Chapter 1

骰集的 Betti 数 b1 的计算

1.1 Preliminaries

Definition 1.1. 一个有向的紧二流形是同胚于球面或者环面或环面的有限个的连通和.

Definition 1.2. 黏合紧曲面 S 是一个二维连通紧流形或这种流形的一个商空间, 其商映射将多个与一维 CW 复形同胚的子集粘在一起; 将这个一维子集删除后该黏合紧曲面仍然是连通的. 不妨将内部有界的黏合紧曲面称为正向黏合紧曲面, 无界的内部称为负向黏合紧曲面, 使用 $-S$ 表示改变黏合紧曲面的方向.

Definition 1.3. 每个骰集 $\partial\mathcal{Y} \neq \emptyset, \mathbb{R}^3$ 可被唯一地表示为

$$\mathcal{Y} = \cup_j^{\perp\perp} \cap_i \operatorname{int}(S_{j,i}), \tag{1.1}$$

其中 j 是 $\mathcal{Y}$ 的连通分量的下标, i 是表示每个连通分量的边界的黏合紧曲面集合的下标, $S_{j,i}$ 是两两几乎不交的有向黏合紧曲面, $\forall j, \{S_{j,i} | i \in \mathbf{N}\}$ 中有一个或没有正向黏合紧曲面, 有任意多个负向黏合紧曲面.

并且骰集的 Betti 数 b_0 等于 j 的个数, b_2 等于负向黏合紧曲面的个数.

Theorem 1.4. 欧拉示性数是一个拓扑不变量, 对任意 CW 复形, 欧拉示性数可通过交替求和

$$\chi = k_0 - k_1 + k_2 - k_3 + \cdots \tag{1.2}$$

定义, 其中 k_n 代表在复形中 n 维元胞的数量.

并且, 对任意拓扑空间, 定义第 n 个 Betti 数 b_n. 欧拉示性数可被定义为 Betti 数的交替求和

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots . \tag{1.3}$$

Theorem 1.5. 三维空间中, 球 `D` 的欧拉示性数为 1,Betti 数

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

球面 `S` 的欧拉示性数为 2,Betti 数

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0, 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Theorem 1.6. 三维空间中, 实心环 `ST` 的欧拉示性数为 0,Betti 数

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0, 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

环面 $\mathtt{T}$ 的欧拉示性数为 0,Betti 数

$$b_k=\begin{cases}1 & \text{if } k=0,2\\ 2 & \text{if } k=1\\ 0 & \text{otherwise }.\end{cases}$$

Theorem 1.7. 三维空间中, k 个环面连通和的内部 (不妨命名为 k-实心环 $\mathtt{ST^k}$) 的欧拉示性数为 $1-k$,Betti 数

$$b_k=\begin{cases}1 & \text{if } k=0\\ k & \text{if } k=1\\ 0 & \text{otherwise },\end{cases}$$

k 个环面的连通和 (不妨命名为 k-环面 $\mathtt{T^k}$) 的欧拉示性数为 $2-2k$,Betti 数

$$b_k=\begin{cases}1 & \text{if } k=0,2\\ 2k & \text{if } k=1\\ 0 & \text{otherwise }.\end{cases}$$

Theorem 1.7. 可通过计算连通两个实心环或环面时的欧拉示性数的变化, 并且结合显然的 $b_0=1, b_2=0$ or 1 得到 b_1 的值.

Theorem 1.8. 对于一个连通区域的边界 S, 和被 $\overline{\operatorname{int}(S)}$ 包含的负向黏合紧曲面 S_{inner}. 则欧拉示性数

$$\chi_{\operatorname{int}(S)\cap\operatorname{int}(S_{inner})}=\chi_{\operatorname{int}(S)}-(\chi_{\operatorname{int}(-S_{inner})}-\chi_{S_{inner}}). \tag{1.4}$$

证明. 将 $\overline{\operatorname{int}(S)}$ 和 $\overline{\operatorname{int}(-S_{inner})}$(有界区域), S_{inner} 切分为元胞的集合 $\mathit{\Gamma}_{\operatorname{int}(S)}, \mathit{\Gamma}_{\operatorname{int}(-S_{inner})}, \mathit{\Gamma}_{S_{inner}}$.

因为 $S_{inner}\subset\overline{\operatorname{int}(-S_{inner})}\subset\overline{\operatorname{int}(S)}$, 不妨令

$$\mathit{\Gamma}_{\operatorname{int}(-S_{inner})}\subset\mathit{\Gamma}_{\operatorname{int}(S)} \tag{1.5}$$

$$\mathit{\Gamma}_{S_{inner}}\subset\mathit{\Gamma}_{\operatorname{int}(-S_{inner})}. \tag{1.6}$$

所以

$$\begin{aligned}\chi_{\operatorname{int}(S)\cap\operatorname{int}(S_{inner})}&=\left|\mathit{\Gamma}_{\operatorname{int}(S)}\right|-\left(\left|\mathit{\Gamma}_{\operatorname{int}(-S_{inner})}\right|-\left|\mathit{\Gamma}_{S_{inner}}\right|\right)\\&=\chi_{\operatorname{int}(S)}-(\chi_{\operatorname{int}(-S_{inner})}-\chi_{S_{inner}}).\end{aligned} \tag{1.7}$$

□

Theorem 1.9. 令点 $p\in\partial\mathcal{Y}$ 是一个殷集 $\mathcal{Y}\subset\mathbb{R}^3$ 的边界上的点, 对与任何充分小的邻域 $N(p)$, 我们有

(a) $\partial\mathcal{Y}\cap N(p)$ 是有限个广义圆盘的并集.

