

第九章 Bézier 曲面与 B 样条曲面

§1. 张量积曲面概述

● 张量积

两向量的张量积

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \end{bmatrix}$$

● 张量积函数

定义：设 U 为 $m+1$ 维线性空间，基函数 $f_0(u), \dots, f_m(u)$

V 为 $n+1$ 维线性空间，基函数 $g_0(v), \dots, g_n(v)$

则 U 与 V 的张量积空间定义为

$$U \otimes V = \text{span}\{f_i(u)g_j(v); i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n\}$$

● 张量积曲面

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} f_i(u) g_j(v)$$

● 双三次样条函数

定义：设 $D = [a, b] \times [c, d]$,

并有剖分

$$\Delta_u: a = u_0 < \dots < u_n = b$$

$$\Delta_v: c = v_0 < \dots < v_m = d$$

$\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$ 称为 D 的一个剖分，它的每一个小矩形区域为

$$D_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$$

若 D 上一个函数 $f(u, v)$ 满足

(1) 在每一个 D_{ij} 上关于 u 和 v 都是三次的。

(2) $\frac{\partial^{\alpha+\beta} f(u,v)}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) 在 D 上连续。

则称 $f = f(u, v)$ 在 D 上关于 Δ 的双三次样条函数。

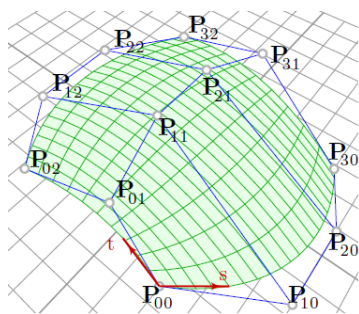
定理： 记 $S(u, v; \Delta)$ 为双三次插值样条函数的全体，则

$$S(u, v; \Delta) = S(u; \Delta_u) \otimes S(v; \Delta_v)$$

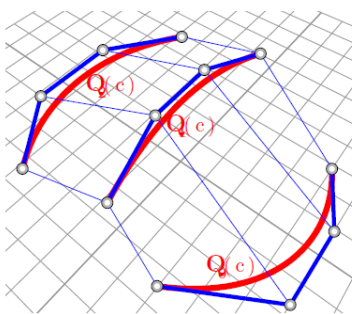
§2. 张量积 Bézier 曲面

(1) 定义与举例

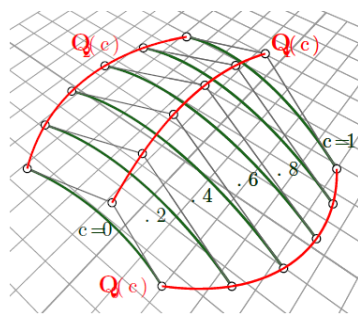
$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \quad (u, v) \in [0, 1]^2$$



曲面与控制网格



控制曲线



等参数曲线

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(c) B_{j,n}(v) = \sum_{j=0}^n \left[\sum_{i=0}^m P_{ij} B_{i,m}(c) \right] B_{j,n}(v) = \sum_{j=0}^n Q_j(c) B_{j,n}(v)$$

其中 $Q_j(c)$ 为控制曲线

若 c 为常数，则得到表面上的等参数曲线。

● 算子表示

$$S(u, v) = [(1-u)I + uE_1]^m [(1-v)I + vE_2]^n P_{00}$$

若 $m = n$ ，又称为双 $n(m)$ 次曲面。

● 双线性 Bézier 曲面

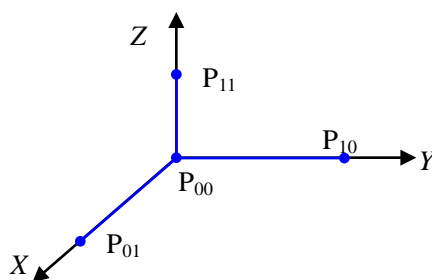
$$S(u, v) = P_{00}(1-u)(1-v) + P_{01}(1-u)v + P_{10}u(1-v) + P_{11}uv$$

易知：角点插值，边界为直线段

若四个控制顶点共面，该 Bézier 曲面为一平面片。

若四点不共面，做仿射变换，分别将控制顶点变换到坐标原点和坐标轴上，从而有

$$\begin{cases} X = v(1-u) \\ Y = u(1-v) \\ Z = uv \end{cases}$$



有 $(X+Z)(Y+Z)=Z$,

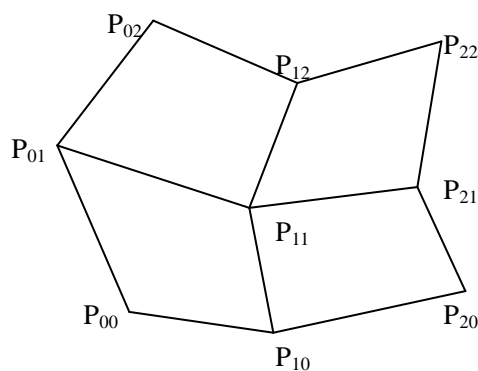
此曲面为马鞍面。

● 双二次 Bézier 曲面

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 P_{ij} B_{i,2}(u) B_{j,2}(v)$$

$$u=0 \text{ 时, 有 } s(0, v) = \sum_{j=0}^2 P_{0j} B_{j,2}(v)$$

控制顶点 P_{11} 不影响边界



角点切平面：由角点及与角点相邻的两个控制顶点所确定的平面。

● 双三次 Bézier 曲面

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$$

$$\text{记 } U = (1 \quad u \quad u^2 \quad u^3)$$

$$V = (1 \quad v \quad v^2 \quad v^3)$$

$$P = (P_{ij})_{0 \leq i \leq 3; 0 \leq j \leq 3}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $S(u, v) = UMP^T M^T V^T$

(2) 基本性质

● 导数公式

$$S(u, v) = [(1-u)I + uE_1]^m [(1-v)I + vE_2]^n P_{00}$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} S(u, v)}{\partial u^\alpha \partial v^\beta} = \frac{m!(E_1 - I)^\alpha}{(m-\alpha)!} \frac{n!(E_2 - I)^\beta}{(n-\beta)!} [(1-u)I + uE_1]^{m-\alpha} [(1-v)I + vE_2]^{n-\beta} P_{00}$$

$$0 \leq \alpha \leq m, \quad 0 \leq \beta \leq n$$

● 仿射不变性

$$\text{记 } A \text{ 为仿射变换, 则 } AS(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n AP_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

● 凸包性质

Bézier 曲面位于其控制网格的凸包内。

● 角点及切平面插值

$$S(0,0) = P_{00}, \quad S(1,0) = P_{m0}$$

$$S(0,1) = P_{0n}, \quad S(1,1) = P_{mn}$$

● 边界曲线

$$S(0, v) = \sum_{j=0}^n P_{0j} B_{j,n}(v)$$

● 平面再生性

所有控制顶点共面, 则 Bézier 曲面为一平面片。

● 扭矢(twist)

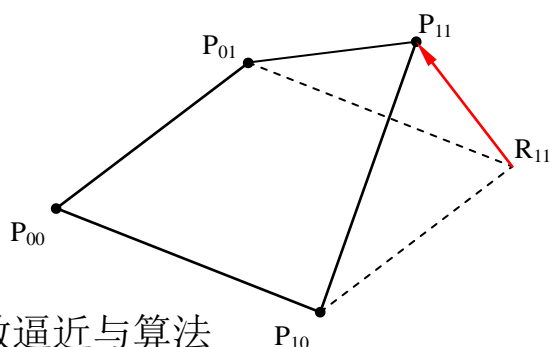
曲面的扭矢是该曲面的二阶混合偏导数，即： $\frac{\partial^2 S(u,v)}{\partial u \partial v}$

