

## 第五章 B 样条曲线

### §1. B 样条的提出

#### (a) 数据平滑

给定整数节点型值  $\{y_\nu\}$  ,  $(\nu = \dots, -1, 0, 1, \dots)$

数据平滑公式

$$F_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_\nu L_{n-\nu}, \quad (L_{-\nu} = L_\nu)$$

为保持常数不变,  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} L_\nu = 1$

#### ● 光滑性

设  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |y_\nu| < +\infty$  , 构造  $\{y_\nu\}$  的特征函数(离散 Fourier 变换)

$$T(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_\nu e^{i\nu u},$$

类似地, 有  $e^{-iu}T(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_{\nu+1} e^{i\nu u}$

$$\text{得到 } (e^{-iu} - 1)T(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta y_\nu e^{i\nu u}$$

$$(e^{-iu} - 1)^j T(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta^j y_\nu e^{i\nu u}, \quad j = 0, 1, \dots$$

利用等式  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\nu u} e^{-i\lambda u} du = \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \lambda \\ 1 & \nu = \lambda \end{cases}$ , 可得

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (\Delta^j y_\nu)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 2 \sin \frac{u}{2} \right]^{2j} |T(u)|^2 du$$

$\{L_\nu\}$  的特征函数(由于  $L_{-\nu} = L_\nu$ )

$$\phi(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} L_\nu e^{i\nu u} = L_0 + 2L_1 \cos u + 2L_2 \cos 2u + \dots$$

$$T(u)\phi(u) = \left( \sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v e^{i\upsilon u} \right) \left( \sum_{v=-\infty}^{\infty} L_v e^{i\upsilon u} \right) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} F_v e^{i\upsilon u}$$

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} (\Delta^j F_v)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 2 \sin \frac{u}{2} \right]^{2j} |T(u)|^2 \phi^2(u) du$$

要到达光滑性，即  $\sum_{v=-\infty}^{\infty} (\Delta^j F_v)^2 \leq \sum_{v=-\infty}^{\infty} (\Delta^j y_v)^2$

则  $\{L_v\}$  的特征函数应满足  $|\phi(u)| \leq 1$ 。

### ● 数据偏离

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} (y_v - F_v)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |T(u)|^2 (1 - \phi^2(u))^2 du$$

所以，当  $|\phi(u)| \rightarrow 1$  时，数据偏离小。

**定理：** 对于所有  $n$  均有  $L_n \geq 0$  且  $\sum_{v=-\infty}^{\infty} L_v = 1$ ，则  $\{L_v\}$  必是一个平滑

公式。

证：  $|\phi(u)| = \left| \sum_{v=-\infty}^{\infty} L_v e^{i\upsilon u} \right| \leq \sum_{v=-\infty}^{\infty} L_v = 1$ ，得证。

### ● 平滑精度

**定义：** 平滑公式  $F_n = \sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v L_{n-v}$  称为  $m$  次精确，指它对任意一组

不超过  $m$  次的多项式型值  $\{y_v\}$  是精确的。

**定理：** 公式  $F_n = \sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v L_{n-v}$  称为  $2p+1$  次精确的充要条件是  $\phi(u)-1$

在  $u=0$  处为  $2p+2$  重零点。

## (b) 基型插值公式

$$F(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v L(x-v)$$

其中  $L(x)$  满足  $L(0)=1$ ,  $L(n)=0$ , ( $n \neq 0$ )

$L(x)$  特征函数

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x) e^{ixu} dx$$

相应地, 有  $L(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{ixu} du$

定义: 如果  $P_{k-1}(x) = \sum_n P_{k-1}(n) L(x-n)$ , 称该插值具有  $k-1$  次精度。

如果  $\sum_n P_{k-1}(n) L(x-n) = P_{k-1}(x) + P_v(x)$ , ( $v < k-1$ ), 称该插值具有  $k-1$  次保持。

定理: 如果  $|L(x)| < A e^{-B|x|}$ , 其中  $A, B$  为正常数, 有:

a.  $F(n) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v L(n-v)$  的特征函数  $\phi(u) = \sum_v g(u + 2\pi v)$

b. 当下面两条件成立, 平滑  $F(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v L(x-v)$  具有  $k-1$  次精度

$$g(u) - 1 = u^k h_1(u), \quad h_1(0) \neq 0$$

$$g(u) = (u - 2\pi v)^k h_1(u), \quad h_1(2\pi v) \neq 0, v = \pm 1, \pm 2, \dots$$

(c) 中心插值公式与 B 样条的引入

● 中心插值公式

用  $k$  个整数节点上的值决定一个次数不超过  $k-1$  的多项式

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n c_k(x-n)$$

令  $y_0^* = 1$ ,  $y_j^* = 0$  ( $j \neq 0$ ), 当  $k=1, 2, 3, \dots$  时, 有

$$c_1(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

$$c_2(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$c_3(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| < 1/2 \\ \frac{1}{2!}(1-|x|)(2-|x|) & 1/2 < |x| < 3/2 \\ 0 & |x| > 3/2 \end{cases}$$

$$c_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{2!}(1-x^2)(2-|x|) & |x| < 1 \\ \frac{1}{3!}(1-|x|)(2-|x|)(3-|x|) & 1 < |x| < 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

$k$  阶中心插值公式的显式表示, 记

$$x^{[k]-1} = \begin{cases} x(x^2-1)\cdots(x^2-(\nu-1)^2), & \text{若 } k=2\nu \\ \left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left(x^2-\frac{(2\nu-1)^2}{4}\right), & \text{若 } k=2\nu+1 \end{cases}$$

$$\text{则有: } c_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \delta^k x_+^{[k]-1}$$

$$\text{其中 } \mathcal{F}(x) = f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\delta^k f(x) = \delta(\delta^{k-1} f(x)) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f\left(x+\frac{k}{2}-j\right)$$

## ● B 样条引入

计算上述中心插值公式的特征函数

$$g_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} c_1(x) e^{iux} dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{iux} dx = \frac{\sin u/2}{u/2}$$

$$g_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} c_2(x) e^{iux} dx = \left(\frac{\sin u/2}{u/2}\right)^2$$

$$g_3(u) = \int_{-\infty}^{\infty} c_3(x) e^{iux} dx = \left(\frac{\sin u/2}{u/2}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{8}u^2\right)$$

$$g_4(u) = \int_{-\infty}^{\infty} c_4(x) e^{iux} dx = \left(\frac{\sin u/2}{u/2}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{6}u^2\right)$$

由特征函数构造基函数

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u/2}{u/2} e^{iux} du \\
c_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin u/2}{u/2} \right)^2 e^{iux} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin u/2}{u/2} \right) \left[ \int_{x-1/2}^{x+1/2} e^{iut} dt \right] du \\
&= \int_{x-1/2}^{x+1/2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin u/2}{u/2} \right) e^{iut} du \right] dt \\
&= \delta \int_{-\infty}^x c_1(t) dt
\end{aligned}$$

将上述公式推广到任意阶情形，有

$$M_1(x) = c_1(x)$$

$$M_k(x) = \delta \int_{-\infty}^x M_{k-1}(t) dt$$

$$\text{通式: } M_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin u/2}{u/2} \right)^k e^{iux} du$$

构造

$$M_3(x) = \begin{cases} 3/4 - x^2 & |x| < 1/2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - |x| \right)^2 & 1/2 < |x| < 3/2 \\ 0 & |x| > 3/2 \end{cases}$$

$$M_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{3!} \left[ (2 - |x|)^3 - 4(1 - |x|)^3 \right] & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{3!} (2 - |x|)^3 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

● 平滑公式  $F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_{\nu} M_k(x - \nu)$  的性质

