第十章 Bézier 三角曲面片

§1. 基本概念

(1) 问题的提出

- 实际造型需要：体在棱磨光时角的处理
- 任意多边形可三角化
- 一元 Bernstein 多项式向二维的推广

  1) 张量积 Bézier 曲面，保持 Bézier 曲线许多性质，但基函数性质没保持。

     $\mathrm{Span}\{B_{i,n}(t)\}=\pi_n(R^1)$

     $\mathrm{Span}\{B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)\}\subseteq\pi_{n+m}(R^2)$

  2) $\mathrm{Span}\{J_{i,n}(P)\}=\pi_n(R^2)$，其中 $J_{i,n}(P)$ 为定义在三角域上的 Bernstein 基函数。

(2) 重心坐标(barycentric coordinates)

- 概念

  给定一个非奇异三角形 $T=(P_0,P_1,P_2)$，规定逆时针方向面积为正，三角形的有向面积记为 $\mathrm{area}(P_0,P_1,P_2)$。

$$\mathrm{area}(P_0,P_1,P_2)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

  对于任意 $P\in R^2$， $\exists(u,v,w)$ 使得

$$\begin{cases} P=uP_0+vP_1+wP_2 \\ u+v+w=1 \end{cases}$$

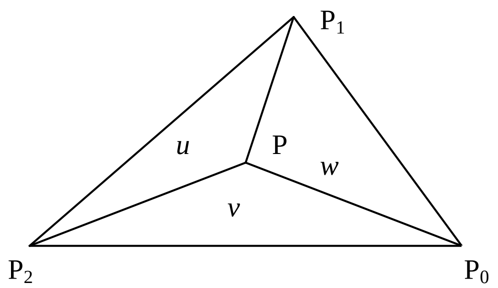
$$u=\frac{\operatorname{area}(P_1,P_2,P)}{\operatorname{area}(P_0,P_1,P_2)},\quad v=\frac{\operatorname{area}(P_0,P,P_2)}{\operatorname{area}(P_0,P_1,P_2)},\quad w=\frac{\operatorname{area}(P_0,P_1,P)}{\operatorname{area}(P_0,P_1,P_2)}$$

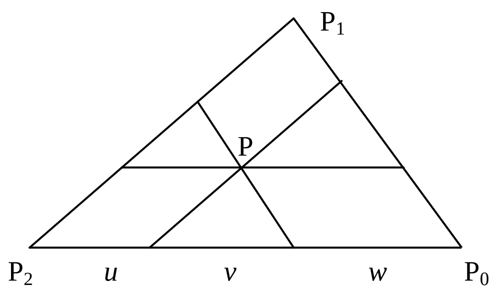
$$F=F(P)=F(uP_0+vP_1+wP_2)=f(u,v,w)$$

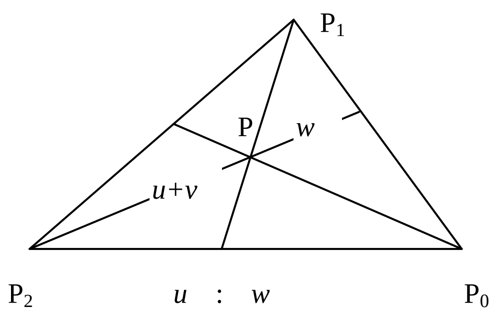
- 几何意义

当 $P\in T \Leftrightarrow (u,v,w)\geq 0$

当 $P\notin T$，重心坐标可能为负数。







§2. 三角域 Bernstein 基函数

(1) 定义

设 $T=(P_0,P_1,P_2)$非奇异，$P=uP_0+vP_1+wP_2$

重心坐标满足：$(u+v+w)^n=1$

展开，可得：$\sum\limits_{\substack{i+j+k=n\\ i,j,k\ge 0}}\frac{n!}{i!\,j!\,k!}u^i v^j w^k=1$

记 $J_{i,j,k}^n(u,v,w)=\frac{n!}{i!\,j!\,k!}u^i v^j w^k$

(2) 多元指标

记 $\mathbf{Z}_+^3=\{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2),\alpha_i为非负整数\}$

类似地，有 $\mathbf{Z}_+^n=\{(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\}$

对于 $\forall\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbf{Z}_+^3$

及 $X=(x_0,x_1,x_2)\in R^3$

定义 $\alpha!=\alpha_0!\alpha_1!\alpha_2!$

$|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$

$X^\alpha=x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$

对于整数 $d\ge 0$，定义 $C_d^\alpha=\frac{d!}{\alpha!}$

记 $X(P)=(u,v,w)$，有 $\sum\limits_{\substack{|\alpha|=n\\ \alpha\in Z_+^3}}C_n^\alpha X^\alpha(P)=1$

则 $J_{i,j,k}^n(P)$ 可记为 $J_\alpha^n(P)=C_n^\alpha X^\alpha(P)$

(3) 基函数基本性质

- 正性

$\forall P\in T$，有 $J_\alpha^n(P)\ge 0$

- 角点性质

$$J_\alpha^n(P_0)=\begin{cases}1 & \alpha=(n,0,0)\\ 0 & \alpha\ne(n,0,0)\end{cases}$$

