано, что среди всех элементов $p_{n-1} \in P_{n-1}$ частичная сумма

$$S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$$

ряда Фурье–Чебышева

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x), \quad c_k(f) = \int_{-1}^1 \mu(x) f(x) T_k(x) dx, \\ T_k(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

доставляет минимум величине (1). При этом

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1/2}.$$

Через $L_{2,\mu}^{(2r)} := L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ обозначим множество функций $f \in L_{2,\mu}$, у которых производная $D^r f \in L_{2,\mu}$. В [5] доказано, что для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ имеет место точное неравенство

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq n^{-2r} \cdot \varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\mu}, \quad (2)$$

при этом равенство в (2) доставляет функция $f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}$.

Имеет место следующая

Лемма. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}$ имеем

$$\frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot E_k^2(f). \quad (3)$$

Доказательство. К первой сумме в левой части равенства (3) применим преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \\ &= \frac{1}{n^{4m}} \cdot \left\{ n^{4m} \cdot \sum_{k=0}^n c_k^2(f) - \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot \sum_{l=0}^k c_l^2(f) \right\} + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f) - \frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot \sum_{l=0}^k c_l^2(f) = \\ &= \|f\|_{2,\mu}^2 - \frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot \left(\|f\|_{2,\mu}^2 - \sum_{l=k+1}^{\infty} c_l^2(f) \right) = \\ &= \|f\|_{2,\mu}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \right) = \\ &= \frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot E_k^2(f), \end{aligned}$$

откуда вытекает справедливость равенства (3). Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет установить справедливость обратной теоремы теории приближения.

Теорема 1. При любых $m, n \in N$ справедливо экстремальное равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}} \frac{n^{2m} \cdot \Omega_m \left(f; \frac{2}{n} \right)_{2,\mu}}{\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot E_k^2(f)_{2,\mu} \right\}^{1/2}} = 2^m. \quad (4)$$

Доказательство. В силу равенства ([5], формула (1.10))

$$\left\| \Delta_h^m(f, \cdot) \right\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} \cdot c_k^2(f)$$

имеем

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_h^m(f, \cdot) \right\|_{2,\mu}^2 &= 2^{2m} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{kh}{2} \right)^{4m} \cdot c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sin \frac{kh}{2} \right)^{4m} \cdot c_k^2(f) \right\} \leq \\ &\leq 2^{2m} \cdot \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^{4m} \cdot \sum_{k=1}^n k^{4m} \cdot c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда из определения модуля непрерывности получаем

$$\Omega_m^2 \left(f; \frac{2}{n} \right)_{2,\mu} := \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m(f, \cdot) \right\|_{2,\mu}^2 : 0 < h \leq 2/n \right\} \leq 2^{2m} \cdot \left\{ \frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=1}^n k^{4m} \cdot c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}.$$

Применяя доказанную лемму к правой части полученного неравенства, получим следующее неравенство

$$\Omega_m^2 \left(f; \frac{2}{n} \right)_{2,\mu} \leq \frac{2^{2m}}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot E_k^2(f)_{2,\mu}. \quad (5)$$

Из справедливости (5) для любой функции $f \in L_{2,\mu}$ вытекает оценка сверху

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}} \frac{n^{4m} \cdot \Omega_m^2 \left(f; \frac{2}{n} \right)_{2,\mu}}{\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot E_k^2(f)_{2,\mu}} \leq 2^{2m}. \quad (6)$$

Для получения противоположного неравенства вводим в рассмотрение функцию $f_0(x) = T_{2n}(x) \in L_{2,\mu}$. Эта функция обладает следующими свойствами

$$E_k(f_0)_{2,\mu} \equiv 1, \quad k = 0, 1, \dots, 2n,$$

$$\Omega_m^2 \left(f_0; \frac{2}{n} \right)_{2,\mu} = \sup_{0 \leq h \leq \frac{2}{n}} (1 - \cos 2nh)^{2m} = (1 - \cos 2n \cdot \frac{\pi}{2n})^{2m} = 2^{2m},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] E_k^2(f_0)_{2,\mu} = n^{4m}.$$

Отсюда вытекает справедливость оценки снизу

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}} \frac{n^{4m} \cdot \Omega_m^2 \left(f; \frac{2}{n} \right)_{2,\mu}}{\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot E_k^2(f)_{2,\mu}} \geq \frac{n^{4m} \cdot \Omega_m^2 \left(f_0; \frac{2}{n} \right)_{2,\mu}}{\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot E_k^2(f_0)_{2,\mu}} = 2^{2m}. \quad (7)$$

Сравнивая неравенства (6) и (7) получим справедливость требуемого равенства (4). Теоремы 1 доказана.

Пусть $W_{2,\mu}^{(r)}(\mathbb{D})$, $r \in \mathbb{N}$ – класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых $\|D^r f\|_{2,\mu} \leq 1$.

Теорема 2. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\varepsilon_{n-1}(W_{2,\mu}^{(r)}(D))_{2,\mu} = \sup \{ \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} : f \in W_{2,\mu}^{(r)}(D) \} = \frac{1}{n^{2r}}. \quad (8)$$

Доказательство. Заметим, что произвольная функция $f \in W_{2,\mu}^{(r)}(\mathbb{D})$ удовлетворяет неравенству: $\varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\mu} \leq \|D^r f\|_{2,\mu} \leq 1$, откуда и из неравенства (2) получаем оценку

$$\varepsilon_{n-1}(W_{2,\mu}^{(r)}(D))_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2r}}. \quad (9)$$

С другой стороны, для функции $f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}} \cdot T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которой $\varepsilon_{n-1}(f_1)_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2r}}$, $\varepsilon_{n-1}(D^r f_1)_{2,\mu} = 1$, имеем:

$$\varepsilon_{n-1}(W_{2,\mu}^{(r)}(D))_{2,\mu} \geq \varepsilon_{n-1}(f_1)_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2r}}. \quad (10)$$

Из неравенств (9) и (10) получаем справедливость равенства (8).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $n, s, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ и $s < r$. Тогда справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f \in W_{2,\mu}^{(r)}(\mathbb{D}) \\ f \notin P_{n-1}}} \frac{\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}}{\varepsilon_{n-1}^{1-s/r}(f)_{2,\mu}} = 1. \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию f из класса $W_{2,\mu}^{(r)}(\mathbb{D})$, где $r \geq 2$, которая не является элементом подпространства P_{n-1} . Кроме того, очевидно, что функция $f \in W_{2,\mu}^{(s)}$ при всех $s \in [1, r]$. Тогда из неравенства типа Колмогорова [5] для $f \in W_{2,\mu}^{(r)}(\mathbb{D})$: $\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \leq (\varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\mu})^{s/r} \cdot (\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r}$ вытекает:

$$\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \leq (\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r},$$

откуда получаем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f \in W_{2,\mu}^{(r)}(D) \\ f \notin P_{n-1}}} \frac{\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}}{(\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r}} \leq 1. \quad (12)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части (12), рассмотрим принадлежащую множеству $W_{2,\mu}^{(r)}(D)$ функцию $f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}} T_n(x)$, использованную нами при доказательстве теоремы 2, для которой $\varepsilon_{n-1}(D^s(f_1))_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2(r-s)}}$, $\varepsilon_{n-1}(f_1)_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2r}}$, а потому запишем

$$\sup_{f \in W_{2,\mu}^{(r)}(D)} \frac{\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}}{(\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r}} \geq \frac{\varepsilon_{n-1}(D^s f_1)_{2,\mu}}{(\varepsilon_{n-1}(f_1)_{2,\mu})^{1-s/r}} = \frac{n^{2(r-s)}}{n^{2(r-s)}} = 1. \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13) получим справедливость равенства (11).

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов, В. А. Об одной квадратурной формуле / В. А. Абилов, Ф. В. Абилова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 451–458.
2. Тухлиев, К. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье–Чебышёва в пространстве L_2 , I. / К. Тухлиев // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2013. – № 4. – С. 33–46.
3. Тухлиев, К. Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье–Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов / К. Тухлиев // Чебышевский сборник. – 2016. – Т. 17, № 4. – С. 141–156.
4. Тухлиев, К. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье–Чебышёва в пространстве L_2 , II / К. Тухлиев // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2013. – № 4. С. 22–32.
5. Шабозов, М. Ш. Неравенства Джексона–Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций / М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев // Труды ИММ УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 4. – С. 292–308.
6. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – Москва : Наука, 1979. – 416 с.

Д.К. Тухлиев

*Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
Республика Таджикистан*

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

В работе найдены точные константы в теоремах теории приближения аналитических в единичном круге функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Бергмана.

Будем рассматривать пространство Бергмана [1] $B_2 := B_2(U)$ функций f аналитических в единичном круге $U := \{z \in C : |z| < 1\}$ таких, для которых норма определяется в следующем виде

$$\|f\| := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_U |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty, \quad (1)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ – элемент площади. Очевидно, что норму (1) можно написать также в следующем виде

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Через P_n обозначим совокупность комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n$. Хорошо известно [2, с. 201], что среди всех полиномов $p_{n-1} \in P_{n-1}$ наилучшее квадратичное приближение функции $f \in B_2$ в области U доставляет частичная сумма $(n-1)$ -го порядка

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$$

разложения функции $f(z)$ в степенной ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

При этом для величины наилучшей полиномиальной аппроксимации произвольной функции $f \in B_2$ имеем [3]

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &:= E_{n-1}(f)_{B_2} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1} \in P_{n-1} \right\} = \\ &= \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $c_k(f)$ – коэффициенты Тейлора функции f . Далее введем обозначение

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{B_2} := \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k f(\rho e^{i(t+kh)}) \right|^2 d\rho dt \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

и равенством

$$\begin{aligned}\Omega_m(f; t)_{2,\mu} &:= \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\|_2 : |h| \leq t \right\} = \\ &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} \cdot c_k^2(f) : |h| \leq t \right\}\end{aligned}$$

определим модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in \mathbf{B}_2$. Применяя равенство Парсеваля из равенства (2) легко получить, что

$$\begin{aligned}\left\| \Delta_h^m(f; \cdot) \right\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} c_k^2(f) = 4^m \sum_{k=1}^{\infty} \sin^{4m} \frac{kh}{2} \cdot c_k^2(f) = \\ &= 4^m \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(\frac{kh}{2} \right) \right)^{4m} c_k^2(f) + 4^m \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sin \left(\frac{kh}{2} \right) \right)^{4m} c_k^2(f) \leq \\ &\leq 4^m \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{kh}{2} \right)^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\} \leq \\ &\leq 4^m \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^{4m} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\},\end{aligned}\tag{3}$$

в силу которого запишем

$$\begin{aligned}\Omega_m(f; 2/n)_2 &:= \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m(f; \cdot) \right\|_2^2 : 0 < h \leq 2/n \right\} \leq \\ &\leq 4^m \left\{ \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}.\end{aligned}$$

Нам далее понадобится следующая

Лемма. Для произвольной функции $f \in \mathbf{B}_2$ и любых $m, n \in \mathbf{N}$ имеет место равенство

$$\frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] E_k^2(f).\tag{4}$$

Доказательство. Применяя к первой сумме в левой части равенства (4) преобразование Абеля [4, с. 305], получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \\ &= \frac{1}{n^{4m}} \left\{ n^{4m} \sum_{k=0}^n c_k^2(f) - \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot \sum_{l=0}^k c_l^2(f) \right\} + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f) - \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot \sum_{l=0}^k c_l^2(f) = \\ &= \|f\|_{2,\mu}^2 - \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot \left(\|f\|_{2,\mu}^2 - \sum_{l=k+1}^{\infty} c_l^2(f) \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|f\|_{2,\mu}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \right) + \\
&\quad + \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] \cdot \sum_{l=k+1}^{\infty} c_l^2(f) = \\
&= \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] E_k^2(f)_2,
\end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. Для произвольной функции $f \in \mathbf{B}_2$, при любых $m, n \in \mathbb{N}$, справедливо точное неравенство

$$\Omega_m^2(f; 2/n)_2 \leq \frac{4^m}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] E_k^2(f)_2. \quad (5)$$

Существует функция $f_0 \in \mathbf{B}_2$, для которой неравенство (5) обращается в равенство.

Доказательство. Так как в силу равенства (3)

$$\begin{aligned}
\|\Delta_h^m(f; \cdot)\|_2^2 &= 4^m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{kh}{2} \right)^{4m} c_k^2(f) = \\
&= 4^m \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{kh}{2} \right)^{4m} c_k^2(f) + 4^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \leq \\
&\leq 4^m \sum_{k=1}^n \left(\frac{kh}{2} \right)^{4m} c_k^2(f) + 4^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \\
&= 4^m \left(\frac{h}{2} \right)^{4m} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + 4^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \\
&= 4^m \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^{4m} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\},
\end{aligned}$$

то отсюда и из равенства (4) получаем

$$\begin{aligned}
\Omega_m^2(f; 2/n)_2 &= \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f; \cdot)\|_2^2 : 0 < h \leq 2/n \right\} \leq \\
&\leq 4^m \left\{ \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\} = \\
&= \frac{4^m}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] E_k^2(f)_2,
\end{aligned}$$

и, таким образом, неравенство (5) доказано. Для функции $f_0(z) = z^k \in \mathbf{B}_2$, неравенство (3) обращается в равенство. В самом деле, для этой функции

$$E_k^2(f_0)_2 = \frac{1}{n+1}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

$$\Omega_m^2(f_0; 2/n) = \frac{4^m}{n+1} \sup_{0 < h \leq 2/n} \left(\sin \frac{kh}{2} \right) = \frac{4^m}{n+1} \cdot \sin \frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{4^m}{n+1},$$

а потому имеем

$$\begin{aligned} & \frac{4^m}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] E_k^2(f_0)_2 = \\ & = \frac{4^m}{n+1} \cdot \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] = \frac{4^m}{n+1} = \Omega_m^2(f_0; 2/n), \end{aligned}$$

чём и завершаем доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Для произвольной функции $f \in B_2$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\Omega_m^2(f; 2/n)_2 \leq \frac{4^{m+1} m}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^{4m-1} E_k^2(f).$$

Доказательство. В силу доказанного выше теоремы 1 и вполне очевидного неравенства

$$(k+1)^{4m} - k^{4m} = \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^{4m} - 1 \right] \leq k^{4m} \cdot \frac{4m}{k} = 4m \cdot k^{4m-1}$$

имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta_h^m(f; \cdot) \right\|_2^2 = 4^m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{kh}{2} \right)^{4m} c_k^2(f) = \\ & = 4^m \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{kh}{2} \right)^{4m} c_k^2(f) + 4^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \\ & = 4^m \sum_{k=1}^n \left(\frac{kh}{2} \right)^{4m} c_k^2(f) + 4^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \\ & = 4^m \left(\frac{h}{2} \right)^{4m} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + 4^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \\ & = 4^m \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^{4m} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}, \\ & \Omega_m^2(f; 2/n)_2 = \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m(f; \cdot) \right\|_2^2 : 0 < h \leq 2/n \right\} \leq \\ & \leq 4^m \left\{ \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=1}^n k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\} = \\ & = \frac{4^m}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] E_k^2(f)_2 \leq \frac{4^{m+1} m}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^{4m-1} E_k^2(f). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergman, S. The cernel function and conformal mapping / S. Bergman // Math. survays, 5, N. Y. : Amer. Math. soc., 1950. – 163 p.
2. Смирнов, В. И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / Смирнов В. И., Лебедев Н. А. – Москва ; Ленинград : Наука, 1964. – С. 201–202.
3. Тухлиев, Д. К. О точных константах в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана / Д. К. Тухлиев // ДАН РТ. – 2018. – Т. 16, № 6. – С. 517–523.
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1970. – Т. 2. – С. 305–306.

К. Тухлиев, Ш.Р. Максудова

*Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
Республика Таджикистан*

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА В $L_{2,\mu}$

В гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1; 1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, связывающие величину $\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu}$ – наилучшее приближение функции $f(x)$ алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$ с усредненным положительным весом обобщенного модуля непрерывности m -го порядка $\Omega_m(D^r f; t)$, где D – некоторый дифференциальный оператор второго порядка.

При решении экстремальных задач теории приближения функций в различных банаховых пространствах часто пользуются основной характеристикой гладкости функции – модулем непрерывности. В последнее время с целью оптимизации неравенства Джексона–Стечкина рассматривают различные модификации классического определения модуля непрерывности. Это обусловлено специфическими условиями рассматриваемых экстремальных задач и иногда приводит к результатам, раскрывающим содержание сущности исследуемых проблем. Так, например, при изучении вопроса разложения функций в рядах Фурье–Чебышёва в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1; 1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ вместо обычного

модуля непрерывности используется оператор обобщенного сдвига, с помощью которого определяются обобщенные модули непрерывности m -го порядка и классы функций, которые характеризуются этими модулями непрерывности. Экстремальная задача отыскания точной оценки скорости сходимости рядов Фурье–Чебышёва на указанных классах функций сводится к исследованию величины, равной точной верхней грани уклонения частных сумм рядов Фурье–Чебышёва на рассматриваемых классах функций.

Здесь мы рассматриваем точные неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1; 1]$ функций f с весом $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства P_{n-1} – алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$ в Гильбертовом пространстве

$$L_{2,\mu}[-1; 1] = L_{2,\mu}\left(\left(1-x^2\right)^{-1/2}; [-1; 1]\right)$$

с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1; 1]} = \left(\int_{-1}^1 \mu(x) f^2(x) dx \right)^{1/2} = \left(\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2}.$$

Следуя работе В.А. Абилова и Ф.В. Абиловой [1], в пространстве $L_{2,\mu}[-1; 1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(x \cosh h + \sqrt{1-x^2} \sin h\right) + f\left(x \cosh h - \sqrt{1-x^2} \sin h\right) \right), \quad (1)$$

который назовем *оператором обобщенного сдвига*, и введем конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_h^1(f, x) &= F_h f(x) - f(x) = (F_h - E) f(x), \\ \Delta_h^m(f, x) &= \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f, \cdot), x) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} F_h^k f(x), \end{aligned}$$

где E – единичный оператор в пространстве L_2 , а

$$F_h^0 f(x) \equiv f(x), \quad F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), \quad m, n \in N.$$

По введенными конечными разностями определим обобщенный модуль непрерывности m -го порядка равенством

$$\Omega_m(f, t) = \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m(f, \cdot) \right\|_{L_{2,\mu}[-1; 1]} : |h| \leq t \right\}. \quad (2)$$

Через

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

обозначим ортонормированную систему многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1; 1]$. Ряд (напр., [2, с. 91–98])

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x) \quad (4)$$

называется рядом Фурье–Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}[-1; 1]$, а

$$c_k(f) = \int_{-1}^1 \mu(x) f(x) T_k(x) dx \quad (5)$$

– коэффициентами этого ряда. Равенство в (4) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1; 1]$.