Bézier 曲面在角点处的扭矢： $\frac{\partial^2 S(0,0)}{\partial u \partial v} = mn \Delta^{1,1} P_{00}$

$$\Delta^{1,1} P_{00} = (P_{11} - P_{10}) - (P_{01} - P_{00})$$

令 $R_{11} = P_{10} + P_{01} - P_{00}$ (该四点构成平行四边形)

$$\text{则 } \Delta^{1,1} P_{00} = P_{11} - R_{11}$$



(3) 离散逼近与算法

● 升阶公式

设有 (m,n) 阶 Bézier 曲面： $S(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$

可升阶成 $(m+1,n)$, $(m,n+1)$ 或 $(m+1,n+1)$ 阶 Bézier 曲面

$$S^{m+1,n}(u,v) = \sum_{j=0}^n \left[\sum_{i=0}^{m+1} P_{ij}^{(1,0)} B_{i,m+1}(u) \right] B_{j,n}(v)$$

其中： $P_{ij}^{(1,0)} = \frac{i}{m+1} P_{i-1,j} + \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) P_{ij}; \begin{cases} i = 0, 1, \dots, m+1 \\ j = 0, 1, \dots, n \end{cases}$

$$S^{m+1,n+1}(u,v) = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} P_{ij}^{(1,1)} B_{i,m+1}(u) B_{j,n+1}(v)$$

$$\text{其中： } P_{ij}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{i}{m+1} & 1 - \frac{i}{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-1,j-1} & P_{i-1,j} \\ P_{i,j-1} & P_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{j}{n+1} \\ 1 - \frac{j}{n+1} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} i = 0, 1, \dots, m+1 \\ j = 0, 1, \dots, n+1 \end{cases}$$

注：升阶后的控制顶点由原网格顶点双线性插值得到。

● de Casteljau 算法

设 $(u_0, v_0) \in [0, 1]^2$, 求 $S(u_0, v_0)$

$$S(u_0, v_0) = \sum_{j=0}^n \left[\sum_{i=0}^m P_{ij} B_{i,m}(u_0) \right] B_{j,n}(v_0)$$

对 u 向和 v 向分别用曲线求值算法可求得曲面上点。

即：先求出 $Q_j = \sum_{i=0}^m P_{ij} B_{i,m}(u_0)$, $j = 0, 1, \dots, n$

再计算 $\sum_{j=0}^n Q_j B_{j,n}(v_0)$, 即得 $S(u_0, v_0)$ 。

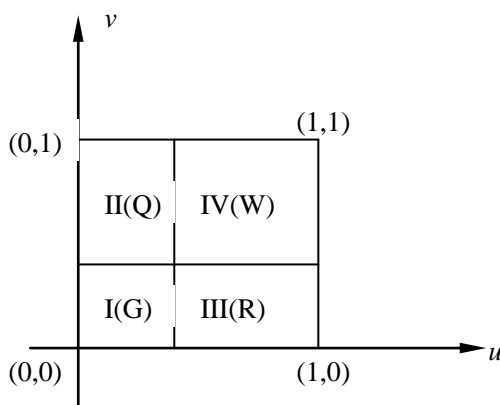
● 分割算法与定理

$$\text{I. } \{G_{ij}\}_{00}^{mn} = \{P_{ij}^{ij}\}_{00}^{mn}$$

$$\text{II. } \{Q_{ij}\}_{00}^{mn} = \{P_{in}^{i,n-j}\}_{00}^{mn}$$

$$\text{III. } \{R_{ij}\}_{00}^{mn} = \{P_{mj}^{m-i,j}\}_{00}^{mn}$$

$$\text{IV. } \{W_{ij}\}_{00}^{mn} = \{P_{ij}^{m-i,n-j}\}_{00}^{mn}$$



分割算法

Procedure SurfaceSplit(P,m,n,G,Q,R,W)

输入：P, m, n

输出：G, Q, R, W

Step 1: 赋初值 $W \leftarrow P$

Step 2: (u 向离散)

```

for (j=0 to n)
{
  for (i=0 to m-1)
  {
     $Q_{ij} = W_{ij}$ ;
    for (r=0 to m-i-1)     $W_{rj} = (W_{rj} + W_{r+1,j})/2$ ;
  }
}

```

```

    Qmj=W0j;
}

```

Step 3: (v 向离散)

```

for (i=0 to m)
{
    for (j=0 to n-1)
    {
        Gij=Qi0; Rij=Wi0;
        for (r=0 to n-j-1)
        {
            Qir=(Qir+Qi,r+1)/2;
            Wir=(Wir+Wi,r+1)/2;
        }
    }
    Gi,n=Qi,0;    Ri,n=Wi,0;
}

```

● 保型问题

凸曲面：凸体的边界面

Bézier 曲面控制网格为凸  Bézier 曲面为凸

定理：若 Bézier 曲面控制网格满足

- (i) 所有顶点和边都是 $\{P_{ij}\}$ 凸包边界上的点和边；
- (ii) 任一拓扑矩形面对应一个几何平行四边形

则相应的 Bézier 曲面为凸。

● 包络性质

构造曲面簇

$$S(u, v, \lambda, \mu) = [(1-\lambda)I + \lambda E_1]^q [(1-\mu)I + \mu E_2]^r [(1-u)I + uE_1]^{m-q} [(1-v)I + vE_2]^{n-r} P_{00}$$

其中 $0 < q < m$, $0 < r < n$

则 Bézier 曲面 $S(u, v) = [(1-u)I + uE_1]^m [(1-v)I + vE_2]^n P_{00}$ 是上述曲面簇的包络面。

(4) 函数型曲面的表示

$$\text{设函数 } f(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} B_{i,m}(x) B_{j,n}(y)$$

$$\text{表示成参数形式 } X(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}$$

$$\text{取控制顶点 } P_{ij} = \begin{bmatrix} i/m \\ j/n \\ b_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\text{则有 } X(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

(5) 有理 Bézier 曲面

- 定义：已知控制顶点 $\{P_{ij}\}$ 和权因子 $\{\omega_{ij}\}$ ，其中 $\omega_{ij} > 0$

$$R(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} \omega_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)}$$

- 基本性质与算法

- 同 Bézier 曲面
- 可以表示二次曲面片

- 齐次坐标表示

$$\text{记 } R(u, v) = \frac{Q(u, v)}{W(u, v)}$$

$$\text{得齐次表示 } \bar{R}(u, v) = (Q(u, v), W(u, v))$$

- 二次曲面的有理参数化

$$F(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$F(x, y, z) = \sum_{i+j+k=2} a_{i,j,k} x^i y^j z^k + \sum_{i+j+k=1} b_{i,j,k} x^i y^j z^k + c = 0$$

设 $c = 0$

$$\text{令} \begin{cases} x = uw \\ y = vw \\ z = w \end{cases}, \text{代入上式, 有}$$

$$w^2 \sum_{i+j+k=2} a_{i,j,k} u^i v^j + w \sum_{i+j+k=1} b_{i,j,k} u^i v^j = 0$$

$$\text{解得: } w = - \frac{\sum_{i+j+k=1} b_{i,j,k} u^i v^j}{\sum_{i+j+k=2} a_{i,j,k} u^i v^j}$$

