

## 第十四章 矩阵权有理曲线曲面

### §1. 定义与基本性质

#### (a) 实数权有理曲线曲面

$$R(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i \phi_i(\xi)}{\sum_{i=0}^n \omega_i \phi_i(\xi)}, \quad \xi \in \Xi,$$

权因子  $\omega_i \in R^+$ ,

控制顶点  $P_i \in R^d$ ,

基函数  $\phi_i(\xi) \geq 0$

#### (b) 矩阵权有理曲线曲面

##### ● 定义

$$Q(\xi) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i \phi_i(\xi) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i \phi_i(\xi), \quad \xi \in \Xi,$$

权矩阵  $M_i \in R^{d \times d}$ ,

控制顶点  $P_i \in R^d$ ,

基函数  $\phi_i(\xi) \geq 0$

##### ● 基于点+法向量控制的有理曲线曲面

已知点列  $P_i \in R^d$ ,  $i=0,1,\dots,n$  以及对应顶点处的单位法向量

$\mathbf{n}_i \in R^d$ ,  $i=0,1,\dots,n$ , 构造如下目标函数

$$F(Q(\xi)) = \sum_{i=0}^n \omega_i \phi_i(\xi) (Q(\xi) - P_i)^2 + \sum_{i=0}^n \omega_i \mu_i \phi_i(\xi) [(Q(\xi) - P_i) \cdot \mathbf{n}_i]^2$$

由  $F(Q(\xi)) = \min$  或  $\frac{\partial F(Q(\xi))}{\partial Q(\xi)} = 0$  得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F(Q(\xi))}{\partial Q(\xi)} = \sum_{i=0}^n \omega_i \phi_i(\xi) (Q(\xi) - P_i) + \sum_{i=0}^n \omega_i \mu_i \phi_i(\xi) [(Q(\xi) - P_i) \cdot \mathbf{n}_i] = 0$$

解此方程，得到

$$Q(\xi) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i \phi_i(\xi) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i \phi_i(\xi)$$

其中  $M_i = \omega_i (I + \mu_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

特别地，当  $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ ，则矩阵权有理曲线曲面退化成实数权有理曲线曲面。

**问题：**矩阵函数  $\sum_{i=0}^n M_i \phi_i(\xi)$  什么情况下一定非奇异？

● 有效(valid)矩阵权有理曲线曲面

**定理：**假设矩阵  $M_i = \omega_i (I + \mu_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T)$ ,  $\omega_i > 0$ ,  $\mu_i > -1$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ 。

若系数  $s_i$  满足  $s_i \geq 0$  和  $\sum_{i=0}^n s_i > 0$ ，则矩阵  $M_s = \sum_{i=0}^n s_i M_i$  是非奇异矩阵。

**证明：**由于矩阵  $M_s$  是实对称矩阵，则该矩阵存在实特征值

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  和对应特征向量  $v_1, v_2, \dots, v_d$ 。从而有

$$M_s = (v_1, v_2, \dots, v_d)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} (v_1, v_2, \dots, v_d) \text{ 和 } \det(M_s) = \prod_{i=1}^d \lambda_i。$$

设  $\lambda$  是矩阵  $M_s$  任一特征值而  $v$  是其对应特征向量，令  $\theta_i = \omega_i s_i$ ，

则有

$$\lambda v = M_s v = \left[ \sum_{i=0}^n \theta_i (I + \mu_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T) \right] v = \sum_{i=0}^n \theta_i (v + \mu_i a_i \mathbf{n}_i)$$

其中  $a_i = \mathbf{n}_i^T v$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

将上式两边点乘向量  $v$  可得

$$\lambda = \sum_{i=0}^n \theta_i (1 + \mu_i a_i^2)$$

由于  $|a_i| = |\mathbf{n}_i^T \mathbf{v}| \leq 1$  和  $\mu_i > -1$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 所以  $\lambda > 0$ 。

进一步得到  $\det(M_s) = \prod_{i=1}^d \lambda_i > 0$ 。证毕。

根据该定理, 当基函数  $\phi_i(\xi) \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 则对应的矩阵权有

理曲线曲面  $Q(\xi) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i \phi_i(\xi) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i \phi_i(\xi)$  是有效(定义)的。