Обозначив символом $D = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx}$ дифференциальный оператор второго порядка, операторы высших порядков определим последовательно, полагая $D^r f = D(D^{r-1} f)$, $r = 2, 3, \dots$. Известно, что [2, с. 54] многочлены (3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) T''_k(x) - x T'_k(x) + k^2 T_k(x) = 0. \quad (6)$$

Из (6) и определения дифференциального оператора получаем

$$DT_k(x) = -k^2 T_k(x), \dots, D^r T_k(x) = (-1)^r k^{2r} T_k(x). \quad (7)$$

В [1] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1; 1]$, имеющей обобщенные производные в смысле Леви [3, с. 172], коэффициенты Фурье–Чебышёва (5) ряда (4) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r k^{-2r} c_k(D^r f), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где функция $F_h f$ определена равенством (1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1; 1]$, $r \in Z_+$; $L_{2,\mu}^{(0)}[-1; 1] = L_{2,\mu}[-1; 1]$ множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1; 1]$, у которых производная $D^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1; 1]$, а через

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in P_{n-1} \right\} \quad (10)$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}[-1; 1]$ элементами подпространства P_{n-1} . В монографии П.К. Суетина [2, с. 26] доказано, что среди всех элементов $p_{n-1} \in P_{n-1}$ частичная сумма

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$$

ряда (4) доставляет минимум величине (10). При этом

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f, \cdot)\|_{2,\mu} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Пользуясь соотношениями (7)–(9) и равенством Парсеваля, из (4) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1; 1]$ легко получается равенство [1]

$$\left\| \Delta_h^m(D^r f) \right\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \quad (12)$$

В этой работе найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье–Чебышёва на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усредненным значением обобщенного модуля непрерывности m -го порядка $\Omega_m(D^r f, t)_{2,\mu}$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Иными словами, в метрике пространства $L_{2,\mu}$ получены точные неравенства, которые связывают наилучшие приближения дифференцируемых функций алгебраическими полиномами с интегралами, содержащими обобщенные модули непрерывности высших порядков производных этих функций. Вычислены точные верхние грани отклонений заданных классов функций от их частных сумм ряда Фурье–Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}$. Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть $m \in N$, $r \in Z_+$ и $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$. Тогда при любом $n \in N$ имеет место неравенство

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(D^r f, h) \sin nh dh \right)^m. \quad (13)$$

Доказательство. Применяя неравенства Гёльдера для рядов при любых $m, n \in N$ и $r \in Z_+$ для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ из (11) с учетом равенства (12) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n-1}^2(f)_{2,\mu} - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)(1 - \cos kh) = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^{2-1/m} |c_k(f)|^{1/m} (1 - \cos kh) \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{2-1/(2m)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} c_k^2(f) \right)^{1/(2m)} \leq \\ &\leq \left(\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} \right)^{2-1/m} n^{-2r/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f) \right)^{1/(2m)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \right)^{2-1/m} n^{-2r/m} \left\| \Delta_h^m(D^r f) \right\|_{2,\mu}^{1/m} \leq \\ &\leq \left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \right)^{2-1/m} n^{-2r/m} \Omega_m^{1/m} (D^r f, h)_{2,\mu}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \leq \left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \right)^{2-1/m} n^{-2r/m} \Omega_m^{1/m} (D^r f, h)_{2,\mu} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh. \quad (14)$$

Умножая обе части неравенства (14) на $\sin nh$ и интегрируя по переменной h по промежутку $[0, \pi/n]$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} &\leq \left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \right)^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, h)_{2,\mu} \sin nh dh + \\ &+ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \int_0^{\pi/n} \sin nh \cos kh dh. \end{aligned} \quad (15)$$

Но так как

$$\int_0^{\pi/n} \sin nh \cos kh dh = \begin{cases} 0, & k = n, \\ -\frac{2n}{k^2 - n^2} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}, & k > n, \end{cases}$$

то второе слагаемое в правой части неравенства (15) неположительно, а потому из (15) имеем

$$\frac{2}{n} \mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \leq \left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \right)^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, h)_{2,\mu} \sin nh dh,$$

откуда

$$\mathcal{E}_{n-1}^{1/m}(f)_{2,\mu} \leq n^{1-2r/m} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, h)_{2,\mu} \sin nh dh$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, h)_{2,\mu} \sin nh dh \right)^m, \quad (16)$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Из доказанный теоремы вытекает:

Следствие 1. В утверждении теоремы имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^m. \quad (17)$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (16) имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} &\leq \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m = \\ &= \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^m \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m} \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^m, \quad (18)$$

и поскольку неравенство (18) верно для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, то переходя к верхней грани по всем функциям $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, будем иметь

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m} \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^m. \quad (19)$$

С другой стороны, для функции

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x) = T_n(x)$$

имеем

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^m (D^r f_0)\|_{2,\mu}^2 &= (1 - \cos nh)^{2m} n^{4r}, \quad 0 < h \leq \frac{\pi}{n}, \\ \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|_{2,\mu} &= \|f_0\|_{2,\mu} = 1,\end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned}\Omega_m^{1/m} (D^r f_0, t)_{2,\mu} &= n^{2r/m} (1 - \cos nt), \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{n}, \\ \left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f_0, t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m &\leq \left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} n^{2r/m} (1 - \cos nt) \sin nt dt \right)^m = \\ &= \left(n^{2r/m} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos t) \sin t dt \right)^m = n^{2r} \left(\frac{2}{\pi} \right)^m.\end{aligned}$$

Используя полученные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \sin n t dt \right)^m} \geq \\ & \geq \frac{n^{2r} \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f_0, t)_{2,\mu} \sin n t dt \right)^m} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^m. \end{aligned} \quad (20)$$

Сравнивая неравенства (19) и (20), получаем требуемое равенство (17), чем и завершаем доказательство следствия 1.

Следствие 2. При любых $m, n \in N$, $r \in Z_+$ для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ справедливо неравенство

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq n^{-2r} \Omega_m (D^r f, \pi/n)_{2,\mu}. \quad (21)$$

В самом деле, пользуясь тем, что модуль непрерывности $\Omega_m (D^r f, \pi/n)$ не убывает для $t \in (0, \pi/n]$ из (13) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} & \leq n^{-2r} \left(\Omega_m (D^r f, \pi/n)_{2,\mu} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/n} \sin n t dt \right)^m = \\ & = n^{-2r} \Omega_m (D^r f, \pi/n)_{2,\mu}. \end{aligned}$$

В случае, когда $\Omega_m^{1/m} (D^r f, \pi/n)_{2,\mu}$ выпукла вверх на отрезке $[0, \pi/n]$, оценка (21) может быть улучшена. В самом деле, существует линейная функция $\varphi(t) = \varphi(f, t)$ такая, что

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \Omega_m^{1/m} \left(D^r f, \frac{\pi}{2n} \right)_{2,\mu}, \quad \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \leq \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{n}.$$

Запишем интеграл в (13) в следующем виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \sin n t dt = \int_0^{\pi/n} \left(\Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} - \varphi(t) \right) \sin n t dt + \\ & + \int_0^{\pi/n} \left(\varphi(t) - \Omega_m^{1/m} \left(D^r f, \frac{\pi}{2n} \right)_{2,\mu} \right) \sin n t dt + \Omega_m^{1/m} \left(D^r f, \frac{\pi}{2n} \right)_{2,\mu} \int_0^{\pi/n} \sin n t dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части полученного равенства неположителен, второй, как показывает элементарное вычисление, равен нулю, а потому

$$\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m} (D^r f, t)_{2,\mu} \sin n t dt \leq$$

$$\leq \Omega_m^{1/m} \left(D^r f, \frac{\pi}{2n} \right)_{2,\mu} \int_0^{\pi/n} \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \Omega_m^{1/m} \left(D^r f, \frac{\pi}{2n} \right)_{2,\mu}.$$

Подставляя полученную оценку в (13), приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. Пусть модуль непрерывности $\Omega_m^{1/m} \left(D^r f, t \right)_{2,\mu}$ функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ на отрезке $[0, \pi/n]$ является выпуклым вверх. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r} \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m \left(D^r f, \frac{\pi}{2n} \right)_{2,\mu}} = 1.$$

Верхнюю грань в (22) реализует функция

$$f_0(x) = T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}.$$

В заключение отметим, что аналогичные задачи ранее рассматривались в работах [4–7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов, В. А. Об одной квадратурной формуле / В. А. Абилов, Ф. В. Абилова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 4. – С. 451–458.
2. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – Москва : Наука, 1979. – 416 с.
3. Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1979. – 480 с.
4. Шабозов, М. Ш. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников / М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов // Математические заметки. – 2011. – Т. 90, № 5. – С. 764–775.
5. Тухлиев, К. О некоторых экстремальных задачах наилучших приближений целыми функциями / К. Тухлиев // Вестник Томского государственного педагогического университета (TSPU Bulletin). – 2015. – Вып. 2 (155). – С. 213–220.
6. Тухлиев, К. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями и значения средних поперечников некоторых функциональных классов / К. Тухлиев // Вестник Томского государственного педагогического университета (TSPU Bulletin). – 2015. – Вып. 2 (155). – С. 229–231.
7. Тухлиев, К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. I / К. Тухлиев // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2013. – 3 (152). – С. 19–29.

К. Тухлиев, А.М. Туйчиев

*Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
Республика Таджикистан*

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ-ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2,\rho}(R)$

В работе найдены точные неравенства, связывающие величины наилучшего среднеквадратического приближения функций $f \in L_{2,\rho}$ с интегралами, содержащими специальный модуль непрерывности производных функций. Вычислены точные значения m -поперечников некоторых классов функций.

Пусть $L_2(R)$, где $R = (-\infty, +\infty)$ – пространство вещественных измеримых функций, суммируемых в квадрате на всей оси R . Под $L_{2,\rho} = L_{2,\rho}(R)$, где $\rho(x) = e^{-x^2}$ будем понимать множество функций f , для которых $\rho^{1/2}f \in L_2(R)$. Норму в $L_{2,\rho}$ определим равенством

$$\|f\|_{2,\rho} = \|f\|_{L_{2,\rho}} = \left(\int_R \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Обозначим через P_n – подпространство алгебраических полиномов $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_k \in R$ степени не больше n , а через

$$\varepsilon_n(f)_{2,\rho} = \inf \left\{ \|f - p_n\|_{2,\rho} : p_n \in P_n \right\}$$

обозначим величину наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\rho}$ элементами p_n из подпространства P_n . Пусть

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right), \quad n \in Z$$

– ортонормированная система многочленов Эрмита [1, с.114] в $L_2(R)$;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(x) \tag{1}$$

– ряд Фурье–Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$;

$$c_k(f) = \int_R \rho(x) H_k(x) dx \tag{2}$$

– коэффициенты Фурье–Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$;

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k(f) H_k(x) \quad (3)$$

– частичная сумма ряда (1).

Хорошо известно, что свойство минимальности частичных сумм (3) выражается в том, что

$$\varepsilon_n(f)_{2,\rho} = \|f - S_n(f, \cdot)\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

В пространстве $L_{2,\rho}$ рассмотрим оператор [2]

$$F_n(f) = F_n f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R \rho(t) f\left(x\sqrt{1-h^2} + ht\right) dt \quad (0 < h < 1), \quad (5)$$

который назовем оператором обобщенного сдвига.

Используя оператор обобщенного сдвига (5), определим разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h(f; x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - I)f(x),$$

$$\Delta_h^m(f; x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot); x) = (F_h - I)^m f(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где I – единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}$, а

$$F_h^0 f(x) = f(x), \quad F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)) \quad (k = 1, m; m \in N).$$

Величину

$$\Omega_m(f; t)_{2,\rho} = \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f; x)\|_{2,\rho} : 0 < h \leq t \right\} \quad (6)$$

назовем специальным модулем непрерывности порядка m функции $f \in L_{2,\rho}$.

В [2] (лемма 2) доказано, что для любой $f \in L_{2,\rho}$ с формальным разложением в ряд (1), оператор (5) разлагается в ряд

$$F_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-h^2)^{k/2} c_k(f) H_k(x), \quad (7)$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства (7), сходится в пространстве $L_{2,\rho}$. Пользуясь равенством (7), для разности первого порядка ($m=1$) имеем:

$$\Delta_h^1(f; x) = F_h f(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-h^2)^{k/2} - 1 \right) c_k(f) H_k(x).$$

По методу математической индукции для любого $m \geq 2$, $m \in N$ находим

$$\Delta_h^m(f; x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot); x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-h^2)^{k/2} - 1 \right)^m c_k(f) H_k(x). \quad (8)$$

Применяя к соотношению (8) равенство Парсеваля, получаем

$$\left\| \Delta_h^m(f; \cdot) \right\|_{2,\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - (1-h^2)^{k/2} \right)^{2m} c_k^2(f),$$

благодаря которому равенство (6) приобретает вид

$$\Omega_m^2(f; t)_{2,\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - (1-h^2)^{k/2} \right)^{2m} c_k^2(f).$$

Пусть

$$D_\rho = \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$$

– дифференциальный оператор второго порядка Чебышёва–Эрмита с соответствующим весом $\rho(x) = e^{-x^2}$. Для каждого $r \in N$ положим

$$D_\rho^0 f = f, \quad D_\rho^1 f = D_\rho f, \quad \dots \quad D_\rho^r f = D_\rho^1(D_\rho^{r-1} f).$$

Символом $L_{2,\rho}^{(r)} = L_2^{(r)}(D_\rho)$, $r \geq 2$, $r \in N$ обозначим множество функций $f \in L_{2,\rho}$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$ -порядка и для которых $D_\rho^r f \in L_{2,\rho}$. В [2] доказано, что если $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, то для коэффициентов Фурье–Эрмита (2) имеет место формула

$$c_n(f) = (-1)^r (2n)^{-r} c_n(D_\rho^r f), \quad r, n \in N. \quad (9)$$

Из равенства (1), учитывая формулу (9), в силу линейности оператора D^r имеем

$$D^r f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(D^r f) H_k(x) = (-1)^r \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^r c_k(f) H_k(x). \quad (10)$$

Применяя равенство Парсеваля, из (10) в силу ортогональности системы $\{H_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_{2,\rho}$ получаем

$$\left\| D_\rho^r \right\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{2r} c_k^2(f).$$

Заменяя f на $D^r f$ в равенстве (4) и учитывая (9), будем иметь

$$\varepsilon_{n-1}^2(D^r f)_{2,\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(D^r f) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{2r} c_k^2(f).$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Для любой $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ имеет место точное равенство

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho} = (2n)^{-r} \varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\rho}.$$

Из леммы 1 вытекает следующее

Следствие 1. Для любой $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\rho}} = \frac{1}{(2n)^r}.$$

Имеет место следующее общее утверждение:

Теорема 1. Пусть $k, n \in N$, $r \in Z_+$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h < 1$, a $q(t)$ – неотрицательная измеримая на интервале $(0, h)$ не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(\Omega_\rho^r(f), t)_{2,\rho} q(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \int_0^h \left(1 - (1-t^2)^{n/2} \right) q(t) dt \right\}^{-1/p}.$$

Из теоремы 1 вытекают ряд следствий:

Следствие 2. Если в условиях теоремы 1 полагать $p = 1/m$, $m \in N$, $q(t) = t$, то получаем

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^{1/m}(\Omega_\rho^r(f), t)_{2,\rho} q(t) dt \right\}^m} = \left\{ \frac{h^2}{2} + \frac{1}{n+2} (1-h^2)^{(n+2)/2} - \frac{1}{n+2} \right\}^{-m}, \quad (11)$$

и если $h = \sqrt{2/(n+2)}$, из (11) при $n \rightarrow \infty$ вытекает соотношение

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ (n+2) \int_1^{\sqrt{2/(n+2)}} \Omega_m^{1/m}(\Omega_\rho^r(f), t)_{2,\rho} t dt \right\}^m} = \left\{ \left(1 - \frac{2}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right\}^{-m} \rightarrow e^m.$$

Следствие 3. Если в условиях теоремы 1 полагать $q(t) = nt(1-t^2)^{(n-2)/2}$, $n \in N$, то получим

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ n \int_0^h \Omega_m^p(\Omega_\rho^r(f), t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{(n-2)/2} dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \frac{mp+1}{\left(1 - (1-h^2)^{n/2} \right)^{mp+1}} \right\}^{1/p}, \quad (12)$$

и если $h = \sqrt{2/n}$, то переходя к верхней грани в обеих частях (12) по всем $n \in N$, получим

$$\begin{aligned} & \sup_{n \in N} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ n \int_0^{\sqrt{2/n}} \Omega_m^p (\Omega_\rho^r(f), t)_{2,\rho} t (1-t^2)^{(n-2)/2} dt \right\}^{1/p}} = \\ & = \left\{ (mp+1) (1-e^{-1})^{-(mp+1)} \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности при $p = \frac{1}{m}$, $m \in N$ следует равенство

$$\sup_{n \in N} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2n)^r \varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ n \int_0^{\sqrt{2/n}} \Omega_m^{1/m} (\Omega_\rho^r(f), t)_{2,\rho} t (1-t^2)^{(n-2)/2} dt \right\}^m} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

Пусть B – единичный шар в пространстве $L_{2,\rho}$, $\Lambda_n \subset L_{2,\rho}$ – произвольное n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_{2,\rho}$ – подпространство коразмерности n , $L : L_{2,\rho} \rightarrow \Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор, $L^\perp : L_{2,\rho} \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; Q – выпуклое центрально-симметричное подмножество в пространстве $L_{2,\rho}$.

Величины [4, 6] $b_n(Q, L_{2,\rho})$, $d_n(Q, L_{2,\rho})$, $\delta_n(Q, L_{2,\rho})$, $d^n(Q, L_{2,\rho})$, $\Pi_n(Q, L_{2,\rho})$ называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным поперецниками подмножества Q в пространстве $L_{2,\rho}$.

Пусть $h \in (0, 1)$, $0 < p \leq \infty$, $k, r \in N$, $q(t)$ – весовая функция на $(0, h)$, $W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; q)$ – класс функций $L_{2,\rho}^{(r)}$ удовлетворяющих условию

$$\int_0^h \Omega_m^p (D_\rho^r f; t)_{2,\rho} q(t) dt \leq 1.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; q), L_{2,\rho}) &= \varepsilon_{n-1}(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; q), L_{2,\rho}) = \\ &= (2n)^{-r} \left\{ \int_0^h \left(1 - (1-t^2)^{n/2} \right)^{mp} q(t) dt \right\}^{-1/p}, \end{aligned}$$

где $n \in N$, $0 < p \leq \infty$, $\gamma_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$, а

$$\varepsilon_{n-1}\left(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; q), L_{2,\rho}\right) = \sup\left\{\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\rho} : f \in W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; q)\right\}.$$

Аналогичные задачи, когда в качестве аппарата приближения используются различные классические ортогональные системы, исследованы в работах [3–8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сегё, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – Москва : Физматгиз, 1962. – 500 с.
2. Абилов, В. А. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье–Эрмита в пространств $L_2(R; e^{-x^2})$ / В. А. Абилов, Ф. В. Абилова // Известия вузов. Математика. – 2006. – № 1 (504). – С. 3–12.
3. Шабозов, М. Ш. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников / М. Ш. Шабозов, М. С. Сайдусайнов // Математические заметки. – 2018. – Т. 103, вып.4. – С. 617–631.
4. Тухлиев, К. Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье–Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов / К. Тухлиев // Чебышевский сборник. – 2016. – Т. 17, № 4. – С. 141–156.
5. Тухлиев, К. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций отих частных сумм ряда Фурье–Чебышёва в пространстве L_2 , I / К. Тухлиев // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2013. – №4. – С. 33–46.
6. Тухлиев, К. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций отих частных сумм ряда Фурье–Чебышёва в пространстве L_2 , II / К. Тухлиев // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2013. – № 4. – С. 22–32.
7. Тухлиев, К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(R)$, I / К. Тухлиев // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2013. – № 3 (152). – С.19–29.
8. Тухлиев, К. О некоторых экстремальных задачах наилучших приближений целыми функциями / К. Тухлиев // Вестник Томского государственного педагогического университета (TSPU Bulletin). – 2015. – Вып. 2 (155). – С. 213–220.

РАЗДЕЛ V
КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ФИЗИКЕ
КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

И.Л. Батаронов, Т.А. Надеина
Воронежский государственный технический университет, Россия

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
ЭНЕРГИИ РАССЕЯНИЯ ДИСЛОКАЦИОННОЙ ПАРЫ**

Ослабление излучения в кристалле становится значительным при низких температурах. Вопрос радиационного торможения был проигнорирован. Однако ввиду явления упругих волновых помех здесь следует ожидать проявления специфических эффектов. В работе получено выражение для рассеяния энергии пары дислокаций, что связано с потерями излучения при колебаниях.

Система уравнений малых колебаний дислокационного скопления в диссипативном кристалле имеет вид:

$$K_\alpha \xi_\alpha + \sum_\beta \left[\tilde{G}_{\alpha\beta} - i\omega \int \frac{dq_\perp}{(2\pi)^2} \eta_{\alpha\beta} \exp(i\vec{r}^{\alpha\beta} \vec{q}_\perp) \right] \xi_\beta = f_\alpha , \quad (1)$$

где Фурье-образ функции Грина диссипативного представлено выражением:

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(q_z, \omega) = - \iiint q_i \tilde{\lambda}_{ik}^\alpha G_{kl} \tilde{\lambda}_{lm}^\beta q_m \exp(i\vec{q}_\perp \vec{r}^{\alpha\beta}) \frac{d\vec{q}_\perp}{(2\pi)^2}, \quad (2)$$

а $\vec{r}^{\alpha\beta} = \vec{r}^\alpha - \vec{r}^\beta$ – радиус-вектор, соединяющий α - и β -дислокации в плоскости, перпендикулярной их линиям, f_α – внешняя сила, действующая на дислокацию.

Значение K_α в системе (1) включает выражения, содержащие статические упругие поля дислокаций в ансамбле дислокаций.

Главная линейная по ω часть диссипативной функции Грина характеризуется матрицей коэффициентов динамического торможения:

$$B_{\alpha\beta} = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left(\tilde{G}_{\alpha\beta} - \frac{i\omega}{2\pi} \int \eta_{\alpha\beta} J_0(rq_\perp) q_\perp dq_\perp \right). \quad (3)$$

При низких температурах, когда линейные по ω составляющие функции $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ вымораживаются, сила торможения пропорциональна $\omega|\omega|$.

Рассмотрим колебание пары дислокаций под действием плоской упругой волны с частотой ω , проекцию волнового вектора \vec{q} на линию дислокаций и амплитудой τ . В этом случае $f_\alpha = b_\alpha \tau$ решение системы уравнений малых колебаний [1] кластера дислокаций в скоплении представляется в виде:

$$\xi_\alpha = \sum_\beta \tilde{G}_{\alpha\beta} b_\beta \tau . \quad (4)$$

Здесь \vec{b} – вектор Бюргерса дислокации. С учетом этого результата, Фурье-изображение произведения, создаваемое силами при смещениях дислокаций, равно

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} \xi_{\alpha} = \tau^2 \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha} \tilde{G}_{\alpha\beta} b_{\beta} . \quad (5)$$

Мнимая часть этого выражения численно равна рассеиванию энергии за один период колебаний, который мы будем выражать как:

$$D = \text{Im} \frac{2\tau^2}{P + \sigma(F - P_0)} = 2\tau^2 \frac{\text{Im} \Delta^*}{|\Delta|^2} , \quad (6)$$

где P – диагональная составляющая матрицы функции Грина кристалла, $\vec{\tau}$ – вектор, касательный к линии дислокации, $\Delta = P + \sigma(F - P_0)$. Поскольку в рассматриваемой постановке задачи торможение дислокации обусловлено только излучением упругих волн ускоренно движущихся дислокаций, то диссипация (6) целиком связана с радиационными потерями при колебаниях пары дислокаций.