对应于  $F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_{\nu} M_k(x - \nu)$  离散平滑公式的特征函数

$$\phi_k(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} g_k(u + 2\pi\nu)$$

特别地，有  $\phi_k(0) = 1$  且

$$\phi_k(u) = M_k(0) + 2M_k(1)\cos u + 2M_k(2)\cos 2u + \dots$$

$$1 = \phi_1(u) = \phi_2(u) > \phi_3(u) > \dots > \phi_k(u) > \dots > 0$$

## ● 为什么称为 B 样条

当  $k=4$  时，曲线形状反映了物理“样条”的形状，

多项式函数或多项式样条函数可由这种函数表示。

**定理 1.**  $k$  阶 B 样条基型公式  $F(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v M_k(x-v)$  是  $k-1$  次多项式

的平滑，其平滑度随着次数  $k$  可递增。该公式对于一次函数

是精确的，当  $k > 1$  时，它具有  $k-1$  次保持的性质。

**推论：**任一次数不超过  $k-1$  的多项式  $P_{k-1}(x)$  可唯一地表示成

$$P_{k-1}(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v M_k(x-v),$$

其中  $\{y_v\}$  是某一组与  $P_{k-1}(x)$  有关的另一个具有相同次数的多项式在  $x=v$  处的值。

**定理 2.** 任意一条  $k$  阶样条曲线必可唯一地表示成同阶 B 样条的线性组合形式。

## §2. 均匀 B 样条的定义(uniform B-spline)

### ● B 样条函数的几种等价定义( $|x| \leq k/2$ )

#### (1) 积分定义

$$M_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin u/2}{u/2} \right)^k e^{iux} du$$

#### (2) 积分-差分递推定义

$$M_1(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

$$M_k(x) = \delta \int_{-\infty}^x M_{k-1}(t) dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} M_{k-1}(t) dt$$

### (3) 差分定义

$$M_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \delta^k x_+^{k-1}$$

$$\text{其中 } x_+^n = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$x_+^n$  在整个定义域上有直到  $n-1$  阶连续导数。

### (4) 卷积定义

$M_1(x)$  定义同(2)，一般

$$M_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_j(t) M_{k-j}(x-t) dt$$

### (5) 纯差分递推定义

$$M_k(x) = \frac{\frac{k}{2} - x}{k-1} M_{k-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{k}{2} + x}{k-1} M_{k-1}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

### ● 整数节点均匀 B 样条

$M_k(x)$  是以  $-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}+1, \dots, \frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}$  为节点的 B 样条

考虑节点序列  $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}\}$ ，其中  $t_j = j (j = i, i+1, \dots, i+k)$ ，有

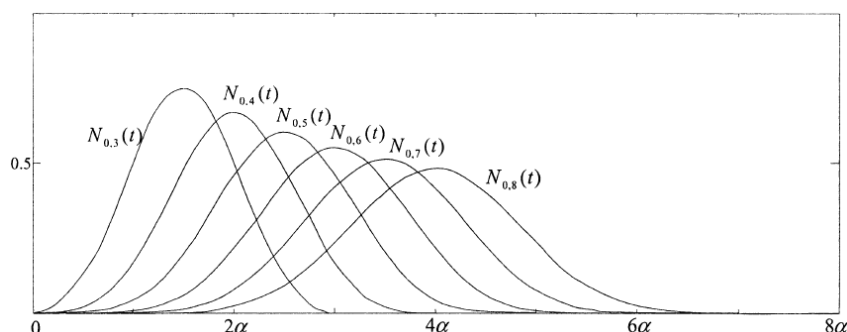
$$N_{i,k}(t) = M_k\left(t_i + \frac{k}{2} - t\right)$$

### ● 一般均匀 B 样条

设节点序列  $t_i = i\alpha$ ，( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )，定义 B 样条函数

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t_i < t < t_{i+1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 N_{i,k}(t) &= \frac{1}{\alpha} \int_{t-\alpha}^t N_{i,k-1}(x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha N_{i,k-1}(t-x) dx \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^t N_{i,k-1}(x) dx - \int_{-\infty}^{t-\alpha} N_{i,k-1}(x) dx \right)
 \end{aligned}$$



### §3. 非均匀 B 样条的定义

#### ● 差商定义

##### (a) 差商概念

设有严格递增的节点序列  $(t_0, t_1, \dots, t_N)$ , 对于函数  $f(t)$ , 定义差商(或均差)

$$f(t_i, t_{i+1}) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) \equiv [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}]f = \frac{f(t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) - f(t_i, \dots, t_{i+k-1})}{t_{i+k} - t_i}$$

##### (b) $k$ 阶( $k-1$ 次)非均匀 B 样条

给定节点分割  $\pi_n^k = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$ , 定义

$$N_{i,k}(t) = (t_{i+k} - t_i) [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (\cdot - t)_+^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

为  $\pi_n^k$  上的  $k$  阶( $k-1$  次)B 样条基函数。

$$\text{特别地, } N_{i,k}(t) = (t_{i+k} - t_i) \sum_{j=0}^k \frac{(t_{i+j} - t)_+^{k-1}}{\omega'(t_{i+j})}$$

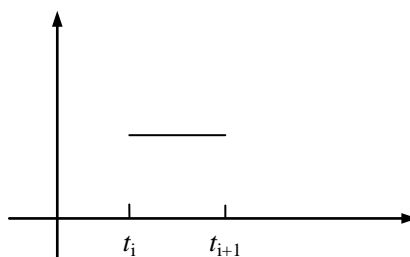
$$\text{其中 } \omega(t) = (t - t_i)(t - t_{i+1}) \cdots (t - t_{i+k})$$



例：

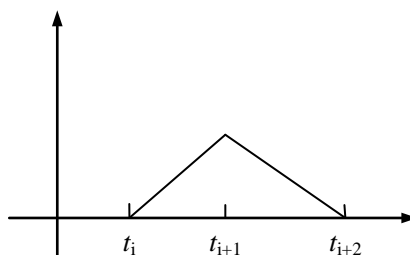
$$k=1$$

$$\begin{aligned} N_{i,1}(t) &= (t_{i+1} - t_i) [t_i, t_{i+1}] (\cdot - t)_+^0 \\ &= (t_{i+1} - t)_+^0 - (t_i - t)_+^0 \\ &= \begin{cases} 1 - 1 = 0 & t < t_i \\ 1 - 0 = 1 & t_i < t < t_{i+1} \\ 0 - 0 = 0 & t > t_{i+1} \end{cases} \end{aligned}$$



$$k=2$$

$$\begin{aligned} N_{i,2}(t) &= (t_{i+2} - t_i) [t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] (\cdot - t)_+^1 \\ &= [t_{i+1}, t_{i+2}] (\cdot - t)_+^1 - [t_i, t_{i+1}] (\cdot - t)_+^1 \\ &= \begin{cases} 0 & t < t_i \\ 1 - \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} & t_i < t < t_{i+1} \\ \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} & t_{i+1} < t < t_{i+2} \\ 0 & t > t_{i+2} \end{cases} \end{aligned}$$



## ● 积分定义

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i < t < t_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{i,k-1} N_{i,k-1}(x) dx - \int_{-\infty}^t \delta_{i+1,k-1} N_{i+1,k-1}(x) dx$$

$$\text{其中 } \delta_{i,k} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(x) dx \right)^{-1}$$

$$\text{易知： } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{i,k} N_{i,k}(t) dt = 1, \quad \delta_{i,k} = \frac{k}{t_{i+k} - t_i}$$

## §4. deBoor-Cox 公式

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_i < t < t_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t), \quad k \geq 2$$

