

## 第十一章 Coons 曲面与超限插值

### §1. Coons 曲面

#### (1) 历史背景

- Bézier 曲线曲面—Bézier, de Casteljau—Renault, Citroën
- Coons 曲面—S. Coons—Ford
- Gordon 曲面—W. Gordon—General Motors
- Bézier 曲线曲面：由控制多边形或控制网格定义曲面
- Coons 曲面或 Gordon 曲面：由曲线网构造插值曲面

#### (2) 布尔和算子(bool sum operator)

##### a. 定义

设  $I_1, I_2$  是两个算子, 并且  $I_1 + I_2 - I_1 I_2$  有意义, 则称其为  $I_1$  与  $I_2$  的布尔和算子, 记为  $I_1 \oplus I_2$ 。

**例:** 设  $F(t) \in C[0,1]$ , 取  $I_1 F = F(0)(1-t) + F(1)t$ ,  $I_2 F = 4F\left(\frac{1}{2}\right)t(1-t)$

则  $I_1 F$  在  $t=0$  和  $t=1$  插值  $F(t)$ , 而  $I_2 F$  在  $t=\frac{1}{2}$  插值  $F(t)$

易验证  $I_1 I_2 F \equiv 0$ ,  $I_2 I_1 F = 2t(1-t)(F(0) + F(1))$

当  $t \neq 0$ ,  $t \neq 1$  或  $t = \frac{1}{2}$  但  $F(0) + F(1) \neq 0$  时  $I_1 I_2 F \neq I_2 I_1 F$

$$I_1 \oplus I_2 F = F(0)(1-t) + F(1)t + 4F\left(\frac{1}{2}\right)t(1-t)$$

该函数在  $t=0$  和  $t=1$  处插值  $F(t)$

$$I_2 \oplus I_1 F = 4F\left(\frac{1}{2}\right)t(1-t) + F(0)(1-t) + F(1)t - 2(F(0) + F(1))t(1-t)$$

该函数在  $t=0$ ,  $t=1$  和  $t=1/2$  插值  $F(t)$ 。

## b. 插值方法

张量积算子：  $I_1 I_2$

例： 设

$$I_1 f(x, y) = \sum_{i=0}^n f(x_i, y) L_i^n(x)$$

$$I_2 f(x, y) = \sum_{j=0}^n f(x, y_j) L_j^n(y)$$

$$\text{则有 } I_1(I_2 f(x, y)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(x_i, y_j) L_i^n(x) L_j^n(y)$$

设  $I_u$  表示固定  $v$  时插值  $P(u, v)$  关于  $u$  方向的两端点的算子且满足

$$\left. \frac{\partial^\alpha I_u P(u, v)}{\partial u^\alpha} \right|_{u=0 \text{ 或 } u=1} = \left. \frac{\partial^\alpha P(u, v)}{\partial u^\alpha} \right|_{u=0 \text{ 或 } u=1}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m$$

同样,  $I_v$  表示固定  $u$  时插值  $P(u, v)$  关于  $v$  方向的两端点的算子且满足

$$\left. \frac{\partial^\beta I_v P(u, v)}{\partial v^\beta} \right|_{v=0 \text{ 或 } v=1} = \left. \frac{\partial^\beta P(u, v)}{\partial v^\beta} \right|_{v=0 \text{ 或 } v=1}, \quad \beta = 0, 1, \dots, n$$

**定理：** 若  $I_u I_v P(u, v) = I_v I_u P(u, v)$ , 则有

$$\left. \frac{\partial^\alpha [I_u \oplus I_v P(u, v)]}{\partial u^\alpha} \right|_{u=0 \text{ 或 } u=1} = \left. \frac{\partial^\alpha P(u, v)}{\partial u^\alpha} \right|_{u=0 \text{ 或 } u=1}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m$$

$$\left. \frac{\partial^\beta [I_u \oplus I_v P(u, v)]}{\partial v^\beta} \right|_{v=0 \text{ 或 } v=1} = \left. \frac{\partial^\beta P(u, v)}{\partial v^\beta} \right|_{v=0 \text{ 或 } v=1}, \quad \beta = 0, 1, \dots, n$$