思考题:

1. 设计双 n 次 Bézier 曲面求值的金字塔算法, 并与基于控制曲线的求值算法比较计算效率。

2. 证明 Bézier 曲面具有双线性精度。设 $X(u, v)$ 是双线性曲面,

$$P_{ij} = X\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right), \text{ 则有 } \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) = X(u, v)。$$

3. 把 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 表示成有理参数形式。

§3. 张量积 B 样条曲面

(1) 定义

给定节点分割

u 方向: $\{u_i\}_0^{m+p}$, 得到基函数 $\{N_{i,p}(u)\}_0^m$

v 方向: $\{v_i\}_0^{n+q}$, 得到基函数 $\{N_{i,q}(v)\}_0^n$

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v), \text{ 其中 } (u, v) \in [u_{p-1}, u_{m+1}] \times [v_{q-1}, v_{n+1}]$$

称为 $p \times q$ 阶 B 样条曲面。

(2) 基本性质

1. 仿射不变性
2. 凸包性质
3. 平面片再生性
4. 局部性质

某一控制顶点 $P_{ij} \rightarrow P_{ij} + \Delta P_{ij}$

影响参数区域 $[u_i, u_{i+p}] \times [v_j, v_{j+q}]$ 上所对应的一片曲面。

若 $(u, v) \in [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$,

$$S(u, v) = \sum_{s=i-p+1}^i \sum_{r=j-q+1}^j P_{sr} N_{s,p}(u) N_{r,q}(v)$$

5. 光滑性

假设内部无重节点，则曲面

在 u 向为 C^{p-2}

在 v 向为 C^{q-2}

整体光滑性 $C^{\min(p-2, q-2)}$

6. 尖点、直线段、平面的构造

利用重节点与光滑性的关系，以及局部性质可以构造尖点、直线段、局部平面等形状。

7. 包络性质

同 B 样条曲线的包络性质。

(3) 求值与求导

$$S(u, v) = \sum_{s=i-p+1}^i \sum_{r=j-q+1}^j P_{sr} N_{s,p}(u) N_{r,q}(v)$$

利用控制曲线表示

$$S(u, v) = \sum_{r=j-q+1}^j Q_r(u) N_{r,q}(v), \text{ 其中 } Q_r(u) = \sum_{s=i-p+1}^i P_{sr} N_{s,p}(u)$$

将 B 样条曲面的求值与求导转化为 B 样条曲线的求值与求导。

(4) B 样条曲面的离散与分割

● 节点加密与控制网格离散

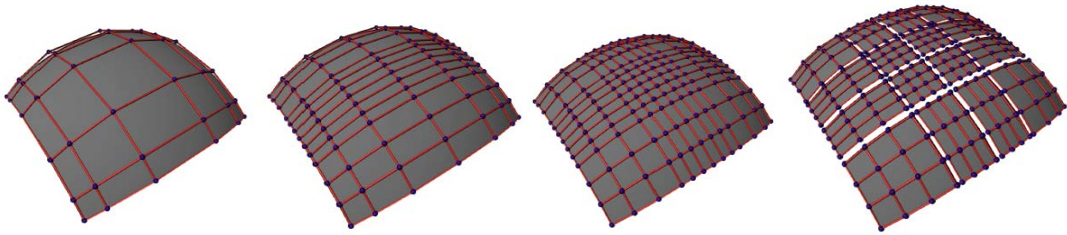
u 向节点加密 $\{\bar{u}_i\}_0^{m+\bar{m}+p}$ ，基函数 $\{\bar{N}_{i,p}(u)\}_0^{m+\bar{m}}$ 和离散 B 样条 $\{\alpha_{i,p}(r)\}$

v 向节点加密 $\{\bar{v}_j\}_0^{n+\bar{n}+q}$ ，基函数 $\{\bar{N}_{j,q}(v)\}_0^{n+\bar{n}}$ 和离散 B 样条 $\{\beta_{j,q}(s)\}$

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \sum_i \sum_j P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \\ &= \sum_r \sum_s \left(\sum_i \sum_j P_{ij} \alpha_{i,p}(r) \beta_{j,q}(s) \right) \bar{N}_{r,p}(u) \bar{N}_{s,q}(v) \end{aligned}$$

● 转化成分片 Bézier 曲面

利用节点加密和重节点技术，可得到分片 Bézier 曲面



● 保型性

定理：若 B 样条曲面控制网格满足

- (i) 所有顶点和边都是 $\{P_{ij}\}$ 凸包边界上的点和边；
- (ii) 任一拓扑矩形面对应一个几何平行四边形

则相应的 B 样条曲面为凸。

(5) 有理 B 样条曲面

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} \omega_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}$$

- 基本性质：同 B 样条曲面
- 可以有条件地表示二次曲面
- 表示范围远大于 B 样条曲面，且增加灵活性
- 实际应用，双三次有理 B 样条曲面

§4. 张量积曲面造型

(1) Bézier 曲面插值

将 Bézier 曲面 $X(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$ 表示成矩阵形式

$$X(u, v) = \begin{bmatrix} B_{0,m}(u) & \dots & B_{m,m}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m0} & \dots & P_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,n}(v) \\ \vdots \\ B_{n,n}(v) \end{bmatrix}$$

问题：给定数据 $\mathbf{x}_{ij}; 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ ，并给定每点对应参数 (u_i, v_j) ，构造一张插值 Bézier 曲面。

算法一：

根据插值条件，写出一点插值方程

$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{bmatrix} B_{0,m}(u_i) & \dots & B_{m,m}(u_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m0} & \dots & P_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,n}(v_j) \\ \vdots \\ B_{n,n}(v_j) \end{bmatrix}$$

统一写成矩阵形式，有

$$X = UPV$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{00} & \dots & \mathbf{x}_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_{m0} & \dots & \mathbf{x}_{mn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} B_{0,m}(u_0) & \dots & B_{m,m}(u_0) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{0,m}(u_m) & \dots & B_{m,m}(u_m) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m0} & \dots & P_{mn} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} B_{0,n}(v_0) & \dots & B_{0,n}(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n,n}(v_0) & \dots & B_{n,n}(v_n) \end{bmatrix}$$

由 Bernstein 基函数线性无关性，知：矩阵 U, V 可逆，从而有

$$P = U^{-1} X V^{-1}$$

算法二：

将插值矩阵写成 $X = DV$ 和 $D = UP$ 的形式，

从 $X = DV$ 解出 D ，从 $D = UP$ 中解出 P ，

将 X 和 D 表示成行向量形式， $X = DV$ 可转化为一组曲线插值问题。

将 D 和 P 表示成列向量形式， $D = UP$ 也可转化为一组曲线插值问题。

结论：张量积曲面插值问题可转化为曲线插值问题。

(2) 自由变形(Free-form deformation)

利用 Bézier 表示的线性精度性质，将单位正方形区域中的点 (u, v) 表示成

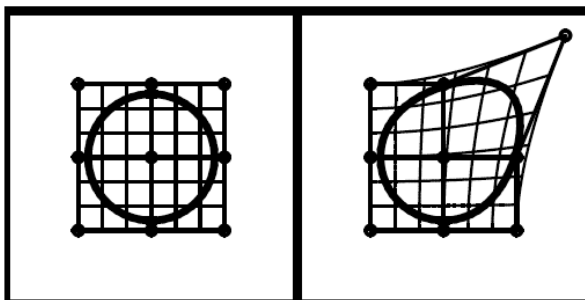
$$(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

