

## 第十三章 细分曲线与细分曲面

### §1. 细分方法概述

#### (a) 背景

- 连续曲线曲面表示，如 Bézier 曲线曲面，B 样条曲线曲面
- 曲线曲面绘制、显示、加工：离散—连续—离散
- 曲线快速生成：离散—离散，Chaikin 1974
- 任意拓扑 B 样条曲面，Catmull-Clark 1978, Doo-Sabin 1978
- 任意次数 B 样条曲面离散生成，Lane-Riesenfeld 1980
- 插值型细分曲线曲面，Dyn et al 1987, 1990
- 基于三角控制网格的曲面细分，Loop 1987, Kobbelt 2000
- 细分曲面在计算机图形与动画中的应用, De Rose et al 1990~

#### (b) 细分定义

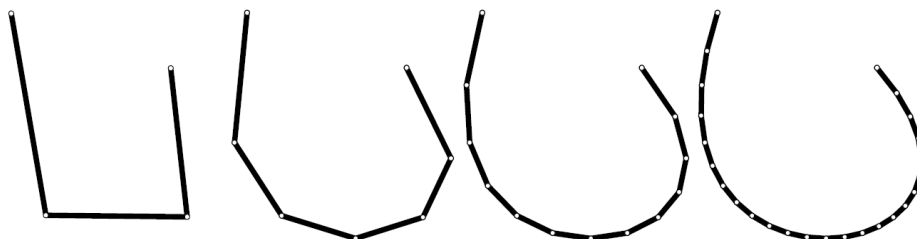
- **定义：**细分方法按照一定规则对网格不断加细，得到一个网格序列，这个网格序列的极限就定义了一个光滑的曲线或曲面。
- 举例

##### Chaikin 细分曲线



$$P_{2i-1}^1 = \frac{3}{4}P_i^0 + \frac{1}{4}P_{i+1}^0, \quad P_{2i}^1 = \frac{1}{4}P_i^0 + \frac{3}{4}P_{i+1}^0$$

四点法插值曲线

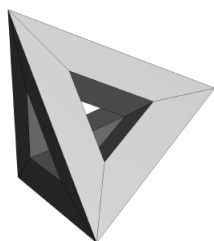


过连续四个点  $\{P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}\}$  构造三次 Lagrange 插值曲线

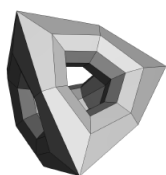
$$P(t) = \sum_{j=0}^3 P_{i-1+j} L_{j,3}(t)$$

计算可得插值点  $P_{i+1/2} = P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}P_{i-1} + \frac{9}{16}P_i + \frac{9}{16}P_{i+1} - \frac{1}{16}P_{i+2}$

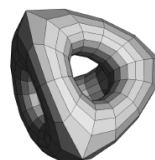
Catmull-Clark 曲面



控制网格



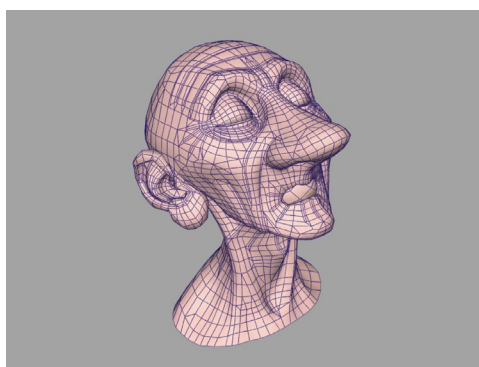
细分一次



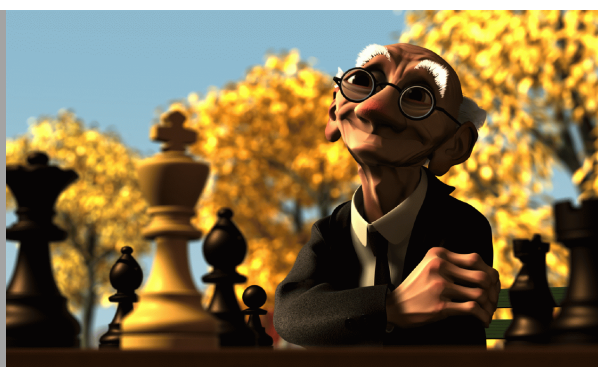
细分二次



极限曲面



控制网格



Geri's game

## ● 细分方法的分类

根据原始控制顶点是否保留不变分类：

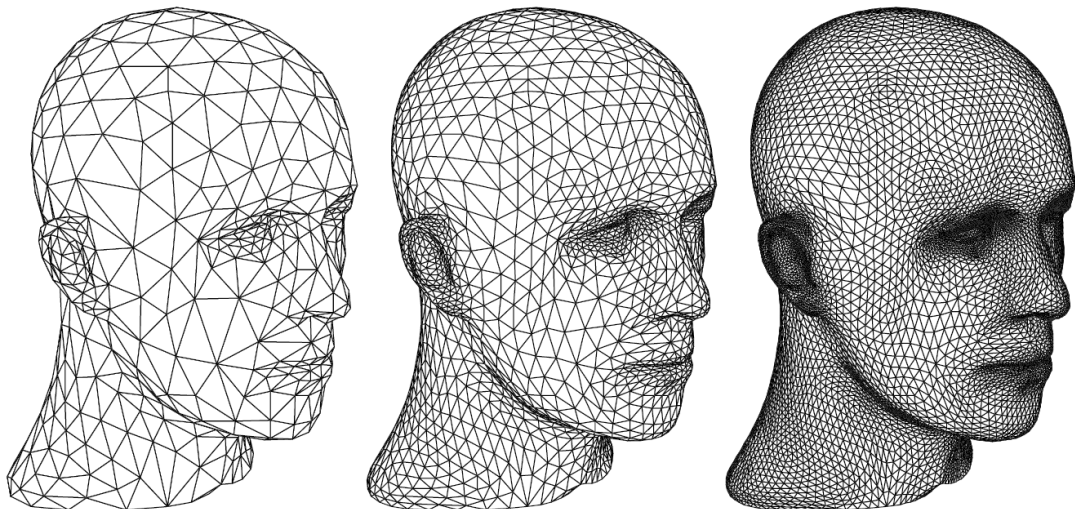
- 逼近细分 (approximate subdivision)
- 插值细分 (interpolatory subdivision)

根据细分规则是否随着细分次数改变分类：

- 稳定细分 (stationary subdivision)
- 非稳定细分 (non-stationary subdivision)

### (c) 网格表示

- 细分曲线的控制网格是一多边形
- 细分曲面的控制网格由点、边、面构成： $M=(V,E,F)$



控制网格及加细网格

### (d) 细分曲线曲面特点

- 计算高效性：少量浮点运算即可，与样条曲面类似，但隐式曲面计算较复杂
- 任意拓扑结构：控制网格和细分曲面可以具有任意拓扑结构，参数曲面拼接较复杂，而隐式曲面结构较难控制
- 曲面特征生成：通过控制细分规则和局部参数可生成折痕、尖刺等曲面特征

- 曲面层次表示：通过不同的细分层次进行交互或局部加细

## §2. 均匀节点 B 样条与曲线细分

### (a) 均匀 B 样条的节点加密

设节点向量为  $\mathbf{Z} = \{t_j = j\}$ ,  $k$  阶 B 样条基函数可递归定义为

$$N_{i,k}(t) = \frac{t-i}{k-1} N_{i,k-1}(t) + \frac{i+k-t}{k-1} N_{i+1,k-1}(t)$$

$$\text{特别地, } N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i < t < t_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

由平移性质知

$$N_{i,k}(t) = N_{0,k}(t-i) = N^k(t-i)$$

$$\text{定义节点向量 } \mathbf{Z}/2 = \left\{ \dots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \right\}$$

$$\text{曲线 } P(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} P_i^0 N^k(t-i) = \sum_{i \in \mathbf{Z}/2} P_i^1 N^k(2(t-i))$$

由于  $\{N^k(2t-i) | i \in \mathbf{Z}\}$  为  $k$  阶 B 样条基函数, 故  $N^k(t)$  可由这组基表示

$$N^k(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} c_i^k N^k(2t-i)$$

由 deBoor-Cox 公式并归纳可证

$$c_i^k = 2^{-(k-1)} \binom{k}{i}$$

平移可得

$$N^k(t-i) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_{j-2i}^k N^k(2t-j)$$

代入曲线方程中有

$$P(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} P_i^0 N^k(t-i) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} P_i^0 \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_{j-2i}^k N^k(2t-j)$$

$$\text{整理可得 } P_j^1 = \sum_{i \in \mathbf{Z}} c_{j-2i}^k P_i^0$$

### (b) 卷积方法

卷积定义：连续函数  $f(t)$  和  $g(t)$  的卷积为

$$(f \otimes g)(t) = \int f(s)g(t-s)ds$$

卷积运算满足如下性质：

1. 线性性：  $f(t) \otimes (g(t) + h(t)) = f(t) \otimes g(t) + f(t) \otimes h(t)$

2. 时间平移：  $f(t-i) \otimes g(t-k) = m(t-i-k)$

3. 时间放缩：  $f(2t) \otimes g(2t) = \frac{1}{2}m(2t)$

其中  $m(t) = f(t) \otimes g(t)$

B 样条基函数可由卷积得到：

$$N^k(t) = N^{k-1}(t) \otimes N^1(t) = \bigotimes_{i=0}^{k-1} N^1(t)$$

由 B 样条定义易得：

$$N^1(t) = N^1(2t) + N^1(2t-1)$$

由卷积定义及性质，可得

$$N^k(t) = \bigotimes_{i=0}^{k-1} N^1(t) = \bigotimes_{i=0}^{k-1} (N^1(2t) + N^1(2t-1)) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N^k(2t-i)$$

即 B 样条的双尺度方程为

$$N^k(t) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N^k(2t-i)$$

$$\text{记 } N(t) = [\dots, N^k(t+2), N^k(t+1), N^k(t), N^k(t-1), N^k(t-2), \dots]$$

则双尺度方程可表示成矩阵形式

$$N(t) = N(2t)S$$

其中矩阵  $S$  由双尺度方程系数构成，满足  $S_{2i+j,i} = \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{j}$ ，称为

细分矩阵。

记 B 样条曲线的控制顶点向量为  $P^0 = [\dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots]^T$ ，则 B

样条曲线可表示为

$$P(t) = N(t)P^0$$

将双尺度方程代入上式，有

$$P(t) = N(2t)SP^0 = N(2t)P^1$$

从而，有  $P^1 = SP^0$ ，同理有  $P^{k+1} = SP^k$

- B 样条曲线细分一般格式：

$$P_{2i+1}^{k+1} = \sum_l c_{2(i-l)+1} P_l^k$$

$$P_{2i}^{k+1} = \sum_l c_{2(i-l)} P_l^k$$

- 二次 B 样条细分算法

$$P_{2i}^{k+1} = \frac{3}{4}P_i^k + \frac{1}{4}P_{i+1}^k$$

$$P_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{4}P_i^k + \frac{3}{4}P_{i+1}^k \quad (\text{注：重新编号})$$

其双尺度方程的系数为  $\left\{ \frac{1}{2^2} \binom{3}{j}; j=0,1,2,3 \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}$

- 三次 B 样条细分算法

$$P_{2i}^{k+1} = \frac{1}{8}P_{i-1}^k + \frac{3}{4}P_i^k + \frac{1}{8}P_{i+1}^k$$

$$P_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{2}P_i^k + \frac{1}{2}P_{i+1}^k$$

其双尺度方程的系数为  $\left\{ \frac{1}{2^3} \binom{4}{j}; j=0,1,2,3,4 \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right\}$