**证明：** 利用布尔和算子定义和定理条件易证。

就插值算子而言：  $I_u I_v = I_v I_u \Leftrightarrow I_u \oplus I_v = I_v \oplus I_u$

**推论：** 布尔和算子至少保持着第一个算子的插值性质和第二个算子的插值精度。

## c. 误差估计

记  $I = I_u \oplus I_v$ ,  $R_u = 1 - I_u$ ,  $R_v = 1 - I_v$

则  $P(u, v) - IP(u, v) = (1 - I)P(u, v) = R_u \cdot R_v P(u, v)$

所以, 有  $1 - I_u \oplus I_v = R_u \cdot R_v$

类似地, 有  $1 - I_u \cdot I_v = R_u \oplus R_v$

### (3) 双线性 Coons 曲面

- 问题: 给定  $D = [0, 1]^2$  上的某一曲面  $P(u, v)$  的四条边界线  $P(u, 0)$ ,  $P(u, 1)$ ,  $P(0, v)$  和  $P(1, v)$ , 在  $D$  上求一曲面插值这四条曲线。

令

$$Q_1(u, v) = I_u P(u, v) = P(0, v)(1 - u) + P(1, v)u$$

$$Q_2(u, v) = I_v P(u, v) = P(u, 0)(1 - v) + P(u, 1)v$$

- 构造插值曲面

$$IP(u, v) = Q_1(u, v) + Q_2(u, v) - \Delta(u, v)$$

$$\text{其中 } \Delta(u, v) = I_u Q_2(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

- 双线性 Coons 曲面的矩阵表示

记  $\varphi_0(u) = 1 - u$ ,  $\varphi_1(u) = u$ ,  $\psi_0(v) = 1 - v$ ,  $\psi_1(v) = v$ , 则

$$\begin{aligned} I_u \oplus I_v P(u, v) &= \begin{bmatrix} \varphi_0(u) & \varphi_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, v) \\ P(1, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P(u, 0) & P(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0(v) \\ \psi_1(v) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \varphi_0(u) & \varphi_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0(v) \\ \psi_1(v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

约定:  $P(u, v) = uv$

边界线  $P(u, 0) = u0$ ,  $P(u, 1) = u1$ ,  $P(0, v) = 0v$ ,  $P(1, v) = 1v$

偏导数  $\frac{\partial^{\alpha+\beta} P(u, v)}{\partial u^\alpha \partial v^\beta} = uv_{u^\alpha v^\beta}$

则双线性 Coons 曲面可表示成

$$I_u \oplus I_v P(u, v) = - \begin{bmatrix} -1 & \varphi_0(u) & \varphi_1(u) \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} -1 \\ \psi_0(v) \\ \psi_1(v) \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } C = \begin{bmatrix} 0 & u0 & u1 \\ 0v & 00 & 01 \\ 1v & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

#### (4) 双三次 Coons 曲面

**问题：** 给定边界线及边界处一阶导矢，构造插值曲面

**方法：** 对于对边及对边处的导矢用三次 Hermite 插值

##### ● 三次 Hermite 插值基函数

$$y(t) = y_0 \varphi_0(t) + y'_0 \bar{\varphi}_0(t) + y_1 \varphi_1(t) + y'_1 \bar{\varphi}_1(t)$$

$$\text{其中 } \varphi_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad \bar{\varphi}_0(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad \varphi_1(t) = \varphi_0(1-t), \quad \bar{\varphi}_1(t) = \bar{\varphi}_0(1-t)$$

##### ● 基本算子

$$\begin{aligned} I_u P(u, v) &= P(0, v) \varphi_0(u) + P_u(0, v) \bar{\varphi}_0(u) + P(1, v) \varphi_1(u) + P_u(1, v) \bar{\varphi}_1(u) \\ &= \begin{bmatrix} 0v & 1v & 0v_u & 1v_u \end{bmatrix} \Phi(u) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \Phi(u) = [\varphi_0(u) \quad \varphi_1(u) \quad \bar{\varphi}_0(u) \quad \bar{\varphi}_1(u)]^T$$

$$\text{同理，有： } I_v P(u, v) = \begin{bmatrix} u0 & u1 & u0_v & u1_v \end{bmatrix} \Phi(v)$$

$$I_u I_v P(u, v) = \Phi^T(u) \begin{bmatrix} 00 & 01 & 00_v & 01_v \\ 10 & 11 & 10_v & 11_v \\ 00_u & 01_u & 00_{vu} & 01_{vu} \\ 10_u & 11_u & 10_{vu} & 11_{vu} \end{bmatrix} \Phi(v)$$

