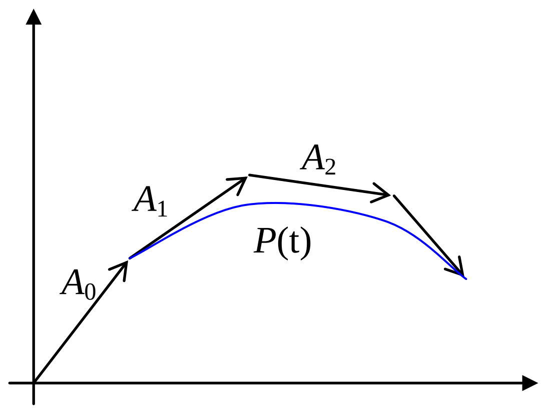
第四章 Bézier 曲线

§1. Bézier 曲线的定义

(a) 原始定义(Bézier)



$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}A_i f_{i,n}(t),\quad 0\le t\le 1$$

其中 $f_{i,n}(t)=\begin{cases}1 & i=0\\ \dfrac{(-t)^i d^{i-1}}{(i-1)!dt^{i-1}}\left[\dfrac{(1-t)^n-1}{t}\right] & i=1,2,\dots,n\end{cases}$

或 $f_{i,n}(t)=\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j}C_n^jC_{j-1}^{i-1}t^j$ ， $i=0,1,\dots,n$

速端曲线(Hodograph)：

$$H(t)=\frac{1}{n}P'(t)=\sum_{i=0}^{n-1}A_{i+1}f_{i,n-1}(t)$$

例： $n=5$

$f_{0,5}(t)=1$

$f_{1,5}(t)=5t-10t^2+10t^3-5t^4+5t^5$

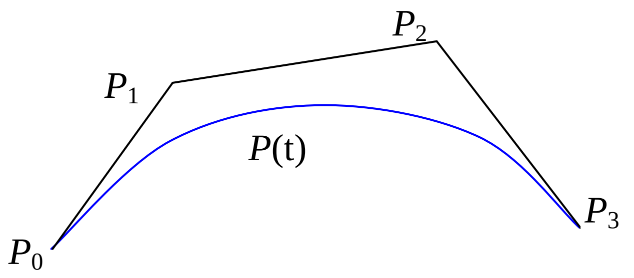
$f_{2,5}(t)=10t^2-20t^3+15t^4-4t^5$

$f_{3,5}(t)=10t^3-15t^4+6t^5$

$f_{4,5}(t)=5t^4-4t^5$

$f_{5,5}(t)=t^5$

(b) 一般定义(A. R. Forrest)



$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$， $0 \le t \le 1$

其中

P_i， $i=0,1,\ldots,n$ 为控制顶点，

$B_{i,n}(t)=C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$， $i=0,1,\ldots,n$ 为 Bernstein 基函数

转换关系：

$A_0=P_0$， $A_1=P_1-P_0$， …， $A_n=P_n-P_{n-1}$

$f_{0,n}(t)=1$, $f_{1,n}(t)=f_{0,n}(t)-B_{0,n}(t)$, $f_{2,n}(t)=f_{1,n}(t)-B_{1,n}(t)$,…,

$f_{n,n}(t)=f_{n-1,n}(t)-B_{n-1,n}(t)$

或 $B_{0,n}(t)=f_{0,n}(t)-f_{1,n}(t)$， $B_{1,n}(t)=f_{1,n}(t)-f_{2,n}(t)$， …，

$B_{n-1,n}(t)=f_{n-1,n}(t)-f_{n,n}(t)$， $B_{n,n}(t)=f_{n,n}(t)$

(c) Bézier 曲线算子表示(常庚哲)

差分算子：$\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$

恒等算子：$IP_i = P_i$

移位算子：$EP_i = P_{i+1}$， $E^r P_i = P_{i+r}$

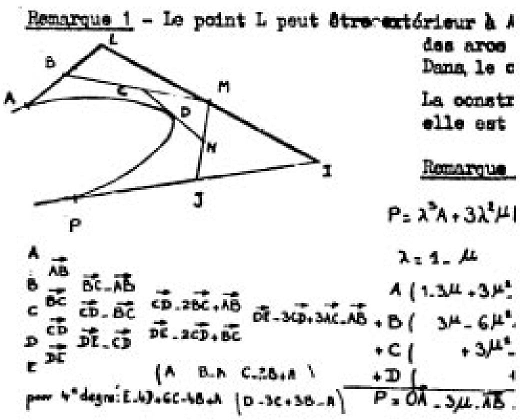
算子表示曲线：$P(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0$

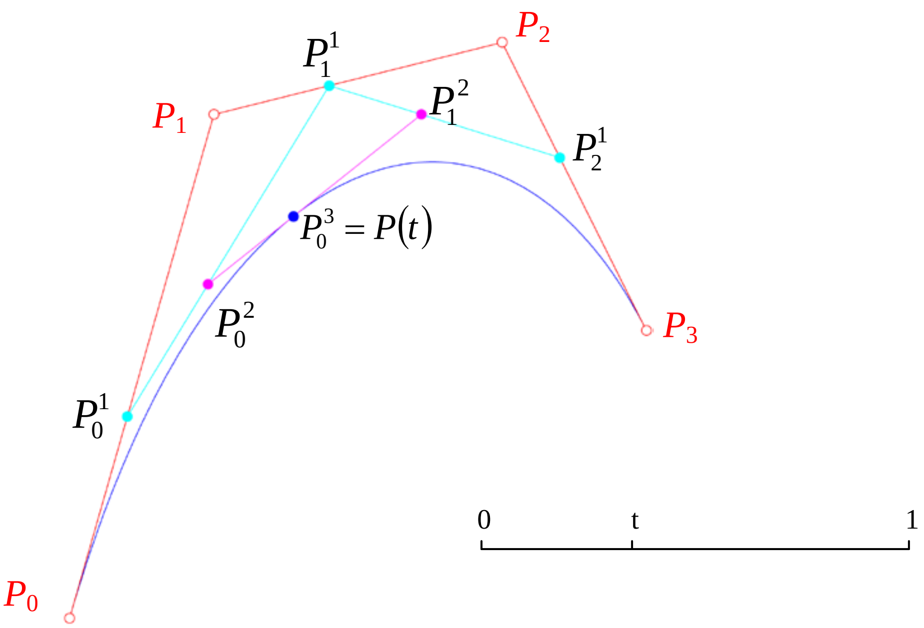
(d) Bézier 技术的优势

-- 曲线形状容易控制(控制多边形)

-- 计算稳定(Bernstein 基，递归求值)

§2. de Casteljau 算法





(a) 几何作图法：

曲线上一点可通过对控制多边形递归割角得到。

$P_0^1(t)=(1-t)P_0+tP_1$

$P_1^1(t)=(1-t)P_1+tP_2$ $P_0^2(t)=(1-t)P_0^1+tP_1^1$

$P_2^1(t)=(1-t)P_2+tP_3$ $P_1^2(t)=(1-t)P_1^1+tP_2^1$ $P_0^3(t)=(1-t)P_0^2+tP_1^2$