(c) 细分曲线收敛性及光滑性

- 基本概念

曲线细分收敛是指细分多边形序列收敛；

每一多边形可表示成分段线性参数曲线；

$n$  维空间中曲线序列的收敛等价于其分量函数列的收敛。

- 定义：设函数列  $f_i(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 > 0$ , 当  $n > n_0$  有  $\max_{t \in [a, b]} |f(t) - f_i(t)| < \varepsilon$ , 则称函数列  $f_i(t)$  一致收敛到函数  $f(t)$ 。特别地, 当函数  $f_i(t)$  是连续函数时, 则其极限函数也连续。

引入记号:

$$\|f(t)\| = \sup_t |f(t)|$$

$$\|P\| = \sup_i |P_i|$$

$$\|S\| = \sup_i \sum_k |S_{i,k}|$$

$$\text{易知: } \|SP\| \leq \|S\| \cdot \|P\|$$

记  $P^j(t) = N(2^j t) P^j$ , 为证明极限曲线  $P^\infty(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} P^j(t)$  连续, 需证明其极限存在且函数列一致收敛。

不妨可设细分矩阵  $S$  的行元素和为 1

$$\text{记 } P_{i+1}^j - P_i^j = (\Delta P^j)_i$$

- 引理：如果  $\|\Delta P^j\| < c\gamma^j$ , 其中  $c$  为常数,  $0 < \gamma < 1$ ,  $j > j_0 \geq 0$ , 则  $P^j(t)$  一致收敛到连续极限曲线  $P^\infty(t)$ 。

证明：记  $S_1$  为一次 B 样条细分矩阵, 则有  $S - S_1$  的行元素和为 0, 从而存在矩阵  $D$  使得  $S - S_1 = D\Delta$ , 其中  $\Delta$  表示差分。

$$\begin{aligned} \|P^{j+1}(t) - P^j(t)\| &= \|N(2^{j+1}t)P^{j+1} - N(2^j t)P^j\| \\ &= \|N(2^{j+1}t)SP^j - N(2^{j+1}t)S_1P^j\| \\ &= \|N(2^{j+1}t)(S - S_1)P^j\| \\ &\leq \|N(2^{j+1}t)\| \cdot \|\Delta P^j\| \\ &\leq \|D\| \cdot \|\Delta P^j\| \leq \|D\| c\gamma^j \end{aligned}$$

$$\text{又因为 } P^j(t) = P^0(t) + \sum_{k=0}^{j-1} (P^{k+1} - P^k)(t)$$

所以，当  $j \rightarrow \infty$  时，有  $\|P^\infty(t) - P^j(t)\| < \frac{\|D\|_c}{1-\gamma} \gamma^j$

- 思考题：证明二次 B 样条和三次 B 样条细分曲线收敛。

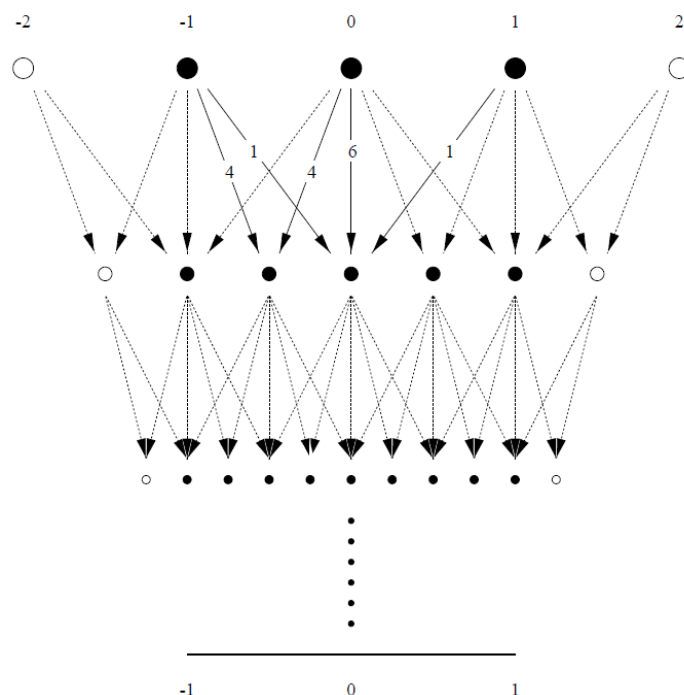
### §3. 曲线细分光滑性分析

#### (a) 问题与动机

- 随着细分层次的增加，细分矩阵维数逐渐增大；
- 仅考虑在某控制顶点附近细分曲线的收敛性与光滑性；
- 局部细分矩阵维数不随细分层次增加；
- 利用矩阵性质分析细分曲线局部性质。

#### (b) 不变邻域

样条曲线在每次细分后在某点任意小邻域内不为 0 的基函数的个数称为不变邻域。



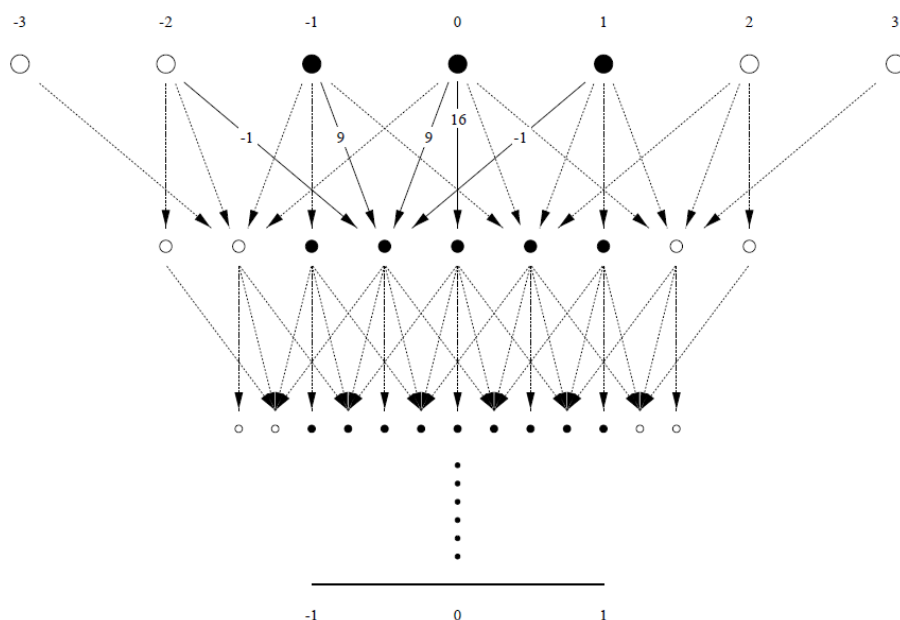
例：三次 B 样条基函数的非 0 区间是 4，其不变邻域尺度是 5



考虑以 0 为中心的参数区间对应的细分曲线，在任意层仅受 5 个控制顶点的影响，且下一层细分控制顶点由上一层控制顶点计算得到。有

$$\begin{pmatrix} P_{-2}^{k+1} \\ P_{-1}^{k+1} \\ P_0^{k+1} \\ P_1^{k+1} \\ P_2^{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{-2}^k \\ P_{-1}^k \\ P_0^k \\ P_1^k \\ P_2^k \end{pmatrix}$$

例：四点法插值曲线的不变邻域尺度为 7



四点法插值格式

$$P_{2i}^{k+1} = P_i^k$$

$$P_{2i+1}^{k+1} = -\frac{1}{16}P_{i-1}^k + \frac{9}{16}P_i^k + \frac{9}{16}P_{i+1}^k - \frac{1}{16}P_{i+2}^k$$

插值曲线表示

设  $j$  次细分后分段线性曲线为  $P^j(t)$ ，则有

$$\begin{aligned} P^j(t) &= B_1(2^j t) S^j P^0 \\ &= B_1(2^j t) S^j \left( \sum_i P_i^0 \mathbf{e}_i^0 \right) \quad \text{其中 } \mathbf{e}_i^0 = (\dots \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i P_i^0 B_1(2^j t) S^j \mathbf{e}_i^0 \\
&= \sum_i P_i^0 \varphi_i^j(t)
\end{aligned}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_i^j(t) = \varphi_i(t) = \varphi(t-i)$$

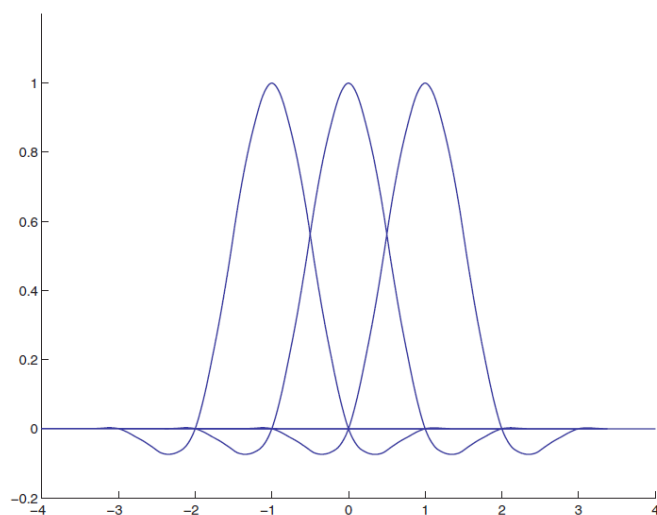
从而得到极限曲线表示为

$$P(t) = \sum_i P_i^0 \varphi(t-i)$$

其中基函数  $\varphi(t)$  满足

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(i) = 0 & i \neq 0 \\ \varphi(t) = 0 & t \notin [-3, 3] \end{cases}$$

基函数(但不能用初等函数表示)见下图



由基函数的非 0 区间为 6 知四点插值曲线的不变邻域尺度是 7

局部细分矩阵

$$\begin{pmatrix} P_{-3}^{k+1} \\ P_{-2}^{k+1} \\ P_{-1}^{k+1} \\ P_0^{k+1} \\ P_1^{k+1} \\ P_2^{k+1} \\ P_3^{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{-3}^k \\ P_{-2}^k \\ P_{-1}^k \\ P_0^k \\ P_1^k \\ P_2^k \\ P_3^k \end{pmatrix}$$

(c) 特征分析

设  $S$  是  $n \times n$  局部细分矩阵,

并假设有实特征值  $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}$

对应的特征向量为  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$

例: 三次 B 样条细分矩阵的特征值和特征向量分别为

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此时, 有

$$S(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

例: 四点法局部细分矩阵的特征值为

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{16}\right)$$

但其特征向量不是完全集, 细分收敛性和光滑性需要用其它方法分析。

设  $n \times n$  局部细分矩阵  $S$  的特征向量是完全集, 有

$$SX = XD,$$

或  $X^{-1}SX = D$

记  $X^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}_{n-1} \end{pmatrix}$ , 其中  $\bar{\mathbf{x}}_i$  为左特征向量, 即  $\bar{\mathbf{x}}_i S = \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i$

点列向量  $P$  可表示为

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{x}_i, \text{ 其中 } a_i = \bar{\mathbf{x}}_i \cdot P$$

特别地, 若  $P_i$  表示 2D 或 3D 点, 则  $a_i$  也是 2D 或 3D 点

#### (d) 收敛与极限

设局部细分矩阵为  $S$ , 初始控制点列为  $P^0$ , 有

$$SP^0 = S \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{x}_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i S \mathbf{x}_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_i \mathbf{x}_i$$

$$P^j = S^j P^0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_i^j \mathbf{x}_i$$

● 收敛必要条件:  $|\lambda_i| \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$

● 极限点

若  $\lambda_0 = 1, \quad |\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n-1$ , 有

$$P^\infty(0) = \lim_{j \rightarrow \infty} S^j P^0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_i^j \mathbf{x}_i = a_0$$

例: 三次 B 样条曲线细分的极限点

$$P_i^\infty = a_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 \cdot P^j = \frac{1}{6} (P_{i-1}^j + 4P_i^j + P_{i+1}^j)$$

● 极限点处切向

设极限点  $P^\infty(0) = a_0$  为坐标原点,

细分矩阵特征值满足  $1 = \lambda_0 > |\lambda_1| > |\lambda_2|, |\lambda_3|, \dots, |\lambda_{n-1}|$ ，则有

$$P^j = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda_i^j \mathbf{x}_i$$