证明:

$$\begin{aligned}
 N_{i,k}(t) &= (t_{i+k} - t_i) [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (\cdot - t)_+^{k-1} \\
 &= (t_{i+k} - t_i) [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] [(\cdot - t)_+^{k-2} (\cdot - t)] \\
 &= (t_{i+k} - t_i) \left\{ (t_i - t) [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (\cdot - t)_+^{k-2} \right. \\
 &\quad \left. + [t_i, t_{i+1}] (\cdot - t) [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (\cdot - t)_+^{k-2} \right\} \\
 &= (t_{i+k} - t_i) \left\{ \frac{t_i - t}{t_{i+k} - t_i} [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (\cdot - t)_+^{k-2} - \frac{t_i - t}{t_{i+k} - t_i} [t_i, \dots, t_{i+k-1}] (\cdot - t)_+^{k-2} \right. \\
 &\quad \left. + [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (\cdot - t)_+^{k-2} \right\} \\
 &= \frac{t_i - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t_i}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \\
 &= \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t)
 \end{aligned}$$

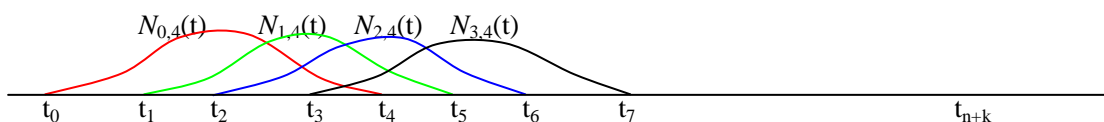
## §5. B 样条的基本性质

### (1) 正性与局部支柱性(local support)

$$N_{i,k}(t) \begin{cases} > 0 & t \in (t_i, t_{i+k}) \\ = 0 & t \notin [t_i, t_{i+k}] \end{cases}$$

在区间  $(t_i, t_{i+1})$  上有  $k$  个  $k$  阶 B 样条基函数  $N_{i-k+1,k}(t)$ ,

$N_{i-k+2,k}(t), \dots, N_{i,k}(t)$  非零, 其余全为零。



### (2) 分段多项式(piecewise polynomial)

$N_{i,k}(t)$  在每一非零区间  $(t_j, t_{j+1})$  上是次数不超过  $k-1$  次的多项

式;

若节点  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$  都是单节点, 则  $N_{i,k}(t)$  在这些节点处为  $k-2$  次连续。

### (3) 权性(partition of unity)

给定节点分割  $\pi_n^k = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$ ,

得到 B 样条基函数  $N_{i,k}(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 则有

$$\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) \equiv 1, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$$

证明: 由定义知  $\sum_{i=k-1}^n N_{i,1}(t) \equiv 1, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$

当  $k > 1$  时,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) &= \sum_{i=0}^n \left[ \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \right] \\ &= \frac{t-t_0}{t_{k-1}-t_0} N_{0,k-1}(t) + \sum_{i=1}^n N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{n+k}-t}{t_{n+k}-t_{n+1}} N_{n+1,k-1}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n N_{i,k-1}(t), \quad \text{其中 } t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] \end{aligned}$$

重复使用 deBoor-Cox 公式, 有

$$\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k-1}(t) = \sum_{i=2}^n N_{i,k-2}(t) = \dots = \sum_{i=k-1}^n N_{i,1}(t) = 1$$

命题得证。

### (4) 微分-差分公式(derivative)

$$N'_{i,k}(t) = \frac{k-1}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) - \frac{k-1}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

证法 1, 由 deBoor-Cox 公式归纳证明。

证法 2, 由 B 样条基函数的积分定义两边求导可得。

### (5) 线性无关性(linear independence)

$\{N_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$  线性无关。

设  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i N_{i,k}(t)$ , 若  $\mathbf{p}(t) = 0, t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$ , 须证  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1 = \dots = \mathbf{c}_n = 0$ 。

当  $k=2$  时,  $\mathbf{p}(t)$  为分段线性曲线, 该曲线退化为一点当且仅当所有控制顶点重合, 命题成立。

假定阶数为  $k-1$  时零向量  $\mathbf{B}$  样条曲线的系数全为零。

设  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i N_{i,k}(t) = 0$ , 对  $t$  求导, 可得

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{p}'(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i \left[ \frac{k-1}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) - \frac{k-1}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \right] \\ &= (k-1) \sum_{i=0}^n \frac{\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{c}_{-1} = 0$

由假设知  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1 = \dots = \mathbf{c}_n = \mathbf{c}$ , 所以  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i N_{i,k}(t) = \mathbf{c} = 0$ , 命题得证。

## (6) 可退化性

取节点  $t_{i-k+2} = t_{i-k+3} = \dots = t_i < t_{i+1} = t_{i+2} = \dots = t_{i+k-1}$ ,  $\tau = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \in [0, 1]$ ,

则  $N_{j,k}(t) = B_{j-i+k-1,k-1}(\tau)$ ,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $j = i - k + 1, i - k + 2, \dots, i$ 。

此性质表明 Bernstein 基是  $\mathbf{B}$  样条基的退化形式。

思考题:

1. 利用差商方法推导出  $N_{i,3}(t)$  的表达式。

2. 证明  $\frac{1}{t_{i+k} - t_i} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(x) dx = \frac{1}{k}$ , 其中  $N_{i,k}(x)$  为非均匀  $\mathbf{B}$  样条基函数。

3. 阅读文献 P. Feng, J. Warren. Discrete bi-Laplacians and

biharmonic B-splines, Siggraph 2012.

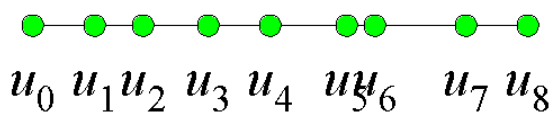
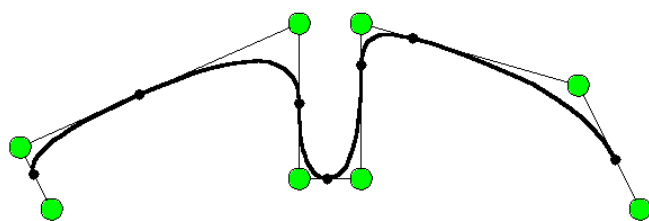
4. 阅读文献 I. J. Schoenberg. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, 1946.

## §6. B 样条曲线

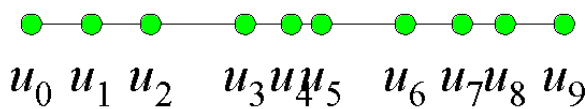
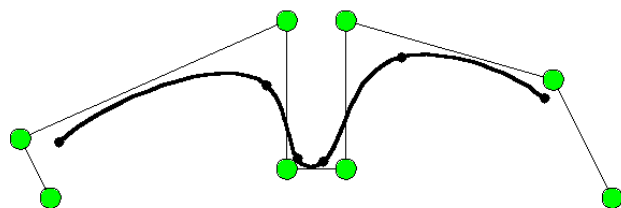
### ● 定义

给定节点分割  $\pi_n^k = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$  及控制顶点  $\{P_i\}_{i=0}^n$ ,  $k$  阶 B 样条曲线

线定义为  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$ ,  $t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$



三阶(2次)B 样条曲线



四阶(3次)B 样条曲线

### ● 性质

#### (1) 凸包性质(convex hull)

曲线  $P(t)$  位于其控制多边形的凸包内。

(2) 仿射不变性(affine invariance)

对于任意仿射变换  $A$  有  $AP(t) = \sum_{i=0}^n AP_i N_{i,k}(t)$ 。

(3) 直线再生性(linear reproduction)