##### ● 相容性条件

$$00_{vu} = 00_{uv}, \quad 10_{vu} = 10_{uv}$$

$$01_{vu} = 01_{uv}, \quad 11_{vu} = 11_{uv}$$

##### ● 布尔和 Coons 曲面

给定边界曲线与边界导矢，且导矢在角点处满足相容性条件，可

得双三次 Coons 曲面

$$C(u, v) = I_u \oplus I_v P(u, v) = - \begin{bmatrix} -1 & \Phi^T(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u0 & u1 & u0_v & u1_v \\ 0_v & & C & & C_v \\ 1_v & & & & \\ 0_{v_u} & & C_u & & C_{vu} \\ 1_{v_u} & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \Phi(v) \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } C = \begin{bmatrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}, \quad C_u = \begin{bmatrix} 00_u & 01_u \\ 10_u & 11_u \end{bmatrix}, \quad C_v = \begin{bmatrix} 00_v & 01_v \\ 10_v & 11_v \end{bmatrix}, \quad C_{vu} = \begin{bmatrix} 00_{vu} & 01_{vu} \\ 10_{vu} & 11_{vu} \end{bmatrix}$$

## ● 应用

Coons 曲面造型主要步骤:

- 构造  $C^1$  连续网格曲线
- 求网格线处的偏导数
- 求/确定角点处的扭矢
- 分片构造 Coons 曲面

## (5) 高次 Coons 曲面

- Coons 曲面在边界处可以插值更高阶导数
- 若给定边界处直到 2 阶导矢, 可以构造双五次 Coons 曲面
- 双五次 Coons 曲面矩阵表示

采样五次 Hermite 插值基函数, 可得矩阵表示

$$\begin{bmatrix} 0 & u0 & u1 & u0_v & u1_v & u0_{v^2} & u1_{v^2} \\ 0_v & & C & & C_v & & C_{v^2} \\ 1_v & & & & & & \\ 0_{v_u} & & C_u & & C_{uv} & & C_{uv^2} \\ 1_{v_u} & & & & & & \\ 0_{v_u^2} & & C_{u^2} & & C_{u^2v} & & C_{u^2v^2} \\ 1_{v_{u^2}} & & & & & & \end{bmatrix}$$

## §2. Coons 曲面的修正与推广

### (1) Coons 曲面局限性

#### Coons 曲面扭矢相容性问题

考虑曲面  $P(u, v)$  在  $(0, 0)$  处的混合导矢

$$P_{vu}(0, 0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial u} P_v(u, 0)$$

$$P_{uv}(0, 0) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial v} P_u(0, v)$$

以上两个混合导矢是由两条导矢函数定义而成

若边界导矢函数独立给出，则角点处扭矢可能不相等！

$$P_{vu}(0, 0) \neq P_{uv}(0, 0)$$

### (2) Gregory 曲面片

为解决角点扭矢不相容问题，Gregory 提出一种可变扭矢：

$$P_{uv}(0, 0) = \frac{u \frac{\partial}{\partial v} P_u(0, 0) + v \frac{\partial}{\partial u} P_v(0, 0)}{u + v}$$

$$P_{uv}(0, 1) = \frac{-u \frac{\partial}{\partial v} P_u(0, 1) + (v - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_v(0, 1)}{-u + v - 1}$$

$$P_{uv}(1, 0) = \frac{(1 - u) \frac{\partial}{\partial v} P_u(1, 0) + v \frac{\partial}{\partial u} P_v(1, 0)}{1 - u + v}$$

$$P_{uv}(1, 1) = \frac{(u - 1) \frac{\partial}{\partial v} P_u(1, 1) + (v - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_v(1, 1)}{u - 1 + v - 1}$$