两边除以  $\lambda_1^j$ ，可得

$$\frac{1}{\lambda_1^j} P^j = a_1 \mathbf{x}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{x}_i$$

当  $j \rightarrow \infty$  时，对应  $\lambda_1$  的控制点向量占主导位置，极限点沿向量  $a_1$  排列，该向量即为中点处切向量。

若  $\lambda_1 = \lambda_2$ ，极限将由  $a_1$  与  $a_2$  组合得到，此时在中心点无切向量。

#### ● 细分方法光滑性的必要条件

1.  $\lambda_1^2 < \lambda_2$ ：  $C^1$  光滑，曲率无界；
2.  $\lambda_1^2 = |\lambda_2| = |\lambda_3|$ ：  $C^1$  光滑，曲率稍微分叉；
3.  $\lambda_1^2 = |\lambda_2| > |\lambda_3|$ ：  $C^2$  光滑，曲率连续；
4.  $\lambda_1^2 > |\lambda_2|$ ：  $C^2$  光滑，曲率趋于 0。

例：三次 B 样条细分矩阵的特征值为

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right), \text{符合必要条件 3, 极限曲线 } C^2 \text{ 光滑。}$$

## §4. 曲面细分格式

### (a) Catmull-Clark 细分曲面

#### ● 双三次均匀 B 样条曲面细分

考虑双三次均匀 B 样条曲面片

$$S(u, v) = U M G M^T V^T$$

$$\text{其中 } M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{pmatrix}$$

考虑子面片  $0 < u, v < \frac{1}{2}$

令  $u_1 = u/2$ ,  $v_1 = v/2$ , 有

$$S(u_1, v_1) = USMG M^T S^T V^T$$

$$\text{其中 } S = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因  $S(u_1, v_1)$  仍是双三次 B 样条曲面, 所以可表示为

$$S(u_1, v_1) = UMG_1 M^T V^T$$

比较系数, 可得

$$MG_1 M^T = SMGM^T S^T$$

从而  $G_1 = H_1 G H_1^T$ , 其中  $H_1 = M^{-1} S M$

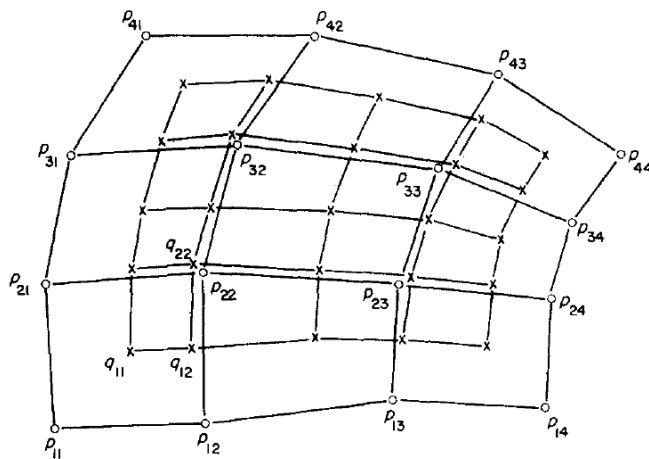
$$\text{计算可得 } H_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

记  $G_1 = (q_{ij})_{4 \times 4}$ , 有

$$q_{11} = (P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22})/4, \quad q_{13} = (P_{12} + P_{13} + P_{22} + P_{23})/4$$

$$q_{12} = \left( \frac{q_{11} + q_{13}}{2} + \frac{P_{12} + P_{22}}{2} \right) / 2$$

$$q_{22} = \frac{Q}{4} + \frac{R}{2} + \frac{P_{22}}{4}$$



其中

Q 是与  $P_{22}$  相邻面中心的平均,

R 是与  $P_{22}$  相邻边中点的平均

- 任意拓扑网格细分格式

**新面点:** 对应面上所有老顶点的平均

$$V_F = (V_0 + V_1 + \dots + V_{s-1}) / s$$

**新边点:** 对应边两端点以及两个相邻面新面点的平均

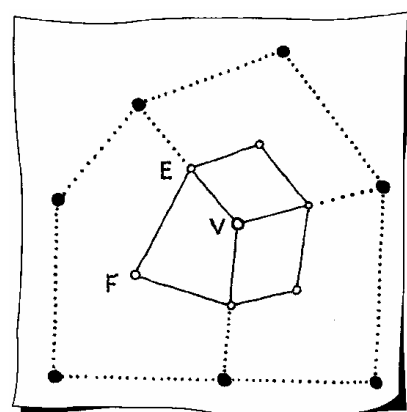
$$V_E = (V_1 + V_2 + F_1 + F_2) / 4$$

**新顶点:** 老顶点为  $V$ , 度数为  $k$ , 则有

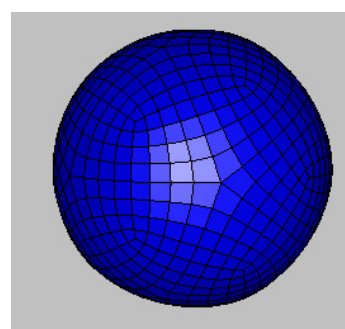
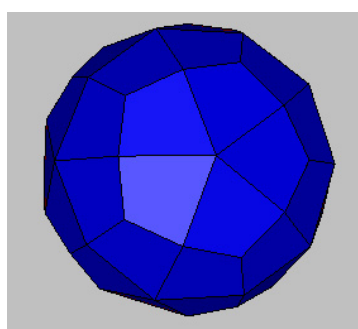
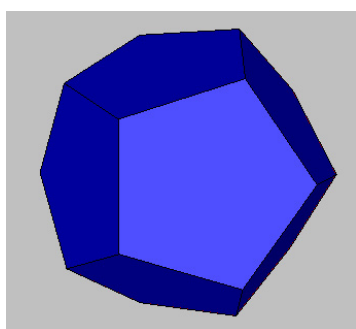
$$V_V = \frac{Q}{k} + \frac{2R}{k} + \frac{V(k-3)}{k}$$

**拓扑连接:**

1. 新面点与该面所有新边点相连
2. 新顶点与相邻边的新边点相连

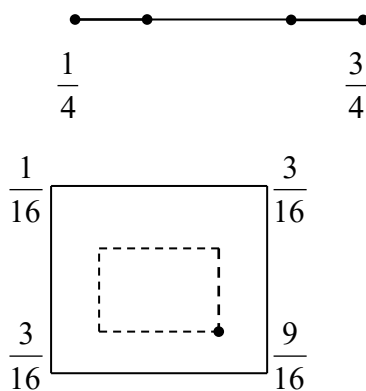


特点: 一次细分后所有面片是 4 边形, 奇异点数不变



## (b) Doo-Sabin 细分曲面

推广双二次均匀 B 样条细分算法到任意拓扑网格



新面点计算方法:

$$\bar{V}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i V_i$$

其中  $\gamma_0 = \frac{n+5}{4n}$ ,  $\gamma_i = \frac{1}{4n} \left( 3 + 2 \cos \frac{2i\pi}{n} \right)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$

开网格采用 Chaikin 算法

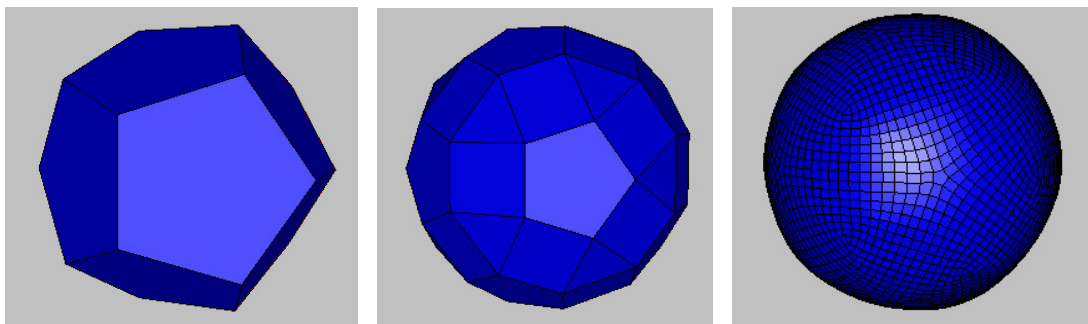
拓扑连接:

**新面面(F-face):** 顺次连接  $\bar{v}_i$  得到新的面

**新边面(E-face):** 对应原网格一条边, 共享此边的邻接面内的新点组成的面

**新点面(V-face):** 顺次连接网格上顶点所分裂的顶点组成的面

特点: 极限曲面  $C^1$  连续, 一次细分后每个顶点的度数是 4



思考题: 编程实现曲线细分或曲面细分

参考 <http://mrl.nyu.edu/~biemann/subdivision/>

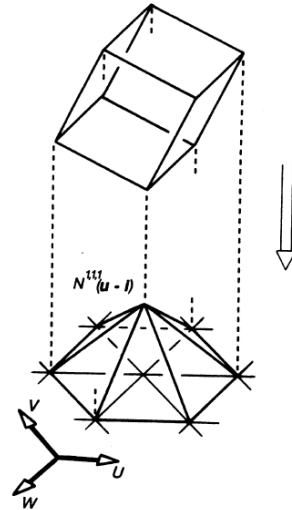


(c) Loop 细分

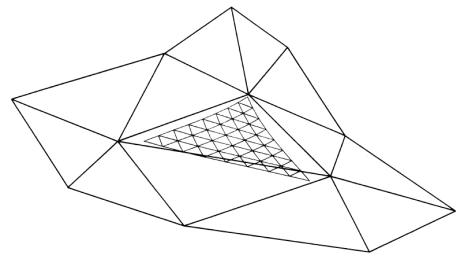
● Box 样条

$$S^{r,s,t}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{i}} P_{\mathbf{i}}^{r,s,t} N^{r,s,t}(\mathbf{u} - \mathbf{i})$$

其中  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2$



例：三角样条曲面及控制网格



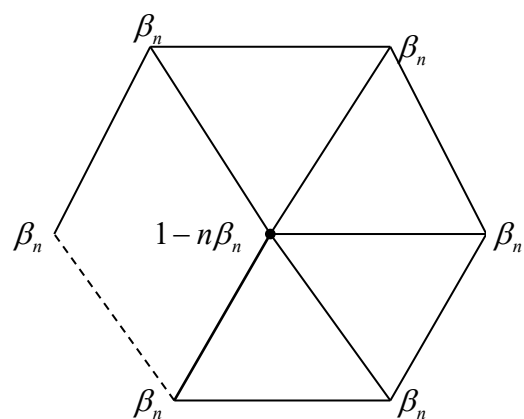
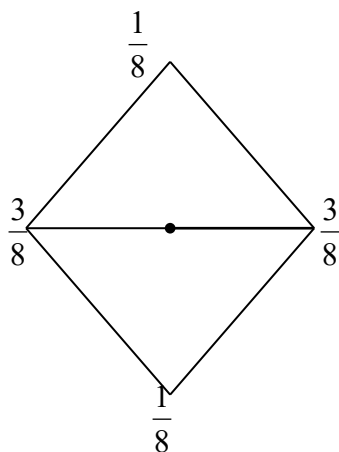
● 细分规则

$$S^{r,s,t}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{j}} P_{\mathbf{j}}^{r,s,t} N^{r,s,t}(2(\mathbf{u} - \mathbf{j}))$$

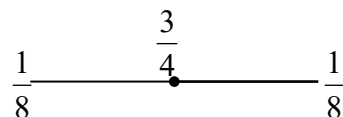
对应每条边、每个顶点产生一个新点

一个三角形被分解成 4 个小三角形

内部点规则



边界点规则



新边点:

$$V_E = \frac{3}{8}(V_0 + V_1) + \frac{1}{8}(V_2 + V_3)$$

新顶点:

