第三章 参数插值样条曲线曲面

背景：插值样条函数常用于小挠度和单值曲线

大挠度曲线插值需用参数曲线

$P(t)=(x(t),\quad y(t))$， $t\in[a,b]$

§1. Lagrange 插值曲线

- 问题：给定控制点列 Q_i， $i=0,1,\ldots,n$， 以及节点参数 $t_0<t_1<\cdots t_n$，构造参数曲线 $P(t)$，使得 $P(t_i)=Q_i$， $i=0,1,\ldots,n$

- Aitken 算法

  a. 构造分段线性插值曲线

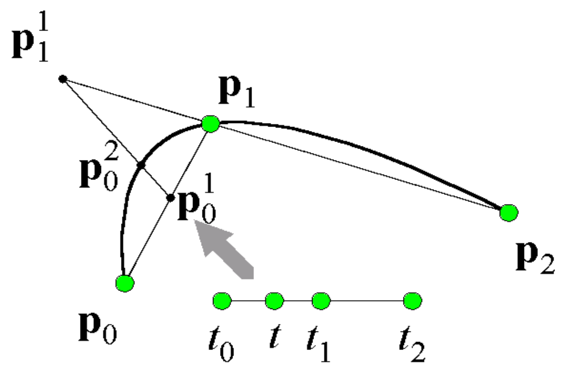
$$P_i^1(t)=\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}Q_i+\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}Q_{i+1},\quad i=0,1,\ldots,n-1$$

  b. 递归构造高阶插值曲线

$$P_i^2(t)=\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_i}P_i^1(t)+\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}P_{i+1}^1(t),\quad i=0,1,\ldots,n-2$$

……

$$P_0^n(t)=\frac{t_n-t}{t_n-t_0}P_0^{n-1}(t)+\frac{t-t_0}{t_n-t_0}P_1^{n-1}(t)$$



重心组合(barycentric combination)

c. 算法

for (i=0,1,…,n) $P_i^0(t)=Q_i$

for (r=1,2,…,n) {

for (i=0,1,…,n-r) {

$$P_i^r(t)=\frac{t_{i+r}-t}{t_{i+r}-t_i}P_i^{r-1}(t)+\frac{t-t_i}{t_{i+r}-t_i}P_{i+1}^{r-1}(t)$$

}

}

Lagrange 插值曲线性质：

a. 仿射不变性：由重心组合性质可证

b. 线性精度：当型值点均匀分布在一条直线上，可得到该直线

c. 不具有凸包性质：非凸组合

d. 不具有变差缩减性质：同上理由

- Closed form 表示

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}Q_iL_i^n(t)$$

其中 $L_i^n(t)$ 为 Lagrange 多项式

$$L_i^n(t)=\frac{\prod_{j=0,\,j\neq i}^{n}(t-t_j)}{\prod_{j=0,\,j\neq i}^{n}(t_i-t_j)},\quad i=0,1,\dots,n$$

由 $L_i^n(t_j)=\delta_{ij}$，可得：

$L_i^n(t)$， $i=0,1,\dots,n$ 构成 n 次多项式空间的一组基。

特别地，如果所有控制点Q_i重合，则插值曲线退化为同一点。

$$\sum_{i=0}^{n} L_i^n(t) \equiv 1$$

- 重心 Lagrange 插值(barycentric Lagrange interpolation)

令 $L(t) = \prod_{j=0}^{n}(t - t_j)$，

$$\omega_i = \frac{1}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(t_i - t_j)}, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

则有 $L_i^n(t) = L(t)\dfrac{\omega_i}{t - t_i}$， $i = 0,1,\ldots,n$

代入$P(t) = \sum_{i=0}^{n} Q_i L_i^n(t)$中，可得

$$P(t) = L(t)\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i}{t - t_i}Q_i$$

又因为$1 = \sum_{i=0}^{n} L_i^n(t) = L(t)\sum_{i=0}^{n}\dfrac{\omega_i}{t - t_i}$，将二式相除可得

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i}{t - t_i}Q_i}{\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i}{t - t_i}}$$