### (c) 基本性质

**几何不变性(Geometric invariance):** 矩阵权有理曲线曲面的形状不随其控制顶点的平移或均匀缩放而改变。若权矩阵由法向量定义, 则矩阵权有理曲线曲面的形状不随坐标系的旋转而改变。

$$Q(\xi) + Q_0 = \left[ \sum_{i=0}^n M_i \phi_i(\xi) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i (P_i + Q_0) \phi_i(\xi)$$

$$sQ(\xi) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i \phi_i(\xi) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i (sP_i) \phi_i(\xi)$$

$$AQ(\xi) = \left[ \sum_{i=0}^n \bar{M}_i \phi_i(\xi) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \bar{M}_i A P_i \phi_i(\xi), \text{ 其中 } \bar{M}_i = \omega_i [I + \mu_i (\mathbf{A} \mathbf{n}_i)(\mathbf{A} \mathbf{n}_i)^T]$$

**权因子作用(effects of weights):**

已知矩阵权有理曲线曲面  $Q(\xi) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i \phi_i(\xi) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i \phi_i(\xi)$ , 其中

$M_i = \omega_i (I + \mu_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T)$ 。有下列结论:

a) 若  $\omega_{i_0} \rightarrow \infty$  时, 则  $Q(\xi) \rightarrow P_{i_0}$ ;

b) 若  $\mu_{i_0} \rightarrow \infty$ , 则  $Q(\xi)$  将趋于  $P_{i_0}$  处的切线或切平面。

## §2. 矩阵权有理 Bézier 曲线

(a)  $n$  次矩阵权有理 Bézier 曲线

$$Q(t) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i B_{i,n}(t) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i B_{i,n}(t)$$

控制顶点:  $P_i, \quad i=0,1,\dots,n$

权矩阵:  $M_i = \omega_i (I + \mu_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T), \quad i=0,1,\dots,n$

Bernstein 基函数:  $B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$

当  $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$  时,

$$Q(t) = \mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)}$$

齐次坐标表示(在  $R^{(d+1) \times d}$ ):

记  $R_i = (M_i P_i, M_i), \quad i=0,1,\dots,n$ , 可得齐次坐标表示的 Bézier 曲线

$$R(t) = \sum_{i=0}^n R_i B_{i,n}(t)$$

(b) 性质与算法

1. 端点性质

$$Q(0) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i B_{i,n}(0) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i B_{i,n}(0) = M_0^{-1} M_0 P_0 = P_0$$

同理,  $Q(1) = P_n$

2. 与有理 Bézier 曲线之间的转化

$R^d$  空间中的  $n$  次矩阵权有理 Bézier 曲线可以转换为  $n \times d$  次有理 Bézier 曲线。

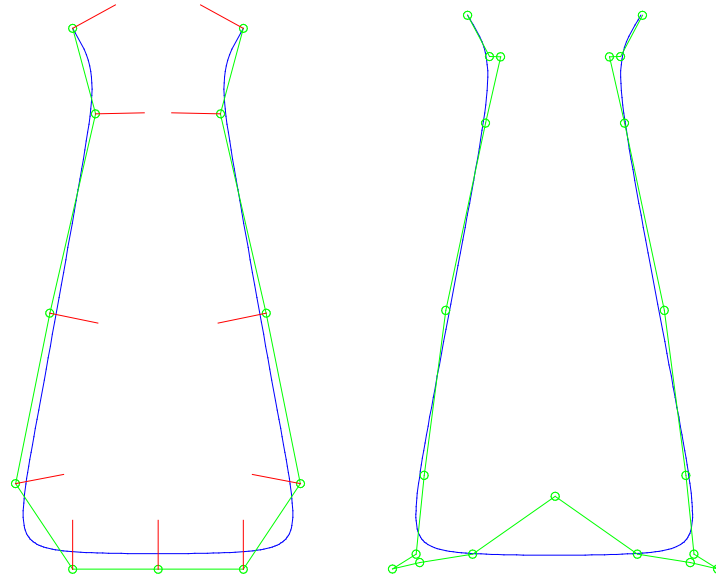
证明: 记  $M(t) = \sum_{i=0}^n M_i B_{i,n}(t)$ , 则有  $M^{-1}(t) = \frac{M^*(t)}{|M(t)|}$ , 其中  $M^*(t)$  表示伴

随矩阵,  $|M(t)|$  表示矩阵  $M(t)$  的行列式。此时, 原矩阵权有理

Bézier 曲线可表达成

$$Q(t) = \frac{M^*(t) \sum_{i=0}^n M_i P_i B_{i,n}(t)}{|M(t)|}$$

由行列式与伴随矩阵的计算得知，上式中分子分母均为  $n \times d$  次多项式函数，重新整理后可表达为  $n \times d$  次有理 Bézier 曲线。



