

第三章 参数插值样条曲线曲面

背景：插值样条函数常用于小挠度和单值曲线

大挠度曲线插值需用参数曲线

$$P(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$$

§1. Lagrange 插值曲线

- 问题：给定控制点列 Q_i , $i = 0, 1, \dots, n$, 以及节点参数 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 构造参数曲线 $P(t)$, 使得 $P(t_i) = Q_i$, $i = 0, 1, \dots, n$
- Aitken 算法

a. 构造分段线性插值曲线

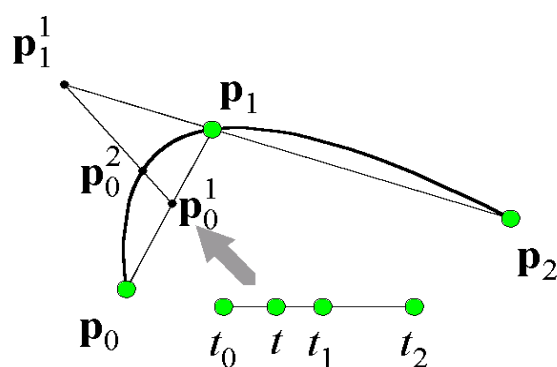
$$P_i^1(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} Q_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} Q_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

b. 递归构造高阶插值曲线

$$P_i^2(t) = \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_i} P_i^1(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i} P_{i+1}^1(t), \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

.....

$$P_0^n(t) = \frac{t_n - t}{t_n - t_0} P_0^{n-1}(t) + \frac{t - t_0}{t_n - t_0} P_1^{n-1}(t)$$



重心组合(barycentric combination)

c. 算法

for (i=0,1,...,n) $P_i^0(t) = Q_i$

for (r=1,2,...,n) {

for (i=0,1,...,n-r) {

$$P_i^r(t) = \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} P_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} P_{i+1}^{r-1}(t)$$

}

}

Lagrange 插值曲线性质:

- a. 仿射不变性: 由重心组合性质可证
- b. 线性精度: 当型值点均匀分布在一条直线上, 可得到该直线
- c. 不具有凸包性质: 非凸组合
- d. 不具有变差缩减性质: 同上理由

● Closed form 表示

$$P(t) = \sum_{i=0}^n Q_i L_i^n(t)$$

其中 $L_i^n(t)$ 为 Lagrange 多项式

$$L_i^n(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

由 $L_i^n(t_j) = \delta_{ij}$, 可得:

$L_i^n(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$ 构成 n 次多项式空间的一组基。

特别地，如果所有控制点 Q_i 重合，则插值曲线退化为同一点。

$$\sum_{i=0}^n L_i^n(t) \equiv 1$$

● 重心 Lagrange 插值(barycentric Lagrange interpolation)

令 $L(t) = \prod_{j=0}^n (t - t_j)$,

$$\omega_i = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

则有 $L_i^n(t) = L(t) \frac{\omega_i}{t - t_i}$, $i = 0, 1, \dots, n$

代入 $P(t) = \sum_{i=0}^n Q_i L_i^n(t)$ 中，可得

$$P(t) = L(t) \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{t - t_i} Q_i$$

又因为 $1 = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) = L(t) \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{t - t_i}$ ，将二式相除可得

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{t - t_i} Q_i}{\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{t - t_i}}$$

重心 Lagrange 插值比 Lagrange 插值在计算效率上更高，可用较少的乘除运算计算曲线上的点。

● 多项式插值的唯一性

定理： 给定控制点列 Q_i , $i = 0, 1, \dots, n$ ，以及节点参数 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ，

那么存在唯一的 n 次多项式曲线 $P(t)$ ，使得 $P(t_i) = Q_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ 。

● 推广与应用

a. 有理 Lagrange 插值

$$Q_i \rightarrow (\omega_i Q_i, \omega_i)$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^n (\omega_i Q_i, \omega_i) L_i^n(t)$$

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i Q_i L_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i L_i^n(t)}$$