Характер рассеяния в энергии излучением зависит от отношения частоты и волнового вектора к характеристическим параметрам $\omega_r = c_s/r$ и r^{-1} . В крайнем длинноволновом низкочастотном случае для диполя дислокации мы получаем выражение $\Delta = P - P'$, в котором элементы, содержащие множитель $\ln(q^2 - \omega^2/c^2)$, ответственный за появление мнимой части в (6), уменьшаются, и нет ослабления излучения в нулевом приближении. Для пары дислокаций одного знака будем иметь $\Delta = P + P'$, что совпадает с выражением для единичной «супердислокации», имеющей «радиус ядра» $\sqrt{r_0 r}$, с соответствующими выводами относительно величины рассеяния (6) дислокаций.

В другом предельном коротковолновом высокочастотном случае ($\omega > \omega_r$, $rq_z \gg 1$) функция $F \rightarrow 0$, и мы получаем систему из двух динамически не взаимодействующих дислокаций, так что выражение (6) идет в сумму значений рассеяния для двух отдельных дислокаций. При этом влияние одной дислокации на другую оказывается только в наличии постоянного слагаемого P_0 , что физически эквивалентно флуктуации дислокации в потенциальной яме.

В промежуточной области ($\omega \sim \omega_r$, $rq \sim 1$) провести аналитическое исследование зависимости $D(q, \omega)$ не представляется возможным. При этом из выражения для функции F следует, что она представлена через бесселевые функции аргумента $(qr)^2 - (\omega/\omega_r)^2$ и поэтому может иметь колебательную частотную зависимость. Для подтверждения этого предположения были сделаны численные вычисления для функции $|\Delta| \cdot D$, как показано на рисунках 1 и 2, которые подтверждают осциллирующий характер зависимости $D(q, \omega)$ в промежуточной области.

На графиках по оси X отложено произведение $r^2 q^2$, по оси Y – $(r^2 \omega^2)/c_t^2 - r^2 q^2$.

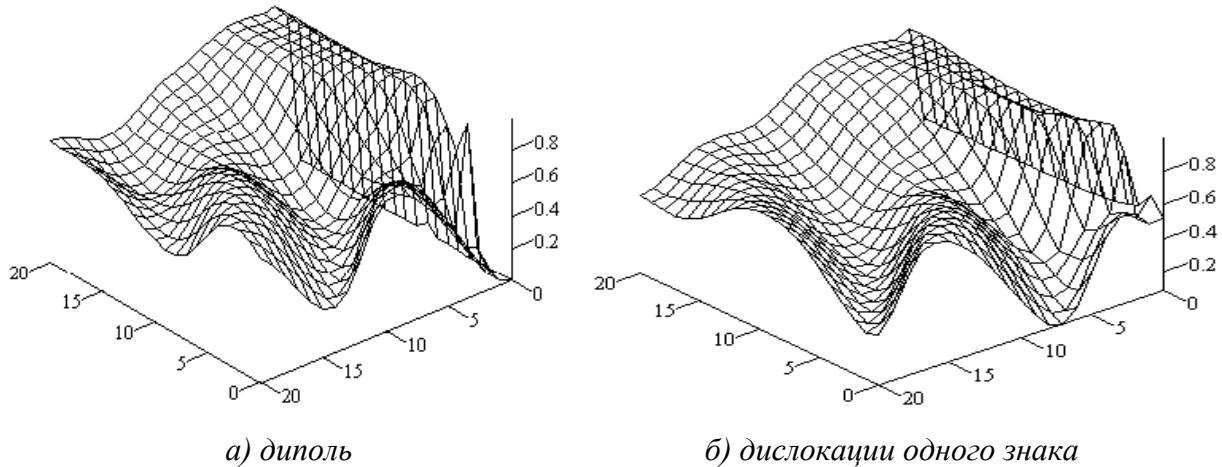


Рис. 1. Частотные зависимости диссипации энергии винтовой пары

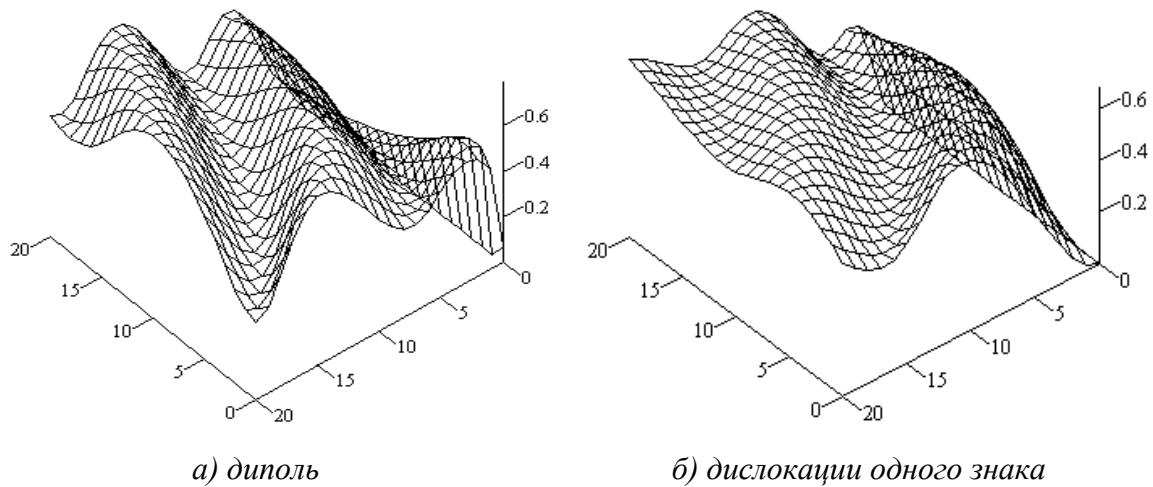


Рис. 2. Частотные зависимости энергии краевой пары

Физической причиной возникновения колебаний является соответствие резонансным (антирезонансным) условиям колебаний дислокаций, приводящее к увеличению (уменьшению) амплитуды колебаний, что, в конечном счете, обусловлено интерференцией упругих волн колебаний дислокаций.

ЛИТЕРАТУРА

- Батаронов, И. Л. О линейном отклике дислокационного ансамбля на импульсное воздействие / И. Л. Батаронов, Т. А. Бабенко, А. М. Рошупкин // Известия АН. Серия физики. – 1997. – Т. 61. – № 5. – С. 877–885.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОННОЙ СТРУКТУРЫ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА QUANTUM ESPRESSO

В твердотельной электронике диоксид кремния является одним из основных материалов: он используется в качестве изолирующего слоя, а также в виде защитного покрытия. Несмотря на то, что исследования электронного строения SiO_2 проводятся уже достаточно давно, все же на данный момент нельзя сказать, что оно изучено полно и всесторонне. При этом важную роль играет численное моделирование, позволяющее не только интерпретировать данные экспериментов, но и прогнозировать их.

В данной работе выполнены теоретические расчеты электронной структуры наиболее распространенной модификации диоксида кремния – α -кварца ($\alpha\text{-SiO}_2$). Для вычислений использовался программный пакет квантово-химического моделирования Quantum ESPRESSO [1], построенный на основе теории функционала плотности (DFT) и методе псевдопотенциала.

Параметры кристаллической структуры $\alpha\text{-SiO}_2$ были взяты из базы данных проекта Materials Project [2]. Элементарная ячейка $\alpha\text{-SiO}_2$ приведена на рисунке 1, она содержит в себе 3 атома Si и 6 атомов O. На этом же рисунке показана соответствующая зона Бриллюэна.

Рассчитанная в работе зонная структура $\alpha\text{-SiO}_2$ представлена на рисунке 2.

Видно, что кварц является широкозонным полупроводником с непрямой запрещенной щелью шириной ~ 5.8 эВ, что в целом согласуется с известными литературными данными [3]. При этом валентная зона шириной ~ 9.7 эВ разделена на две подзоны щелью ~ 1.3 эВ.

Кроме того, нами были вычислены полная и локальные парциальные плотности электронных состояний (рис. 3), а также рассчитаны XANES-спектры вблизи SiK- и OK-краев поглощения в $\alpha\text{-SiO}_2$ (рис. 4, 5), отражающие, как известно, переходы из глубоких остовных 1s-уровней в зону проводимости. Анализируя распределение плотностей электронных состояний, можно сделать вывод о том, что в валентной зоне в целом доминируют p -состояния кислорода с достаточно заметным, однако, вкладом s - и p -состояний кремния

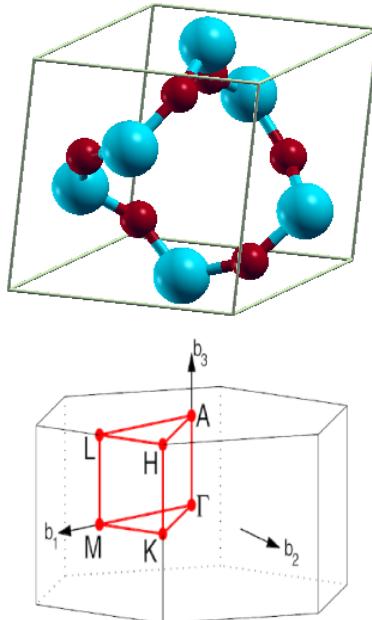


Рис. 1. Вверху –
элементарная ячейка $\alpha\text{-SiO}_2$
(синим цветом обозначены
атомы Si,
красным – атомы O).
Внизу – зона Бриллюэна

в нижней части зоны. В зоне проводимости уже преобладают *p*-состояния кремния.

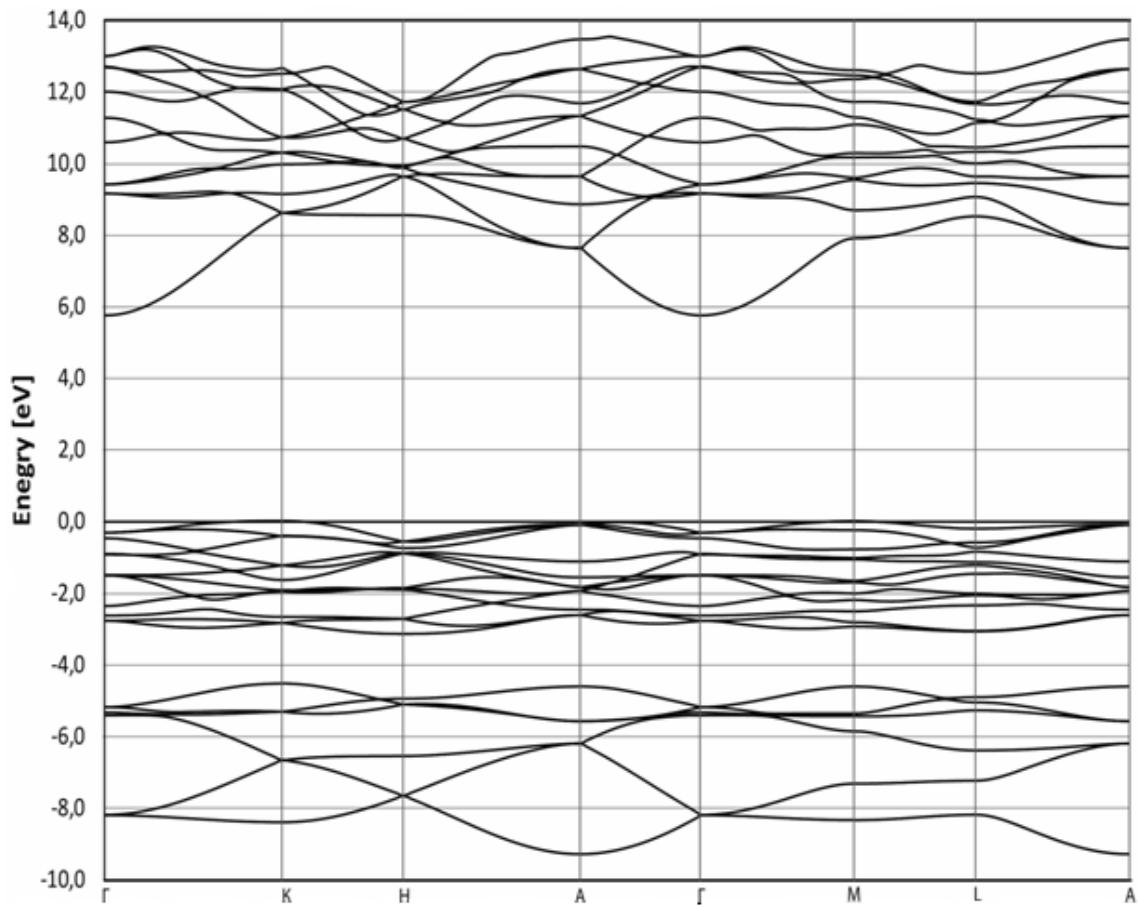


Рис. 2. Зонная структура α -кварца

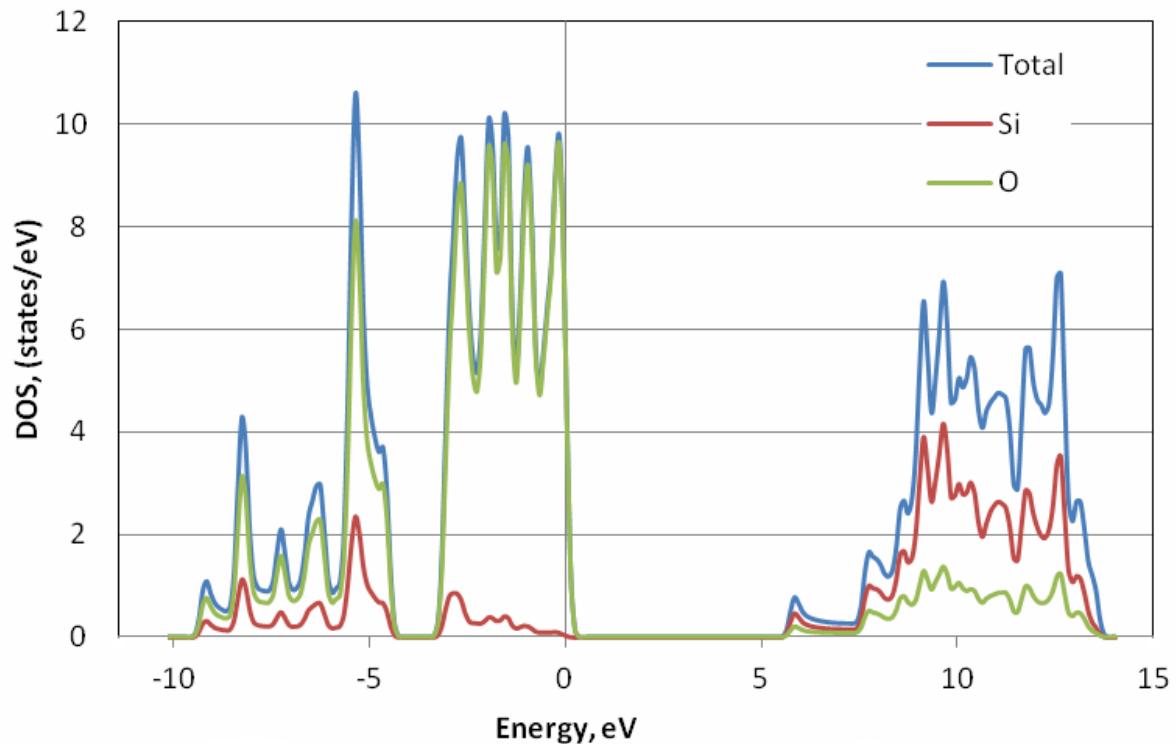


Рис. 3. Полная и локальные плотности электронных состояний в α - SiO_2

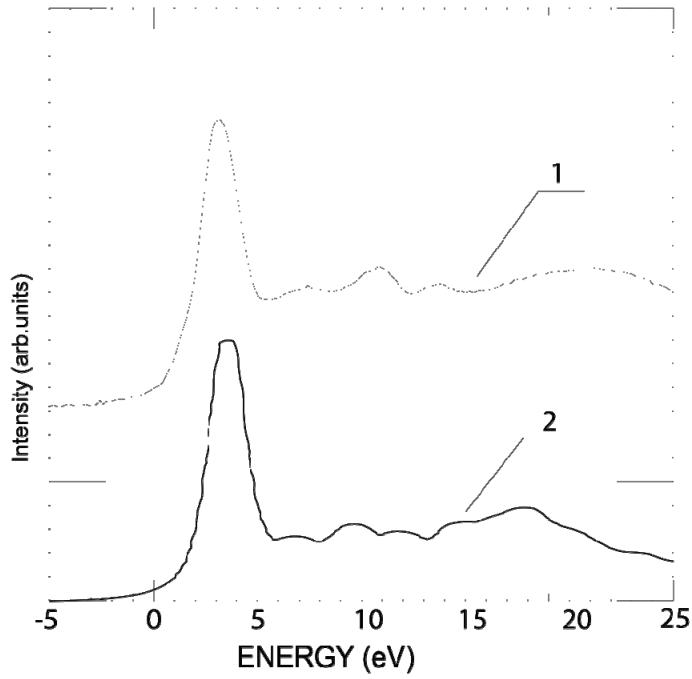


Рис. 4. XANES спектр K-края поглощения кремния в $\alpha\text{-SiO}_2$.
1 – эксперимент [5], 2 – наши расчет

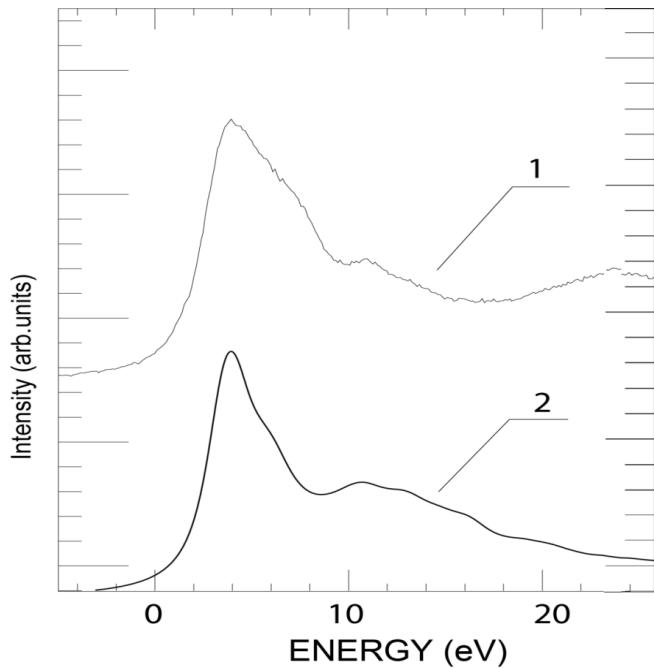


Рис. 5. XANES спектр K-края поглощения кислорода
в $\alpha\text{-SiO}_2$. 1 – эксперимент [5], 2 – наши расчет

Для расчета XANES-спектров использовалось приближение «остовной дырки», описанное в [4]. При этом вычисления проводились для суперъячейки размера $2\times 2\times 2$, один из атомов кремния (или кислорода) в которой содержал остовную дырку на уровне $1s$, для учета которой были сгенерированы соответствующие псевдопотенциалы.

Из рисунков 4 и 5 видно, что как для Si K-, так и для OK- спектров характерно наличие выраженного главного максимума, а также ряда дополнитель-

ных структур в более высокоэнергетической области. На этих рисунках приведены также соответствующие экспериментальные спектры [5], совмещенные с теоретическими по положению главного максимума. Можно отметить достаточно хорошее согласие между результатом нашего расчета и экспериментальными результатами, что свидетельствует о высокой достоверности результатов моделирования, предпринятого в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gianozzi, P. Quantum ESPRESSO: a modular and open-source software project for quantum simulations of materials / P. Giannozzi, S. Baroni, N. Bonini [etc.] // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2009. – Vol. 21, № 39. – P. 395502 (19).
2. The Materials Project. – URL: <https://materialsproject.org/> (дата обращения: 17.09.2020). – Text : Electronic.
3. Некрашевич, С. С. Электронная структура оксида кремния (обзор) / С. С. Некрашевич, В. А. Гриценко // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, Вып. 2. – С. 209–223.
4. Теоретическое и экспериментальное исследование электронной структуры диоксида олова / С. И. Курганский, М. Д. Манякин, О. И. Дубровский [и др.]. // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, Вып. 9. – С. 1690–1695.
5. Wu, Z. Y. Electronic structure analysis of α -SiO₂ via x-ray absorption near-edge structure at the Si K, L_{2,3} and O K edges / Wu Z.Y., Jollet F, and Seifert F. // Journal of Physics: Condensed Matter. – 1998. – Vol. 10, № 36. – P. 8083–8092.