其中 $P_{ij} = \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n} \right)$; $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$

修改控制顶点 $P_{ij} \Rightarrow \hat{P}_{ij}$

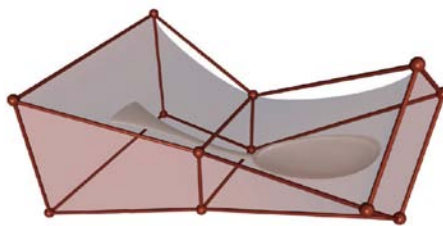
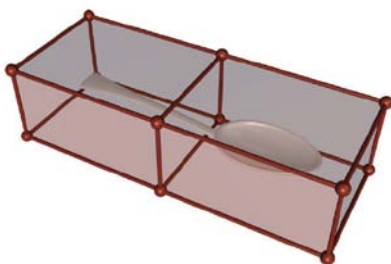
得到变形后点的位置

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \hat{P}_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$



空间自由变形

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l \hat{P}_{ijk} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) B_{k,l}(w)$$



(3) Translational 曲面

假定两条曲线 $\mathbf{c}_1(u)$ 和 $\mathbf{c}_2(v)$ 相交于一点 $\mathbf{a} = \mathbf{c}_1(0) = \mathbf{c}_2(0)$,

将一条曲线沿另一条曲线平行移动, 可得曲面

$$\mathbf{t}(u, v) = \mathbf{c}_1(u) + \mathbf{c}_2(v) - \mathbf{a}$$

容易验证:

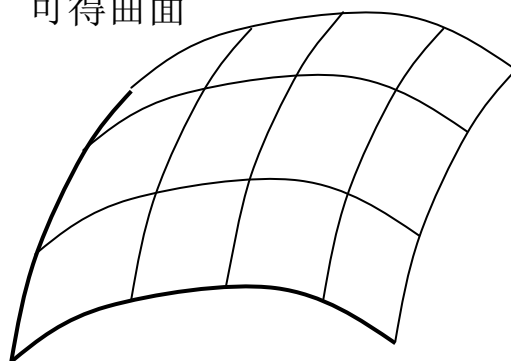
$$\frac{\partial^2 \mathbf{t}(u, v)}{\partial u \partial v} \equiv 0$$

凸组合曲面插值:

已知一张四边形曲面的四条边界曲线, 构造一张插值曲面

过四边形四角点分别构造过两条边界线的曲面 $\mathbf{t}_{ij}(u, v); i, j \in \{0, 1\}$

构造插值曲面



$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00}(u, v) & \mathbf{t}_{01}(u, v) \\ \mathbf{t}_{10}(u, v) & \mathbf{t}_{11}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

注：这种曲面也称为 Coons 曲面片。

(4) 旋转面

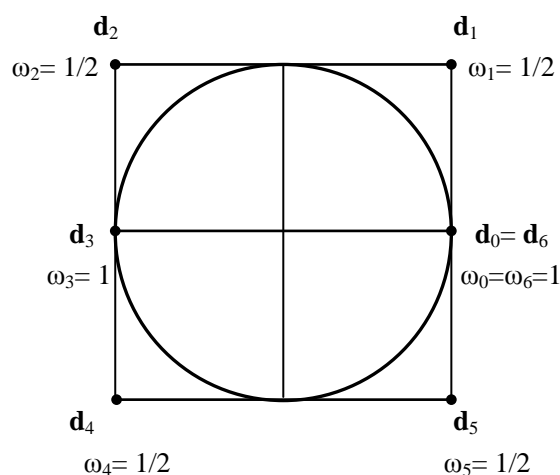
● 整圆的 NURBS 表示

节点向量：

$$U = [0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 1, 1, 1]$$

二次 NURBS 表示：

$$\mathbf{d}(u) = \frac{\sum_{i=0}^6 \omega_i \mathbf{d}_i N_{i,3}(u)}{\sum_{i=0}^6 \omega_i N_{i,3}(u)}$$



● 旋转面生成

假设在 xz 平面上有一条母线

$$\mathbf{c}(v) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_{0,j} \mathbf{d}_{0,j} N_{j,q}(v)}{\sum_{j=0}^n \omega_{0,j} N_{j,q}(v)}$$

由 $\mathbf{c}(v)$ 绕 z 轴旋转得到旋转曲面

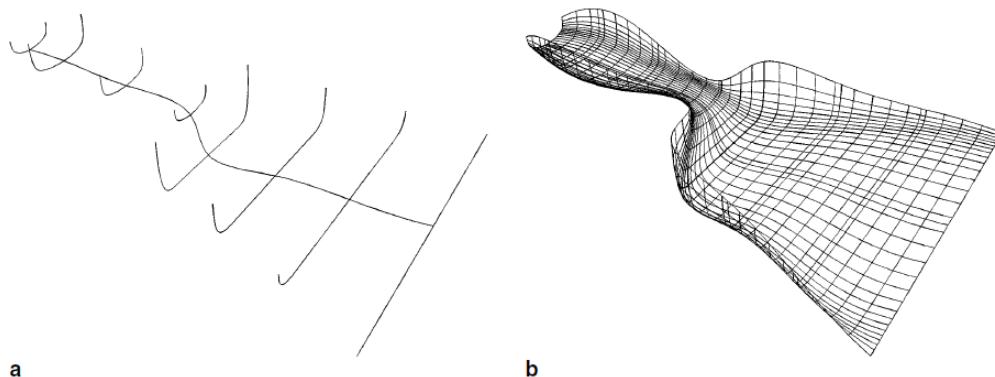
$$X(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^n \omega_{ij} \mathbf{d}_{ij} N_{i,3}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^n \omega_{ij} N_{i,3}(u) N_{j,q}(v)}$$

其中 \mathbf{d}_{ij} 由初始控制顶点 \mathbf{d}_{0j} 旋转生成圆得到的控制顶点

曲面权因子由如下公式计算

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \omega_{0j} & i = 0, 3, 6 \\ \frac{1}{2}\omega_{0j} & i = 1, 2, 4, 5 \end{cases}$$

(5) Skinning 曲面



问题：给定一组截面线，构造一张插值曲面。

输入一组截面线： $C_k(v)$; $k = 0, 1, \dots, K$

构造一张插值曲面 $S(u, v)$ ，使得 $S(u_k, v) = C_k(v)$; $k = 0, 1, \dots, K$

$$\text{设 } S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$$

$$C_k(v) = \sum_{j=0}^n Q_{kj} N_{j,q}(v); \quad k = 0, 1, \dots, K$$

根据曲面插值条件，有：

$$\begin{aligned} S(u_k, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} N_{i,p}(u_k) N_{j,q}(v) \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m P_{ij} N_{i,p}(u_k) \right) N_{j,q}(v) \equiv \sum_{j=0}^n Q_{kj} N_{j,q}(v) \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, K$$

$$\text{从而有 } \sum_{i=0}^m P_{ij} N_{i,p}(u_k) = Q_{kj}; \quad j = 0, 1, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, K$$

对任意 $j \in \{0, 1, \dots, n\}$,

控制顶点 $P_{ij}; 0 \leq i \leq m$ 也是一条插值点列 $Q_{kj}; k = 0, 1, \dots, K$ 的 B 样条曲线

得控制顶点。

算法:

Step1: 调整截面线, 使所有截面线定义于相同节点向量

Step2: 设定截面线对应参数 u_k ; $k = 0, 1, \dots, K$

Step3: 按列对截面线控制顶点进行插值, 得到 B 样条曲面控制顶点。

思考题:

1. 写出环面的 NURBS 表示。
2. 编程实现平面自由变形算法。
3. 编程实现 B 样条曲面插值算法。

§5. 曲线节点 B 样条曲面

(1) 问题的提出

为 $p \times q$ 阶 B 样条曲面的定义:

给定节点向量 $\{u_i\}_0^{m+p}$ 和 $\{v_j\}_0^{n+q}$, 分别得到基函数 $\{N_{i,p}(u)\}_0^m$ 和 $\{N_{j,q}(v)\}_0^n$,

定义 B 样条曲面

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v), \text{ 其中 } (u, v) \in [u_{p-1}, u_{m+1}] \times [v_{q-1}, v_{n+1}]$$

若采用重节点技术可在曲面上得到一条沿等参线的特征曲线。

问题: 如何在曲面上设计出非等参线的特征线? 若曲面的一侧边界线有尖锐特征, 而另一侧为光滑曲线, 如何实现二者之间的自然过渡?