- 权性

$$\sum_{\substack{|\alpha|=n\\ \alpha\in Z_+^3}}J_\alpha^n(P)\equiv 1$$

- 递推公式

$$J^n_{i,j,k}(u,v,w)=uJ^{n-1}_{i-1,j,k}(u,v,w)+vJ^{n-1}_{i,j-1,k}(u,v,w)+wJ^{n-1}_{i,j,k-1}(u,v,w)$$

- 升阶公式

$$J^n_{i,j,k}(u,v,w)=\frac{i+1}{n+1}J^{n+1}_{i+1,j,k}(u,v,w)+\frac{j+1}{n+1}J^{n+1}_{i,j+1,k}(u,v,w)+\frac{k+1}{n+1}J^{n+1}_{i,j,k+1}(u,v,w)$$

- 线性无关性质与完全基函数

记 $B_n=\{J^n_{i,j,k}(u,v,w);i+j+k=n\}$

则有：

1) B_n 中的函数是线性无关的

2) $\#B_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\dim\left(\left\{\sum_{i+j\le n}a_{ij}x^iy^j\right\}\right)$

§3. Bézier 三角(曲面)片

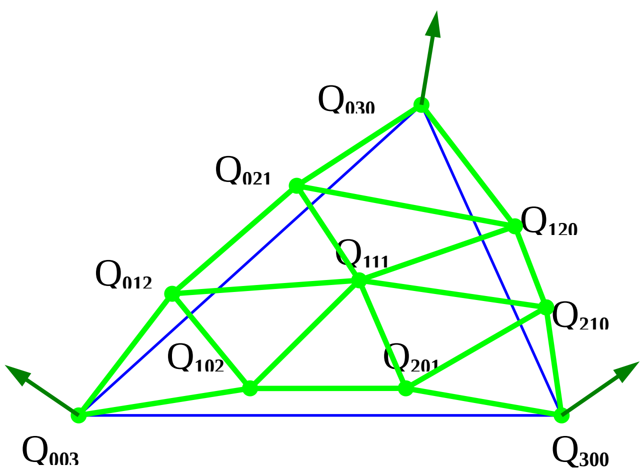
Bézier triangle, triangular Bézier patch

(1) Bézier 三角片定义

设 $\{Q_{i,j,k};i+j+k=n\}$ 是给定的一组 R^3 中的点，则称

$$B^n(P)=B^n(u,v,w)=\sum_{i+j+k=n}Q_{i,j,k}J^n_{i,j,k}(P)$$

为 T 上的 n 次 Bézier 三角片



特征网格：

由 $Q_{i+1,j,k}, Q_{i,j+1,k}, Q_{i,j,k+1} (i+j+k=n-1)$

及 $Q_{i-1,j,k}, Q_{i,j-1,k}, Q_{i,j,k-1} (i+j+k=n+1)$

联接而成的三角形全体

特征网格又称 B 网。

例：$n=1$时，三角曲面方程是

$$B^1(P)=B^1(u,v,w)=uQ_{1,0,0}+vQ_{0,1,0}+wQ_{0,0,1}$$

该曲面表示三角形本身。

$n=2$时，三角曲面有 6 个控制顶点，其方程可以表示为

$$B^2(P)=(u,v,w)\begin{pmatrix} Q_{2,0,0} & Q_{1,1,0} & Q_{1,0,1} \\ Q_{1,1,0} & Q_{0,2,0} & Q_{0,1,1} \\ Q_{1,0,1} & Q_{0,1,1} & Q_{0,0,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

(2) 基本性质

1) 仿射不变性

2) 凸包性质

3) 角点与边界曲线

角点插值：$B^n(P_0)=Q_{n,0,0}$，$B^n(P_1)=Q_{0,n,0}$，$B^n(P_2)=Q_{0,0,n}$

边界曲线为 n 次 Bézier 曲线

角点处切平面由角点处两条边张成

(3) 算子表示

定义三个指标移位算子

$$E_1Q_{i,j,k}=Q_{i+1,j,k}$$

$$E_2Q_{i,j,k}=Q_{i,j+1,k}$$

$E_3 Q_{i,j,k} = Q_{i,j,k+1}$

则 $B^n(P) = B^n(u,v,w) = (uE_1 + vE_2 + wE_3)^n Q_{0,0,0}$

(4) 三角 Bézier 函数曲面

- 定义

给定 $\{f_{i,j,k}; i+j+k=n\} \subset R$

定义 $F^n(P) = \sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k} J^n_{i,j,k}(P)$为 T 上的 n 次三角 Bézier 函数曲面

- 矢量化

$$B^n(P) = (P, F^n(P)) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J^n_{i,j,k}(P)$$

其中 $Q_{i,j,k} = (P_{i,j,k}, f_{i,j,k})$， $P_{i,j,k} = \frac{i}{n}P_0 + \frac{j}{n}P_1 + \frac{k}{n}P_2$

- 逼近定理

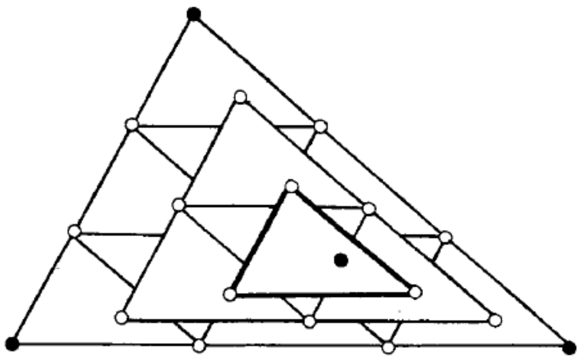
设 $f \in C(\overline{T})$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i+j+k=n} f\left(\frac{i}{n}P_0 + \frac{j}{n}P_1 + \frac{k}{n}P_2\right) J^n_{i,j,k}(P) \overset{\text{一致}}{=} f(P)$$

