第七章 曲线几何连续性

§1. 空间曲线的微分几何

(a) 曲线参数表示与弧长

设参数曲线

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}=(x(t),y(t),z(t))$$

曲线弧长 $s(t)=\int_{t_0}^{t}|\mathbf{r}'(t)|dt$

若 $|\mathbf{r}'(t)|=1$，则有 $s(t)=t-t_0$，此时称参数 t 为弧长参数。

定理：次数大于 1 的多项式参数曲线不可能具有弧长参数。

(Farouki, CAGD 8(1991):151-157)

(b) 曲线论基本公式

设有弧长参数表示曲线：$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$

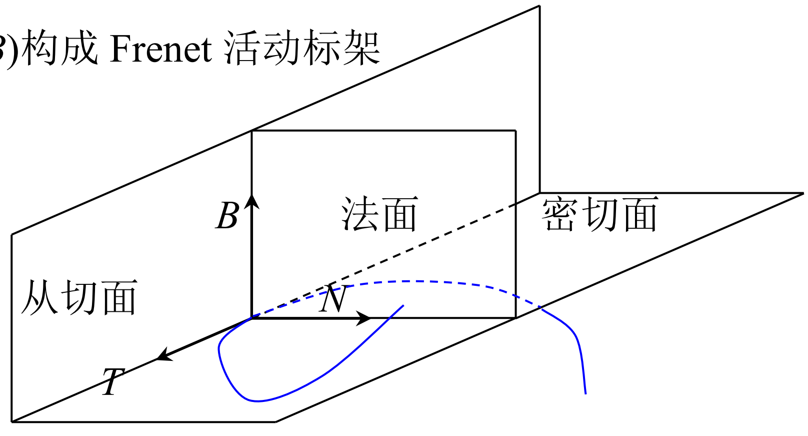
有：$\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{r}'(s)=T(s)$，且 $T(s)\cdot T(s)=1$

$\dfrac{dT^2(s)}{ds}=2T(s)\cdot\dfrac{dT(s)}{ds}=0$，其中 $\dfrac{dT(s)}{ds}=kN(s)$

令 $B(s)=T(s)\times N(s)$，有 $B(s)\cdot B(s)=1$

T:切向(tangent)，N:法向(normal)，B：副法向(binormal)

(T,N,B)构成 Frenet 活动标架



一般参数曲线：$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$，有

$$T=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|},\quad B=\frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|},$$

$$N=B\times T=\frac{|\mathbf{r}'(t)|^2\mathbf{r}''(t)-(\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t))\mathbf{r}'(t)}{\left||\mathbf{r}'(t)|^2\mathbf{r}''(t)-(\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t))\mathbf{r}'(t)\right|}$$

曲率与挠率公式

$$\frac{dT(s)}{ds}=kN(s)$$

由 $B\cdot T=0$，得 $\frac{dB}{ds}\cdot T+B\cdot\frac{dT}{ds}=0$，从而有：$\frac{dB}{ds}\cdot T=0$

由 $B\cdot B=1$，得 $\frac{dB}{ds}\cdot B=0$

综上条件，可得 $\frac{dB}{ds}=-\tau N$

根据 $N=B\times T$，有

$$\frac{dN}{ds}=\frac{dB}{ds}\times T+B\times\frac{dT}{ds}=-\tau N\times T+kB\times N=\tau B-kT$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0\\-k&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}$$

一般参数曲线的曲率与挠率公式：

$$k=\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3},\quad \tau=\frac{(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2}$$

§2. 几何连续性概念

(a) 曲线连续基本概念

C^n 连续：两条曲线在连接点处有直到 n 阶连续导数。

G^n 连续：两条曲线在连接点处关于弧长参数 C^n 连续。

G^1 连续：位置连续+切向连续

G^2 连续：G^1 连续+曲率向量连续

(b) G^2 连续性条件

- **定理**：设曲线 C：$P=P(t)$在$t=u$处满足

$P'(u-)\neq 0$，$P'(u+)\neq 0$，$P''(u-)$与$P''(u+)$存在，则 C 在$P(u)$处为 G^2 连续的充要条件为：

存在$\alpha=\alpha(u)>0$，$\beta=\beta(u)$使得

$$\begin{cases} P(u-)=P(u+) \\ P'(u-)=\alpha(u)P'(u+) \\ P''(u-)=\alpha^2(u)P''(u+)+\beta(u)P'(u+) \end{cases}$$

