第十五章 隐式化、等距曲线与散乱数据造型

§1. 曲线曲面隐式化

- 概况

参数曲线曲面特点：

几何直观性强，显示和求交算法易设计

参数曲线曲面不足：

干涉判断、点线关系，交线的不封闭性

代数曲线曲面：$F(x,y)=0$， $F(x,y,z)=0$

- 隐式化与逆问题

隐式化：已知参数曲线 $x=\dfrac{x(t)}{w(t)}$，$y=\dfrac{y(t)}{w(t)}$，其中 $x(t)$，$y(t)$ 和 $w(t)$ 均为多项式，寻找表示同一条曲线的隐式方程 $F(x,y)=0$。

逆问题：已知曲线 $\left(\dfrac{x(t)}{w(t)},\dfrac{y(t)}{w(t)}\right)$ 上一点 (x,y)，求对应参数 t。

两条参数曲线交点可由隐式化和求逆算法得到。

- 参数曲线曲面的隐式化

(a) 两多项式结式

已知多项式 $f(t)=\sum_{i=0}^{m}a_it^i$， $g(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i$

设 $f(t)=(t-f_1)(t-f_2)\cdots(t-f_m)$， $g(t)=(t-g_1)(t-g_2)\cdots(t-g_n)$

则 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的结式为

$$R(f,g)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(f_i-g_j)$$

定理：多项式$f(t)$与$g(t)$有公共根当且仅当它们的结式等于 0.

例： $f(t)=t^2-7t+12=(t-3)(t-4)$

$g(t)=t^2-3t+2=(t-2)(t-1)$

则$R(f,g)=(3-2)(3-1)(4-2)(4-1)=12$

例： $f(t)=t^2-7t+12=(t-3)(t-4)$

$g(t)=t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$

则$R(f,g)=(3-2)(3-3)(4-2)(4-3)=0$

(b) Sylvester 结式

已知多项式$f(t)=\sum_{i=0}^{m}a_it^i$， $g(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i$

则结式可计算为

$$R_t(f,g)=\begin{vmatrix} a_m & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_m & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_m & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_n & \cdots & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_n & \cdots & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_n & \cdots & \cdots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m\text{行} \end{matrix} =0$$

定理：设$r(t)=(f(t),g(t))$是多项式$f(t)$与$g(t)$的最大公因式，则有

$\deg(r(t))=m+n-\operatorname{rank}(R_t(f(t),g(t)))$。

注：最大公因式$r(t)=(f(t),g(t))=\mathrm{GCD}(f(t),g(t))$

(c) 参数曲线隐式化

设有参数曲线$x=\dfrac{x(t)}{w(t)}$， $y=\dfrac{y(t)}{w(t)}$，其中

$x(t)=\sum_{i=0}^{n}a_it^i$， $y(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i$， $w(t)=\sum_{i=0}^{n}d_it^i$

构造多项式 $p(x,t)=w(t)x-x(t)$， $q(y,t)=w(t)y-y(t)$

易知 $p(x,t)=0$， $q(y,t)=0$ 仅当 x,y,t 满足原参数方程。

写成关于 t 的多项式，有

$$p(x,t)=(d_n x-a_n)t^n+(d_{n-1}x-a_{n-1})t^{n-1}+\cdots+(d_1 x-a_1)t+(d_0 x-a_0)$$

$$q(y,t)=(d_n y-b_n)t^n+(d_{n-1}y-b_{n-1})t^{n-1}+\cdots+(d_1 y-b_1)t+(d_0 y-b_0)$$

计算 $p(x,t)$， $q(y,t)$ 关于 t 的结式，有

$$R_t(p,q)=$$

$$\left.\begin{vmatrix}
d_n x-a_n & \cdots & \cdots & d_1 x-a_1 & d_0 x-a_0 & & & \\
 & d_n x-a_n & \cdots & \cdots & d_1 x-a_1 & d_0 x-a_0 & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & d_n x-a_n & \cdots & \cdots & d_1 x-a_1 & d_0 x-a_0 \\
d_n y-b_n & \cdots & \cdots & d_1 y-b_1 & d_0 y-b_0 & & & \\
 & d_n y-b_n & \cdots & \cdots & d_1 y-b_1 & d_0 y-b_0 & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & d_n y-b_n & \cdots & \cdots & d_1 y-b_1 & d_0 y-b_0
\end{vmatrix}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}n\text{行}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}n\text{行}\end{array}\right.=0$$

该方程即为参数曲线的隐式方程。

定理：任何平面 n 次有理参数曲线都可表示为平面 n 次代数曲线。

例： $x=t^2+1$， $y=t^2+2t-2$

有 $p(x,t)=-t^2+(x-1)$， $q(y,t)=-t^2-2t+(y+2)$

得隐式方程： $R(p,q)=-x^2+2xy-y^2+10x-6y-13=0$

(d) 参数曲面隐式化

设有参数曲面 $x=\dfrac{x(s,t)}{w(s,t)}$， $y=\dfrac{y(s,t)}{w(s,t)}$， $z=\dfrac{z(s,t)}{w(s,t)}$

