第十二章 曲面几何连续性

§1. 参数曲面间连续性概念

(a) 背景知识

复杂曲面造型的需要：多片曲面光滑拼接

参数连续性的局限性：依赖于参数化，限制条件过多

几何连续(geometric continuity)：可实现光滑拼接，不依赖于参数化

主要发展时期：20 世纪 80 年代 90 年代

代表性人物：Barsky，deRose，梁友栋，刘鼎元，Jörg Peters，……

(b) 曲面 C^n 连续

- 定义

C^0 连续：两张曲面具有公共连接线，也称位置连续。

C^n 连续：当且仅当两曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$ 沿公共连接线 $P(\gamma)=Q(\gamma)$ 处处具有直到 n 阶连续偏导矢，即有

$$\frac{\partial^{i+j}P(\gamma)}{\partial s^i \partial t^j}=\frac{\partial^{i+j}Q(\gamma)}{\partial u^i \partial v^j}, \quad i+j=1,2,\ldots,n$$

则称曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$ 是 C^n 连续的。

注：公共连接线 $P(\gamma)=Q(\gamma)$ 可以不是曲面参数线。

- 举例

C^1 连续：$\frac{\partial P(\gamma)}{\partial s}=\frac{\partial Q(\gamma)}{\partial u}$，$\frac{\partial P(\gamma)}{\partial t}=\frac{\partial Q(\gamma)}{\partial v}$

C^2 连续：C^1 连续，

$$\frac{\partial^2 P(\gamma)}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 Q(\gamma)}{\partial u^2},\quad \frac{\partial^2 P(\gamma)}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 Q(\gamma)}{\partial u\partial v},\quad \frac{\partial^2 P(\gamma)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 Q(\gamma)}{\partial v^2}$$

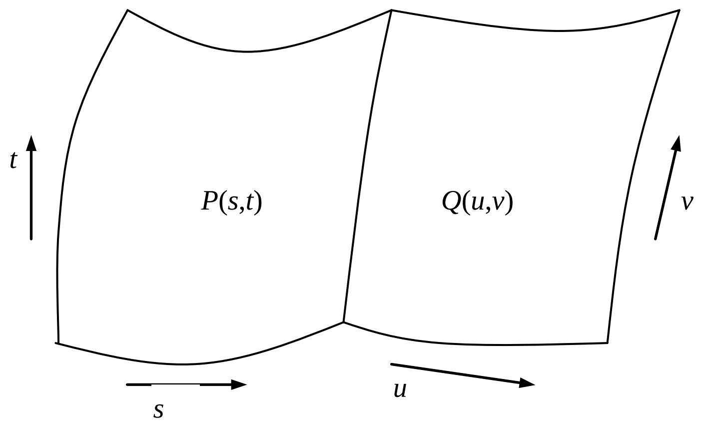
组合曲面的连续性：设曲面$P(u,v)$是定义在分割$\Delta_u\times\Delta_v$，其中$\Delta_u:u_0<u_1$，$\Delta_v:v_0<v_1<v_2$，则该曲面在参数线$v=v_1$处 C^n 连续的条件：$\frac{\partial^{i+j}P(u,v_1-)}{\partial u^i\partial v^j}=\frac{\partial^{i+j}P(u,v_1+)}{\partial u^i\partial v^j}$，$i+j=1,2,\ldots,n$