- 曲线 G^2 连续拼接形式：

给定两正则曲线 C_1: $P=P(t)$，C_2: $Q=Q(u)$，则它们在$P(1)$和$Q(0)$处为 G^2 连续拼接的充要条件为：存在$\alpha>0$，β使得

$$\begin{cases} P(1-)=Q(0+) \\ P'(1-)=\alpha Q'(0+)\neq\vec{0} \\ P''(1-)=\alpha^2 Q''(0+)+\beta Q'(0+) \end{cases}$$

(c) 高阶几何连续

设拼接曲线$P=P(u)$在$u=u_0$处 G^n 连续，则可对其左边曲线进行重新参数化$u=u(t)$，使得新参数(t)表示的左侧曲线和老参数(u)表示的右侧曲线在连接点处有直到 n 阶连续导数：

$$\frac{d^i}{dt^i}P_-=\frac{d^i}{du^i}P_+,\quad i=0,1,\ldots,n,\quad \text{其中 } P_-=P(u_0-),\quad P_+=P(u_0+)$$

记$\overset{(i)}{P}=\dfrac{d^i}{du^i}P$，有

$$\dot{P}_+=\frac{du}{dt}\dot{P}_-,\quad \ddot{P}_+=\frac{d^2u}{dt^2}\dot{P}_-+\left(\frac{du}{dt}\right)^2\ddot{P}_-$$

$$\dddot{P}_+=\frac{d^3u}{dt^3}\dot{P}_-+3\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2}\ddot{P}_-+\left(\frac{du}{dt}\right)^3\dddot{P}_-$$

……

令$\beta_1=\frac{du}{dt}$，$\beta_2=\frac{d^2u}{dt^2}$，$\beta_3=\frac{d^3u}{dt^3}$，……

写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} P_+ \\ \dot{P}_+ \\ \ddot{P}_+ \\ \dddot{P}_+ \\ \vdots \\ \overset{(n)}{P}_+ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \beta_1 & & & & \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & & & \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \beta_n & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_- \\ \dot{P}_- \\ \ddot{P}_- \\ \dddot{P}_- \\ \vdots \\ \overset{(n)}{P}_- \end{pmatrix}$$

定理：当且仅当存在实数$\beta_1>0$，β_2，β_3，……，使得两曲线在正则的连接点处左右导矢满足上述约束方程，则这两条曲线是 G^n 连续的。

§3. G^2 三次样条

(a) Bézier 曲线 G^2 连续拼接与样条构造

设三次 Bézier 曲线$\mathbf{b}(t)=\sum_{i=0}^{3}\mathbf{b}_iB_{i,3}(t)$以及$\mathbf{c}(t)=\sum_{i=0}^{3}\mathbf{c}_iB_{i,3}(t)$，满足：

1) $\mathbf{b}_3=\mathbf{c}_0$

2) $\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_2 // \mathbf{c}_1-\mathbf{c}_0$

3) $k_b(1)=k_c(0)$

由曲率公式，知：

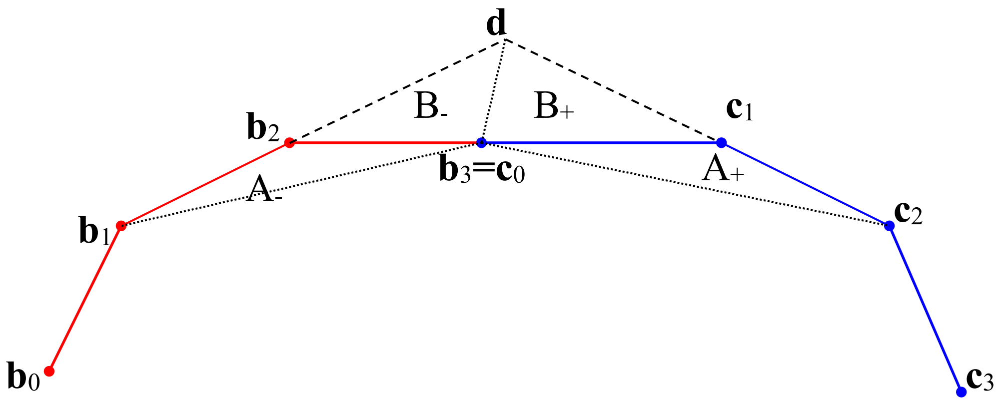
$$k_b(1)=\frac{2}{3}\frac{(\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_2)\times(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2)}{|\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_2|^3}=\frac{4}{3}\frac{A_-}{l_-^3}$$

$$k_c(0)=\frac{2}{3}\frac{(\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_0)\times(\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1)}{|\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_0|^3}=\frac{4}{3}\frac{A_+}{l_+^3}$$