(5) de Casteljau 算法

$$B^n(P) = B^n(u,v,w) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J^n_{i,j,k}(P)$$

给定一点 $P \in T$， 计算 $B^n(P)$



算法：

1) $Q^0_{i,j,k} = Q_{i,j,k}$

2) $Q_{i,j,k}^{l}=uQ_{i+1,j,k}^{l-1}+vQ_{i,j+1,k}^{l-1}+wQ_{i,j,k+1}^{l-1}$， $i+j+k=n-l$， $l=1,2,\dots,n$

3) $Q_{0,0,0}^{n}=B^{n}(P)$

(6) 离散逼近及其算法

- 升阶

1) 一次升阶

$$B^{n}(P)=\sum_{i+j+k=n}Q_{i,j,k}J_{i,j,k}^{n}(P)$$
$$=\sum_{i+j+k=n+1}\left[\frac{i}{n+1}Q_{i-1,j,k}+\frac{j}{n+1}Q_{i,j-1,k}+\frac{k}{n+1}Q_{i,j,k-1}\right]J_{i,j,k}^{n+1}(P)$$

2) 高次升阶

$$B^{n}(P)=\sum_{i+j+k=n+m}Q_{i,j,k}^{(m)}J_{i,j,k}^{n+m}(P)$$

其中 $Q_{i,j,k}^{(m)}=\sum_{r+s+t=n}Q_{r,s,t}\dfrac{\binom{i}{r}\binom{j}{s}\binom{k}{t}}{\binom{m+n}{n}}$

若 $\lim_{m\to\infty}\left(\dfrac{i_m}{n+m},\dfrac{j_m}{n+m},\dfrac{k_m}{n+m}\right)=(u,v,w)$

则 $\lim_{m\to\infty}Q_{i,j,k}^{(m)}=B^{n}(u,v,w)$，即升阶后控制网格收敛到曲面本身。

- 包络性质

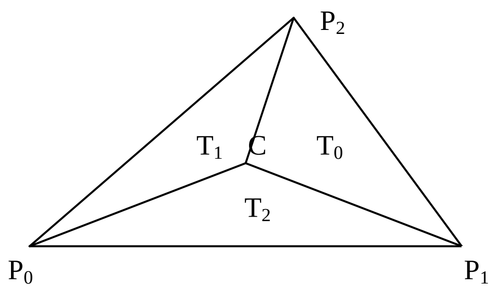
定义：记

$$B_{n}^{(l)}(P;R)=\sum_{i+j+k=n-l}Q_{i,j,k}^{l}J_{i,j,k}^{n-l}(P)$$
$$=(xE_0+yE_1+zE_2)^{l}(uE_0+vE_1+wE_2)^{n-l}Q_{0,0,0}$$

定理： $B^{n}(P)$是曲面簇$\{B_{n}^{(l)}(P;R);R\in\overline{T}\}$的包络。

- 重心分割

将一个三角形分割成子三角形，并将一张 Bézier 三角片分割成几张小 Bézier 三角片。



记子三角形 T$_i$ 上的 Bernstein 基函数为$\left\{J_{i,j,k}^{n,T_i}(P)\right\}$

曲面$B^n(P)=\sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$可分解为

$$B^n(P)=\begin{cases}\sum\limits_{i+j+k=n} Q_{0,j,k}^i J_{i,j,k}^{n,T_0}(P) & P\in T_0\\ \sum\limits_{i+j+k=n} Q_{i,0,k}^j J_{i,j,k}^{n,T_1}(P) & P\in T_1\\ \sum\limits_{i+j+k=n} Q_{i,j,0}^k J_{i,j,k}^{n,T_2}(P) & P\in T_2\end{cases}$$

其中，若设 C 的重心坐标为$C(u_c,v_c,w_c)$

则$Q_{i,j,k}^l=(u_cE_0+v_cE_1+w_cE_2)^l Q_{i,j,k}$

证明：不失一般性，考虑T_0

设 P 关于 T 和T_0的重心坐标分别为(u,v,w)和(u_0,v_0,w_0)