由 Lagrange 插值函数性质，知： $R(t_i) = Q_i$

b. 多项式乘法运算

已知多项式 $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ 和 $g(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$

计算 $f(t)g(t)$

多项式展开： $f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) t^k$ ， $O(n^2)$ 次乘法

Lagrange 表示

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n} f(t_k) L_k^{2n}(t | t_0, \dots, t_{2n})$$

$$g(t) = \sum_{k=0}^{2n} g(t_k) L_k^{2n}(t | t_0, \dots, t_{2n})$$

有： $f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{2n} f(t_k)g(t_k) L_k^{2n}(t | t_0, \dots, t_{2n})$ ， $O(n)$ 次乘法

c. 曲面插值

输入控制点阵 $\{Q_{ij}\}$ 和节点阵 $\{(s_i, t_j)\}$ ， $i = 0, 1, \dots, m$ ； $j = 0, 1, \dots, n$ ， 则存在一张次数为 (m, n) 的二元多项式， 使得 $P(s_i, t_j) = Q_{ij}$ 。

构造曲面如下： $P(s, t) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n L_k^m(s | s_0, \dots, s_m) L_l^n(t | t_0, \dots, t_n) Q_{kl}$

$P(s,t)$ 为张量积曲面

$$\text{令 } P_k(t) = \sum_{l=0}^n L_l^n(t|t_0, \dots, t_n) Q_{kl}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

则插值曲面可写成

$$P(s,t) = \sum_{k=0}^m L_k^m(s|s_0, \dots, s_m) P_k(t)$$

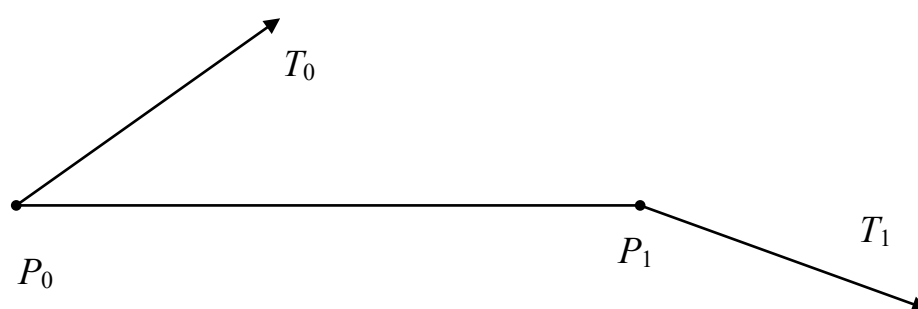
张量积曲面上的点的计算可以转化成曲线情形处理。

思考题:

- a. 证明恒等式 $(x-t)^n = \sum_{k=0}^n L_k^n(t|t_0, \dots, t_n) (x-t_k)^n$
- b. 编程实现 Lagrange 曲线插值，并验证控制点共线时得到的插值曲线是直线。

§2. Hermite 插值曲线

● 三次 Hermite 插值曲线



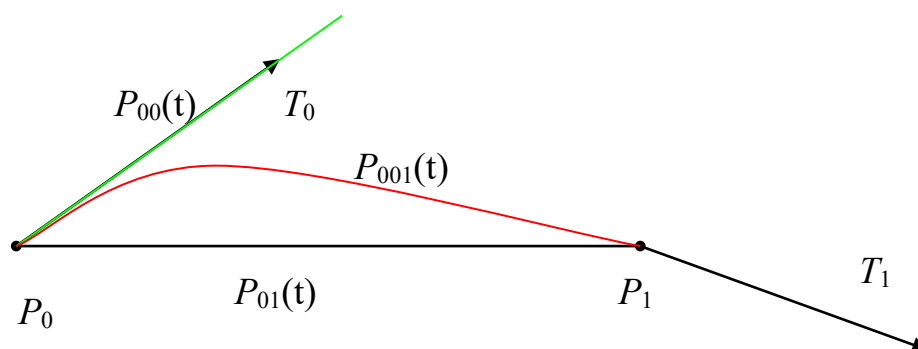
问题: 给定两点 P_0, P_1 以及两导矢 T_0, T_1 ，构造三次曲线 $P(t)$ ，

