第十三章 细分曲线与细分曲面

§1. 细分方法概述

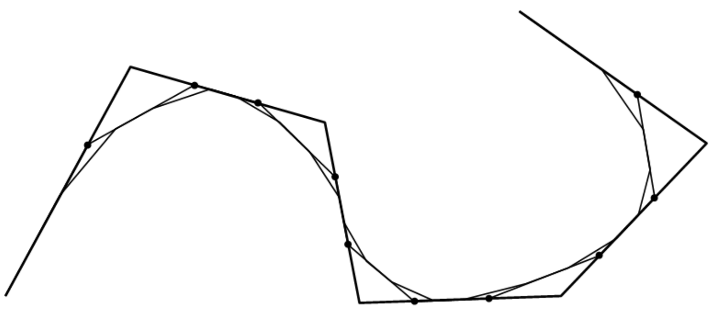
(a) 背景

- 连续曲线曲面表示，如 Bézier 曲线曲面，B 样条曲线曲面
- 曲线曲面绘制、显示、加工：离散—连续—离散
- 曲线快速生成：离散—离散，Chaikin 1974
- 任意拓扑 B 样条曲面，Catmull-Clark 1978，Doo-Sabin 1978
- 任意次数 B 样条曲面离散生成，Lane-Riesenfeld 1980
- 插值型细分曲线曲面，Dyn et al 1987, 1990
- 基于三角控制网格的曲面细分，Loop 1987, Kobbelt 2000
- 细分曲面在计算机图形与动画中的应用, De Rose et al 1990~

(b) 细分定义

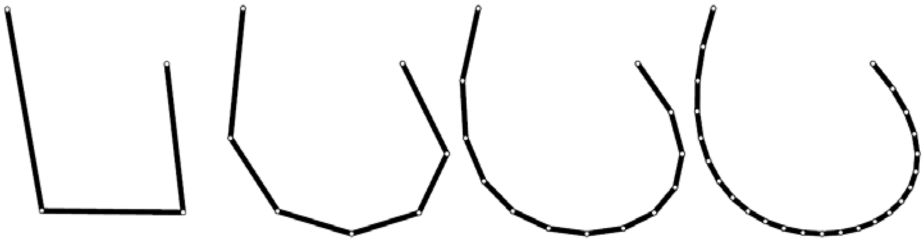
- **定义**：细分方法按照一定规则对网格不断加细，得到一个网格序列，这个网格序列的极限就定义了一个光滑的曲线或曲面。
- 举例

  Chaikin 细分曲线



$$P_{2i-1}^{1}=\frac{3}{4}P_i^0+\frac{1}{4}P_{i+1}^0,\quad P_{2i}^{1}=\frac{1}{4}P_i^0+\frac{3}{4}P_{i+1}^0$$

四点法插值曲线

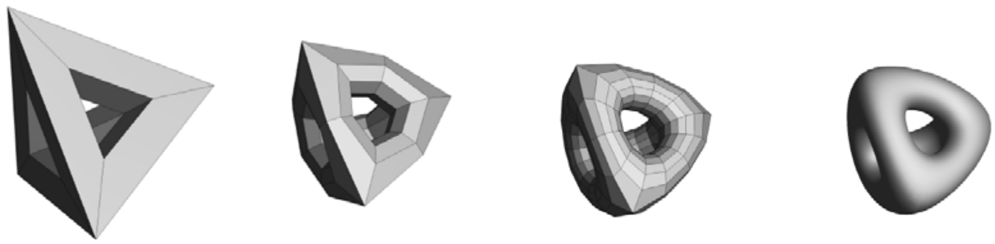


过连续四个点$\{P_{i-1},P_i,P_{i+1},P_{i+2}\}$构造三次 Lagrange 插值曲线

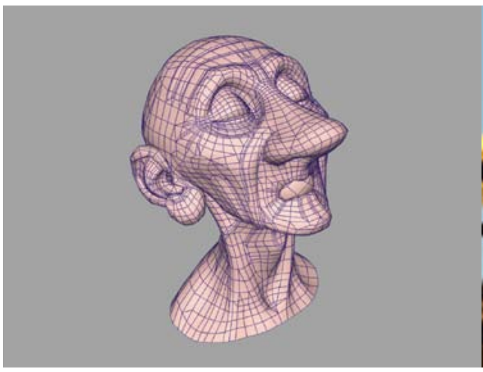
$$P(t)=\sum_{j=0}^{3}P_{i-1+j}L_{j,3}(t)$$

计算可得插值点 $P_{i+1/2}=P\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}P_{i-1}+\frac{9}{16}P_i+\frac{9}{16}P_{i+1}-\frac{1}{16}P_{i+2}$

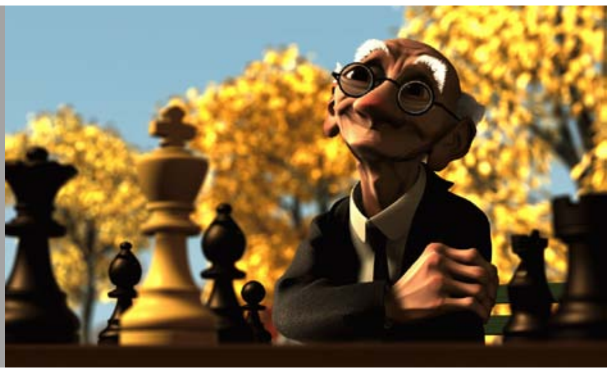
Catmull-Clark 曲面



控制网格　　细分一次　　细分二次　　极限曲面



控制网格



Geri’s game

- 细分方法的分类

根据原始控制顶点是否保留不变分类：

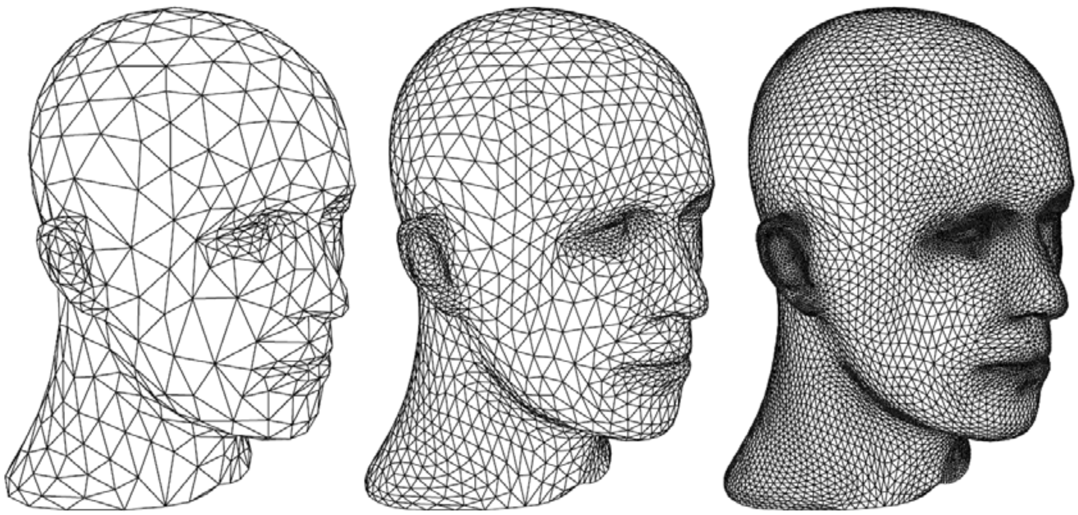
- 逼近细分 (approximate subdivision)
- 插值细分 (interpolatory subdivision)

根据细分规则是否随着细分次数改变分类：

- 稳定细分 (stationary subdivision)
- 非稳定细分 (non-stationary subdivision)

(c) 网格表示

- 细分曲线的控制网格是一多边形
- 细分曲面的控制网格由点、边、面构成：M=(V,E,F)



控制网格及加细网格

(d) 细分曲线曲面特点

- 计算高效性：少量浮点运算即可，与样条曲面类似，但隐式曲面计算较复杂
- 任意拓扑结构：控制网格和细分曲面可以具有任意拓扑结构，参数曲面拼接较复杂，而隐式曲面结构较难控制
- 曲面特征生成：通过控制细分规则和局部参数可生成折痕、尖刺等曲面特征