(a) 矩阵权有理 Bézier 曲线; (b) 实数权有理 Bézier 曲线

### 3. 求值

矩阵权有理 Bézier 曲线的求值可以分子分母分别求值，也可以采用矩阵权有理有理 de Castljau 算法：

$$P_i^r(t) = \begin{cases} P_i & r=0 \\ [M_i^r(t)]^{-1} [(1-t)M_i^{r-1}(t)P_i^{r-1}(t) + t\omega_{i+1}^{r-1}(t)P_{i+1}^{r-1}(t)] & r=1,2,\dots,n \end{cases} \quad i=0,1,\dots,n-r$$

$$M_i^r(t) = \begin{cases} M_i & r=0 \\ (1-t)M_i^{r-1}(t) + tM_{i+1}^{r-1}(t) & r=1,2,\dots,n \end{cases}$$

求得曲线上点  $Q(t) = P_0^n(t)$ 。

注：与传统 de Castljau 算法不同，曲线上点不再由割角得到。

### 4. 升阶

将  $n$  次矩阵权有理 Bézier 曲线升阶为  $n+1$  次，结果如下：

$$\begin{aligned} Q(t) &= \left[ \sum_{i=0}^n M_i B_{i,n}(t) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i B_{i,n}(t) \\ &= \left[ \sum_{i=0}^{n+1} \bar{M}_i B_{i,n+1}(t) \right]^{-1} \sum_{i=0}^{n+1} \bar{M}_i \bar{P}_i B_{i,n+1}(t) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \bar{M}_i = \frac{i}{n+1} M_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) M_i$$

$$\bar{P}_i = \bar{M}_i^{-1} \left[ \frac{i}{n+1} M_{i-1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) M_i P_i \right], \quad i = 0, 1, \dots, n+1$$

同样地，该升阶过程不是割角。

注：矩阵权 Bézier 曲线的凸包一般不是其控制多边形的凸包。

### §3. 矩阵权 NURBS 曲线(matrix weighted NURBS curves)

#### (a) 定义

给定：节点分割  $\pi_n^k = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$ ,

控制顶点  $\{P_i\}_{i=0}^n$ ,

权矩阵  $\{M_i\}_{i=0}^n$

定义  $k$  阶矩阵权 NURBS 曲线

$$Q(t) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i N_{i,k}(t) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i N_{i,k}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$$

若  $M_i = \omega_i D$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 则矩阵权 NURBS 退化为有理 B 样条

曲线  $P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}$ 。若  $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_n$ , 退化为  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$ 。

#### (b) 性质与算法

1. 连续阶：  $k$  阶 NURBS 曲线在  $p$  重节点处具有  $k-1-p$  阶连续导数。

2. 局部性质： 曲线  $Q(t) = \left[ \sum_{i=0}^n M_i N_{i,k}(t) \right]^{-1} \sum_{i=0}^n M_i P_i N_{i,k}(t)$  的控制顶点  $P_i$  或权矩阵  $M_i$  仅影响定义在区间  $[t_i, t_{i+k})$ ； 当  $t \in [t_l, t_{l+1})$ ， 则曲线可简化为  $Q(t) = \left[ \sum_{i=l-k+1}^l M_i N_{i,k}(t) \right]^{-1} \sum_{i=l-k+1}^l M_i P_i N_{i,k}(t)$ 。

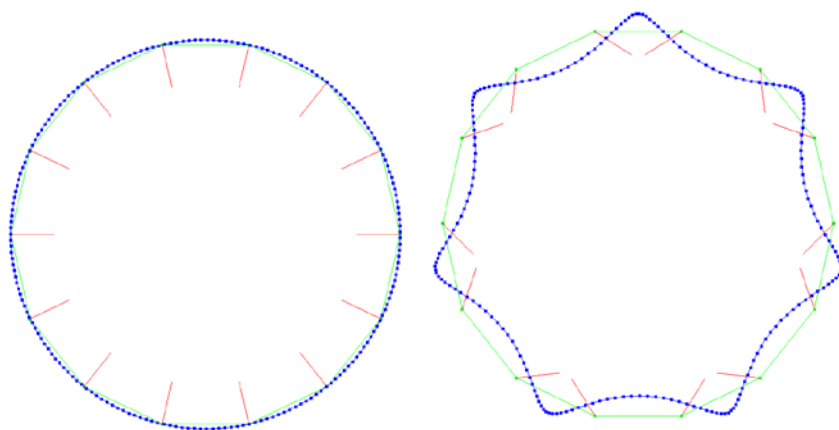
3. 转化为 NURBS 曲线：  $R^d$  空间中的  $k$  阶矩阵权 NURBS 曲线可以转换为  $d(k-1)+1$  阶 NURBS 曲线。