将上述扭矢代入双三次 Coons 曲面方程中去，可得插值曲面

这种曲面片称为 Gregory 曲面片。

局限性：

a. Gregory 曲面片在角点处扭矢不连续

b. 边界曲线是多项式，插值曲面是有理形式

### (3) 凸组合曲面(Brown's square)

#### a. 一般形式

定义：给定插值或逼近算子  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 它的凸组合形式为

$$IP(u, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(u, v) I_i P(u, v), \quad (u, v) \in D$$

其中  $\alpha_i(u, v)$  满足

(i) 正性  $\alpha_i(u, v) \geq 0$ ,  $(u, v) \in D$

(ii) 权性  $\sum_{i=1}^n \alpha_i(u, v) \equiv 1$

凸组合曲面基本性质

(i) 误差可控：若  $|I_i P(u, v) - P(u, v)| < \varepsilon_i$ , 则  $|IP(u, v) - P(u, v)| < \max(\varepsilon_i)$

(ii) 几何“凸包”：设  $P(u, v)$  为一函数，则

$$\min_i \{I_i P(u, v)\} \leq IP(u, v) \leq \max_i \{I_i P(u, v)\}$$

(iii) 插值性质

$$\text{若 } I_i P(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{P}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{则 } IP(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{P}$$

#### b. $C^1$ Brown's square

曲面形式：

$$B^1(u, v) = \alpha(u, v) I_u P(u, v) + \beta(u, v) I_v P(u, v)$$

其中

$$\alpha(u, v) = \frac{v^2(1-v)^2}{u^2(1-u)^2 + v^2(1-v)^2}, \quad \beta(u, v) = 1 - \alpha(u, v)$$

$I_u$ ,  $I_v$  为双三次 Coons 曲面中的插值算子。

定理： $B^1(u, v)$  在  $[0, 1]^2$  边界插值  $P = P(u, v)$  及其一阶偏导数。

### c. $C^2$ Brown's square

曲面形式:

$$B^2(u, v) = \alpha(u, v)I_u P(u, v) + \beta(u, v)I_v P(u, v)$$

其中

$$\alpha(u, v) = \frac{v^3(1-v)^3}{u^3(1-u)^3 + v^3(1-v)^3}, \quad \beta(u, v) = 1 - \alpha(u, v)$$

$I_u, I_v$  为双五次 Coons 曲面中的插值算子。

**定理:**  $B^2(u, v)$  在  $[0, 1]^2$  边界插值  $P = P(u, v)$  及其一、二阶偏导数。

#### (4) Gordon 曲面

**问题:** 给定曲面上两簇等参数曲线, 构造一张参数曲面插值已知曲线网。

已知曲线:  $\mathbf{g}(u_i, v); i = 0, 1, \dots, m, \quad \mathbf{g}(u, v_j); j = 0, 1, \dots, n$

构造  $u$  向插值曲面  $\mathbf{g}_1(u, v) = \sum_{i=0}^m \mathbf{g}(u_i, v) L_i^m(u)$ , 其中  $L_i^m(u)$  为插值基函数;

构造  $v$  向插值曲面  $\mathbf{g}_2(u, v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{g}(u, v_j) L_j^n(v)$

构造张量积插值曲面  $\mathbf{g}_{12}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{g}(u_i, v_j) L_i^m(u) L_j^n(v)$

利用布尔和得到 Gordon 曲面:  $\mathbf{g}(u, v) = \mathbf{g}_1(u, v) + \mathbf{g}_2(u, v) - \mathbf{g}_{12}(u, v)$

思考题:

1. 举例说明双线性 Coons 曲面是否位于其边界曲线的凸包内。
2. 由一条曲线沿着另一条曲线平移得到的曲面处处扭矢为 0, 证明其逆命题也成立。
3. 当边界线为三次曲线时, 证明得到的双线性 Coons 曲面是双