重心 Lagrange 插值比 Lagrange 插值在计算效率上更高，可用较少的乘除运算计算曲线上的点。

- 多项式插值的唯一性

定理：给定控制点列Q_i， $i = 0,1,\ldots,n$， 以及节点参数$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，那么存在唯一的 n 次多项式曲线$P(t)$，使得$P(t_i) = Q_i$， $i = 0,1,\ldots,n$。

- 推广与应用

a. 有理 Lagrange 插值

$Q_i \rightarrow (\omega_i Q_i, \omega_i)$

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}(\omega_i Q_i,\omega_i)L_i^n(t)$$

$$R(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i Q_i L_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i L_i^n(t)}$$

由 Lagrange 插值函数性质，知： $R(t_i)=Q_i$

b. 多项式乘法运算

已知多项式 $f(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$ 和 $g(t)=\sum_{k=0}^{n}b_k t^k$

计算 $f(t)g(t)$

多项式展开： $f(t)g(t)=\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k}a_i b_j\right)t^k$， $O(n^2)$次乘法

Lagrange 表示

$$f(t)=\sum_{k=0}^{2n}f(t_k)L_k^{2n}(t\mid t_0,\dots,t_{2n})$$

$$g(t)=\sum_{k=0}^{2n}g(t_k)L_k^{2n}(t\mid t_0,\dots,t_{2n})$$

有： $f(t)g(t)=\sum_{k=0}^{2n}f(t_k)g(t_k)L_k^{2n}(t\mid t_0,\dots,t_{2n})$， $O(n)$次乘法

c. 曲面插值

输入控制点阵$\{Q_{ij}\}$和节点阵$\{(s_i,t_j)\}$， $i=0,1,\dots,m$； $j=0,1,\dots,n$， 则存在一张次数为(m,n)的二元多项式，使得$P(s_i,t_j)=Q_{ij}$。

构造曲面如下： $P(s,t)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}L_k^m(s|s_0,\dots,s_m)L_l^n(t|t_0,\dots,t_n)Q_{kl}$