4. 插值性： 设整数  $k > 2$  并令  $l = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$ ， 记  $\lambda_{q \pm j} = N_{q \pm j, k} \left( \frac{t_q + t_{q+k}}{2} \right)$ ，

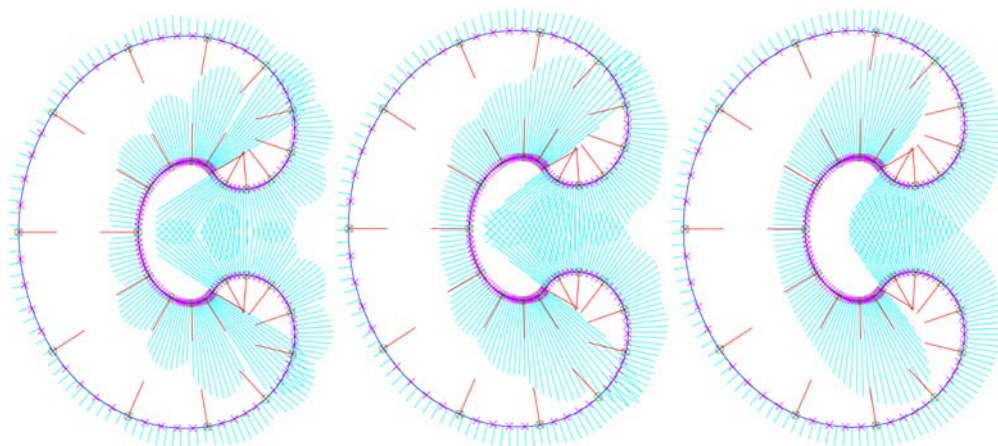
$j=1, 2, \dots, l$  并计算  $\mu = \frac{\sum_{|j|=1}^l \lambda_{q+j} \mathbf{n}_q^T (P_q - P_{q+j})}{\sum_{|j|=1}^l \lambda_{q+j} \mathbf{n}_q^T \mathbf{n}_{q+j} \mathbf{n}_{q+j}^T (P_{q+j} - P_q)}$ 。 记过点  $P_q$  方向为

$\mathbf{n}_q$  的直线为  $L$ 。 假设点  $P_{q \pm j}$  和法向  $\mathbf{n}_{q \pm j}$ ，  $j=1, 2, \dots, l$  对称地分布于直线  $L$  两侧并取  $\mu_{q \pm j} = \mu$ ，  $j=1, 2, \dots, l$ ， 则以  $M_i = I + \mu_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T$  为权的

均匀矩阵权有理 B 样条曲线满足  $Q \left( \frac{t_q + t_{q+k}}{2} \right) = P_q$ 。



矩阵权 NURBS 曲线

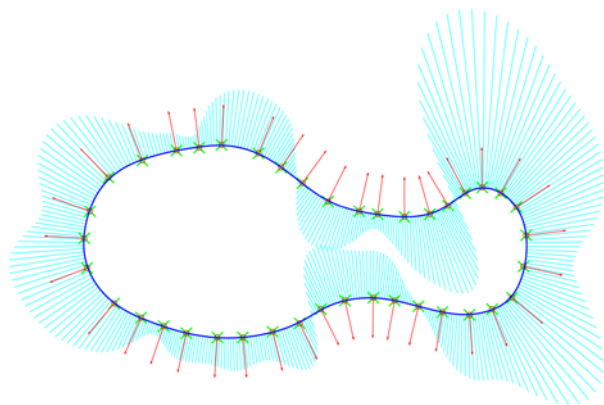


矩阵权 NURBS 曲线重建(1 次, 3 次, 10 次)