若控制顶点  $\{P_i\}_{i=0}^n$  共线，则  $B$  样条曲线也位于同一条直线上。

设  $L(t)$  是线性函数，令  $\bar{t}_j = \frac{t_{j+1} + \dots + t_{j+k-1}}{k-1}$ ，( $j = 0, 1, \dots, n$ ) 则有

$$L(t) = \sum_{j=0}^n L(\bar{t}_j) N_{j,k}(t)。$$

(4) 局部性质(local)

a. 当  $t \in [t_l, t_{l+1}]$  时， $P(t) = \sum_{i=l-k+1}^l P_i N_{i,k}(t)$ ，此时曲线只与

$\{P_{l-k+1}, P_{l-k+2}, \dots, P_l\}$  有关。

b. 修改控制顶点  $P_l$ ，曲线段  $P(t)$ ， $t \in [t_l, t_{l+k}]$  将发生改变，而其它部分不变。

(5) 分段多项式与连续阶(piecewise polynomial, continuity order)

$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$  在区间  $[t_l, t_{l+1}]$  上是不超过  $k-1$  次多项式曲线，

在重数为  $m$  节点处连续阶为  $C = k-1-m$ ，整条曲线的连续阶  $C \geq k-1 - \max_{k-1 \leq j \leq n+1} \{m_j\}$ ，其中  $m_j$  表示节点  $t_j$  的重数。

(6) 包络性质(envelope)

设  $t \in [t_l, t_{l+1}]$ ，有

$$P(t) = \sum_{i=l-k+1}^l P_i N_{i,k}(t) = \sum_{i=l-k+1+r}^l P_i^{[r]}(t) N_{i,k-r}(t), \text{ 其中}$$

$$P_i^{[r]}(t) = \begin{cases} P_i & r=0 \\ \frac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i} P_i^{[r-1]}(t) + \frac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_{i-1}} P_{i-1}^{[r-1]}(t) & r>0 \end{cases}$$

构造 de Boor-Cox 曲线簇

$$P^{[r]}(t; \tau) = \sum_{i=r}^n P_i^{[r]}(\tau) N_{i,k-r}(t)$$

引理：设  $k$  阶 B 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$

$m$  次可微，且  $r+m \leq k-2$ ，则

$$\left. \frac{d^m P^{[r]}(t; \tau)}{d\tau^m} \right|_{\tau=t} = \frac{C_{k-m-1}^r}{C_{k-1}^r} \frac{d^m P(t)}{dt^m}, \quad \tau \in [t_{k-1}, t_{n+1}]。$$

定理： $k$  阶 B 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$  是曲线簇

$$P^{[r]}(t; \tau) = \sum_{i=r}^n P_i^{[r]}(\tau) N_{i,k-r}(t), \quad t_{k-1} \leq t, \tau \leq t_{n+1}, \quad k \geq 3, \quad r = 1, 2, \dots, k-2$$

的包络。

证明：容易验证  $P^{[r]}(t; t) = \sum_{i=r}^n P_i^{[r]}(t) N_{i,k-r}(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t) = P(t)$

$$\text{有引理知 } \left. \frac{dP^{[r]}(t; \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t} = \frac{C_{k-2}^r}{C_{k-1}^r} \frac{dP(t)}{dt}, \quad \tau \in [t_{k-1}, t_{n+1}]。$$

(7) 保凸性(convex preserving)

若控制多边形  $P_0 P_1 \dots P_n$  是凸多边形，则 B 样条曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t) \text{ 是凸曲线。}$$

对 B 样条曲线进行节点加密得到割角控制多边形序列，

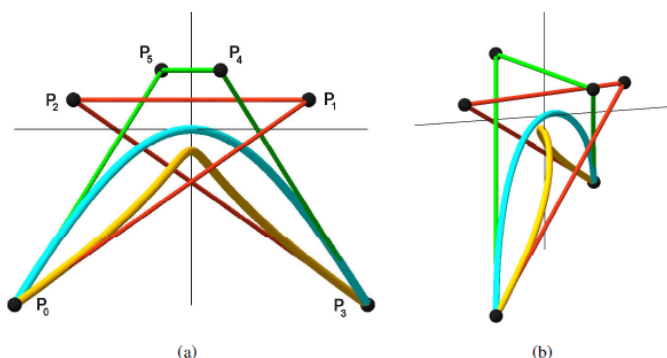
且控制多边形序列收敛到 B 样条曲线本身，易知 B 样

条曲线具有保凸性。

# (8) 变差缩减性(V.D.=variation diminishing)

平面  $k$  阶 B 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$  与此平面上任一直线的交点的个数不多于该直线与控制多边形交点的个数。

**证明：** B 样条曲线可以通过节点插入得到 Bézier 样条曲线，而节点插入后得到的控制多边形是由原控制多边形割角得到(见后面§8 节)，即：节点插入后的控制多边形形式变差缩减的。又 Bézier 曲线是变差缩减的，所以原 B 样条曲线是变差缩减的。



扭结控制多边形，但曲线可以没有扭结(CAGD 2011)。

## ● 求值

设  $t \in [t_l, t_{l+1}]$ ，有

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{i=l-k+1}^l P_i N_{i,k}(t) \\
 &= \sum_{i=l-k+1}^l P_i \left[ \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \right] \\
 &= \sum_{i=l-k+2}^l \left[ \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} P_i + \frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i} P_{i-1} \right] N_{i,k-1}(t)
 \end{aligned}$$



$$= \sum_{i=l-k+1+r}^l P_i^{[r]}(t) N_{i,k-r}(t)$$

其中

$$P_i^{[r]}(t) = \begin{cases} P_i & r=0 \\ \frac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i} P_i^{[r-1]}(t) + \frac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_{i-1}} P_{i-1}^{[r-1]}(t) & r>0 \end{cases}$$

$$P(t) = P_l^{[k-1]}(t)$$

算法

for ( $i=l-k+1$ ;  $i \leq l$ ;  $i++$ )  $P_i^{[0]}(t) = P_i$

for ( $r=1$ ;  $r \leq k-1$ ;  $r++$ ) {

for ( $i=l-k+1+r$ ;  $i \leq k-1$ ;  $i++$ ) {

$$\lambda = (t - t_i) / (t_{i+k-r} - t_i);$$

$$P_i^{[r]}(t) = \lambda P_i^{[r-1]}(t) + (1 - \lambda) P_{i-1}^{[r-1]}(t);$$

}

}

output  $P(t) = P_l^{[k-1]}(t)$

## ● 求导

给定 B 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$ ,  $t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$

一阶速端曲线(hodograph)为

$$P'(t) = (k-1) \sum_{i=0}^n P_i \left[ \frac{N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right]$$

$$= (k-1) \sum_{i=1}^n \frac{P_i - P_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t)$$

高阶速端曲线

$$P^{(r)}(t) = \sum_{i=r}^n P_i^{[r]} N_{i,k-r}(t)$$

其中

$$P_i^{[r]} = \begin{cases} P_i & r=0 \\ \frac{(k-r)(P_i^{[r-1]} - P_{i-1}^{[r-1]})}{t_{i+k-r} - t_i} & 0 < r \leq k-1 \end{cases}$$

速端曲线仍是 B 样条曲线，仍可以用 de Boor-Cox 公式求值。

## ● 重节点与重顶点

### (a) 端点插值

给定节点分割  $\pi_n^k = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$  满足

$$t_0 = t_1 = \dots = t_{k-1} < t_k \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} = \dots = t_{n+k}$$

则  $k$  阶 B 样条基函数满足下面等式

$$N_{i,k}(t_{k-1}+) = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t_{n+1}-) = \begin{cases} 1 & i=n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