- 曲面层次表示：通过不同的细分层次进行交互或局部加细

§2. 均匀节点 B 样条与曲线细分

(a) 均匀 B 样条的节点加密

设节点向量为$\mathbf{Z}=\{t_j=j\}$，k 阶 B 样条基函数可递归定义为

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-i}{k-1}N_{i,k-1}(t)+\frac{i+k-t}{k-1}N_{i+1,k-1}(t)$$

特别地，$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1 & t_i<t<t_{i+1}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由平移性质知

$$N_{i,k}(t)=N_{0,k}(t-i)=N^k(t-i)$$

定义节点向量$\mathbf{Z}/2=\left\{\cdots,-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\cdots\right\}$

曲线$P(t)=\sum_{i\in\mathbf{Z}}P_i^0N^k(t-i)=\sum_{i\in\mathbf{Z}/2}P_i^1N^k(2(t-i))$

由于$\{N^k(2t-i)|i\in Z\}$为 k 阶 B 样条基函数，故$N^k(t)$可由这组基表示

$$N^k(t)=\sum_{i\in Z}c_i^kN^k(2t-i)$$

由 deBoor-Cox 公式并归纳可证

$$c_i^k=2^{-(k-1)}\binom{k}{i}$$

平移可得

$$N^k(t-i)=\sum_{j\in Z}c_{j-2i}^kN^k(2t-j)$$

代入曲线方程中有

$$P(t)=\sum_{i\in\mathbf{Z}}P_i^0N^k(t-i)=\sum_{i\in\mathbf{Z}}P_i^0\sum_{j\in Z}c_{j-2i}^kN^k(2t-j)$$

整理可得$P_j^1=\sum_{i\in\mathbf{Z}}c_{j-2i}^kP_i^0$

(b) 卷积方法

卷积定义：连续函数 $f(t)$和 $g(t)$的卷积为

$$(f \otimes g)(t) = \int f(s) g(t-s) ds$$

卷积运算满足如下性质：

1. 线性性： $f(t) \otimes (g(t) + h(t)) = f(t) \otimes g(t) + f(t) \otimes h(t)$

2. 时间平移： $f(t-i) \otimes g(t-k) = m(t-i-k)$

3. 时间放缩： $f(2t) \otimes g(2t) = \frac{1}{2} m(2t)$

其中 $m(t) = f(t) \otimes g(t)$

B 样条基函数可由卷积得到:

$$N^k(t) = N^{k-1}(t) \otimes N^1(t) = \mathop{\otimes}_{i=0}^{k-1} N^1(t)$$

由 B 样条定义易得：

$$N^1(t) = N^1(2t) + N^1(2t-1)$$

由卷积定义及性质，可得

$$N^k(t) = \mathop{\otimes}_{i=0}^{k-1} N^1(t) = \mathop{\otimes}_{i=0}^{k-1} \left(N^1(2t) + N^1(2t-1)\right) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^k(2t-i)$$

即 B 样条的双尺度方程为

$$N^k(t) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^k(2t-i)$$

记 $N(t) = [\cdots, N^k(t+2), N^k(t+1), N^k(t), N^k(t-1), N^k(t-2), \cdots]$

则双尺度方程可表示成矩阵形式

$$N(t) = N(2t) S$$

其中矩阵 S 由双尺度方程系数构成，满足 $S_{2i+j,i} = \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{j}$，称为细分矩阵。

记 B 样条曲线的控制顶点向量为 $P^0 = [\cdots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \cdots]^T$，则 B

样条曲线可表示为

$$P(t)=N(t)P^0$$

将双尺度方程代入上式，有

$$P(t)=N(2t)SP^0=N(2t)P^1$$

从而，有 $P^1=SP^0$，同理有 $P^{k+1}=SP^k$

- B 样条曲线细分一般格式：

$$P_{2i+1}^{k+1}=\sum_l c_{2(i-l)+1}P_l^k$$

$$P_{2i}^{k+1}=\sum_l c_{2(i-l)}P_l^k$$

- 二次 B 样条细分算法

$$P_{2i}^{k+1}=\frac{3}{4}P_i^k+\frac{1}{4}P_{i+1}^k$$

$$P_{2i+1}^{k+1}=\frac{1}{4}P_i^k+\frac{3}{4}P_{i+1}^k \quad \text{(注：重新编号)}$$

其双尺度方程的系数为$\left\{\frac{1}{2^2}\binom{3}{j};j=0,1,2,3\right\}=\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right\}$

- 三次 B 样条细分算法

$$P_{2i}^{k+1}=\frac{1}{8}P_{i-1}^k+\frac{3}{4}P_i^k+\frac{1}{8}P_{i+1}^k$$

$$P_{2i+1}^{k+1}=\frac{1}{2}P_i^k+\frac{1}{2}P_{i+1}^k$$

其双尺度方程的系数为$\left\{\frac{1}{2^3}\binom{4}{j};j=0,1,2,3,4\right\}=\left\{\frac{1}{8},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right\}$

(c) 细分曲线收敛性及光滑性

- 基本概念

曲线细分收敛是指细分多边形序列收敛；

每一多边形可表示成分段线性参数曲线；

n 维空间中曲线序列的收敛等价于其分量函数列的收敛。

- 定义：设函数列 $f_i(t)$，$t\in[a,b]$，$i=0,1,2,\ldots$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0>0$，当 $n>n_0$ 有 $\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)-f_i(t)|<\varepsilon$，则称函数列 $f_i(t)$ 一致收敛到函数 $f(t)$。特别地，当函数 $f_i(t)$ 是连续函数时，则其极限函数也连续。

引入记号：

$$\|f(t)\|=\sup_t|f(t)|$$

$$\|P\|=\sup_i|P_i|$$

$$\|S\|=\sup_i\sum_k|S_{i,k}|$$

易知：$\|SP\|\le\|S\|\cdot\|P\|$

记 $P^j(t)=N(2^jt)P^j$，为证明极限曲线 $P^\infty(t)=\lim\limits_{j\to\infty}P^j(t)$ 连续，需证明其极限存在且函数列一致收敛。

不妨可设细分矩阵 S 的行元素和为 1

记 $P_{i+1}^j-P_i^j=(\Delta P^j)_i$

- 引理：如果 $\|\Delta P^j\|<c\gamma^j$，其中 c 为常数，$0<\gamma<1$，$j>j_0\ge0$，则 $P^j(t)$ 一致收敛到连续极限曲线 $P^\infty(t)$。

证明：记 S_1 为一次 B 样条细分矩阵，则有 $S-S_1$ 的行元素和为 0，从而存在矩阵 D 使得 $S-S_1=D\Delta$，其中 Δ 表示差分。

$$\begin{aligned}\|P^{j+1}(t)-P^j(t)\| &= \|N(2^{j+1}t)P^{j+1}-N(2^jt)P^j\|\\ &=\|N(2^{j+1}t)SP^j-N(2^{j+1}t)S_1P^j\|\\ &=\|N(2^{j+1}t)(S-S_1)P^j\|\\ &\le\|N(2^{j+1}t)\|\cdot\|D\Delta P^j\|\\ &\le\|D\|\cdot\|\Delta P^j\|\le\|D\|c\gamma^j\end{aligned}$$

又因为 $P^j(t)=P^0(t)+\sum\limits_{k=0}^{j-1}(P^{k+1}-P^k)(t)$

所以，当 $j \to \infty$ 时，有 $\left\|P^{\infty}(t)-P^{j}(t)\right\|<\frac{\|D\|c}{1-\gamma}\gamma^{j}$