В.Р. Иминова, М.Д. Манякин, Ю.С. Леденева
Воронежский государственный университет, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ L_3 -СПЕКТРОВ БЛИЖНЕЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ КРАЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ПОГЛОЩЕНИЯ МЕДИ

Среди металлов медь занимает особое место из-за высокой электропроводности и теплопроводности. По электропроводности медь уступает только серебру и поэтому является важнейшим проводниковым материалом. Она обладает высокой коррозионной стойкостью, технологичностью, сравнительно низкой стоимостью. Из-за полезных химических, оптических, электрических и электрофизических свойств применение меди, в том числе наноформ, в последние годы увеличилось в различных областях, таких как катализ, производство химических сенсоров и электронных устройств, биологическая визуализация [1–4]. Подобные практические приложения, а также необходимость разработки стратегий функционального применения в технике и технологиях, требуют детального исследования электронного строения материалов. Наибо-

лее точную информацию о строении свободных (незанятых) электронных состояний дает экспериментальный метод спектроскопии ближней тонкой структуры края рентгеновского поглощения (XANES), что вызывает необходимость теоретических расчетов этих спектров с целью их интерпретации.

В настоящее время проведено крайне мало теоретических расчетов XANES-спектров меди [5, 6]. К тому же существуют трудности моделирования, связанные с нетривиальным подходом для вычисления XANES-спектров меди. В данной работе представлены результаты теоретического исследования XANES₃-спектров Cu в сравнении с экспериментальными данными [7].

Расчет электронной структуры меди проводился методом линеаризованных присоединенных плоских волн, применявшимся ранее для исследования как металлов [8, 9], так и полупроводниковых кристаллов [10]. Моделирование выполнялось в программном пакете Wien2k [11] с использованием обобщенного градиентного приближения для обменно-корреляционной энергии.

Величины параметров $R_{mt} * k_{max}$ (где R_{mt} – наименьший из радиусов muffin-tin сфер, k_{max} – максимально возможное значение величины вектора в \mathbf{k} -пространстве) и l_{max} (максимальное значение l при разложении базисной функции внутри атомной сферы по сферическим гармоникам) были взяты равными 7 и 10 соответственно. Коэффициент смешивания электронных плотностей был взят равным 0.2. Была использована сетка из 5000 \mathbf{k} -точек в первой зоне Бриллюэна.

Медь образует кубическую гранецентрированную решетку (пространственная группа $Fm\bar{3}m$) и имеет постоянную решетки 3.6150 Å [12].

Считается, что XANES-спектры для более правильного сравнения результатов расчета с экспериментом лучше вычислять с учетом возбужденных состояний. Для большинства материалов с этой целью создается суперъячейка, объем которой в несколько раз больше объема элементарной ячейки [13, 14]. Она используется при моделировании структуры, которая содержит точечный дефект, например атом с оставной дыркой. Создание оставной дырки происходит следующим образом: для выбранного атома, спектр которого нужно рассчитать, удаляется один оставной электрон, который добавляется в зону проводимости для сохранения электронейтральности.

Однако для меди такой подход является не вполне корректным. Расчеты показывают, что создание суперъячейки, содержащей атом с оставной дыркой, в случае меди приводит к плохо согласующимся с экспериментом результатам. Самым оптимальным вариантом исследования является создание половины оставной дырки в самой элементарной ячейке. Это состояние также известно как переходное состояние Слэттера.

К аналогичному выводу пришли и авторы статьи [6]. Они сравнили расчеты с оставной дыркой и без нее для элементарной ячейки меди и суперъячейки размером $2 \times 2 \times 1$ (с 16 атомами). Это сравнение показало, что оставная дырка вследствие хорошего экранирования электронами проводимости метал-

ла имеет лишь незначительное воздействие на другие атомы Cu в суперячейке, а значит, для расчетов лучше использовать элементарную ячейку. Кроме того, сравнение с экспериментальными спектрами показало, что наилучший результат был получен для случая, когда атом имел половину оставной дырки.

На рисунке показаны экспериментальный [7] и теоретически рассчитанные XANES_{L3}-спектры меди в двух вариантах расчета: без оставной дырки (сплошная линия) и с половиной дырки на оставном 2p-уровне, с которого происходит электронный переход в незанятые состояния зоны проводимости (точечная линия).

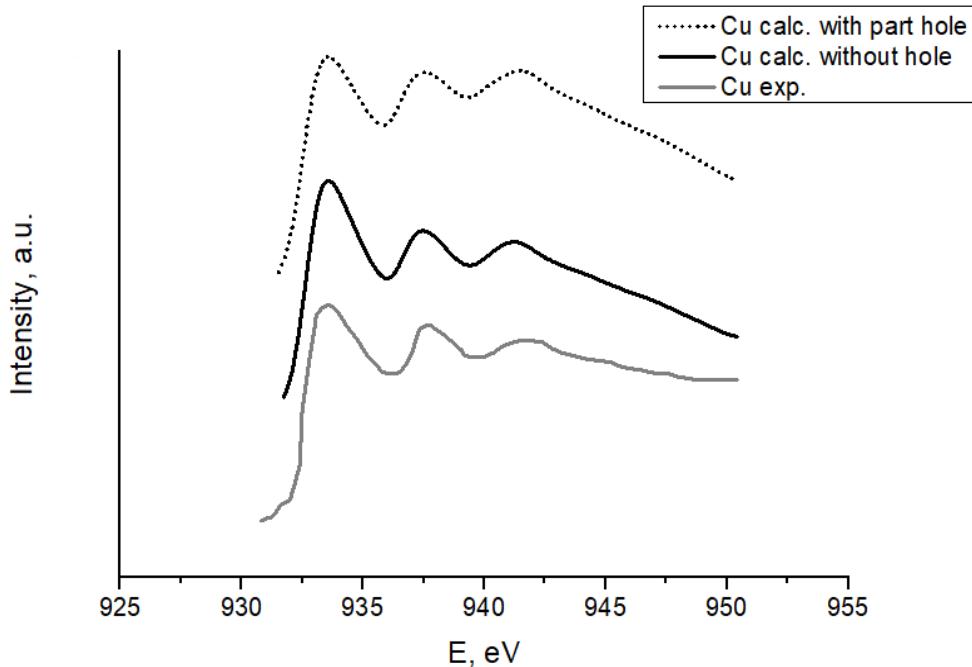


Рис. Экспериментальный [7] и теоретические XANES_{L3}-спектры меди

Для L_3 -спектров Cu характерно три выраженных максимума: при энергиях 933.6 eV, 937.6 eV и 941.6 eV. Расчет спектра Cu L_3 без оставной дырки дает приемлемое согласие с экспериментом. Тем не менее, существуют некоторые расхождения. Видно, что в данном случае теоретический расчет наиболее точно согласуется с экспериментом, когда вычисление спектра производится с 0.5 оставной дырки. Это связано с тем, что d-электроны в Cu несколько локализованы и вносят меньший вклад в экранирование, следовательно, оставная дырка в Cu только частично экранирована валентными электронами.

Наличие в расчете половины оставной дырки воздействует на спектр из-за изменения парциальной плотности состояний и уровня Ферми. В XANES_{L3}-спектре дают вклад в основном незанятые парциальные плотности d-состояний. Оставная дырка действует на парциальную d-DOS таким образом: занятая плотность состояний становится уже и сдвигается по энергии ниже уровня Ферми, в то время как состояния в незанятой части остаются при примерно той же энергии, но с пониженнной интенсивностью.

Таким образом, в данной статье мы провели расчет XANES_{L3} спектров меди не классическим способом, а именно с созданием частичной дырки на основном 2p-уровне. Мы пришли к выводу, что такой подход дает наилучшее согласие с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hu, X. Recent advances in the analytical applications of copper nanoclusters/ X. Hu, T. Liu, Y. Zhuang, W. Wang, Y. Li, W. Fan and Y. Huang // TrAC, Trends Anal. Chem. – 2016. – Vol. 77. – P. 66–75.
2. Zhang, L. Metal nanoclusters: new fluorescent probes for sensors and bioimaging / L. Zhang and E. Wang // Nano Today. – 2014. – Vol. 9. – P. 132–157.
3. Liu, X. Atomically precise copper nanoclusters and their applications / X. Liu and D. Astruc // Coord. Chem. Rev. – 2018. – Vol. 359. – P. 112–126.
4. Wang, Z. Synthesis, optical properties and applications of light-emitting copper nanoclusters / Z. Wang, B. Chen and A. L. Rogach // Nanoscale Horiz. – 2017. – Vol. 2. – P. 135–146.
5. Nesvizhskii, A. I. L-edge XANES of 3d-transition metals/ A. I. Nesvizhskii and J. J. Rehr // J. Synchrotron Rad. – 1999. – Vol. 6. – P. 315–316.
6. Luitz, J. Partial core hole screening in the Cu L3 edge / J. Luitz, M. Maier, C. Hebert, P. Schattschneider, P. Blaha, K. Schwarz, and B. Jouffrey // Eur. Phys. J. – 2001. – Vol. 21. – P. 263–267.
7. Grioni, M. Unoccupied electronic structure and core-hole effects in the x-ray-absorption spectra of Cu₂O / M. Grioni, J. F. van Acker, M. T. Czyzyk, and J.C. Fuggle // Phys. Rev. B. – 1992. – Vol. 45. – P. 3312.
8. Electronic structure of rhenium disilicides / S. I. Kurganskii, N. S. Pereslavtseva, E.V. Levitskaya [et al.] // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2002. – Vol. 14, N 27. – P. 6833–6839.
9. Electronic structure of molybdenum disilicide / S. I. Kurganskii, N.S. Pereslavtseva, E.V. Levitskaya, Yu.A. Yurakov // Physica status solidi (b). – 2002. – Vol. 233, N 2. – P. 306–311.
10. Борщ, Н. А. Электронная структура и спектральные характеристики Zn-замещенных клатратных силицидов / Н. А. Борщ, Н. С. Переславцева, С. И. Курганский // Физика и техника полупроводников. – 2011. – Т. 45, № 6. – С. 729–739.
11. Schwarz, K. Electronic structure calculations of solids using the WIEN2k package for material sciences / K. Schwarz, P. Blaha, G.K.H. Madsen // Comput. Phys. Commun. – 2002. – Т. 147, № 1–2. – P. 71–76.
12. Burdick, A. Energy band structure of copper / A. Burdick // Phys. Rev. – 1963. – Vol. 129. – № 1. – P. 138–150.
13. Теоретическое и экспериментальное исследование электронной структуры диоксида олова / С. И. Курганский, М. Д. Манякин, О.И. Дубровский [и др.]. // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, № 9. – С. 1690–1695.

14. Potudanskii, G. P. Oscillating fine structure of x-ray absorption and atomic structure of metallic layers in a magnetic multilayer nanostructure $(O_{45}Fe_{45}Zr_{10}/SiO_2)_n$ / G. P. Potudanskii, S. I. Kurganskii, E. P. Domashevskaya // Materials Research Express. – 2019. – Vol. 6, №. 11. – P. 1150.

М.Д. Манякин, С.И. Курганский
Воронежский государственный университет, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ СТРУКТУРЫ НИКЕЛЯ

Никель – ферромагнитный металл, который благодаря своим физическим характеристикам может рассматриваться в качестве основы для создания новых функциональных материалов для нужд наноэлектроники и спинtronики. В связи с этим представляет интерес тщательное изучение особенностей энергетического строения никеля. Особую актуальность представляет расчет рентгеноспектральных характеристик никеля, поскольку их можно сравнить непосредственно с результатами, получаемыми экспериментальным путем, например методом спектроскопии ближней тонкой структуры края рентгеновского поглощения (X-ray Absorption Near Edge Structure – XANES). Интерес к данному методу вызван его особой чувствительностью к тонким приповерхностным слоям материала и локальному окружению атомов, что особенно важно для исследований наноразмерных структур.

В данной работе нами было проведено моделирование электронной структуры монокристаллического Ni и расчет его XANES_{L_{2,3}} спектра. Расчет электронного строения Ni выполнялся методом ЛППВ, реализованным в программном пакете Wien2k. Никель обладает ГЦК кристаллической решеткой, характеризуется группой симметрии Fm3m и имеет параметр ячейки равный 3.5239 Å. Для учета обменно-корреляционной энергии нами было использовано приближение GGA. Параметр $r_{mt} \cdot k_{max}$, определяющий число базисных функций, брался равным 7.0, где r_{mt} – радиус muffin-tin сферы, k_{max} – граница обрыва плоских волн.

На рисунке 1 представлены результаты расчетов зонной структуры никеля для двух различных направлений спина. Ширина валентной зоны Ni составляет 9 эВ. Дно валентной зоны расположено в точке Г. Зона у дна валентной полосы имеет ярко выраженную параболическую дисперсию в направлениях Г – X, Г – L, Г – K, характерную для s-подобных состояний. При этом положение нижней зоны на энергетической шкале практически не зависит от направления спина. Напротив, для лежащих выше по энергии p- и d-подобных зон наблюдается смещение вверх по энергии для состояний со спином вниз. В среднем величина такого смещения составляет от 0.6 до 1.0 эВ.

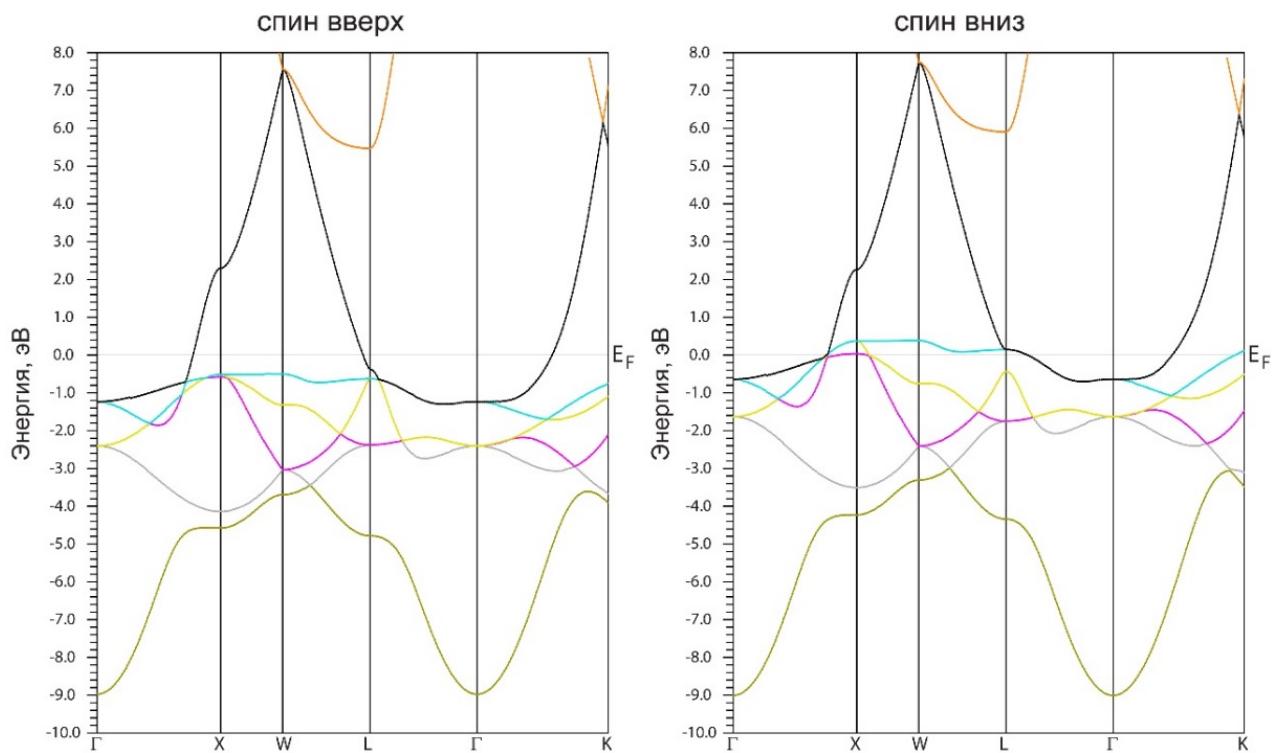


Рис. 1. Зонная структура Ni

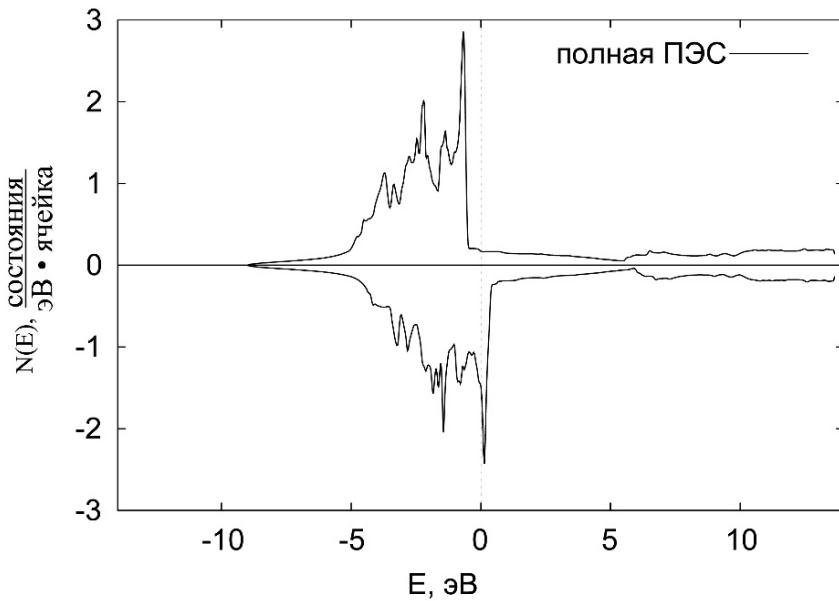


Рис. 2. Спектр полной ПЭС Ni с учетом направления спина

Результаты расчетов спектров полной плотности электронных состояний (ПЭС) для Ni с учетом направления спина представлены на рисунке 2. Видно, что интенсивность спектра ПЭС возрастает от дна к потолку валентной полосы. При этом главный максимум ПЭС для спина вверх лежит существенно ниже уровня Ферми на ~0.7 эВ, а главный максимум ПЭС для спина вниз – чуть выше (на ~0.1 эВ). Основной вклад в образование этих максимумов вносят Nid-состояния. Таким образом, заполнение d-состояний со спином вверх существенно выше заполнения d-зон со спином вниз. Именно различие в чис-

лах заполнения этих состояний и обуславливает главным образом наличие магнитного момента в никеле, величина которого, согласно расчету, составляет $0.62 \mu_B/\text{ат}$, что близко к расчетным значениям 0.63 [1], 0.66 [1] $\mu_B/\text{ат}$ и согласуется с экспериментальными значениями 0.56 [1], 0.606 [2] $\mu_B/\text{ат}$. Отметим, что результаты наших расчетов зонной структуры и спектров ПЭС показывают отличное согласие с результатами расчетов [1, 3].

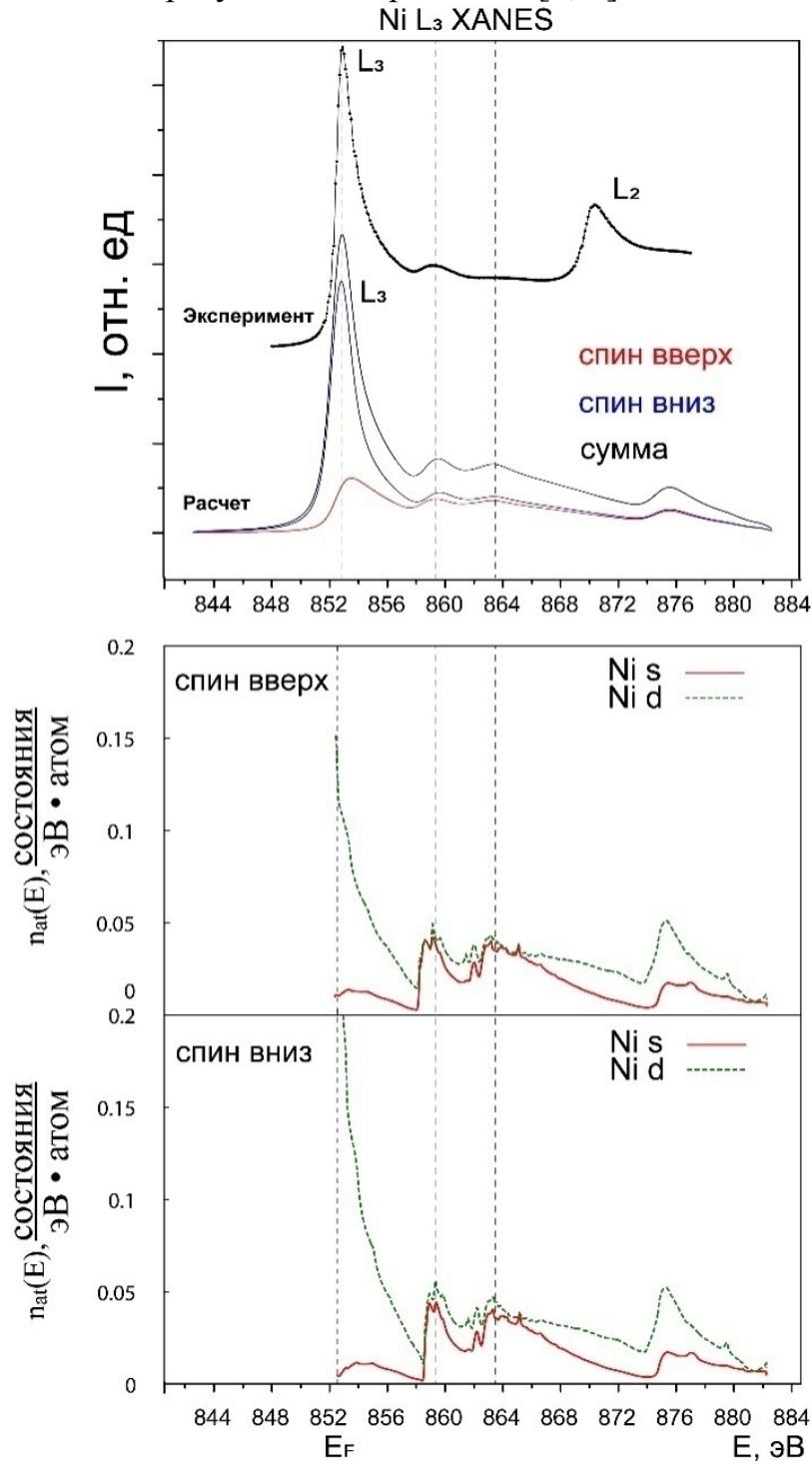


Рис. 3. Сравнение экспериментального XANES спектра Ni L_{2,3} [4] с рассчитанными L₃ краями для спина вверх и спина вниз и суммарным полным спектром.