则$P=u_0C+v_0P_1+w_0P_2$， $C=u_cP_0+v_cP_1+w_cP_2$

将 C 代入，可得

$$P=u_0u_cP_0+(u_0v_c+v_0)P_1+(u_0w_c+w_0)P_2$$

又因为$P=uP_0+vP_1+wP_2$

可得$(u,v,w)=u_0(u_c,v_c,w_c)+v_0(0,1,0)+w_0(0,0,1)$

令$E=\begin{pmatrix}E_0\\E_1\\E_2\end{pmatrix}$

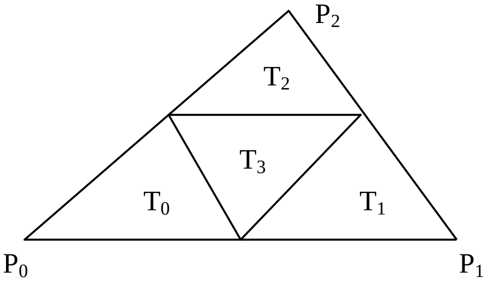
$$
\begin{aligned}
B^n(P) &= ((u,v,w)E)^n Q_{0,0,0} \\
&= ((u_c,v_c,w_c)Eu_0 + v_0E_1 + w_0E_2)^n Q_{0,0,0} \\
&= \sum_{i+j+k=n} (u_cE_0 + v_cE_1 + w_cE_2)^i Q_{0,j,k} J_{i,j,k}^{n,T_0}(u_0,v_0,w_0)
\end{aligned}
$$

说明：一般 C 取重心，坐标$C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

缺点：三角形剖分存在奇异性，不收敛

- 均匀剖分

如下图，将一个三角形均匀剖分成 4 个子三角形



$$
\begin{aligned}
B^n(P) &= \sum_{|\alpha|=n} Q_\alpha J_\alpha^{n,T}(P) \\
&= \sum_{|\beta|=n} Q_\beta^{(l)} J_\beta^{n,T_l}(P) \qquad P \in T_l
\end{aligned}
$$

则

$$
Q_{i,j,k}^{(l)} = \begin{cases}
\frac{1}{2^{n-i}} E_0^i (E_0+E_1)^j (E_0+E_2)^k Q_{0,0,0} & l=0 \\
\frac{1}{2^{n-j}} (E_1+E_0)^i E_1^j (E_1+E_2)^k Q_{0,0,0} & l=1 \\
\frac{1}{2^{n-k}} (E_2+E_0)^i (E_2+E_1)^j E_2^k Q_{0,0,0} & l=2 \\
\frac{1}{2^n} (E_1+E_2)^i (E_2+E_0)^j (E_0+E_1)^k Q_{0,0,0} & l=3
\end{cases}
$$

特点：

几何上比较均匀；

运算量少，不需要除法；

收敛。

思考题：

1. 证明三角形上定义的 Bernstein 函数线性无关。

2. 设有 $\alpha,\beta,\gamma=n-\alpha-\beta>0$，证明如下等式

$$u^{\alpha}v^{\beta}=\frac{\alpha!\beta!\gamma!}{n!}\sum_{i+j+k=n}\binom{i}{\alpha}\binom{j}{\beta}B_{ijk}^{n}(u,v,w)$$

其中 $w=1-u-v$。

3. 将二元多项式 $\mathbf{b}(x,y)=\sum_{0\le i+j\le n}\mathbf{a}_{ij}x^{i}y^{j}$，其中 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，$0\le x+y\le 1$，表示成 Bézier 三角片形式。

4. 由三角形某一顶点出发到其对边一点连一直线，写出 Bézier 三角片中参数定义在该直线上的曲线方程。

(7) 方向导数

a. 定义

设 $\vec{z}=(z_0,z_1)$是一个矢量，$F=F(P)$是一个二元函数，则 F 关于矢量 $\vec{z}$ 的方向导数定义为

$$D_{\vec{z}}F(P)=\lim_{t\to 0}\frac{F(P+t\vec{z})-F(P)}{t}$$

$$D_{\vec{z}}^{r}F(P)=D_{\vec{z}}\left(D_{\vec{z}}^{r-1}F(P)\right)$$

b. 基本性质

i) $D_{a\vec{z}+b\vec{w}}F(P)=aD_{\vec{z}}F(P)+bD_{\vec{w}}F(P)$

ii) $D_{\vec{z}+\vec{w}}^{r}F(P)=\sum_{i=0}^{r}C_{r}^{i}D_{\vec{z}}^{i}D_{\vec{w}}^{r-i}F(P)$

iii) $\vec{z}=(z_0,z_1)$，$F=F(x,y)$

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{z}}^{r}F(P) &= \left(z_0\frac{\partial}{\partial x}+z_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r}F(P)\\
&=\sum_{i=0}^{r}C_r^i z_0^i z_1^{r-i}F_{x^i y^{r-i}}(P)\\
&=\sum_{\substack{|\alpha|=r\\ \alpha=(\alpha_0,\alpha_1)}}C_r^{\alpha}z^{\alpha}\partial^{\alpha}F(P)
\end{aligned}
$$

c. 在重心坐标下的方向导数计算

设 $P=uP_0+vP_1+wP_2$ 时三角形 T 内一点，

则有： $F=F(P)=F(uP_0+vP_1+wP_2)=f(u,v,w)$

零心坐标：

设 $\vec{z}=(z_0,z_1)$ 与 T 所在的平面平行，

则 $\vec{z}$ 关于 T 的零心坐标 (λ,μ,γ) 满足 $\begin{cases}\vec{z}=\lambda P_0+\mu P_1+\gamma P_2\\ \lambda+\mu+\gamma=0\end{cases}$

且零心坐标唯一。

导数计算：

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{z}}F(P) &= \lim_{t\to 0}\frac{F(P+t\vec{z})-F(P)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+t\lambda,v+t\mu,w+t\gamma)-f(u,v,w)}{t}\\
&=\lambda f_u(u,v,w)+\mu f_v(u,v,w)+\gamma f_w(u,v,w)
\end{aligned}
$$