其中 $t \in [0,1]$ ，满足如下条件:

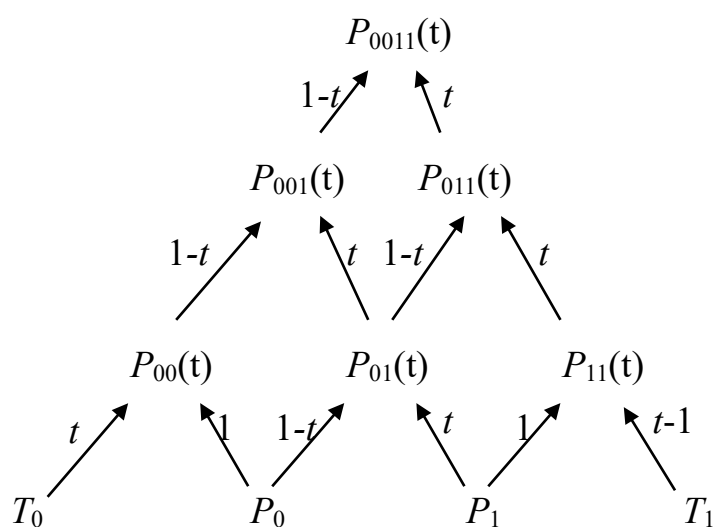
$$P(0) = P_0, \quad P(1) = P_1, \quad P'(0) = T_0 \text{ 和 } P'(1) = T_1$$

几何构造算法

- (a) 过 P_0 , T_0 构造插值左端点和左切向的直线 $P_{00}(t) = P_0 + tP'_0$
- (b) 过 P_0 , P_1 构造插值两点直线 $P_{01}(t) = (1-t)P_0 + tP_1$
- (c) 构造插值 P_0 , T_0 及 P_1 的二次曲线 $P_{001}(t) = (1-t)P_{00}(t) + tP_{01}(t)$
- (d) 同理, 构造插值 P_0 , P_1 及 T_1 的二次曲线 $P_{011}(t) = (1-t)P_{01}(t) + tP_{11}(t)$
- (e) 构造插值两点 P_0 , P_1 以及两导矢 T_0 , T_1 的三次曲线 $P_{0011}(t) = (1-t)P_{001}(t) + tP_{011}(t)$



构造线性及二次插值曲线



三次 Hermite 插值的内瓦尔(Neville)算法

验证 $P_{0011}(t) = (1-t)P_{001}(t) + tP_{011}(t)$ 插值给定端点和端切向。

显式表示

$$P_{0011}(t) = h_0(t)P_0 + H_0(t)T_0 + h_1(t)P_1 + H_1(t)T_1$$

其中

$$h_0(t) = (1-t)^2(1+2t) \quad H_0(t) = t(1-t)^2$$

$$h_1(t) = t^2(3-2t) \quad H_1(t) = t^2(1-t)$$

Hermite 基函数

$$(h_0(t) \ H_0(t) \ h_1(t) \ H_1(t)) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

● 五次 Hermite 插值曲线

问题：给定两点 P_0 , P_1 , 两点处一阶导数 T_0 , T_1 , 二阶导数 M_0 ,

M_1 , 构造五次曲线 $P(t)$, 其中 $t \in [0,1]$

$$P(t) = P_0 H_0^5(t) + T_0 H_1^5(t) + M_0 H_2^5(t) + M_1 H_3^5(t) + T_1 H_4^5(t) + P_1 H_5^5(t)$$

其中

$$H_0^5(t) = (1-t)^3(1+3t+6t^2)$$

$$H_1^5(t) = t(1-t)^3(1+3t)$$

$$H_2^5(t) = \frac{1}{2}t^2(1-t)^3$$

$$H_3^5(t) = \frac{1}{2}t^3(1-t)^2$$

$$H_4^5(t) = -t^3(1-t)(4-3t)$$

$$H_5^5(t) = t^3(10-15t+6t^2)$$

多段五次 Hermite 插值曲线可达到 C^2 连续, 但二阶导数给定较困难。

● Hermite 插值样条曲线

问题：给定型值点 P_i , $i = 0, 1, \dots, n$, 以及参数节点 t_i , $i = 0, 1, \dots, n$, 其中参数节点单调增。求参数三次样条曲线 $P(t)$ 满足：