$P(s,t)$为张量积曲面

令 $P_k(t)=\sum_{l=0}^{n}L_l^n(t|t_0,\ldots,t_n)Q_{kl}$， $k=0,1,\ldots,m$

则插值曲面可写成

$$P(s,t)=\sum_{k=0}^{m}L_k^m(s|s_0,\ldots,s_m)P_k(t)$$

张量积曲面上的点的计算可以转化成曲线情形处理。

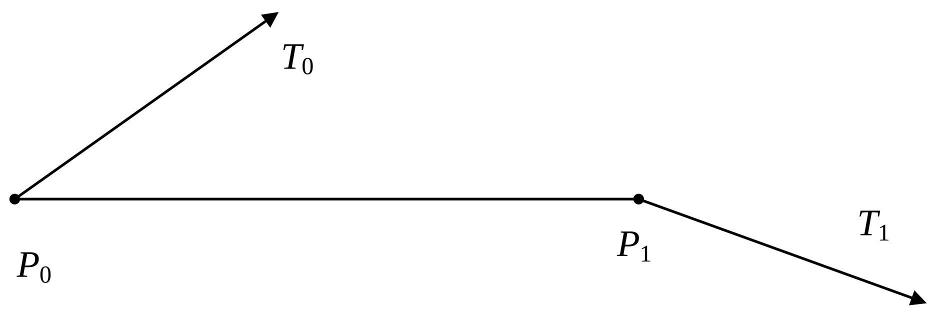
思考题：

a. 证明恒等式 $(x-t)^n=\sum_{k=0}^{n}L_k^n(t|t_0,\ldots,t_n)(x-t_k)^n$

b. 编程实现 Lagrange 曲线插值，并验证控制点共线时得到的插值曲线是直线。

§2. Hermite 插值曲线

- 三次 Hermite 插值曲线



问题：给定两点 P_0， P_1 以及两导矢 T_0， T_1，构造三次曲线 $P(t)$，其中 $t\in[0,1]$，满足如下条件：

$P(0)=P_0$， $P(1)=P_1$， $P'(0)=T_0$ 和 $P'(1)=T_1$

几何构造算法

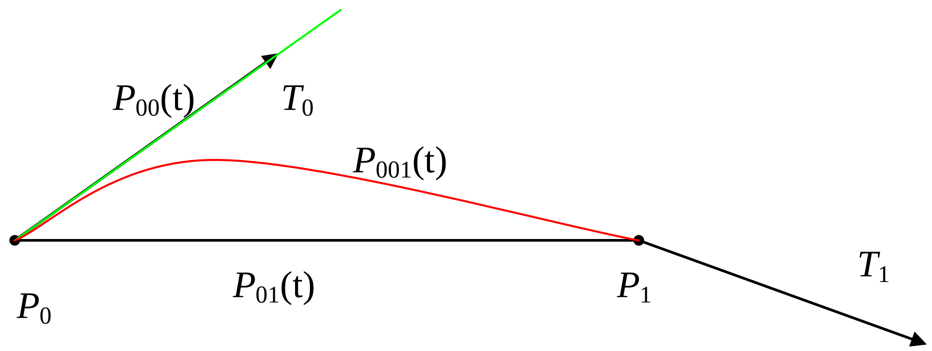
(a) 过 P_0， T_0 构造插值左端点和左切向的直线 $P_{00}(t)=P_0+tP_0'$

(b) 过 P_0， P_1 构造插值两点直线 $P_{01}(t)=(1-t)P_0+tP_1$

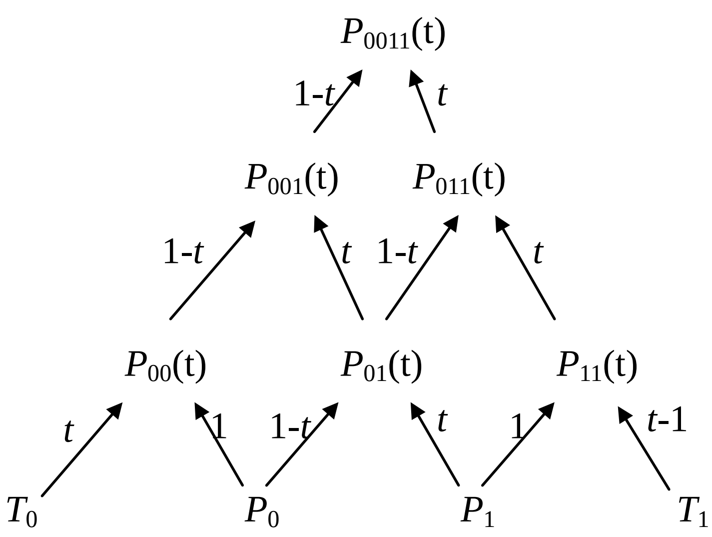
(c) 构造插值 P_0， T_0 及 P_1 的二次曲线 $P_{001}(t)=(1-t)P_{00}(t)+tP_{01}(t)$

(d) 同理，构造插值 P_0，P_1 及 T_1 的二次曲线 $P_{011}(t)=(1-t)P_{01}(t)+tP_{11}(t)$

(e) 构造插值两点 P_0， P_1 以及两导矢 T_0， T_1 的三次曲线 $P_{0011}(t)=(1-t)P_{001}(t)+tP_{011}(t)$



构造线性及二次插值曲线



三次 Hermite 插值的内瓦尔(Neville)算法

验证 $P_{0011}(t)=(1-t)P_{001}(t)+tP_{011}(t)$ 插值给定端点和端切向。

显式表示

$$P_{0011}(t)=h_0(t)P_0+H_0(t)T_0+h_1(t)P_1+H_1(t)T_1$$

其中

$$h_0(t)=(1-t)^2(1+2t)\qquad H_0(t)=t(1-t)^2$$

$$h_1(t)=t^2(3-2t)\qquad H_1(t)=t^2(1-t)$$

Hermite 基函数

$$\begin{pmatrix}h_0(t) & H_0(t) & h_1(t) & H_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -3 & -2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

