第二章 插值样条函数

§1. 基本概念

- 三次样条函数：三次多项式样条曲线

特点:

1. 次数最低的 C^2 连续样条，$k(x)$连续，计算量小(稳定)
2. 样条可应用于数据拟合，船体放样

- 力学欧拉公式(物理背景)：

$M(x) = EIk(x)$，

其中：$k(x)$表示曲率，E 杨氏模数，I 惯性矩，$M(x)$弯矩

将上面公式改写成 $\dfrac{y''(x)}{\left[1+(y'(x))^2\right]^{3/2}} = \dfrac{M(x)}{EI}$

考虑小挠度情形：$y'(x) << 1$

假设梁的弯矩近似为线性函数：$M(x) \approx ax + b$

得到简化方程：$y''(x) = \dfrac{1}{EI}(ax+b)$

积分可得：$y(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

三次多项式空间 P_3：所有次数不大于 3 的多项式的集合

确定一段三次曲线需要满足条件：

(1) 两端函数值+两端导数值

或

(2) 两端函数值+两端二阶导数值

- 插值三次样条定义：

设[a, b]上的一个分割$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$，称 $S(x)$为[a, b]上的三次样条函数，如果

(i) $S|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_3$

(ii) $S(x) \in C^2[a,b]$

如果给定 y_i (i=0,1,…,n)使得$S(x_i) = y_i$， 称 $S(x)$为插值三次样条函数。

§2. 插值三次样条构造

问题：为构造插值三次样条曲线 $S(x)$，需要知道节点处的一阶或二阶导数，使得

$S(x_i) = y_i$

$S'(x_i) = y_i' = m_i$ 或 $S''(x_i) = y_i'' = M_i$

记$h_i = x_i - x_{i-1}$， i=1,2,…,n 构造方法如下：

(一) 三弯矩方程

假设$\begin{cases} S(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ S(x_i) = y_i \end{cases}$ $\begin{cases} S''(x_{i-1}) = M_{i-1} \\ S''(x_i) = M_i \end{cases}$

则有$S''(x) = M_{i-1}\dfrac{x_i - x}{h_i} + M_i\dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}$

积分并确定常数，可得

$$S(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6}\right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6}\right)(x - x_{i-1}),$$

其中$x \in [x_{i-1}, x_i]$。

根据$S'(x_i^-) = S'(x_i^+)$，可得

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 3D_i \quad (i = 1,2,\dots,n-1)$$

其中 $\lambda_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$， $\mu_i = 1 - \lambda_i$， $D_i = \dfrac{2}{h_i + h_{i+1}}\left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$

- 边界条件(I)： $y'(a) = y'_0$， $y'(b) = y'_n$

得到

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\right) = 3D_0$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) = 3D_n$$

将关于 M_i 的方程写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_0 = \mu_n = 1$， $\lambda_i + \mu_i = 1$， $(i = 1,2,\dots,n-1)$

- 追赶法求解线性方程组

记方程组为 $AM=D$

系数矩阵 A 主对角占优

设 $A = \begin{bmatrix} p & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & p & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & p & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & p & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & p \end{bmatrix}$， 其中 $\lambda_i + \mu_i = 1$， $\lambda_i, \mu_i \ge 0$， $p > 1$

易知 A 非奇异。

矩阵分解

$$A=\begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & p_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & q_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & q_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=BC$$

$q_{-1}=0$；

$p=2$；

for (k=0,1,…,n–1)　{

$$p_k=p-\mu_k q_{k-1}$$

$$q_k=\frac{\lambda_k}{p_k}=\frac{\lambda_k}{p-\mu_k q_{k-1}}$$

}

$$p_n=p-\mu_n q_{n-1}$$

解方程组 *AM=D*

(BC)M=B(CM)=D，令 CM=Z

Step 1(追): $BZ=D$ → $Z=B^{-1}D$

Step 2(赶): $CM=Z$ → $M=C^{-1}Z$

- 周期边界条件：$y_0=y_n$， $m_0=m_n$， $M_0=M_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}$$

其中$D_n = \frac{2}{h_0 + h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$

(二)　三转角方程

计算各点处的(待定)一阶导数，使得分段 Hermite 插值函数是 C^2 连续的。

假设$\begin{cases} S(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ S(x_i) = y_i \end{cases}$　　$\begin{cases} S'(x_{i-1}) = m_{i-1} \\ S'(x_i) = m_i \end{cases}$