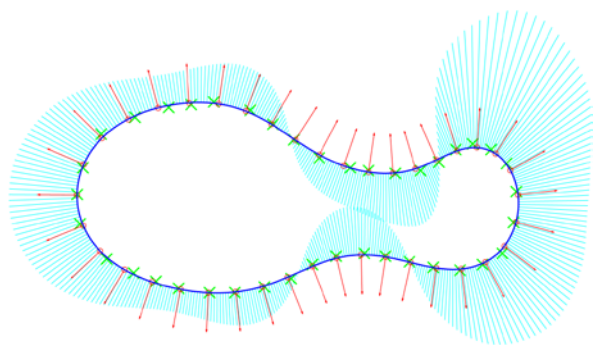
(c) 矩阵权 NURBS 曲线拟合与光顺

基本算法步骤:

- 1) 由初始点和法向(切向)构造矩阵权 NURBS 曲线;
- 2) 在节点处采样新的数据点并重新计算法向(切向);
- 3) 由采样数据重新构造新的矩阵权 NURBS 曲线;
- 4) 迭代以上步骤, 直到得到光顺曲线。

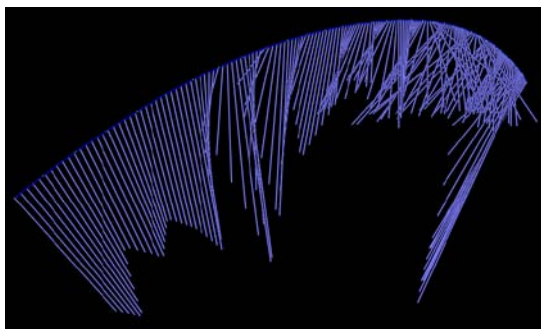


初始拟合曲线

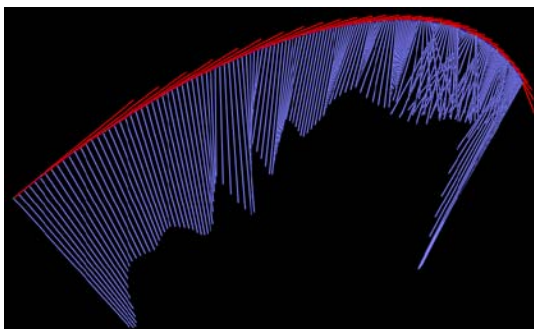


迭代 10 次结果

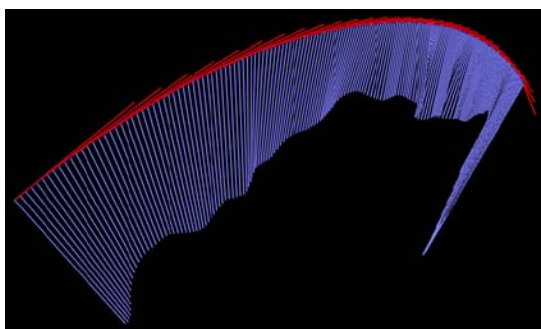




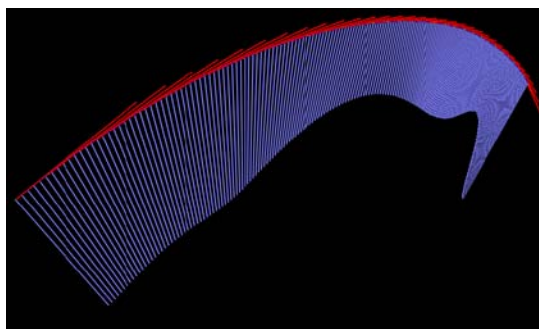
3 次 B 样条拟合



初始矩阵权 NURBS 曲线



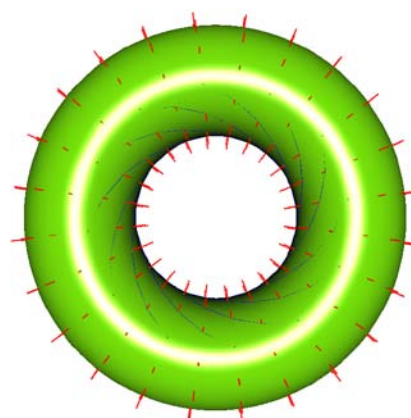
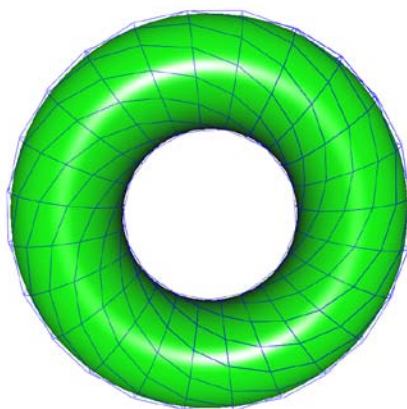
迭代 2 次结果