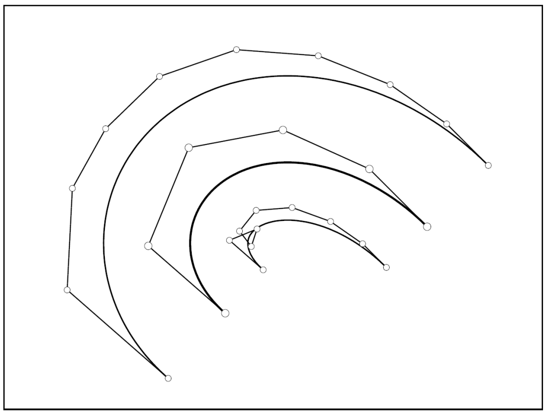
可得 $F(x,s,t)=0$， $G(y,s,t)=0$， $H(z,s,t)=0$

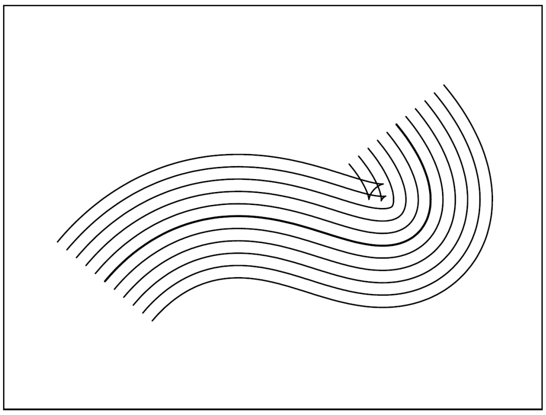
利用结式方法，由 $F(x,s,t)=0$ 和 $G(y,s,t)=0$ 可得 $R_1(x,y,s)=0$

由 $G(y,s,t)=0$ 和 $H(z,s,t)=0$ 可得 $R_2(y,z,s)=0$

再由 $R_1(x,y,s)=0$ 和 $R_2(y,z,s)=0$ 得到隐式曲面方程 $R(x,y,z)=0$。

§2. 等距曲线(offset curves)





- 定义

给定平面参数曲线 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$，它的距离为 d 的等距线定义为： $\mathbf{r}_d(t)=\mathbf{r}(t)+d\cdot\mathbf{n}(t)$，其中 $\mathbf{n}(t)=\dfrac{(y'(t),-x'(t))}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}$

这里 $\mathbf{r}(t)$ 称为母线， $\mathbf{n}(t)$ 为 $\mathbf{r}(t)$ 的单位法向量；d 为带符号的偏移量。

定理：对于平面 n 次多项式曲线 $\mathbf{r}(t)=(a(t),b(t))$，其距离为 d 的等距线方程为

$$f_d(x,y)=\mathrm{Res}_t(P(t,x,y),Q(t,x,y))=0$$

其中 $P(t,x,y)=(x-a(t))^2+(y-b(t))^2-d^2$，

$Q(t,x,y)=p(t)(x-a(t))+q(t)(y-b(t))$， $a'(t)=p(t)$， $b'(t)=q(t)$

Res_t 表示关于参数 t 求 Sylvester 结式。

- Pythagorean-hodograph 曲线(PH 曲线)

定义：对参数曲线$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$，如果存在一个多项式$\sigma(t)$使得$x'^2(t)+y'^2(t)=\sigma^2(t)$，则称$\mathbf{r}(t)$为 PH 曲线。

引理(Kubota)：三个实多项式$a(t)$，$b(t)$和$c(t)$满足$a^2(t)+b^2(t)=c^2(t)$当且仅当存在实多项式$u(t)$，$v(t)$和$w(t)$使得

$a(t)=w(t)\left(u^2(t)-v^2(t)\right)$，$b(t)=2w(t)u(t)v(t)$，$c(t)=w(t)\left(u^2(t)+v^2(t)\right)$

证明：充分性可通过将$a(t)$，$b(t)$和$c(t)$直接带入等式计算可得，下证必要性。

设$\omega(t)=\gcd\left(a(t),b(t),c(t)\right)$并考虑多项式

$$\tilde{a}(t)=\frac{a(t)}{w(t)},\quad \tilde{b}(t)=\frac{b(t)}{w(t)},\quad \tilde{c}(t)=\frac{c(t)}{w(t)}$$

则有$\tilde{a}^2(t)+\tilde{b}^2(t)=\tilde{c}^2(t)$成立。将该等式重写成

$$\tilde{b}^2(t)=\tilde{c}^2(t)-\tilde{a}^2(t)=\left(\tilde{c}(t)+\tilde{a}(t)\right)\left(\tilde{c}(t)-\tilde{a}(t)\right)$$

由于$\tilde{a}(t),\tilde{b}(t),\tilde{c}(t)$没有公共根，多项式$\tilde{c}(t)+\tilde{a}(t)$与$\tilde{c}(t)-\tilde{a}(t)$也没有公共根。从而$\tilde{b}(t)$的每一个根要么属于$\tilde{c}(t)+\tilde{a}(t)$要么属于$\tilde{c}(t)-\tilde{a}(t)$。故存在互质多项式$u(t)$和$v(t)$使得

$$\tilde{c}(t)+\tilde{a}(t)=2u^2(t)，\quad \tilde{c}(t)-\tilde{a}(t)=2v^2(t)$$

由此得到$\tilde{b}^2(t)=4u^2(t)v^2(t)$，进一步推导得到

$$\tilde{a}(t)=u^2(t)-v^2(t)，\quad \tilde{b}(t)=2u(t)v(t)，\quad \tilde{c}(t)=u^2(t)+v^2(t)$$