问题：在以上控制多边形中可以作几条 Bézier 曲线？

(b) 算法： 计算 Bézier 曲线上一点 $P(t)$

Input: P_i， $i=0,1,\ldots,n$， $t\in[0,1]$

for $i=0,1,\ldots,n$ set $P_i^0=P_i$

for *r*=1 to n do

for *i*=0 to *n*-*r* do

$$P_i^r=(1-t)P_i^{r-1}+tP_{i+1}^{r-1}$$

}

}

output P_0^n

(c) 命题

$P(t)=P_0^n(t)$，即：递归割角得到的点是 Bézier 曲线上一点。

归纳法证明：

$n=1$时， $P(t)=(1-t)P_0+tP_1=P_0^1(t)$， 命题成立。

假设$n-1$时命题成立，即有

$n-1$边形 $P_0P_1\ldots P_{n-1}$ 递推$n-1$次后生成 $P_0^{n-1}(t)$

$n-1$边形 $P_1P_2\ldots P_n$ 递推 $n-1$ 次后生成 $P_1^{n-1}(t)$

即假设 $P_0^{n-1}(t)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}P_iB_{i,n-1}(t)$

$$P_1^{n-1}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}P_{i+1}B_{i,n-1}(t)$$

依据割角定义

$$\begin{aligned}P_0^n(t)&=(1-t)P_0^{n-1}(t)+tP_1^{n-1}(t)\\&=(1-t)\sum_{i=0}^{n-1}P_iB_{i,n-1}(t)+t\sum_{i=0}^{n-1}P_{i+1}B_{i,n-1}(t)\\&=(1-t)P_0B_{0,n-1}(t)+\sum_{i=1}^{n-1}\left[(1-t)B_{i,n-1}(t)+tB_{i-1,n-1}(t)\right]P_i+tB_{n-1,n-1}(t)P_n\\&=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)=P(t)\end{aligned}$$

命题得证。

§3. Bernstein 多项式

- 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)逼近定理

  每一个闭区间上的连续函数(导数)可以用多项式曲线(导数)来实现任意给定误差精度的逼近。

  定理：设 $f=f(x)$， $x\in[0,1]$有直到 k 阶连续导数，令

$$B(f,x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)B_{i,n}(x),$$

其中 $B_{i,n}(x)=C_n^ix^i(1-x)^{n-i}$， $i=0,1,\ldots,n$ 为 Bernstein 基函数，则：

$$B^{(k)}(f,x)\xrightarrow[\text{一致}]{n\to\infty}f^{(k)}(x)$$

例：若 $f(x)=x^2$，则有 $B(f,x)=\sum\limits_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)B_{i,n}(x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$

评： 该定理理论意义大，但实际达到高精度需要高次数曲线。

注：将 Bézier 曲线的控制多边形记为分段线性曲线 $F(t)$ 且满足 $F\left(\frac{i}{n}\right)=P_i$，$i=0,1,\cdots,n$，则 Bézier 曲线 $P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)$ 是对控制多边形的魏尔斯特拉斯逼近。

- n 次 Bernstein 基函数构成 n 次多项式空间的基

一个等式：

$$\frac{B_{i,n}(t)}{(1-t)^n}=\frac{C_n^i t^i(1-t)^{n-i}}{(1-t)^n}=C_n^i\frac{t^i}{(1-t)^i}$$

令 $u=\frac{t}{1-t}$，可以得到：

$$\frac{B_{i,n}(t)}{(1-t)^n}=C_n^i u^i\equiv M_{i,n}(u)$$

命题： n 次 Bernstein 基函数线性无关。

证明： 假设存在常数 c_i，$i=0,1,\ldots,n$，使得

$$\sum_{i=0}^{n}c_iB_{i,n}(t)\equiv 0$$

现在证明 $c_i=0$，$i=0,1,\ldots,n$。

将上式除以 $(1-t)^n$，可得

$$\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{B_{i,n}(t)}{(1-t)^n}=\sum_{i=0}^{n}c_iM_{i,n}(u)\equiv 0\text{。}$$

因为单项式 $M_{0,n}(u)$，…，$M_{n,n}(u)$ 线性无关，

所以有 $c_i=0$，$i=0,1,\ldots,n$。证毕。

思考题：

1. 令 $M_{i,n}(t)=C_n^i t^i$，$i=0,1,\ldots,n$。

   a. 证明这些函数满足递推式：$M_{i,n}(t)=M_{i,n-1}(t)+tM_{i-1,n-1}(t)$

b. 设计多项式$P(t)=\sum_{i=0}^{n} c_i M_{i,n}(t)$求值的类 de Casteljau 算法。

2. 证明 Bernstein 多项式$B_{i,n}(t)$在$t=\frac{i}{n}$处取到最大值，并计算该最大值。

3. 证明等式：$\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}B_{i,n}(t)=t$

● 函数的 Bernstein 多项式逼近

$B_n(f,x)=\sum_{i=0}^{n} f_i B_{i,n}(x)$ $\qquad x\in[0,1]$，其中 $f_i=f\left(\frac{i}{n}\right)$

$B_n(f,x)=\sum_{i=0}^{n} f_i B_{i,n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ $\qquad x\in[a,b]$，其中 $f_i=f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)$

算子表示：

$B_n(f,x)=[(1-x)I+xE]^n f_0$

性质：

(1) $B_n'(f,x)=n(E-I)[(1-x)I+xE]^{n-1} f_0=n\sum_{i=0}^{n-1}(f_{i+1}-f_i)B_{i,n-1}(x)$

$$B_n^{(k)}(f,x)=\frac{n!}{(n-k)!}(E-I)^k[(1-x)I+xE]^{n-k} f_0$$

(2) $B_n(f,0)=f_0$， $B_n(f,1)=f_1$

$B_n'(f,0)=n(f_1-f_0)$， $B_n'(f,1)=n(f_n-f_{n-1})$

(3) 保型性质：

若 $f(x)$为凸函数，则$B_n(f,x)$也是凸函数。

(4) 线性再生性：

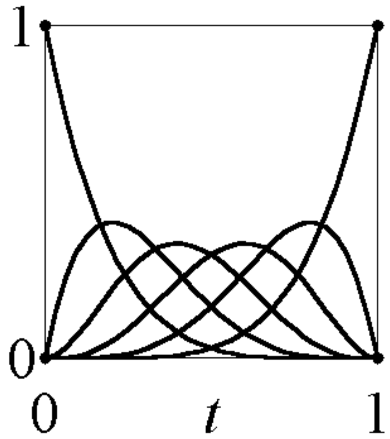
若 $f(x)$是线性函数，则$B_n(f,x)\equiv f(x)$

(5) 磨光性质：

记 $B_n(f,0,x)=B_n(f,x)$

$$B_n(f,k,x)=B_n(B_n(f,k-1,x),x),$$

则有 $\lim\limits_{k\to\infty}B_n(f,k,x)=(1-x)f_0+xf_n$



- Bernstein 多项式的性质

1. 正性(positive)