- 五次 Hermite 插值曲线

问题：给定两点 P_0，P_1，两点处一阶导数 T_0，T_1，二阶导数 M_0，M_1，构造五次曲线 $P(t)$，其中 $t\in[0,1]$

$$P(t)=P_0H_0^5(t)+T_0H_1^5(t)+M_0H_2^5(t)+M_1H_3^5(t)+T_1H_4^5(t)+P_1H_5^5(t)$$

其中

$$H_0^5(t)=(1-t)^3(1+3t+6t^2)$$

$$H_1^5(t)=t(1-t)^3(1+3t)$$

$$H_2^5(t)=\frac{1}{2}t^2(1-t)^3$$

$$H_3^5(t)=\frac{1}{2}t^3(1-t)^2$$

$$H_4^5(t)=-t^3(1-t)(4-3t)$$

$$H_5^5(t)=t^3(10-15t+6t^2)$$

多段五次 Hermite 插值曲线可达到 C^2 连续，但二阶导数给定较困难。

- Hermite 插值样条曲线

问题：给定型值点P_i， $i=0,1,\dots,n$， 以及参数节点t_i， $i=0,1,\dots,n$， 其中参数节点单调增。求参数三次样条曲线$P(t)$满足：

(i) 在$[t_{i-1},t_i]$为 t 的三次参数多项式；

(ii) $P(t)\in C^2[t_0,t_n]$

(iii) $P(t_i)=P_i$， $i=0,1,\dots,n$

类似三次样条函数，建立连续条件

$P(t_i-)=P(t_i+)$，

$m_i=P'(t_i-)=P'(t_i+)$，

$M_i=P''(t_i-)=P''(t_i+)$， $i=1,\dots,n-1$

得到连续性方程

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=3D_i \quad (i=1,2,\dots,n-1)$$

其中 $\lambda_i=\dfrac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i+\Delta t_{i+1}}$， $\mu_i=1-\lambda_i$， $D_i=\dfrac{2}{\Delta t_i+\Delta t_{i+1}}\left(\dfrac{P_{i+1}-P_i}{\Delta t_{i+1}}-\dfrac{P_i-P_{i-1}}{\Delta t_i}\right)$

边界条件类似三次样条函数。

节点选取：

(i) 累加弦长：

$t_0=0$， $t_{i+1}=t_i+\|P_{i+1}-P_i\|$， $i=1,2,\dots,n$

(ii) 均匀节点：

$t_0=0$， $t_1=1$， $\dots$， $t_i=i$， $\dots$， $t_n=n$

(iii) 向心参数化(Lee 1989, CAD)：

$t_0=0$， $t_{i+1}=t_i+\|P_{i+1}-P_i\|^{1/2}$， $i=1,2,\dots,n$

参数样条曲线的主要计算步骤：

(a) 输入型值点P_i， $i=0,1,\ldots,n$

(b) 确定节点参数

(c) 建立连续性方程

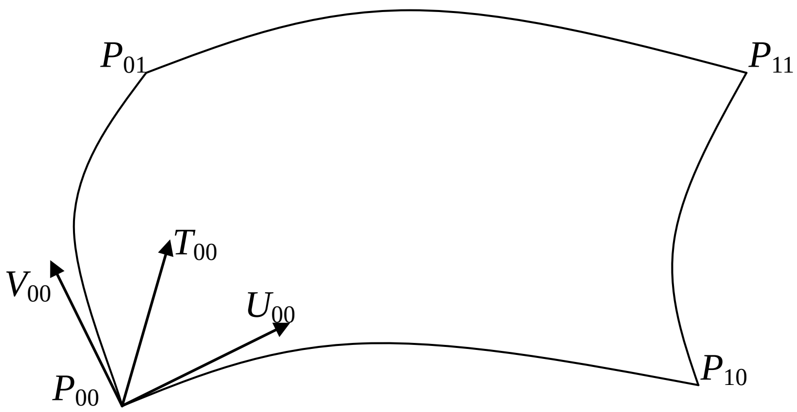
(d) 依据端条件，建立所有型值点处切矢的线性方程组

(e) 求解方程组

(f) 逐段计算参数样条曲线

- Hermite 插值曲面

问题：给定型值点P_{00}，P_{01}，P_{10}，P_{11}，以及每个型值点处的切矢U_{ij}，V_{ij}和扭矢T_{ij}，构造双三次参数曲面插值这些点及切矢与扭矢。



$$P(s,t)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}h_i(s)h_j(t)P_{ij}+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}H_i(s)h_j(t)U_{ij}$$

$$+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}h_i(s)H_j(t)V_{ij}+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}H_i(s)H_j(t)T_{ij}$$