B 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$  插值端点，即

$$P(t_{k-1}) = P_0, \quad P(t_{n+1}) = P_n$$

另外，由速端曲线公式  $P'(t) = (k-1) \sum_{i=1}^n \frac{P_i - P_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t)$  知

$$P'(t_{k-1}+) = (k-1) \frac{P_1 - P_0}{t_k - t_1} N_{1,k-1}(t_{k-1}+) = (k-1) \frac{P_1 - P_0}{t_k - t_1}$$

$$P'(t_{n+1}-) = (k-1) \frac{P_n - P_{n-1}}{t_{n+k-1} - t_n} N_{n,k-1}(t_{n+1}-) = (k-1) \frac{P_n - P_{n-1}}{t_{n+k-1} - t_n}$$

进一步，有

$P^{(r)}(t_{k-1}+)$ 只与  $\{P_0, \dots, P_r\}$  有关

$P^{(r)}(t_{n+1}-)$ 只与  $\{P_n, \dots, P_{n-r}\}$  有关

### (b) 内部尖点

设  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_l < t_{l+1} = \dots = t_{l+k-1} < t_{l+k} \leq \dots \leq t_{n+k}$ ，则有

$$N_{i,k}(t_{l+1}) = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

从而，有  $P(t_{l+1}) = P_l$ ，即曲线插值控制顶点  $P_l$ 。

容易验证  $N_{l,k-1}(t_{l+1}-) = 1$ ， $N_{l+1,k-1}(t_{l+1}+) = 1$ ，并由

$$P'(t) = (k-1) \sum_{i=1}^n \frac{P_i - P_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) \text{ 可得}$$

$$P'(t_{l+1}-) = (k-1) \frac{P_l - P_{l-1}}{t_{l+k-1} - t_l}, \quad P'(t_{l+1}+) = (k-1) \frac{P_{l+1} - P_l}{t_{l+k} - t_{l+1}}。$$

### (c) 重顶点

若  $P_{l+1-k} = \dots = P_l$ ，则  $P(t)$  在  $P_l$  处为尖点，

$$\text{当 } t \in [t_l, t_{l+1}] \text{ 时， } P(t) = \sum_{i=l+1-k}^l P_i N_{i,k}(t) \equiv P_l。$$

**注：**重顶点得到退化曲线段，可能会引起计算问题。实际造型中通常采用重节点技术产生尖点。

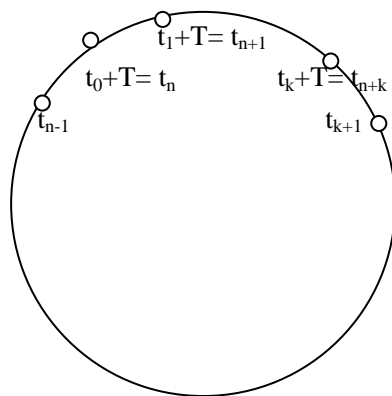
## ● 周期曲线(闭曲线)

$k$  阶周期 B 样条曲线可令头  $k$  个节点区间与后  $k$  个节点区间一致得到。

设节点向量为  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+k}$ ，且满足

$$t_n - t_0 = t_{n+1} - t_1 = \dots = t_{n+k} - t_k， \text{ 则}$$

B 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$ ，其中  $P_0 = P_n$ ， $t \in [t_0, t_n]$ ，为闭曲线。



当  $t \in [t_l, t_{l+1}]$ ,  $(0 \leq l < n)$ , B 样条曲线

$$P(t) = \sum_{i=l-k+1}^l P_{(i+n)\%n} N_{(i+n)\%n,k}(t)$$

## §7. 均匀 B 样条曲线(uniform B-spline curve)

取节点向量为  $\{t_j = j\}$ , 则相应的  $k$  阶 B 样条基函数  $N_{i,k}(t)$  有下面性质:

- (a)  $N_{i,k}(t) = \frac{t-i}{k-1} N_{i,k-1}(t) + \frac{i+k-t}{k-1} N_{i+1,k-1}(t)$
- (b)  $N'_{i,k}(t) = N_{i,k-1}(t) - N_{i+1,k-1}(t)$
- (c)  $N_{i,k}(t) = N_{0,k}(t-i)$

### ● 均匀 B 样条曲线的卷积性质

设均匀 B 样条曲线为  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$ , 利用 B 样条卷积性质,

可得:  $N_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{k-m}(t-\tau) N_m(\tau) d\tau$ , 将 B 样条曲线改写为

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_k(t-i) \\ &= \sum_{i=0}^n P_i \int_{-\infty}^{+\infty} N_{k-m}(t-\tau-i) N_m(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^n P_i N_{k-m}(t-\tau-i) N_m(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k-m}(t-\tau) N_m(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k-m}(t-\tau) N_m(\tau) d\tau \\ &= P_{k-m}(t) * N_m(t) \end{aligned}$$

● 二次均匀 B 样条(quadratic B-spline curve)

(1) 矩阵表示

$$\text{当 } t \in [l-2, l-1] \text{ 时, 有 } P(t) = \sum_i P_i N_{i,3}(t) = \sum_{i=l}^{l+2} P_i N_{i,3}(t)$$

一般地, 作参数变换  $u = t - l + 2$ , 有

$$P_i(u) = \sum_{j=0}^2 P_{i+j} N_{j,3}(u), \quad u \in [0,1]$$

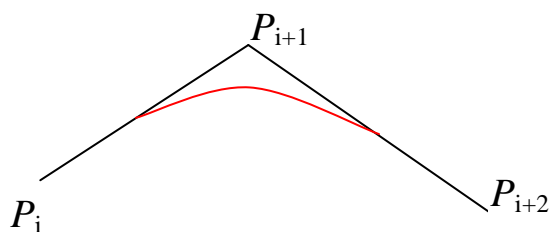
$$\text{又因为 } N_{0,3}(u) = \frac{1}{2}(1-u)^2, \quad N_{1,3}(u) = \frac{1}{2}(1+2u-2u^2), \quad N_{2,3}(u) = \frac{1}{2}u^2$$

$$\text{所以 } P_i(u) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{bmatrix}$$

(2) 二次均匀 B 样条的几何特性

$$P_i(0) = \frac{1}{2}(P_i + P_{i+1}), \quad P_i(1) = \frac{1}{2}(P_{i+1} + P_{i+2})$$

$$P_i'(u) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{bmatrix}$$



$$P_i'(0) = P_{i+1} - P_i, \quad P_i'(1) = P_{i+2} - P_{i+1}$$

若  $P_{i+1} = P_i$ , 则  $P_i(u)$  是过  $P_i$  与  $P_i(1) = \frac{1}{2}(P_{i+1} + P_{i+2})$  的直线段。

若  $P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  共线,  $P_i(u)$  也是一条直线段。

● 三次均匀 B 样条(cubic B-spline curve)

$$P_i(u) = \sum_{j=0}^3 P_{i+j} N_{j,4}(u), \quad u \in [0,1], \quad \text{其中}$$

$$N_{0,4}(u) = \frac{1}{6}(1-u)^3$$

$$N_{1,4}(u) = \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4)$$

$$N_{2,4}(u) = \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)$$

$$N_{3,4}(u) = \frac{1}{6}u^3$$

$$\text{所以 } P_i(u) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \\ P_{i+3} \end{bmatrix}$$