三次曲面。

### §3. 三角 Coons 曲面

**背景：**三角形元在几何造型、几何处理、数值计算等领域相对于四边形更方便、适应性更强。

**问题：**给定三角形  $T$  及  $T$  上的函数  $F(x,y)$ ，构造一个函数在  $\partial T$  上插值  $F(x,y)$  或其方向导数。

**插值方法：**(1) 由相邻边构造插值函数；(2) 由顶点与对边构造插值函数。

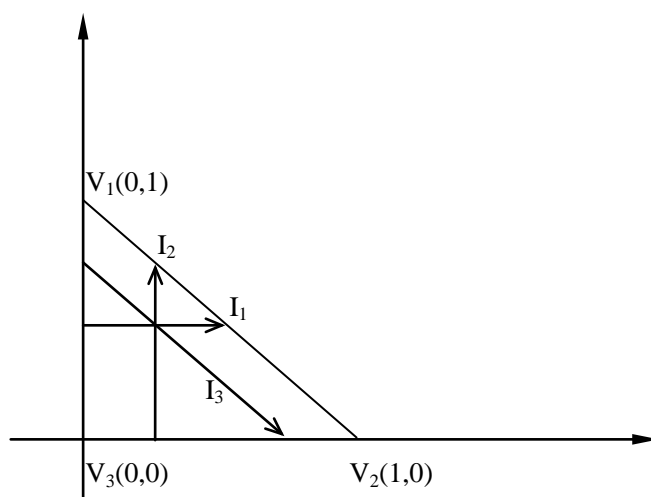
#### (1) BBG 超限插值

**BBG:** Barnhill, Birkhoff, Gordon

三角形标准化：设三角形  $T$  为标准三角形，其顶点  $V_1(0,1)$ ， $V_2(1,0)$ ， $V_3(0,0)$

在非标准三角形上的(多项式或有理多项式函数)插值可以由标准三角形上的插值以及仿射变换得到。

#### a. $C^0$ 插值



三个基本插值算子：

$$I_1 F(x, y) = \frac{1-x-y}{1-y} F(0, y) + \frac{x}{1-y} F(1-y, y)$$

$$I_2 F(x, y) = \frac{1-x-y}{1-x} F(x, 0) + \frac{y}{1-x} F(x, 1-x)$$

$$I_3 F(x, y) = \frac{x}{x+y} F(x+y, 0) + \frac{y}{x+y} F(0, x+y)$$

由上述插值算子，可得下面结论：

(i)  $I_i F(x, y)$  在除  $v_i$  对边以外的两条边插值  $F(x, y)$ ；

(ii) 进一步计算可得：

$$I_1 I_2 F(x, y) = (1-x-y) F(0, 0) + \frac{(1-x-y)y}{1-y} F(0, 1) + \frac{x}{1-y} F(1-y, y)$$

$$I_2 I_1 F(x, y) = (1-x-y) F(0, 0) + \frac{(1-x-y)x}{1-x} F(1, 0) + \frac{y}{1-x} F(x, 1-x)$$

有  $I_1 I_2 F(x, y) \neq I_2 I_1 F(x, y)$ ，但在  $T$  的三条边上  $I_1 I_2 F(x, y) = I_2 I_1 F(x, y)$

$$I_1 I_1 F(x, y) = I_1 F(x, y)$$

对于互不相同的  $i, j, k$ ，有

$$I_i I_j I_k F(x, y) = I_1 I_2 I_3 F(x, y) = (1-x-y) F(0, 0) + x F(1, 0) + y F(0, 1)$$

**定理：**  $\forall i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ ，有  $I_i \oplus I_j F(x, y)$  在  $\partial T$  上插值  $F(x, y)$ ，并且对

于  $F(x, y)$  是次数不超过 2 的多项式是精确成立的。

注： $I_i \oplus I_j F(x, y)$  不能精确插值三次多项式。

例. 设  $F(x, y) = xy(1-x-y)$ ，则  $I_i \oplus I_j F(x, y) \equiv 0$ 。

**结论：**  $I_i \oplus I_j F(x, y)$  具有 2 次代数精度。

(iii) 凸组合插值曲面

设有非负函数  $\alpha_{ij}(x, y)$ ， $i, j = 1, 2, 3$ ，且  $\sum_{i,j} \alpha_{ij}(x, y) = 1$