(i) 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 为 t 的三次参数多项式；

(ii) $P(t) \in C^2[t_0, t_n]$

(iii) $P(t_i) = P_i$, $i = 0, 1, \dots, n$

类似三次样条函数，建立连续条件

$$P(t_i -) = P(t_i +),$$

$$m_i = P'(t_i -) = P'(t_i +),$$

$$M_i = P''(t_i -) = P''(t_i +), \quad i = 1, \dots, n-1$$

得到连续性方程

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 3D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\text{其中 } \lambda_i = \frac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i + \Delta t_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad D_i = \frac{2}{\Delta t_i + \Delta t_{i+1}} \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t_{i+1}} - \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta t_i} \right)$$

边界条件类似三次样条函数。

节点选取：

(i) 累加弦长：

$$t_0 = 0, \quad t_{i+1} = t_i + \|P_{i+1} - P_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(ii) 均匀节点：

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad \dots, \quad t_i = i, \quad \dots, \quad t_n = n$$

(iii) 向心参数化(Lee 1989, CAD):

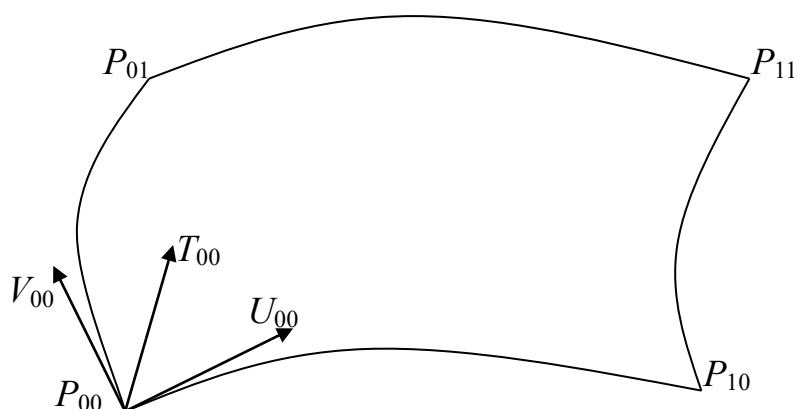
$$t_0 = 0, \quad t_{i+1} = t_i + \|P_{i+1} - P_i\|^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

参数样条曲线的主要计算步骤:

- (a) 输入型值点 P_i , $i = 0, 1, \dots, n$
- (b) 确定节点参数
- (c) 建立连续性方程
- (d) 依据端条件, 建立所有型值点处切矢的线性方程组
- (e) 求解方程组
- (f) 逐段计算参数样条曲线

● Hermite 插值曲面

问题: 给定型值点 $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$, 以及每个型值点处的切矢 U_{ij} , V_{ij} 和扭矢 T_{ij} , 构造双三次参数曲面插值这些点及切矢与扭矢。



$$P(s, t) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 h_i(s) h_j(t) P_{ij} + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 H_i(s) h_j(t) U_{ij} \\ + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 h_i(s) H_j(t) V_{ij} + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 H_i(s) H_j(t) T_{ij}$$

§4. 三次曲线形状分析

考虑三次曲线 $P(t) = Q_0 + Q_1 t + \frac{1}{2} Q_2 t^2 + \frac{1}{6} Q_3 t^3$, 其中 $Q_i = (x_i, y_i)$

曲线的曲率公式 $k(t) = \frac{P'(t) \wedge P''(t)}{|P'(t)|^3}$, 其中 $(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