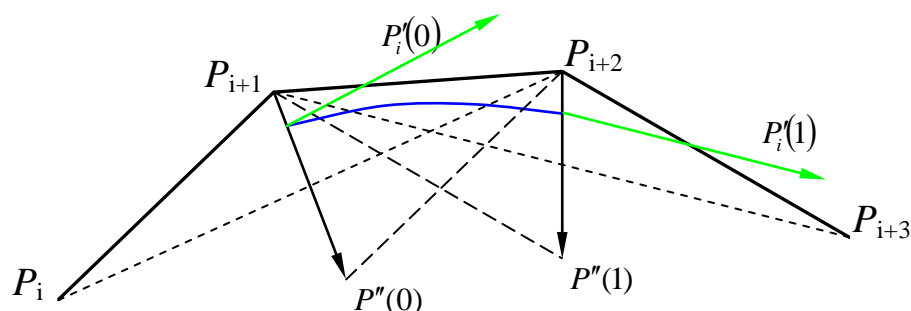
三次均匀 B 样条的几何特性

$$P_i(0) = \frac{1}{6}(P_i + 4P_{i+1} + P_{i+2}) = P_{i+1} + \frac{1}{6}[(P_i - P_{i+1}) + (P_{i+2} - P_{i+1})]$$

$$P_i(1) = \frac{1}{6}(P_{i+1} + 4P_{i+2} + P_{i+3}) = P_{i+2} + \frac{1}{6}[(P_{i+1} - P_{i+2}) + (P_{i+3} - P_{i+2})]$$

$$P'_i(0) = \frac{1}{2}(P_{i+2} - P_i), \quad P'_i(1) = \frac{1}{2}(P_{i+3} - P_{i+1})$$

$$P''(0) = P_i - 2P_{i+1} + P_{i+2}, \quad P''(1) = P_{i+1} - 2P_{i+2} + P_{i+3}$$



思考题:

1. 设  $N_{i,k}(t)$  是  $\{t_j = j\}$  上的等距 B 样条基函数, 设计一个算法把在区间  $[l, l+1]$  的函数  $N_{i,k}(t)$  表示成 Bernstein 基函数的线性组合。
2. 利用矩阵表示形式, 导出  $u \in [0, 0.5]$  时的三次 B 样条控制顶点。

## §8. 节点插入与离散 B 样条(knot insertion and discrete B-spline)

### ● Boehm 逐点加密算法

#### (a) 基变换

给定节点分割  $T_n$ :  $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_{n+k}$ ,

$k$  阶 B 样条基函数记为  $\bar{N}_{i,k}(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

插入节点  $t^\alpha \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ ，得到节点向量  $T_{n+1} = T_n \cup \{t^\alpha\}$

新的节点向量记为  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+k} \leq t_{n+k+1}$ ，

$$\text{其中 } t_i = \begin{cases} \tau_i & 0 \leq i \leq l \\ t^\alpha & i = l+1 \\ \tau_{i-1} & i > l+1 \end{cases}$$

节点向量  $T_{n+1}$  对应基函数为  $N_{i,k}(t)$ ， $i = 0, 1, \dots, n, n+1$

$$\text{对任意 } i, \text{ 有 } \bar{N}_{i,k}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_{i,k}(j) N_{j,k}(t)$$

记  $g_{i,\dots,i+k} = [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] \cdot (-t)_+^{k-1}$ ，则 B 样条基函数可表示为

$$N_{i,k}(t) = (t_{i+k} - t_i) g_{i,\dots,i+k}$$

容易验证有  $(t_i - t_{i+k}) g_{i,\dots,i+k} + (t_j - t_i) g_{i,\dots,i+k-1,j} + (t_{i+k} - t_j) g_{j,i+1,\dots,i+k} = 0$  成立

当  $l-k+1 \leq i \leq l$  时，取  $t_i = \tau_i, \dots, t_{i+k} = \tau_{i+k}$ ， $t_j = t^\alpha$ ，有

$$(t_{i+k} - t_i) g_{i,\dots,i+k} = (\tau_{i+k} - \tau_i) [\tau_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+k}] \cdot (-t)_+^{k-1} = \bar{N}_{i,k}(t)$$

$$(t_j - t_i) g_{i,\dots,i+k-1,j} = \frac{t^\alpha - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} (\tau_{i+k-1} - \tau_i) [\tau_i, \dots, t^\alpha, \dots, \tau_{i+k-1}] \cdot (-t)_+^{k-1} = \frac{t^\alpha - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} N_{i,k}(t)$$

$$(t_{i+k} - t_j) g_{j,i+1,\dots,i+k} = \frac{\tau_{i+k} - t^\alpha}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}} (\tau_{i+k} - \tau_{i+1}) [\tau_{i+1}, \dots, t^\alpha, \dots, \tau_{i+k}] \cdot (-t)_+^{k-1} = \frac{\tau_{i+k} - t^\alpha}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}} N_{i+1,k}(t)$$

所以，有

$$\bar{N}_{i,k}(t) = \frac{t^\alpha - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} N_{i,k}(t) + \frac{\tau_{i+k} - t^\alpha}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}} N_{i+1,k}(t)$$

当  $i < l-k+1$  时， $t^\alpha \geq t_{i+k}$ ，此时  $\bar{N}_{i,k}(t) = N_{i,k}(t)$

当  $i > l$  时， $t^\alpha < \tau_{i+1}$ ，此时  $\bar{N}_{i,k}(t) = N_{i+1,k}(t)$

$$\text{记 } \delta_i^k = \begin{cases} 1 & i < l-k+1 \\ \frac{t^\alpha - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} & l-k+1 \leq i \leq l \\ 0 & i > l \end{cases}$$

则有  $\bar{N}_{i,k}(t) = \delta_i^k N_{i,k}(t) + (1 - \delta_{i+1}^k) N_{i+1,k}(t)$ ， $i = 0, 1, \dots, n$ 。

(b) 控制多边形

设原 B 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i \bar{N}_{i,k}(t)$ ，插入节点  $t^\alpha \in [\tau_l, \tau_{l+1})$  后的 B 样

条曲线为  $P(t) = \sum_{i=0}^{n+1} Q_i N_{i,k}(t)$ ，有

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i \bar{N}_{i,k}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n P_i \left( \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_{i,k}(j) N_{j,k}(t) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left( \sum_{i=0}^n P_i \alpha_{i,k}(j) \right) N_{j,k}(t) \end{aligned}$$

从而，有

$$Q_j = \sum_{i=0}^n P_i \alpha_{i,k}(j) = (1 - \delta_j^k) P_{j-1} + \delta_j^k P_j,$$

$$\text{或 } Q_j = \begin{cases} P_j & j \leq l - k + 1 \\ \frac{t^\alpha - \tau_j}{\tau_{j+k-1} - \tau_j} P_j + \frac{\tau_{j+k-1} - t^\alpha}{\tau_{j+k-1} - \tau_j} P_{j-1} & l - k + 1 < j \leq l \\ P_{j-1} & j > l \end{cases}$$