则  $\sum_{i,j} \alpha_{ij}(x,y) \mathbf{I}_i \oplus \mathbf{I}_j F(x,y)$  在  $\mathbf{T}$  的边界上插值  $F(x,y)$  且具有二次精度。

特别地，取  $\alpha_{ij}(x,y) = \frac{1}{6}$ ，可得插值函数

$$\mathbf{I}^* F(x,y) = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_3) F(x,y)$$

## b. $\mathbf{C}^1$ 插值

在  $\partial\mathbf{T}$  上插值  $F(x,y)$  及其切平面。

构造插值算子：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 F(x,y) &= \varphi_0 \left( \frac{x}{1-y} \right) F(0,y) + \varphi_1 \left( \frac{x}{1-y} \right) F(1,y) \\ &\quad + \bar{\varphi}_0 \left( \frac{x}{1-y} \right) F_{1,0}(0,y) + \bar{\varphi}_1 \left( \frac{x}{1-y} \right) F_{1,0}(1,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 F(x,y) &= \varphi_0 \left( \frac{y}{1-x} \right) F(x,0) + \varphi_1 \left( \frac{y}{1-x} \right) F(x,1-x) \\ &\quad + \bar{\varphi}_0 \left( \frac{y}{1-x} \right) F_{0,1}(x,0) + \bar{\varphi}_1 \left( \frac{y}{1-x} \right) F_{0,1}(x,1-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_3 F(x,y) &= \varphi_0 \left( \frac{x}{x+y} \right) F(0,x+y) + \varphi_1 \left( \frac{x}{x+y} \right) F(x+y,0) \\ &\quad + \bar{\varphi}_0 \left( \frac{x}{x+y} \right) D_{\bar{e}} F(0,x+y) + \bar{\varphi}_1 \left( \frac{x}{x+y} \right) D_{\bar{e}} F(x+y,0) \end{aligned}$$

其中  $\bar{e} = (-1,1)/\sqrt{2}$

## Hermite 基函数

$$\varphi_0(t) = (t-1)^2(2t+1), \quad \varphi_1(t) = \varphi_0(1-t)$$

$$\bar{\varphi}_0(t) = t(1-t)^2, \quad \bar{\varphi}_1(t) = \bar{\varphi}_0(1-t)$$

**定理：** 若  $F(x,y) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{T})$  且在三个顶点处满足

$$D_{\bar{e}_i} D_{\bar{e}_j} F(\mathbf{V}_k) = D_{\bar{e}_j} D_{\bar{e}_i} F(\mathbf{V}_k), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad k \neq i \neq j \neq k$$

则  $\mathbf{I}_i \oplus \mathbf{I}_j F(x,y)$  在  $\partial\mathbf{T}$  上插值  $F(x,y)$  及其一阶导数。

注：  $\bar{e}_i$  为顶点  $\mathbf{V}_i$  对边向量。

实际算法：  $I^*F(x,y)=\frac{1}{2}(I_1+I_2+I_3-I_1I_2I_3)F(x,y)$

c. 修正 BBG 插值

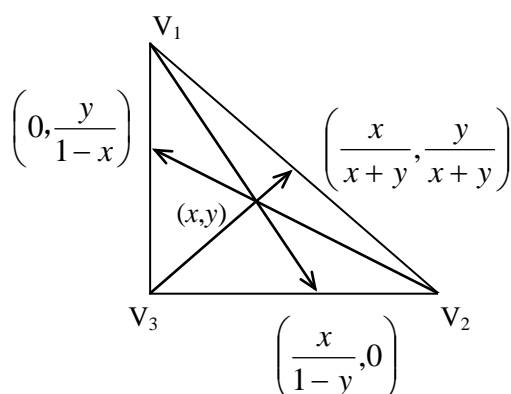
$$I_i \oplus I_j F(x,y) - \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k^2}{1 - \varepsilon_k^2} [D_{\bar{e}j} D_{\bar{e}i} F(V_k) - D_{\bar{e}i} D_{\bar{e}j} F(V_k)],$$