记 $Y(\vec{z})=(\lambda,\mu,\gamma)$， 则 $D_{\vec{z}}F(P)=\sum_{|\alpha|=1}Y^{\alpha}(z)\partial^{\alpha}f(u,v,w)$

其中 $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbf{z}_+^3$， $\partial^{\alpha}f(u,v,w)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}f(u,v,w)}{\partial u^{\alpha_0}\partial v^{\alpha_1}\partial w^{\alpha_2}}$

利用归纳法可证

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{z}}^{r}F(P) &= \left(\lambda\frac{\partial}{\partial u}+\mu\frac{\partial}{\partial v}+\gamma\frac{\partial}{\partial w}\right)^{r}f(u,v,w)\\
&=\sum_{|\alpha|=r}J_{\alpha}^{r}(Y(z))\partial^{\alpha}f(u,v,w)
\end{aligned}
$$

d. Bézier 三角曲面片的方向导数

设 $J_\alpha^n(u,v,w)$为 Bernstein 基函数，并令 $P=(u,v,w)$，则有

$$D_{\vec{z}}^r J_\alpha^n(u,v,w)=\sum_{|\beta|=r} J_\beta^r(Y(\vec{z}))\frac{n!}{(\alpha-\beta)!}P^{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\beta|=r} J_\beta^r(Y(\vec{z}))J_{\alpha-\beta}^{n-r}(P)$$

设有 Bézier 三角片 $B^n(P)=\sum_{|\alpha|=n} Q_\alpha J_\alpha^n(P)$

则有：

$$D_{\vec{z}}^r B^n(P)=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\alpha|=n} Q_\alpha \sum_{|\beta|=r} J_\beta^r(Y(\vec{z}))J_{\alpha-\beta}^{n-r}(P)$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\delta|=n-r}\sum_{|\beta|=r} Q_{\delta+\beta} J_\beta^r(Y(\vec{z}))J_\delta^{n-r}(P)，\text{其中 } \delta=\alpha-\beta$$

记 $E=(E_0,E_1,E_2)$，有

$$\sum_{|\beta|=r} Q_{\delta+\beta} J_\beta^r(Y(\vec{z}))=\left[\sum_{|\beta|=r} E^\beta J_\beta^r(Y(\vec{z}))\right]Q_\delta$$

进一步，有

$$D_{\vec{z}}^r B^n(P)=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\delta|=n-r}\sum_{|\beta|=r} Q_{\delta+\beta} J_\beta^r(Y(\vec{z}))J_\delta^{n-r}(P)$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}(\lambda E_0+\mu E_1+\gamma E_2)^r \sum_{|\delta|=n-r} Q_\delta J_\delta^{n-r}(P)$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}(\lambda E_0+\mu E_1+\gamma E_2)^r (uE_0+vE_1+wE_2)^{n-r} Q_{0,0,0}$$

§4. 函数 Bézier 三角曲面片的凸性

a. 凸性定义

曲面 S：$F=F(P)$在定义域Ω上凸

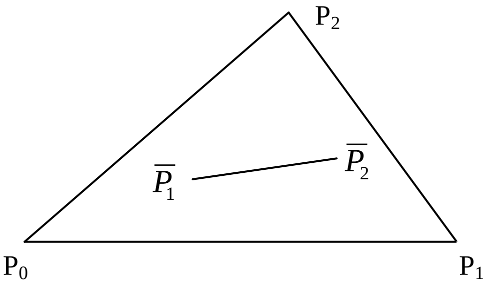
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} F_{x^2} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{y^2} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \forall P \in \Omega$$

函数 Bézier 三角片凸

$\Leftrightarrow$ 对于 $\forall \overline{P}_1, \overline{P}_2 \in \Omega$ 且 $\overline{P}_1(1-t)+\overline{P}_2 t \in \Omega$ 时，有

$$F\left(\overline{P}_1(1-t)+\overline{P}_2 t\right) \leq F\left(\overline{P}_1\right)(1-t)+F\left(\overline{P}_2\right)t$$

b. 数学准备



$\forall \overline{P}_1, \overline{P}_2 \in T$，设它们坐标分别为 (u_1, v_1, w_1) 和 (u_2, v_2, w_2)，

对 $\forall t \in [0,1]$，令 $\overline{P} = \overline{P}_1(1-t)+\overline{P}_2 t$

则 $\overline{P}$ 的重心坐标为

$$(u, v, w) = \left(u_1(1-t)+u_2 t, v_1(1-t)+v_2 t, w_1(1-t)+w_2 t\right)$$

在直线 L 上

$$F\left(\overline{P}\right) = F\left(\overline{P}_1 + t\left(\overline{P}_2 - \overline{P}_1\right)\right) \text{为凸} \Leftrightarrow \frac{d^2 F\left(\overline{P}(t)\right)}{dt^2} \geq 0$$

设 $F^n(P) = \sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k} J^n_{i,j,k}(P)$，则有

$$0 \leq \frac{d^2 F^n\left(\overline{P}(t)\right)}{dt^2} = n(n-1) \sum_{i+j+k=n-2} \left(\lambda E_0 + \mu E_1 + \gamma E_2\right)^2 f_{i,j,k} J^{n-2}_{i,j,k}(P)$$