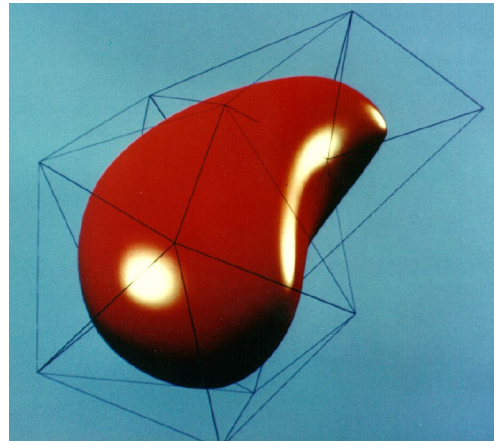
$$V_V = (1 - n\beta_n)V + \beta_n \sum_{i=0}^{n-1} V_i$$

其中

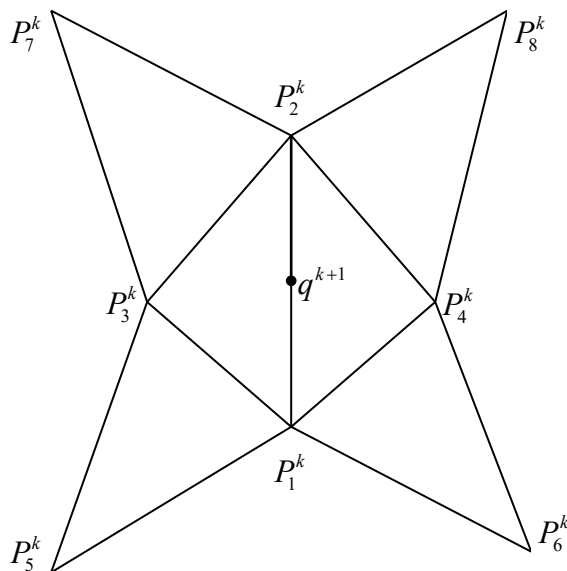
$$\beta_n = \frac{1}{n} \left( \frac{5}{8} - \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right)$$

$$\text{或 } \beta_n = \begin{cases} \frac{3}{16}, & n = 3 \\ \frac{3}{8n}, & n > 3 \end{cases}$$

Loop 细分曲面整体  $C^1$  光滑



(d) Butterfly 细分及其改进



细分规则(Dyn,Levin,Gregory1990)

$$q^{k+1} = u(P_1^k + P_2^k) + v(P_3^k + P_4^k) - w(P_5^k + P_6^k + P_7^k + P_8^k)$$

由细分曲面  $C^0$  连续必要条件:

$$2u + 2v - 4w = 1$$

由细分曲面  $C^1$  连续必要条件:

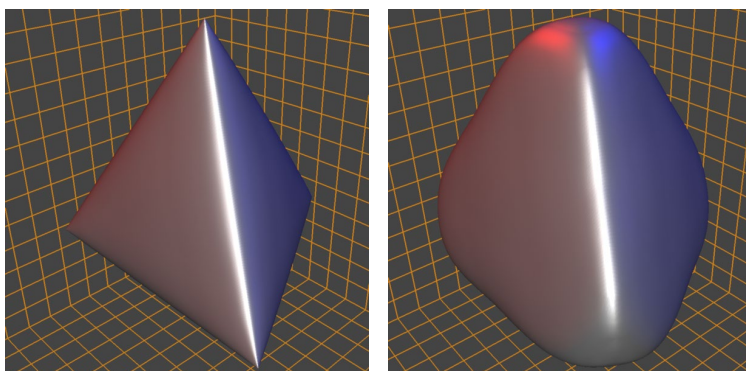
$$u = \frac{1}{2} + h(w), \quad h(0) = 0$$

令  $h = 0$ , 则有  $u = 1/2$ ,  $v = 2w$

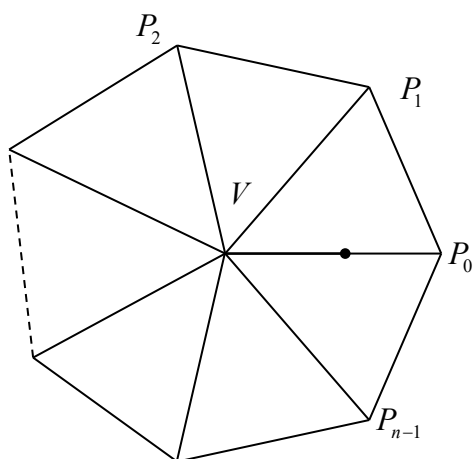
从而有

$$q^{k+1} = \frac{1}{2}(P_1^k + P_2^k) + 2w(P_3^k + P_4^k) - w(P_5^k + P_6^k + P_7^k + P_8^k)$$

参数取值:  $w = \frac{1}{16}$



在规则点(度数=6)处  $C^1$  连续, 在非规则点仅  $C^0$  连续



改进的 butterfly 细分方法

对内部点/边进行分类, 采用不同的 mask 来生成细分曲面

非规则点/边的 mask 采用三次函数插值得到

1. 两端点度数为 6 的内部边

采用经典 butterfly 方法

2. 一个端点度数为 6 一个不为 6 的内部边

$$V_E = \frac{3}{4}V + \sum_{i=0}^{n-1} s_i P_i$$

其中系数选取如下：

$$\text{如果 } n \geq 5, \quad s_i = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{4} + \cos \frac{2i\pi}{n} + \frac{1}{2} \cos \frac{4i\pi}{n} \right)$$

$$\text{如果 } n = 4, \quad s_0 = \frac{3}{8}, \quad s_2 = -\frac{1}{8}, \quad s_1 = s_3 = 0$$

$$\text{如果 } n = 3, \quad s_0 = \frac{5}{12}, \quad s_1 = s_2 = -\frac{1}{12}$$

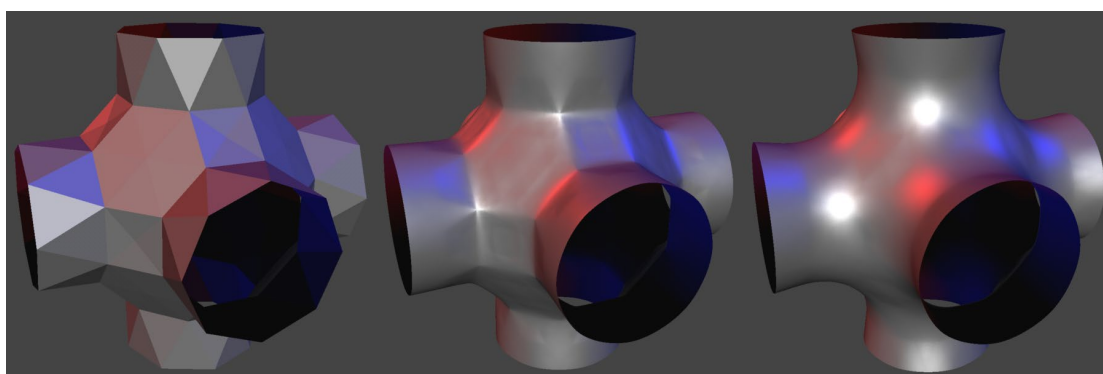
3. 两个端点度数都不是 6 的内部边

分别应用规则 2 进行插值点计算并平均

4. 边界边

采用 4 点法插值新点。

改进的 butterfly 细分曲面全局  $C^1$  连续。

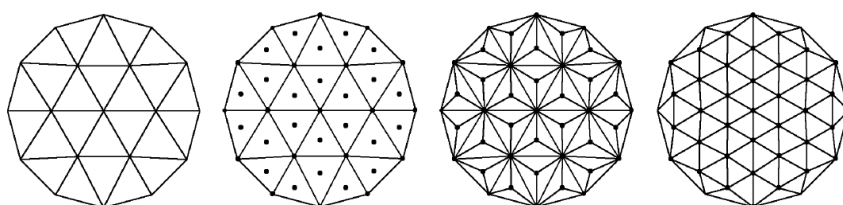


控制网格

改进前

改进后

(e)  $\sqrt{3}$  细分



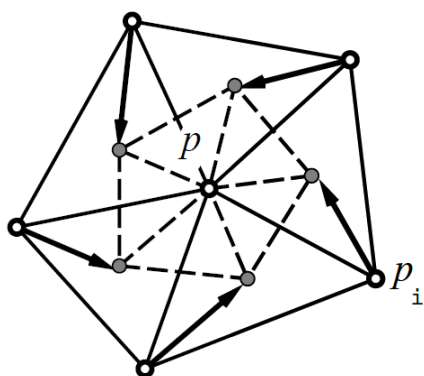
拓扑规则

细分规则由对称性得到：

新面点：  $\mathbf{q} = \frac{1}{3}(P_i + P_j + P_k)$

新顶点：  $P_s = (1 - \alpha_n)P + \frac{\alpha_n}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P_i$

其中  $n$  表示顶点  $P$  的度数，  $\alpha_n = \frac{1}{9} \left( 4 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \right)$



记向量  $[P, P_0, P_1, \dots, P_{n-1}]$ ，则一次细分矩阵为

$$S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} u & v & v & v & \cdots & v \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

其中  $u = 3(1 - \alpha_n)$ ，  $v = 3\alpha_n / n$

连续两次细分矩阵为  $S^2$

反转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

细分矩阵  $\bar{S} = RS^2$ ，

细分矩阵  $\bar{S}$  特征根:  $\frac{1}{9}\left[9, (2-3\alpha_n)^2, 2+2\cos\left(2\pi\frac{1}{n}\right), \dots, 2+2\cos\left(2\pi\frac{n-1}{n}\right)\right]$

细分曲面收敛必要条件:

$$\lambda_1 = 1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_i, \quad i = 4, \dots, n+1$$

由细分矩阵的特征结构对应 Taylor 展开, 特别地,  $\lambda_4$  相当于展开式二次项, 故令  $\lambda_4 = \lambda_2^2$ , 有

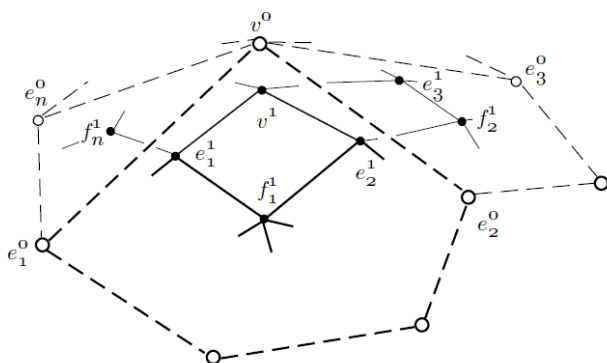
$$\left(\frac{2-3\alpha_n}{3}\right)^2 = \left(\frac{2+2\cos\left(2\pi\frac{1}{n}\right)}{9}\right)^2$$

解方程, 可得  $\alpha_n = \frac{1}{9}\left(4 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right)$ 。

## §5. 曲面细分收敛性与显式计算

### (a) 曲面细分收敛性分析

#### ● Catmull-Clark 细分曲面的收敛性



初始网格记为  $M^0$ , 一次细分网格记为  $M^1$

记向量  $\mathbf{V}_n^i = [\mathbf{v}^i, \mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \dots, \mathbf{e}_n^i, \mathbf{f}_1^i, \mathbf{f}_2^i, \dots, \mathbf{f}_n^i]$ , 并设  $m = 2n+1$

$S_n$  为  $m \times m$  细分矩阵, 则有

$$\mathbf{V}_n^{i+1} = S_n \mathbf{V}_n^i$$

不妨设矩阵  $S_n$  有实特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_m$ ,

对应的左特征向量分别为  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_m$

对应的右特征向量分别为  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$

特别地, 有  $\mathbf{l}_k \cdot \mathbf{r}_j = \delta_{kj}$

向量  $\mathbf{V}_n^1$  可表示为  $\mathbf{V}_n^1 = C_1 \mathbf{r}_1 + C_2 \mathbf{r}_2 + \dots + C_m \mathbf{r}_m$