- 思考题：证明二次 B 样条和三次 B 样条细分曲线收敛。

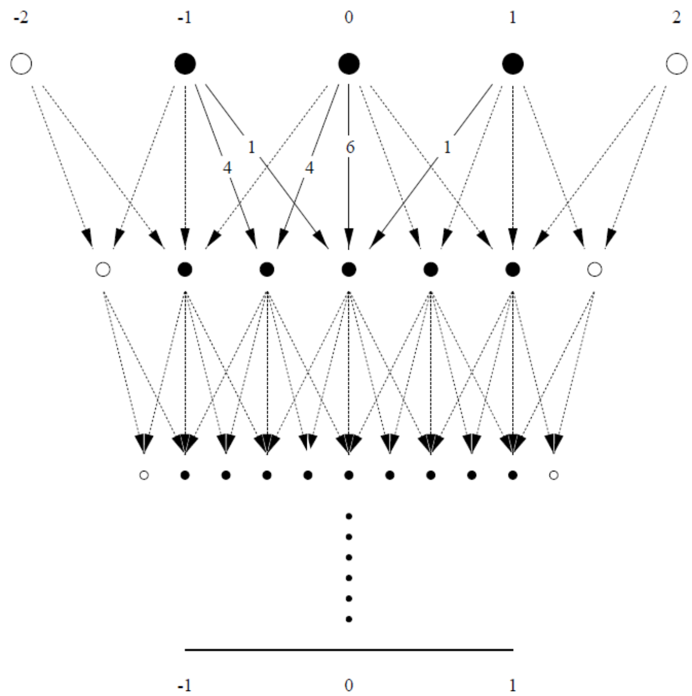
§3. 曲线细分光滑性分析

(a) 问题与动机

- 随着细分层次的增加，细分矩阵维数逐渐增大；
- 仅考虑在某控制顶点附近细分曲线的收敛性与光滑性；
- 局部细分矩阵维数不随细分层次增加；
- 利用矩阵性质分析细分曲线局部性质。

(b) 不变邻域

样条曲线在每次细分后在某点任意小邻域内不为 0 的基函数的个数称为不变邻域。

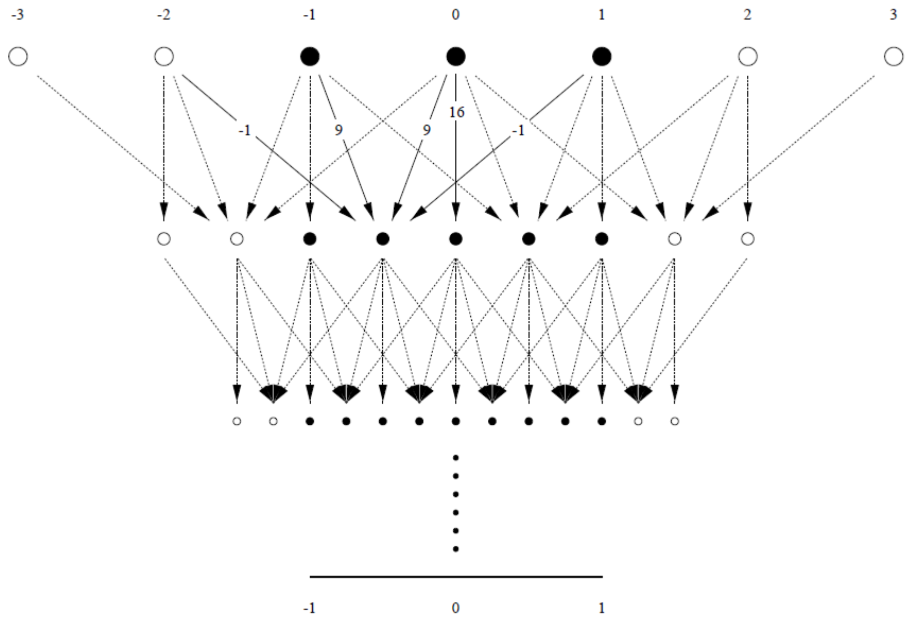


例：三次 B 样条基函数的非 0 区间是 4，其不变邻域尺度是 5

考虑以 0 为中心的参数区间对应的细分曲线,在任意层仅受 5 个控制顶点的影响，且下一层细分控制顶点由上一层控制顶点计算得到。有

$$\begin{pmatrix} P_{-2}^{k+1} \\ P_{-1}^{k+1} \\ P_{0}^{k+1} \\ P_{1}^{k+1} \\ P_{2}^{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{-2}^{k} \\ P_{-1}^{k} \\ P_{0}^{k} \\ P_{1}^{k} \\ P_{2}^{k} \end{pmatrix}$$

例：四点法插值曲线的不变邻域尺度为 7



四点法插值格式

$$P_{2i}^{k+1} = P_i^k$$

$$P_{2i+1}^{k+1} = -\frac{1}{16}P_{i-1}^k + \frac{9}{16}P_i^k + \frac{9}{16}P_{i+1}^k - \frac{1}{16}P_{i+2}^k$$

插值曲线表示

设 j 次细分后分段线性曲线为 $P^j(t)$，则有

$$P^j(t) = B_1(2^j t)S^j P^0$$

$$= B_1(2^j t)S^j\left(\sum_i P_i^0 \mathbf{e}_i^0\right) \quad \text{其中 } \mathbf{e}_i^0 = (\cdots \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$$

$$=\sum_i P_i^0 B_1\left(2^j t\right) S^j \mathbf{e}_i^0$$

$$=\sum_i P_i^0 \varphi_i^j(t)$$

$$\lim_{j\to\infty}\varphi_i^j(t)=\varphi_i(t)=\varphi(t-i)$$

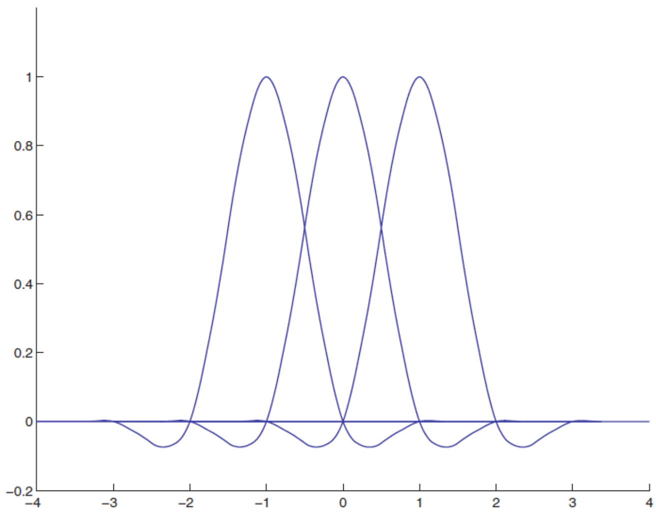
从而得到极限曲线表示为

$$P(t)=\sum_i P_i^0\varphi(t-i)$$

其中基函数$\varphi(t)$满足

$$\begin{cases}\varphi(0)=1 & \\ \varphi(i)=0 & i\neq 0\\ \varphi(t)=0 & t\notin[-3,3]\end{cases}$$

基函数(但不能用初等函数表示)见下图



由基函数的非0区间为6知四点插值曲线的不变邻域尺度是7

局部细分矩阵

$$\begin{pmatrix}P_{-3}^{k+1}\\P_{-2}^{k+1}\\P_{-1}^{k+1}\\P_{0}^{k+1}\\P_{1}^{k+1}\\P_{2}^{k+1}\\P_{3}^{k+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1&9&9&-1&0&0&0\\0&0&16&0&0&0&0\\0&-1&9&9&-1&0&0\\0&0&0&16&0&0&0\\0&0&-1&9&9&-1&0\\0&0&0&0&16&0&0\\0&0&0&-1&9&9&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{-3}^{k}\\P_{-2}^{k}\\P_{-1}^{k}\\P_{0}^{k}\\P_{1}^{k}\\P_{2}^{k}\\P_{3}^{k}\end{pmatrix}$$

(c) 特征分析

设 S 是 $n\times n$ 局部细分矩阵，

并假设有实特征值 $\lambda_0 \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_{n-1}$

对应的特征向量为 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$

例：三次 B 样条细分矩阵的特征值和特征向量分别为

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此时，有

$$S(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}。$$

例：四点法局部细分矩阵的特征值为

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{16}\right)$$

但其特征向量不是完全集，细分收敛性和光滑性需要用其它方法分析。

设 $n\times n$ 局部细分矩阵 S 的特征向量是完全集，有

$$SX = XD,$$

或 $X^{-1}SX = D$

记 $X^{-1}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{x}}_0\\ \bar{\mathbf{x}}_1\\ \vdots\\ \bar{\mathbf{x}}_{n-1}\end{pmatrix}$，其中 $\bar{\mathbf{x}}_i$ 为左特征向量，即 $\bar{\mathbf{x}}_i S=\lambda_i\bar{\mathbf{x}}_i$

点列向量 P 可表示为

$$P=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\mathbf{x}_i，\quad 其中 a_i=\bar{\mathbf{x}}_i\cdot P$$