§4. 三次曲线形状分析

考虑三次曲线 $P(t)=Q_0+Q_1t+\frac{1}{2}Q_2t^2+\frac{1}{6}Q_3t^3$， 其中$Q_i=(x_i,y_i)$

曲线的曲率公式$k(t)=\dfrac{P'(t)\wedge P''(t)}{|P'(t)|^3}$，其中$(a_1,b_1)\wedge(a_2,b_2)=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$

曲线$P(t)$拐点满足方程(必要条件) $k(t)=0$

即 $P'(t)\wedge P''(t)=0$

展开，得：$Q_1\wedge Q_2-Q_3\wedge Q_1 t+\frac{1}{2}Q_2\wedge Q_3 t^2=0$

记$p=Q_2\wedge Q_3$， $q=Q_3\wedge Q_1$， $r=Q_1\wedge Q_2$

则拐点方程变为： $pt^2-2qt+2r=0$

若$p\neq 0$，解方程得到：$t_{1,2}=\dfrac{q}{p}\pm\sqrt{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2-\dfrac{2r}{p}}$

记$I=\left(\dfrac{q}{p}\right)^2-\dfrac{2r}{p}$，则$I$为仿射不变量

由拐点方程解的存在与否可以判断

$$I\begin{cases}>0 & \text{可能有两个拐点}\\ =0 & \text{可能有一个拐点}\\ <0 & \text{无实拐点}\end{cases}$$

(a) 单拐曲线

若$p=0$，则拐点方程有唯一解$t=\dfrac{r}{q}$

又$p=Q_2\wedge Q_3$， 易知$Q_2=\gamma Q_3$

相应地，三次曲线方程形式为

$$P(t)=Q_3\left(\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\gamma\right)t^2+Q_1 t+Q_0$$

(b) 二重点

设$P(t_1)=P(t_2)$，将曲线方程代入并化简有

$$Q_1+\frac{1}{2}Q_2(t_1+t_2)+\frac{1}{6}Q_3\left(t_1^2+t_1t_2+t_2^2\right)=0 \qquad (*)$$

$Q_3 \wedge (*) = 0 \rightarrow t_1 + t_2 = \dfrac{2q}{p}$

$Q_2 \wedge (*) = 0 \rightarrow t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = \dfrac{8r}{p}$

联立二元二次方程组，解得

$t_{1,2} = \dfrac{q}{p} \pm \sqrt{-3I}$，其中$I$需满足条件 $I \le 0$

若$I < 0$，曲线存在一个二重点，无拐点

若$I = 0$，曲线无二重点

(c) 尖点

尖点方程$P'(t) = 0$

若t_0为该方程的一个解，则有$P'(t) = (t - t_0)(At + B)$

相应地，曲率方程为$k(t) = \dfrac{(t - t_0)^2 (B \wedge A)}{|t - t_0|^3 |At + B|^3}$

根据该曲率方程(分子表达式)可以推出仿射不变量$I = 0$。

(d) 三次参数曲线奇点分布

若$p = 0$，单拐曲线

若$p \ne 0$，有下面结论

$$I\begin{cases} > 0 & \text{两个拐点} \\ = 0 & \text{尖点} \\ < 0 & \text{二重点} \end{cases}$$

§5. Newton 插值与向前差分

- Newton 基

给定节点$t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n$，牛顿基定义如下：

$N_0(t)=1$

$N_1(t)=t-t_0$

$N_2(t)=(t-t_0)(t-t_1)$

$\cdots$

$N_n(t)=(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{n-1})$

性质：

(a) $N_k(t)=(t-t_0)\cdots(t-t_{k-1})$是 k 次多项式

(b) $N_0(t)$， $N_1(t)_0$， …， $N_n(t)$构成 n 次多项式空间的基

(c) $\sum_{k=0}^{n} c_k N_k(t)$的 Horner 算法(杨辉三角算法)复杂度为 O(n)

- 差商

差商定义：

$$F[t_0]=F(t_0)$$

$$F[t_0,t_1]=\frac{F(t_1)-F(t_0)}{t_1-t_0} \qquad t_1 \neq t_0$$
$$=F'(t_0) \qquad t_1 = t_0$$