● Oslo 算法与离散 B 样条

(a) 离散 B 样条

给定节点分割  $T_n: \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_{n+k}$ ，

$k$  阶 B 样条基函数记为  $\bar{N}_{i,k}(t)$ ， $i = 0, 1, \dots, n$

加密节点： $T_m^\alpha: t_1^\alpha \leq \dots \leq t_m^\alpha$ ，

加密后的节点向量  $T_{m+n} = T_n \cup T_m^\alpha$

新的节点向量记为  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m+n+k}$ ，

节点向量  $T_{m+n}$  对应基函数为  $N_{i,k}(t)$ ， $i = 0, 1, \dots, m+n$



样条空间  $\Omega_k(T_n) \subseteq \Omega_k(T_{m+n})$ , 其中  $\Omega_k(T_n) = \text{span}\{\bar{N}_{i,k}(t), i = 0, 1, \dots, n\}$ ,

$$\Omega_k(T_{m+n}) = \text{span}\{N_{i,k}(t), i = 0, 1, \dots, m+n\}$$

对任意  $i$ , 有  $\bar{N}_{i,k}(t) = \sum_{j=0}^{m+n} \alpha_{i,k}(j) N_{j,k}(t)$

写成矩阵形式, 有

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_{0,k}(t) \\ \bar{N}_{1,k}(t) \\ \vdots \\ \bar{N}_{n,k}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{0,k}(0) & \alpha_{0,k}(1) & \cdots & \alpha_{0,k}(m+n) \\ \alpha_{1,k}(0) & \alpha_{1,k}(1) & \cdots & \alpha_{1,k}(m+n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,k}(0) & \alpha_{n,k}(1) & \cdots & \alpha_{n,k}(m+n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{0,k}(t) \\ N_{1,k}(t) \\ \vdots \\ N_{m+n,k}(t) \end{pmatrix}$$

$\{\alpha_{i,k}(j)\}_{i=0, j=0}^{n, m+n}$  称为  $k$  阶离散 B 样条。

离散 B 样条计算公式:

当  $t_j < t_{j+k-1}$  时, 即  $T_{m+n}$  无  $k$  重节点, 有

$$\alpha_{i,k}(j) = \frac{t_{j+k-1} - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} \alpha_{i,k-1}(j) + \frac{\tau_{i+k} - t_{j+k-1}}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}} \alpha_{i+1,k-1}(j),$$

并约定  $\alpha_{i,1}(j) = \begin{cases} 1 & \tau_i \leq t_j < \tau_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

(b) 基本性质

i) 支撑集(support)

设  $q$  满足  $\tau_q \leq t_j < \tau_{q+1}$ , 则当  $i \notin \{q-k+1, \dots, q\}$  时,  $\alpha_{i,k}(j) = 0$

ii) 正性(非负) (positive)

$\forall i, j$ , 有  $\alpha_{i,k}(j) \geq 0$

iii) 权性(partition of unity)

当  $\tau_{k-1} \leq t_j \leq \tau_{n+1}$ , 有  $\sum_{i=0}^n \alpha_{i,k}(j) = 1$

$$\text{证明: } 1 \equiv \sum_{i=0}^n \bar{N}_{i,k}(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m+n} \alpha_{i,k}(j) N_{j,k}(t) = \sum_{j=0}^{m+n} \left( \sum_{i=0}^n \alpha_{i,k}(j) \right) N_{j,k}(t)$$

又因为  $1 \equiv \sum_{j=0}^{m+n} N_{j,k}(t)$

比较两式，有  $\sum_{j=0}^{m+n} \left( \sum_{i=0}^n \alpha_{i,k}(j) - 1 \right) N_{j,k}(t) \equiv 0$ ，从而有  $\sum_{i=0}^n \alpha_{i,k}(j) \equiv 1$ 。

### (c) Oslo 算法 (Oslo algorithm)

设 B 样条曲线节点插入前后的控制顶点分别为  $\{P_i\}_{i=0}^n$  和

$\{Q_j\}_{j=0}^{m+n}$ ，有

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i \bar{N}_{i,k}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n P_i \left( \sum_{j=0}^{m+n} \alpha_{i,k}(j) N_{j,k}(t) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m+n} \left( \sum_{i=0}^n P_i \alpha_{i,k}(j) \right) N_{j,k}(t) \end{aligned}$$

即有  $Q_j = \sum_{i=0}^n P_i \alpha_{i,k}(j)$ ， $j = 0, 1, \dots, m+n$

特别地，当  $t_l < t_{l+1} = \dots = t_{l+k-1} < t_{l+k}$  时，有  $P(t_{l+1}) = Q_l$ 。

Oslo 算法：

设  $\tau_l \leq t_j < \tau_{l+1}$ ，

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=l-k+1}^l P_i \alpha_{i,k}(j) \\ &= \sum_{i=l-k+2}^l \left[ \frac{t_{j+k-1} - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} P_i + \frac{\tau_{i+k-1} - t_{j+k-1}}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} P_{i-1} \right] \alpha_{i,k-1}(j) \\ &= \sum_{i=l-k+1+r}^l Q_{ij}^{[r]} \alpha_{i,k-r}(j) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } Q_{ij}^{[r]} = \begin{cases} P_i & r=0 \\ \frac{t_{j+k-r} - \tau_i}{\tau_{i+k-r} - \tau_i} Q_{ij}^{[r-1]} + \frac{\tau_{i+k-r} - t_{j+k-r}}{\tau_{i+k-r} - \tau_i} Q_{i-1,j}^{[r-1]} & r>0 \end{cases}$$

### (d) 更多应用

记以  $\{Q_j\}_{j=0}^{m+n}$  为顶点的顺序连接起来的多边形为  $\Gamma_n(T_m^\alpha)$ ，有如下引理成立。

**引理：** 存在节点集序列  $T_m^\alpha \subset [\tau_{k-1}, \tau_{n+1}]$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $T_m^\alpha \subset T_{m+1}^\alpha$  使得  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma_n(T_m^\alpha) = P[\tau_{k-1}, \tau_{n+1}]$ 。

**凸性：** 若  $\Gamma_n(\phi)$  为凸，则  $P(t)$  在  $[\tau_{k-1}, \tau_{n+1}]$  上为凸。

**V.D.性质：** 平面上任一直线与该平面上的 B 样条曲线的交点个数不大于此直线与其控制多边形的交点的个数。

#### (e) Lane-Riesenfeld 算法

此算法主要用于离散生成任意阶均匀 B 样条曲线。

设 d 次(d+1 阶)均匀 B 样条曲线的控制顶点为

$$\dots, P_{-2}^0, P_{-1}^0, P_0^0, P_1^0, P_2^0, \dots$$

则对该 B 样条曲线的节点向量加密一倍后得到的 B 样条曲线控制顶点可由下列递归算法实现：

$$P_n^1 = \begin{cases} P_{n/2}^0 & n \text{ 为偶数} \\ (P_{(n-1)/2}^0 + P_{(n+1)/2}^0)/2 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$P_n^k = \frac{1}{2}(P_n^{k-1} + P_{n+1}^{k-1}), \quad k = 2, \dots, d$$

**定理：** 反复执行以上迭代步骤，则多边形序列收敛到原 B 样条曲线本身。

此定理的证明可参见下列文献。

Lane JM, Riesenfeld RF. A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell 1980;2(1):35–46.

## §9. B 样条曲线插值

### ● Schoenberg-Whitney 插值条件

已知节点分割  $T_n: t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+k}$ ,

相应  $k$  阶 **B** 样条基函数记为  $N_{i,k}(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

给定型值点  $Q_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$

求 **B** 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$  满足

$$P(\tau_j) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(\tau_j) = Q_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

记  $b_{i,j} = N_{i,k}(\tau_j)$ , 则上述方程组可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{1,0} & \cdots & b_{n,0} \\ b_{0,1} & b_{1,1} & \cdots & b_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{0,n} & b_{1,n} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

或  $\mathbf{BP} = \mathbf{Q}$

**唯一性定理:** 上述方程组有唯一解(矩阵 **B** 非奇异)当且仅当

对任意  $i = 0, 1, \dots, n$  有  $N_{i,k}(\tau_i) > 0$ , 即  $\tau_i \in (t_i, t_{i+k})$ 。

插值参数的选取

i) Schoenberg:  $\tau_i = \frac{t_i + \dots + t_{i+k}}{k+1}$

ii) de Boor:  $\tau_i = \frac{t_i + t_{i+k}}{2} = t_{i+\frac{k}{2}}$

### ● 三次 **B** 样条曲线插值

给定: 型值点  $Q_0, Q_1, \dots, Q_K$  和对应节点  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_K$