当$x \in [x_{i-1}, x_i]$时，有

$$S(x) = y_{i-1}h_0(x) + y_i h_1(x) + m_{i-1}H_0(x) + m_i H_1(x)$$

根据插值条件，函数$h_0(x), h_1(x), H_0(x), H_1(x)$应满足如下条件：

$$\begin{bmatrix} h_0(x_{i-1}) & h_0(x_i) & h_0'(x_{i-1}) & h_0'(x_i) \\ h_1(x_{i-1}) & h_1(x_i) & h_1'(x_{i-1}) & h_1'(x_i) \\ H_0(x_{i-1}) & H_0(x_i) & H_0'(x_{i-1}) & H_0'(x_i) \\ H_1(x_{i-1}) & H_1(x_i) & H_1'(x_{i-1}) & H_1'(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解得

$$h_0(x) = \frac{(x_i - x)^2[2(x - x_{i-1}) + h_i]}{h_i^3}$$

$$h_1(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2[2(x_i - x) + h_i]}{h_i^3}$$

$$H_0(x) = \frac{(x_i - x)^2(x - x_{i-1})}{h_i^2} \qquad H_1(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2(x_i - x)}{h_i^2}$$

为保证$S(x) \in C^2[a,b]$，则须$S''(x_i^-) = S''(x_i^+) \quad (i = 1,2,\dots,n-1)$

将 $S(x)$求导并带入等式，有：

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3C_i \quad (i = 1,2,\dots,n-1)$$

其中$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$，　$\mu_i = 1 - \lambda_i$，　$C_i = \lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$

该方程组有 n–1 个方程，n+1 个未知量。

为使方程组有唯一解，可在两端各增加一个约束条件，从而形成有 n+1 个方程和 n+1 个未知量的方程组。

- 边界条件 I

已知 $\begin{cases} y'(x_0) = m_0 \\ y'(x_n) = m_n \end{cases}$

方程组可写成

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3C_1 - \lambda_1 m_0 \\ 3C_2 \\ 3C_3 \\ \vdots \\ 3C_{n-1} - \mu_{n-1} m_n \end{bmatrix}$$

- 边界条件 II

已知 $\begin{cases} y''(x_0) = y''_0 \\ y''(x_n) = y''_n \end{cases}$

则有 $\begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - \dfrac{h_1}{2} y''_0 = 3C_0 - \dfrac{h_1}{2} y'' \\ m_{n-1} + 2m_n = 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \dfrac{h_n}{2} y''_n = 3C_n + \dfrac{h_n}{2} y'' \end{cases}$

特别地，当 $y''_0 = y''_n = 0$，得到的插值函数称为自然插值三次样条函数。(此时，边界处退化为直线情形)

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3C_0 - \dfrac{h_1}{2} y''_0 \\ 3C_1 \\ 3C_2 \\ \vdots \\ 3C_{n-1} \\ 3C_n + \dfrac{h_n}{2} y''_n \end{bmatrix}$$

§3.三次样条函数的性质

定理 1：极小模性质

设 $f(x)\in C^2[a,b]$是任一被插函数，$S(x)$是自然插值三次样条函数(或同时插值边界导数)，则成立

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \le \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

式中等号仅当 $f(x)\equiv S(x)$时成立。

证明：考察积分

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [f''(x)-S''(x)]^2 dx \\
&= \int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx \\
&- 2\int_a^b [f''(x)-S''(x)]S''(x)dx
\end{aligned}$$

由插值条件及连续两次分部积分，有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [f''(x)-S''(x)]S''(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x)-S''(x)]S''(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ [f'(x)-S'(x)]S''(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - [f(x)-S(x)]S'''(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x)-S(x)]S^{(4)}(x)dx \right\} \\
&= [f'(x)-S'(x)]S''(x)\Big|_a^b \\
&= 0
\end{aligned}$$

当 $f''(x)\equiv S''(x)$，则 $f(x)-S(x)$是线性函数，又因为 $f(x_i)-S(x_i)=0,$ $i=0,1,\ldots,n$。 $f(x)-S(x)$共有$n+1>2$个零点，故 $f(x)-S(x)\equiv 0$。

定理 2：最佳逼近性质

设 $f(x)\in C^2[a,b]$是任一被插函数，$S_f(x)$是带有斜率边界条件的插值三次样条函数，$S(x)$是与$S_f(x)$具有相同分割的任一三次样条函数，则有

$$\int_a^b \left[f''(x)-S_f''(x)\right]^2 dx \le \int_a^b \left[f''(x)-S''(x)\right]^2 dx$$