例：双三次样条曲面是 C^2 连续的。

(c) 曲面 G^n 连续

G^0 连续：两张曲面位置连续，同 C^0 连续。

G^1 连续：两张曲面沿连接线处处具有公共切平面或公共曲面法线。



设曲面$P(s,t)$和$Q(u,v)$有公共连接线$P(\gamma)=Q(\gamma)$，则这两张曲面 G^1 连续的条件为：

$$(P_s\times P_t)\times(Q_u\times Q_v)=(P_s,P_t,Q_v)Q_u-(P_s,P_t,Q_u)Q_v=0$$

公共连接线为曲面等参数线$P(s_0,t)=Q(u_0,v)$， $v=v(t)$，

则$P_t\parallel Q_v$，

相应地，G^1 连续的条件：$(P_s,P_t,Q_u)=0$

或： $Q_u=h(s)P_s+g(s)P_t$

G^2 连续：两张曲面沿连接线 G^1 连续，在连接线上任意一点沿任意方向具有相同法曲率。

或在连接线上处处具有相同主曲率与主方向。

G^n 连续：曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$ 有公共连接线 $P(\gamma)=Q(\gamma)$，其中一张曲面被重新参数化 $Q(u,v)=\overline{Q}(\overline{u},\overline{v})$，使得 $P(s,t)$ 与 $\overline{Q}(\overline{u},\overline{v})$ 在连接线处是 C^n 连续的。

$$\frac{\partial^{i+j}P(\gamma)}{\partial s^i \partial t^j}=\frac{\partial^{i+j}\overline{Q}(\gamma)}{\partial \overline{u}^i \partial \overline{v}^j}, \quad i+j=1,2,\ldots,n$$

G^n 连续等价定义：存在 n(n+3)个形状函数满足 beta 约束

$$\frac{\partial^{i+j}P(\gamma)}{\partial s^i \partial t^j}=\mathbf{cr}_{i,j}\left(\frac{\partial^{k+l}Q(\gamma)}{\partial u^k \partial v^l},\frac{\partial^{k+l}u(\gamma)}{\partial \overline{u}^k \partial \overline{v}^l},\frac{\partial^{k+l}v(\gamma)}{\partial \overline{u}^k \partial \overline{v}^l}\right), \quad k+l=i+j; \quad i+j=1,2,\ldots,n$$

例：对于 G^1 连续，存在 4 个形状函数，可由 $Q(u,v)$ 重新参数为 $Q(u,v)=\overline{Q}(u(\overline{u},\overline{v}),v(\overline{u},\overline{v}))$ 分别对 $\overline{u}$，$\overline{v}$ 求偏导得到。

§2. 两张参数曲面间 G^1 连续拼接

(a) 张量积 Bézier 曲面 G^1 拼接

设有 Bézier 曲面

$$S^1_{m\times n}: \quad P(s,t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}B_{i,m}(s)B_{j,n}(t)$$

$$S^2_{l\times q}: \quad Q(u,v)=\sum_{h=0}^{l}\sum_{k=0}^{q}Q_{hk}B_{h,l}(u)B_{k,q}(v)$$

- 位置连续： $P(1,t)=Q(0,v(t))$，

实用上： $v(t)=t$， $P(1,t)=Q(0,t)$

$$\sum_{j=0}^{n}P_{mj}B_{j,n}(t)=\sum_{k=0}^{q}Q_{0k}B_{k,q}(t)$$

- 一阶几何连续

设 $P_s \times P_t \neq 0$，$Q_u \times Q_v \neq 0$ 以及 $m=l$，$n=q$

由定义知：存在 $\alpha(t)>0$，$\beta(t)$，使得

$$Q_u(0,t)=\alpha(t)P_s(1,t)+\beta(t)P_t(1,t)$$

- 一个简单条件

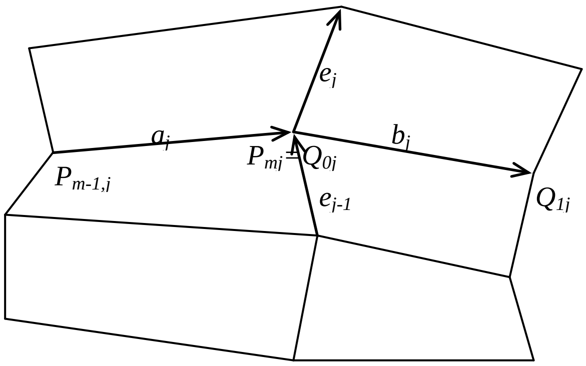
设 $\alpha(t)=\alpha$，$\beta(t)=\beta$ 都是常数，则有

$$m\sum_{k=0}^{n}(Q_{1k}-Q_{0k})B_{k,n}(t)=\alpha m\sum_{j=0}^{n}(P_{mj}-P_{m-1,j})B_{j,n}(t)+\beta n\sum_{j=0}^{n-1}(P_{m,j+1}-P_{mj})B_{j,n-1}(t)$$