将上面三式分别乘以$w(t)$便得到所要结论。■

推论：PH 曲线可表示为：

$$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))=\left(\int w(t)\left(u^2(t)-v^2(t)\right)dt,\quad \int 2w(t)u(t)v(t)dt\right)$$

定理：PH 曲线的次数为 $\lambda+2\mu+1$，其中 $\lambda=\deg(w(t))$，$\mu=\max\{\deg(u(t)),\deg(v(t))\}$。

推论：n 次 PH 曲线最多有 n+3 个自由度，而 n 次 Bezier 曲线则有 2(n+1)个自由度。

证明：**假设**多项式 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的最大次数为 μ，这两个函数分别有 $\mu+1$ 个自由度。多项式 $w(t)$ 的次数为 λ，该多项式自由度为 λ(假设最大次数幂函数系数为 1)。积分又增加 2 个自由度。共有 $\lambda+2(\mu+1)+2=\lambda+2\mu+4=n+3$ 个自由度。■

注：为排除 PH 曲线为点或直线等平凡情形，约定 $u(t)$，$v(t)$，$w(t)$ 全不为零，而 $u(t)$ 和 $v(t)$ 不全为常数。

例：三次 PH 曲线

$\lambda=\deg(w(t))=0$，

$\mu=\max\{\deg(u(t)),\deg(v(t))\}=1$

可设 $w(t)=1$，$u(t)=u_0B_{0,1}(t)+u_1B_{1,1}(t)$，$v(t)=v_0B_{0,1}(t)+v_1B_{1,1}(t)$

代入积分表达式，可得三次 PH 曲线的 Bézier 表示

$$\mathbf{r}(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)$$

其中 $P_0=(x_0,y_0)$ 任取；$P_1=P_0+\left(u_0^2-v_0^2,2u_0v_0\right)/3$；

$P_2=P_1+\left(u_0u_1-v_0v_1,u_0v_1+u_1v_0\right)/3$；$P_3=P_2+\left(u_1^2-v_1^2,2u_1v_1\right)/3$

定理：设 $\mathbf{r}(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)$ 为平面三次 Bézier 曲线，$L_j\ (j=0,1,2)$ 为其控制多边形边长，θ_1 和 θ_2 分别为向量 P_1P_0 到 P_1P_2 的转角和 P_2P_1

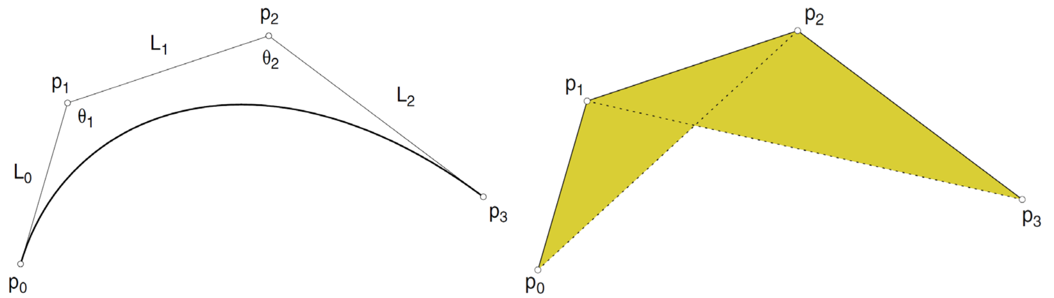
到P_2P_3的转角，则$\mathbf{r}(t)$为 PH 曲线的充要条件是

$$L_1=\sqrt{L_0L_2}\text{，}\quad \theta_1=\theta_2\text{。}$$

平面三次 PH 曲线曲率

$$k(t)=\frac{2(u_0v_1-u_1v_0)}{\left[(u_0(1-t)+u_1t)^2+(v_0(1-t)+v_1t)^2\right]^2}$$

易知平面三次 PH 曲线没有拐点。



三次 PH 曲线的控制多边形($\Delta p_0p_1p_2\sim\Delta p_1p_2p_3$)

- 具有有理等距线的参数曲线(吕伟)

定理：设$Z(t)=x(t)+y(t)\mathbf{i}$是以 t 为实参数的多项式曲线，则它的等距线可有理参数化当且仅当$Z'(t)$可表示成如下形式：

$$x'(t)+y'(t)\mathbf{i}=\rho(t)(Mt+1)G^2(t)$$

其中$\rho(t)$，$G(t)$分别表示实、复多项式，M为 0 或虚部不为 0 的常数。

假设$M=\lambda+\mu\mathbf{i}$，$G(t)=u(t)+v(t)\mathbf{i}$，可得具有有理等距曲线的多项式曲线$Z(t)=x(t)+y(t)\mathbf{i}$的一个表示：

$$\begin{cases} x(t)=\int\rho(t)\{(\lambda t+1)(u^2(t)-v^2(t))-2\mu tu(t)v(t)\}dt \\ y(t)=\int\rho(t)\{2(\lambda t+1)u(t)v(t)+\mu t(u^2(t)-v^2(t))\}dt \end{cases}$$

- PH 曲线几何 Hermite 插值

问题：给定端点、端点处的切向+端点曲率(曲线弧长)，构造插值端点数据的 PH 曲线。

插值方法 1. 根据插值条件得到约束方程直接求解待定自由参数，其中自由参数可根据 PH 曲线的定义或 Bézier 表示中的自由度来确定。

插值方法 2. 分两步进行：第一步根据端点处切向或法向构造单位切向场或单位法向场曲线；第二步根据单位切向场的有理(圆弧)表示以及 PH 曲线的积分构造过程计算待定函数。