(b) (a) 中广义圆盘两两之间的交除了点 p 以外是有限个两两之间交且仅交于点 p 的广义半径的并集.

(c) $\partial\mathcal{Y}\cap N(p)$ 包含互相之间不交的规则开集; 对于两个共享同一片广义扇形作为它们的边界的开集, 其中一个是殷集 $\mathcal{Y}$ 的子集, 另一个是殷集补集 $\mathcal{Y}^{\perp}$ 的子集.

Theorem 1.10. 对于殷集边界上的非流形点 $p\in\partial\mathcal{Y}$, 令 $N(p)$ 为点 p 的的邻域当邻域充分小时,$\partial\mathcal{Y}\cap N(p)$ 可以被分割为有限个广义圆盘和折叠圆盘的并集.

在 $\partial\mathcal{Y}\cap N(p)$ 上的非流形点构成的广义半径上将广义扇形按好配对组合并与其他广义扇形分离, 可以消除 $\partial\mathcal{Y}\cap N(p)$ 内的非流形点.

Theorem 1.11. 黏合紧曲面 S 的欧拉示性数可如下计算

S 通过三角形表示, 定义三角形顶点 p 和以 p 为顶点的三角形集合 $\mathrm{St}(p)$, 将 $\mathrm{St}(p)$ 切分为多个集合 $M_p \subset \mathbb{N}, \{\mathrm{St}(p)_i | i \in M_p\}$ 使得只有 $\mathrm{St}(p)_i$ 中的三角形可以沿以 p 为端点的边按好配对粘合起来 (广义圆盘), 则欧拉示性数满足

$$\chi = \sum_p |\{\mathrm{St}(p)_i | i \in M_p\}| - \sum_p \sum_i |\mathrm{St}(p)_i| /6.$$

证明. 由上一条定理黏合紧曲面 S 可以通过好配对消除非流形点, 所以 $\{\mathrm{St}(p)_i | i \in M_p, p \in P_S\}$ 是流行上点的相邻三角形集合的集合, 在邻域 $N(p)$ 内构成没有非流形点的广义圆盘. 每个三角形在 $\{\mathrm{St}(p)_i | p \in P, i \in M_p\}$ 中出现三次 (三个顶点), 线段出现两次 (一个三角形包含 3 条边, 但是每条边被计算了 6 次 (边同时在 2 个三角形中, 且每个三角形被计算 3 次)), 因此

$$\begin{aligned}\chi &= k_0 - k_1 + k_2 \\ &= \sum_p |\{\mathrm{St}(p)_i | i \in M_p\}| - \sum_p \sum_i |\mathrm{St}(p)_i| /3 * 6 + \sum_p \sum_i |\mathrm{St}(p)_i| /3 \\ &= \sum_p |\{\mathrm{St}(p)_i | i \in M_p\}| - \sum_p \sum_i |\mathrm{St}(p)_i| /6.\end{aligned}$$

□

1.2 算法实现

1.2.1 输入

- 骰集 $\mathcal{Y}$ 边界的黏合紧曲面表示 $\{S_{j,i}\}$ 满足 $\mathcal{Y} = \cup_j^{\perp\perp} \cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})$.
- 表示 $\{S_{j,i}\}$ 的点 P, 线段, 三角形. 的集合.
- 对 P 中每个点 p, 点集的集合 $\{\mathrm{star}(p)_{j,i}\}$.

1.2.2 precondition

- $\{S_{j,i} | i \in \mathbf{N}\}$ 几乎只是骰集一个连通分量的边界 (除点线).
- $\{S_{j,i}\}$ 是 $\partial\mathcal{Y}$ 唯一表示.
- 对 P 中每个点 p, 在 $S_{j,i}$ 上与 p 之间有线段的点集 $\mathrm{star}(p)_{j,i}$.

1.2.3 输出

- Betti 数 b_0, b_1, b_2.