证明：

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[f''(x)-S''(x)\right]^2 dx \\
&=\int_a^b \left[f''(x)-S_f''(x)+S_f''(x)-S''(x)\right]^2 d\quad x \\
&=\int_a^b \left[f''(x)-S_f''(x)\right]^2 dx+\int_a^b \left[S_f''(x)-S''(x)\right]^2 dx \\
&+2\int_a^b \left[f''(x)-S_f''(x)\right]\left[S_f''(x)-S''(x)\right] d\quad x
\end{aligned}$$

分部积分，知上面展开式中最后一项为 0。定理成立。

定理 3：误差估计

已知函数 $f(x)\in C^4[a,b]$ 及 $[a,b]$ 上的一个分割 Δ，设 $S(x)$ 是关于 $f(x)$ 的带 I 型或 II 型边界条件的插值三次样条函数，则有误差估计

$$\left\|(f-s)^{(r)}\right\|_\infty \le C_r \left\|f^{(4)}\right\|_\infty h^{4-r}，\ (r=0, 1, 2, 3)$$

其中 $C_0=\frac{5}{384}$， $C_1=\frac{1}{24}$， $C_2=\frac{3}{8}$， $C_3=\frac{\beta+\beta^{-1}}{2}$

$h=\max\limits_i h_i$， $\beta=\frac{\max\limits_i h_i}{\min\limits_i h_i}$ 是分割比。

证明：略。

定理 3 说明，当 h→0 时，插值三次样条函数连同它的一、二、三阶导数一起一致收敛到 $f(x)$ 及其相应的导数。

§3. 三次基样条(Cardinal spline)

- 问题：给定采样数据 $(x_i,y_i)_{i=0}^n$ 以及端点处的导数值 y_0' 和 y_n'，其中 $(x_i)_{i=0}^n$ 为单调增加序列，构造插值函数 $S(x)$ 满足：

(1) $S(x_i)=y_i$， $i=0,1,\dots,n$

(2) $S'(a)=y'_0$， $S'(b)=y'_n$

(考虑 I 型边界条件，II 型边界可类似做)

● 方法：$S(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_i(x)+y'_0\varphi_{n+1}(x)+y'_n\varphi_{n+2}(x)$，

其中$\varphi_i(x)$均为三次样条函数，且满足

$$\begin{cases}\varphi_i(x_j)=\delta_{ij} & (i,j=0,1,\dots,n)\\ \varphi'_i(x_0)=\varphi'_i(x_n)=0 & (i=0,1,\dots,n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_{n+1}(x_j)=0 & \\ \varphi'_{n+1}(x_0)=1 & (j=0,1,\dots,n)\\ \varphi'_{n+1}(x_n)=0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_{n+2}(x_j)=0 & \\ \varphi'_{n+2}(x_0)=0 & (j=0,1,\dots,n)\\ \varphi'_{n+2}(x_n)=1 & \end{cases}$$

任一$\varphi_i(x)$可由三次样条函数方法求得。

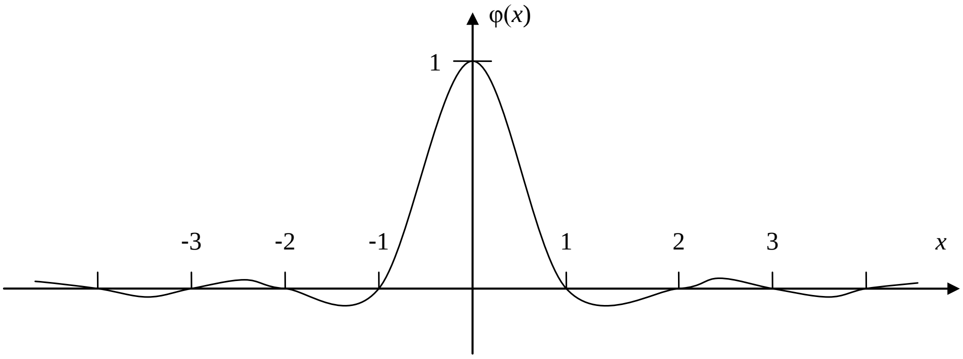
● 基样条特征

考虑定义在所有整数节点上的基样条$\varphi(x)$，

即满足$\varphi(j)=\delta_{0j}$， $(j=0,\pm1,\pm2,\dots)$

$$\varphi(x)=\begin{cases}(3\lambda+2)x^3-3(\lambda+1)x^2+1 & 0\le x<1\\ 3\lambda^j\left[(\lambda+1)(x-j)^3-(\lambda+2)(x-j)^2+(x-j)\right] & j\le x<j+1\ (j=1,2\dots)\\ \varphi(-x) & x<0\end{cases}$$