根据$k_b(1)=k_c(0)$，得$\frac{A_-}{A_+}=\left(\frac{l_-}{l_+}\right)^3=r^3$

令$\frac{A_-}{B_-}=r_-$，$\frac{B_+}{A_+}=r_+$

又因为$\frac{B_-}{B_+}=r$，可得$r^2=r_-r_+$



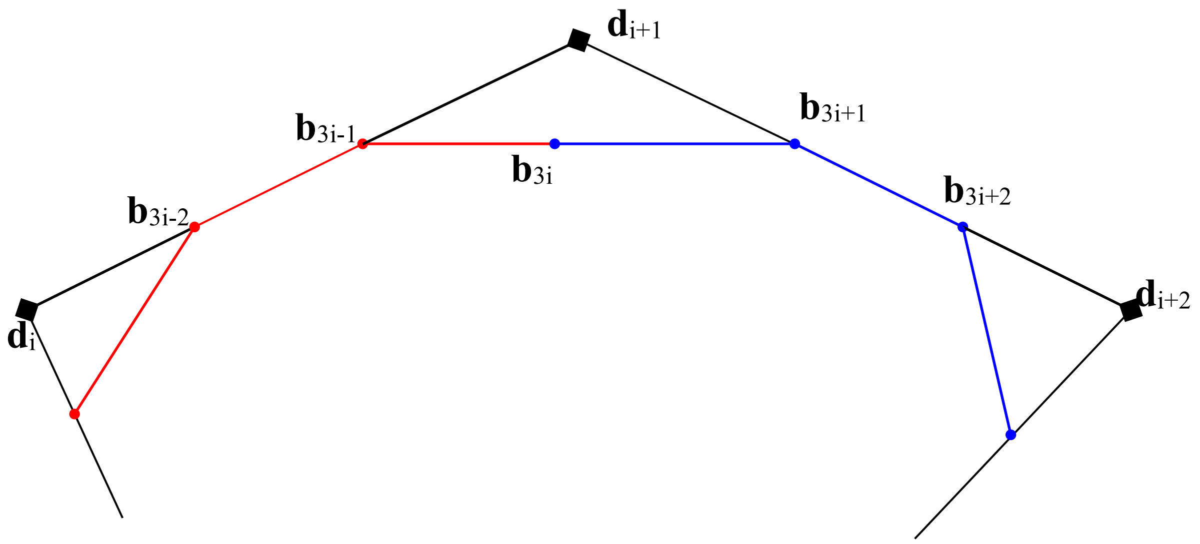
G^2连续条件：$\frac{|\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{d}-\mathbf{b}_2|}\frac{|\mathbf{c}_1-\mathbf{d}|}{|\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1|}=\frac{|\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_2|^2}{|\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_0|^2}$

- G^2连续三次 Bézier 样条直接构造算法：

1. 输入多边形$\mathbf{d}_0\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\cdots\mathbf{d}_L$；
2. 在边$\mathbf{d}_i\mathbf{d}_{i+1}$上取点

   $\mathbf{b}_{3i-2}=(1-\alpha_i)\mathbf{d}_i+\alpha_i\mathbf{d}_{i+1}$，$\mathbf{b}_{3i-1}=(1-\omega_i)\mathbf{d}_i+\omega_i\mathbf{d}_{i+1}$
3. 在边$\mathbf{d}_{i+1}\mathbf{d}_{i+2}$上取点