记 $\vec{e}_j=P_{m,j+1}-P_{mj}$，$\vec{a}_j=P_{m,j}-P_{m-1,j}$，$\vec{b}_j=Q_{1,j}-Q_{0j}$

经整理，上式可写为

$$\sum_{j=0}^{n}\vec{b}_jB_{j,n}(t)=\sum_{j=0}^{n}\left\{\alpha\vec{a}_j+\beta\frac{n}{m}\left[\frac{j}{n}\vec{e}_{j-1}+\left(1-\frac{j}{n}\right)\vec{e}_j\right]\right\}B_{j,n}(t)$$



命题：若两张 $m\times n$ 次 Bézier 曲面的控制顶点满足：存在 $\alpha>0$，β 使得

$$\begin{cases} P_{mj}=Q_{0j} \\ \vec{b}_j=\alpha\vec{a}_j+\beta\left[\frac{j}{n}\vec{e}_{j-1}+\left(1-\frac{j}{n}\right)\vec{e}_j\right] \end{cases}，\quad j=0,1,\ldots,n$$

则它们在公共边界处为 G^1 拼接的。(此仅为充分条件)

- 一般性 G¹ 拼接条件

设有两张 $m\times n$ 次 Bézier 曲面 $P=P(u,v)$， $Q=Q(u,v)$

G¹ 拼接充要条件：

$P(1,v)=Q(0,v)$， $Q_u=\alpha(v)P_u+\beta(v)P_v$

等价条件： $(Q_u,P_u,P_v)=0$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}(\vec{a}_i,\vec{e}_j,\vec{b}_k)B_{i,n}(v)B_{j,n-1}(v)B_{k,n}(v)\equiv 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\lambda=0}^{3n-1}\left[\sum_{\substack{0\le i\le n\\0\le k\le n\\\lambda+1-n\le i+k\le\lambda}}(\vec{a}_i,\vec{e}_{\lambda-i-k},\vec{b}_k)\frac{C_n^iC_{n-1}^{\lambda-i-k}C_i^k}{C_{3n-1}^{\lambda}}\right]B_{\lambda,3n-1}(v)\equiv 0$$

定理：两张 $m\times n$ 次 Bézier 曲面 G¹ 拼接充要条件：

$$\begin{cases}P_{mj}=Q_{0j} & j=0,1,\dots,n\\ \displaystyle\sum_{\substack{0\le i\le n\\0\le k\le n\\\lambda+1-n\le i+k\le\lambda}}(\vec{a}_i,\vec{e}_{\lambda-i-k},\vec{b}_k)\frac{C_n^iC_{n-1}^{\lambda-i-k}C_i^k}{C_{3n-1}^{\lambda}}=0 & \lambda=0,1,\dots,3n-1\end{cases}$$

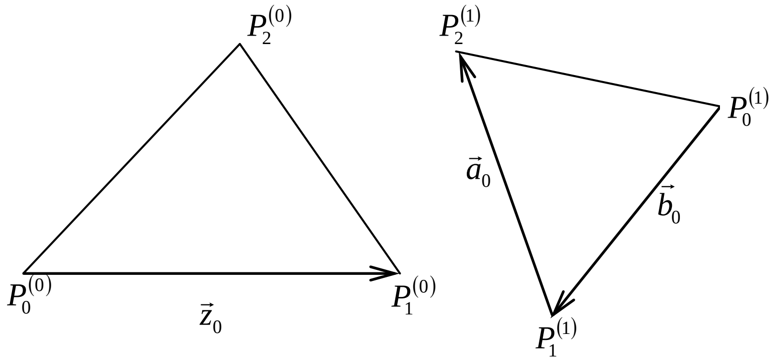
(b) 两张 Bézier 三角片 G¹ 拼接

- 问题假设

设有 Bézier 三角片

S_0： $B_n^{(0)}(P)=\sum_{i+j+k=n}Q_{i,j,k}^{(0)}J_{i,j,k}(P)$

S_1： $B_n^{(1)}(\overline{P})=\sum_{r+s+t=n}Q_{r,s,t}^{(1)}J_{r,s,t}(\overline{P})$