设 PH 曲线的单位法向量场为

$$\mathbf{n}(t)=\left(\frac{-\eta(t)}{\omega(t)},\frac{\xi(t)}{\omega(t)}\right),\quad 0\le t\le 1$$

并令$U(t)=(\xi(t),\eta(t))$，则有$\|U(t)\|=\omega(t)$。以$\mathbf{n}(t)$为法向量场的 PH 曲线为

$$P(t)=\int_0^t \rho(\tau)U(\tau)d\tau+P_0$$

当$\rho(t)>0$时$U(t)$即为$P(t)$的切方向。该 PH 曲线的弧长为

$$L(t)=\int_0^t \rho(\tau)\omega(\tau)d\tau$$

其曲率为

$$k(t)=\frac{P'(t)\wedge P''(t)}{\|P'(t)\|^3}=\frac{U(t)\wedge U'(t)}{\omega^3(t)\rho(t)}$$

反之，若已知曲率和切向场函数，可得

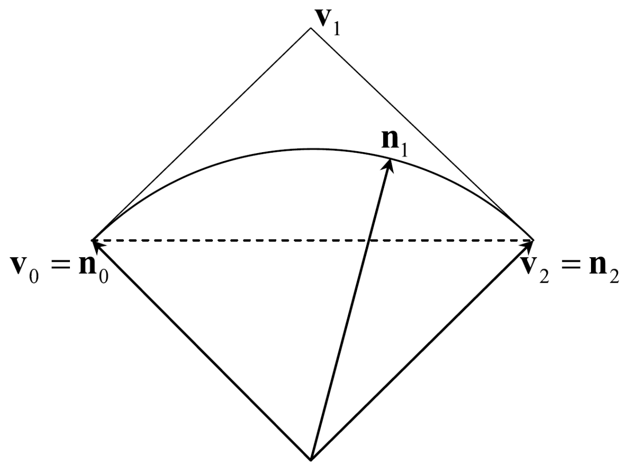
$$\rho(t)=\frac{U(t)\wedge U'(t)}{\omega^3(t)k(t)}$$

据曲率计算公式，得到如下命题：

命题：若 $\rho(t)\neq 0,\ \ 0\le t\le 1$，则由切向场积分定义得到的PH曲线是非奇异的。

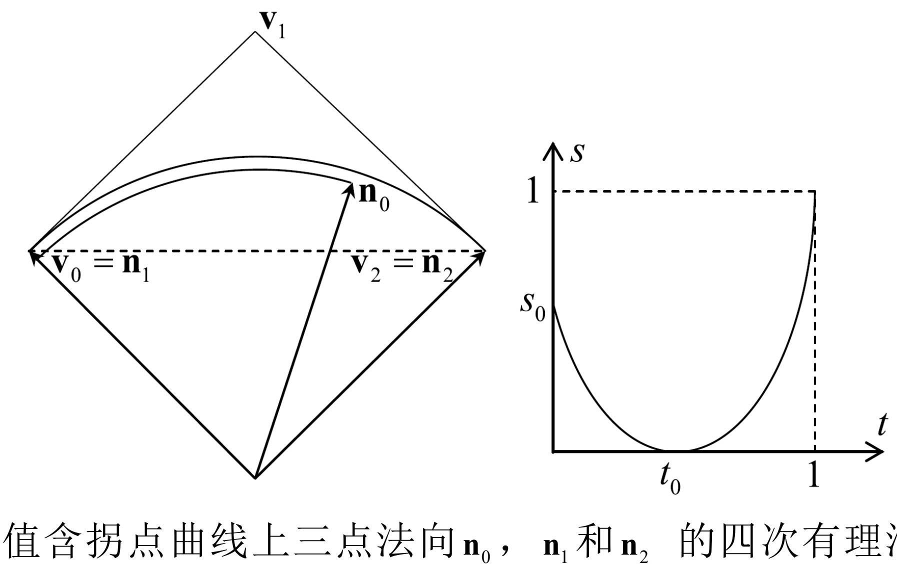
实际应用中，法向量场函数 $\mathbf{n}(t)$ 可通过圆弧的有理Bézier表示得到。

$$\mathbf{v}(s)=\frac{\mathbf{v}_0B_{0,2}(s)+\mu\mathbf{v}_1B_{1,2}(s)+\mathbf{v}_2B_{2,2}(s)}{B_{0,2}(s)+\mu B_{1,2}(t)+B_{2,2}(s)},\quad 0\le s\le 1$$

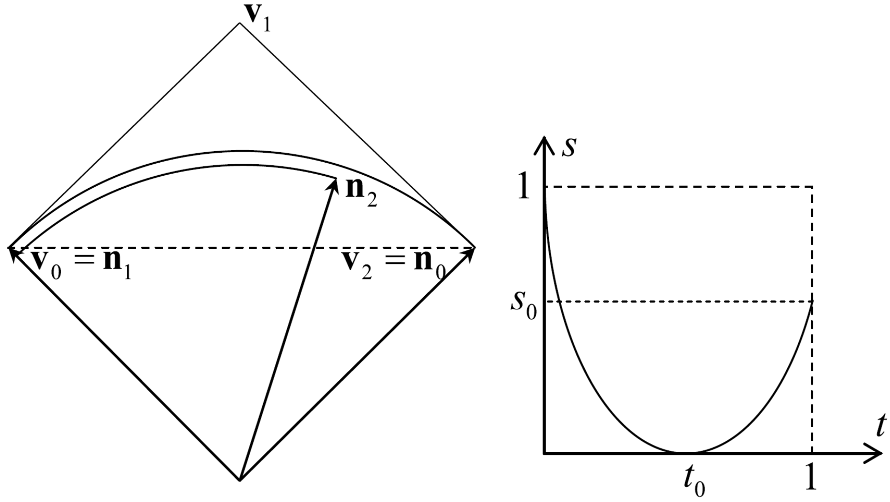


插值凸曲线上三点法向 $\mathbf{n}_0$， $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 的二次有理法向量场：