$$B_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i}\geq 0,\quad i=0,1,\ldots,n$$

$$B_{0,n}(0)=B_{n,n}(1)=1$$

2. 权性(Partition of unity)

$$\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)\equiv 1$$

证明：由恒等式 $1=(t+1-t)^n$，二项式展开，即得上式。

3. 对称性(symmetry)

$$B_{i,n}(t)=B_{n-i,n}(1-t),\quad i=0,1,\ldots,n$$

4. 递推式(recursion)

$$B_{i,n}(t)=(1-t)B_{i,n-1}(t)+tB_{i-1,n-1}(t)$$

5. 导函数(derivative)

$$B'_{i,n}(t)=n\left[B_{i-1,n-1}(t)-B_{i,n-1}(t)\right]$$

6. 最大值(maximum)

当$t=\frac{i}{n}$时，$B_{i,n}(t)$达到最大值。

7. 升阶公式(degree elevation)

$$B_{i,n}(t)=\left(1-\frac{i}{n+1}\right)B_{i,n+1}(t)+\frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(t)$$

8. 积分(integral)

$$\int_0^1 B_{i,n}(t)dt=\frac{1}{n+1}$$

§4. Bézier 曲线的基本性质

n 次 Bézier 曲线：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)=\left[(1-t)I+tE\right]^nP_0,\quad 0\le t\le 1,$$

其中P_i，$i=0,1,\dots,n$为控制顶点。

基本性质：

(1) 仿射不变性

$AP(t)=\sum_{i=0}^{n}(AP_i)B_{i,n}(t)$，其中 A 为仿射变换矩阵。

(2) 线性参数变换的无关性

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right),\quad a\le u\le b$$

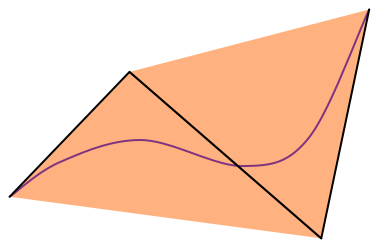
(3) 凸包性质

Bézier 曲线位于其特征多边形的凸包之内。

凸包：包含一个(点)集合的最小凸集。

特别地，一个闭凸多边形内部点可以表示成边界点的凸组合形式。

即：$Q=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P_i$，其中 $\lambda_i \geq 0$，$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1$。



Bézier 曲线及其控制顶点的凸包。

(4) 端点性质

$P(0)=P_0$， $P(1)=P_n$，

$P'(0)=n(P_1-P_0)$， $P'(1)=n(P_n-P_{n-1})$

(5) 对称性

$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)$ 与 $\overline{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}P_{n-i}B_{i,n}(t)$ 表示同一条曲线。

(6) 线性再生性

若 $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ 位于同一条直线上，则 $P(t)$ 表示一条直线。

(7) 速端曲线与导数曲线

$P'(t)=n\sum_{i=0}^{n-1}\Delta P_iB_{i,n-1}(t)$，其中 $\Delta P_i=P_{i+1}-P_i$

$$P^{(k)}(t)=\frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k}\Delta^kP_iB_{i,n-k}(t)$$

$$P^{(k)}(0)=\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^kP_0，\quad P^{(k)}(1)=\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^kP_{n-k}$$

§5. Bézier 曲线的离散逼近与几何性质

- 升阶公式及其应用

由 $B_{i,n}(t)=\left(1-\frac{i}{n+1}\right)B_{i,n+1}(t)+\frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(t)$，可得

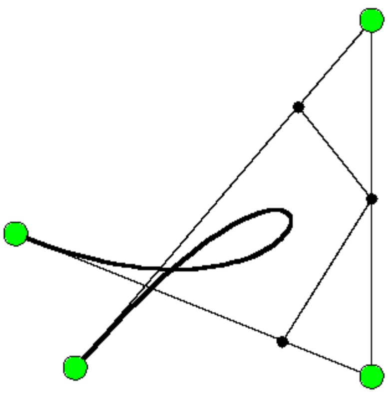
$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{i}{n+1}P_{i-1}+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)P_i\right]B_{i,n+1}(t)，\text{其中 } P_{-1}=P_{n+1}=0$$

升 r 阶公式

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)\sum_{j=0}^{r}B_{j,r}(t)=\sum_{i=0}^{n+r}P_i^{(r)}B_{i,n+r}(t),$$

其中 $P_i^{(r)}=\sum_{i=0}^{n}P_j\frac{C_n^jC_r^{i-j}}{C_{n+r}^i}$



升阶过程是割角过程。

- 收敛性定理

将升阶 r 次后得到的控制多边形 $\left\{P_i^{(r)}\right\}_{i=0}^{n+r}$ 表示成参数形式

$$Q_{n+r}(t)=(n+r)\left[\left(\frac{i+1}{n+r}-t\right)P_i^{(r)}+\left(t-\frac{i}{n+r}\right)P_{i+1}^{(r)}\right]，\quad t\in\left[\frac{i}{n+r},\frac{i+1}{n+r}\right]$$

则有：$\lim_{m\to+\infty}Q_m(t)=P(t)$，其中 $m=n+r$

证明：$Q_m(t)$是$[0,1]$上的分段线性曲线，$Q_m\left(\frac{i}{m}\right)$是$Q_m(t)$上第 i 个顶点。

同时，$Q_m(t)$是 m 次 Bézier 曲线的控制曲线，$Q_m\left(\frac{i}{m}\right)$是其控制顶点。

设$B_m(F,t)=\sum_{i=0}^{m}F\left(\frac{i}{m}\right)B_{i,m}(t)$，即$F(t)$的 m 次 Bernstein 逼近。则有

$$B_m(Q_m,t)=\sum_{i=0}^{m}Q_m\left(\frac{i}{m}\right)B_{i,m}(t)=P(t)\text{。}$$

定义$Q(t)=\lim_{m\to\infty}Q_m(t)$。为说明$Q(t)=P(t)$，须估计$Q(t)$与$P(t)$之间的差。

$$\begin{aligned}P(t)-Q(t)&=\lim_{m\to\infty}B_m(P-Q,t)\\&=\lim_{m\to\infty}\left[B_m(P,t)-B_m(Q,t)\right]\\&=\lim_{m\to\infty}\left[B_m(P,t)-B_m(Q_m,t)+B_m(Q_m,t)-B_m(Q,t)\right]\\&=\lim_{m\to\infty}\left[B_m(P,t)-B_m(Q_m,t)\right]+\lim_{m\to\infty}\left[B_m(Q_m,t)-B_m(Q,t)\right]\\&=\lim_{m\to\infty}\left[B_m(P,t)-P(t)\right]+\lim_{m\to\infty}B_m(Q_m-Q,t)\end{aligned}$$