其中  $\varepsilon_1 = x$ ,  $\varepsilon_2 = y$ ,  $\varepsilon_3 = 1 - x - y$

在  $\partial T$  上插值  $F(x,y)$  及其一阶导数。

(2) Nielson 的边顶点插值格式(射线法)

a. 标准三角形  $T$  上的  $C^0$  插值



三个基本插值算子：

$$I_1 F(x,y) = (1-y)F\left(\frac{x}{1-y}, 0\right) + yF(0,1)$$

$$I_2 F(x,y) = (1-x)F\left(0, \frac{y}{1-x}\right) + xF(1,0)$$

$$I_3 F(x,y) = (x+y)F\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right) + (1-x-y)F(0,0)$$

容易验证

$$I_i I_j F(x,y) = I_j I_i F(x,y) = I_i I_2 I_3 F(x,y), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j$$

$$I_1 I_2 I_3 F(x, y) = (1 - x - y)F(0, 0) + xF(1, 0) + yF(0, 1)$$

取布尔和

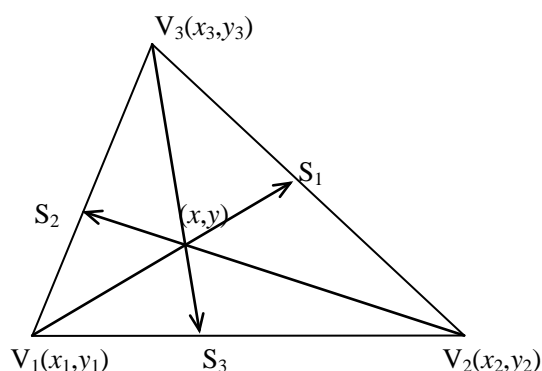
$$I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 F(x, y) = [I_1 + I_2 + I_3 - I_1 I_2 - I_1 I_3 - I_2 I_3 + I_1 I_2 I_3] F(x, y)$$

计算可得

$$\begin{aligned} IF(x, y) &= I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 F(x, y) \\ &= (1 - x)F\left(0, \frac{y}{1 - x}\right) + (1 - y)F\left(\frac{x}{1 - y}, 0\right) + (x + y)F\left(\frac{x}{x + y}, \frac{y}{x + y}\right) \\ &\quad - (1 - x - y)F(0, 0) - xF(1, 0) - yF(0, 1) \end{aligned}$$

$IF(x, y)$  在  $\partial T$  上插值  $F(x, y)$ 。

b. 一般三角形  $T'$  上的  $C^0$  插值



三角形  $T'$  顶点  $(x_i, y_i) \ i = 1, 2, 3$

设仿射变换:  $x = x(p, q)$ ,  $y = y(p, q)$  把标准三角形  $T$  变为  $T'$

对在  $T'$  上有定义的函数  $F$  定义插值算子:

$$IF(x, y) = I\hat{F}(p(x, y), q(x, y))$$

其中  $\hat{F}(p, q) = F(x(p, q), y(p, q))$

$p = p(x, y)$  和  $q = q(x, y)$  是仿射变换的逆变换。

将仿射变换  $x = x(p, q)$ ,  $y = y(p, q)$  表示成

$$x(p, q) = x_i p + x_j q + x_k r$$

$$y(p, q) = y_i p + y_j q + y_k r$$

其中  $r = 1 - p - q$

对应的逆变换为

$$p(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_k & x_j - x_k \\ y - y_k & y_j - y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{vmatrix}}, \quad q(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & x_i - x_k \\ y - y_i & y_i - y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_j - x_k & x_i - x_k \\ y_j - y_k & y_i - y_k \end{vmatrix}},$$

$$r(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_j & x_i - x_j \\ y - y_j & y_i - y_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_k - x_j & x_i - x_j \\ y_k - y_j & y_i - y_j \end{vmatrix}}$$