$\lambda=\sqrt{3}-2\approx-0.268$



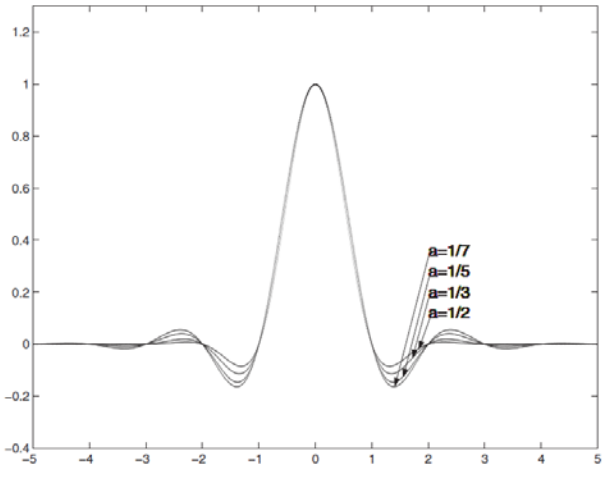
(a) 相邻两段异号；

(b) 每段有一个极值点，j+1 段极值点是 j 段极值点的 λ 倍；

(c) 节点处导数满足 $m_{j+1} = \lambda m_j$

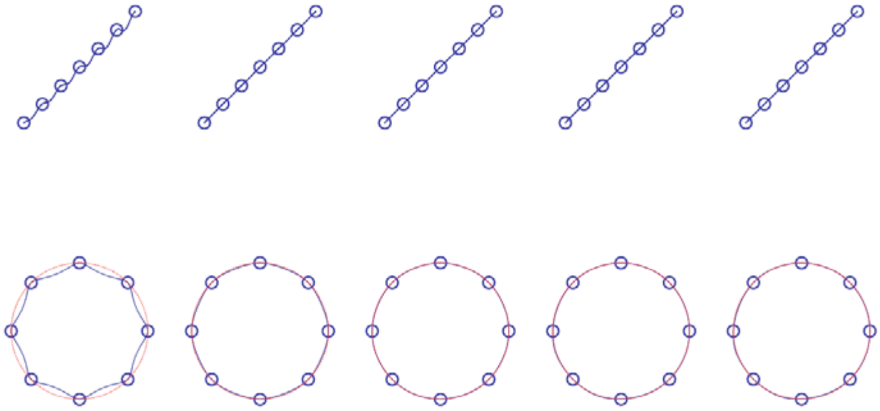
● 其它形式基样条

$$\phi(x,a)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}e^{-ax^2} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$



ACM TOG 30(2), article10, 2011

造型实例



$a=1$　　$a=1/2$　　$a=1/3$　　$a=1/5$　　$a=1/7$

§4. 二次样条函数

● 二次样条特点

光顺性好，C^1 连续

● 二次样条定义

设[a, b]上的一个分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots x_n=b$，称 $S(x)$为[a, b]上的二次样条函数，如果

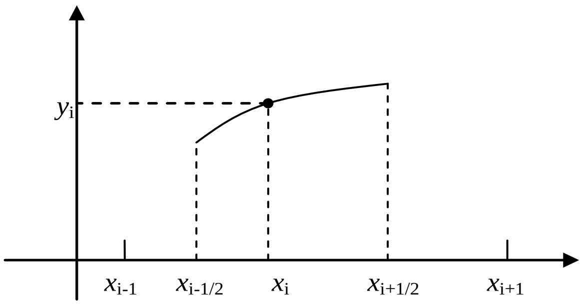
(i) $S(x)\in C^1[a,b]$

(ii) $S|_{[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]}\in P_2$， 其中 $x_{i-1/2}=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$

● 连续性方程

若 $S(x_i)=y_i$， $S'(x_i)=m_i$， $S''(x_i)=M_i$

则当 $x\in[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]$时有： $S(x)=y_i+m_i(x-x_i)+\dfrac{1}{2}M_i(x-x_i)^2$