曲线 $P(t)$ 拐点满足方程(必要条件) $k(t) = 0$

即 $P'(t) \wedge P''(t) = 0$

展开, 得: $Q_1 \wedge Q_2 - Q_3 \wedge Q_1 t + \frac{1}{2} Q_2 \wedge Q_3 t^2 = 0$

记 $p = Q_2 \wedge Q_3$, $q = Q_3 \wedge Q_1$, $r = Q_1 \wedge Q_2$

则拐点方程变为: $pt^2 - 2qt + 2r = 0$

若 $p \neq 0$, 解方程得到: $t_{1,2} = \frac{q}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2 - \frac{2r}{p}}$

记 $I = \left(\frac{q}{p}\right)^2 - \frac{2r}{p}$, 则 I 为仿射不变量

由拐点方程解的存在与否可以判断

$$I \begin{cases} > 0 & \text{可能有两个拐点} \\ = 0 & \text{可能有一个拐点} \\ < 0 & \text{无实拐点} \end{cases}$$

(a) 单拐曲线

若 $p = 0$, 则拐点方程有唯一解 $t = \frac{r}{q}$

又 $p = Q_2 \wedge Q_3$, 易知 $Q_2 = \gamma Q_3$

相应地, 三次曲线方程形式为

$$P(t) = Q_3 \left(\frac{t}{6} + \frac{1}{2} \gamma \right) t^2 + Q_1 t + Q_0$$

(b) 二重点

设 $P(t_1) = P(t_2)$, 将曲线方程代入并化简有

$$Q_1 + \frac{1}{2} Q_2 (t_1 + t_2) + \frac{1}{6} Q_3 (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = 0 \quad (*)$$

$$Q_3 \wedge (*) = 0 \rightarrow t_1 + t_2 = \frac{2q}{p}$$

$$Q_2 \wedge (*) = 0 \rightarrow t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = \frac{8r}{p}$$

联立二元二次方程组，解得

$$t_{1,2} = \frac{q}{p} \pm \sqrt{-3I}, \text{ 其中 } I \text{ 需满足条件 } I \leq 0$$

若 $I < 0$ ，曲线存在一个二重点，无拐点

若 $I = 0$ ，曲线无二重点

(c) 尖点

尖点方程 $P'(t) = 0$

若 t_0 为该方程的一个解，则有 $P'(t) = (t - t_0)(At + B)$

相应地，曲率方程为 $k(t) = \frac{(t - t_0)^2 (B \wedge A)}{|t - t_0|^3 |At + B|^3}$

根据该曲率方程(分子表达式)可以推出仿射不变量 $I = 0$ 。

(d) 三次参数曲线奇点分布

若 $p = 0$ ，单拐曲线

若 $p \neq 0$ ，有下面结论

$$I \begin{cases} > 0 & \text{两个拐点} \\ = 0 & \text{尖点} \\ < 0 & \text{二重点} \end{cases}$$

§5. Newton 插值与向前差分

● Newton 基

给定节点 $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ，牛顿基定义如下：

$$N_0(t) = 1$$

$$N_1(t) = t - t_0$$

$$N_2(t) = (t - t_0)(t - t_1)$$

...

$$N_n(t) = (t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_{n-1})$$

性质:

(a) $N_k(t) = (t - t_0) \cdots (t - t_{k-1})$ 是 k 次多项式

(b) $N_0(t), N_1(t), \dots, N_n(t)$ 构成 n 次多项式空间的基

(c) $\sum_{k=0}^n c_k N_k(t)$ 的 Horner 算法(杨辉三角算法)复杂度为 $O(n)$

● 差商

差商定义:

$$F[t_0] = F(t_0)$$

$$F[t_0, t_1] = \frac{F(t_1) - F(t_0)}{t_1 - t_0} \quad \begin{array}{l} t_1 \neq t_0 \\ t_1 = t_0 \end{array}$$

$$= F'(t_0)$$

...

$$F[t_0, \dots, t_n] = \frac{F[t_1, \dots, t_n] - F[t_0, \dots, t_{n-1}]}{t_n - t_0} \quad \begin{array}{l} t_n \neq t_0 \\ t_n = t_0 \end{array}$$

$$= \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}$$

命题 1: 任意给定曲线 $F(t)$ 和一组节点 $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ 。设 $P_{0\dots n}(t)$ 是由插值数据点 $F(t_0), F(t_1), \dots, F(t_n)$ 得到的唯一 n 次多项式。则 $F[t_0, \dots, t_n]$ 是插值多项式 t^n 的系数。