特别地，若 P_i 表示 2D 或 3D 点，则 a_i 也是 2D 或 3D 点

(d) 收敛与极限

设局部细分矩阵为 S，初始控制点列为 P^0，有

$$\begin{aligned}SP^0&=S\sum_{i=0}^{n-1}a_i\mathbf{x}_i\\&=\sum_{i=0}^{n-1}a_iS\mathbf{x}_i\\&=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda_i\mathbf{x}_i\end{aligned}$$

$$P^j=S^jP^0=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda_i^j\mathbf{x}_i$$

- 收敛必要条件：$|\lambda_i|\le 1$， $i=0,1,\ldots,n-1$
- 极限点

  若 $\lambda_0=1$， $|\lambda_i|<1$， $i=1,\ldots,n-1$， 有

  $$P^\infty(0)=\lim_{j\to\infty}S^jP^0=\lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda_i^j\mathbf{x}_i=a_0$$

  例：三次 B 样条曲线细分的极限点

  $$P_i^\infty=a_0=\bar{\mathbf{x}}_0\cdot P^j=\frac{1}{6}\left(P_{i-1}^j+4P_i^j+P_{i+1}^j\right)$$

- 极限点处切向

  设极限点 $P^\infty(0)=a_0$ 为坐标原点，

细分矩阵特征值满足$1=\lambda_0>|\lambda_1|>|\lambda_2|,|\lambda_3|,\ldots,|\lambda_{n-1}|$，则有

$$P^j=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\lambda_i^j\mathbf{x}_i$$

两边除以λ_1^j，可得

$$\frac{1}{\lambda_1^j}P^j=a_1\mathbf{x}_1+\sum_{i=2}^{n-1}a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^j\mathbf{x}_i$$

当$j\to\infty$时，对应λ_1的控制点向量占主导位置，极限点沿向量a_1排列，该向量即为中点处切向量。

若$\lambda_1=\lambda_2$，极限将由a_1与a_2组合得到，此时在中心点无切向量。

- 细分方法光滑性的必要条件

1. $\lambda_1^2<\lambda_2$： C^1光滑，曲率无界；
2. $\lambda_1^2=|\lambda_2|=|\lambda_3|$： C^1光滑，曲率稍微分叉；
3. $\lambda_1^2=|\lambda_2|>|\lambda_3|$： C^2光滑，曲率连续；
4. $\lambda_1^2>|\lambda_2|$： C^2光滑，曲率趋于 0.

例：三次 B 样条细分矩阵的特征值为

$(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$，符合必要条件 3，极限曲线$C^2$光滑。

§4. 曲面细分格式

(a) Catmull-Clark 细分曲面

- 双三次均匀 B 样条曲面细分

考虑双三次均匀 B 样条曲面片

$$S(u,v)=UMGM^TV^T$$

其中 $M=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$G=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14}\\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24}\\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34}\\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44}\end{pmatrix}$

$U=\begin{pmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{pmatrix}$，$V=\begin{pmatrix}v^3 & v^2 & v & 1\end{pmatrix}$

考虑子面片 $0<u,v<\frac{1}{2}$

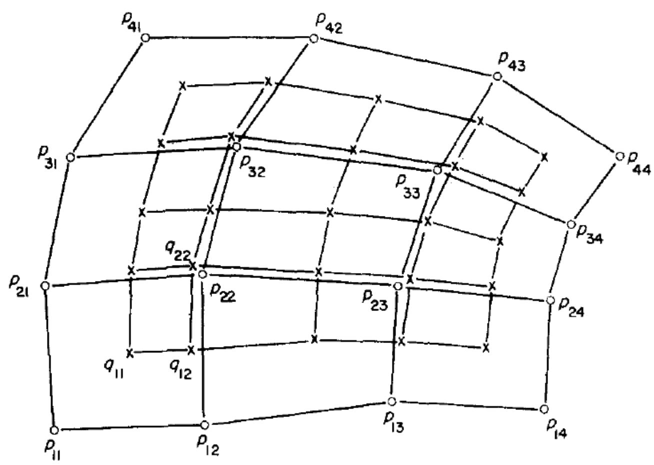
令 $u_1=u/2$，$v_1=v/2$，有

$$S(u_1,v_1)=USMGM^TS^TV^T$$

其中 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

因 $S(u_1,v_1)$ 仍是双三次 B 样条曲面，所以可表示为

$$S(u_1,v_1)=UMG_1M^TV^T$$



比较系数，可得

$$MG_1M^T=SMGM^TS^T$$

从而 $G_1=H_1GH_1^T$，其中 $H_1=M^{-1}SM$

计算可得 $H_1=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & 4 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 6 & 1\end{pmatrix}$

记 $G_1=(q_{ij})_{4\times4}$，有

$q_{11}=(P_{11}+P_{12}+P_{21}+P_{22})/4$，$q_{13}=(P_{12}+P_{13}+P_{22}+P_{23})/4$

$$q_{12}=\left(\frac{q_{11}+q_{13}}{2}+\frac{P_{12}+P_{22}}{2}\right)/2$$

$$q_{22}=\frac{Q}{4}+\frac{R}{2}+\frac{P_{22}}{4}$$

其中

Q 是与 P_{22} 相邻面中心的平均，

R 是与 P_{22} 相邻边中点的平均

- 任意拓扑网格细分格式

新面点：对应面上所有老顶点的平均

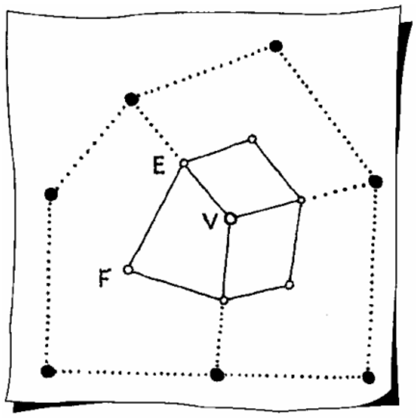
$$V_F = (V_0 + V_1 + \cdots + V_{s-1})/s$$

新边点：对应边两端点以及两个相邻面新面点的平均

$$V_E = (V_1 + V_2 + F_1 + F_2)/4$$

新顶点：老顶点为 V，度数为 k，则有

$$V_V = \frac{Q}{k} + \frac{2R}{k} + \frac{V(k-3)}{k}$$

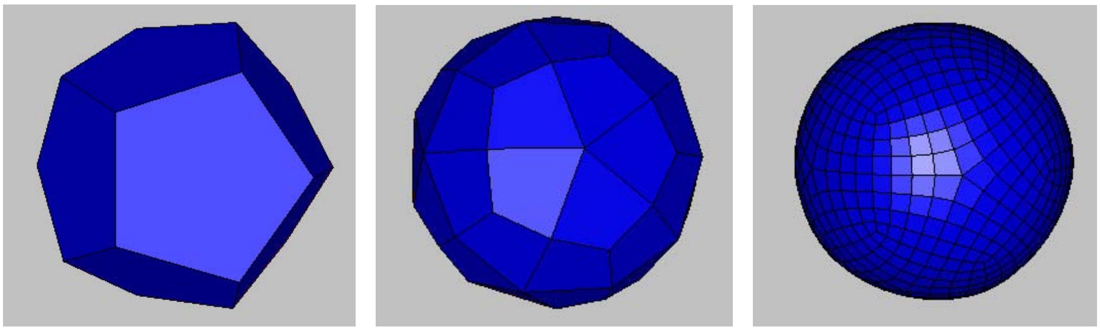


拓扑连接：

1. 新面点与该面所有新边点相连

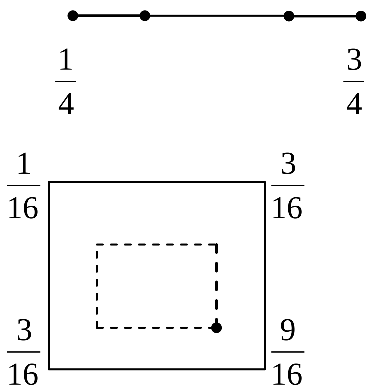
2. 新顶点与相邻边的新边点相连

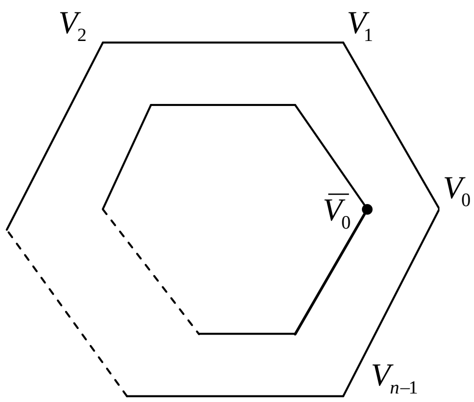
特点：一次细分后所有面片是 4 边形，奇异点数不变



(b) Doo-Sabin 细分曲面

推广双二次均匀 B 样条细分算法到任意拓扑网格





新面点计算方法：

$$\overline{V}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i V_i$$

其中 $\gamma_0 = \dfrac{n+5}{4n}$， $\gamma_i = \dfrac{1}{4n}\left(3 + 2\cos\dfrac{2i\pi}{n}\right)$， $i = 1,2,\ldots,n-1$