   $\mathbf{b}_{3i+1}=(1-\alpha_{i+1})\mathbf{d}_{i+1}+\alpha_{i+1}\mathbf{d}_{i+2}$，$\mathbf{b}_{3i+2}=(1-\omega_{i+1})\mathbf{d}_{i+1}+\omega_{i+1}\mathbf{d}_{i+2}$
4. 在$\mathbf{b}_{3i-1}$与$\mathbf{b}_{3i+1}$的连线上取点$\mathbf{b}_{3i}=(1-r_i)\mathbf{b}_{3i-1}+r_i\mathbf{b}_{3i+1}$
5. 第 i 段 Bézier 曲线控制多边形$\mathbf{b}_{3i-3}\mathbf{b}_{3i-2}\mathbf{b}_{3i-1}\mathbf{b}_{3i}$



r_i的计算：

$$\mathbf{b}_{3i-1}=\frac{1-\omega_i}{1-\alpha_i}\mathbf{b}_{3i-2}+\frac{\omega_i-\alpha_i}{1-\alpha_i}\mathbf{d}_{i+1}$$

$$\mathbf{b}_{3i+1}=\frac{\omega_{i+1}-\alpha_{i+1}}{\omega_{i+1}}\mathbf{d}_{i+1}+\frac{\alpha_{i+1}}{\omega_{i+1}}\mathbf{b}_{3i+2}$$

令 $\lambda_i=\dfrac{\omega_i-\alpha_i}{1-\omega_i}$， $\rho_i=\dfrac{\alpha_{i+1}}{\omega_{i+1}-\alpha_{i+1}}$

取 $r_i=\dfrac{\sqrt{\lambda_i\rho_i}}{1+\sqrt{\lambda_i\rho_i}}$ 和 $\mathbf{b}_{3i}=(1-r_i)\mathbf{b}_{3i-1}+r_i\mathbf{b}_{3i+1}$

有 $\dfrac{|\mathbf{b}_{3i}-\mathbf{b}_{3i-1}|}{|\mathbf{b}_{3i+1}-\mathbf{b}_{3i}|}=\sqrt{\lambda_i\rho_i}$

开多边形中取 $\alpha_0=0$ 和 $\omega_{L-2}=1$，相应地，有 $\mathbf{b}_1=\mathbf{d}_1$ 和 $\mathbf{b}_{3L-4}=\mathbf{d}_{L-1}$

- γ 样条

给定控制多边形，一组节点和参数 γ_i

在直接构造法中取

$$\alpha_{i-1}=\frac{\gamma_i\Delta_{i-2}}{\gamma_i\Delta_{i-2}+\Delta_{i-1}+\gamma_{i+1}\Delta_i}$$

$$\omega_{i-1}=\frac{\Delta_{i-1}+\gamma_{i+1}\Delta_i}{\gamma_i\Delta_{i-2}+\Delta_{i-1}+\gamma_{i+1}\Delta_i}$$

特别地，当所有$\gamma_i \to 0$时，曲线将趋向于原控制多边形。

§4. ν-样条(Nu-样条)

(a) Nielson G^{2}条件

$$P(u-) = P(u+)$$

$$P'(u-) = P'(u+)$$

$$P''(u+) - P''(u-) = \nu(u) P'(u+)$$

满足上述条件的分段曲线在连接点处 G^{2}连续。

(b) ν-样条定义

给定：型值点$\{P_i\}_{i=0}^n$，

参数节点分割$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$

张力参数$\{\nu_i\}_{i=0}^n$

求分片多项式$P = P(u)$满足

1. $P(u)$在$[u_{i-1}, u_i]$为 u 的三次多项式
2. $P(u)$关于 u 是 C^1 的，即$P(u) \in C^1[a,b]$
3. $P''(u_i+) - P''(u_i-) = \nu_i P'(u_i)$

设$P'(u_i) = m_i$， $i = 0,1,\ldots,n$

由三次 Hermite 插值可唯一确定$P = P(u)$

$$P(u) = P_{i-1} h_0(u) + P_i h_1(u) + m_{i-1} H_0(u) + m_i H_1(u)$$

其中

$$h_0(u) = \frac{(u_i - u)^2 [2(u - u_{i-1}) + \Delta u_i]}{\Delta u_i^3}$$

$$h_1(u)=\frac{(u-u_{i-1})^2\left[2(u_i-u)+\Delta u_i\right]}{\Delta u_i^3}$$

$$H_0(x)=\frac{(u_i-u)^2(u-u_{i-1})}{\Delta u_i^2} \qquad H_1(x)=\frac{(u-u_{i-1})^2(u_i-u)}{\Delta u_i^2}$$