1.2.4 计算过程

a 对 $\mathcal{Y}$ 每个连通分量分别处理. 若连通分量是无界的, $\{S_{j,i} | i \in \mathbf{N}\}$ 中没有正向的黏合紧曲面, 不妨添加第一个黏合紧曲面是一个充分大的包含所有黏合紧曲面的球面.

b 对于 $\{S_{j,i}|i \in \mathbf{N}\}$ 中唯一一个正向黏合紧曲面 $S_{j,1}$, 计算 $\chi_{S_{j,1}}$ 得 $S_{j,1} = \mathtt{S/T/T^k}$. 更新 $b_{j,0}, b_{j,1}, b_{j,2}$ 为对应 $\mathtt{D/ST/ST^k}$ 的值. 若 $|\{S_{j,i}|i \in \mathbf{N}\}| > 1$ 计算 $\chi_{S_{j,2}}$, 令

$$\chi_{\mathrm{int}(S_{j,1})\cap\mathrm{int}(S_{j,2})} = \chi_{\mathrm{int}(S_{j,1})} - (\chi_{\mathrm{int}(-S_{j,2})} - \chi_{S_{j,2}}), \tag{1.8}$$

$$b_{j,2} = b_{j,2} + 1, \tag{1.9}$$

$$b_{j,1} = b_{j,0} + b_{j,2} - \chi_{\mathrm{int}(S_{j,1})\cap\mathrm{int}(S_{j,2})}. \tag{1.10}$$

递归可得 $\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})$ 的 $\chi_{\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})}, b_{j,k}(k = 0, 1, 2)$.

c 选定黏合紧曲面 $S_{j,i}$, 插入 $S_{j,i}$ 上的点 p_0 到 $setp$ 内, 直到出现点 $p_1 \in setp$, 在三维坐标上 $p_1 == p_0$. 判断 p_0, p_1 是从 $\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})$ 内部粘合或从外部, 如果是从内部粘合跳到 (d),

$$\chi_{\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})} = (k_0 - 1) - k_1 + k_2 = \chi_{\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})} - 1. \tag{1.11}$$

定义 $A := \{p_2 \mid p_2 \in \mathrm{star}(p_1)_{j,i} \ \texttt{\&\&}\ p_0 \in \mathrm{star}(p_2)_{j,i}\}$. 则

$$\chi_{\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})} = k_0 - (k_1 - |A|) + k_2 = \chi_{\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})} + |A|. \tag{1.12}$$

d $\mathrm{star}(p_1)_{j,i} = \mathrm{star}(p_1)_{j,i} \cup \mathrm{star}(p_0)_{j,i}$, $\forall p_3 \in \mathrm{star}(p_0)_{j,i}$, p_1 替换 $\mathrm{star}(p_3)_{j,i}$ 中的 p_0. 跳到 (c) 直到 $S_{j,i}$ 上所有点都插入 $setp$ 中.

清空 $setp$, 选取新的 i 跳到 (c), $\{S_{j,i}|i \in \mathbf{N}\}$ 都处理后进行下一步.

e 更新 $\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})$ 的 Betti 数

$$b_{j,1} = b_{j,0} + b_{j,2} - \chi_{\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})}. \tag{1.13}$$

f 选取另一个连通分量对应的 j 回到第 (a) 步, 直到所有连通分量都处理后

$$b_0 = \sum_j b_{j,0}, \tag{1.14}$$

$$b_1 = \sum_j b_{j,1}, \tag{1.15}$$

$$b_2 = \sum_j b_{j,2}. \tag{1.16}$$

证明. 第 (a) 步中每个连通分量单独处理, 因为 precondition 第一条中 $\{S_{j,i}|i \in \mathbf{N}\}$ 几乎只是一个连通分量的边界. 并且将殷集无界区域使用充分大的球体包含不会影响殷集上的同调群.

(b) 中, 使用定理 1.11 计算单个黏合紧曲面的欧拉示性数.

通过定理 1.2 和定理 1.5,1.6,1.7 可知外边界内部的 Betti 数. 与内表面的内部求交结果的欧拉示性数结果 (1.8) 由定理 1.8 得到, 由定义 1.3 连通分量不变, 洞数量增加 1(1.9). 定理 1.4 有 $b_{j,1}$(1.10)

(c,d) 中处理会改变欧拉示性数的粘合, 通过粘合点相邻三角形集合之间的相对位置和方向判断两个点是否是从连通分量外部粘合.

当从 $\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})$ 外部粘合时,(1.11) 是点的减少, (1,12) 是边的减少. 显然从外部沿着 1-CW 复形粘合时 3-cell 三角形和 4-cell 四面体数量不会变化.

但当从 $\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})$ 内部粘合, 粘合过程将一个同胚于球的元胞集合的并压缩成圆盘, 因为球和圆盘的欧拉示性数,Betti 数都一致, 所以 $\chi_{\cap_i \mathrm{int}(S_{j,i})}, b_{j,k}$ 不变.

(e) 如果粘合过程中产生了连通分量个数变化和洞的个数变化, 和定义 1.3 连通分量个数等于正向黏合紧曲面数量 (对于无界殷集添加充分大的球面后), 洞的个数等于负向黏合紧曲面数量说明产生了新的黏合紧曲面, 与 $\{S_{j,i}\}$ 是殷集边界 $\partial\mathcal{Y}$ 的唯一表示矛盾, 因此 $b_{j,0}, b_{j,2}$ 不变, 结合三维空间中更高次 Betti 数是 0 和定理 1.4 有 $b_{j,1}$(1.13).

(f) 因为各个连通分量之间的交为空, 所以殷集 Betti 数是各个连通分量 Betti 数的和 (1.14-16). □