开网格采用 Chaikin 算法

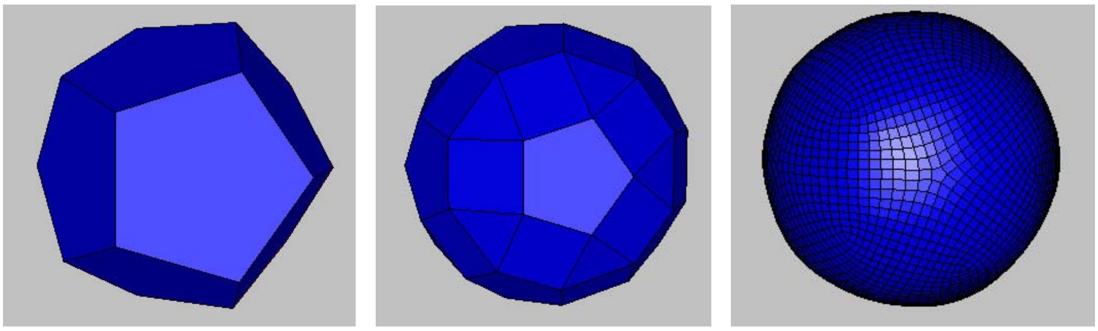
拓扑连接：

新面面(F-face)：顺次连接 $\overline{V}_i$ 得到新的面

新边面(E-face)：对应原网格一条边，共享此边的邻接面内的新点组成的面

新点面(V-face)：顺次连接网格上顶点所分裂的顶点组成的面

特点：极限曲面 C^1 连续，一次细分后每个顶点的度数是 4

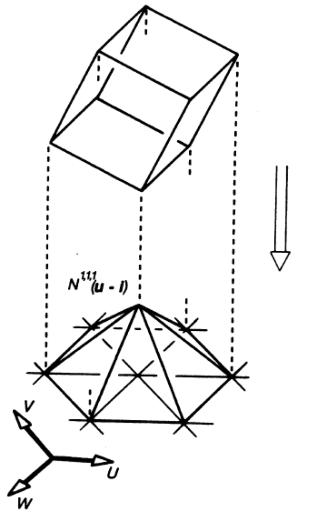


思考题：编程实现曲线细分或曲面细分

参考http://mrl.nyu.edu/~biermann/subdivision/

(c) Loop 细分

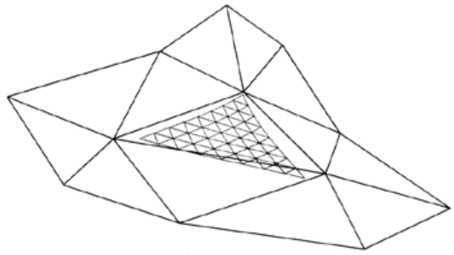
- Box 样条



$$S^{r,s,t}(\mathbf{u})=\sum_{\mathbf{i}}P_{\mathbf{i}}^{r,s,t}N^{r,s,t}(\mathbf{u}-\mathbf{i})$$

其中 $\mathbf{u}\in R^2$， $\mathbf{i}\in Z^2$

例：三角样条曲面及控制网格



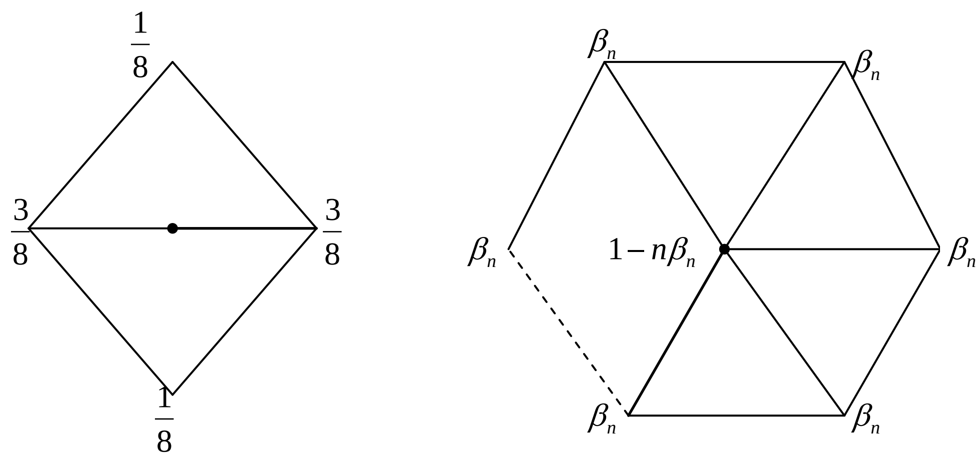
- 细分规则

$$S^{r,s,t}(\mathbf{u})=\sum_{\mathbf{j}}P_{\mathbf{j}}^{r,s,t}N^{r,s,t}(2(\mathbf{u}-\mathbf{j}))$$

对应每条边、每个顶点产生一个新点

一个三角形被分解成 4 个小三角形

内部点规则



边界点规则

新边点：

$$V_E=\frac{3}{8}(V_0+V_1)+\frac{1}{8}(V_2+V_3)$$

新顶点：

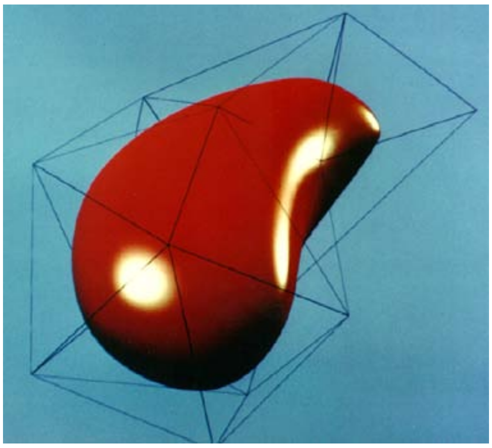
$$V_V=(1-n\beta_n)V+\beta_n\sum_{i=0}^{n-1}V_i$$

其中

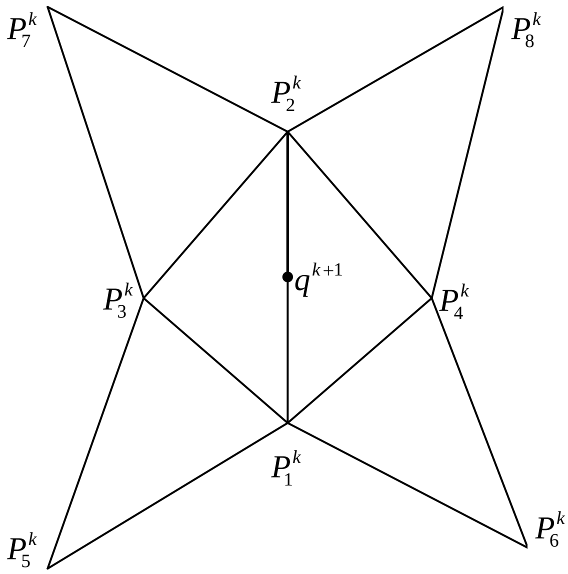
$$\beta_n=\frac{1}{n}\left(\frac{5}{8}-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2\right)$$

或 $\beta_n=\begin{cases}\dfrac{3}{16}, & n=3\\ \dfrac{3}{8n}, & n>3\end{cases}$

Loop 细分曲面整体 C^1 光滑



(d) Butterfly 细分及其改进



细分规则(Dyn,Levin,Gregory1990)

$$q^{k+1}=u\left(P_1^k+P_2^k\right)+v\left(P_3^k+P_4^k\right)-w\left(P_5^k+P_6^k+P_7^k+P_8^k\right)$$