Нижне приводятся соответствующие L₃ спектру плотности s-, d- состояний для состояний спин-вверх и спин-вниз

Нами был теоретически рассчитан XANES спектр Ni L₃ края поглощения. При этом мы проводили моделирование как для случая элементарной ячейки, так и для суперъячейки 2×2×2. Сопоставление с экспериментом [4] показало, что расчет с использованием суперъячейки не улучшает результат по сравнению со случаем элементарной ячейки. Эта ситуация в целом аналогична известному расчету XANES L_{2,3} спектра меди [5], являющемуся типичным для 3d металлов, где подобный эффект объясняется малой длиной экранирования электронов в металлах.

Результаты расчета Ni L₃ края поглощения, отражающего плотность свободных (незанятых) состояний *s*- и *d*-симметрии в зоне проводимости, для случая элементарной ячейки приведены на рисунке 3. Интенсивность главного максимума спектра для спина вниз намного превосходит интенсивность максимума спектра для спина вверх, хотя в остальном спектры практически совпадают. Различия в интенсивности главного максимума между двумя спектрами объясняются различным заполнением и, соответственно, различным вкладом в спектр состояний *d*-симметрии со спинами вверх и вниз, что наглядно видно из рисунка 3. В области 0.5 эВ выше уровня Ферми интенсивность состояний *d*-симметрии со спинами вверх не превышает ~0.15 сост/(эВ·ат), в то время как для состояний *d*-симметрии со спинами вниз эта величина равняется ~2.5 сост/(эВ·ат). В свою очередь, суммарный спектр (спин вверх + спин вниз) показывает отличное согласие с экспериментальным [4] по форме, числу энергетических особенностей, их взаимному расположению и соотношению интенсивностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Spin-polarized band-structure calculations for Ni / J. R. Anderson, D. A. Papaconstantopoulos, L. L. Boyer, J. E. Schirber // Phys. Rev. B. – 1979. – Vol. 20. – N. 8. – P. 3172 – 3185.
2. Galperin, F. M. The Electronic Structure and Magnetic Moment of Fe, Co, and Ni Atoms / F. M. Galperin // Phys. stat. sol. (b). – 1973. – Vol. 57. – P. 715.
3. Optical conductivity of Ni_{1-x}Pt_x alloys (0<x<0.25) from 0.76 to 6.6 eV / L. S. Abdallah, T. M. Tawalbeh, I. V. Vasiliev [et al] // AIP Advances. – 2014. – Vol. 4. – P. 017102 (12).
4. Изучение особенностей формирования композитных структур на основе столбиков никеля в матрице диоксида кремния с помощью синхротронных XANES исследований в режиме регистрации выхода электронов или фотонов / Е. В. Паринова, А. К. Федотов, Д. А. Коюда, Ю. А. [и др.] // Конденсированные среды и межфазные границы. – 2019. – 21 (1). – С. 116–125.
5. Hebert, C. Improvement of energy loss near edge structure calculation using Wien2k / C. Hebert, J. Luitz, P. Schattschneider // Micron. – 2003. – Vol. 34. – P. 219–225.

*Г.П. Потуданский, С.И. Курганский
Воронежский государственный университет, Россия*

ЗОННАЯ СТРУКТУРА ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ И МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ФАЗ ДИСИЛИЦИДА ЖЕЛЕЗА*

В настоящее время с развитием наноэлектроники и спинtronики возникает интерес в фундаментальных и прикладных исследованиях наносистем [1–3], что влечет за собой необходимость в высокоточных методах анализа свойств материалов. Наноструктуры из дисилицидов переходных металлов являются одними из фундаментальных материалов при производстве изделий микро- и наноэлектроники. Среди этих соединений особый интерес вызывает дисилицид железа [4], поскольку он способен образовывать металлические и полупроводниковые фазы. Зонная структура играет важную роль для предсказания различных свойств материалов, в том числе и квантовых. Известно, что уменьшение размера кристаллов до нанометрового масштаба вызывает изменение свойств на границе раздела [4]. Поэтому всестороннее изучение FeSi_2 имеет фундаментальное значение.

Расчет металлического FeSi_2 проводился объемным полнопотенциальным методом присоединенных плоских волн с локальными орбиталями (FP-APW+lo) с обменно-корреляционным функционалом в приближении обобщенной градиентной аппроксимации (PBE-GGA), который, как было ранее нами показано [5], позволяет получить надежный результат при вычислении электронного строения кристаллов и нанопленок [6, 7] с металлическим типом проводимости. Расчет полупроводникового FeSi_2 проводился тем же методом FP-APW+lo, но уже с функционалом в приближении модифицированного обменно-корреляционного потенциала Беки-Джонсона (mBJ-LDA), который позволяет получить более точное значение ширины запрещенной зоны полупроводников и диэлектриков.

Дисилицид железа существует в двух фазах: низкотемпературной (лоубусаит) и высокотемпературной (линжиит). При атмосферном давлении лоубусаит стабилен до 1243 К. При повышении температуры лоубусаит по перитектоидной реакции с силицидом железа начинают образовывать линжиит ($\alpha\text{-Fe}_{0.92}\text{Si}_2$), который является стабильным до температуры плавления, которая составляет 1489 К. При понижении температуры линжиита до 1188 К начинается эвтектоидный распад на кремний и лоубусаит ($\beta\text{-FeSi}_2$) [8]. Фазовая диаграмма приведена на рисунке 1 [9].

Линжиит ($\alpha\text{-FeSi}_2$ или $\alpha\text{-Fe}_{0.92}\text{Si}_2$) – металл, принадлежит к тетрагональной сингонии, имеет пространственную группу симметрии 123_P4/mmm и элементарную ячейку с параметрами $a = 2.6840 \text{ \AA}$, $b = 2.6840 \text{ \AA}$, $c = 5.1280 \text{ \AA}$,

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-72-20180).

которая содержит 1 формульную единицу [10]. У этой фазы есть другое название – α -лебоит [11]. В некоторых работах [8] эту фазу называют ξ - $FeSi_2$.

Лоубусайт (β - $FeSi_2$) – полупроводник, принадлежит к орторомбической сингонии, имеет пространственную группу симметрии 64_Cmc, элементарную ячейку с параметрами $a = 9.8789 \text{ \AA}$, $b = 7.8038 \text{ \AA}$, $c = 7.4808 \text{ \AA}$, которая содержит 8 формульных единиц [12].

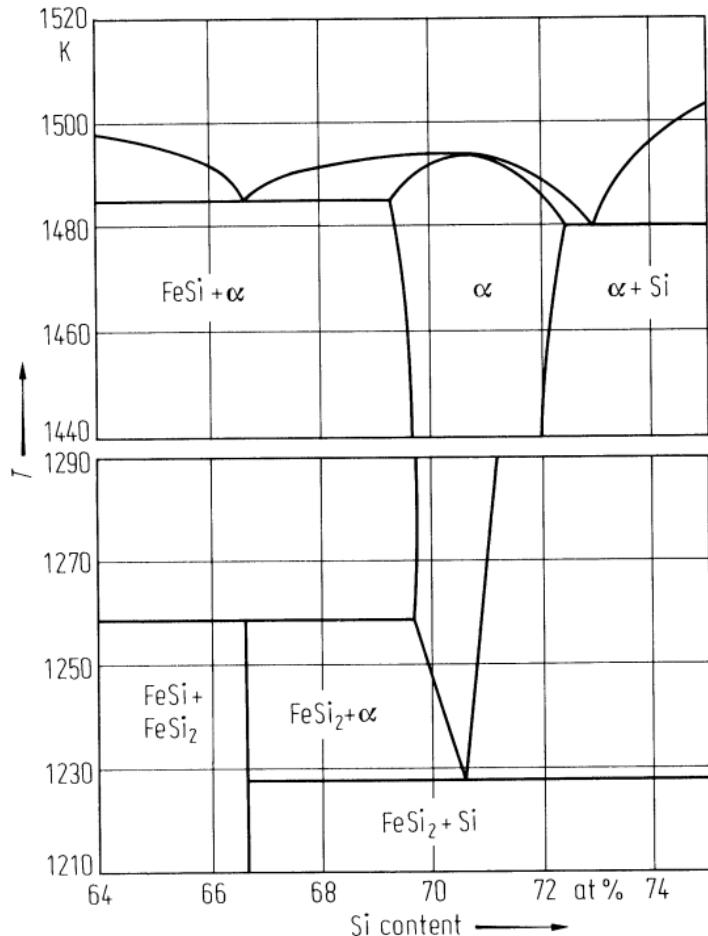


Рис. 1. Фазовая диаграмма Fe-Si вблизи $FeSi_2$ [9]

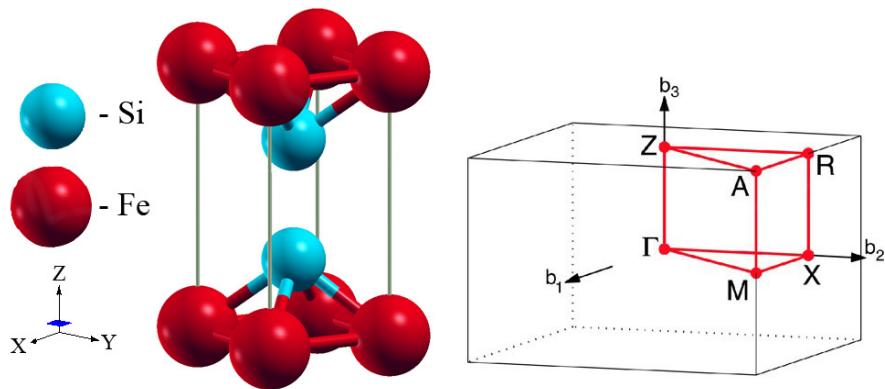


Рис. 2. Элементарная тетрагональная примитивная ячейка решетки Бравэ и первая зона Бриллюэна α - $FeSi_2$ [13]. Красной линией обозначен путь обхода неприводимой части зоны Бриллюэна при расчете зонной структуры

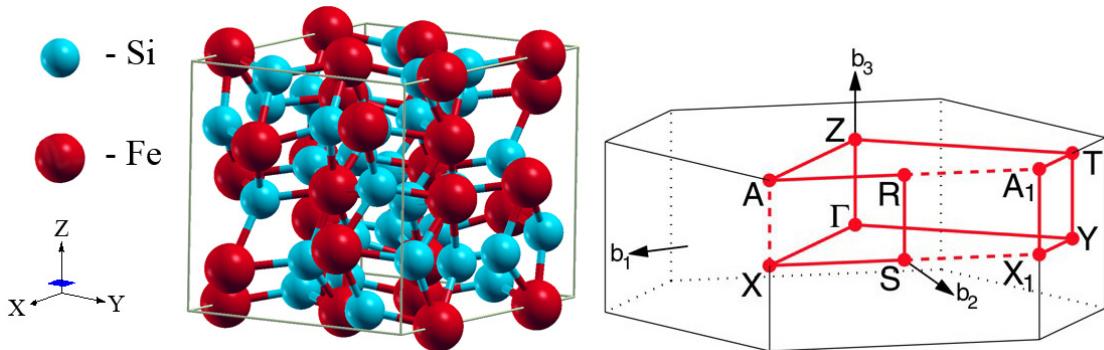


Рис. 3. Элементарная ромбическая базо-центрированная ячейка решетки Бравэ и первая зона Бриллюэна $\beta\text{-FeSi}_2$ [13]. Красной линией обозначен путь обхода неприводимой части зоны Бриллюэна при расчете зонной структуры

На рисунках 2, 3 приведены структуры $\alpha\text{-FeSi}_2$ и $\beta\text{-FeSi}_2$ и их первые зоны Бриллюэна соответственно.

Зонная структура для основного состояния $\alpha\text{-FeSi}_2$ и $\beta\text{-FeSi}_2$ представлена на рисунке 4, 5 соответственно. Ширина валентной зоны $\alpha\text{-FeSi}_2$ составила 14.00 эВ, минимум которой находится на точке Γ . Магнитный момент у $\alpha\text{-FeSi}_2$ отсутствует. Расчетная ширина запрещенной зоны для непрямых переходов $\beta\text{-FeSi}_2$ составила 0.78 эВ, для прямых – 0.83 эВ, что с точностью до сотых соответствует экспериментальным значениям [14, 15] и означает, что полупроводник является непрямозонным. Рассчитанная нами ширина валентной зоны $\beta\text{-FeSi}_2$ составила 13.41 эВ, а ее минимум находится в центре (точка Γ) первой зоны Бриллюэна.

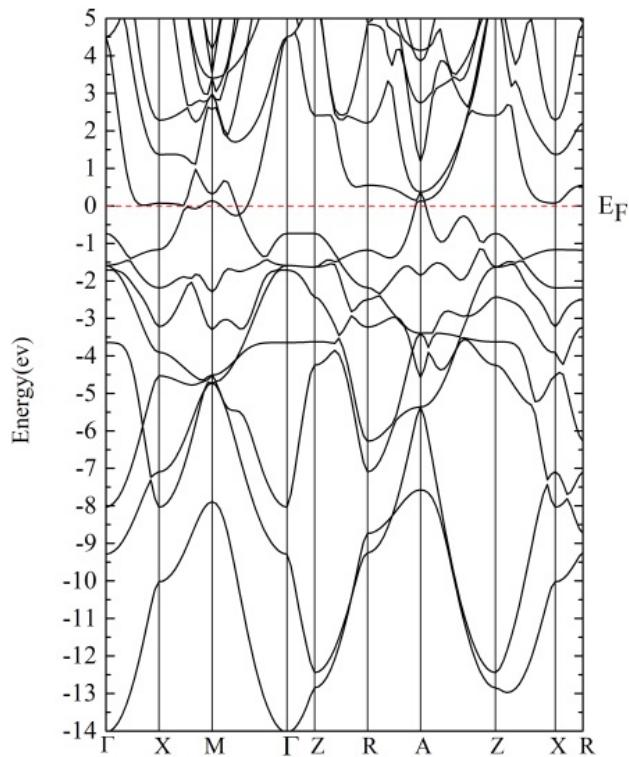
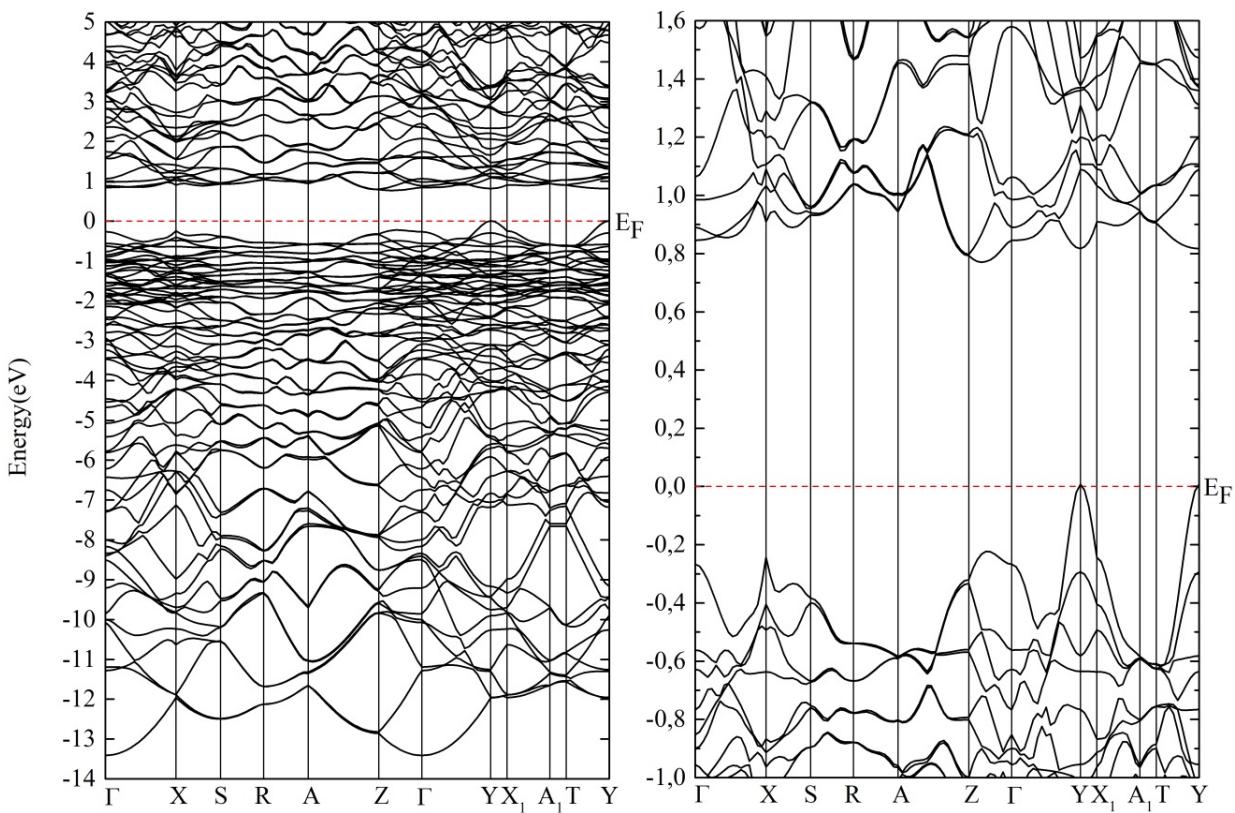


Рис. 4. Зонная структура $\alpha\text{-FeSi}_2$



*Рис. 5. Слева: зонная структура β -FeSi₂ в широком энергетическом интервале.
Справа: зонная структура β -FeSi₂ вблизи уровня Ферми*

В работе представлены результаты теоретического моделирования зонной структуры полупроводниковой и металлической фаз FeSi₂ в широкой энергетической области, включающей валентную зону и зону проводимости. Приведенные результаты будут использованы при дальнейшем изучении электронного строения межфазных границ кремния и железа в многослойныхnanoструктурах, состоящих из чередующихся магнитных слоев, содержащих железо, и немагнитных прослоек, содержащих кремний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Discussion on the priority: speachs of academicians of RAS / V. V. Ustinov, V. B. Betelin, E. E. Tyrtysnikov, K. V. Rudakov // Vestnik Rossijskoj akademii nauk. – 2019. – Vol. 89. – №. 4. – P. 381-383.
2. Курганский, С. И. Геометрическая структура и спектральные характеристики электронных состояний кремниевых наночастиц / С. И. Курганский, Н. А. Борщ // Физика и техника полупроводников. – 2004. – Т. 38, № 5. – С. 580–584.
3. Борщ, Н. А. Пространственная структура и электронный спектр кластеров YSi_n⁻ (n = 6 – 17) / Н. А. Борщ, К. С. Берестнев, Н. С. Переславцева, С. И. Курганский // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, № 6. – С. 1227–1232.