根据 Weierstrass 逼近定理知，$\lim_{m\to\infty}\left[B_m(P,t)-P(t)\right]=0$，且一致收敛。

由于$Q(t)=\lim_{m\to\infty}Q_m(t)$，对于 任意 ε>0 和足够大 m 有$|Q(t)-Q_m(t)|<\varepsilon$，

从而，

$$\left|B_m(Q_m-Q,t)\right|\le\sum_{i=0}^{m}\left|Q_m\left(\frac{i}{m}\right)-Q\left(\frac{i}{m}\right)\right|B_{i,m}(t)<\varepsilon$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}B_m(Q_m-Q,t)=0$$

因此， $P(t)-Q(t)=0$， 且$\lim_{m\to+\infty}Q_m(t)=P(t)$是一致收敛。

- Bézier 曲线的降阶逼近

由 Bézier 曲线升阶公式

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{i}{n+1}P_{i-1}+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)P_i\right]B_{i,n+1}(t)=\sum_{i=0}^{n+1}\overline{P}_iB_{i,n+1}(t)$$

得到升阶前后控制顶点的关系矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n+1} & \frac{n-1}{n+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n+2)\times(n+1)} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{P}_0 \\ \overline{P}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{P}_n \\ \overline{P}_{n+1} \end{pmatrix}$$

简记成 $MP=\overline{P}$，两边乘以 M 转置矩阵，有

$$M^TMP=M^T\overline{P}$$

则得降阶公式

$$P=\left(M^TM\right)^{-1}M^T\overline{P}$$

思考题：

1. 证明 Bézier 曲线的弧长总是小于或等于其控制多边形的边长。
2. 设 $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ 是 n 次 Bézier 曲线的控制顶点，$\{Q_i\}_{i=0}^{n+1}$ 是相应的升阶 Bézier 曲线的控制顶点，并设 $s_{\max}(P)$ 是原 Bézier 曲线控制多边形的最长边，$s_{\max}(Q)$ 是升阶后 Bézier 曲线的最长边。则有：

   a. $s_{\max}(Q)\le\dfrac{n}{n+1}s_{\max}(P)$

   b. 对 Bézier 曲线进行无限次升阶，则控制多边形最长边的边长趋于 0.

- 平面 Bézier 曲线的保型

  (a) 凸曲线：平面凸闭集的边界或部分边界。

(b) **定理**：平面 Bézier 曲线具有保凸性。即：若控制多边形为凸，则 Bézier 曲线也是凸的。

证明：由于 Bézier 曲线升阶过程是控制多边形割角过程，一个凸多边形升阶后得到的多边形仍然凸。

记 $A^{(r)}$ 为包含 $\{P_i^{(r)}\}_{i=0}^{n+r}$ 的最小凸集，边界为 $P^{(r)}$。

$P^{(0)}$ 凸 → $P^{(r)}$ 凸

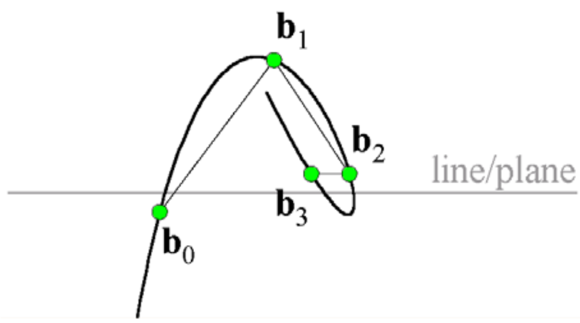
$A^{(r+1)} \subseteq A^{(r)}$， $A^{(r)} = \bigcap_{i=0}^{r} A^{(i)}$

当 $r \to \infty$ 时，可得 $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} A^{(i)}$ 为有界闭凸集。

根据升阶原理，$P(t)$ 是 A(部分)边界，所以 $P(t)$ 是凸曲线。

注：此定理逆命题一般不成立。Bézier 曲线凸，其控制多边形不一定凸，但可通过升阶得到凸控制多边形。

(c) 变差缩减性质(Variation diminishing)



连接两点的直线与一直线/平面的交点至多是一个，而其它曲线可能不止一个。

- 分段线性插值曲线是变差缩减的。
- Bézier 曲线升阶一次得到的控制多边形是对升阶前的控制多边形的采样与分段线性插值，所以升阶后的多边形与直线/平面的交点个数不大于升阶前交点个数。
- Bézier 曲线由升阶得到，故 Bézier 曲线与直线/平面的交点个数不大于原控制多边形与直线/平面交点个数。

§6. Bézier 曲线的分割算法

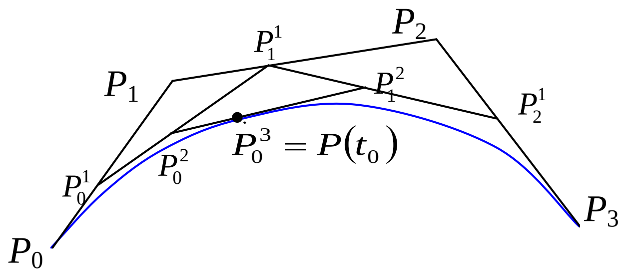
分割定理： n 次 Bézier 曲线 $P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$， $0\le t\le 1$，

设 $t_0\in(0,1)$，则有

$$P(t)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n} P_0^i(t_0)B_{i,n}\left(\dfrac{t}{t_0}\right) & t\in[0,t_0]\\ \sum_{i=0}^{n} P_i^{n-i}(t_0)B_{i,n}\left(\dfrac{t-t_0}{1-t_0}\right) & t\in[t_0,1]\end{cases}$$

其中 $P_i^r(t_0)=(1-t_0)P_i^{r-1}(t_0)+t_0P_{i+1}^{r-1}(t_0)$，

$P_i^0(t_0)=P_i$， $i=0,1,\ldots,n$



证明： $P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$

当 $t\in[0,t_0]$， 令 $\dfrac{t}{t_0}=u$， 则 $t=t_0u$， 代入上式有

$$[(1-t_0u)I+t_0uE]^n P_0$$

$$=[(1-u+u-t_0u)I+t_0uE]^n P_0$$

$$=\{(1-u)I+u[(1-t_0)I+t_0E]\}^n P_0$$

$$=\sum_{i=0}^{n} C_n^i u^i[(1-t_0)I+t_0E]^i(1-u)^{n-i}P_0$$

$$=\sum_{i=0}^{n}[(1-t_0)I+t_0E]^i P_0B_{i,n}(u)$$

记$P_0^i(t_0)=[(1-t_0)I+t_0E]^i P_0=\sum_{j=0}^{i} P_j B_{j,i}(t_0)$

所以，$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_0^i(t_0)B_{i,n}\left(\frac{t}{t_0}\right)$，$t\in[0,t_0]$。