…

$$F[t_0,\dots,t_n]=\frac{F[t_1,\dots,t_n]-F[t_0,\dots,t_{n-1}]}{t_n-t_0} \qquad t_n \neq t_0$$
$$=\frac{F^{(n)}(t_0)}{n!} \qquad t_n = t_0$$

命题 1：任意给定曲线$F(t)$和一组节点$t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n$。设$P_{0\dots n}(t)$是由插值数据点$F(t_0)$， $F(t_1)$,…， $F(t_n)$得到的唯一 n 次多项式。则$F[t_0,\dots,t_n]$是插值多项式t^n的系数。

证明：若$t_n \neq t_0$，由内瓦尔公式得

$$P_{0\ldots n}(t)=\frac{t-t_0}{t_n-t_0}P_{1\ldots n}(t)+\frac{t_n-t}{t_n-t_0}P_{0\ldots n-1}(t)$$

比较上述等式两边t^n的系数，得出：

$$F[t_0,\ldots,t_n]=\frac{F[t_1,\ldots,t_n]-F[t_0,\ldots,t_{n-1}]}{t_n-t_0}$$

若$t_n=t_0$，则

$$P_{0\ldots n}(t)=P_{0\ldots 0}(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{F^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k$$

此时t^n的系数为：

$F(t_0,\ldots t_0)=\dfrac{F^{(n)}(t_0)}{n!}$。证毕。

命题 2：任意给定曲线$F(t)$和一组节点$t_0\le t_1\le\cdots\le t_n$。设$P_{0\ldots n}(t)$是由插值数据点$F(t_0)$，$F(t_1)$,…，$F(t_n)$得到的唯一 n 次多项式。则

$$P_{0\ldots n}(t)=\sum_{k=0}^{n}F[t_0,\ldots,t_k]N_k(t)$$

即插值多项式的牛顿系数就是差商。

证明：对 n 用归纳法证明。

$n=0$，由定义知$P_0(t)=F(t_0)$，结论成立。

假设对小于 n 的自然数结论仍成立。由于$N_0(t)$，$N_1(t)$，…，$N_n(t)$构成 n 次多项式的基，故：

$$P_{0\ldots n}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kN_k(t)+c_nN_n(t)$$

又因为$N_n(t_k)=0$，$k=0,1,\ldots,n-1$

推出：$P_{0\ldots n-1}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kN_k(t)$

由于该多项式为$F(t_0)$，$F(t_1),\ldots$，$F(t_{n-1})$的 n–1 次插值多项式，由归纳假设知：$c_k = F[t_0,\ldots,t_k]$，$k = 0,1,\ldots,n-1$

由于 c_n 是 $N_n(t)$ 的系数，也是 t^n 的系数。由命题 1 知 $c_n = F[t_0,\ldots,t_n]$成立。从而命题 2 得证。

- 差商性质小结

(a) 递推性

$$F[t_0,\ldots,t_n]=\frac{F[t_1,\ldots,t_n]-F[t_0,\ldots,t_{n-1}]}{t_n-t_0} \qquad t_n \neq t_0$$

$$=\frac{F^{(n)}(t_0)}{n!} \qquad t_n = t_0$$

(b) 对称性

$F[t_0,\ldots,t_n]=F[t_{\sigma(0)},\ldots,t_{\sigma(n)}]$, 其中 σ 是{0,1,…,n}的任意置换。

(c) 推广的对称性

$$F[t_0,\ldots,t_n]=\frac{F[t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n]-F[t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n]}{t_j-t_i}, \quad t_i \neq t_j$$

(d) 线性

$$(F+G)[t_0,\ldots,t_n]=F[t_0,\ldots,t_n]+G[t_0,\ldots,t_n]$$

$$(cF)[t_0,\ldots,t_n]=cF[t_0,\ldots,t_n]$$

(e) 消去性

$$F[t_0,\ldots,t_n]=\{(t-t_{n+1})F\}[t_0,\ldots,t_n,t_{n+1}]$$

(f) Lebniz 法则

$$(FG)[t_0,\ldots,t_n]=\sum_{k=0}^{n}F[t_0,\ldots,t_k]G[t_k,\ldots,t_n]$$

(g) 插值多项式的最高次系数

$F[t_0,\ldots,t_n]$是插值多项式$P_{0\ldots n}(t)$首项t^n的系数

(h) 插值多项式的系数

$$P_{0\ldots n}(t)=\sum_{k=0}^{n}F[t_0,\ldots,t_k]N_k(t)$$

(i) 低次多项式的差商值

- 如果$F(t)$是 n–1 次多项式，则$F[t_0,\ldots,t_n]=0$

- 如果$F(t)$是 n 次多项式，则$F[t_0,\ldots,t_n]$是$F(t)$中单项式t^n的系数。此时，$F[t_0,\ldots,t_n]$是常数。

