

# 2022 年硕博连读面试

申请人: 谭焱

现硕士导师: 王何宇、张庆海

拟转博士指导教师: 张庆海

浙江大学数学科学学院

November 23, 2021

# 提纲

老师们下午好,我是王何宇老师的硕士生谭焱,今天到这里给各位教授专家做一个硕转博申请报告.我申请的博士指导教师是张庆海教授,接下来我将介绍一下硕士期间的学习和科研经历.

我今天要讲的主要分为三部分, 简单介绍一下个人基本情况后着重说我的一个科研工作三维殷集和布尔代数. 这个工作是张庆海教授安排我做的涉密军工项目的重要部分, 由于涉密原因不能对军工项目进行完整介绍, 所以今天主要讲这个可以公开的殷集和布尔代数. 最后是我计划博士将要进行的三维殷集在军工项目上的下一步应用.

首先是我已完成硕士要求的学分学习并且从中汲取了做科研需要的基础知识. 同时也针对性训练了科研工作需要的能力.

这是军工项目将要做的事情,我们期望通过计算有潜艇表面和海水表面两个动边界的方程,从而实现对潜艇的追踪和反追踪.我的主要工作在对动边界的追踪同时提取拓扑和几何性质上.

就像刚说的潜艇项目,军工领域中动边界的流体方程计算是重要部分.现有方法比如 vof 方法,ft 方法还有水平集法在界面追踪的时候将几何和拓扑问题转化为求解微分方程,简化了理论和计算复杂度也导致了一些问题,比如这里说到的四点,特别是对拓扑信息的捕捉.张庆海教授的想法是用几何和拓扑的手段处理界面追踪这个几何和拓扑的问题.第一步是对动流相几何建模.2020 年张庆海教授和黎至轩学长提出了二维殷集给二维空间中的流相建模.

刚提到了使用殷集对流相建模, 那殷集和布尔代数和几何和拓扑有什么关系呢? 殷集为流相提供了简单表示, 从表示中可以直接得出欧拉示性数, 部分 Betti 数等拓扑不变量, 比如连通分量数和洞的数量. 并且通过殷集可以实现界面追踪的高保真算法, 保留界面上的拓扑信息, 殷集上的布尔运算是研究流相拓扑变化的核心工具, 从理论上支持刻画多相流的拓扑变化. 综上殷集和布尔代数是几何和拓扑的手段解决界面追踪问题, 是我们研究潜艇项目中至关重要的一步.



我们先从数学上定义殷集，殷集是空间中边界有界的半解析开集。有界和解析性是因为计算只有有限的计算资源，只能考虑有限的显示信息，比如没有解析性的两个正则开集的布尔求交可能得到无穷多个连通域。而正则性捕捉了流相连续的本质。先来看二维空间中的殷集，在张庆海教授2020的论文中提供并证明了这个二维殷集的简单表示，并高效实现了布尔代数。如图中熊猫和米老鼠求交运算后的殷集结果。我希望从二维类推到三维空间中，公式表达中可以发现关键在于每个连通分量的边界。

如同二维一样，我们在三维空间中寻找可以合适表达殷集边界的数学概念. 这时二流形分类定理走入我们的视线, 但这还不够, 如图中常见的三维区域中可能存在非流行点, 因此考虑将二流形粘起来的黏合紧曲面.

顺理成章地, 我们类似提供并证明了殷集在三维空间中的高效唯一表示. 黏合紧曲面代替约当线. 如图是一个环面内切两个球, 此时两个球将环面内部分为两个不连通的开集. 所以表示殷集  $y$  的边界是两个对称的, 由两个半球面和半个环面粘起来的同胚于球面的内部有界的黏合紧曲面, 而不是两个球和一个环面. 我们还证明了每个内部有界的黏合紧曲面对应一个连通分量, 每个内部无界的黏合紧曲面对应一个洞.

有了简单表示后, 还需要实现布尔代数来捕捉拓扑变化. 实现过程大致分五步, 计算非流形点, 将黏合紧曲面剪开, 处理曲面片, 最后粘起来唯一表示结果殷集. 下面我以殷集 1,2 交并结果作为示范说明这个过程. $y_1$  是之前说的一个环内挖去两个球, $y_2$  是略大一圈的球, 恰好包含了  $y_1$  右边的小球.

计算非流行点并将黏合紧曲面剪开得到曲面片, 注意因为是两个殷集求交,  $y_2$  把  $y_1$  的一个黏合紧曲面切成了两段,  $y_2$  也被  $y_1$  切出两个圆片. 当求交时, 移除不在另一个殷集内部的曲面片, 如图 a 中移除了左边的半球面和长的柱面, b 中保留了两个圆盘. 然后以有些技巧的方式粘起来得到 d 中的黏合紧曲面表示 c 中的  $y_3$ .

求并时保留的曲面片恰好相反,粘起来的黏合紧曲面如图 f 所示.  $y_3$  是两个连通分量对应两个内部有界的黏合紧曲面, $y_4$  一个连通分量一个洞对应一个内部有界的黏合紧曲面一个内部无界的黏合紧曲面. 再一次验证了我们的殷集表示中可以迅速得到连通分量数 betti 数 0 和洞的数量 betti 数 2. 对几何特征复杂的殷集处理是容易的,因为我们只在非流行点构成的一维 CW 复形上的剪切粘贴. 至此我们已经实现了三维殷集建模和布尔代数.

三维殷集的工作的论文我们还在写,期望使用三维殷集做出应用后论文发表能在二维殷集基础上更上一层楼.

博士阶段计划是将三维点集应用到动边界追踪上,之前提到现有方法对拓扑变化处理的不足. 我计划应用三维点集在张庆海教授提出的 MARS 方法中添加对有拓扑变化的动边界高精度追踪. 也是潜艇项目中的动边界不可或缺的一部分.