由 $P''(u_i+)-P''(u_i-)=\nu_i P'(u_i)$， $i=1,\ldots,n-1$

可得：

$$\lambda_i m_{i-1}+(2+\overline{\nu}_i)m_i+\mu_i m_{i+1}=3D_i\text{，}\quad i=1,\ldots,n-1$$

其中

$$\lambda_i=\frac{\Delta u_{i+1}}{\Delta u_i+\Delta u_{i+1}}\text{，}\quad \mu_i=1-\lambda_i\text{，}\quad D_i=\lambda_i\frac{P_i-P_{i-1}}{\Delta u_i}+\mu_i\frac{P_{i+1}-P_i}{\Delta u_{i+1}}$$

$$\overline{\nu}_i=\frac{\nu_i(\Delta u_i\cdot\Delta u_{i+1})}{2(\Delta u_i+\Delta u_{i+1})}$$

(c) 不同边界条件下的 ν-样条

(1) $\nu_0 P'(a)-P''(a+)=0$， $\nu_n P'(b)+P''(b-)=0$

(2) $P'(a)=m_0$， $P'(b)=m_n$

(3) 周期边界 $P(a)=P(b)$， $P'(a)=P'(b)$， $P''(a+)-P''(b-)=(\nu_0+\nu_n)P'(a)$

在第一类边界条件下，有

$$\begin{bmatrix} 2+\overline{\nu}_0 & 1 & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2+\overline{\nu}_1 & \mu_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2+\overline{\nu}_2 & & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_{n-1} & 2+\overline{\nu}_{n-1} & \mu_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & 2+\overline{\nu}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} \dfrac{P_1-P_0}{\Delta u_1} \\ D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ \dfrac{P_n-P_{n-1}}{\Delta u_n} \end{bmatrix}$$

其中 $\overline{\nu}_0=\dfrac{\Delta u_1\nu_0}{2}$， $\overline{\nu}_n=\dfrac{\Delta u_n\nu_n}{2}$

(d) ν-样条性质

1. ν-样条是 G^2 连续的；

2. ν-样条有 2*n*-2 个自由度

$\{u_i\}_{i=0}^{n} \cup \{\nu_j\}_{j=1}^{n-1}$，但 $u_0 = a$， $u_n = b$

3. 当 $\nu_{i-1}, \nu_i \to \infty$ 时， $P[u_{i-1}, u_i] \to \overline{P_{i-1}P_i}$

§5. β-样条(B.A.Barsky)

给定：

型值点 $\{Q_i\}_0^n$

偏参数 $\{\beta_{i,1}\}_1^{n-1}$

张力参数 $\{\beta_{i,2}\}_1^{n-1}$

求三次插值样条曲线(每段参数区间[0,1])

记 Q_{i-1}， Q_i 之间的曲线段为 $P_i(t)$， $t \in [0,1]$

使得

$$P_{i-1}(1-) = P_i(0+) = Q_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n$$

$$P'_{i-1}(1-) = \beta_{i-1,1} P'_i(0+)$$

$$P''_{i-1}(1-) = \beta_{i-1,1}^2 P''_i(0+) + \beta_{i-1,2} P'_i(0+)$$

记 $P'_i(0+) = m_i$， $P'_{i-1}(1-) = \beta_{i-1,1} m_i$

有：

$$P''_i(0+) = -4m_{i-1} - 2\beta_{i,1} m_i - 6Q_{i-1} + 6Q_i$$

$$P''_i(1-) = 2m_{i-1} + 4\beta_{i,1} m_i + 6Q_{i-1} - 6Q_i$$

根据 G^2 连续条件，有

$$m_{i-2} + \left(2\beta_{i-1,1} - \frac{1}{2}\beta_{i-1,2} + 2\beta_{i-1,1}^2\right) m_{i-1} + \beta_{i,1}^3 m_i = 3\left[-Q_{i-2} + \left(1 - \beta_{i-1,1}^2\right) Q_{i-1} + \beta_{i-1,1}^2 Q_i\right]$$

边界条件可与 ν-样条类似设定。

思考题：

1．两曲线在连接点处 G^3 连续是否为曲率与挠率连续，反之命题是否成立？

2. 在第二类和第三类边界条件下推导 ν-样条方程。