- 位置连续(G^0 连续)

记 $P(t)=P_1^{(0)}+t\left(P_2^{(0)}-P_1^{(0)}\right)$， $\overline{P}(t)=P_1^{(1)}+t\left(P_2^{(1)}-P_1^{(1)}\right)$

有 $B_n^{(0)}(P)\big|_{P=P(t)}=B_n^{(1)}\left(\overline{P}\right)\big|_{\overline{P}=\overline{P}(t)}$

$\Leftrightarrow Q_{0,r,s}^{(0)}=Q_{0,r,s}^{(1)}$， $\forall r+s=n$

- G^1 拼接条件

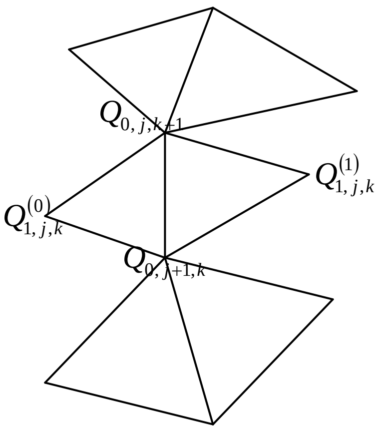
记 $\vec{z}_0=\overrightarrow{P_0^{(0)}P_1^{(0)}}$， $\vec{a}=\overrightarrow{P_1^{(1)}P_2^{(1)}}$， $\vec{b}=\overrightarrow{P_0^{(1)}P_1^{(1)}}$

条件： $D_{\vec{z}_0}B_n^{(0)}(P(t))=\alpha(t)D_{\vec{a}}B_n^{(1)}\left(\overline{P}(t)\right)+\beta(t)D_{\vec{b}}B_n^{(1)}\left(\overline{P}(t)\right)$， 其中 $\beta(t)<0$

例： $\alpha(t)=\alpha$， $\beta(t)=\beta<0$ 均为常数

则两张 Bézier 三角片 G^1 拼接条件(已知位置连续)：

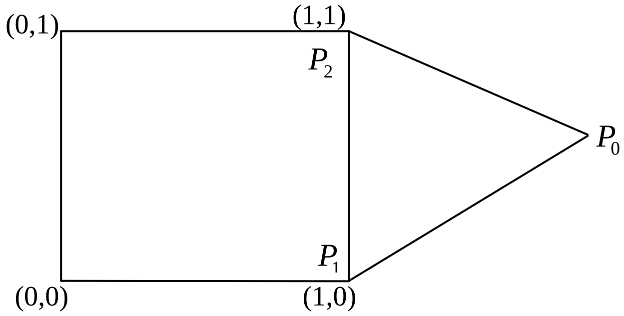
$$Q_{0,j+1,k}^{(0)}-Q_{1,j,k}^{(0)}=\alpha\left(Q_{0,j,k+1}^{(1)}-Q_{0,j+1,k}^{(1)}\right)+\beta\left(Q_{0,j+1,k}^{(1)}-Q_{1,j,k}^{(1)}\right),\quad j+k=n-1$$



有公共边的相邻三角形共面！

(c) 张量积 Bézier 曲面与 Bézier 三角片 G^1 拼接

- 问题假设



S_0： $B_n(u,v,w)=\sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} J_{i,j,k}(u,v,w)$

S_1： $P(s,t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{ij} B_{i,m}(s) B_{j,n}(t)$

- 位置连续

$$P(1,t)=B_n(0,t,1-t)$$

$$\Leftrightarrow P_{m,j}=Q_{0,j,n-j}，\quad j=0,1,\ldots,n$$

- G^1连续拼接

记$\vec{z}_0=\overrightarrow{P_0P_1}$， $\vec{e}=\overrightarrow{P_1P_2}$

条件 1： $D_{\vec{z}} B_n(0,t,1-t)=\overline{\alpha}(t)\frac{\partial P(1,t)}{\partial s}+\overline{\beta}(t)\frac{\partial P(1,t)}{\partial t}$， 且$\overline{\alpha}(t)<0$