由细分曲面 C^0 连续必要条件：

$2u+2v-4w=1$

由细分曲面C^1连续必要条件：

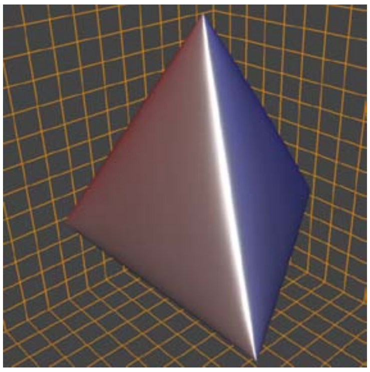
$u=\frac{1}{2}+h(w)$， $h(0)=0$

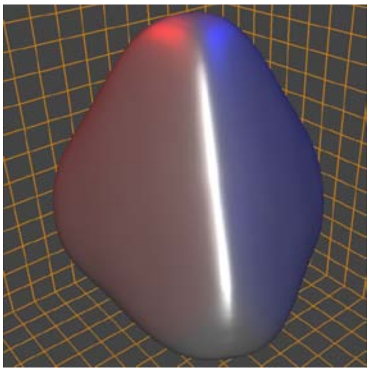
令$h=0$，则有$u=1/2$， $v=2w$

从而有

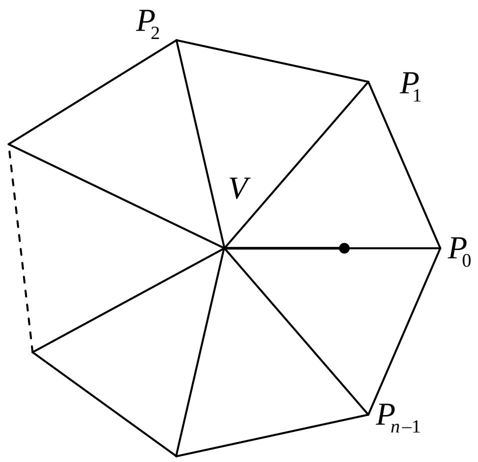
$$q^{k+1}=\frac{1}{2}\left(P_1^k+P_2^k\right)+2w\left(P_3^k+P_4^k\right)-w\left(P_5^k+P_6^k+P_7^k+P_8^k\right)$$

参数取值： $w=\frac{1}{16}$





在规则点(度数=6)处 C^1 连续，在非规则点仅 C^0 连续



改进的 butterfly 细分方法

对内部点/边进行分类，采用不同的 mask 来生成细分曲面

非规则点/边的 mask 采用三次函数插值得到

1. 两端点度数为 6 的内部边

采用经典 butterfly 方法

2. 一个端点度数为 6 一个不为 6 的内部边

$$V_E = \frac{3}{4}V + \sum_{i=0}^{n-1} s_i P_i$$

其中系数选取如下：

如果 $n \geq 5$， $s_i = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4} + \cos\frac{2i\pi}{n} + \frac{1}{2}\cos\frac{4i\pi}{n}\right)$

如果 $n = 4$， $s_0 = \frac{3}{8}$， $s_2 = -\frac{1}{8}$， $s_1 = s_3 = 0$

如果 $n = 3$， $s_0 = \frac{5}{12}$， $s_1 = s_2 = -\frac{1}{12}$

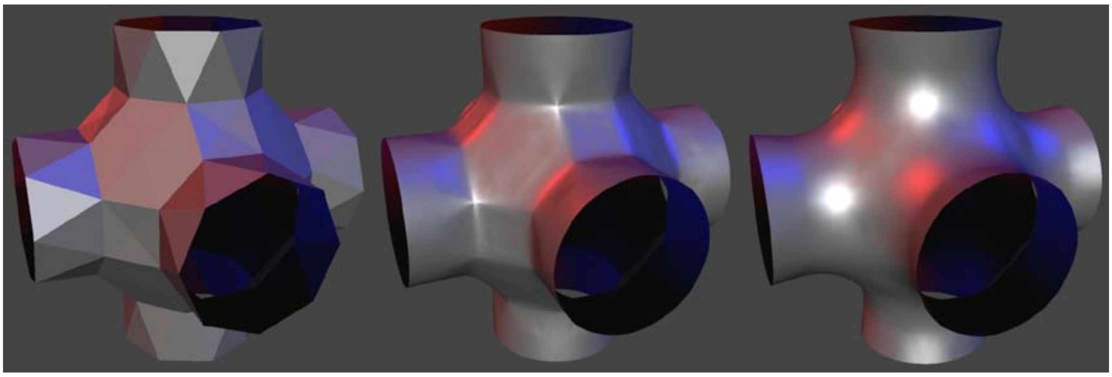
3. 两个端点度数都不是 6 的内部边

分别应用规则 2 进行插值点计算并平均

4. 边界边

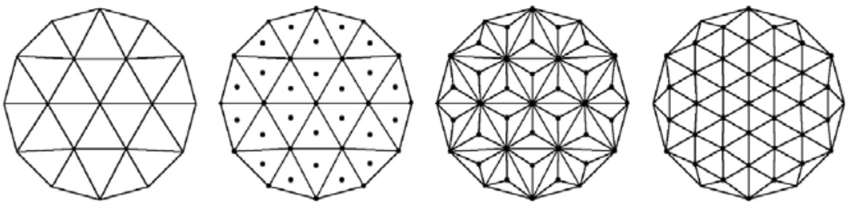
采用 4 点法插值新点。

改进的 butterfly 细分曲面全局 C^1 连续。



控制网格　　　　改进前　　　　改进后

(e) $\sqrt{3}$ 细分



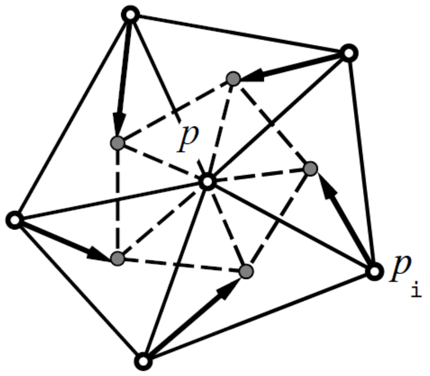
拓扑规则

细分规则由对称性得到：

新面点： $\mathbf{q}=\frac{1}{3}\left(P_i+P_j+P_k\right)$

新顶点： $P_s=\left(1-\alpha_n\right)P+\frac{\alpha_n}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P_i$

其中 n 表示顶点 P 的度数， $\alpha_n=\frac{1}{9}\left(4-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)$



记向量 $[P,P_0,P_1,\ldots,P_{n-1}]$，则一次细分矩阵为

$$S=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} u & v & v & v & \cdots & v \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

其中 $u=3\left(1-\alpha_n\right)$， $v=3\alpha_n/n$

连续两次细分矩阵为 S^2

反转矩阵

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

细分矩阵 $\bar{S}=RS^2$，

细分矩阵$\bar{S}$特征根：$\frac{1}{9}\left[9,(2-3\alpha_n)^2,2+2\cos\left(2\pi\frac{1}{n}\right),\cdots,2+2\cos\left(2\pi\frac{n-1}{n}\right)\right]$

细分曲面收敛必要条件：

$\lambda_1=1>\lambda_2=\lambda_3>\lambda_i$，$i=4,\cdots,n+1$

由细分矩阵的特征结构对应 Taylor 展开，特别地，λ_4相当于展开式二次项，故令$\lambda_4=\lambda_2^2$，有

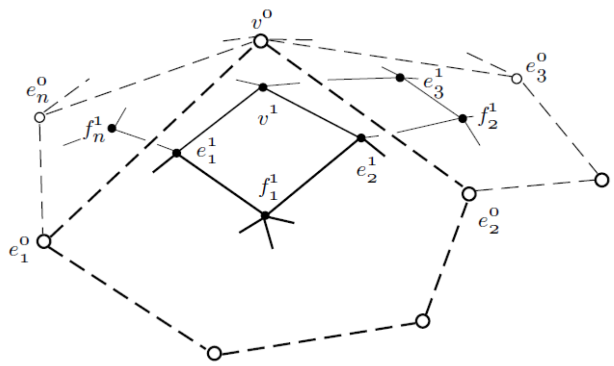
$$\left(\frac{2-3\alpha_n}{3}\right)^2=\left(\frac{2+2\cos\left(2\pi\frac{1}{n}\right)}{9}\right)^2$$

解方程，可得$\alpha_n=\frac{1}{9}\left(4-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)$。

