三维股集程序进展

谭焱, 邱云昊

September 16, 2022

提纲

殷集研究背景

- 多相流中的几何和拓扑问题是求解动边界偏微分方程的核心问题.
- 现有方法对界面的几何和拓扑问题进行回避, 导致了:
  1. 对等距变换的流场不能保证几何性质.
  2. 对同胚映射的流场不能保证拓扑性质.
  3. 精度最高为二阶精度.
  4. 很难对拓扑变化进行严格的处理.
- 我们的核心思想是用几何和拓扑的手段研究几何和拓扑的问题, 其中首要工作在于殷集对流相建模.

二维般集

- 般集: 空间中边界有界的正则半解析开集. 所有般集构成的集合被称为般空间, 记为 $\mathbb{Y}$.
- 二维空间中, 任一个般集可以唯一表示为

$$\mathcal{Y} = \cup_{j}^{\perp\perp} \cap_{i} \mathrm{int}(\gamma_{j,i}),$$

约当曲线 $\gamma_{j,i}$ 是 $\mathcal{Y}$ 内第 j 个连通分量的第 i 条边界.
- 实现了般集上的布尔代数.

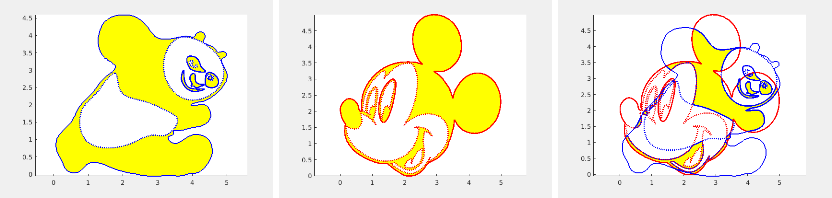
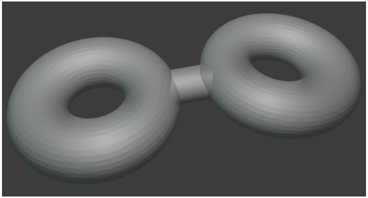
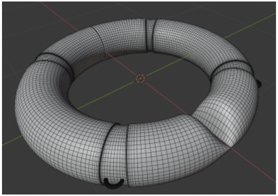


Figure 1: 二维般集的交

黏合紧曲面

- 二流形的分类定理
  有向的二维紧流形同胚于球面或轮胎面或轮胎面的连通和.





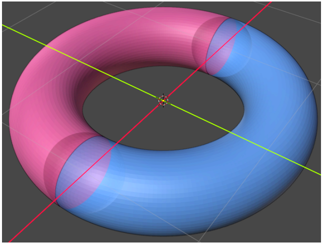
- 黏合紧曲面是一个二维连通紧流形或这种流形的商空间, 其商映射将紧流形与一维 CW 复形同胚的子集粘在一起; 将这个一维子集删除后该黏合紧曲面仍然是连通的.

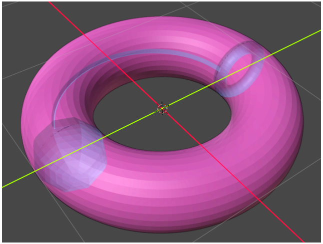
三维股集的唯一表示

- 任一个股集 $\mathcal{Y} \in \mathbb{Y}$ 可以唯一表示为

$$\mathcal{Y} = \cup_j^{\perp\perp} \cap_i \mathrm{int}(\Gamma_{j,i}),$$

  黏合紧曲面 $\Gamma_{j,i}$ 是 $\mathcal{Y}$ 的第 j 个连通分量的第 i 个边界.
- 连通分量个数等于正向黏合紧曲面的个数 (有界股集) 或正向黏合紧曲面个数 +1(无界股集).
- 洞的个数等于负向黏合紧曲面的个数.





布尔代数程序的实现方式

- 实现步骤
  1. 计算一个殷集边界上的自交线或两个殷集之间的交线.
  2. 黏合紧曲面沿交线剪开得到若干曲面片.
  3. 根据交并补的需要删除曲面片或改变曲面片方向.
  4. 将曲面片重新粘合成黏合紧曲面集合.
  5. 黏合紧曲面集合唯一表示一个三维殷集作为布尔运算结果.
- 代码模块
  1. class TriangleIntersection. 找到交线.
  2. class Triangulation. 沿交线重新三角化.
  3. class Prepaste. 沿交线剪开得到曲面片.
  4. class RemoveOverlap. 恰当的保留曲面片.
  5. class Locate. 恰当的保留曲面片.
  6. class Paste. 生成黏合紧曲面.
  7. YinSet(). 构造殷集.