其中  $C_k = \mathbf{l}_k \cdot \mathbf{V}_n^1$

相应地, 有  $\mathbf{V}_n^{i+1} = S_n^i \mathbf{V}_n^1 = \lambda_1^i C_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2^i C_2 \mathbf{r}_2 + \dots + \lambda_m^i C_m \mathbf{r}_m$

**命题 1:** 若细分矩阵  $S_n$  满足: (1) 有  $m$  个实特征值; (2)  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_k < 1$ ; (3) 细分曲面具有仿射不变性, 则细分曲面收敛, 且有

$$\mathbf{V}_n^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{V}_n^{i+1} = C_1 \mathbf{r}_1 = (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{V}_n^1) \mathbf{r}_1.$$

考虑细分矩阵每行元素和为 1 (细分曲面具有仿射不变性), 有

$$S_n (1, 1, \dots, 1)^T = (1, 1, \dots, 1)^T$$

所以, 有  $\mathbf{r}_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$

由  $\mathbf{V}_n^\infty = C_1 \mathbf{r}_1$  知, 点  $\mathbf{v}^i, \mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \dots, \mathbf{e}_n^i, \mathbf{f}_1^i, \mathbf{f}_2^i, \dots, \mathbf{f}_n^i$  均收敛于  $\mathbf{v}^\infty = C_1$ 。

**命题 2:** 若细分矩阵  $S_n$  满足命题 1 条件以及  $1 = \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4$ ,

则细分曲面在极限点  $\mathbf{v}^\infty$  的法向可计算为

$$N^\infty = C_2 \times C_3$$

其中  $C_2 = \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{V}_n^1$ ,  $C_3 = \mathbf{l}_3 \cdot \mathbf{V}_n^1$ 。

证明: 记  $\mathbf{r}_k = (r_{1k}, r_{2k}, \dots, r_{mk})^T$ , 并设  $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$ , 则有

$$\mathbf{u}_j^i = \frac{P_j^i - \mathbf{v}^\infty}{\|P_j^i - \mathbf{v}^\infty\|} = \frac{\lambda^i (C_2 r_{j2} + C_3 r_{j3}) + \lambda_4^i C_4 r_{j4} + \dots}{\|\lambda^i (C_2 r_{j2} + C_3 r_{j3}) + \lambda_4^i C_4 r_{j4} + \dots\|}$$

$$= \frac{C_2 r_{j2} + C_3 r_{j3} + \frac{\lambda_4^i}{\lambda^i} C_4 r_{j4} + \dots}{\left\| C_2 r_{j2} + C_3 r_{j3} + \frac{\lambda_4^i}{\lambda^i} C_4 r_{j4} + \dots \right\|}, \quad j = 2, 3, \dots, m$$

$$\mathbf{u}_j^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_j^i = \frac{C_2 r_{j2} + C_3 r_{j3}}{\|C_2 r_{j2} + C_3 r_{j3}\|}$$

此式说明  $\mathbf{u}_j^\infty$  位于法向为  $N^\infty = C_2 \times C_3$  的切平面上。命题得证。

对于 Catmull-Clark 细分曲面，有

$$\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{4 + A_n}{16}, \quad \text{其中}$$

$$A_n = 1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{2 \left( 9 + \cos \frac{2\pi}{n} \right)}$$

$$C_2 = \sum_j A_n \cos \frac{2\pi j}{n} \mathbf{e}_j^1 + \left( \cos \frac{2\pi j}{n} + \cos \frac{2\pi(j+1)}{n} \right) \mathbf{f}_j^1$$

$$C_3 = \sum_j A_n \cos \frac{2\pi j}{n} \mathbf{e}_{j+1}^1 + \left( \cos \frac{2\pi j}{n} + \cos \frac{2\pi(j+1)}{n} \right) \mathbf{f}_{j+1}^1$$

(b) 细分曲面显式计算

### ● Catmull-Clark 细分曲面极限点公式

$$\mathbf{v}^\infty = \frac{n^2 \mathbf{v}^1 + 4 \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j^1 + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j^1}{n(n+5)}$$

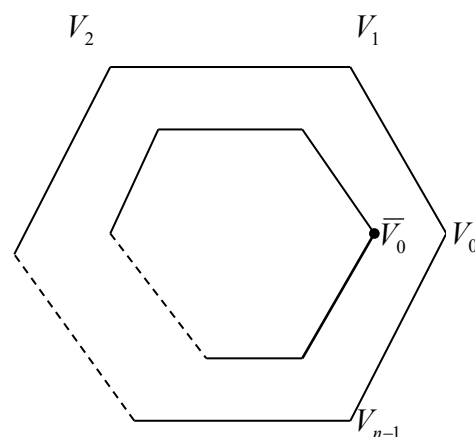
### ● Doo-Sabin 细分曲面极限点

新面点计算公式：

$$\bar{V}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i V_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i = 1$$

易知

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{V}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} V_i$$



故，Doo-Sabin 细分曲面插值每个面片中心点。



- Loop 细分曲面极限点

顶点细分公式

$$V_V = (1 - n\beta_n)V + \beta_n \sum_{i=0}^{n-1} V_i, \text{ 其中 } \beta_n = \frac{1}{n} \left( \frac{5}{8} - \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right)$$
$$= \bar{\beta}_n V + (1 - \bar{\beta}_n) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} V_i, \text{ 其中 } \bar{\beta}_n = \frac{3}{8} + \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2$$

极限点公式

$$V^\infty = \gamma_n V + (1 - \gamma_n) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} V_i$$

$$\text{其中 } \gamma_n = \frac{3}{11 - 8 \times \left[ \frac{3}{8} + \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right]}$$

(c) 细分曲面的多项式逼近

- 细分曲面计算与绘制

常用计算方法:

1. 迭代细分
2. 直接计算特征向量与极限点
3. 预计算细分曲面基函数

GPU 绘制

1. 细分曲面采用分片多项式逼近/插值
2. 法向量独立计算+连续向量场

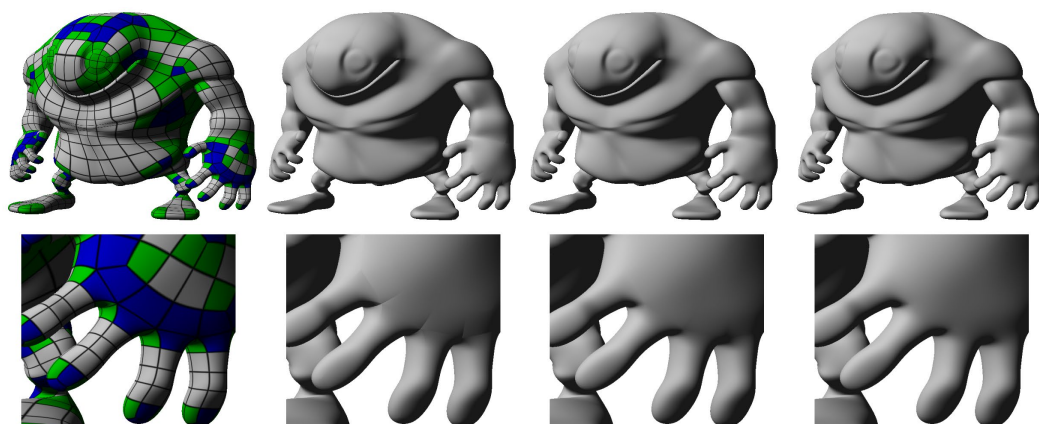
- Catmull-Clark 曲面的双三次曲面逼近

算法步骤:

1. 给定初始四边形控制网格
2. 针对每一四边形构造一张双三次曲面

3. 构造对应每张曲面片的切平面

4. 独立绘制每张曲面片

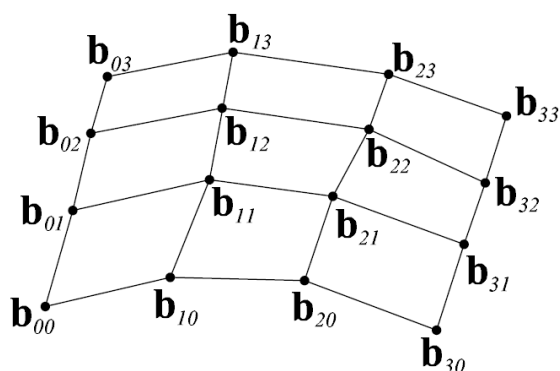


控制网格

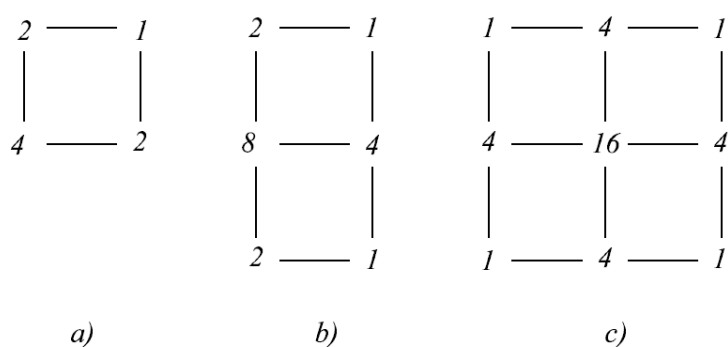
逼近曲面

连续法向场绘制

原 C-C 曲面



双三次 Bézier 曲面控制网格



由 B 样条曲面控制顶点生成 Bézier 控制顶点的 mask:

a) 内部点:  $\mathbf{b}_{11}$ ,  $\mathbf{b}_{12}$ ,  $\mathbf{b}_{21}$ ,  $\mathbf{b}_{22}$

b) 边界点:  $\mathbf{b}_{10}$ ,  $\mathbf{b}_{20}$ ,  $\mathbf{b}_{01}$ ,  $\mathbf{b}_{02}$ ,  $\mathbf{b}_{13}$ ,  $\mathbf{b}_{23}$ ,  $\mathbf{b}_{31}$ ,  $\mathbf{b}_{32}$

c) 角点:  $\mathbf{b}_{00}$ ,  $\mathbf{b}_{30}$ ,  $\mathbf{b}_{03}$ ,  $\mathbf{b}_{33}$

Figure 1 consists of three diagrams labeled a), b), and c), illustrating the construction of a 2D lattice from a 1D chain. Diagram a) shows a single unit cell with edges labeled 1, 2,  $n$ , and 2. Diagram b) shows a unit cell with edges labeled 1, 2,  $2n$ , and 4. Diagram c) shows a unit cell with edges labeled 1, 4,  $n^2$ , and 4, with a dashed line indicating a continuation of the chain.