4. Lattice dynamics and polarization-dependent phonon damping in α -phase FeSi₂ nanostructures / J. Kalt, M. Sternik, B. Krause [et al] // Physical Review B. – 2020. – Vol. 101. – №. 16. – P. 165406.
5. Potudanskii, G. P. Oscillating fine structure of x-ray absorption and atomic structure of metallic layers in a magnetic multilayer nanostructure (Co₄₅Fe₄₅Zr₁₀/SiO₂)_n / G. P. Potudanskii, S. I. Kurganskii, E. P. Domashevskaya // Materials Research Express. – 2019. – Vol. 6. – №. 11. – P. 1150g9.
6. Electronic structure of molybdenum disilicide / S. I. Kurganskii, N. S. Pereslavtseva, E.V. Levitskaya, Y.A. Yurakov // physica status solidi (b). – 2002. – Vol. 233. – № 2. – P. 306-311.
7. Electronic structure of rhenium disilicides / S. I. Kurganskii, N. S. Pereslavtseva, E.V. Levitskaya [et al] // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2002. – Vol. 14, N 27. – P. 6833-6839.
8. Margarido, F. A quaternary FeAlSiCa phase isotropic with α -leboite (Fe_{1-x}Si₂)/ F. Margarido, M.O. Figueiredo // Materials Science and Engineering: A. – 1988. – Vol. 104. – P. 249-254.
9. Piton, J. P. Sur les changements de phase alliages de composition roisines de FeSi₂ / J.P. Piton, M.F. Fay // CR Acad. Sci. – 1968. – Vol. 266. – 514 p.
10. Weitzer, F. Phase diagrams of the ternary systems Mn, Fe, Co, NiSiN / F. Weitzer, J.C. Schuster // Journal of Solid State Chemistry. – 1987. – Vol. 70. – № 2. – P. 178-184.
11. Sidorenko, F. A. Nature of the phase of the Fe-Si system / F. A. Sidorenko, P. V. Gel'd, L. B. Dubrovskaya // Fizika Metallov i Metallovedenie. – 1959. – Vol. 8. – P. 735–739.
12. Aronsson, B. A. Note on the compositions and crystal structures of MnB₂ Mn₃Si Mn₅Si₃ and FeSi₂ / B. A. Aronsson // Acta Chemica Scandinavica. – 1960. – Vol. 14. – № 6. – P. 1414-1418.
13. Setyawan, W. High-throughput electronic band structure calculations: Challenges and tools / W. Setyawan, S. Curtarolo // Computational materials science. – 2010. – Vol. 49. – № 2. – P. 299-312.
14. Nature of the band gap of polycrystalline β -FeSi₂ films / C. Giannini, S. Lagomarsino, F. Scarinci, P. Castrucci // Physical Review B. – 1992. – Vol. 45. – №. 15. – P. 8822.
15. Electrical and Optical Properties of FeSi₂ Layers / K. Radermacher, O. Skeide, R. Carius [et al] // MRS Online Proceedings Library Archive. – 1993. – Vol. 320.

*А.А. Юрьев, Б.Р. Гельчинский
Институт металлургии УрО РАН, Россия*

РАСЧЕТ СТРУКТУРНЫХ, КИНЕТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОННЫХ СВОЙСТВ ЖИДКИХ ВИСМУТА И ГАЛЛИЯ*

В теории конденсированного состояния жидкость традиционно является сложным объектом для описания и прогнозирования свойств. Для ее описания не пригодны мощные методы, основанные на наличии дальнего порядка для кристаллов или на использовании малого параметра для газов. Для металлических жидкостей, кроме того, необходимо корректно учитывать наличие ионной и электронной подсистем. Развитие компьютерных моделей для изучения структуры и физико-химических свойств металлических расплавов позволит в перспективе детально анализировать их характеристики, необходимые для практического использования, а также прогнозировать поведение веществ в экстремальных условиях.

Для практики представляют интерес сложные системы, в частности двойные расплавы, для которых обнаружено аномальное поведение структурно-зависящих свойств. Одной из таких систем является бинарная система Bi-Ga, которая в жидком состоянии имеет широкую область расслаивания в интервале от 8 до 61 ат. % Bi. Рентгеновские и нейтронные исследования структуры указывают на существование в расплавах Ga-Bi группировок одноименных атомов. Наибольший интерес представляет изучение критического явления жидкость-жидкость в системе Ga-Bi, которое проявляется на температурной зависимости свойств и выражается в неограниченном росте интенсивности рассеяния нейtronов, вязкости, коэффициента поглощения ультразвука и удельного электросопротивления и уменьшении скорости ультразвука вблизи критической температуры. Чистые жидкие металлы Bi и Ga, в свою очередь, также обнаруживают аномальное температурное поведение некоторых свойств. Поэтому в качестве первого шага к изучению данной системы мы провели изучение некоторых свойств чистых жидких металлов на основе компьютерного моделирования, используя первопринципную молекулярную динамику. В работе было применено два программных пакета: SIESTA [1], основанная на применении локализованного базиса волновых функций, и VASP[2], в котором волновые функции строятся на основе плоских волн. Отметим, что ранее первый пакет был использован нами для изучения жидких щелочных металлов Na и Cs [3] в широком температурном интервале от точки плавления до критической точки, а также некоторых свойств жидкого Bi [4] и были обнаружены особенности на их температурных зависимостях. В настоящей работе был проведен расчет

* Работа выполнена в рамках Государственного задания ИМЕТ УрО РАН, а также при поддержке РФФИ, проект 20-03-00370 А.

структуры ближнего порядка, коэффициентов самодиффузии и плотности электронных состояний чистых Ві и Ga от температуры плавления до 1200 К.

В качестве примера приведем результаты более детального анализа структуры ближнего порядка жидкого Ві в зависимости от температуры, выполненные методом многогранников Вороного [5], используя полученные нами методом первопринципной молекулярной динамики координаты атомов. При исследовании неупорядоченной структуры методом многогранников Вороного строится полиэдр, являющийся результатом пересечения плоскостей, проведенных перпендикулярно линиям, соединяющим центральный атом с его ближайшими соседями, через их середину. Многогранник Вороного для данного центрального атома определяется как фигура, в которой содержатся все точки пространства, ближайшие именно к нему, а не к другим атомам. Число граней полиэдра совпадает с числом соседей, его окружающих. Полиэдры Вороного, заполняющие пространство внутри неупорядоченной структуры без зазоров и перекрытий, являются фундаментальными геометрическими фигурами, которые позволяют провести анализ атомной структуры в терминах точных топологических и метрических характеристик.

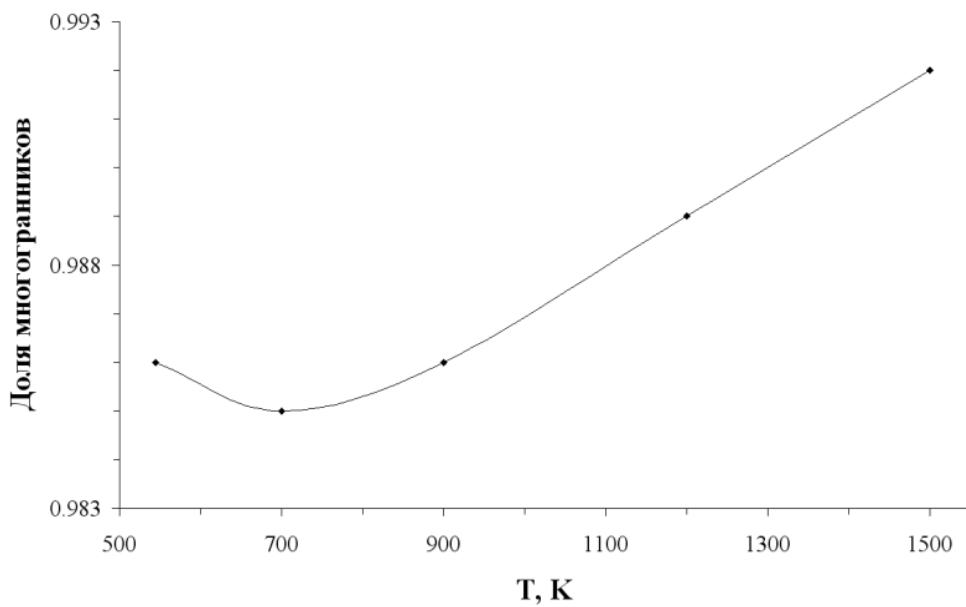


Рис. 1. Температурная зависимость доли МВ, содержащих хотя бы одну пятиугольную грань ($N5 \geq 1$ -распределение)

Статистический анализ методом многогранников Вороного (МВ) позволил проследить изменение локальных характеристик структуры жидкости при температурах выше точки плавления и позволил выявить отклонения от монотонного поведения на температурных зависимостях. В частности, немонотонное поведение можно наблюдать на N5-распределении при анализе многогранников, содержащих, по крайней мере, один пятиугольник (пятиугольники присущи неупорядоченным структурам типа жидкости или стекла и совершенно отсутствуют в правильных кристаллах), приведенное на рисунке 1.

Видно, что доля таких многогранников высока, а при перегреве выше чем 700 К наблюдается резкое повышение доли таких многогранников, что говорит о росте разупорядочения в системе. На рисунке 2 приведена кривая, показывающая долю многогранников, в которых число пятиугольных граней больше шести ($N_{5>6}$ -распределение). Анализ этих данных говорит о том, что при перегреве на 150 градусов выше температуры плавления наблюдается резкое увеличение доли многогранников с пятиугольными гранями и, соответственно, разупорядоченности системы. Количество таких многогранников после 900 К изменяется незначительно, хотя, необходимо отметить, немонотонно.

Укажем, что хотя немонотонное поведение кривых, приведенных на рисунках 1 и 2 четко проявляется, абсолютные изменения при этом невелики, что должно приводить к слабому проявлению на некоторых свойствах в конечном интервале температур.

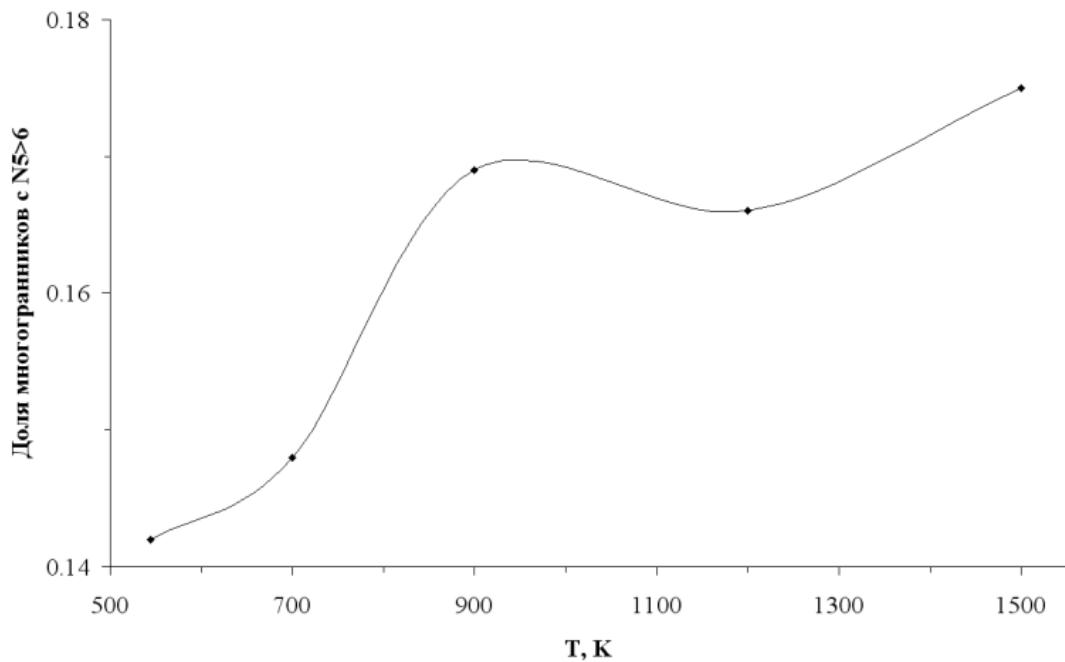


Рис. 2. Температурная зависимость доли MB, имеющих больше шести пятиугольных граней ($N_{5>6}$ -распределение)

В целом, результаты позволяют сделать заключение, что в жидким Ві при небольших перегревах происходит плавная перестройка структуры ближнего порядка, которая и отражается на поведении температурной зависимости свойств.

Таким образом, можно сделать вывод, что использование первопринципной молекулярной динамики для анализа свойств жидких металлов и сплавов позволяет получать достоверные данные о широком наборе их свойств и анализировать тонкие особенности их структуры и аномального поведения в широком диапазоне термодинамических параметров.

При проведении работ был использован суперкомпьютер «Уран» Института математики и механики УрО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. The SIESTA method for ab initio order-N materials simulation / Soler J. M., Artacho E., Gale J. [et. al] // J.Phys.: Cond.Matter. – 2002. – Vol. 14. – P. 2745–2779.
2. Kresse, G. Efficiency of ab-initio total energy calculations for metals and semiconductors using a plane-wave basis set / Kresse G., Furthmüller J. // Comput. Mater.Sci. – 1996. – Vol. 6, № 1. – P. 15–50.
3. Юрьев, А. А. Моделирование свойств жидких щелочных металлов при высоких температурах и давлениях методом первопринципной молекулярной динамики / Юрьев А. А., Гельчинский Б. Р. // ДАН. – 2015. – Т. 461, № 1. – С. 37–40.
4. Юрьев, А. А. Первопринципное молекулярно-динамическое моделирование особенностей температурной зависимости некоторых свойств жидкого висмута / Юрьев, А. А., Гельчинский Б. Р., Ватолин Н. А. // ДАН. – 2018. – Т. 479, № 1. – С. 21–24.
5. Medvedev, N. N. The algorithm for three-dimensional Voronoi polyhedra / Medvedev, N. N. // J.Compt.Phys. – 1986. – Vol. 67, N 1. – P. 223–229.

РАЗДЕЛ VI
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКЕ

A.A. Аваев

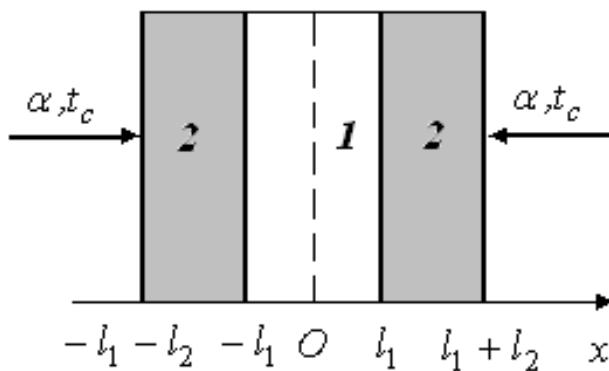
Череповецкий государственный университет, Россия

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
В СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ЭЛАСТОМЕР-МЕТАЛЛ-
ЭЛАСТОМЕР ПРИ ТЕРМИЧЕСКОЙ ВУЛКАНИЗАЦИИ ЭЛАСТОМЕРА
В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ВНЕШНЕГО ТЕПЛООБМЕНА**

В промышленности нередко используются элементы конструкций, которые представляют собой металлические пластины с нанесенными на них слоями вулканизированного эластомера [1]. В отдельных случаях эластомер наносится на обе поверхности металлического листа. Слои эластомера имеют одинаковый химический состав и одинаковую толщину, в результате чего получается симметричная система эластомер-металл-эластомер.

После нанесения на металлическую пластину эластомер подвергается, как правило, термической вулканизации, которая может быть оформлена как по контактной, так и по конвективной схеме [1].

Вулканизация представляет собой сложный физико-химический процесс, состоящий из ряда этапов, сопровождающихся, как фазовым переходом, так и химической реакцией связывания свободной серы. При этом происходит изменение коэффициентов тепло- и температуропроводности эластомера. В некоторых случаях, когда содержание свободной серы относительно невелико, поглощением и выделением тепла, а также изменением теплофизических свойств эластомера в процессе вулканизации можно пренебречь [2].



*Рис. 1. Принципиальная схема симметричной системы
эластомер-металл-эластомер*

На рисунке 1 представлена принципиальная схема симметричной системы эластомер-металл-эластомер. На обе поверхности металлического листа 1

толщины $2l_1$ нанесены слои эластомера 2, толщина каждого слоя которого составляет l_2 (на рисунке эластомер выделен серым цветом).

Если бы система эластомер-металл-эластомер была асимметричной, то при описании математической модели теплопроводности потребовалось решать систему из трех уравнений теплопроводности.

В симметричном случае система сводится к двум уравнениям – уравнению (1) для металла 1 и уравнению (2) для слоя 2 эластомера

$$\frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$(0 < x \leq l_1),$$

$$\frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$(l_1 < x \leq l_1 + l_2),$$

где $t_j(x, \tau), {}^\circ C$ – температура слоя с номером j системы в точке с координатой x в момент времени τ, c ; a_j – коэффициент температуропроводности соответствующего материала, m^2/c ($j = 1, 2$).

При решении системы уравнений (1)–(2) предлагается использовать следующие краевые условия

$$t_1(x, 0) = t_2(x, 0) = t_0 = const; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

$$t_1(l_1, \tau) = t_2(l_1, \tau); \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(l_1, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(l_1, \tau)}{\partial x}; \quad (6)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial t_2(l_1 + l_2, \tau)}{\partial x} + \alpha [t_c - t_2(l_1 + l_2, \tau)] = 0, \quad (7)$$

где t_0 – температура в каждой точке любого из слоев в момент времени $\tau = 0$; λ_j – коэффициент теплопроводности слоя с номером $j, Bm/(m \cdot {}^\circ C)$; t_c – температура внешней среды, окружающей систему, или нагретый воздух, который обдувает систему, или псевдоожженный слой инертного зернистого теплоносителя, ожидающим агентом которого также является нагретый воздух.

Краевое условие (3) является начальным, а условия (4)–(7) – граничными.

Условию (4) отвечает отсутствие переноса тепла через плоскость $x = 0$.

Условия (5)–(6) описывают идеальный тепловой контакт между металлом и эластомером в плоскости $x = l_1$.

И, наконец, условию (7) соответствует конвективный теплообмен, происходящий через плоскость $x = l_1 + l_2$. В силу симметрии системы такой же теплообмен происходит и через плоскость $x = -l_1 - l_2$.

Решение системы (1)–(2) для краевых условий (3)–(7) проведено с помощью операционного исчисления и может быть представлено в виде

$$t_1(x, \tau) = t_c + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \cos\left(\mu_m \frac{x - l_1}{l_1}\right) + B_m \sin\left(\mu_m \frac{x - l_1}{l_1}\right)}{C_m} e^{-\mu_m^2 Fo}; \quad (8)$$

$$t_2(x, \tau) = t_c + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \cos\left(K_2 \mu_m \frac{x - l_1}{l_2}\right) + K_1 B_m \sin\left(K_2 \mu_m \frac{x - l_1}{l_2}\right)}{C_m} e^{-\mu_m^2 Fo}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_m &= Bi \cdot (t_c - t_0) \frac{\cos \mu_m}{K_2}; \quad B_m = -Bi \cdot (t_c - t_0) \frac{\sin \mu_m}{K_2}; \\ C_m &= -\frac{1}{2} K_1 (\sin \mu_m + \mu_m \cos \mu_m) \left[\mu_m \cos(K_2 \mu_m) + \frac{Bi}{K_2} \sin(K_2 \mu_m) \right] - \\ &- \frac{1}{2} K_1 \mu_m \sin \mu_m \cdot \left\{ \frac{Bi}{K_2} \left[K_2 \cos(K_2 \mu_m) - \frac{\sin(K_2 \mu_m)}{\mu_m} \right] - K_2 \mu_m \sin(K_2 \mu_m) \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \mu_m \frac{\sin \mu_m}{K_2} [Bi \cdot \cos(K_2 \mu_m) - K_2 \mu_m \sin(K_2 \mu_m)] - \\ &- \frac{1}{2} \mu_m [\sin(K_2 \mu_m) + K_2 \mu_m \cos(K_2 \mu_m) + Bi \cdot \sin(K_2 \mu_m)] \cos \mu_m; \\ K_1 &= \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad K_2 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \frac{l_2}{l_1}; \end{aligned}$$

$$Bi = \frac{\alpha l_2}{\lambda_2}; \quad Fo = \frac{a_1 \tau}{l_1^2} \quad - \text{критерии Био и Фурье соответственно};$$

$\mu_m > 0 (m = 1, 2, \dots)$ – корни характеристического уравнения

$$[Bi \cdot \cos(K_2 \mu) - K_2 \mu \cdot \sin(K_2 \mu)] \frac{\cos \mu}{K_2} - \left[\mu \cdot \cos(K_2 \mu) + \frac{Bi \cdot \sin(K_2 \mu)}{K_2} \right] K_1 \sin \mu = 0.$$

На рисунке 2 представлены результаты расчетов четырех линий нестационарного температурного поля, выполненные в соответствии с решением (8)–(9).

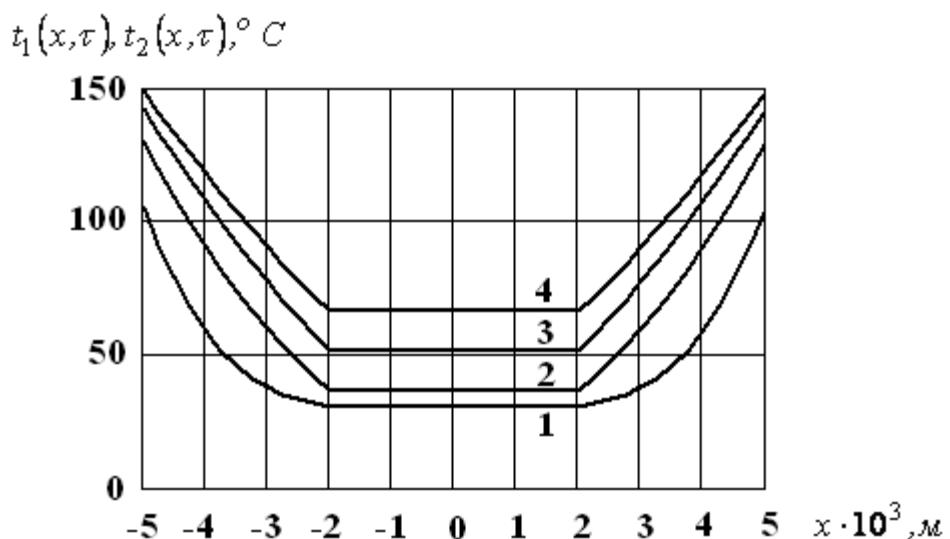


Рис. 2. Расчетные линии нестационарного температурного поля

Расчеты проведены для случая вулканизации слоев эластомера марки 2566, нанесенных на пластину из стали Ст.3. Процесс вулканизации проходил в аппарате с псевдоожженным слоем инертного зернистого теплоносителя, отличающегося высоким значением коэффициента теплоотдачи α [1].