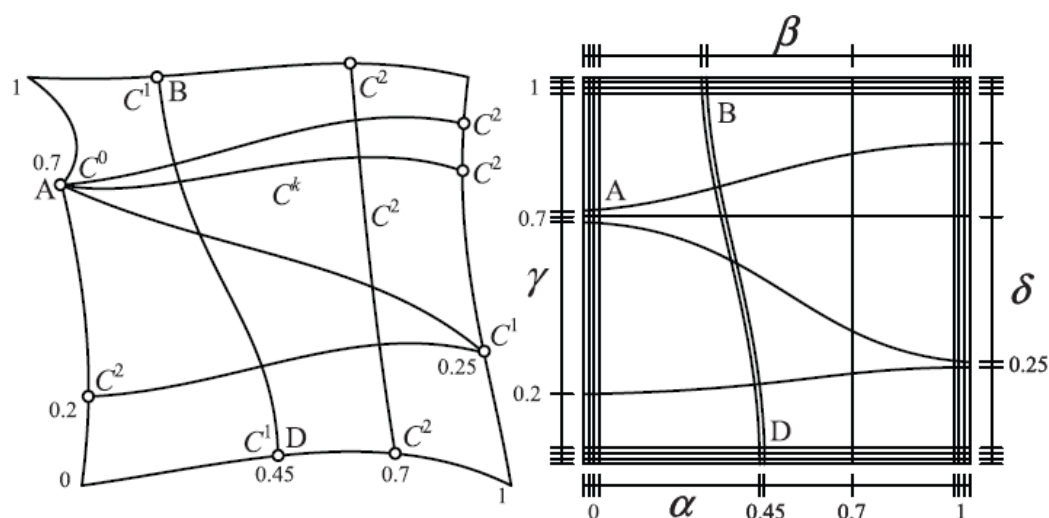
(2) 曲线节点技术

基本想法：在 u 或 v 方向上节点不再是常数而是 v 或 u 的函数，
 即有

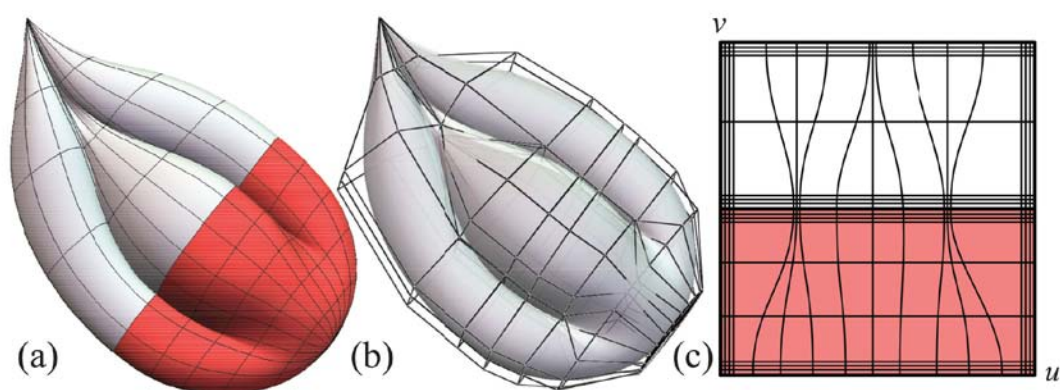
$$u_0 \leq u_1(v) \leq u_2(v) \leq \cdots \leq u_{m+p-1}(v) \leq u_{m+p}$$

$$v_0 \leq v_1(u) \leq v_2(u) \leq \cdots \leq v_{n+q-1}(u) \leq v_{n+q}$$

例如：



基于曲线节点向量定义的 B 样条分别记为 $\{N_{i,p}^v(u)\}_0^m$ 和 $\{N_{j,q}^u(v)\}_0^n$ ，其
 计算仍采用 deBoor-Cox 公式。



具有曲线节点向量的 B 样条曲面

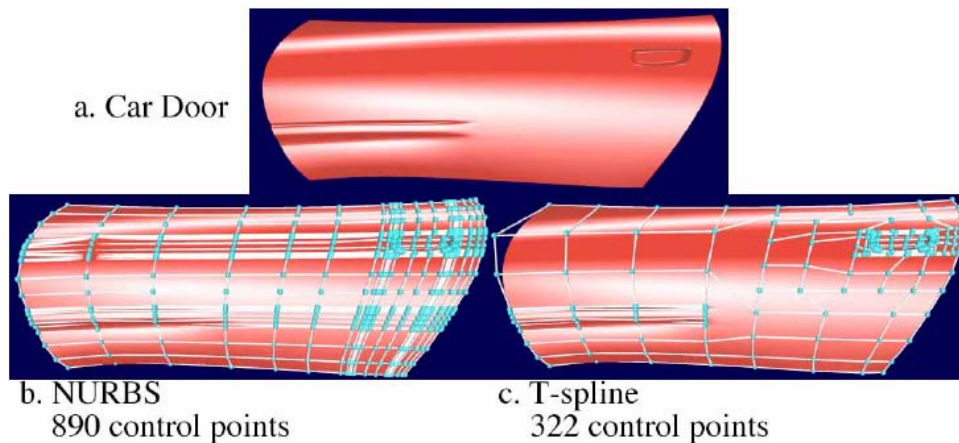
$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} N_{i,p}^v(u) N_{j,q}^u(v)$$