- 这里  $n$  表示原控制网格顶点度数，  
若  $n=4$  则得到精确 B 样条曲面  
若  $n \neq 4$  则得到 C-C 细分曲面的近似曲面片  
结论：

- ## 连续法向量场构造

1. 双三次 Bézier 曲面的法向量场是双五次 Bézier 曲面
2. 双三次 Bézier 近似法向量场

## §6. 非稳定/非线性细分方法

### (a) 变分细分

记原多边形  $\Gamma_m = (P_0^m, \dots, P_{n-1}^m)$

细分一次多边形为  $\Gamma_{m+1} = (P_0^{m+1}, \dots, P_{2n-1}^{m+1})$

考虑插值细分格式，有  $P_{2i}^{m+1} = P_i^m$

细分多边形光滑性度量

$$K(P_i^{m+1}) = \sum_{j=0}^k \alpha_j P_{i+j-r}^{m+1}$$

其中  $\alpha(z) = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^j$  满足：

$\alpha_j$  为任意实数， $\alpha(1) = 0$ ；参数  $r$  由用户给定。

细分曲线能量

$$E(\Gamma_{m+1}) = \sum_{i=0}^{2n-1} K^2(P_i^{m+1})$$

能量最小原理

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\Gamma_{m+1})}{\partial P_{2l+1}^{m+1}} &= \sum_{i=0}^k \frac{\partial}{\partial P_{2l+1}^{m+1}} K^2(P_{2l+1+r-i}^{m+1}) \\ &= 2 \sum_{i=0}^k \alpha_i \sum_{j=0}^k \alpha_j P_{2l+1+j-i}^{m+1} \\ &= 2 \sum_{i=0}^k \beta_i P_{2l+1+i}^{m+1} \end{aligned}$$

其中  $\beta_{-i} = \beta_i = \sum_{j=0}^{k-i} \alpha_j \alpha_{j+i}$ ， $i = 0, 1, \dots, k$

由  $\frac{\partial E(\Gamma_{m+1})}{\partial P_{2l+1}^{m+1}} = 2 \sum_{i=0}^k \beta_i P_{2l+1+i}^{m+1} = 0$ ，可得方程组

$$\begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_2 & \beta_4 & \cdots & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_0 & \beta_2 & \cdots & \beta_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{m+1} \\ P_3^{m+1} \\ \vdots \\ P_{2n-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\beta_1 & -\beta_3 & \cdots & -\beta_3 \\ -\beta_3 & -\beta_1 & -\beta_1 & \cdots & -\beta_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^m \\ P_1^m \\ \vdots \\ P_{n-1}^m \end{pmatrix}$$

求解方程组可得新点。

(b) (带张力参数的三次 B 样条)曲线细分

$$\text{细分格式: } s_{k-1} = \frac{1}{4+4\alpha_k} (1, \quad 2+2\alpha_k, \quad 2+4\alpha_k, \quad 2+2\alpha_k, \quad 1)$$

$$\text{其中 } \alpha_k = \sqrt{\frac{1+\alpha_{k-1}}{2}}$$

控制多边形迭代格式:

$$p_{2i}^k = \frac{1}{4+4\alpha_k} (p_{i-1}^{k-1} + (2+4\alpha_k) p_i^{k-1} + p_{i+1}^{k-1})$$

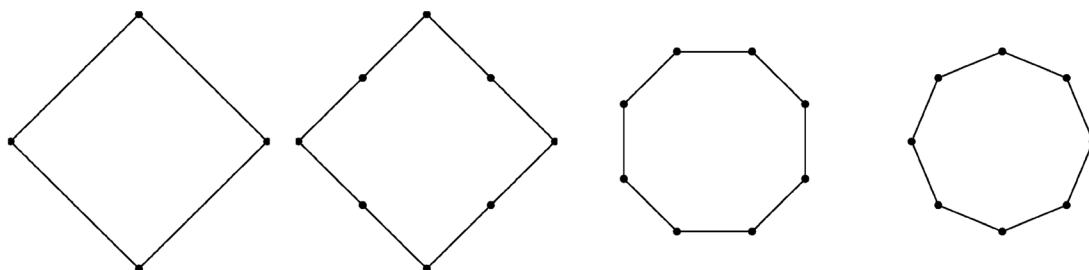
$$p_{2i+1}^k = \frac{1}{2} (p_i^{k-1} + p_{i+1}^{k-1})$$

细分的矩阵表示与分解:

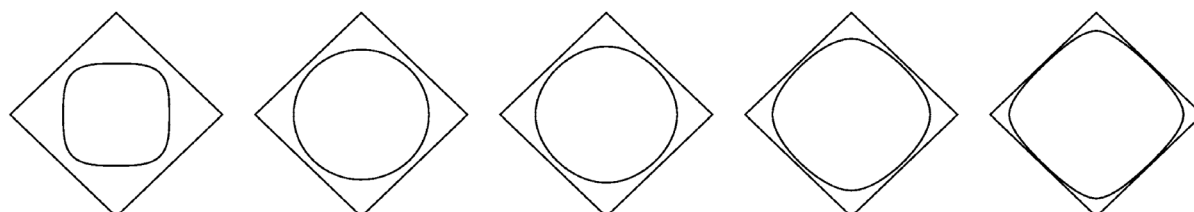
$$s_{k-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \frac{1}{4+4\alpha_k} & \frac{1+2\alpha_k}{2+2\alpha_k} & \frac{1}{4+4\alpha_k} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4+4\alpha_k} & \frac{1+2\alpha_k}{2+2\alpha_k} & \frac{1}{4+4\alpha_k} & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4+4\alpha_k} & \frac{1+2\alpha_k}{2+2\alpha_k} & \frac{1}{4+4\alpha_k} & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

将 $\alpha_k$ 简记为 $\alpha$ ，有

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4+4\alpha} & \frac{1+2\alpha}{2+2\alpha} & \frac{1}{4+4\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4+4\alpha} & \frac{1+2\alpha}{2+2\alpha} & \frac{1}{4+4\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4+4\alpha} & \frac{1+2\alpha}{2+2\alpha} & \frac{1}{4+4\alpha} \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{1}{1+\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{1}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



上述矩阵分解说明一次细分包含三个步骤：线性细分、加权平均和中点平均。



上图中  $\alpha_0 = \{-1, 0, 1, 10, 100\}$  ( $\alpha_0 = 0$  对应的细分曲线是圆,  $\alpha_0 = 1$  对应得到三次 B 样条曲线)。

当 $\alpha_k \neq 1$ 时，上述细分方法为非稳定细分。若 $\alpha_0 \geq -1$ ，该非稳定细分收敛，极限曲线 $C^2$ 连续。

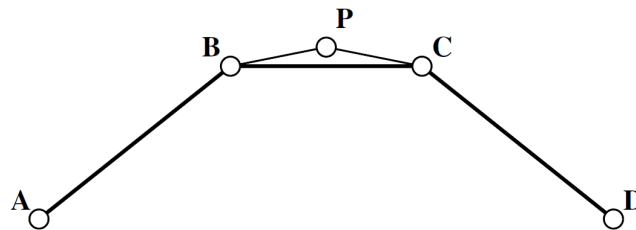
参考文献：

Morin,G, Warren, J. and Weimer, H. A subdivision scheme for surfaces of revolution, Computer Aided Geometric Design 18(2001)483-502.

(c) 保圆细分曲线

出发点：当初始控制顶点落在圆上时得到的细分曲线即是圆。

细分规则：



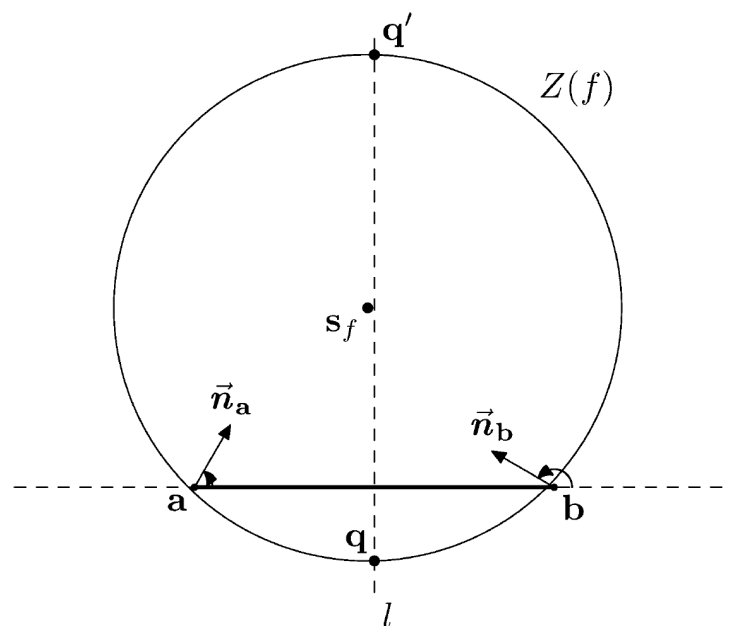
保圆四点法(Sabin & Dodgson2004)

线性四点法生成的点 P 处的二阶差分由原对应边端点处的二阶差分平均得到。

$$\begin{aligned}
 8[B + C - 2P] &= 8[B + C] - 16P \\
 &= 8[B + C] - 9[B + C] + [A + D] \\
 &= [A + D] - [B + C] \\
 &= [A + C - 2B] + [B + D - 2C] \\
 \frac{[B + C - 2P]}{1/4} &= \frac{[A + C - 2B] + [B + D - 2C]}{2}
 \end{aligned}$$

将 B,C 处的二阶差分用过 A,B,C 或 B,C,D 处的圆代替，将两圆平均后得到过 B,C 点的圆和插值点 P。

这种细分法具有保圆性，数值结果上得到光滑细分曲线。



### 基于点向拟合的保圆细分法

(Chalmoviansky & Juttler 2007; Lipovetsky & Dyn 2016, 2020)

这种方法主要通过构造拟合多边形顶点处的离散法向并插值边界端点的圆而得到细分点。能证明具有一阶光滑。高阶光滑曲线可通过 Lane\_Riesenfeld 平滑实现，但不能证明。



保圆曲线细分并经过 0 次(black), 2 次(red), 4 次(blue), 8 次(brown)平滑后的结果。

更多细分格式

1. Dyn, N., Levin, D., and Liu, D., 1992. Interpolatory convexity-preserving subdivision schemes for curves and surfaces. Computer-Aided Design, 24(4), 211-216.



2. Jos Stam. On subdivision schemes generalizing uniform B-spline surfaces of arbitrary degree. *Computer Aided Geometric Design* 18 (2001) 383–396
3. Yang, X. 2006. Normal based subdivision scheme for curve design, *Computer Aided Geometric Design* 23(3):243-260.
4. Nira Dyn and Peter Oswald. Univariate subdivision and multi-scale transforms: The nonlinear case, R.A. DeVore, A. Kunoth (eds.), *Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009
5. S. Schaefer, E. Vouga, R. Goldman. Nonlinear subdivision through nonlinear averaging, *Computer Aided Geometric Design* 25 (2008) 162–180.
6. Evgeny Lipovetsky and Nira Dyn. 2016. A weighted binary average of point-normal pairs with application to subdivision schemes. *Computer Aided Geometric Design* 48(November 2016), 36–48.
7. Ulrich Reif, Malcolm A. Sabin. Old problems and new challenges in subdivision. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 349 (2019) 523–531.

## §7. 基于 Laurent 多项式的收敛性和光滑性分析

### 7.1. 单变量曲线(函数)细分

#### (a) 细分格式的表示

设稳定细分  $s$  的细分mask为  $\mathbf{a} = \{a_i : i \in Z^s\}$ ，则细分曲线或细分曲面上的点可通过下述迭代生成

$$f_i^{k+1} = \sum_{j \in Z^s} a_{i-2j} f_j^k, \quad i \in Z^s \quad (1)$$

特别地，当  $s=1$  时表示曲线细分，当  $s=2$  时表示曲面细分。

为方便收敛性和光滑性分析，对mask为  $\mathbf{a} = \{a_i : i \in Z^s\}$  的细分格式  $s$  定义符号(symbol)

$$a(z) = \sum_{i \in Z^s} a_i z^i, \quad (2)$$

其中当  $s=2$  时有  $z^i = z_1^{i_1} z_2^{i_2}$ 。由于细分mask的非零系数一般为有限

个，故  $a(z)$  实际上是一个Laurent多项式。

令  $F(z; f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j z^j$  为控制顶点  $f$  的正式生成函数，则迭代格式  $f_i^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j} f_j^k$  可表达成

$$F(z; S_a f) = a(z) F(z^2; f) \quad (3)$$

(b) 收敛性分析

**定理1.** (必要性) 设  $S$  是一个mask为  $\mathbf{a} = \{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$  的收敛的细分格式，则有

$$\sum_j a_{2j} = \sum_j a_{2j+1} = 1$$

该结论可以通过对加细方程两边同时取极限得到。由定理1知，一个收敛的细分格式的符号满足

$$a(-1) = 0, \quad a(1) = 2. \quad (4)$$

故有

$$a(z) = (1+z)q(z), \quad (5)$$

其中  $q(1) = 1$ 。

**定理2.** 设  $S_a$  表示符号为  $a(z)$  的细分格式，并记  $f = \{f_i : i \in \mathbb{Z}\}$  和

$\Delta f = \{(\Delta f)_i = f_i - f_{i-1} : i \in \mathbb{Z}\}$ 。若  $a(z) = (1+z)q(z)$ ，则有

$$\Delta(S_a f) = S_q \Delta f$$

证明：由  $F(z; f)$  的定义可以得到

$$F(z; \Delta f) = (1-z)F(z; f)$$

由公式(3)和公式(5)可得

$$F(z; \Delta S_a f) = (1-z)F(z; S_a f) = (1-z)a(z)F(z^2; f)$$

$$= q(z)(1-z^2)F(z^2; f) = q(z)F(z^2; \Delta f) \quad (6)$$

公式(6)等价于  $\Delta(S_a f) = S_q \Delta f$ 。证毕。 ■

**定理3.** 细分格式  $s_a$  收敛当且仅当对任意初始数据  $f^0$  有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_q)^k f^0 = 0 \quad (7)$$