所以，当下面条件成立时

$$\forall \quad i + j + k = n - 2$$

$$\left(\lambda E_0 + \mu E_1 + \gamma E_2\right)^2 f_{i,j,k} \geq 0 \qquad (*)$$

有 $D^2_{\bar{z}} F(P) \geq 0$， $\forall P \in T$， $\bar{z} \parallel \overline{P}_2 - \overline{P}_1$

$(*)\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{i+2,j,k} & f_{i+1,j+1,k} & f_{i+1,j,k+1} \\ f_{i+1,j+1,k} & f_{i,j+2,k} & f_{i,j+1,k+1} \\ f_{i+1,j,k+1} & f_{i,j+1,k+1} & f_{i,j,k+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu \\ \gamma\end{pmatrix}\geq 0$$

$\forall\lambda+\mu+\gamma=0$

c. 三向凸条件

引理：设$H=\begin{pmatrix} A & c & b \\ c & B & a \\ b & a & C\end{pmatrix}$，则$\forall\lambda+\mu+\gamma=0$，有

$\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \gamma\end{pmatrix}H\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu \\ \gamma\end{pmatrix}\geq 0$的一个充分条件是：

$$\begin{cases} A+a\geq b+c \\ B+b\geq c+a \\ C+c\geq a+b\end{cases}$$

证明：$H=\begin{pmatrix} A+a-b-c & 0 & 0 \\ 0 & B+b-a-c & 0 \\ 0 & 0 & C+c-a-b\end{pmatrix}+\Delta H$

易证$\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \gamma\end{pmatrix}\Delta H\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu \\ \gamma\end{pmatrix}=0$，从而命题得证。

d. 三向凸定理(常庚哲&Davis)

定理：若对$\forall\quad i+j+k=n-2$，有

$(E_0-E_1)(E_0-E_2)f_{i,j,k}\geq 0$

$(E_1-E_2)(E_1-E_0)f_{i,j,k}\geq 0$

$(E_2-E_1)(E_2-E_0)f_{i,j,k}\geq 0$

那么$F^n(P)=\sum\limits_{i+j+k=n}f_{i,j,k}J^n_{i,j,k}(P)$在 T 上为凸。

e. 改进的凸性条件

记 $\Delta_a = A + a - b - c$， $\Delta_b = B + b - a - c$， $\Delta_c = C + c - a - b$， 有

$$(\lambda \quad \mu \quad \gamma) H \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \Delta_a \lambda^2 + \Delta_b \mu^2 + \Delta_c \gamma^2$$

$$= (\Delta_a + \Delta_c)\lambda^2 + (\Delta_b + \Delta_c)\mu^2 + 2\Delta_c \lambda\mu$$

$$\begin{cases} \Delta_a + \Delta_c \geq 0 \\ \Delta_b + \Delta_c \geq 0 \\ (\Delta_a + \Delta_c)(\Delta_b + \Delta_c) - \Delta_c^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_a + \Delta_c \geq 0 \\ \Delta_b + \Delta_c \geq 0 \\ \Delta_a + \Delta_b \geq 0 \\ \Delta_a \Delta_b + \Delta_b \Delta_c + \Delta_c \Delta_a \geq 0 \end{cases}$$

下记 $\Delta_{i,j,k}^{(l)} = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq l}}^{2} (E_l - E_s) f_{i,j,k}$， $l = 0,1,2$

定理：若对 $\forall i + j + k = n - 2$， 有

$$\Delta_{i,j,k}^{(0)} + \Delta_{i,j,k}^{(1)} \geq 0$$

$$\Delta_{i,j,k}^{(1)} + \Delta_{i,j,k}^{(2)} \geq 0$$

$$\Delta_{i,j,k}^{(2)} + \Delta_{i,j,k}^{(0)} \geq 0$$

$$\Delta_{i,j,k}^{(0)} \Delta_{i,j,k}^{(1)} + \Delta_{i,j,k}^{(1)} \Delta_{i,j,k}^{(2)} + \Delta_{i,j,k}^{(2)} \Delta_{i,j,k}^{(0)} \geq 0$$

则 $F^n(P) = \sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)$ 在 T 上为凸。

注：上述定理对 $n = 2,3$ 是充要的。

§5. 有理 Bézier 三角曲面片

a. 有理 Bézier 三角片的一般形式

$$\mathbf{b}^n(P) = \frac{\sum_{i+j+k=n} \omega_{i,j,k} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)}{\sum_{i+j+k=n} \omega_{i,j,k} J_{i,j,k}^n(P)}$$

- 有理 de Casteljau 算法

$$\mathbf{b}_\alpha^r(P)=\frac{u\omega_{\alpha+e0}^{r-1}\mathbf{b}_{\alpha+e0}^{r-1}(P)+v\omega_{\alpha+e1}^{r-1}\mathbf{b}_{\alpha+e1}^{r-1}(P)+u\omega_{\alpha+e2}^{r-1}\mathbf{b}_{\alpha+e2}^{r-1}(P)}{\omega_\alpha^r}$$

其中 $\omega_\alpha^r=u\omega_{\alpha+e0}^{r-1}(P)+v\omega_{\alpha+e1}^{r-1}(P)+u\omega_{\alpha+e2}^{r-1}(P)$