当$t\in[t_0,1]$，令$v=\frac{t-t_0}{1-t_0}$，则$t=t_0+v(1-t_0)$，

代入$P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$中，有

$$
\begin{aligned}
&[(1-t)I+tE]^n P_0 \\
=\ & \{[(1-t_0)I+t_0E](1-v)+vE\}^n P_0 \\
=\ & \sum_{i=0}^{n} E^i[(1-t_0)I+t_0E]^{n-i} P_0 B_{i,n}(v)
\end{aligned}
$$

而 $[(1-t_0)I+t_0E]^{n-i}=\sum_{j=0}^{n-i} E^j B_{j,n-i}(t_0)$

$$E^i[(1-t_0)I+t_0E]^{n-i}P_0=\sum_{j=0}^{n-i}E^{i+j}P_0B_{j,n-i}(t_0)=P_i^{n-i}(t_0)$$

所以有$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i^{n-i}(t_0)B_{i,n}\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right)$，$t\in[t_0,1]$。

Procedure. CurveSplit(P,Q,R,n,t_0)

P[n+1], Q[n+1], R[n+1]分别表示原曲线和分割后两段曲线的控制多边形。

Step 1: for (i=0; i<=n; i++) R[i] = P[i]; // 赋初值

Step 2: for (r=0; r<n; r++) {

Q[r] = R[0];

for (i=0; i<n-r; i++) {

R[i] = (1-t_0)R[i] + t_0R[i+1];

```
        }
    }
    Q[n] = R[0];  //    end
```

下面公式给出 Bézier 曲线及其控制多边形的误差估计，从而可在给定误差范围内计算得到细分层数。

汪氏公式：假设$P(t)$是任一区间$[a,b]$上二阶可导的参数曲线，并且假设$L(t)=\frac{b-t}{b-a}P(a)+\frac{t-a}{b-a}P(b)$是一条通过点$P(a)$和$P(b)$的参数直线。那么，

$$\max\left|P(t)-L(t)\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max\left|P''(b)\right|$$

证明：记$E(t)=P(t)-L(t)$。由构造

$$E(a)=E(b)=0\Rightarrow E(a)\cdot E(a)=E(b)\cdot E(b)=0$$

对于实值函数$E(t)\cdot E(t)$ 应用罗尔定理，存在一个参数$\tau\in[a,b]$，使得$E(\tau)\cdot E(\tau)$取得最大值，即$\left(E(\tau)\cdot E(\tau)\right)'=E(\tau)\cdot E'(\tau)=0$。根据带余项的 Taylor 公式：

$$E(t)=E(\tau)+E'(\tau)(t-\tau)+\int_\tau^t(t-x)E''(x)dx$$

在等式两边点乘$E(\tau)$并由$E(\tau)\cdot E'(\tau)=0$，得到：

$$E(\tau)\bullet E(t)=E(\tau)\bullet E(\tau)+E(\tau)\bullet\int_\tau^t(t-x)E''(x)d$$

不失一般性，假设$a\le\tau\le(a+b)/2$(在其余区间类似证明)。

当$t=a$时，$E(a)=0$。因为$L(x)$是线性的，所以$E''(x)=P''(x)$，得到：

$$-E(\tau)\bullet E(\tau)=E(\tau)\bullet\int_\tau^a(a-x)P''(x)dx$$

由$|a\bullet b|\le|a||b|$，得到

$$|E(\tau)|^2 \le |E(\tau)| \left| \int_\tau^a (a-x) P''(x)\, dx \right|$$

或者 $E(\tau)=0$，或者由 $\tau \le (a+b)/2$，得到

$$\begin{aligned} |E(\tau)| &\le \left| \int_\tau^a (a-x) P''(x)\, dx \right| \\ &\le \int_\tau^a (a-x) |P''(x)|\, dx \\ &\le \max |P''(x)| \int_\tau^a (a-x)\, dx \\ &\le \max |P''(x)| \frac{(\tau-a)^2}{2} \\ &\le \max |P''(x)| \frac{(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

定理证毕。

定理：已知 Bézier 曲线 $P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$。对于任意给定 $\varepsilon > 0$，定义：

$$m = \max_{0\le k\le n-2} |P_{k+2} - 2P_{k+1} + P_k|$$

$$l \ge \log_4 \left(\frac{n(n-1)m}{8\varepsilon} \right)$$

设 $C(t)$ 是 $P(t)$ 经 l 阶中点分割后得到的分段 Bézier 曲线，$L(t)$ 是连接分点的折线，则 $dist(C(t), L(t)) \le \varepsilon$。

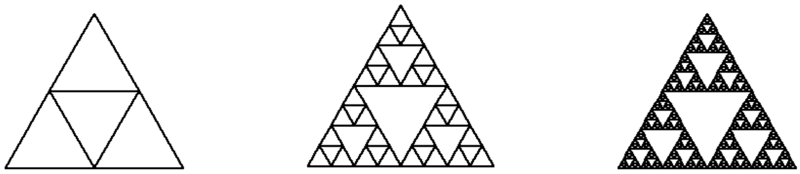
§7. Bézier 曲线的分形特性(the fractal nature of Bézier curves)

- 迭代函数系统(IFS)

  记 $W=\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_l\}$ 为由一组压缩映射(contractive map)构成的迭代函数系统，该系统的不动点构成分形。

  例：Koch 曲线

例：The Sierpinski gasket



分形生成算法：

$A_0 = B$；

$A_1 = W(A_0) = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup \cdots \cup w_l(A_0)$；

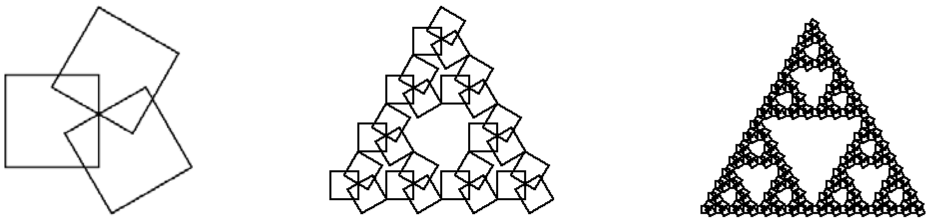
……

$A_{n+1} = W(A_n) = w_1(A_n) \cup w_2(A_n) \cup \cdots \cup w_l(A_n)$；

记 $A = \lim_{n\to\infty} A_n$，有 $A = W(A)$。

特别地，B 须为紧集，吸引子 A 与初始集 B 无关。

例：The Sierpinski gasket



- Bézier 曲线的迭代生成(分形特性)