此曲面可用来生成非参数线特征线并能实现由尖锐点到光滑曲

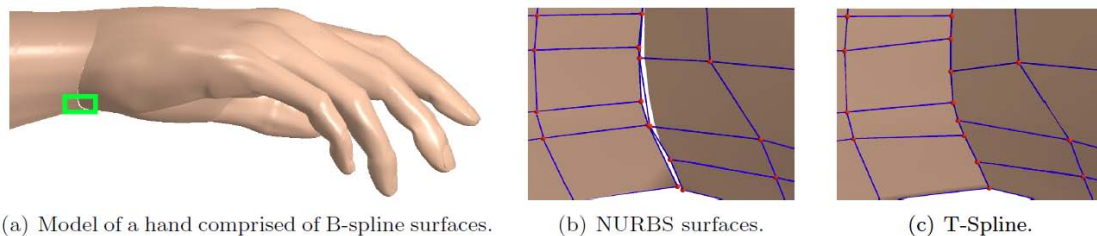
线的自然过渡。

§6. T 样条曲面

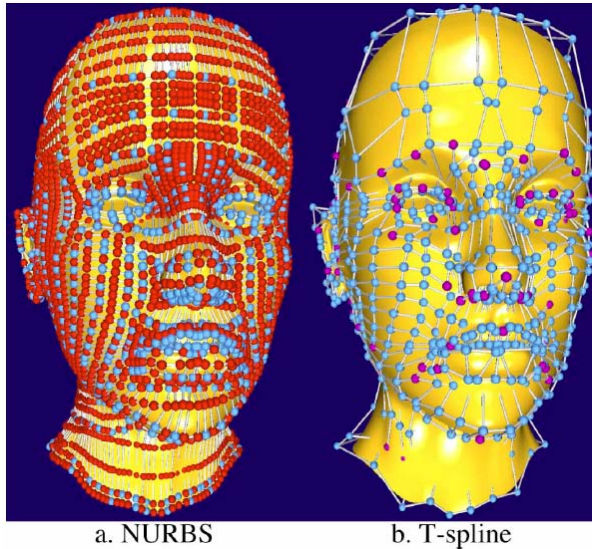
(3) 为什么引入 T 样条



- NURBS 曲面控制网格每个顶点有 4 条边相连，T 样条曲面控制顶点允许 3 条或 2 条连接边。
- 表示曲面时，NURBS 曲面许多控制顶点是多余的，而 T 样条曲面可有效去除多余控制顶点。
- T 样条曲面与 NURBS 曲面兼容，NURBS 曲面属于 T 样条的特例，而 T 样条曲面也可以转化为 NURBS 曲面。



T 样条曲面造型举例



NURBS 曲面控制顶点数 4712，其中红点为多余控制顶点

T-spline 曲面控制顶点数 1109，其中紫色点为 T 节点

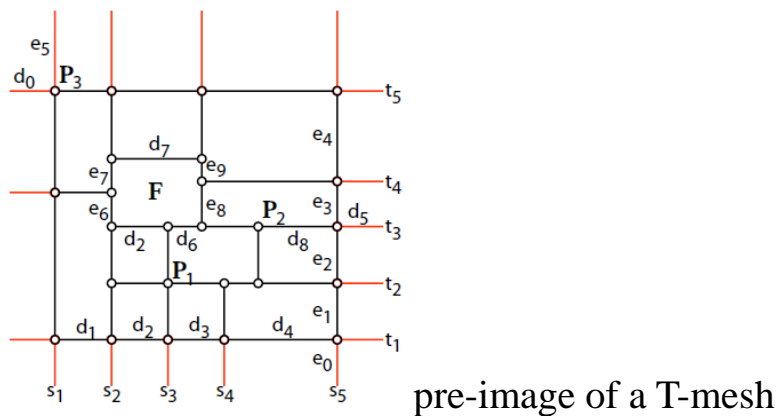
(4) T 样条的定义

● T 网格 pre-image 定义

T 网格 pre-image 由曲面节点区间定义，由一系列矩形面构成，在拓扑结构上等价于曲面控制网格。

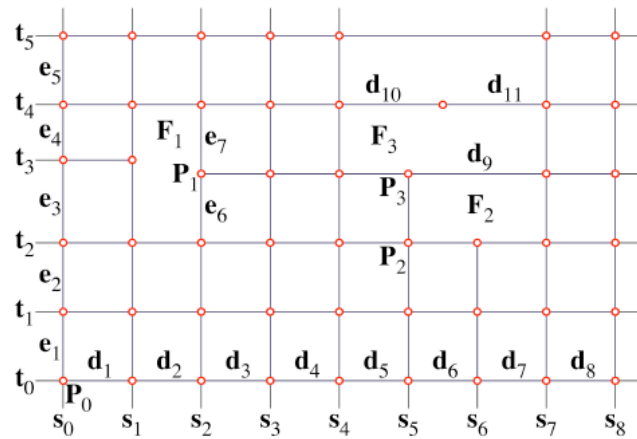
T 网格 pre-image 满足两条规则：

1. 矩形面对边上的节点区间长度之和相等。
2. 矩形面两条对边上的节点参数相同，则这两点连成一条边。



例：在矩形面 F 中， $d_2 + d_6 = d_7$ ， $e_6 + e_7 = e_8 + e_9$

● T 样条 blending function 定义



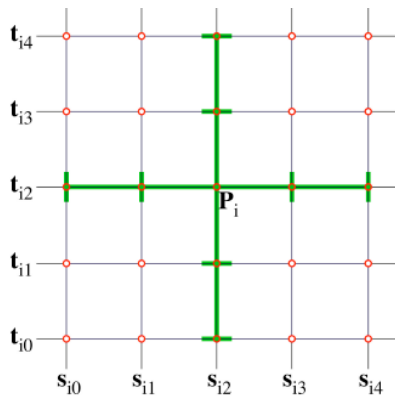
节点坐标系与节点参数：给定 P_0 点节点坐标(0,0)，则其它点节点坐标可由节点区间算出。

例： P_1 点节点坐标($d_1+d_2, e_1+e_2+e_6$)= (s_2, t_2+e_6)

P_2 点节点坐标(s_5, t_2)

P_3 点节点坐标(s_5, t_2+e_6)

节点处 blending function 的定义



$$B_i(s, t) = N[s_i](s)N[t_i](t)$$

其中： $s_i = [s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}]$, $t_i = [t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}]$

混合函数可由下式计算得到：

$$N[\mathbf{s}_i](s) = \begin{cases} \frac{(s-s_{i0})^3}{(s_{i1}-s_{i0})(s_{i3}-s_{i0})(s_{i2}-s_{i0})}, & s_{i0} < s \leq s_{i1} \\ \frac{(s-s_{i0})^2(s_{i2}-s)}{(s_{i2}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i0})(s_{i2}-s_{i0})} + \frac{(s_{i3}-s)(s-s_{i0})(s-s_{i1})}{(s_{i2}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i0})} + \\ \frac{(s_{i4}-s)(s-s_{i1})^2}{(s_{i2}-s_{i1})(s_{i4}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i1})}, & s_{i1} < s \leq s_{i2} \\ \frac{(s-s_{i0})(s_{i3}-s)^2}{(s_{i3}-s_{i2})(s_{i3}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i0})} + \frac{(s_{i4}-s)(s_{i3}-s)(s-s_{i1})}{(s_{i3}-s_{i2})(s_{i4}-s_{i1})(s_{i3}-s_{i1})} + \\ \frac{(s_{i4}-s)^2(s-s_{i2})}{(s_{i3}-s_{i2})(s_{i4}-s_{i2})(s_{i4}-s_{i1})}, & s_{i2} < s \leq s_{i3} \\ \frac{(s_{i4}-s)^3}{(s_{i4}-s_{i3})(s_{i4}-s_{i2})(s_{i4}-s_{i1})}, & s_{i3} < s \leq s_{i4} \\ 0, & s < s_{i0} \quad or \quad s > s_{i4} \end{cases}$$

节点向量确定原则：

格点 P_i 处节点向量 \mathbf{s}_i 与 \mathbf{t}_i 按如下方法确定

1. s_{i2}, t_{i2} 由 P_i 处节点坐标确定；
2. s_{i3}, s_{i4} 由直线 $R(\alpha) = (s_{i2} + \alpha, t_{i2})$ 与 s 边相交的前两个交点坐标确定；
3. 其它节点类似确定。