时间瓶颈分析

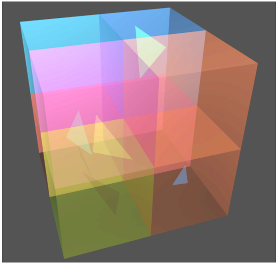
- 求交运算在同一图形的不同加密次数的模型上计算时间.

三角形/个	求交/秒	Ratio	三角化/秒	Ratio	总时间	Ratio
2.11×10^3	5.52×10^{-1}		1.63×10^{-1}		7.63×10^{-1}	
3.46×10^4	1.04×10^2	1.87	2.33×10^0	0.95	1.07×10^2	1.76
1.14×10^5	1.26×10^3	2.09	7.66×10^0	0.99	1.27×10^3	2.07
3.59×10^5	1.28×10^4	2.02	2.42×10^1	1.00	1.29×10^4	2.02
5.39×10^5	2.89×10^4	2.00	3.59×10^1	0.97	2.90×10^4	1.99

- 三角形求交和三角化占用求交程序大部分时间.
- 计算时间过长, 瓶颈在三角形求交, 需求时间复杂度更低的求交算法.
- 三角化的时间复杂度达到理论最优的 O(n).

使用空间划分降低求交计算时间度

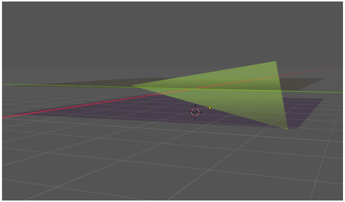
- 三角形相交局部发生, 将三角形划分到不同的局部降低计算量.
- 建立空间八叉树结构, 通过剪枝实现自适应细化.
- 假设三角形分布均匀可证计算时间复杂度为 O(nlogn).

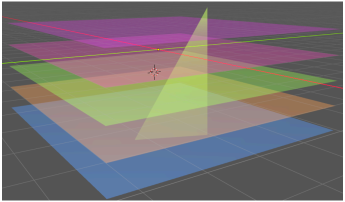


三角形/个	两两求交/秒	Ratio	空间划分/秒	Ratio
2.11×10^3	5.52×10^{-1}		4.26×10^{-1}	
3.46×10^4	1.04×10^2	1.87	5.14×10^0	0.89
1.14×10^5	1.26×10^3	2.09	1.36×10^1	0.82
3.59×10^5	1.28×10^4	2.02	3.44×10^1	0.80
5.39×10^5	2.89×10^4	2.00	4.85×10^1	0.84

针对骰集与网格求交优化

- 有限体积法基于网格的控制体, 求解需大量控制体和骰集求交, 使用前面的方法耗时过长, 因此设计了一种加速的算法.
- 将骰集的每个三角形与所有与之相交的网格面求交得到若干交线.
- 将每条交线沿着网格面中的网格进行剪切得到若干交线段.
- 骰集与网格结合交线段完成三角化.





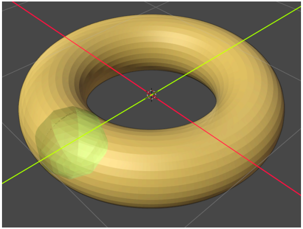
优化效果分析

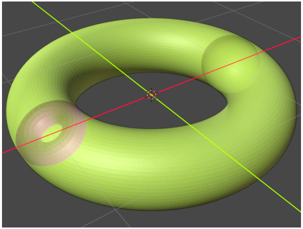
- 不妨假设三角形与至多常数 N 个网格面相交.
- 计算复杂度从 $O(n_1 n_2)$ 降为 $O(n_2)$.
- 空间划分三角形求交与三角化计算时间接近, 优化效果有待验证.

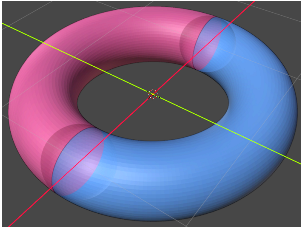
三角形/个	空间划分/秒	比例	三角化/秒	比例
2.11×10^3	4.26×10^{-1}	0.72	1.63×10^{-1}	0.28
3.46×10^4	5.14×10^0	0.69	2.33×10^0	0.31
1.14×10^5	1.36×10^1	0.64	7.66×10^0	0.36
3.59×10^5	3.44×10^1	0.59	2.42×10^1	0.41
5.39×10^5	4.85×10^1	0.57	3.59×10^1	0.43

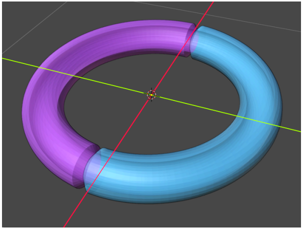
原 Paste 方法的问题

- 原 Paste 方法采用分类讨论证明粘合的正确性.