证明: 若 $t_n \neq t_0$, 由内瓦尔公式得

$$P_{0...n}(t) = \frac{t-t_0}{t_n-t_0} P_{1...n}(t) + \frac{t_n-t}{t_n-t_0} P_{0...n-1}(t)$$

比较上述等式两边 t^n 的系数，得出：

$$F[t_0, \dots, t_n] = \frac{F[t_1, \dots, t_n] - F[t_0, \dots, t_{n-1}]}{t_n - t_0}$$

若 $t_n = t_0$ ，则

$$P_{0...n}(t) = P_{0...0}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k$$

此时 t^n 的系数为：

$$F(t_0, \dots, t_0) = \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}。证毕。$$

命题 2： 任意给定曲线 $F(t)$ 和一组节点 $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ 。设 $P_{0...n}(t)$ 是由插值数据点 $F(t_0), F(t_1), \dots, F(t_n)$ 得到的唯一 n 次多项式。则

$$P_{0...n}(t) = \sum_{k=0}^n F[t_0, \dots, t_k] N_k(t)$$

即插值多项式的牛顿系数就是差商。

证明： 对 n 用归纳法证明。

$n=0$ ，由定义知 $P_0(t) = F(t_0)$ ，结论成立。

假设对小于 n 的自然数结论仍成立。由于 $N_0(t), N_1(t), \dots, N_n(t)$ 构成 n 次多项式的基，故：

$$P_{0...n}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k N_k(t) + c_n N_n(t)$$

又因为 $N_n(t_k) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\text{推出： } P_{0...n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k N_k(t)$$

由于该多项式为 $F(t_0), F(t_1), \dots, F(t_{n-1})$ 的 $n-1$ 次插值多项式, 由归纳假设知: $c_k = F[t_0, \dots, t_k], k = 0, 1, \dots, n-1$

由于 c_n 是 $N_n(t)$ 的系数, 也是 t^n 的系数。由命题 1 知 $c_n = F[t_0, \dots, t_n]$ 成立。从而命题 2 得证。

● 差商性质小结

(a) 递推性

$$\begin{aligned} F[t_0, \dots, t_n] &= \frac{F[t_1, \dots, t_n] - F[t_0, \dots, t_{n-1}]}{t_n - t_0} & t_n \neq t_0 \\ &= \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!} & t_n = t_0 \end{aligned}$$

(b) 对称性

$F[t_0, \dots, t_n] = F[t_{\sigma(0)}, \dots, t_{\sigma(n)}]$, 其中 σ 是 $\{0, 1, \dots, n\}$ 的任意置换。

(c) 推广的对称性

$$F[t_0, \dots, t_n] = \frac{F[t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n] - F[t_0, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n]}{t_j - t_i},$$

$$t_i \neq t_j$$

(d) 线性

$$(F + G)[t_0, \dots, t_n] = F[t_0, \dots, t_n] + G[t_0, \dots, t_n]$$

$$(cF)[t_0, \dots, t_n] = cF[t_0, \dots, t_n]$$

(e) 消去性

$$F[t_0, \dots, t_n] = \{(t - t_{n+1})F\}[t_0, \dots, t_n, t_{n+1}]$$

(f) Leibniz 法则

$$(FG)[t_0, \dots, t_n] = \sum_{k=0}^n F[t_0, \dots, t_k] G[t_k, \dots, t_n]$$

(g) 插值多项式的最高次系数

$F[t_0, \dots, t_n]$ 是插值多项式 $P_{0\dots n}(t)$ 首项 t^n 的系数

(h) 插值多项式的系数

$$P_{0\dots n}(t) = \sum_{k=0}^n F[t_0, \dots, t_k] N_k(t)$$

(i) 低次多项式的差商值

- 如果 $F(t)$ 是 $n-1$ 次多项式, 则 $F[t_0, \dots, t_n] = 0$
- 如果 $F(t)$ 是 n 次多项式, 则 $F[t_0, \dots, t_n]$ 是 $F(t)$ 中单项式 t^n 的系数。此时, $F[t_0, \dots, t_n]$ 是常数。