在半节点 $x_{i-1/2}$ 处 C^1 连续，

$$\begin{cases} S\left(x_{i-1/2}^{-}\right)=S\left(x_{i-1/2}^{+}\right) \\ S'\left(x_{i-1/2}^{-}\right)=S'\left(x_{i-1/2}^{+}\right) \end{cases} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

消去 M_i 得到 m 连续性方程

$$\lambda_i m_{i-1}+3m_i+\mu_i m_{i+1}=4c_i \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

其中 $\lambda_i=\dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$， $\mu_i=1-\lambda_i$， $c_i=\lambda_i\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}+\mu_i\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}$

端点导数 m_0， m_n 事先给定，其它导数 m_i 由方程组求解得到。

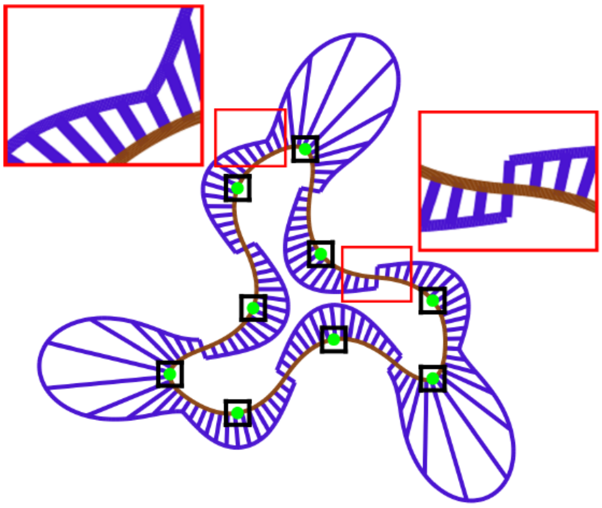
类似地，得到 M 连续性方程

$$\mu_i M_{i-1}+3M_i+\lambda_i M_{i+1}=4d_i \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

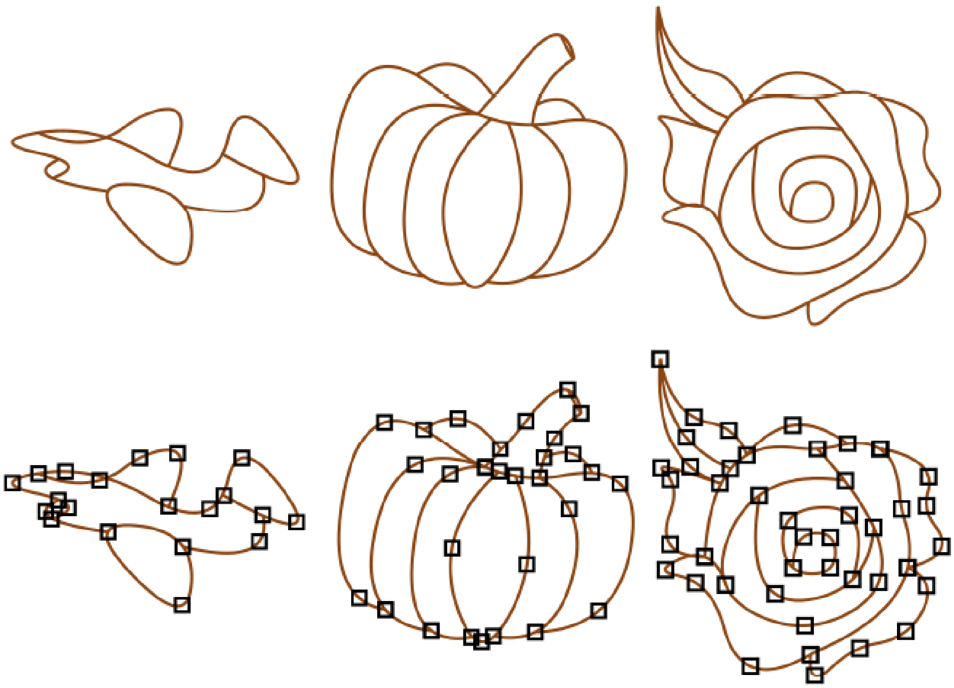
其中 $d_i=\dfrac{2}{h_i+h_{i+1}}\left(\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right)$

思考题：

1. 利用追赶法构造三次插值样条函数。
2. 二次样条函数中为什么要引入半节点？若用原区间分割点作为节点，如何设定边界条件和构造插值函数？
3. 文献阅读：k-Curves: Interpolation at Local Maximum Curvature, siggraph 2017.



k-curve(曲线曲率极大值点出现在控制顶点处)



k-curve 造型