构造: 三次 **B** 样条曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^L P_i N_{i,4}(t)$ , 其中  $L = K + 2$ , 并且

$$P(\tau_j) = Q_j; \quad j = 0, 1, \dots, K$$

**B** 样条曲线的节点向量取为  $\tau_0, \tau_0, \tau_0, \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{K-1}, \tau_K, \tau_K, \tau_K, \tau_K$

由 **B** 样条重节点性质知:

$$P_0 = Q_0, \quad P_L = Q_K$$

控制顶点个数=插值方程个数+2, 该插值问题需要给定边界条件, 设边界导矢  $P'(\tau_0)$  和  $P'(\tau_K)$  已知, 则有

$$P'(\tau_0) = \frac{3}{\tau_1 - \tau_0}(P_1 - P_0), \quad P'(\tau_K) = \frac{3}{\tau_K - \tau_{K-1}}(P_K - P_{K-1})$$

其余控制顶点满足线性方程

$$P_j N_{j,4}(\tau_j) + P_{j+1} N_{j+1,4}(\tau_j) + P_{j+2} N_{j+2,4}(\tau_j) = Q_j; \quad j = 1, \dots, K-1$$

写成矩阵形式, 有

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\tau_1 - \tau_0} & & & & & \\ N_1(\tau_1) & N_2(\tau_1) & N_3(\tau_1) & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & N_{K-1}(\tau_{K-1}) & N_K(\tau_{K-1}) & \frac{3}{\tau_K - \tau_{K-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \\ \\ P_K \\ P_{K+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3Q_0}{\tau_1 - \tau_0} + P'(\tau_0) \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{K-1} \\ \frac{3Q_K}{\tau_K - \tau_{K-1}} - P'(\tau_K) \end{pmatrix}$$

自然边界条件:  $P''(\tau_0) = 0, \quad P''(\tau_K) = 0$ 。

则上述线性方程组首尾方程变成

$$(\Delta_0 + \Delta_1)P_0 - (2\Delta_0 + \Delta_1)P_1 + \Delta_0 P_2 = 0,$$

$$\Delta_{K-1}P_K - (2\Delta_{K-1} + \Delta_{K-2})P_{K+1} + (\Delta_{K-1} + \Delta_{K-2})P_{K+2} = 0, \quad \text{其中 } \Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$$

得到三对角方程组, 利用追赶法求解。

## §10. Catmull-Rom 插值样条

- 问题背景: Lagrange 插值曲线次数随着插值点数增加而增加, B 样条曲线次数较低, 但一般不插值控制顶点, 如何结合这两类曲线的特点构造低次数插值曲线。
- Catmull-Rom 样条曲线

给定数据点集  $\{P_i\}$  和节点  $\{t_i\}$ ，构造低次数插值曲线  $C(t)$ ，使得  $C(t_i) = P_i$ 。

过型值点  $P_i, P_{i+1}, \dots, P_{i+k}$  以及节点  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$  构造  $k$  次 Lagrange 插值曲线  $P_{i, \dots, i+k}(t)$ 。

记  $N_{i,k}(t)$  是具有紧支集  $[t_i, t_{i+k}]$  的 B 样条基函数，定义样条

$$C_k(t) = \sum_i P_{i, \dots, i+k}(t) N_{i,k}(t)$$

由上述构造过程，易知  $C_k(t)$  是分段  $2k-1$  次多项式曲线。

**命题 1.** 样条  $C_k(t)$  在节点  $t_j$  处插值  $P_j$ ，即  $C_k(t_j) = P_j$ 。

**证明：**  $C_k(t_j) = \sum_i P_{i, \dots, i+k}(t_j) N_{i,k}(t_j)$

$$= \sum_{i=j-k+1}^j P_{i, \dots, i+k}(t_j) N_{i,k}(t_j)$$

$$= \sum_{i=j-k+1}^j P_j N_{i,k}(t_j) = P_j \sum_{i=j-k+1}^j N_{i,k}(t_j) = P_j, \text{ 命题成立。}$$

**命题 2.** 样条  $C_k(t)$  在任意节点处  $k-1$  阶连续。

**证明：** 为证明命题 2 成立，只需证明

$$\sum_i P_{i, \dots, i+k}(t) N_{i,k}(t) = \sum_i P_{i+1, \dots, i+k}(t) N_{i,k+1}(t) \text{ 成立。}$$

利用

$$\text{内瓦尔公式: } P_{i, \dots, i+k}(t) = \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} P_{i, \dots, i+k-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} P_{i+1, \dots, i+k}(t)$$

$$\text{deBoor-Cox 公式: } N_{i,k+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k}(t)$$

得：

$$\begin{aligned} & \sum_i P_{i, \dots, i+k}(t) N_{i,k}(t) \\ &= \sum_i \left[ \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} P_{i, \dots, i+k-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} P_{i+1, \dots, i+k}(t) \right] N_{i,k}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \left[ \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k}(t) \right] P_{i+1,\dots,i+k}(t) \\
&= \sum_i P_{i+1,\dots,i+k}(t) N_{i,k+1}(t)
\end{aligned}$$

由于  $N_{i,k+1}(t)$  在节点处  $k-1$  阶连续，命题得证。

### ● $k=2$ 时的 Catmull-Rom 样条

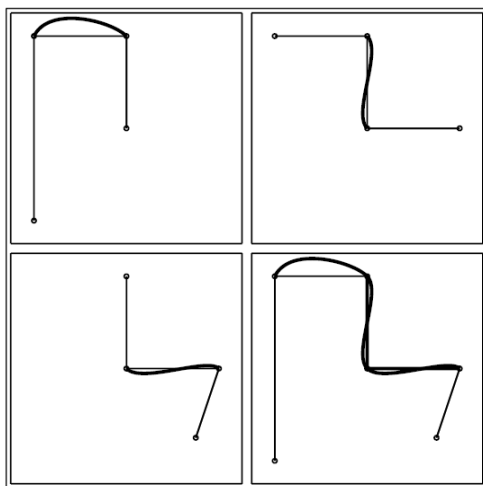
设有混合函数

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= -\frac{1}{2}t + t^2 - \frac{1}{2}t^3 & f_1(t) &= 1 - \frac{5}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^3 \\
f_2(t) &= \frac{1}{2}t + 2t^2 - \frac{3}{2}t^3 & f_3(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3
\end{aligned}$$

定义曲线  $P(t) = P_0 f_0(t) + P_1 f_1(t) + P_2 f_2(t) + P_3 f_3(t)$

该曲线满足下列插值条件:

$$\begin{aligned}
P(0) &= P_0, & P(1) &= P_2 \\
P'(0) &= \frac{1}{2}(P_2 - P_0), & P'(1) &= \frac{1}{2}(P_3 - P_1)
\end{aligned}$$



### ● Catmull-Rom 样条曲线性质

- (1) 分段  $2k-1$  次多项式;
- (2) 在节点  $t_j$  处插值数据点  $P_j$ ;
- (3) 具有  $k-1$  阶连续性;
- (4) 局部控制性;

(5) 非退化性；

(6)  $k$  次多项式再生性。

但 Catmull-Rom 样条不具有凸包性，变差缩减性和节点插入性质。

思考题：

1. 输入并绘制一条 B 样条曲线，通过节点插入法，将 B 样条曲线转化为一组 Bézier 曲线。
2. 编程实现三次 B 样条曲线插值算法。
3. 编程实现任意次均匀 B 样条曲线的显示的 Lane\_Riesenfeld 算法。