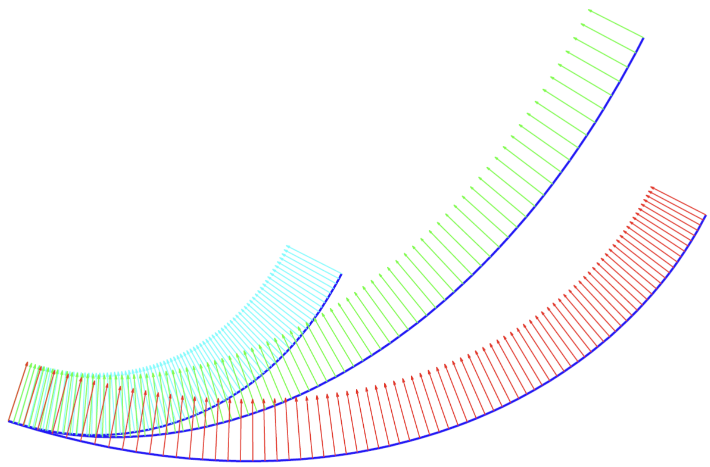
$\mathbf{n}(t)=\mathbf{v}(s(t))$， $s=s(t)=\dfrac{\gamma t}{\gamma t+(1-t)}$



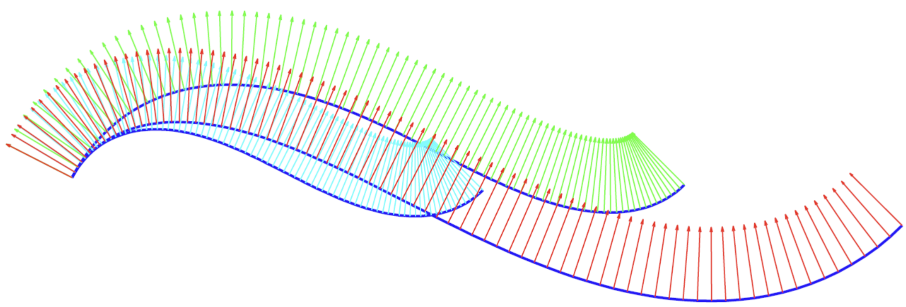
插值含拐点曲线上三点法向 $\mathbf{n}_0$， $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 的四次有理法向量场： $\mathbf{n}(t)=\mathbf{v}(s(t))$， $s=s(t)=(gt+h)^2$， $g=1+\sqrt{s_0}$， $h=-\sqrt{s_0}$



插值含拐点曲线上三点法向$\mathbf{n}_0$，$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$ 的四次有理法向量场：$\mathbf{n}(t)=\mathbf{v}(s(t))$，$s=s(t)=(gt+h)^2$，$g=1+\sqrt{s_0}$，$h=-1$

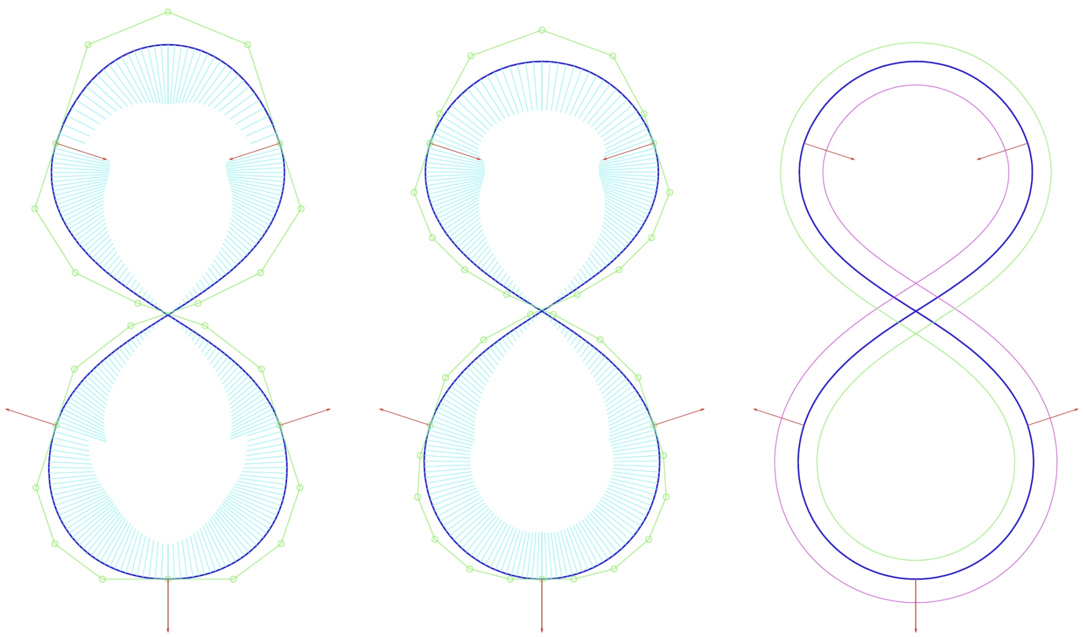


(a)



(b)

(a)具有相同法向量场的凸 PH 曲线族; (b)具有相同法向量场的带拐点的 PH 曲线族。



PH 曲线插值(左至右)：G^1插值，G^2插值，等距线

Yang Xunnian (2019), Geometric interpolation by PH curves with quadratic or quartic rational normals, *Computer-Aided Design*, 114:112-121.