Расчетные параметры при этом составляли следующие значения: $l_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $l_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $t_0 = 30^\circ \text{C}$; $t_c = 200^\circ \text{C}$; $\alpha = 100 \text{ Bm}/(\text{м}^2 \cdot {}^\circ \text{C})$.

Линии 1, 2, 3, 4 соответствуют следующим значениям времени: $\tau_1 = 10 \text{ с}$; $\tau_2 = 30 \text{ с}$; $\tau_3 = 60 \text{ с}$; $\tau_4 = 90 \text{ с}$.

Экспериментальная апробация предлагаемой математической модели доказала возможность ее применения при выборе оптимальных режимов процесса термической вулканизации эластомерных покрытий на металлической основе в симметричных системах эластомер-металл-эластомер в условиях конвективного внешнего теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аваев, А. А. Математическое моделирование нестационарной теплопроводности при вулканизации эластомерных покрытий на тканевых и металлических подложках : монография / А. А. Аваев. – Череповец : ГОУ ВПО ЧГУ, 2010. – 133 с.
2. Лукомская, А. И. Тепловые основы вулканизации резиновых изделий / А. И. Лукомская, П. Ф. Баденков, Л. М. Кеперша. – Москва, 1972. – 359 с.

*О.А. Дежина, М.Д. Манякин, Е.В. Паринова, Д.А. Коюда,
С.Ю. Турищев, С.И. Курганский
Воронежский государственный университет, Россия*

РЕНТГЕНОВСКИЕ АБСОРБЦИОННЫЕ СПЕКТРЫ КРЕМНИЯ ПО ДАННЫМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ*

Кремний является основой современной полупроводниковой микроэлектроники. По распространенности в земной коре кремний занимает второе место после кислорода, что делает его очень доступным и недорогим материалом. Хотя кремний применяется в электронике с середины XX века, активные исследования в области кремниевых технологий продолжаются до сих пор. Их целью является поиск новых функциональных материалов, в том числе всевозможных наноструктур на основе кремния, обладающих существенно лучшими характеристиками, чем уже существующие образцы. Это напрямую связано с требованием миниатюризации производства, развитием нанотехнологий для выигрыша в производительных мощностях ЭВМ и т.д. Основой таких наноструктурированных материалов могут стать как моноэлементные кремниевые кластеры [1], так и содержащие инкапсулированные атомы переходных металлов [2]. Если уменьшается размер функциональных элементов, то в силу квантовых эффектов меняются свойства материала. Для исследования их электронного строения хорошо подходит экспериментальный метод спектроскопии ближней тонкой структуры края рентгеновского поглощения (X-ray Absorption Near Edge Structure – XANES), так как он чувствителен к поверхности и тонким приповерхностным слоям материала. К области XANES-спектроскопии относятся область края поглощения, предкраевая область (около 25 эВ до порога поглощения) и область до 30–50 эВ выше скачка поглощения. Особенностью механизма XANES является то, что в нем принимают участие фотоэлектроны с длиной волны порядка расстояния между центральным рассеивающим атомом и его ближайшим соседом [3]. Структура края поглощения рентгеновских лучей может непосредственно предоставлять информацию о плотности незанятых электронных состояниях твердых тел. Это локальный процесс, при котором оставшийся электрон переходит в возбужденное состояние, незанятое в основном энергетическом состоянии системы.

В данной работе нами было проведено моделирование электронной структуры и рассчитаны спектры XANES_{L3}-края поглощения кремния. Расчеты проводились методом ЛППВ с использованием пакета Wien2k [4].

Монокристаллический кремний (c-Si) относится к кубической сингонии и характеризуется пространственной группой симметрии *Fd3m*. Кристаллические параметры кремния приведены в таблице. Внешний вид элементарной ячейки

* Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №19-72-20180).

кремния представлен на рисунке 1а). Соответствующая ей первая зона Бриллюэна с выделенной неприводимой частью показана на рисунке 1б).

Таблица

Кристаллические параметры кремния

| | | | |
|--------------------------|--------|-------|-------|
| Параметр решетки a , Å | 5.4307 | | |
| Координаты атомов | x/a | y/b | z/c |
| Si 1 | 0.125 | 0.125 | 0.125 |
| Si 2 | 0.875 | 0.375 | 0.375 |

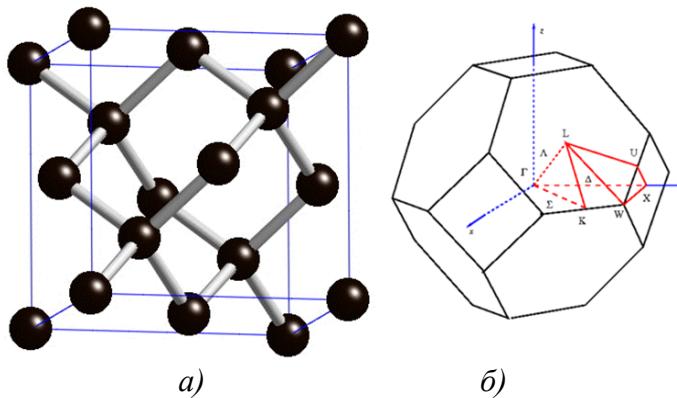


Рис. 1. Элементарная ячейка кремния: а) внешний вид; б) первая зона Бриллюэна кремния с указанием точек высокой симметрии

Моделирование спектров XANES проводилось методом оставной дырки [5]. При этом использовались суперъячейки размера $2 \times 2 \times 2$. Число k -точек в первой зоне Бриллюэна выбиралось равным 100.

Экспериментальные $L_{2,3}$ -спектры XANES кремния хорошо известны [6] и приведены на рисунке 2. Однако можно указать две проблемы, возникающие при интерпретации этого спектра.

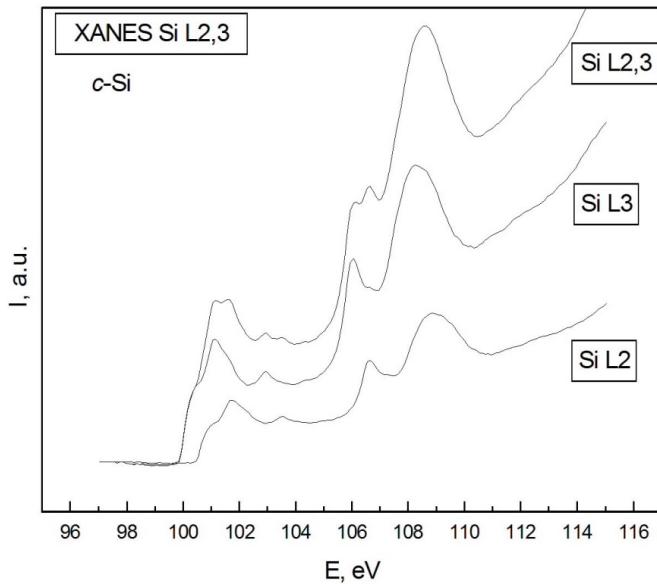


Рис. 2. Разложение экспериментального [6] $L_{2,3}$ -спектра на L_3 - и L_2 -спектры

Во-первых, этот спектр представляет собой наложение двух спектров – L_3 и L_2 , которые отражают плотность одних и тех же незанятых состояний s - и d -симметрии в зоне проводимости. Но вследствие спин-орбитального расщепления оставшегося $2p$ уровня, с которого происходит электронный переход, на две компоненты $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}/L_2$ спектр смешен относительно L_3 спектра в сторону больших энергий перехода на величину энергии этого расщепления, которое составляет величину порядка 0.6 эВ, и имеет вдвое меньшую интенсивность. В результате все особенности полного $L_{2,3}$ -спектра удваиваются и, как видно из рисунка 2, в некоторых случаях разрешаются, а в некоторых сливаются в одну широкую полосу. Таким образом, распределение плотности состояний, которую отражает $L_{2,3}$ -спектр и которую в конечном счете желательно получить из эксперимента, в действительности остается неизвестным. Учитывая два упомянутых выше фактора – смещение L_2 -спектра относительно L_3 -спектра на 0.6 эВ и его вдвое меньшую интенсивность – мы выполнили разложение экспериментального $L_{2,3}$ -спектра XANES[6] на L_2 -и L_3 -компоненты, которые также показаны рисунке 1. Нетрудно видеть, что все спин-дублеты теперь разделились и оказались отнесенными к разным спектрам.

Вторая проблема в экспериментальном $L_{2,3}$ -спектрах XANES кремния, которую демонстрирует рисунок 3, вытекает из того обстоятельства, что кремний всегда покрыт слоем естественного оксида SiO_2 , а спектр имеет глубину выхода, сопоставимую с толщиной слоя этого оксида.

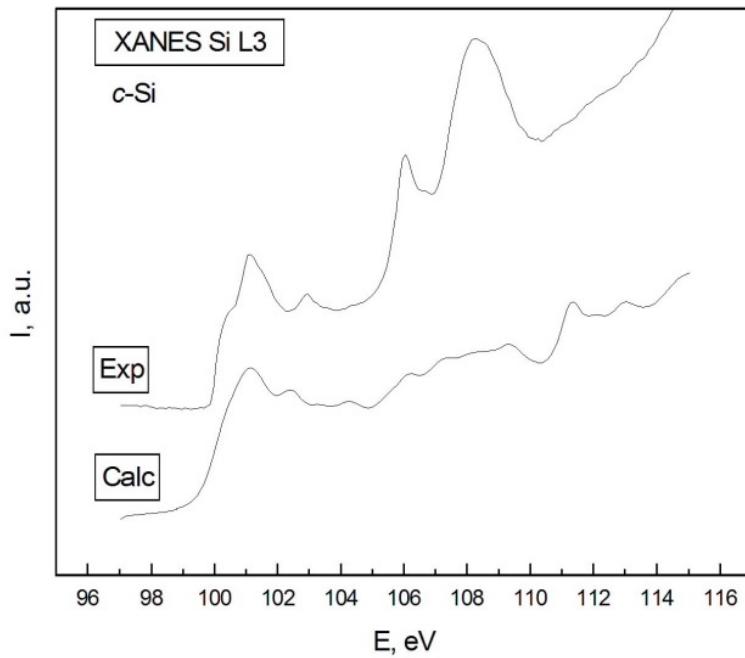


Рис. 3. Экспериментальный и теоретический L_3 -спектры кремния

Поскольку ширина запрещенной зоны оксида SiO_2 приблизительно на 8 эВ больше ширины запрещенной зоны кремния, то в области энергий перехода больше 105 эВ появляется край поглощения кремния в оксиде SiO_2 и пол-

ный спектр поглощения в этой области представляет суперпозицию спектров поглощения кремния в кристаллическом кремнии и в оксиде SiO_2 . Другими словами, спектр поглощения кристаллического кремния в области энергий перехода больше 105 эВ из данного эксперимента остается неизвестным, что обуславливает актуальность прямого расчета этого спектра.

На рисунке 3 показаны рассчитанный и экспериментальный [6] L_3 -спектры кремния в кристаллическом кремнии. Как видно из результатов расчета, при энергиях более 105 эВ поглощение в кристаллическом кремнии не имеет ярко выраженных максимумов и особенности спектра поглощении в этой области, как показывает эксперимент [6], определяются главным образом поглощением в слое естественного оксида SiO_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Курганский, С. И. Геометрическая структура и спектральные характеристики электронных состояний кремниевых наночастиц / С. И. Курганский, Н. А. Борщ // Физика и техника полупроводников. – 2004. – Т. 38, № 5. – С. 580–584.
2. Пространственная структура и электронный спектр кластеров YSi_n^- ($n = 6 – 17$) / Н. А. Борщ, К. С. Берестнев, Н. С. Переславцева, С. И. Курганский // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, № 6. – С. 1227–1232.
3. Stohr, J. NEXAFS Spectroscopy / Stohr, J. – Berlin : Springer. – 1996. – 403 p.
4. Schwarz, K. Electronic structure calculations of solids using the WIEN2k package for material sciences / K. Schwarz, P. Blaha, G. K. H. Madsen // Comput. Phys. Commun. – 2002. – Vol. 147. – № 1–2. – P. 71–76.
5. Core-hole efects on energy-loss near-edge structure / G. Duscher, R. Buczkova, S.J. Pennycook, S.T. Pantelides // Ultramicroscopy. – 2001. – Vol. 86. – P. 355–362.
6. Surface deep profile synchrotron studies of mechanically modified top-down silicon nanowires array using ultrasoft X-ray absorption near edge structure spectroscopy / Turishchev S.Yu., Parinova E.V., Pisliaruk A.K. [et al] // Scientific Reports. – 2019. – Vol. 9. – P . 8066.

Н.П. Стадная, А.Ф. Клинских
Воронежский государственный университет, Россия

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАПУТАННОСТИ МНОГОКУБИТОВЫХ СИСТЕМ

В настоящее время большое внимание уделяется различным вопросам квантовой теории информации и квантовых вычислений. Важным направлением исследований в этой области является изучение свойств запутанных состояний.

Любую сложную квантовую систему можно разбить на две подсистемы, причем интерес представляет решение следующей задачи: запутаны ли состояния этих подсистем между собой.

Случай определения запутанности двухчастичных состояний хорошо изучен и описан в литературе [1]. Однако малоизучен вопрос об определении всех возможных мер запутанности двух подсистем, получаемых при разбиении n -кубитовой системы. Для решения данной задачи удобно использовать сингулярное разложение матрицы коэффициентов вектора состояния квантовой системы.

Сингулярным разложением матрицы A размером $M \times N$ называется ее представление в виде

$$A = USV^T, \quad (1)$$

где U – ортогональная матрица размером $M \times M$, V – ортогональная матрица размером $N \times N$, S – диагональная матрица размером $M \times N$, на главной диагонали которой находятся собственные числа матрицы A (так называемые сингулярные числа).

Для нахождения собственных функций и собственных значений матриц в случае достаточно больших n ($n > 10$) можно пользоваться, например, итерационным методом Якоби [2].

Пусть имеется n -кубитовая система. Вектор состояния такой системы может быть представлен в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 c_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle, \quad (2)$$

при этом

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 |c_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2 = 1. \quad (3)$$

Число слагаемых в сумме 2^n . Пусть теперь мы разбиваем систему на две подсистемы X и Y размером m и $n - m$ соответственно. Общее количество та-

ких разбиений равно $2^{n-1} - 1$. Тогда каждое слагаемое в сумме (2) может быть переписано в виде тензорного произведения векторов соответствующих подсистем:

$$|i_1 i_2 \dots i_n\rangle = |j_1 j_2 \dots j_m\rangle \otimes |k_1 k_2 \dots k_{n-m}\rangle = |x\rangle_l \otimes |y\rangle_p. \quad (4)$$

Число различных векторов состояний $|x\rangle_l = |j_1 j_2 \dots j_m\rangle$ равно 2^m (индекс l нумерует состояния от 1 до 2^m), а состояний $|y\rangle_p = |k_1 k_2 \dots k_{n-m}\rangle$ – 2^{n-m} (индекс p нумерует состояния от 1 до 2^{n-m}).

Под матрицей A будет пониматься матрица коэффициентов размером $2^m \times 2^{n-m}$, где элемент, расположенный на пересечении l -й строки и p -го столбца соответствует коэффициенту в разложении (2), расположенному перед $|x\rangle_l \otimes |y\rangle_p$. Состояния выбранных нами подсистем не будут запутаны, если мы сможем представить разложение (2) в виде тензорного произведения состояний отдельных подсистем.

Судить о запутанности можно по рангу матрицы S получаемой при сингулярном разложении матрицы A (1).

Если ранг полученной матрицы равен единице, то состояния двух выбранных подсистем не запутаны, если же ранг отличен от единицы, то состояния подсистем запутаны. Так же по значениям сингулярных чисел (числа на главной диагонали) и рангу матрицы можно судить о мере запутанности подсистем и выявлять подсистемы с наибольшей нелокальной корреляцией.

В ходе решения задачи в среде MatLab был разработан программный модуль, осуществляющий:

1) построение матрицы коэффициентов A по входным коэффициентам n -кубитового состояния из разложения (2) и указанию, на какие подсистемы необходимо провести разбиение;

2) сингулярное разложение матрицы A (получение матриц U, S, V из (1));

3) вывод ранга матрицы S .

В качестве примера работы приведем результаты анализа состояния трех- и четырехкубитовой систем.

Пусть задано состояние трехкубитовой системы

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|0_A 0_B 0_C\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|0_A 1_B 0_C\rangle. \quad (5)$$

Данный пример является тестовым, так как из вида (5) уже видно, состояния каких подсистем не запутаны. Для облегчения дальнейшего изложения каждый кубит проименован латинской буквой. Возможны три различных разбиения: $A-BC$, $B-AC$, $C-AB$.

В качестве примера приведем вид матрицы A для разбиения $B-AC$. Приведем ее элементы в виде таблицы для большей ясности.

Таблица 1

Матрица А, построенная при разбиении системы трех кубитов ABC на подсистему В и AC при анализе состояния (5)

| A (B-AC) | $ 0_A 0_C\rangle$ | $ 0_A 1_C\rangle$ | $ 1_A 0_C\rangle$ | $ 1_A 1_C\rangle$ |
|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $ 0_B\rangle$ | 0 | $1/2$ | 0 | 0 |
| $ 1_B\rangle$ | $\sqrt{3}/2$ | 0 | 0 | 0 |

Результаты вычисления матриц U, S, V в этом случае представлены на рисунке.

Ранг полученной матрицы равен двум, так что состояния данных подсистем запутаны.

```

A =
      0      0.5000      0      0
      0.8660      0      0      0

СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

U1 =
      0      1
      1      0

S1 =
      0.8660      0      0      0
      0      0.5000      0      0

V1 =
      1      0      0      0
      0      1      0      0
      0      0      1      0
      0      0      0      1
  
```

Рис. Сингулярное разложение матрицы A, представленной в таблице 1

Рассмотрим пример работы модуля с четырехкубитовой системой, находящейся в состоянии:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0_A 0_B 0_C 0_D\rangle + \frac{1}{3}|0_A 1_B 0_C 0_D\rangle + \frac{2}{3}|0_A 1_B 1_C 0_D\rangle + \frac{1}{3}|0_A 0_B 0_C 1_D\rangle. \quad (6)$$

Видим, что уже для системы из четырех кубитов по виду вектора состояния сразу не скажешь, какие из подсистем запутаны.

Для этой системы возможны шесть различных разбиений: ABC-D, BCD-A, ACD-B, ABD-C, AB-CD, AC-BD, AD-BC.

Результаты работы модуля представлены в таблице 2.

Таблица 2
Результат работы модуля при анализе состояния (6)

| Разбиение | A | B | C | D | AB | AC | AD |
|------------------------------|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | BCD | ACD | ABD | ABC | CD | BD | BC |
| Сингулярные числа | 1 | 0,8368 0,5474 | 0,8539 0,5205 | 0,9664 0,2571 | 0,8368 0,5474 | 0,8539 0,5205 | 0,9664 0,2571 |
| Ранг | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Видим, что незапутанными являются состояния подсистем A и BCD . Состояние остальных подсистем запутаны, причем мера запутанности одинакова (так как для разбиений матрица S имеет одинаковый ранг равный двум).

Отметим, что на данный момент разработанный программный модуль также осуществляет полное решение задачи для систем до пяти кубитов включительно. При этом сам модуль проводит все возможные разбиения, строит соответствующие сингулярные разложения и определяет ранг матрицы S .

Автоматическая проверка всех рангов для многокубитовых систем с числом кубитов более десяти пока затруднена ввиду большого количества необходимых вычислений. Однако в настоящее время проводится работа по усовершенствованию алгоритма. Ожидается, что оно позволит провести полное решение задачи для систем хотя бы до 50 кубитов. Такой выбор обусловлен тем, что в настоящее время активно ведется работа по физической реализации различных квантовых логических схем, и на данный момент число кубитов, удерживаемых в когерентном состоянии, ограничивается как раз несколькими десятками кубитов [3].

Представленные результаты могут быть интересны в различных приложениях квантовой теории вычислений и при разработке квантовых логических элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прескилл, Дж. Квантовая информация и квантовые вычисления / Прескилл, Дж. – Москва : Регулярная и хаотическая динамика : Институт компьютерных исследований ; Ижевск, 2008. – Т. 1. – 464 с.
2. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов : учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. – Москва : Высшая школа, 2002. – 840 с.
3. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits / Debnath S., Linke N.M., Figgatt C. [et al]. – DOI: 10.1038/nature18648 // Nature. – 2016. – Vol. 536, Iss. 7614. – P. 63–66.