证明：(必要性) 设极限曲线为  $p(t)$  且  $f_i^k$  收敛于  $p(2^{-k}i)$ 。当  $p(t)$  为连续曲线时，易知  $\Delta f^k = S_q \Delta f^{k-1} = \dots = (S_q)^k f^0$  当  $k \rightarrow \infty$  时极限为0。

(充分性) 设函数列  $\{f^k(t) : k \in Z_+\}$  满足

$$f^k(t) \in \pi_1, \quad t \in (i2^{-k}, (i+1)2^{-k}), \quad f^k(i2^{-k}) = f_i^k, \quad i \in Z$$

为证明细分收敛，下证明该函数列一致收敛，即满足

$$\sup_t |f^{k+1}(t) - f^k(t)| \leq C\eta^k, \quad |\eta| < 1$$

注意到分段线性函数的最大绝对值总在节点处取到，故有

$$\sup_{t \in R} |f^{k+1}(t) - f^k(t)| = \max \left\{ \sup_{i \in Z} |f_{2i}^{k+1} - f_i^k|, \sup_{i \in Z} \left| f_{2i+1}^{k+1} - \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} \right| \right\} \quad (8)$$

令  $g_{2i}^{k+1} = f_i^k$ ,  $g_{2i+1}^{k+1} = \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2}$ ,  $i \in Z$  并记  $d(z) = \frac{z^{-1}}{2} + 1 + \frac{z}{2} = \frac{z^{-1}}{2}(1+z)^2$ , 则

$G_{k+1}(z) = F(z; g^{k+1})$  与  $F_k(z) = F(z; f^k)$  之间满足

$$G_{k+1}(z) = d(z)F_k(z^2) \quad (9)$$

记  $\|F(z; f)\|_\infty = \max_{i \in Z} |f_i| = \|f\|_\infty$ , 则由公式(8)可得

$$\sup_{t \in R} |f^{k+1}(t) - f^k(t)| = \|F_{k+1} - G_{k+1}\|_\infty \quad (10)$$

根据  $a(z) = (1+z)q(z)$  和  $q(1) = 1$ , 并根据公式(9)得到

$$\begin{aligned} F_{k+1}(z) - G_{k+1}(z) &= ((1+z)q(z) - d(z))F_k(z^2) \\ &= (1+z) \left( q(z) - \frac{z^{-1}}{2}(1+z) \right) F_k(z^2) \end{aligned}$$

由于  $\left(q(z) - \frac{z^{-1}}{2}(1+z)\right)\Big|_{z=1} = 0$ ，进一步得到

$$F_{k+1}(z) - G_{k+1}(z) = (1+z)(1-z)r(z)F_k(z^2) = r(z)H_k(z^2) \quad (11)$$

其中  $H_k(z) = F(z; \Delta f^k)$ 。

联合公式(10)和(11)可得

$$\begin{aligned} \sup_{t \in R} |f^{k+1}(t) - f^k(t)| &= \|F_{k+1} - G_{k+1}\|_{\infty} \leq R \max_i |f_i^k - f_{i-1}^k| \\ &= R \|\Delta f^k\|_{\infty} \leq R \|S_q^k \Delta f^0\|_{\infty} \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $R = \sum_i |r_i|$ 。

当条件(7)成立，则存在  $L > 0$ ， $L \in Z$ ，使得算子  $S_q$  的  $L$  次迭代满足  $\|S_q^L\|_{\infty} = \mu < 1$ 。由公式(12)可得

$$\sup_{t \in R} |f^{k+1}(t) - f^k(t)| \leq R \mu^{\left[\frac{k}{L}\right]} \max_{0 \leq j < L} \|\Delta f^j\|_{\infty} \leq C \eta^k$$

其中  $\eta = \mu^{\frac{1}{L}} < 1$ 。证毕。 ■

由定理3可知判断细分格式  $S_a$  的收敛性等价于判断  $S_q$  的收缩性或是否存在  $L \in Z$  使得不等式  $\|S_q^L\|_{\infty} < 1$  成立。类似于公式(1)，二进制细分中得到的  $S_q$  的范数可由下式计算得到

$$\|S_q\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_i |q_{2i}|, \sum_i |q_{2i+1}| \right\}。$$

为计算  $\|S_q^L\|_{\infty}$ ，由公式(6)并根据

$$H_{k+L}(z) = q(z)H_{k+L-1}(z^2) = q(z)q(z^2)H_{k+L-2}(z^4) = \cdots = q_L(z)H_k(z^{2^L})$$

得到对  $S_q$  的  $L$  次迭代

$$q_L(z) = q(z)q(z^2) \cdots q(z^{2^{L-1}})$$

记  $q_L(z) = \sum q_i^{[L]} z^i$ ，则关系  $H_{k+L}(z) = q_L(z)H_k(z^{2^L})$  等价于如下迭代

$$(\Delta f^{k+L})_i = \sum_j q_{i-2^L j}^{[L]} (\Delta f^k)_j \circ$$

上式中 $\{q_i^{[L]}\}$ 可分为 $2^L$ 个不同的子集，从而有

$$\|S_q^L\|_\infty = \max \left\{ \sum_j |q_{i-2^L j}^{[L]}| : 0 \leq i < 2^L \right\} \quad (13)$$

基于以上必要性和充分性分析，得到判断符号为 $a(z)$ 的细分格式 $s_a$ 的收敛性的算法如下：

Step1. 如果 $a(1) \neq 2$  细分不收敛；

Step2. 如果 $a(-1) \neq 0$  细分不收敛；

Step3. 计算 $q(z) = \frac{a(z)}{1+z}$ ；

Step4. 设 $q_1(z) = \sum_i q_i^{[1]} z^i = q(z)$ ；

Step5. for  $L=1, \dots, M$ ,

Step5 (a). 计算 $N_L = \max_{0 \leq i < 2^L} \sum_j |q_{i-2^L j}^{[L]}|$

Step5 (b). 若 $N_L < 1$  则细分收敛

Step5 (c). 若 $N_L \geq 1$  计算 $q_{L+1}(z) = q(z)q_L(z^2) = \sum_i q_i^{[L+1]} z^i$

Step6. 若 $M$  次迭代后 $s_q$  仍不收缩则细分不收敛。

注： $M$  为经验值，一般取 $5 \leq M \leq 10$ 。

### (c) 光滑性分析

主要采用差分法对细分曲线的光滑性进行分析。假设

$a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$ ，对于细分 $f^k = s_a f^{k-1}$  运用定理2的结果得到

$$\frac{\Delta^m f^k}{(2^{-k})^m} = S_b \frac{\Delta^m f^{k-1}}{(2^{-(k-1)})^m} \quad (14)$$

若  $f \in C^m(R)$  且  $f_i^k = f(2^{-k}i)$ ,  $i \in Z$ ,  $k \in Z_+$ , 对于固定  $l \in Z_+$  有

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k > l}} (2^{mk} \Delta^m f^k)_{i2^{k-l}} = f^{(m)}(i2^{-l})$$

基于以上两方面结果得到如下结论:

**定理4.** 设  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$ 。若  $S_b$  收敛, 则对于任意初始数据  $f^0$  有

$S_a^\infty f^0 \in C^m(R)$  且

$$\frac{d^m}{dt^m} (S_a^\infty f^0)(t) = (S_b^\infty (\Delta^m f^0))(t) \quad (15)$$

其中  $\Delta^m f = \Delta(\Delta^{m-1} f)$  表示高阶差分。

根据定理4对细分格式  $S_a$  进行光滑性判断只需将  $a(z)$  分解成

$a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  并判断  $S_b$  的收敛性即可。

**例1.**  $m$  次均匀B样条曲线细分格式可由以下多项式系数确定

$$a^{[m]}(z) = \frac{(1+z)^{m+1}}{2^m}, \quad m \geq 0$$

为验证该细分的收敛性, 考虑

$$q^{[m]}(z) = \frac{a^{[m]}(z)}{1+z} = \frac{(1+z)^m}{2^m} = \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} z^j$$

由定理3知  $S_{a^{[m]}}$  收敛等价于  $S_{q^{[m]}}$  收缩。计算

$$\|S_{q^{[m]}}\|_\infty = \max \left\{ \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2j}, \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2j+1} \right\}$$

当  $m \geq 1$  时易知  $\frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2j} = \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2j+1} = \frac{(1+1)^m}{2^{m+1}}$ , 从而有  $\|S_{q^{[m]}}\|_\infty = \frac{1}{2}$ 。所

以当  $m \geq 1$  时  $S_{a^{[m]}}$  收敛。

为分析  $S_{a^{[m]}}$  的光滑性，只需说明符号  $\frac{2^l a^{[m]}(z)}{(1+z)^l}$ ,  $1 \leq l \leq m-1$  对应的细分格式兼收敛。特别地，当  $b(z) = \frac{2^{m-1} a^{[m]}(z)}{(1+z)^{m-1}} = \frac{(1+z)^2}{2}$  对应的细分格式收敛则结论成立。由于  $b(z) = a^{[1]}(z)$  并由前述结果知收敛性成立，故  $S_{a^{[m]}}$  生成的极限曲线具有  $C^{m-1}$  连续性。

## 例2. 4点法曲线细分

4点法插值细分格式如下：

$$f_{2i}^{k+1} = f_i^k$$

$$f_{2i+1}^{k+1} = -\omega(f_{i-1}^k + f_{i+2}^k) + \left(\frac{1}{2} + \omega\right)(f_i^k + f_{i+1}^k)$$

从而得到4点法的mask

$$a_0 = 1, \quad a_{\pm 1} = \frac{1}{2} + \omega, \quad a_{\pm 2} = 0, \quad a_{\pm 3} = -\omega \quad (17)$$

细分的符号可写成

$$a(z) = z^{-3}(1+z)^2 \left( \frac{1}{2}z^2 - \omega(z-1)^2(1+z^2) \right) \quad (18)$$

由上式得到

$$q(z) = \frac{a(z)}{1+z} = -\omega z^{-3} + \omega z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} + \omega z - \omega z^2 \quad (19)$$

和  $\|S_q\|_{\infty} = \frac{1}{2} + 2|\omega|$ 。

根据定理3知， $S_a$  收敛当且仅当存在正整数  $L$  使得  $\|S_q^L\|_{\infty} < 1$ 。

当  $L=1$  易知  $|\omega| < \frac{1}{4}$  时  $\|S_q\|_{\infty} < 1$ 。考虑  $L=2$  并计算  $q_2(z) = q(z)q(z^2)$  得到

$$\begin{aligned}
q_2(z) = & \omega^2 z^{-9} - \omega^2 z^{-8} - \left(\frac{1}{2}\omega + \omega^2\right) z^{-7} + \left(\omega^2 - \frac{1}{2}\omega\right) z^{-6} \\
& - \omega^2 z^{-5} + (\omega + \omega^2) z^{-4} + \left(\frac{1}{4} + \omega^2 - \frac{1}{2}\omega\right) z^{-3} + \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4} - \omega^2\right) z^{-2} \\
& + \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4} - \omega^2\right) z^{-1} + \left(\frac{1}{4} + \omega^2 - \frac{1}{2}\omega\right) + (\omega + \omega^2) z - \omega^2 z^2 \\
& + \left(\omega^2 - \frac{1}{2}\omega\right) z^3 - \left(\frac{1}{2}\omega + \omega^2\right) z^4 - \omega^2 z^5 + \omega^2 z^6
\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\|S_q^2\|_\infty = \max \left\{ \left| \frac{1}{2} + \omega \right| |\omega| + \left| \frac{1}{4} + \omega^2 - \frac{1}{2}\omega \right| + |\omega| |1 + \omega| + \omega^2, \right. \\
\left. |\omega| \left| \omega - \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\omega - \omega^2 \right| + 2\omega^2 \right\} \quad (20)
\end{aligned}$$