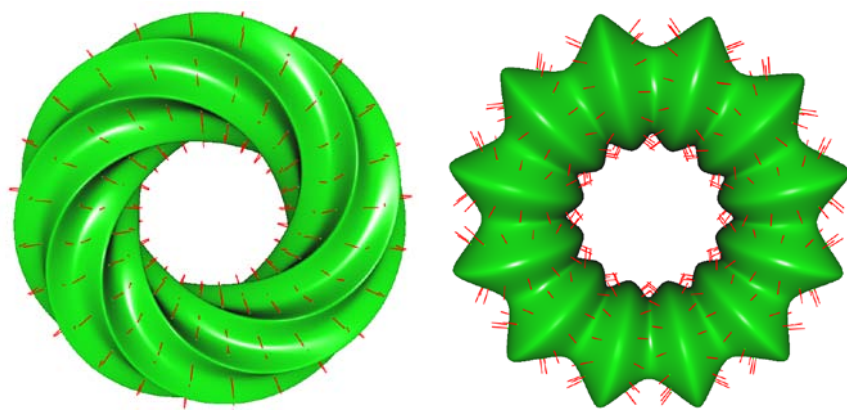
迭代 20 次结果

#### §4. 矩阵权有理曲面

##### (a) 矩阵权有理参数曲面

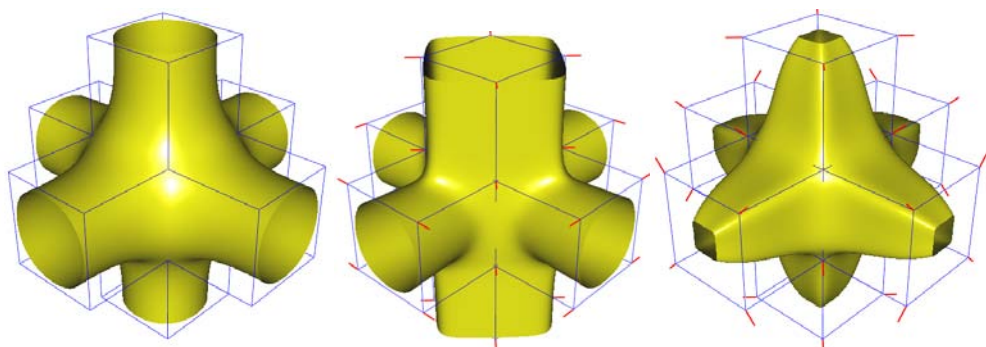


B 样条曲面与矩阵权 NURBS 曲面

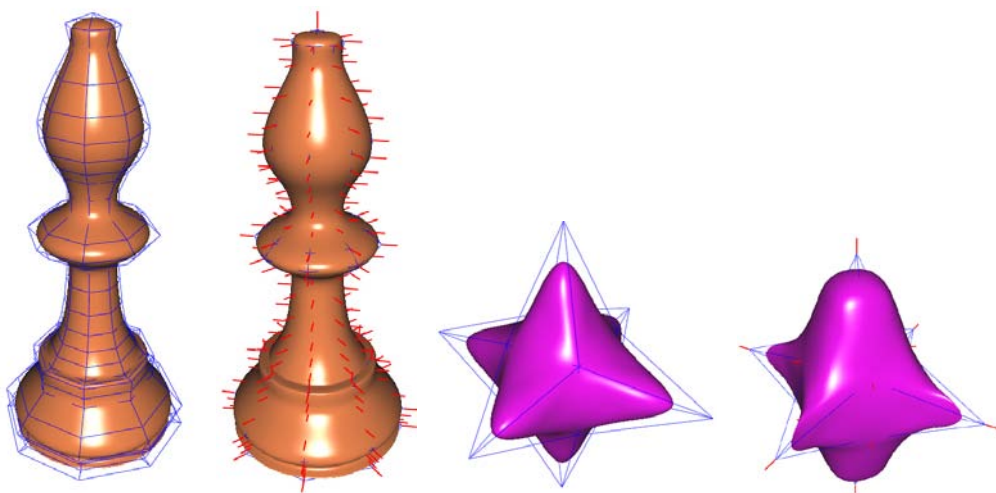


矩阵权 NURBS 曲面

(b) 矩阵权有理细分曲面

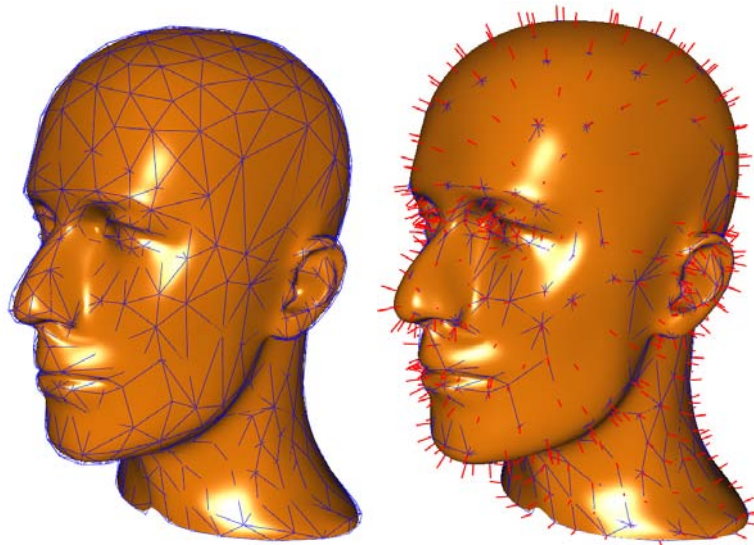


Catmull-Clark 细分与矩阵权有理 C-C 细分

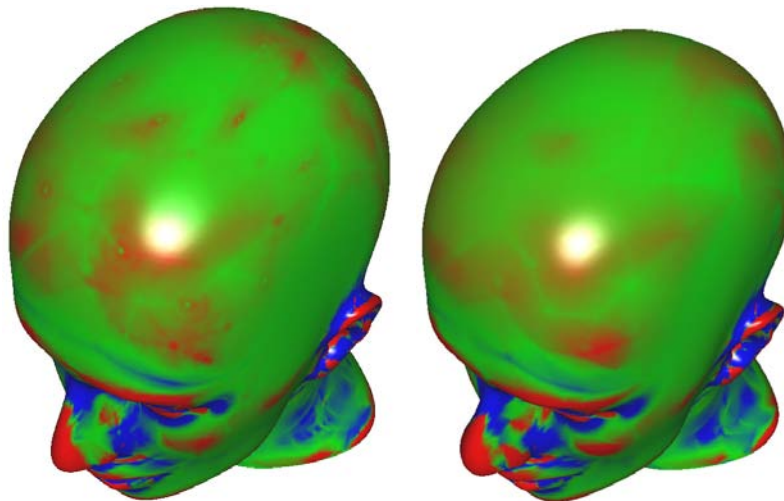


矩阵权有理 C-C 细分

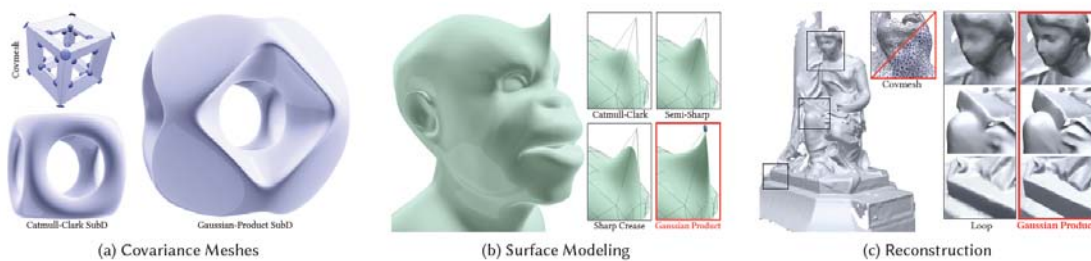
矩阵权有理 Doo-Sabin 细分



Loop 细分曲面      矩阵权有理 Loop 细分曲面



Loop 细分曲面      矩阵权有理 Loop 细分曲面



Ref:

1. Xunnian Yang. Matrix weighted rational curves and surfaces, CAGD 42(2016): 40-53.
2. Xunnian Yang. Fitting and fairing Hermite data by matrix weighted NURBS curves, CAD 102(2018):22-32.
3. Reinhold Preiner, Tamy Boubekeur, and Michael Wimmer. 2019. Gaussian-Product Subdivision Surfaces. ACM Trans. Graph. 38, 4, Article 35 (July 2019), 11 pages.