由 Bézier 曲线分割定理，n 次 Bézier 曲线 $P(t)$ 可以分割为两段同次数 Bézier 曲线 $Q(t)$ 和 $R(t)$。

记 $L = \begin{pmatrix} B_{0,0}(1/2) & 0 & \cdots & 0 \\ B_{0,1}(1/2) & B_{1,1}(1/2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,n}(1/2) & B_{1,n}(1/2) & \cdots & B_{n,n}(1/2) \end{pmatrix}$

$$M=\begin{pmatrix} B_{0,n}(1/2) & B_{1,n}(1/2) & \cdots & B_{n,n}(1/2) \\ 0 & B_{0,n-1}(1/2) & \cdots & B_{n-1,n-1}(1/2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,0}(1/2) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

令 $P=(P_0 \quad P_1 \quad \cdots \quad P_n)^T$，则 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 的控制顶点可由下列矩阵计算得到：$LP=Q=(Q_0 \quad Q_1 \quad \cdots \quad Q_n)^T$，$MP=R=(R_0 \quad R_1 \quad \cdots \quad R_n)^T$

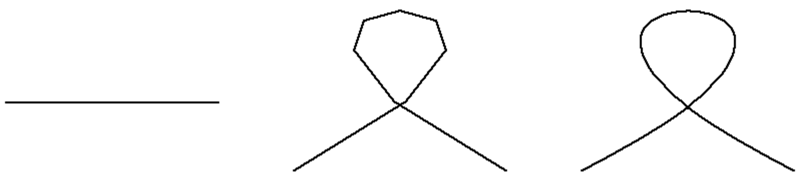
构造压缩映射 $L_P=P^{-1}LP$，$M_P=P^{-1}MP$，则 $\{L_P,\ M_P\}$ 构成迭代函数系统。

为保证矩阵 P 的可逆性，可将点的坐标提升到高维空间，比如：

生成二次 Bézier 曲线，$P=\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$

生成三次 Bézier 曲线，$P=\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

相应地，最后变换得到的点也也要投影到原平面上。



例：用 IFS 生成一条三次 Bézier 曲线。

§8. Bézier 曲线的动力学性质

已知 Bézier 曲线 $P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$，其中 $P_i=(x_i \quad y_i \quad z_i)^T$，$i=0,1,\ldots,n$。

将曲线提升至 $n+1$ 维空间，得到曲线 $X(t)=\sum_{i=0}^{n} X_i B_{i,n}(t)$，令矩阵

$$M_X=\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-3} & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-3} & y_{n-2} & y_{n-1} & y_n \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{n-3} & z_{n-2} & z_{n-1} & z_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}，\quad \Phi(t)=\begin{pmatrix} B_{0,n}(t) \\ B_{1,n}(t) \\ B_{2,n}(t) \\ B_{3,n}(t) \\ \vdots \\ B_{n-1,n}(t) \\ B_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

则曲线 $X(t)=\sum_{i=0}^{n} X_i B_{i,n}(t)$ 可以表示成

$$X(t)=M_X\Phi(t)$$

示成将矩阵 M_X 表示成分块矩阵

$M_X=\begin{bmatrix} P_I & P_{II} \\ I_{n-2} & 0 \end{bmatrix}$，则其逆矩阵为 $M_X^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & I_{n-2} \\ P_{II}^{-1} & -P_{II}^{-1}P_I \end{bmatrix}$。

易知 $\Phi'(t)=C_n\Phi(t)$，其中

$$C_n=\begin{bmatrix} -n & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -n+2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & -n+4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix}$$

曲线 $X(t)=\sum_{i=0}^{n} X_i B_{i,n}(t)$ 满足如下线性微分系统

$$\begin{cases} X(t)=AX(t), \quad t\in[0,1] \\ X(0)=X_0 \end{cases}$$

其中 $A=M_X C_n M_X^{-1}$。

注：上述结论不限于多项式曲线，只要 $\Phi(t)$ 张成的线性空间对微分运算封闭，则以 $\Phi(t)$ 为基函数构造得到的曲线一定是线性微分系统的解。

基于微分系统表示，得到曲线 $X(t)$ 又可写成 $X(t)=e^{At}X_0$，进一

步可得 $X(t+\Delta t)=e^{A\Delta t}X(t)$，通过预计算矩阵

$$M_A=e^{A\Delta t}=I+A\Delta t+\frac{A^2(\Delta t)^2}{2!}+\cdots+\frac{A^n(\Delta t)^n}{n!},$$

则可由初值 X_0 出发依次求出曲线上等步长参数对应的点

$$X_{i+1}=M_A X_i,\quad i=0,1,\ldots$$

§9. 各种表示到 Bézier 表示的转化

(a) 幂级数到 Bézier 表示的转化

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_i t^i=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{b}_i B_{i,n}(t),\quad t\in[0,1]$$

已知 P_i，$i=0,1,\ldots,n$，求 $\mathbf{b}_i$，$i=0,1,\ldots,n$

- 算法 1(Horner 算法)

$$R_0(t)=P_n$$

$$R_k(t)=tR_{k-1}(t)+P_{n-k},\quad k=1,\ldots,n$$

$$R_n(t)=P(t)$$

设 $R_l(t)=\sum_{i=0}^{l}R_i^l B_{i,l}(t)$

则
$$\begin{aligned}R_k(t)&=tR_{k-1}(t)+P_{n-k}\\&=t\sum_{i=0}^{k-1}R_i^{k-1}B_{i,k-1}(t)+P_{n-k}\\&=\sum_{i=0}^{k}\frac{i}{k}R_{i-1}^{k-1}B_{i,k}(t)+\sum_{i=0}^{k}P_{n-k}B_{i,k}(t)\\&=\sum_{i=0}^{k}\left[P_{n-k}+\frac{i}{k}R_{i-1}^{k-1}\right]B_{i,k}(t)\end{aligned}$$

递推式： $R_i^k=P_{n-k}+\frac{i}{k}R_{i-1}^{k-1}$，$i=0,1,\ldots,k$，$k=1,\ldots,n$，$R_0=P_n$

- 算法 2

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_i t^i\text{，}\quad t\in[0,1]$$

令 $Q_i=\frac{1}{C_n^i}P_i$，有

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i Q_i t^i$$

$$=(I+Et)^n Q_0$$

$$=[(I+E)t+I(1-t)]^n Q_0$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(I+E)^i Q_0 B_{i,n}(t)$$

取 $\mathbf{b}_i=(I+E)^i Q_0$，$\quad i=0,1,\ldots,n$

有 $P(t)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{b}_i B_{i,n}(t)$

(b) Lagrange 插值转换

$$L^n(t)=\sum_{i=0}^{n}Q_i L_i^n(t)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{b}_i B_{i,n}(t)\text{，}$$

其中 $L_i^n(t)=\frac{(t-t_0)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_n)}{(t_i-t_0)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)}$

记 $\omega_n(t)=\frac{(t-a_1)(t-a_2)\cdots(t-a_n)}{(b-a_1)(b-a_2)\cdots(b-a_n)}$，则 $\omega_n(t)=\omega_{n-1}(t)\frac{t-a_n}{b-a_n}$