为使  $\|S_q^2\|_\infty < 1$ ，解得  $-\frac{3}{8} < \omega < \frac{-1+\sqrt{13}}{8} < \frac{1}{2}$ 。该参数范围比  $L=1$  时得到的收敛参数  $|\omega| < \frac{1}{4}$  更宽泛。

关于光滑性分析考虑以  $b(z) = \frac{2a(z)}{1+z}$  为符号的细分  $s_b$  的收敛

性。由定理2知  $s_b$  的收敛性可通过  $s_r$  的收缩性来判断，其中  $s_r$  由下式定义

$$r(z) = \frac{b(z)}{1+z} = \frac{2a(z)}{(1+z)^2} = 2z^{-3} \left( \frac{1}{2} z^2 - \omega(z-1)^2 (1+z^2) \right)$$

然而， $\|S_r\|_\infty = \max \{8|\omega|, |1-4\omega| + 4|\omega|\} \geq 1$ 。进一步计算  $\|S_r^2\|_\infty$ ，由  $\|S_r^2\|_\infty < 1$  算

得参数  $\omega$  的取值范围是  $0 < \omega < \frac{-1+\sqrt{5}}{8} \cong 0.154$ 。特别地， $\omega = \frac{1}{16}$  正落

在这个参数区间内，故得到的插值细分曲线是  $C^1$  连续的。

进一步，检查  $\omega = \frac{1}{16}$  对应的细分曲线是否  $C^2$  连续。为此，检

测细分格式  $s_i$  的收缩性，其中  $s_i$  由下式定义



$$t(z) = \frac{4a(z)}{(1+z)^3} = \frac{z^{-1}}{4}(z^3 - 3z^2 - 3z + 1)$$

通过计算得到对于任意  $L \in Z_+ \setminus 0$  都有  $\|S_t^L\|_\infty = 1$ ，即  $S_a^\infty f^0 \notin C^2$ 。利用特征分析的方法也可以证明四点法生成的曲线仅  $C^1$  连续，达不到  $C^2$  连续。

## 7.2. 可因式分解的二元细分格式的收敛性和光滑性分析

### (a) 规则四边形网格的细分

**定理5.** 设定义在四边形网格上的二元细分格式  $s$  的符号表达式为  $a(z) = a(z_1, z_2) = \sum_{ij} a_{ij} z_1^i z_2^j$ 。细分  $s$  收敛的必要条件为

$$\sum_{\beta \in Z^2} a_{\alpha-2\beta} = 1, \quad \alpha \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \quad (21)$$

定理5的证明与定理1类似。

由条件(21)得到下面等式

$$a(1,1) = 4, \quad a(-1,1) = 0, \quad a(1,-1) = 0, \quad a(-1,-1) = 0 \quad (22)$$

与一元细分不同，二元细分的mask并不能根据收敛的必要条件(21)及其导出等式(22)进行因式分解。

为便于进行收敛性分析，特考虑如下细分格式

$$a(z) = (1+z_1)(1+z_2)b(z), \quad z = (z_1, z_2) \quad (23)$$

**定理6.** 假设如下格式均收缩

$$a_1(z) = \frac{a(z)}{(1+z_1)} = (1+z_2)b(z),$$

$$a_2(z) = \frac{a(z)}{(1+z_2)} = (1+z_1)b(z)$$

即对任意初始数据  $f^0$  有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_{a_1})^k f^0 = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{a_2})^k f^0 = 0$$

则具有形式(23)的细分格式 $s_a$ 收敛。反之，如果 $s_a$ 收敛则 $s_{a_1}$ 和 $s_{a_2}$ 收缩。

定理6的证明与定理3类似。定义 $\Delta_1 f = \{f_{i,j} - f_{i-1,j} : i, j \in Z\}$ ，以及 $\Delta_2 f = \{f_{i,j} - f_{i,j-1} : i, j \in Z\}$ 。则有 $S_{a_l} \Delta_l f = \Delta_l S_a f$ ， $l=1,2$ 。细分 $s_a$ 的收敛性可由细分格式 $s_{a_1}$ 和 $s_{a_2}$ 的收缩性来判断。如果(23)式中 $b(z)$ 满足 $b(z_1, z_2) = b(z_2, z_1)$ 则有 $a_1(z_1, z_2) = a_2(z_2, z_1)$ 。由对称性知 $s_{a_1}$ 和 $s_{a_2}$ 具有相同的收缩性，因此只需检测其中一个细分格式的收缩性即可。

为说明光滑性，递归定义以下差分算子： $\Delta^{[i,j]} = \Delta_1 \Delta^{[i-1,j]}$ ， $\Delta^{[i,j]} = \Delta_2 \Delta^{[i,j-1]}$ ， $\Delta^{[1,0]} = \Delta_1$ ， $\Delta^{[0,1]} = \Delta_2$ 。

**定理7.** 设

$$a(z) = (1+z_1)^m (1+z_2)^m b(z)。 \quad (24)$$

如果具有如下mask的格式均收敛

$$a_{i,j}(z) = \frac{2^{i+j} a(z)}{(1+z_1)^i (1+z_2)^j}, \quad i, j = 0, \dots, m \quad (25)$$

则 $s_a$ 生成 $C^m$ 连续函数。并且极限函数的导数可由下式计算得到

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial t_1^i \partial t_2^j} S_a^\infty f^0 = S_{a_{i,j}}^\infty \Delta_1^i \Delta_2^j f^0, \quad i, j = 0, \dots, m \quad (26)$$

例：若细分格式的mask为 $a(z) = (1+z_1)^2 (1+z_2)^2 b(z)$ ，且mask为

$$2(1+z_1)(1+z_2)b(z), \quad 2(1+z_2)^2 b(z), \quad 2(1+z_1)^2 b(z)$$

的细分格式均收缩，则 $s_a$ 生成 $C^1$ 连续函数。

对于张量积细分格式，即 $a(z) = a_1(z_1)a_2(z_2)$ ，其收敛性和光滑性可由两个一元函数细分确定。实际上，若 $a(z)$ ， $a_1(z_1)$ ， $a_2(z_2)$ 对

应的基本极限函数分别为  $\phi_a$ ,  $\phi_{a_1}$  和  $\phi_{a_2}$ , 则有  $\phi_a = \phi_{a_1} \phi_{a_2}$ 。

### (b) 规则三角形网格的细分

规则三角网格的拓扑细分可看成对于三向格点进行。平面整数顶点  $z^2$  连成的三角网格的边向量的方向可记为  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ , 和  $(1,1)$ 。对三向网格的边进行细分后得到的网格仍是规则三角网格。假设细分格式的符号(symbol)可分解, 即

$$a(z) = (1+z_1)^m (1+z_2)^m (1+z_1 z_2)^m b(z), \quad (27)$$

其中  $b(z)$  具有对称性, 比如  $b(z_1, z_2) = b(z_2, z_1)$ 。

例: butterfly算法的细分格式可由下式给出

$$a(z) = \frac{1}{2} (1+z_1)(1+z_2)(1+z_1 z_2)(1-\omega c(z_1, z_2))(z_1 z_2)^{-1} \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} c(z_1, z_2) = & 2z_1^{-2} z_2^{-1} + 2z_1^{-1} z_2^{-2} - 4z_1^{-1} z_2^{-1} - 4z_1^{-1} - 4z_2^{-1} \\ & + 2z_1^{-1} z_2 + 2z_1 z_2^{-1} + 12 - 4z_1 - 4z_2 - 4z_1 z_2 + 2z_1^2 z_2 + 2z_1 z_2^2 \end{aligned} \quad (29)$$

规则三角网格细分的收敛性和光滑性分析与四边形网格细分类似进行。

定理8. 设  $s_a$  具有符号

$$a(z) = (1+z_1)(1+z_2)(1+z_1 z_2)b(z) \quad (30)$$

则  $s_a$  收敛当且仅当具有符号

$$a_1(z) = \frac{a(z)}{1+z_1}, \quad a_2(z) = \frac{a(z)}{1+z_2}, \quad a_3(z) = \frac{a(z)}{1+z_3}$$

的细分均收缩。上述三个格式中两个格式收缩则第三个格式也收缩。

注:  $S_{a_3} \Delta_3 f = \Delta_3 S_a f$ , 其中  $(\Delta_3 f)_{i,j} = f_{i,j} - f_{i-1,j-1}$ 。

当细分格式  $S_{a_i}$ ,  $i=1,2,3$  收缩时, 则当  $k \rightarrow \infty$  时细分网格在两个线性无关的方向上的差分趋于零。记插值网格顶点的双线性函数列  $\{f^k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  如下

$$\begin{cases} f_k(t)|_{t \in [i,i+1] \times [j,j+1]} \in \pi_1 \times \pi_1 \\ f_k(i,j) = f_{i,j}^k \quad (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

用类似于定理3的方法可证  $\{f^k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  是Cauchy列, 其极限函数是连续函数。然而, 符号(30)的光滑性证明与四边形网格细分略有不同。

**定理9.** 设  $S_a$  的符号是  $a(z) = (1+z_1)(1+z_2)(1+z_1z_2)b(z)$ 。如果符号为  $2a_i(z), i=1,2,3$  的细分格式收敛, 则  $S_a$  生成  $C^1$  连续函数。如果三个格式中的任意两个收敛, 则第三个格式也收敛。进一步地, 有

$$\frac{\partial}{\partial t_i} S_a^\infty f^0 = S_{2a_i} \Delta_i f^0, \quad i=1,2$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) S_a^\infty f^0 = S_{2a_3} \Delta_3 f^0$$

实际上, 为验证具有符号(30)的细分格式  $S_a$  能否生成  $C^1$  连续函数, 只需要验证如下格式

$$2(1+z_1)b(z), \quad 2(1+z_2)b(z), \quad 2(1+z_1z_2)b(z)$$

的收缩性。如果三个细分格式均收缩, 则  $S_a$  生成  $C^1$  连续函数或  $C^1$  连续曲面。

**思考题:**

1. 证明当  $a(z) = 2^{-m}(1+z)^{m+1}$  得到细分格式是  $m$  次均匀B样条细分。

2. 证明在公式  $f_i^{k+1} = \sum_{j \in Z^s} a_{i-2j} f_j^k$  ,  $i \in Z^s$  中当  $s=1$  时有两条细分规则而

当  $s=2$  时有四条细分规则。

3. 通过比较等式  $F(z; S_a f) = a(z) F(z^2; f)$  两侧幂函数的系数证明该等式与公式  $f_i^{k+1} = \sum_{j \in Z^s} a_{i-2j} f_j^k$  等价。

4. 设一元细分收敛，证明其mask满足

$$\sum_j a_{2j} = \sum_j a_{2j+1} = 1$$

5. 已知一细分格式的mask为  $a(z) = (1+z_1)^2 (1+z_2)^2 b(z)$  , 若mask为

$$2(1+z_1)(1+z_2)b(z), \quad 2(1+z_2)^2 b(z), \quad 2(1+z_1)^2 b(z)$$

的细分格式均收缩，则  $S_a$  生成  $C^1$  连续函数。