

三维 YinSet 中的表示一致与容忍度设置

邱云昊, 谭焱

December 15, 2022

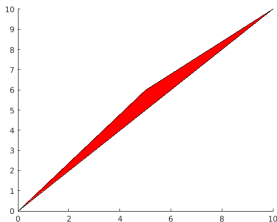
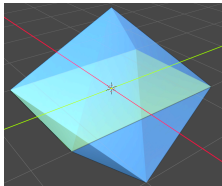
1 背景

2 YinSet 表示数据处理

- 改造非法输入数据
- 优化三角网格
- 气泡充填法

3 存在的问题

- 已有一个表示和计算 YinSet 的布尔运算程序.
- 现有程序要求输入是合法的 YinSet 表示:
 - ① 没有且不能检测输入数据是否唯一表示 YinSet.
 - ② 不能将非法 YinSet 表示数据修正为合法 YinSet 唯一表示.
- 表示 YinSet 边界的三角形畸形, 影响边界表示的质量.

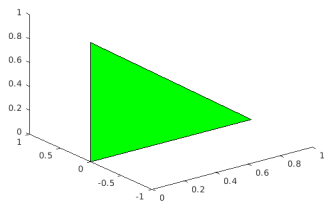
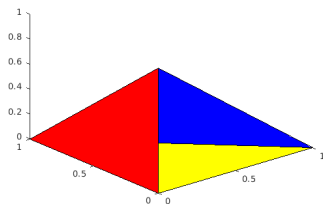


实现步骤

- 检验且改造非法输入数据.
 - ① 非闭合曲面的处理.
 - ② 曲面的定向处理.
 - ③ 恰当交和重合处理.
 - ④ 包含关系处理.
- 提高网格质量.
 - ① 设定边长上下界和三角形面积下界.
 - ② 过短和过长边处理.
 - ③ 面积过小三角形处理.

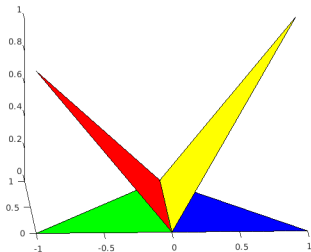
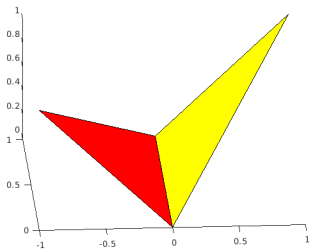
非闭合曲面处理

- 三角网格表示的曲面闭合当且仅当**每条边相邻偶数个三角形**.
- 所有相邻奇数个三角形的边无法恰当粘合成闭合曲面.
- 沿相邻奇数个三角形的边剪开必得到一些曲面片和闭合曲面.
- 如下图, 无法简易判断应该删除或者填补曲面片, 用户结合图形界面恰当的填补或删除曲面片.



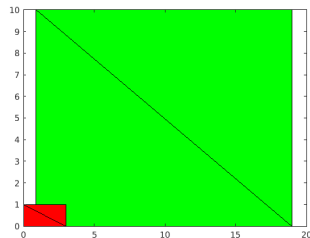
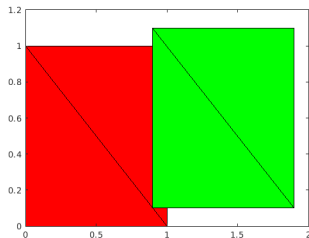
曲面的定向处理

- 闭合曲面将空间划分的内部和外部.
- 三角形的法向量指向外部空间.
- 相邻两个三角形的边在两个三角形中方向相反.
- 相邻超过两个三角形的边, 局部将空间划分为内部和外部.
- 改造数据需要用户给定闭合曲面有界或无界.



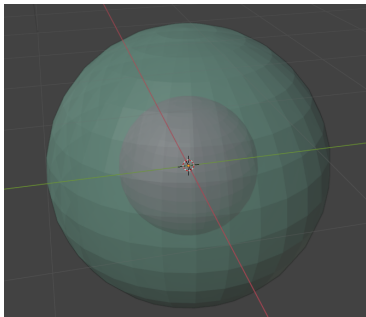
恰当交和重合处理

- 黏合紧曲面之间没有恰当交或重合.
- 通过 YinSet 布尔运算改造曲面.
- 需要用户决定求交, 求并或移除曲面.
 - 1 如左图所示, 当都内部有界或无界时, 选取求并或者求交恰当.
 - 2 如右图所示, 两个长方形方向相反时, 需要根据方向选取求交或求并保留大部分边界信息.



包含关系处理

- YinSet 边界将空间划分为内部和外部.
- 直接包含的黏合紧曲面之间的空间是连通的.
- 用户给定 YinSet 内部有界或无界后确定所有曲面的方向.



设置三角网格的要求

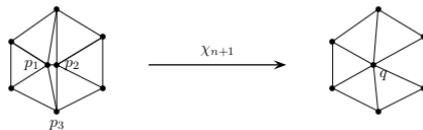
- 为三角网格表示精度要求三角形边长上界为 h_L .
- 因希望三角网格均匀, 设置边长下界为 $r_{tiny}h_L$.
- 从三角网格拟合曲面的需要, 杜绝畸形包含角度过小的三角形, 从

$$\sin \angle ABC = S_{ABC} / \|AB\| \cdot \|BC\|.$$

设置三角形面积下界 S_{min} .