例： P_3 点处 blending function：

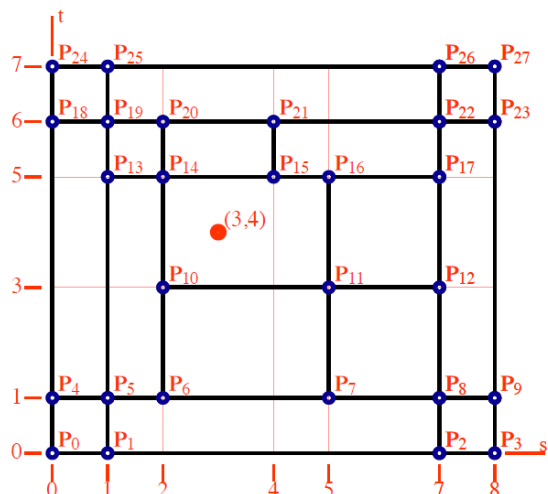
$$B_3(s, t) = N[s_3, s_4, s_5, s_7, s_8](s) N[t_1, t_2, t_2 + e_6, t_4, t_5](t)$$

● T 样条曲面定义

$$P(s, t) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i P_i B_i(s, t)}{\sum_{i=1}^n \omega_i B_i(s, t)}$$

若 $\sum_{i=1}^n \omega_i B_i(s, t) \equiv 1$ ，称为 standard T 样条曲面。

例： T 样条曲面上点的计算



$$P(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^{27} \omega_i P_i B_i(s, t)}{\sum_{i=0}^{27} \omega_i B_i(s, t)}$$

为计算点 $P(3,4)$ ，需计算

$$B_i(3,4) = N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](3) N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](4), \quad i = 0, 1, \dots, 27$$

$$B_{10}(3,4) = N[0, 1, 2, 5, 7](3) N[0, 1, 3, 5, 6](4)$$

$$B_{15}(3,4) = N[1, 2, 4, 5, 7](3) N[1, 3, 5, 6, 7](4)$$

$$B_{00}(3,4) = N[s_0, s_1, 0, 1, 2](3) N[t_0, t_1, 0, 1, 6](4)$$

$$B_{27}(3,4) = N[1, 7, 8, s_2, s_3](3) N[1, 6, 7, t_2, t_3](4) \dots\dots$$

将混合函数值求出后，便可计算曲面上点的坐标。

(5) T 样条节点插入算法

● T 样条节点插入目的与作用：

1. 增加控制顶点从而增加自由度；
2. 实现 T 样条曲面向 B 样条或 Bézier 曲面片的转换。

● 混合函数加细(blending function refinement)

$$\text{设 } \mathbf{s} = [s_0, s_1, s_2, s_3, s_4], \quad N(s) = N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s)$$

插入节点参数 k ，得到节点向量 $\tilde{\mathbf{s}}$

1. 若 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, k, s_1, s_2, s_3, s_4]$ ，则

$$N(s) = c_0 N[s_0, k, s_1, s_2, s_3](s) + d_0 N[k, s_1, s_2, s_3, s_4](s)$$

$$\text{其中 } c_0 = \frac{k - s_0}{s_3 - s_0}, \quad d_0 = 1$$

2. 若 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, k, s_2, s_3, s_4]$ ，则

$$N(s) = c_1 N[s_0, s_1, k, s_2, s_3](s) + d_1 N[s_1, k, s_2, s_3, s_4](s)$$

$$\text{其中 } c_1 = \frac{k - s_0}{s_3 - s_0}, \quad d_1 = \frac{s_4 - k}{s_4 - s_1}$$

3. 若 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, s_2, k, s_3, s_4]$ ，则

$$N(s) = c_2 N[s_0, s_1, s_2, k, s_3](s) + d_2 N[s_1, s_2, k, s_3, s_4](s)$$

$$\text{其中 } c_2 = \frac{k - s_0}{s_3 - s_0}, \quad d_2 = \frac{s_4 - k}{s_4 - s_1}$$

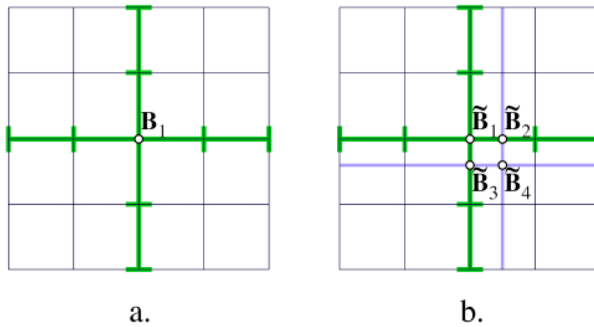
4. 若 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, s_2, s_3, k, s_4]$ ，则

$$N(s) = c_3 N[s_0, s_1, s_2, s_3, k](s) + d_3 N[s_1, s_2, s_3, k, s_4](s)$$

$$\text{其中 } c_3 = 1, \quad d_3 = \frac{s_4 - k}{s_4 - s_1}$$

对 t 方向也可做类似加细，得到加细后的混合函数。

例：如下图所示，对 $B_1(s, t)$ 进行加细，



$$B_1(s, t) = N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s) N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t)$$

插入节点 $\tilde{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, s_2, k_s, s_3, s_4]$ ，得到

$$N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s) = c_s N[s_0, s_1, s_2, k_s, s_3](s) + d_s N[s_1, s_2, k_s, s_3, s_4](s)$$

插入节点 $\tilde{\mathbf{t}} = [t_0, t_1, k_t, t_2, t_3, t_4]$ ，得到

$$N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t) = c_t N[t_0, t_1, k_t, t_2, t_3](t) + d_t N[t_1, k_t, t_2, t_3, t_4](t)$$

得到节点加细后的 T 样条基函数

$$B_1(s, t) = c_1^1 \tilde{B}_1(s, t) + c_1^2 \tilde{B}_2(s, t) + c_1^3 \tilde{B}_3(s, t) + c_1^4 \tilde{B}_4(s, t)$$

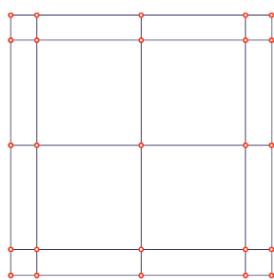
● T 样条空间

定义： 在相同拓扑网格，节点区间和节点坐标系下的 T 样条的全体。

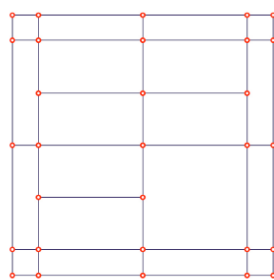
命题： 一个 T 样条空间是其加细 T 样条空间的子集。

或者，T 样条空间与其加细 T 样条空间形成嵌套关系。

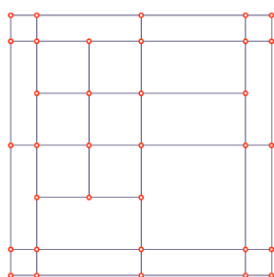
例：下图中 $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n$