设 $\omega_n(t)=\sum_{i=0}^{n}X_i^n B_{i,n}(t)$

$$\omega_{n-1}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}X_i^{n-1}B_{i,n-1}(t)$$

$$\omega_n(t)=\omega_{n-1}(t)\frac{t-a_n}{b-a_n}=\omega_{n-1}(t)\frac{(1-a_n)t-a_n(1-t)}{b-a_n}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1-a_n}{b-a_n}X_i^{n-1}B_{i,n-1}(t)t-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_n}{b-a_n}X_i^{n-1}B_{i,n-1}(t)(1-t)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1-a_n}{b-a_n}\frac{i}{n}X_{i-1}^{n-1}-\frac{a_n}{b-a_n}\frac{n-i}{n}X_i^{n-1}\right)B_{i,n}(t)$$

得到递推式

$$X_i^n=\frac{1-a_n}{b-a_n}\frac{i}{n}X_{i-1}^{n-1}-\frac{a_n}{b-a_n}\frac{n-i}{n}X_i^{n-1}$$

(c) 函数多项式曲线的矢量表示

$y(x)=\sum_{i=0}^{n}y_iB_{i,n}(x)$， $x=\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}B_{i,n}(x)$ //线性函数再生性

矢量表示

$$P(t)=(t,y(t))$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n},y_i\right)B_{i,n}(t)$$

笛卡尔符号定理： 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_iB_{i,n}(x)$(实系数)，若 $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ 的变号数为 p，则 $f(x)=0$ 的正实根数等于 p(或比 p 少一个偶数)。

思考题：

1. 利用 Bézier 曲线分割算法与凸包性质设计两条 Bézier 曲线求交算法。
2. 设计一个算法，求 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 在[0,1]中的全部根。

§10. 开花(blossom)

- de Casteljau 算法的推广

$$
\begin{array}{lllll}
P_0 & & & & \\
P_1 & P_0^1(t_1) & & & \\
P_2 & P_1^1(t_1) & P_0^2(t_1,t_2) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
P_n & P_{n-1}^1(t_1) & P_{n-2}^2(t_1,t_2) & \cdots & P_0^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)
\end{array}
$$

$P_0^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是变量$t_1,t_2,\cdots,t_n$的函数，记$P_0^n(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\mathbf{b}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$

当$t_1=t_2=\cdots=t_n=t$时$\mathbf{b}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=P(t)$是 Bézier 曲线上的点。

$P_i=\mathbf{b}\left(0^{\langle n-i\rangle},1^{\langle i\rangle}\right)$，其中$t^{\langle i\rangle}$表示 i 重 t。

当$t_1,t_2,\cdots,t_n\in[0,1]$时$\mathbf{b}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$表示一区域。

- 开花的定义

n 次多项式$P(t)$的开花$\mathbf{b}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是具有下面三个性质的多变量多项式：

1. 对称性

   $\mathbf{b}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\mathbf{b}\left(t_{\sigma(1)},t_{\sigma(2)},\cdots,t_{\sigma(n)}\right)$，

   其中 σ 是{1,2,…,n}的一个任意置换。

2. 多仿射性

   $\mathbf{b}(t_1,\cdots,(1-\alpha)u_k+\alpha v_k,\cdots t_n)=(1-\alpha)\mathbf{b}(t_1,\cdots,u_k,\cdots t_n)+\alpha\mathbf{b}(t_1,\cdots,v_k,\cdots t_n)$

3. 对角线性质

   $\mathbf{b}(t,t,\cdots,t)=P(t)$

例1. 考虑 $1,t,t^2,t^3$ 作为三次多项式，这些单项式的开花如下：

$P(t)=1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b}(t_1,t_2,t_3)=1$

$P(t)=t \quad \rightarrow \quad \mathbf{b}(t_1,t_2,t_3)=\dfrac{t_1+t_2+t_3}{3}$

$P(t)=t^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b}(t_1,t_2,t_3)=\dfrac{t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1}{3}$

$P(t)=t^3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b}(t_1,t_2,t_3)=t_1t_2t_3$

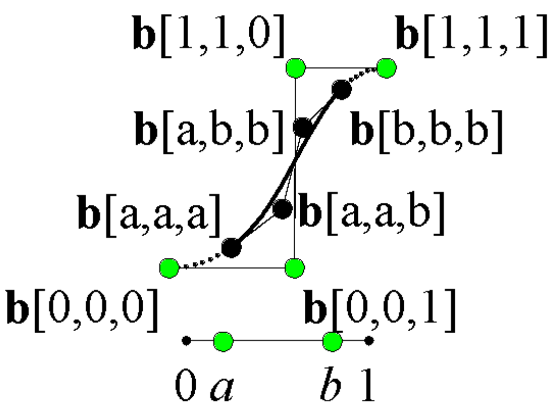
例2. Bézier 曲线的开花

$$P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$$

$$\mathbf{b}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=[(1-t_1)I+t_1E][(1-t_2)I+t_2E]\cdots[(1-t_n)I+t_nE]P_0$$

开花将一元函数的高次多项式转化成多元函数的线性表示。

- 开花与分割算法



n=3 时控制顶点的计算。

计算曲线 $P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$ 当 $t\in[a,b]$ 时 Bézier 表示的控制顶点。

当 $t\in[a,b]$，记 $t=a+(b-a)u$， 则 $u\in[0,1]$

有 $(1-t)I+tE=[1-a-(b-a)u]I+[a+(b-a)u]E$

$$=(1-a)I+(1-b)uI-(1-a)uI+a(1-u)E+buE$$

$$=[(1-a)I+aE](1-u)+[(1-b)I+bE]u$$

代入 $P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$， 可得

$$P(t)=\{[(1-a)I+aE](1-u)+[(1-b)I+bE]u\}^n P_0$$

$$=\sum_{i=0}^{n} C_n^i[(1-b)I+bE]^i u^i[(1-a)I+aE]^{n-i}(1-u)^{n-i}P_0$$

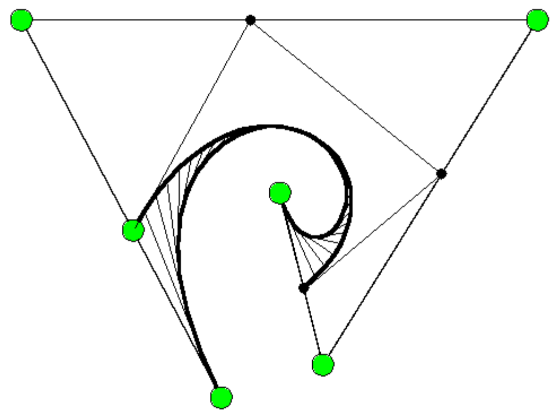
$$=\sum_{i=0}^{n}[(1-b)I+bE]^i[(1-a)I+aE]^{n-i}P_0B_{i,n}(u)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} Q_i B_{i,n}(u)$$