§3. 散乱数据造型

● 基本问题与方法

(a) 问题

任给$\{(P_i, f_i)\}_{i=0}^n$，求$F = F(P)$，使得

(i) **插值** $F(P_i) = f_i$， $i = 0,1,\ldots,n$

(ii) **逼近** 在一定意义下使$F(P)$与所给定的数据的误差尽量小。

(b) 方法

(i) 全局逼近与插值

优点：具有整体相关性，逼近度高，数学处理与表示简单

缺点：几何形状难以控制，计算复杂，难以交互构造

(ii) 局部方法

优点：易于几何构造，计算简单

缺点：连续性与光滑性较低，缺少数据相关性

- 二元 Lagrange 插值

(a) 矩形网格

由一元 Lagrange 插值得到

(b) 直线相交网上的插值

在 Oxy 平面上任意给定 $n+1$ 条直线

$$l_i : a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

使得它们两两相交且任意三条直线无公共交点

设 $l_i \cap l_j = P_{ij}$，有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个交点

给定 $\{(P_{ij}, f_{ij})\}$，记 $u_i(x,y) = a_i x + b_i y + c_i$

令 $S_{ij}(x,y) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i,j}}^{n} u_l(x,y)$

则有

$$S_{ij}(P_{rs}) \begin{cases} = 0 & (i,j) \neq (r,s) \\ \neq 0 & (i,j) = (r,s) \end{cases}$$

构造基函数

$$L_{ij}(x,y) = \frac{S_{ij}(x,y)}{S_{ij}(P_{ij})}$$

$$L_{ij}(P_{rs}) \begin{cases} = 1 & (i,j) = (r,s) \\ = 0 & (i,j) \neq (r,s) \end{cases}$$

得到插值函数

$$F(x,y)=\sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n} f_{ij}L_{ij}(x,y)$$

关于基函数$\{L_{ij}(x,y)\}$有如下结论：

线性无关

分别为$n-1$次多项式

有$n(n+1)/2$个基函数

从而，有：

$\{L_{ij}(x,y)\}_{0,i<j}^{n}$构成了$\pi_{n-1}(R^2)$空间的一组完全基。

(c) 三角形网格上的 Lagrange 插值

给定$n>0$及$\left\{\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right),f_{ijk}\right\}_{i+j+k=n}$

令$S_{ijk}(u,v,w)=\prod_{r=0}^{i-1}\left(u-\frac{r}{n}\right)\prod_{s=0}^{j-1}\left(v-\frac{s}{n}\right)\prod_{t=0}^{k-1}\left(w-\frac{t}{n}\right)$

则有

$$S_{ijk}\left(\frac{\bar r}{n},\frac{\bar s}{n},\frac{\bar t}{n}\right)\begin{cases}\neq 0 & (i,j,k)=(\bar r,\bar s,\bar t)\\ =0 & (i,j,k)\neq(\bar r,\bar s,\bar t)\end{cases}$$，其中$\bar r+\bar s+\bar t=n$

构造基函数

$$L_{ijk}(u,v,w)=\frac{S_{ijk}(u,v,w)}{S_{ijk}\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)}$$

$\{L_{ijk}(u,v,w):i+j+k=n\}$为$\pi_n(R^2)$空间的一组基。

- Shepard 方法

(a) 问题

对任意函数$f=f(x,y)$及$\{(x_i,y_i)\}_0^n$，求$F(x,y)$，使得

$$F(x_i,y_i)=f_i=f(x_i,y_i)$$

(b) 基本公式

$$F_\mu(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{f_i}{d_i^\mu(x,y)}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{d_i^\mu(x,y)}} & (x,y)\neq(x_i,y_i)\\ f_i & (x,y)=(x_i,y_i)\end{cases}$$

其中 $d_i(x,y)=\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

性质：

1. 凸组合性质

   由定义易知。

2. 最大最小性质

   $\min\limits_i\{f_i\}\le F_\mu(x,y)\le\max\limits_i\{f_i\}$

3. 插值性质

4. 优化性质

   记 $\omega_i(x,y)=\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}d_j^\mu(x,y)$

   优化目标函数

   $\min\limits_{C(x,y)}\sum\limits_{i=0}^{n}\omega_i(x,y)(C(x,y)-f_i)^2$

   可得 $C(x,y)=F_\mu(x,y)$

5. 连续与光滑性

   对于 $\mu>0$

$$F_\mu(x,y)\in\begin{cases}C^{+\infty} & \mu\text{偶数}\\ C^{\frac{\mu-1}{2}} & \mu\text{奇数}\\ C^{\left\lfloor\frac{\mu}{2}\right\rfloor} & \mu\text{实数}\end{cases}$$