А.И. Киселев

Институт химии твердого тела УрО РАН, Россия

ВЛИЯНИЕ ФОТОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОРОШКА АЛЮМИНИЯ*

Изучением процессов выделения тепла при фотон-фононном взаимодействии занимается фононика — активно развивающийся раздел физики, который изучает распространение упругих колебаний в средах со сложной периодической структурой. Название этой области перекликается с электроникой и фотоникой — наукой об аккуратном, иногда даже «пофотонном», управлении потоками света. Аналогии на этом не заканчиваются. В фононике используются некоторые технические устройства и приемы теоретического описания, которые были позаимствованы из этих двух областей.

Отметим тот факт, что фононика — раздел физики, занимающийся тонким управлением звуковыми, ультразвуковыми и тепловыми колебаниями в различных структурах. В отличие от акустики, активную роль тут играет сама среда, через которую распространяется колебание. При этом по аналогии со спектром электромагнитных волн в спектре упругих колебаний выделяют несколько диапазонов частот: инфразвук, звук, ультразвук, гиперзвук и тепло. Упругие колебания с частотами порядка терагерца и выше относят к тепловым колебаниям. Длины волн таких колебаний приближаются к межатомным расстояниям, и дискретность вещества ограничивает эту шкалу сверху.

В настоящее время удалось изготовить акустический диод — устройство, пропускающее звуковую волну только в одну сторону. При этом главная идея — каким образом удается заставить среду играть активную роль в управлении потоками звуковых волн, это пропускание звука через материал с регулярно чередующимися механическими свойствами. Эта регулярность может быть строго периодическая, либо периодическая, но с модуляцией, но главное, чтобы период чередования был маленьким. Если он сравним с длиной звуковой волны, получается фононный кристалл, который является ключевым элементом акустического диода. Теперь благодаря фононике можно изготавливать устройства, в которых одновременно удерживается акустическое и оптическое колебание. Взаимодействия между упругими колебаниями и световой волной легко настраиваются и могут быть использованы, например, для микроскопической радиоволновой диагностики упругих волн.

Гораздо больше трудностей доставляет попытка перенесения всех описанные выше достижений в область тепловых колебаний, то есть для частот

* Работа выполнена в соответствии с гос. заданием № АААА-А19-119031890028-0 блок 2 и при частичной финансовой поддержке программы проекта № 18-3-3-5.

порядка терагерц и выше. В частности, если звуковые волны можно издавать на одной частоте, то тепловые фононы обычно существуют в твердом теле сразу в очень широком диапазоне частот. Это дополнительно усложняет управление ими, ведь акустические устройства обычно оптимизированы лишь для некоторого частотного интервала.

Настоящая работа имеет цель уточнения нижнего предела частоты тепловых фононов рождающихся при взаимодействии фотонов и оптических фотонов на границе раздела оксида и металла порошка алюминия. Для существования оптических фононов требуется минимум двухкомпонентная среда. Для поверхности раздела оксид-металл можно рассматривать две таких системы: ион в объеме металла – атом на поверхности и этот же атом плюс атом металла в оксиде.

В работе [1] приводятся результаты изучения количества поверхностных состояний электронов алюминия при его диспергировании. Сравнение энергетики и заполнения поверхностных состояний проводится для алюминия в виде пленки и порошка. Результаты получены на базе данных оптического эксперимента соответственно для пленки толщиной около 1 мкм (рис. 1) и порошка АСД-4 (рис. 2), запрессованного в таблетки диаметром 13 мм (0.7 г порошка, давление прессования 40 кг/см²).

Экспериментальные зависимости оптических постоянных от длины волны получены эллипсометрическим методом Битти (эллипсометр ЛЭФ-3М, в спектральном диапазоне 0.4–2.5 мкм). Погрешность измерений оптических постоянных в видимом диапазоне спектра не превышала 5 % (в ИК-области – 8 %).

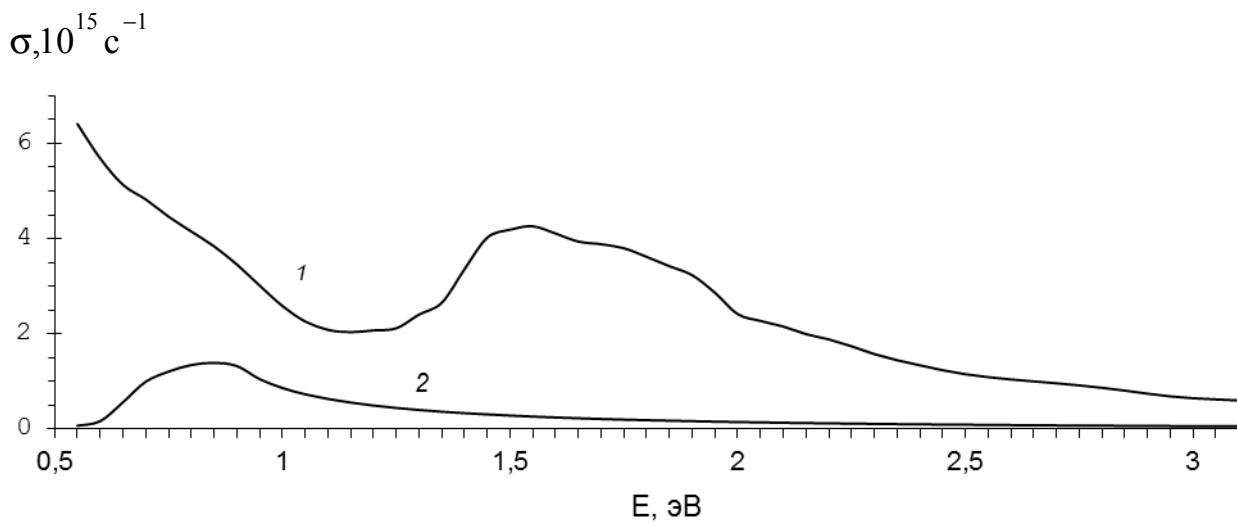


Рис. 1. Оптическая проводимость пленки алюминия $T = 298\text{ K}$:

- 1 – спектр окисленной пленки алюминия,
- 2 – вклад от поверхностных состояний

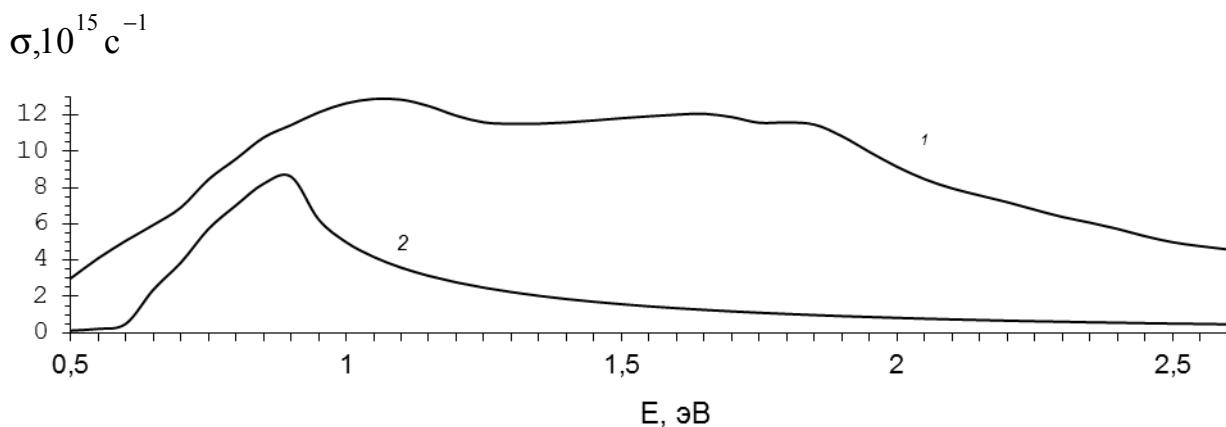


Рис. 2. Оптическая проводимость алюминия АСД-4 $T = 298 \text{ K}$:

1 – спектр прессованного порошка АСД-4,

2 – вклад от поверхностных состояний

Определение характеристик электронных состояний, составляющих спектры оптической проводимости, производилось с помощью экспертной системы, сформированной на основе процедуры сравнения экспериментальных спектров оптической проводимости с модельными спектрами [2]. При построении модельного спектра, каждый вклад от процесса поглощения фотонов учитывается в графическом представлении с помощью значений положения пика поглощения фотонов (энергии фотона $E = \Delta_j = \hbar\omega_j$), высоты пика (совпадающей с частотой плазменных колебаний ω_{Pj}) и его полуширины (т.е. частоты релаксации ω_{0j}). Здесь j – номер вклада. Из правила сумм для частот плазменных колебаний оценивается статистическое среднее количества электронов z_j , принимающих участие в формировании вкладов в оптическую проводимость.

В [1] было показано, что в порошке алюминия поверхностных состояний электронов практически на порядок больше, чем в его пленке. Из сравнения рисунков 1 и 2 видно, как вклад от поверхностных состояния электронов в порошке формирует вид поверхностной проводимости в области малых энергий фотонов. В области высоких энергий вид оптической проводимости порошка алюминия определяют характеристики предположительно фотон-фононного взаимодействия, центрированного вблизи значения энергии фотонов 1.85 эВ.

Результаты использования экспертной системы для экспериментальной оптической проводимости как пленки алюминия с окисленной поверхностью, так и порошка (табл.) показали, что полоса проводимости расщеплена. Распределение электронов при расщеплении полосы проводимости отражается в поведении частот плазменных колебаний. В этом случае частоты для порошка ω_{Pj} с $j = 0$ (вклад в оптическую проводимость, записанный в рамках модели П. Друде) равны нулю. Электроны, обеспечивающие наблюдаемую статическую проводимость, находятся на достаточно узкой нижней части (с $j = 1$). Характеристики электронов на полосах с $j = 2, 3$ и 4 относятся к поверхностным состояниям.

При исследовании электронных свойств пленки алюминия также наблюдается расщепление полосы проводимости. Из данных таблицы можно сделать вывод, что полоса с $j = 1$ заполнена электронами полностью, а часть электронов попала на полосу с $j = 0$, т.е. их можно считать почти свободными. Электропроводность в этом случае является суммой из вкладов, описываемых проводимостью почти свободных электронов и внутризонной проводимостью.

Для полос с большими j отметим тот факт, что для порошка значения частот релаксации ω_{0j} , отвечающих за ширину полосы перехода, существенно

больше, чем в пленке. Такое уширение линий, возможно, скрывает наличие линий с $j = 9$ и $j = 11$ (пленка), которые можно идентифицировать как положение запрещенных полос между акустическими и оптическими фотонами для двух подсистем: ион алюминия в металле – атом на поверхности и атом алюминия на поверхности – атом в оксиде.

Таблица

Электронные характеристики модельной кривой оптической проводимости пленки и порошка алюминия, $T=298$ К

| пленка алюминия с окисленной поверхностью | | | | порошок АСД-4, прессованный | | | | | |
|---|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|----|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------|
| j | $\Delta_j, \text{эВ}$ | ω_{pj} | ω_{0j} | Z_j | j | $\Delta_j, \text{эВ}$ | ω_{pj} | ω_{0j} | Z_j |
| | | $\times 10^{-15}, \text{с}^{-1}$ | $\times 10^{-15}, \text{с}^{-1}$ | | | | $\times 10^{-15}, \text{с}^{-1}$ | $\times 10^{-15}, \text{с}^{-1}$ | |
| 0 | 0 | 2.7133 | 1.1948 | 0.0384 | 0 | 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0010 |
| 1 | 0.4275 | 11.2913 | 0.1507 | 0.6654 | 1 | 0.5950 | 9.8046 | 0.3506 | 0.5017 |
| 2 | 0.6620 | 2.7458 | 0.0541 | 0.0393 | 2 | 0.7317 | 2.0556 | 0.0307 | 0.0221 |
| 3 | 0.7945 | 2.9259 | 0.0692 | 0.0447 | 3 | 0.8144 | 5.1596 | 0.0968 | 0.1389 |
| 4 | 0.9669 | 2.0183 | 0.0466 | 0.0213 | 4 | 0.9143 | 5.0561 | 0.1038 | 0.1334 |
| 5 | 1.0602 | 2.4385 | 0.0505 | 0.0310 | 5 | 1.0057 | 5.4066 | 0.1119 | 0.1526 |
| 6 | 1.1434 | 1.8960 | 0.0521 | 0.0188 | 6 | 1.1025 | 5.5917 | 0.1285 | 0.1632 |
| 7 | 1.2535 | 2.4698 | 0.0382 | 0.0318 | 7 | 1.2300 | 4.0855 | 0.1329 | 0.0871 |
| 8 | 1.3073 | 1.9148 | 0.0231 | 0.0191 | 8 | 1.3243 | 4.4493 | 0.0926 | 0.1033 |
| 9 | 1.3580 | 2.3964 | 0.0232 | 0.0300 | 9 | 1.4145 | 3.4730 | 0.0378 | 0.0629 |
| 10 | 1.4183 | 3.1767 | 0.0322 | 0.0527 | 10 | 1.5061 | 4.1042 | 0.0582 | 0.0879 |
| 11 | 1.4598 | 2.8281 | 0.0293 | 0.0417 | 11 | 1.5970 | 5.4480 | 0.1064 | 0.1549 |
| 12 | 1.5194 | 3.4714 | 0.0340 | 0.0629 | 12 | 1.6800 | 4.5367 | 0.1031 | 0.1074 |
| 13 | 1.6009 | 3.4234 | 0.0405 | 0.0612 | 13 | 1.7972 | 4.9106 | 0.1000 | 0.1259 |
| 14 | 1.6847 | 2.6762 | 0.0354 | 0.0374 | 14 | 1.8597 | 3.6569 | 0.0912 | 0.0698 |
| 15 | 1.7542 | 2.4069 | 0.0255 | 0.0302 | 15 | 1.9438 | 1.5577 | 0.0891 | 0.0127 |
| 16 | 1.8308 | 2.1109 | 0.0293 | 0.0233 | 16 | 2.1642 | 2.6894 | 0.1234 | 0.0377 |

ЛИТЕРАТУРА

- Киселев, А. И. Влияние фактора размерности образца на электронные свойства алюминия / Киселев А. И., Шевченко В. Г., Акашев Л. А. // Интел-

лекуально-информационные технологии и интеллектуальный бизнес (ИНФОС-2019) : материалы десятой международной научно-технической конференции. – Вологда : ВоГУ, 2019. – С. 87–89.

2. Киселев, А. И. Оценка эффективной массы электронов в церии из данных оптического эксперимента / Киселев, А. И., Кононенко В. И. // ТВТ. 2003. – Т. 41, № 6. – С. 870–876.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АСНИ, СУБД, САПР, СИСТЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУКАХ

| | |
|---|----|
| Бобырь М.В., Милостная Н.А., Якушев А.С. Нечетко-логический метод распознавания цветных меток | 4 |
| Бурков А.В., Марлей В.Е., Никифоров В.Г. Расчет затрат на эксплуатацию группы однотипных судов | 8 |
| Панова Е.А., Панарина М.С. Автоматизированный выбор и проверка трансформаторов напряжения средствами САПР | 10 |
| Кузьмин А.Г., Умаров М.Ф. Информационная технология в лечебных учреждениях | 14 |
| Рапаков Г.Г., Горбунов В.А., Юрьева С.В., Морозова П.А. Численное моделирование ценностных предпочтений здорового образа жизни в восприятии молодежи | 17 |
| Рапаков Г.Г., Ударатин А.В., Юрьева С.В., Морозова П.А. Статистический контроль распространенности факторов риска заболеваний для студенческой целевой аудитории | 21 |
| Русина Л.Г. Автоматизированная система контроля знаний при дистанционном обучении студентов | 25 |
| Сергушичева А.П., Давыдова Е.Н. Разработка генетического алгоритма для компьютерной системы профориентации | 30 |
| Федотовский С.Б. Лабораторный практикум по сетевым технологиям | 33 |

РАЗДЕЛ II. СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ КОММУНИКАЦИЙ НА ОСНОВЕ ЛВС, КОРПОРАТИВНЫХ СЕТЕЙ, ИНТЕРНЕТ И ОБЩЕСИСТЕМНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

| | |
|--|----|
| Швецов А.Н. Модели интеллектуальных агентов для информационно-телекоммуникационных систем | 37 |
| Швецов А.Н., Кинякин К.С. Интеллектуализация учебного процесса с применением антропоморфного интеллектуального агента | 43 |
| Швецов А.Н., Миронов А.А. Естественно-языковой диалог с антропоморфным интеллектуальным агентом | 49 |
| Дианов С.В. Задача оптимального пространственного размещения сервисов для систем с мобильными пользователями | 53 |
| Хромцова Н.А., Максимова Т.А., Соловьевна Е.В. Регистрация, авторизация и личный кабинет для научной библиотеки ВоГУ | 56 |

РАЗДЕЛ III. ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ ОТРАСЛЯХ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

| | |
|--|----|
| Анкудинов В.Б., Жеребицкая А.В. Микропроцессорная система измерения температуры..... | 60 |
| Анкудинов В.Б., Пантина Е.Н. Система измерения скорости вращения на ОЭВМ | 64 |
| Ахремчик О.Л., Воронов В.А. Облачные сервисы при функциональной диагностике вентиляй электрооборудования поездов «Ласточка» | 68 |
| Варганова А.В., Анисимова Н.А. Автоматизированный расчет затрат на выработку свежего пара в условиях промышленных тепловых электростанций..... | 70 |
| Трофименко Я.М. Обработка информации в системе слежения за стальковшами | 74 |
| Чертовской В.Д. Об оптимальном оперативно-календарном планировании производственных систем | 77 |
| Онохин Д.А., Карпов С.В., Коноплев М.И. Физическое и численное моделирование конвективного теплообмена в циклонных печах нагрева длинномерных заготовок | 81 |
| Яконовская Т.Б. Проблемы информатизации анализа геологических данных предприятий по добыче торфа..... | 89 |

РАЗДЕЛ IV. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ЯЗЫКИ, АВТОМАТЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

| | |
|---|-----|
| Маликов А.М. Приближение функций в среднем на вещественной оси суммами Фурье–Эрмита..... | 94 |
| Мухамадиев Э., Наимов А.Н. Исследование ограниченных траекторий трехмерной автономной системы..... | 98 |
| Мухин В.В. Топологии на универсальных обертывающих полугруппах n -арных полугрупп..... | 101 |
| Олимі А.Г. (Олимов А.Г.) Формула представления общего решения и задача типа линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с сингулярной точкой.... | 105 |
| Очилова М.А., Назимов А.Б. Условия приведения системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению | 110 |
| Попова А.Е. Модель системы с упорядочением на основе диаграмм Юнга ... | 115 |
| Түйчиев А.М. О среднеквадратическом полиномиальном приближении функций суммами Фурье–Чебышёва..... | 118 |
| Тухлиев Д.К. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве Бергмана B_2 | 123 |

| | |
|---|-----|
| Тухлиев К., Максудова Ш.Р. Наилучшие приближения некоторых классов функций частными суммами рядов Фурье–Чебышёва в $L_{2,\mu}$ | 127 |
| Тухлиев К., Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближение функций суммами Фурье–Эрмита в пространстве $L_{2,\rho}(R)$ | 135 |

РАЗДЕЛ V. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ФИЗИКЕ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

| | |
|---|-----|
| Батаронов И.Л., Надеина Т.А. Моделирование частотной зависимости энергии рассеяния дислокационной пары | 141 |
| Волвенков Р.В., Дубровский О.И. Расчет электронной структуры диоксида кремния с помощью программного пакета Quantum ESPRESSO | 144 |
| Иминова В.Р., Манякин М.Д., Леденева Ю.С. Моделирование L_3 -спектров ближней тонкой структуры края рентгеновского поглощения меди | 147 |
| Манякин М.Д., Курганский С.И. Моделирование электронной структуры никеля | 151 |
| Потуданский Г.П., Курганский С.И. Зонная структура полупроводниковой и металлической фаз дисилицида железа | 155 |
| Юрьев А.А., Гельчинский Б.Р. Расчет структурных, кинетических и электронных свойств жидких висмута и галлия | 160 |

РАЗДЕЛ VI. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКЕ

| | |
|--|-----|
| Аваев А.А. Математическая модель теплопроводности в симметричной системе эластомер-металл-эластомер при термической вулканизации эластомера в условиях конвективного внешнего теплообмена | 164 |
| Дежина О.А., Манякин М.Д., Паринова Е.В., Коюда Д.А., Турищев С.Ю., Курганский С.И. Рентгеновские абсорбционные спектры кремния по данным компьютерного моделирования | 168 |
| Стадная Н.П., Клинских А.Ф. Использование сингулярного разложения для исследования запутанности многокубитовых систем | 172 |
| Киселев А.И. Влияние фотон-фононного взаимодействия на оптические свойства порошка алюминия | 176 |

Научное издание

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ БИЗНЕС (ИНФОС-2020)**

***Материалы одиннадцатой заочной международной
научно-технической конференции***

29–30 июня 2020 г.

Подписано в печать 07.10.2020. Формат 60 × 84/16
Уч.-изд. л. 11,14. Усл. печ. л. 11,5. Тираж 300 экз. (1-й з-д 1–30). Заказ № 843

ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»
160000, г. Вологда, ул. Ленина, 15

Отпечатано: ООО «Вологодская типография»
160000, г. Вологда, ул. Преображенского, 4
Тел.: +7(8172) 71-08-58, 50-50-92, e-mail: poligraphmaster@mail.ru