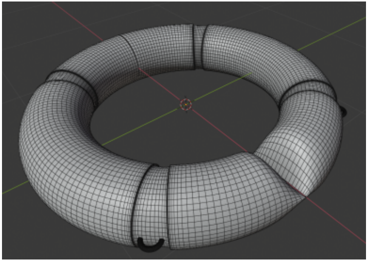




黏合紧曲面的性质

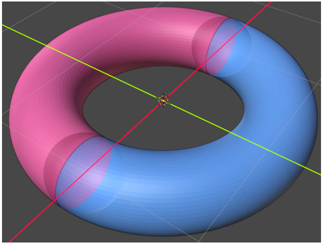
Theorem 3.5 (Jordan Curve Theorem [14]). *The complement of a Jordan curve γ in the plane $\mathbb{R}^2$ consists of two components, each of which has γ as its boundary. One component is bounded and the other is unbounded; both of them are open and path-connected.*

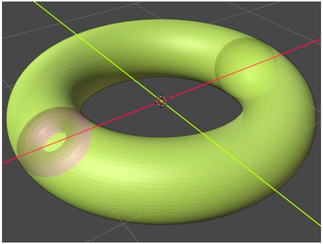
- 黏合紧曲面同样拥有类似性质.
- 黏合紧曲面是一个二维连通紧流形或这种流形的商空间, 其商映射将紧流形与一维 CW 复形同胚的子集粘在一起; 将这个一维子集删除后该黏合紧曲面仍然是连通的.



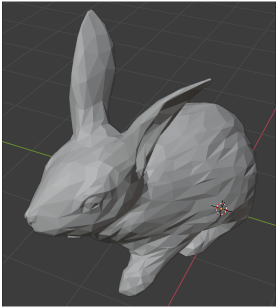
生成黏合紧曲面的方法

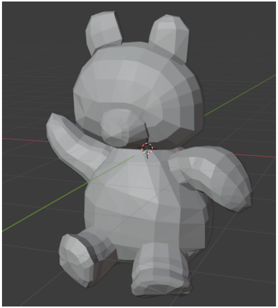
- 好配对黏合: 始终沿着一个连通分量黏合.
- 好配对黏合不一定是黏合紧曲面.
- 对于好配对黏合得到的连通分量的边界, 沿自交线剪开反向并重新进行好配对黏合 (这时一定得到黏合紧曲面), 将黏合得到的若干反向的黏合紧曲面再反向可以得到正确定向的黏合紧曲面.

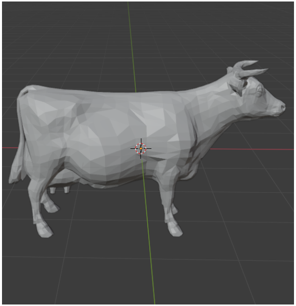




缺乏几何结构复杂的模型

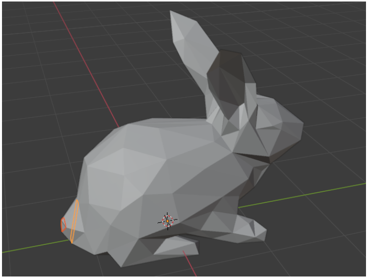


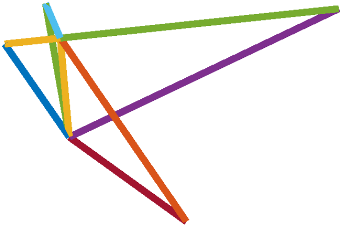


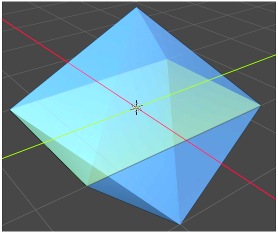


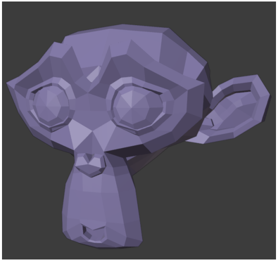
1. Rabbit 与 Teddy 内部洞边界的方向朝外.
2. cow 尾部有不可定向的曲面片.
3. 缺乏几何结构复杂的殷集测试模型.

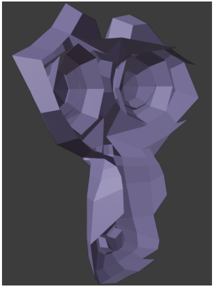
通用三维测试模型的问题











后续工作方向

- 增加测试样例.
  1. 熟悉已完成的三维般集表面建模程序.
  2. 截取简单般集模型在复杂流场运行一段时间后的般集.
  3. 使用 blender 构建拓扑结构复杂的模型.
  4. 验证程序的正确性.
- 分析优化计算求交.
  1. 分析布尔运算程序速度是否为瓶颈.
  2. 检索更优的三角形求交和三角化算法.
- 重构现有程序.

请老师同学批评指正！