控制顶点

$$Q_i = [(1-b)I + bE]^i [(1-a)I + aE]^{n-i} P_0 = \mathbf{b}\left(a^{\langle n-i \rangle}, b^{\langle i \rangle}\right)$$

- 极形式(polar)



n 次 Bézier 曲线 $P(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0 = \mathbf{b}\left(t^{\langle n \rangle}\right)$

对于参数 t_1 进行一次 de Casteljau 割角得到割点 $P_0^1(t_1), \cdots, P_{n-1}^1(t_1)$

以 $P_0^1(t_1), \cdots, P_{n-1}^1(t_1)$ 为控制多边形构造 n-1 次 Bézier 曲线

$$P_1(t) = \mathbf{b}\left(t_1, t^{\langle n-1 \rangle}\right)$$

有

$$P_1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)P_i + t_1 P_{i+1}] B_{i,n-1}(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)P_i + t_1 P_{i+1} - P_i^1(t)] B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1(t) B_{i,n-1}(t)$$

$$= (t_1 - t) \sum_{i=0}^{n-1} [P_{i+1} - P_i] B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1(t) B_{i,n-1}(t)$$

$$= P(t) + \frac{t_1 - t}{n} \frac{d}{dt} P(t)$$

称 $P_1(t)$ 是 $P(t)$ 相应于参数 t_1 的极形式。

验证：

$$P_1(t)\big|_{t=t_1} = P(t_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_1(t)\bigg|_{t=t_1} = \frac{n-1}{n}P'(t_1) // P'(t_1)$$

故 $P(t)$ 是曲线簇 $\left\{P_1(t)=\mathbf{b}\left(t_1, t^{\langle n-1\rangle}\right), t_1 \in [0,1]\right\}$ 的包络。

类似地， $P(t)$ 也是曲线簇 $\left\{P_r(t)=\mathbf{b}\left(t_1^{\langle r\rangle}, t^{\langle n-r\rangle}\right), t_1 \in [0,1]\right\}$ 的包络。

§11. Bézier 曲线造型简介

- Bézier 曲线拟合

问题：给定点列 $Q_0, Q_1, \ldots, Q_N$，以及参数 $t_0, t_1, \ldots, t_N$，构造一条 $n(\le N)$ 次 Bézier 曲线拟合已知点列。

方法 1.设 Bézier 曲线方程为 $P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$，列出下面方程

$$P(t_j)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t_j)=Q_j, \quad j=0,1,\cdots,N$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} B_{0,n}(t_0) & \cdots & B_{n,n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{0,n}(t_N) & \cdots & B_{n,n}(t_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

将上述方程简记成 $MP=Q$。

由于基函数 $B_{0,n}(t)$， $B_{0,n}(t)$，…， $B_{n,n}(t)$ 线性无关，矩阵 M 的列向量线性无关，因而 M 列满秩。

若 $n=N$，则 M 可逆且 $P=M^{-1}Q$。

若 $n<N$，控制顶点可由 $M^T MP = M^T Q$ 得到，即 $P=\left(M^T M\right)^{-1} M^T Q$。

方法 2.假设$n < N$，构造如下目标函数

$$f(P_0, P_1, \cdots, P_n) = \sum_{j=0}^{N} \left\| Q_j - P(t_j) \right\|^2$$

为使$f(P_0, P_1, \cdots, P_n)$达到最小，则控制顶点须满足下面方程

$$\frac{\partial f(P_0, P_1, \cdots, P_n)}{\partial P_i} = 0; \quad i = 0,1,\cdots,n$$

展开后，可得

$$\sum_{j=0}^{N} \left[Q_i - \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t_j) \right] B_{i,n}(t_j) = 0\text{，}\quad i = 0,1,\cdots,N$$

整理后可得$MP = Q$。

光滑拟合

动机：由最小二乘拟合出的曲线较好地逼近数据点，但光顺性不一定好。允许适当增加误差，同时加强光顺性。

光顺性约束：$\Delta^2 P_i = P_i - 2P_{i+1} + P_{i+2} = 0$，$i = 0,1,\cdots,n-2$

写成矩阵形式：$SP = 0$。

与曲线拟合条件联立，有$\begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix}$。

该系数矩阵$\begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix}$仍然列满秩，采用与最小二乘同样的方法可解方程组。

- 几何 Hermite 插值

(a) 点-法式插值

问题：已知空间中两点Q_0, Q_1以及两单位法向量$\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1$，构造一条三次 Bézier 曲线(端点)插值$Q_0, Q_1$，且 Bézier 曲线的端

点切向分别垂直$\mathbf{n}_0,\mathbf{n}_1$。

根据插值条件，可直接得到：

$P_0 = Q_0$， $P_3 = Q_1$

由切/法向插值，分别在Q_0,Q_1处的切平面取

$P_1 = Q_0 + l_0 T_0$，

$P_2 = Q_1 - l_1 T_1$，

其中$l_0 > 0$， $l_1 > 0$，缺省取法$l_0 = l_1 = 0.4\|Q_1 - Q_0\|$。

得到插值 Bézier 曲线为$P(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_{i,3}(t)$。

(b) 三次几何 Hermite 插值

问题：已知平面上两点Q_0,Q_1，两单位切向量T_0,T_1以及两曲率k_0,k_1，构造一条插值三次 Bézier 曲线。

设插值 Bézier 曲线为$P(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_{i,3}(t)$，

根据插值条件，有

$P_0 = Q_0$， $P_3 = Q_1$

$P_1 = Q_0 + l_0 T_0$， $P_2 = Q_1 - l_1 T_1$

$k_0 = 2T_0 \times (P_2 - P_1)/3l_0^2$， $k_1 = 2T_1 \times (P_1 - P_2)/3l_1^2$ (*)

其中$A \times B = a_1 b_2 - a_2 b_1$

令$D = Q_1 - Q_0$，由曲率插值方程(*)可得

$$(T_0 \times T_1) l_0 = (D \times T_1) - \frac{3}{2} k_1 l_1^2$$

$$(T_0 \times T_1) l_1 = (T_1 \times D) - \frac{3}{2} k_0 l_0^2$$

如果端点曲率符号与端点连线以及端切向一致，则方程组存在正解。

上述方程的解可以通过数值方法求解。

定理： 设 $Q(t)$ 是一条曲率不为 0 的光滑曲线，如果 $h = \|Q_1 - Q_0\|$ 足够小，则上述方程有解，且插值曲线 $P(t)$ 与原曲线的距离 $dist(P(t), Q(t)) = O(h^6)$。

证明参见文献 CAGD 4(1987), 269-278.

思考题：

1. 输入任意控制多边形，利用 deCasteljau 算法绘制 Bézier 曲线。
2. 实现 Bézier 曲线光顺拟合数据点算法。
3. 用几何 Hermite 插值方法逼近一圆弧段并计算误差。
4. 阅读文献 Gerald Farin, Class A Bézier curves, Computer Aided Geometric Design 23 (2006) 573–581.