$r=1,2,\ldots,n$ 和 $|\alpha|=n-r$

特别地，$\mathbf{b}_\alpha^0(P)=\mathbf{b}_\alpha$，$\omega_\alpha^0=\omega_\alpha$

曲面点 $\mathbf{b}^n(P)=\mathbf{b}_0^n(P)$

- 求导

令 $U(P)=w(P)\mathbf{b}^n(P)=\sum_{i+j+k=n}\omega_{i,j,k}Q_{i,j,k}J_{i,j,k}^n(P)$

则 $D_{\vec{z}}\mathbf{b}^n(P)=\dfrac{D_{\vec{z}}U(P)-D_{\vec{z}}w(P)\mathbf{b}^n(P)}{w(P)}$

b. 二次曲面片

圆锥曲线推广到曲面即为二次曲面，

圆锥曲线段可以用二次有理 Bézier 曲线表示，

但三角二次曲面片不一定能用三角二次有理 Bézier 曲面表示！

三角二次曲面片可以用三角四次有理 Bézier 曲面表示！

八分之一球面(第一卦限)的有理 Bézier 曲面表示：控制顶点

$[0,0,1]$

$[\alpha,0,1]$ $[0,\alpha,1]$

$[\beta,0,\beta]$ $[\gamma,\gamma,1]$ $[0,\beta,\beta]$

$[1,0,\alpha]$ $[1,\gamma,\gamma]$ $[\gamma,1,\gamma]$ $[0,1,\alpha]$

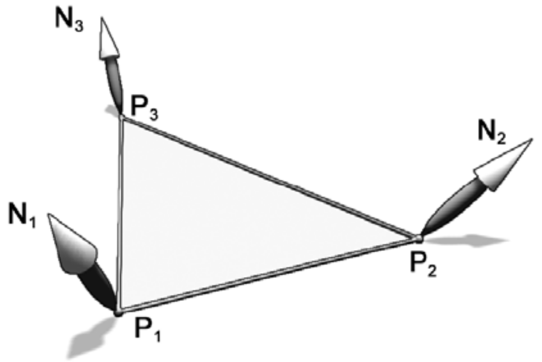
$[1,0,0]$ $[1,\alpha,0]$ $[\beta,\beta,0]$ $[\alpha,1,0]$ $[0,1,0]$

其中 $\alpha=\left(\sqrt{3}-1\right)/\sqrt{3}$， $\beta=\left(\sqrt{3}+1\right)/2\sqrt{3}$， $\gamma=1-\left(5-\sqrt{2}\right)\left(7-\sqrt{3}\right)/46$

权取为：$\omega_{040}=4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$，$\omega_{031}=3\sqrt{2}$，$\omega_{202}=4$，$\omega_{121}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(3+2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$，

其余权由对称性可得。

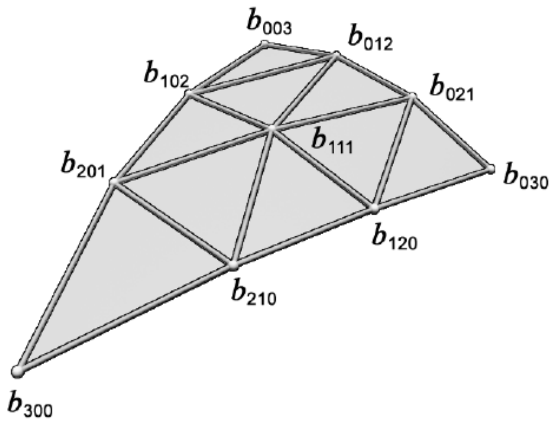
- 三次曲面插值



输入：空间中三点 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_3$ 以及三点处的单位法向 $\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3$

构造一张插值三次 Bézier 三角片

设插值曲面为 $\mathbf{b}(u,v,w)=\sum\limits_{i+j+k=3}\mathbf{b}_{ijk}\dfrac{3!}{i!\,j!\,k!}u^i v^j w^k$

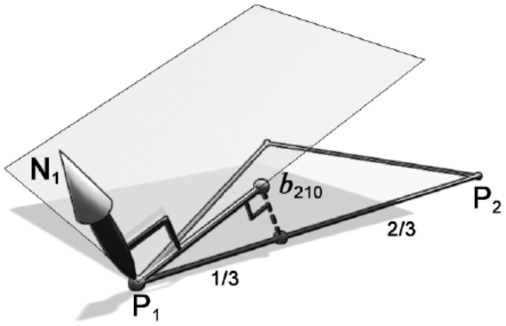


vertex control points: $\mathbf{b}_{300}$ $\mathbf{b}_{030}$ $\mathbf{b}_{003}$

tangent control points: $\mathbf{b}_{210}$ $\mathbf{b}_{120}$ $\mathbf{b}_{201}$ $\mathbf{b}_{102}$ $\mathbf{b}_{012}$ $\mathbf{b}_{021}$

center control point: $\mathbf{b}_{111}$

角点控制顶点可由插值条件直接得到



切平面控制顶点可依据各边分别计算，由相应边界的三分点投影到顶点处的切平面得到。

中心控制顶点由下式计算得到

$$\mathbf{b}_{111} = E + (E - V)/2$$

其中 $E = (\mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{021})/6$

$$V = (\mathbf{b}_{300} + \mathbf{b}_{030} + \mathbf{b}_{003})/3$$

§6. 高维推广与 S 曲面片

a. 体模型

设四面体的四个顶点 P_1, P_2, P_3, P_4

空间中任意一点 P 可表示为

$$P = u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3 + u_4 P_4$$

其中

$$u_1 = \frac{\det[P, P_2, P_3, P_4]}{\det[P_1, P_2, P_3, P_4]}, \quad u_2 = \frac{\det[P_1, P, P_3, P_4]}{\det[P_1, P_2, P_3, P_4]}, \quad \cdots$$