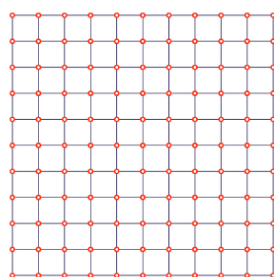
a. S_1



b. S_2



c. S_3



d. S_n

$$\text{设 } P(s,t) \in S_1, \text{ 且 } P(s,t) = [B_1(s,t) \quad \dots \quad B_n(s,t)] \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 中 } P(s,t) = \tilde{P}(s,t) = [\tilde{B}_1(s,t) \quad \dots \quad \tilde{B}_m(s,t)] \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_m \end{bmatrix}$$

$$\text{由于 } S_1 \subset S_2, \text{ 有 } B_i(s,t) = \sum_{j=1}^m c_i^j \tilde{B}_j(s,t)$$

$$\text{由 } P(s,t) = \tilde{P}(s,t), \text{ 易知 } \tilde{P}_j = \sum_{i=1}^n c_i^j P_i$$

$$\text{记 } M_{1,2} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^m & c_2^m & \dots & c_n^m \end{pmatrix}, \text{ 则有 } \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_m \end{bmatrix} = M_{1,2} \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

● 局部加细算法

局部加细指对一张 T 样条曲面加入新的控制顶点(及相应节点)。

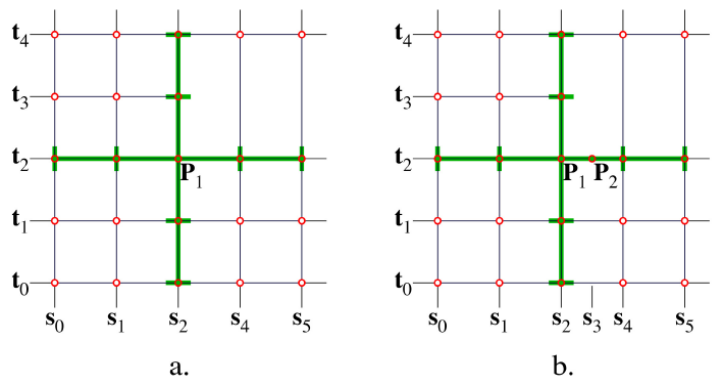
算法包括两部分：

1. 拓扑加细：对 T 网格(拓扑网格)需做节点插入(从而修改 T 网格)；
2. 几何加细：节点插入后，重新计算混合函数。由节点插入前后混合函数之间的转换矩阵，并根据老控制顶点算出新控制顶点。

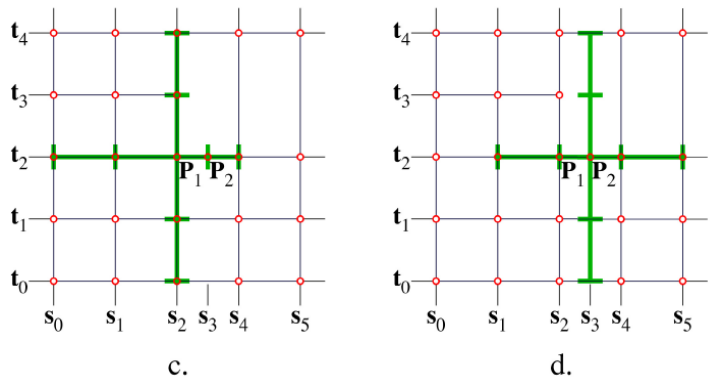
问题：一次节点插入可引起(多个)混合函数加细，加细混合函数的节点向量在当前 T 网格上根据**节点向量确定原则**不一定存在。

解决策略：对找不到节点向量的混合函数再次插入新的节点，相应地，控制网格也需要加入新控制顶点。

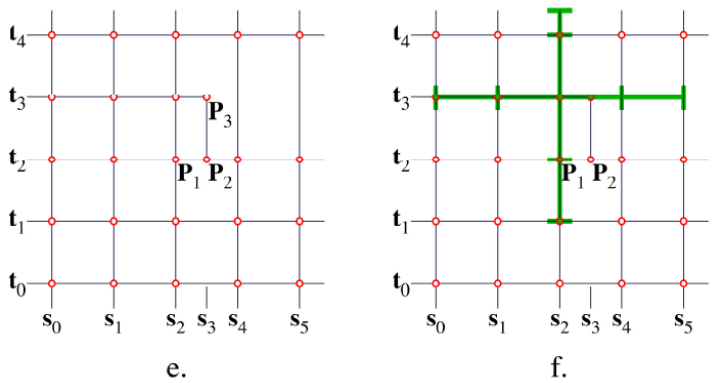
拓扑加细举例：



插入点 P_2 ，节点中心在 (s_1, t_2) ， (s_2, t_2) ， (s_4, t_2) ， (s_5, t_2) 的混合函数需要加细。其中节点中心在 (s_1, t_2) ， (s_4, t_2) ， (s_5, t_2) 的混合函数加细后在原 T 网格上可以找到节点向量。



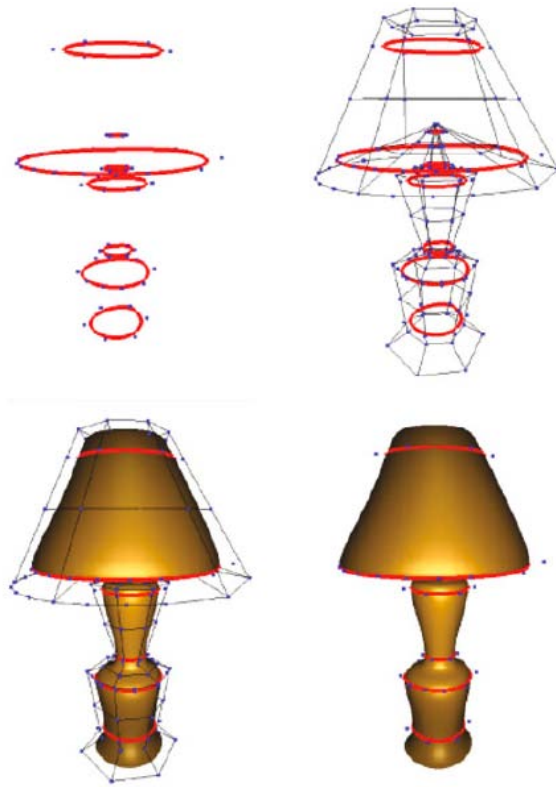
节点中心在 (s_2, t_2) 的混合函数可以分解成节点在 P_1 ， P_2 处混合函数的组合，而 P_2 处混合函数节点向量在 T 网格上缺少定义。



T 网格中插入 P_3 点(控制网格对应加入一新点)，调整中心在 (s_2, t_3)

的节点向量。

- T 样条曲面蒙皮(skinning)



Nasri, et al.2012

参考文献：

1. Thomas W. Sederberg, Jianmin Zheng, Almaz Bakenov, and Ahmad Nasri. **T-Splines and T-NURCCs**. ACM Transactions on Graphics, 22(3):477–484, 2003.
2. Thomas W. Sederberg, David L. Cardon, G. Thomas Finnigan, Nicholas S. North, Jianmin Zheng, and Tom Lyche. **T-spline simplification and local refinement**. ACM Transactions on Graphics, 23(3), 2004.
3. X Yang, and J Zheng. **Approximate T-spline surface skinning**. CAD 44(12): 1269-1276, 2012.
4. A. Nasri, K. Sinno, J. Zheng, **Local T-spline surface skinning**, The Visual Computer 28 (2012): 787-797.
5. X Li, et al. **On Linear Independence of T-splines**. CAGD 29(1): 63-76, 2012.
6. H. Kang, F. Chen and J. Chen, **Modified T-splines**. CAGD 30: 827-843, 2013.
7. Min-Jae Oh, Myung-II Roh, Tae-wan Kim. **Local T-spline surface skinning with shape preservation**. CAD 104(2018) 15-26.