思考题:

1 证明: $\left\{ \frac{1}{x-t} \right\} [t_0, \dots, t_n] = \frac{1}{(x-t_0) \cdots (x-t_n)}$

2 证明多项式的差商是多项式。即证明如果 $P(t)$ 是 t 的多项式, 则 $P[t_0, \dots, t_n]$ 是关于变量 t_0, t_1, \dots, t_n 的多项式。

● 向前差分

(a) 向前差分定义

$$\Delta^0 F(t_0) = F(t_0)$$

$$\Delta^1 F(t_0) = F(t_1) - F(t_0)$$

...

一般公式:

$$\Delta^n F(t_0, \dots, t_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F(t_k)$$

(b) 多项式曲线快速求值

命题： 假设 t_0, t_1, \dots, t_n 的值沿着参数线均匀分布，即 $t_k = t_0 + k\Delta t$ ，

$k = 0, \dots, n$ 。则：

$$\Delta^n F(t_0, \dots, t_n) = n! (\Delta t)^n F[t_0, \dots, t_n]$$

特别地，若 $F(t)$ 为 n 次多项式，有 $\Delta^n F(t_0, \dots, t_n)$ 为常数。

举例： 找出下面数列规律，并根据规律写出下一个数

4, 13, 28, 49, 76, ...

设 $F(t_0) = 4$, $F(t_1) = 13$, $F(t_2) = 28$, $F(t_3) = 49$, $F(t_4) = 76$, 求 $F(t_5) = ?$

$$\Delta^2 F: \quad 6 \quad 6 \quad 6$$

$$\Delta F: \quad 9 \quad 15 \quad 21 \quad 27$$

$$F: \quad 4 \quad 13 \quad 28 \quad 49 \quad 76$$

$$F(t_5) = 6 + 27 + 76 = 109$$

n 次多项式求值： 设 $F(t)$ 为 n 次多项式，取参数步长 Δt 计算曲线上 $p(>n)$ 个点。

步骤 1：计算 $F(t)$ 上 $n+1$ 个点 $F(t_k)$ ，其中 $t_k = t_0 + k\Delta t$ ， $k = 0, \dots, n$ 。

步骤 2：计算 $1, \dots, n$ 阶差分

步骤 3：更新差分并求值

记 $\Delta^i F_k = \Delta^i F(t_k, \dots, t_{i+k})$ ，则向前差分格式如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
F_0 & & & & & & \\
F_1 & \Delta F_0 & & & & & \\
F_2 & \Delta F_1 & \Delta^2 F_0 & & & & \\
F_3 & \Delta F_2 & \Delta^2 F_1 & \Delta^3 F_0 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
F_n & \Delta F_{n-1} & \Delta^2 F_{n-2} & \Delta^3 F_{n-3} & \cdots & \Delta^n F_0 & \\
F_{n+1} & \Delta F_n & \Delta^2 F_{n-1} & \Delta^3 F_{n-2} & \cdots & \Delta^n F_1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\Delta^n F_{j-n} = \Delta^n F_{j-1-n}$$

$$\Delta^i F_{j-i} = \Delta^i F_{j-1-i} + \Delta^{i+1} F_{j-1-i}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, 0, \quad j = n+1, n+2, \dots$$

思考题：

$$1. \text{ 证明 } \Delta^n F(t_0, \dots, t_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F(t_k)$$

$$2. \text{ 证明 } \Delta^n F(t_0, \dots, t_n) = n! (\Delta t)^n F[t_0, \dots, t_n],$$

$$\text{其中 } t_k = t_0 + k\Delta t$$

3. 如何控制误差积累？

4. 自由曲线的动力求值：Dynamic evaluation of free-form curves and surfaces, SIAM J. Scientific Computing 2017.