§5. 曲面细分收敛性与显式计算

(a) 曲面细分收敛性分析

- Catmull-Clark 细分曲面的收敛性



初始网格记为M^0，一次细分网格记为M^1

记向量$\mathbf{V}_n^i=\left[\mathbf{v}^i,\mathbf{e}_1^i,\mathbf{e}_2^i,\ldots,\mathbf{e}_n^i,\mathbf{f}_1^i,\mathbf{f}_2^i,\ldots,\mathbf{f}_n^i\right]$，并设$m=2n+1$

S_n为$m\times m$细分矩阵，则有

$\mathbf{V}_n^{i+1}=S_n\mathbf{V}_n^i$

不妨设矩阵S_n有实特征值$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \lambda_m$，

对应的左特征向量分别为$\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m$

对应的右特征向量分别为$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$

特别地，有$\mathbf{l}_k \cdot \mathbf{r}_j = \delta_{kj}$

向量$\mathbf{V}_n^1$可表示为$\mathbf{V}_n^1 = C_1\mathbf{r}_1 + C_2\mathbf{r}_2 + \ldots + C_m\mathbf{r}_m$

其中$C_k = \mathbf{l}_k \cdot \mathbf{V}_n^1$

相应地，有$\mathbf{V}_n^{i+1} = S_n^i \mathbf{V}_n^1 = \lambda_1^i C_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2^i C_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + \lambda_m^i C_m \mathbf{r}_m$

命题 1：若细分矩阵S_n满足：(1)有 m 个实特征值；(2) $\lambda_1 = 1$，$\lambda_k < 1$；(3) 细分曲面具有仿射不变性，则细分曲面收敛，且有$\mathbf{V}_n^\infty = \lim\limits_{i \to \infty} \mathbf{V}_n^{i+1} = C_1 \mathbf{r}_1 = \left(\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{V}_n^1\right)\mathbf{r}_1$。

考虑细分矩阵每行元素和为 1(细分曲面具有仿射不变性)，有

$S_n(1,1,\ldots,1)^T = (1,1,\ldots,1)^T$

所以，有$\mathbf{r}_1 = (1,1,\ldots,1)^T$

由$\mathbf{V}_n^\infty = C_1\mathbf{r}_1$知，点$\mathbf{v}^i, \mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \ldots, \mathbf{e}_n^i, \mathbf{f}_1^i, \mathbf{f}_2^i, \ldots, \mathbf{f}_n^i$均收敛于$\mathbf{v}^\infty = C_1$。

命题 2：若细分矩阵S_n满足命题 1 条件以及$1 = \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4$，则细分曲面在极限点$\mathbf{v}^\infty$的法向可计算为

$N^\infty = C_2 \times C_3$

其中$C_2 = \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{V}_n^1$，$C_3 = \mathbf{l}_3 \cdot \mathbf{V}_n^1$。

证明：记$\mathbf{r}_k = \left(r_{1k}, r_{2k}, \ldots, r_{mk}\right)^T$，并设$\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$，则有

$$\mathbf{u}_j^i = \frac{P_j^i - \mathbf{v}^\infty}{\left\|P_j^i - \mathbf{v}^\infty\right\|} = \frac{\lambda^i\left(C_2 r_{j2} + C_3 r_{j3}\right) + \lambda_4^i C_4 r_{j4} + \cdots}{\left\|\lambda^i\left(C_2 r_{j2} + C_3 r_{j3}\right) + \lambda_4^i C_4 r_{j4} + \cdots\right\|}$$

$$=\frac{C_2 r_{j2}+C_3 r_{j3}+\frac{\lambda_4^i}{\lambda^i}C_4 r_{j4}+\cdots}{\left\|C_2 r_{j2}+C_3 r_{j3}+\frac{\lambda_4^i}{\lambda^i}C_4 r_{j4}+\cdots\right\|},\qquad j=2,3,\ldots,m$$

$$\mathbf{u}_j^\infty=\lim_{i\to\infty}\mathbf{u}_j^i=\frac{C_2 r_{j2}+C_3 r_{j3}}{\left\|C_2 r_{j2}+C_3 r_{j3}\right\|}$$

此式说明$\mathbf{u}_j^\infty$位于法向为$N^\infty=C_2\times C_3$的切平面上。命题得证。

对于 Catmull-Clark 细分曲面，有

$\lambda=\lambda_2=\lambda_3=\frac{4+A_n}{16}$，其中

$$A_n=1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{2\left(9+\cos\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$C_2=\sum_j A_n\cos\frac{2\pi j}{n}\mathbf{e}_j^1+\left(\cos\frac{2\pi j}{n}+\cos\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)\mathbf{f}_j^1$$

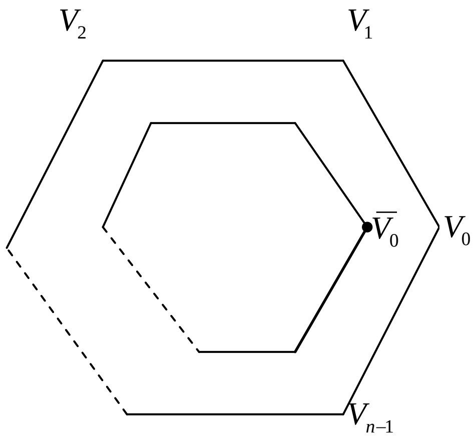
$$C_3=\sum_j A_n\cos\frac{2\pi j}{n}\mathbf{e}_{j+1}^1+\left(\cos\frac{2\pi j}{n}+\cos\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)\mathbf{f}_{j+1}^1$$

(b) 细分曲面显式计算

- Catmull-Clark 细分曲面极限点公式

$$\mathbf{v}^\infty=\frac{n^2\mathbf{v}^1+4\sum_{j=1}^n\mathbf{e}_j^1+\sum_{j=1}^n\mathbf{f}_j^1}{n(n+5)}$$

- Doo-Sabin 细分曲面极限点



新面点计算公式：

$$\overline{V}_0=\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i V_i,\quad \sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i=1$$

易知

$$\overline{V}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{V}_i=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}V_i$$

故，Doo-Sabin 细分曲面插值每个面片中心点。

- Loop 细分曲面极限点

  顶点细分公式

$$V_V=(1-n\beta_n)V+\beta_n\sum_{i=0}^{n-1}V_i\text{，}\quad\text{其中}\ \beta_n=\frac{1}{n}\left(\frac{5}{8}-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2\right)$$

$$=\overline{\beta}_nV+(1-\overline{\beta}_n)\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}V_i\text{，}\quad\text{其中}\ \overline{\beta}_n=\frac{3}{8}+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2$$

  极限点公式

$$V^{\infty}=\gamma_nV+(1-\gamma_n)\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}V_i$$

  其中 $\gamma_n=\dfrac{3}{11-8\times\left[\frac{3}{8}+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2\right]}$