满足三角网格的边长需求

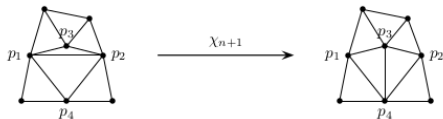
- 过长边取中点分割.
- 过长边用中点代替边的两个端点.



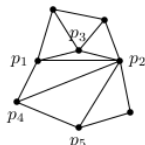
- 必可在有限步后使得不存在过长或过短的边.

处理面积过小的三角形

- 交换对角线.

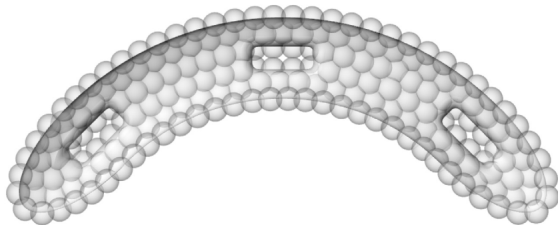


- 局部重新三角化.



启发来源

- 数量充足的气泡会均匀填充整个空间.

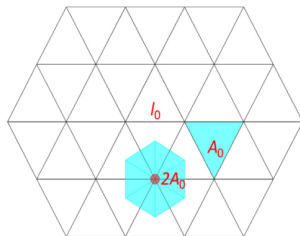


- 将空间限制在曲面上, 以每个三角形顶点为气泡中心, 给定恰当的质量, 斥力和阻力.
- 充足的顶点情况下, 有限步后的平衡态时三角形顶点均匀分布在 YinSet 边界上.

恰当的顶点数量

- 设 $l_0 \in [r_{\text{tiny}}h_L, h_L]$ 为期望的边长.
- 边长为 l_0 的等边三角形面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}l_0^2$.
- 依据原面积 A 和期望面积计算填充顶点数量

$$n = \frac{2\sqrt{3}A}{3l_0^2}.$$



顶点之间的斥力

- 定义顶点 p_i, p_j 之间的斥力

$$\vec{T}_{ij} = \begin{cases} k_b \cdot (R_i + R_j - |\vec{d}_{ij}|) \cdot \frac{\vec{d}_{ij}}{|\vec{d}_{ij}|}, & |\vec{d}_{ij}| < R_i + R_j, \\ 0, & |\vec{d}_{ij}| \geq R_i + R_j, \end{cases} \quad (2.1)$$

- 顶点 p_i 受到的斥力和

$$\vec{T}_i = \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq i}^{n+m} \vec{T}_{ji}, & \text{第 } i \text{ 个质点是随机生成的点,} \\ \vec{0}, & \text{第 } i \text{ 个质点是空间多边形的顶点,} \end{cases} \quad (2.2)$$

- 弹性系数和作用半径 k_b, R_i 是影响系统最终效果的重要参数.

运动阻力

- 为降低系统能量达到最终的平衡态.
- 顶点 p_i 受到的运动阻力

$$\vec{f}_i = -k_f \cdot \vec{v}_i, \quad (2.3)$$

- 顶点 p_i 所受的最终合力

$$\vec{F}_i = \vec{T}_i + \vec{f}_i, \quad (2.4)$$

迭代方程

- 随机给定 n 个顶点的初始位置和初始速度 $\vec{0}$.
- 顶点 p_i 的位置, 速度迭代方程

$$\begin{aligned}\vec{v}_i(t+k) &= \vec{v}_i(t) + \frac{\vec{F}_i(t)}{m}k, \\ \vec{s}_i(t+k) &= \vec{s}_i(t) + \frac{\vec{v}_i(t) + \vec{v}_i(t+k)}{2}k,\end{aligned}\tag{2.5}$$

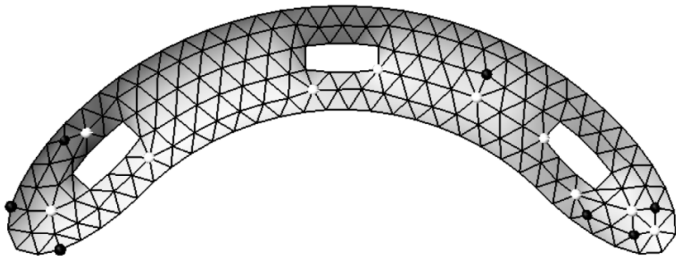
- 当所有顶点最大位移充分小时迭代终止.

重新三角化流程

- 重新三角化区域通过面积过小三角形沿边拓展找出.
- 拓展时保持 YinSet 边界的非流形点始终在区域边界上.
- 区域中随机生成顶点后迭代.
- 得到顶点集后使用 Delaunay 三角化.
- 定义沿边传导的弹性斥力和拉力迭代调整顶点位置.
- 若结果违反边长面积要求, 返回第一步继续拓展重新三角化区域.

存在的问题

- 无法建立气泡充填法的结果和参数之间的数学关系.
- k_b, k_f 等参数的选择.
- 不能证明必定有限步后三角网格满足边长和面积条件.



请老师同学批评指正！