不足之处：虽然插值函数光滑，但在数据点附近表现为平点(导数为 0)。

(c) 局部 Shepard 方法

由于 Shepard 插值函数是由凸组合得到，修改权函数使其具有局部支撑性，从而得到局部 Shepard 方法。

记

$$\varphi_R(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{r} & 0<r\le\dfrac{R}{3}\\ \dfrac{27}{4R}\left(\dfrac{r}{R}-1\right)^2 & \dfrac{R}{3}<r\le R\\ 0 & r>R\end{cases}$$

改写

$$F_\mu(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n} f_i\left(\varphi_R\left(d_i(x,y)\right)\right)^\mu}{\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\varphi_R\left(d_i(x,y)\right)\right)^\mu} & (x,y)\ne(x_i,y_i)\\ f_i & (x,y)=(x_i,y_i)\end{cases}$$

局部 Shepard 方法具有局部性质，以及插值、连续、凸组合等性质。

- 径向基插值(radial basis interpolation)

(a) 基本原理

设曲面为

$$S(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\phi\left(d_i(x,y)\right)+P_m(x,y)$$

其中α_i为待定系数

插值条件：

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\phi\left(d_i\left(x_l,y_l\right)\right)+P_m\left(x_l,y_l\right)=f_l\text{，}\quad l=0,1,\ldots,n$$

有解条件：

$$\det\left(\phi\left(d_i\left(x_l,y_l\right)\right)\right)\neq 0$$

常用的径向基函数有:

-Kriging 方法的 Gauss 分布函数：$\phi(r)=e^{-c^2r^2}$；

-Kriging 方法的 Markoff 分布函数：$\phi(r)=e^{-c|r|}$；

-Hardy 的 Multi-Quadric 函数：$\phi(r)=\left(c^2+r^2\right)^{\beta}$；

-Hardy 的逆 Multi-Quadric 函数：$\phi(r)=\left(c^2+r^2\right)^{-\beta}$；

-Duchon 的薄板样条：$\phi(r)=r^{2k}\log r$，$\phi(r)=r^{2k+1}$；

以及紧支柱正定径向基函数。

(b) Multi-Quadric 方法(MQ 方法)

改进型：

$$S(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_iB_i(x,y)+\sum_{j=0}^{m}b_jP_j(x,y)$$

其中 $B_i(x,y)=\left(d_i^2(x,y)+r^2\right)^{\frac{1}{2}}$

由插值条件，可得

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}a_iB_i\left(x_l,y_l\right)+\sum_{j=0}^{m}b_jP_j\left(x_l,y_l\right)=f_l & l=0,1,\ldots,n\\ \sum_{j=0}^{n}a_jP_l\left(x_j,y_j\right)=0 & l=0,1,\ldots,m\end{cases}$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix}B & E\\ E' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\ 0\end{pmatrix}$$

其精确集：$\operatorname{span}\left\{P_j(x,y);j=0,1,\ldots,m\right\}$。

(c) 薄板样条方法(thin plate spline)

由变分问题找插值函数 $S(x,y)$

$$\min_{S\in C^2(R^2)} \int \left[S_{xx}^2 + 2S_{xy}^2 + S_{yy}^2\right] dxdy$$

设 $S(x,y)=\phi(d(x,y))$，其中 $\phi=\phi(t)\in C^2$

$$d(x,y)=\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

则有 $\phi(t)=(t^2+r^2)\ln(t^2+r^2)$，其中 r 为常数

薄板样条插值公式

$$S(x,y)=\sum_{i=0}^{n} a_i\phi(d_i(x,y))+\sum_{j=0}^{m} b_jP_j(x,y)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} a_i\left\{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]+r^2\right\}\ln\left\{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]+r^2\right\}+\sum_{j=0}^{m} b_jP_j(x,y)$$

插值约束条件

$$\begin{cases} S(x_i,y_i)=f_i & i=0,1,\ldots,n \\ \sum_{j=0}^{n} a_jP_i(x_j,y_j)=0 & i=0,1,\ldots,m \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} B & E \\ E' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

该方程组解存在唯一(Micchelli 证)。

(d) 移动最小二乘方法(moving least squares)

设 $(x_i,f_i)_{i=0}^{n}$ 为一组采样数据，若对数据进行最小二乘拟合，可先假定一拟合函数，然后求出该函数的系数。

最小二乘拟合：不妨设拟合函数为一 2 次函数，即

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

构造函数 $F(a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}\left(ax_i^2+bx_i+c-f_i\right)^2\theta_i$

由 $F(a,b,c)=\min$，得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial a}=\sum_{i=0}^{n}\left(ax_i^2+bx_i+c-f_i\right)x_i^2\theta_i=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial b}=\sum_{i=0}^{n}\left(ax_i^2+bx_i+c-f_i\right)x_i\theta_i=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial c}=\sum_{i=0}^{n}\left(ax_i^2+bx_i+c-f_i\right)\theta_i=0\end{cases}$$

求解上述方程组，得到

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}x_i^4\theta_i & \sum_{i=0}^{n}x_i^3\theta_i & \sum_{i=0}^{n}x_i^2\theta_i\\ \sum_{i=0}^{n}x_i^3\theta_i & \sum_{i=0}^{n}x_i^2\theta_i & \sum_{i=0}^{n}x_i\theta_i\\ \sum_{i=0}^{n}x_i^2\theta_i & \sum_{i=0}^{n}x_i\theta_i & \sum_{i=0}^{n}\theta_i\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}f_ix_i^2\theta_i\\ \sum_{i=0}^{n}f_ix_i\theta_i\\ \sum_{i=0}^{n}f_i\theta_i\end{pmatrix}$$