(c) 细分曲面的多项式逼近

- 细分曲面计算与绘制

  常用计算方法：

  1. 迭代细分
  2. 直接计算特征向量与极限点
  3. 预计算细分曲面基函数

  GPU 绘制

  1. 细分曲面采用分片多项式逼近/插值
  2. 法向量独立计算+连续向量场

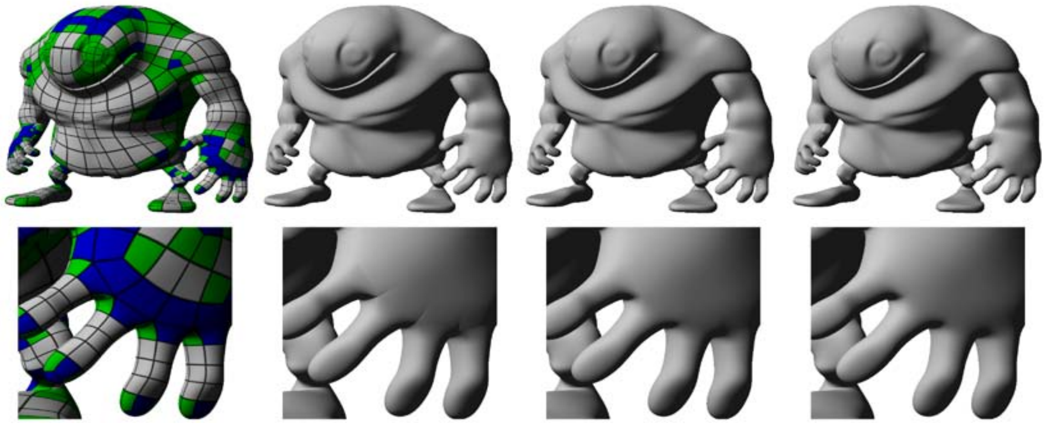
- Catmull-Clark 曲面的双三次曲面逼近

  算法步骤：

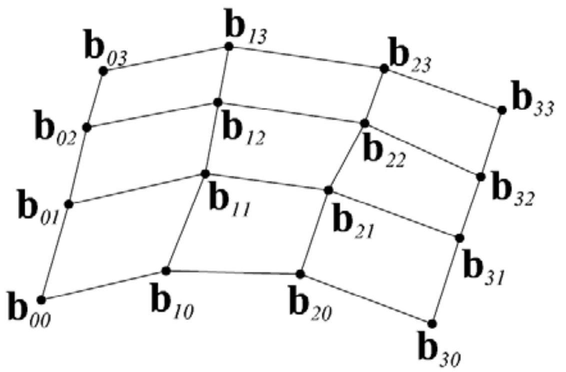
  1. 给定初始四边形控制网格
  2. 针对每一四边形构造一张双三次曲面

3. 构造对应每张曲面片的切平面

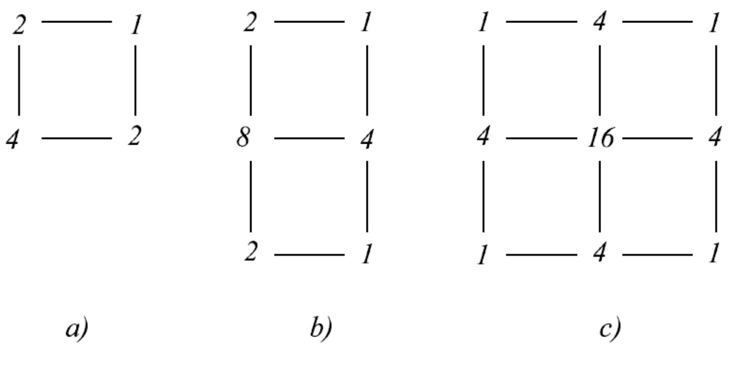
4. 独立绘制每张曲面片



控制网格　　逼近曲面　连续法向场绘制　原 C-C 曲面



双三次 Bézier 曲面控制网格



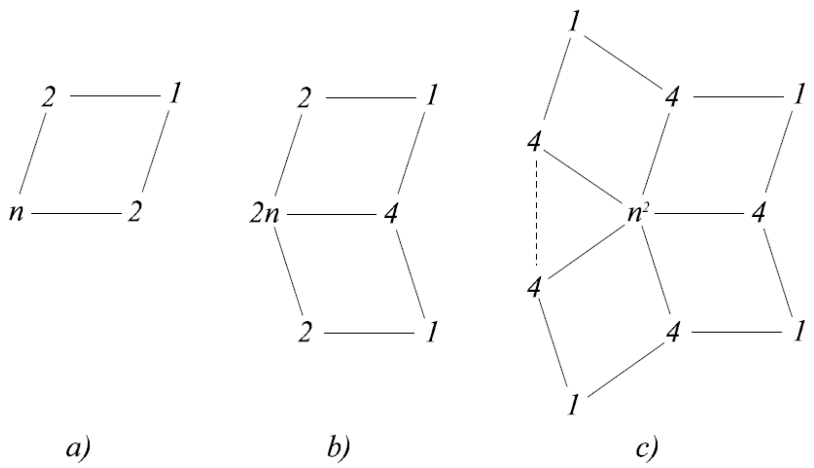
由 B 样条曲面控制顶点生成 Bézier 控制顶点的 mask：

a) 内部点：$\mathbf{b}_{11}$， $\mathbf{b}_{12}$， $\mathbf{b}_{21}$， $\mathbf{b}_{22}$

b) 边界点：$\mathbf{b}_{10}$， $\mathbf{b}_{20}$， $\mathbf{b}_{01}$， $\mathbf{b}_{02}$， $\mathbf{b}_{13}$， $\mathbf{b}_{23}$， $\mathbf{b}_{31}$， $\mathbf{b}_{32}$

c) 角点：$\mathbf{b}_{00}$， $\mathbf{b}_{30}$， $\mathbf{b}_{03}$， $\mathbf{b}_{33}$

推广 B 样条曲面节点插入 mask，得到 Catmull-Clark 细分曲面节点插入 mask 如下：



a) Bézier 曲面内部点 mask；

b) Bézier 曲面边界点 mask；

c) Bézier 曲面角点 mask；

这里 n 表示原控制网格顶点度数，

若 $n=4$ 则得到精确 B 样条曲面

若 $n \neq 4$ 则得到 C-C 细分曲面的近似曲面片

结论：

1. 分片 Bézier 曲面在公共边界处连续
2. 边界线两端度数都是 4 则曲面光滑
3. 边界线一端度数不是 4 则曲面不光滑

连续法向量场构造

1. 双三次 Bézier 曲面的法向量场是双五次 Bézier 曲面
2. 双三次 Bézier 近似法向量场

§6. 非稳定/线性细分方法

(a) 变分细分

记原多边形$\Gamma_m=\left(P_0^m,\ldots,P_{n-1}^m\right)$

细分一次多边形为$\Gamma_{m+1}=\left(P_0^{m+1},\ldots,P_{2n-1}^{m+1}\right)$

考虑插值细分格式，有 $P_{2i}^{m+1}=P_i^m$

细分多边形光滑性度量

$$K\left(P_i^{m+1}\right)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j P_{i+j-r}^{m+1}$$

其中 $\alpha(z)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j z^j$ 满足：

α_j 为任意实数， $\alpha(1)=0$；参数 r 由用户给定。

细分曲线能量

$$E(\Gamma_{m+1})=\sum_{i=0}^{2n-1}K^2\left(P_i^{m+1}\right)$$

能量最小原理

$$\frac{\partial E(\Gamma_{m+1})}{\partial P_{2l+1}^{m+1}}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial}{\partial P_{2l+1}^{m+1}}K^2\left(P_{2l+1+r-i}^{m+1}\right)$$

$$=2\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\sum_{j=0}^{k}\alpha_j P_{2l+1+j-i}^{m+1}$$

$$=2\sum_{i=0}^{k}\beta_i P_{2l+1+i}^{m+1}$$

其中 $\beta_{-i}=\beta_i=\sum_{j=0}^{k-i}\alpha_j\alpha_{j+i}$， $i=0,1,\ldots,k$

由 $\frac{\partial E(\Gamma_{m+1})}{\partial P_{2l+1}^{m+1}}=2\sum_{i=0}^{k}\beta_i P_{2l+1+i}^{m+1}$ =0，可得方程组

$$
\begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_2 & \beta_4 & \cdots & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_0 & \beta_2 & \cdots & \beta_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{m+1} \\ P_3^{m+1} \\ \vdots \\ P_{2n-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\beta_1 & -\beta_3 & \cdots & -\beta_3 \\ -\beta_3 & -\beta_1 & -\beta_1 & \cdots & -\beta_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^m \\ P_1^m \\ \vdots \\ P_{n-1}^m \end{pmatrix}
$$

求解方程组可得新点。

(b) 保形细分曲线曲面

更多细分格式

1. Dyn, N., Levin, D., and Liu, D., 1992. Interpolatory convexity-preserving subdivision schemes for curves and surfaces. Computer-Aided Design, 24(4), 211-216.
2. Jos Stam. On subdivision schemes generalizing uniform B-spline surfaces of arbitrary degree. Computer Aided Geometric Design 18 (2001) 383–396
3. Yang, X. 2006. Normal based subdivision scheme for curve design, Computer Aided Geometric Design 23(3):243-260.
4. Nira Dyn and Peter Oswald. Univariate subdivision and multi-scale transforms: The nonlinear case, R.A. DeVore, A. Kunoth (eds.), *Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009
5. S. Schaefer ∗, E. Vouga, R. Goldman. Nonlinear subdivision through nonlinear averaging, Computer Aided Geometric Design 25 (2008) 162–180.
6. Evgeny Lipovetsky and Nira Dyn. 2016. A weighted binary average of point-normal pairs with application to subdivision schemes. Computer Aided Geometric Design 48(November 2016), 36–48.