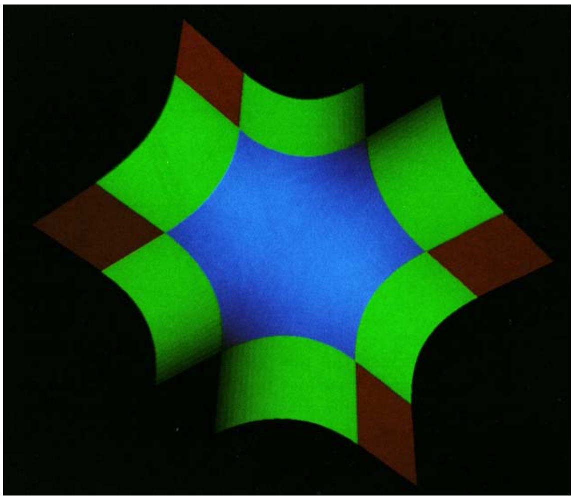
定义 Bernstein 基函数

$$J_\alpha^n(P) = \frac{n!}{i_1! i_2! i_3! i_4!} u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3} u_4^{i_4}，\quad 其中\ \alpha = (i_1, i_2, i_3, i_4)$$

$$\mathbf{b}^n(P) = \sum_{|\alpha|=n} Q_\alpha J_\alpha^n(P)$$

b. S 曲面片

问题：Bézier 三角片是 Bézier 曲线的一种自然推广，能否推广到多边曲面片？



设平面上一凸 s 边形 $P_1P_2\ldots P_s$，记 $\Delta_i = \text{area}(P, P_i, P_{i+1})/\text{area}(P_i, P_{i+1}, P_{i+2})$，定义

$$\pi_i = \Delta_1 \cdot \ldots \Delta_{i-2} \cdot \Delta_{i+1} \cdot \ldots \cdot \Delta_s$$

归一化，得广义重心坐标

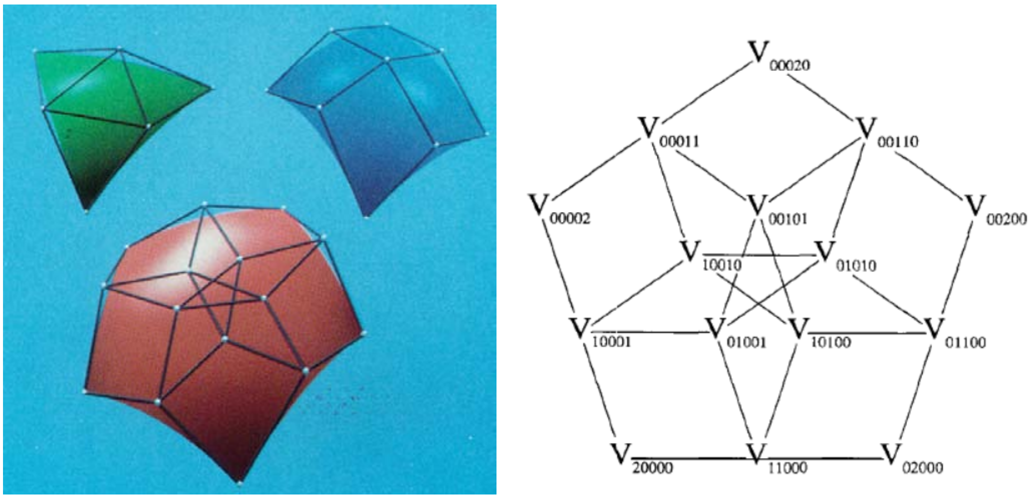
$$u_i = \frac{\pi_i}{\pi_1 + \ldots + \pi_s}$$

(当 $s=3$ 时，$u_1 = \pi_1 = \Delta_2$，$u_2 = \pi_2 = \Delta_3$，$u_3 = \pi_3 = \Delta_1$，即为三角形上的重心坐标)

根据重心坐标可以定义 Bernstein 基函数，从而定义 S 曲面片

$$\mathbf{b}^n(P) = \sum_{|\alpha|=n} Q_\alpha J_\alpha^n(P)$$

其中 $Q_\alpha \in E^3$。



深度为 2 的三边、四边、五边形 S-patches。

思考题：

1. 计算 Bézier 三角片在某一顶点处沿着角平分线方向的法曲率。
2. 给出 Bézier 四面体的升阶算法。
3. C. Loop and T. DeRose, A multisided generalization of Bezier surfaces. ACM Transactions on Graphics, 8(3):204-234, 1989.
4. L. Garc´ıa-Puente, F. Sottile, C. G. Zhu, Toric degenerations of Bézier patches, ACM Transactions on Graphics, 30(5), 2011, Article 110。