其中  $(i, j, k)$  为  $(1, 2, 3)$  的某种排列。

得到  $T$  上的插值函数如下：

$$\begin{aligned} IF(x, y) &= IF(x_i p + x_j q + x_k r, y_i p + y_j q + y_k r) \\ &= (1 - p(x, y)) F\left(\frac{x - x_i p(x, y)}{1 - p(x, y)}, \frac{y - y_i p(x, y)}{1 - p(x, y)}\right) \\ &\quad + (1 - q(x, y)) F\left(\frac{x - x_j q(x, y)}{1 - q(x, y)}, \frac{y - y_j q(x, y)}{1 - q(x, y)}\right) \\ &\quad + (1 - r(x, y)) F\left(\frac{x - x_k r(x, y)}{1 - r(x, y)}, \frac{y - y_k r(x, y)}{1 - r(x, y)}\right) \\ &\quad - p(x, y) F(x_i, y_i) - q(x, y) F(x_j, y_j) - r(x, y) F(x_k, y_k) \end{aligned}$$

c. 基于重心坐标表示的  $C^0$  插值

设  $P = (x, y)$  是三角形  $T$  内任意一点，其重心坐标为  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$

过顶点  $v_i$  并经  $P$  与三角形对边的交点

$$S_i = \left( \frac{x - x_i \tau_i}{1 - \tau_i}, \frac{y - y_i \tau_i}{1 - \tau_i} \right), \quad i = 1, 2, 3$$

这时，插值函数可构造为

$$IF(x, y) = \sum_{i=1}^3 [(1 - \tau_i)F(S_i) - \tau_i F(V_i)]$$

该插值具有一阶代数精度(思考题)。

d. 一般三角形  $T$  上的  $C^1$  插值

在  $v_i$  和  $s_i$  所夹的线段上由  $F(x, y)$  导出一元函数

$$R_i(t) = F(tS_i + (1-t)V_i), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, 2, 3$$

插值  $R_i(t)$  的两个端点及其导数的三次 Hermite 插值多项式为

$$D_i F = h(1 - \tau_i)F(S_i) + \bar{h}(1 - \tau_i)R'_i(1) + h(\tau_i)F(V_i) + \bar{h}(\tau_i)R'_i(0)$$

其中

$$\tau_i = 1 - t = 1 - t(x, y)$$

$$R'_i(1) = \frac{(x - x_i)F_x(S_i) + (y - y_i)F_y(S_i)}{1 - \tau_i}$$

$$R'_i(0) = \frac{(x - x_i)F_x(V_i) + (y - y_i)F_y(V_i)}{1 - \tau_i}$$

$$h(t) = t^2(3 - 2t)$$

$$\bar{h}(t) = t^2(t - 1)$$

定理： 设  $F \in C_T^2$ ， 则

$$DF = \frac{\tau_2^2 \tau_3^2 D_1 F + \tau_1^2 \tau_3^2 D_2 F + \tau_1^2 \tau_2^2 D_3 F}{\tau_2^2 \tau_3^2 + \tau_1^2 \tau_3^2 + \tau_1^2 \tau_2^2}$$

属于  $C_T^1$ ， 并且在  $\partial T$  上插值  $F(x, y)$  及其一阶导数。

(3) 凸组合方法(Brown-little)

基本算子：

$$I_1 F(x, y) = F(0, y) + x F_{1,0}(0, y)$$

$$I_2 F(x, y) = F(x, 0) + y F_{0,1}(x, 0)$$

$$I_3 F(x, y) = F\left(\frac{1+x-y}{2}, \frac{1-x+y}{2}\right) - (1-x-y)(F_{1,0} + F_{0,1})\left(\frac{1+x-y}{2}, \frac{1-x+y}{2}\right)$$

插值算子：

$$(\text{BL})F(x, y) = \frac{y^2(1-x-y)^2}{D} I_1 F(x, y) + \frac{x^2(1-x-y)^2}{D} I_2 F(x, y) + \frac{x^2 y^2}{D} I_3 F(x, y)$$

其中：  $D = x^2 y^2 + x^2(1-x-y)^2 + y^2(1-x-y)^2$

则  $(\text{BL})F(x, y)$  在  $\partial T$  上插值  $F(x, y)$  及其一阶导数。

思考题：

1. 给出一般三角形上 **BBG** 插值方法。

2. 验证插值函数  $IF(x, y) = \sum_{i=1}^3 [(1-\tau_i)F(S_i) - \tau_i F(V_i)]$  具有一阶代数精度。