从而得到拟合函数 $f(x)=ax^2+bx+c$。

移动最小二乘拟合：设拟合函数 $f(x)=a(x)x^2+b(x)x+c(x)$，构造函数

$$F(a(x),b(x),c(x))=\sum_{i=0}^{n}\left(a(x)x_i^2+b(x)x_i+c(x)-f_i\right)^2\theta_i\left(\|x_i-x\|\right)$$

与最小二乘类似的解法，得到

$$\begin{pmatrix}a(x)\\b(x)\\c(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}x_i^4\theta_i(\|x_i-x\|) & \sum_{i=0}^{n}x_i^3\theta_i(\|x_i-x\|) & \sum_{i=0}^{n}x_i^2\theta_i(\|x_i-x\|)\\ \sum_{i=0}^{n}x_i^3\theta_i(\|x_i-x\|) & \sum_{i=0}^{n}x_i^2\theta_i(\|x_i-x\|) & \sum_{i=0}^{n}x_i\theta_i(\|x_i-x\|)\\ \sum_{i=0}^{n}x_i^2\theta_i(\|x_i-x\|) & \sum_{i=0}^{n}x_i\theta_i(\|x_i-x\|) & \sum_{i=0}^{n}\theta_i(\|x_i-x\|)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}f_ix_i^2\theta_i(\|x_i-x\|)\\ \sum_{i=0}^{n}f_ix_i\theta_i(\|x_i-x\|)\\ \sum_{i=0}^{n}f_i\theta_i(\|x_i-x\|)\end{pmatrix}$$

由此得到拟合函数 $f(x)=a(x)x^2+b(x)x+c(x)$。

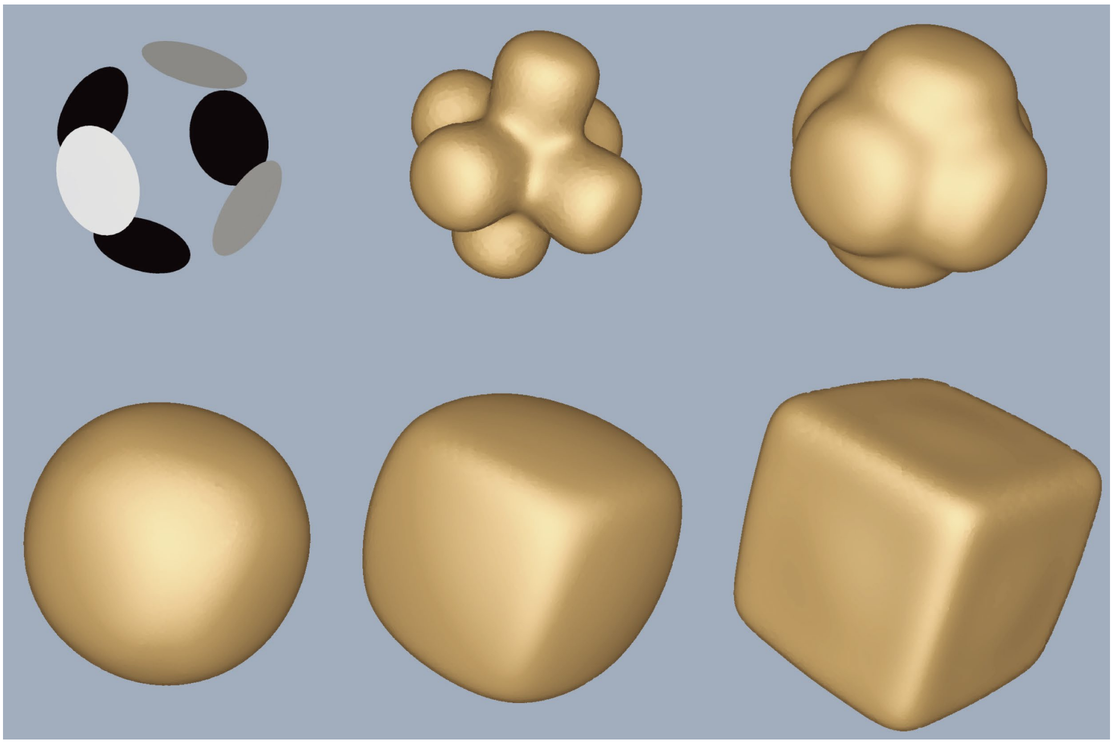
- 自然邻域插值

基本方法：由定义域中点集生成 Voronoi 图，并由局部重心坐

标构造插值函数。

- 点曲面 (Point based surface)

  基本方法：移动最小二乘(moving least squares)



阅读文献：

1. Sugihara K. Surface interpolation based on new local coordinates. Computer Aided Design 1999;13(1):51-58.
2. AMENTA, N. AND KIL, Y. J. 2004b. Defining point set surfaces. *ACM Trans. Graph. 23*, 3, 264–270.
3. 陈发来.曲面隐式化新进展.中国科学技术大学学报2014;44(5):345-361.
4. LEVIN, D. 2003. Mesh-independent surface interpolation. In *Geometric Modeling for Scientific Visualization*, G. Brunnett, B. Hamann, K. Mueller, and L. Linsen, Eds. Springer-Verlag.