思考题：

1 证明：$\left\{\dfrac{1}{x-t}\right\}[t_0,\ldots,t_n]=\dfrac{1}{(x-t_0)\cdots(x-t_n)}$

2 证明多项式的差商是多项式。即证明如果$P(t)$是 t 的多项式，则$P[t_0,\ldots,t_n]$是关于变量$t_0,t_1,\cdots,t_n$的多项式。

- 向前差分

(a) 向前差分定义

$$\Delta^0F(t_0)=F(t_0)$$

$$\Delta^1F(t_0)=F(t_1)-F(t_0)$$

…

一般公式：

$$\Delta^nF(t_0,\ldots,t_n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}F(t_k)$$

(b) 多项式曲线快速求值

命题： 假设$t_0,t_1,\cdots,t_n$的值沿着参数线均匀分布，即$t_k=t_0+k\Delta t$，

$k=0,\dots,n$。则：

$$\Delta^n F(t_0,\dots,t_n)=n!(\Delta t)^n F[t_0,\dots,t_n]$$

特别地，若$F(t)$为 n 次多项式，有$\Delta^n F(t_0,\dots,t_n)$为常数。

举例：找出下面数列规律，并根据规律写出下一个数

4，13，28，49，76，…

设$F(t_0)=4$，$F(t_1)=13$，$F(t_2)=28$，$F(t_3)=49$，$F(t_4)=76$，求$F(t_5)=?$

$$\begin{array}{lccccccccc}
\Delta^2 F: & & & 6 & & 6 & & 6 & & \\
\Delta F: & & 9 & & 15 & & 21 & & 27 & \\
F: & 4 & & 13 & & 28 & & 49 & & 76
\end{array}$$

$F(t_5)=6+27+76=109$

n 次多项式求值：设$F(t)$为 n 次多项式，取参数步长Δt计算曲线上$p(>n)$个点。

步骤 1：计算$F(t)$上 n+1 个点$F(t_k)$，其中$t_k=t_0+k\Delta t$，$k=0,\dots,n$。

步骤 2：计算 1,…,n 阶差分

步骤 3：更新差分并求值

记$\Delta^i F_k=\Delta^i F(t_k,\dots,t_{i+k})$，则向前差分格式如下:

$$\begin{array}{llllll}
F_0 & & & & & \\
F_1 & \Delta F_0 & & & & \\
F_2 & \Delta F_1 & \Delta^2 F_0 & & & \\
F_3 & \Delta F_2 & \Delta^2 F_1 & \Delta^3 F_0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
F_n & \Delta F_{n-1} & \Delta^2 F_{n-2} & \Delta^3 F_{n-3} & \cdots & \Delta^n F_0 \\
F_{n+1} & \Delta F_n & \Delta^2 F_{n-1} & \Delta^3 F_{n-2} & \cdots & \Delta^n F_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\Delta^n F_{j-n}=\Delta^n F_{j-1-n}$$

$$\Delta^i F_{j-i}=\Delta^i F_{j-1-i}+\Delta^{i+1} F_{j-1-i},\quad i=n-1,n-2,\dots,1,0,\quad j=n+1,n+2,\dots$$

思考题：

1. 证明 $\Delta^n F(t_0,\ldots,t_n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}F(t_k)$

2. 证明 $\Delta^n F(t_0,\ldots,t_n)=n!(\Delta t)^n F[t_0,\ldots,t_n]$，

   其中 $t_k=t_0+k\Delta t$

3. 如何控制误差积累？

4. 自由曲线的动力求值：Dynamic evaluation of free-form curves and surfaces, SIAM J. Scientific Computing 2017.