条件 2： $\frac{\partial P(1,t)}{\partial s}=\alpha(t) D_{\vec{z}} B_n(0,t,1-t)+\beta(t) D_{\vec{e}} B_n(0,t,1-t)$， 且$\alpha(t)<0$

例：设$\alpha(t)=\alpha<0$， $\beta(t)=\beta$均为常数，则有

$$m\sum_{j=0}^{n}\left(P_{m,j}-P_{m-1,j}\right)B_{j,n}(t)$$
$$=n\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\alpha\left[Q_{0,j+1,n-j-1}-Q_{1,j,n-j-1}\right]+\beta\left[Q_{0,j,n-j}-Q_{0,j+1,n-j-1}\right]\right\}B_{j,n-1}(t)$$

记$E_j=\frac{n}{m}\left\{\alpha\left[Q_{0,j+1,n-j-1}-Q_{1,j,n-j-1}\right]+\beta\left[Q_{0,j,n-j}-Q_{0,j+1,n-j-1}\right]\right\}$

则上述等式变换为

$$\sum_{j=0}^{n}\left(P_{m,j}-P_{m-1,j}\right)B_{j,n}(t)=\sum_{j=0}^{n-1}E_j B_{j,n-1}(t)$$

对等式右端升阶，可得

$$P_{m,j}-P_{m-1,j}=\frac{1}{n}\left[jE_j+(n-j)E_{j+1}\right],\quad j=0,1,\ldots,n$$

思考题：

1. 设函数$\alpha(t)$， $\beta(t)$都为线性函数，推导出两张张量积 Bézier 曲面 G^1拼接控制顶点需要满足的条件。

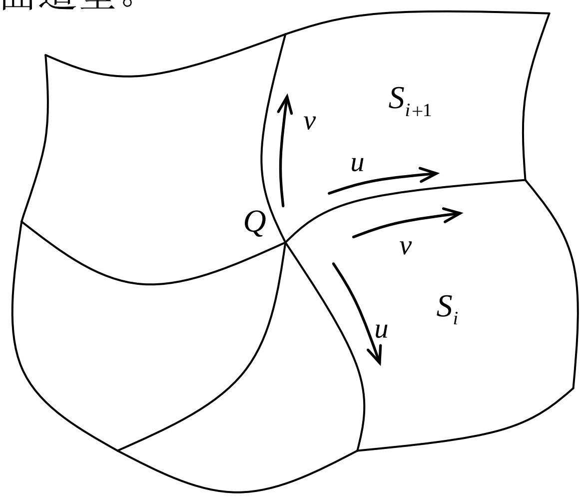
2. 设函数$\alpha(t)$， $\beta(t)$都为线性函数，推导出两张 Bézier 三角形 G^1 拼接控制顶点满足的条件。

3. 已知两张双 n 次 Bezier 曲面实物模型，用测量方法检查两张曲面是否 G^0 连续至少需要测量几个点？如果检测 G^1 连续呢？

§3. 伞形曲面间 G^1 连续拼接

(a) 问题

将多张参数曲面绕一点进行光滑拼接，常用于倒角、补洞等曲面造型。



记号：设 n 张曲面 S_i： $Q_i = Q_i(u,v)$， $(u,v)\in D$， $i=1,2,\ldots,n$

设相邻曲面以下述方式联接

$Q_i(0,t)=Q_{i+1}(t,0)$， $t\in[0,1]$

(b) G^1 拼接的基本理论

i) 一般方程

$$(\Delta) \qquad \frac{\partial Q_{i+1}(t,0)}{\partial v} = a_i(t)\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial v} + b_i(t)\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial u},$$

其中$b_i(t)<0$　　　　　　　　$i=1,2,\ldots,n$

ii) Q 点关系方程

(*)　$$\frac{\partial Q_{i+1}(0,0)}{\partial v}=a_i(0)\frac{\partial Q_i(0,0)}{\partial v}+b_i(0)\frac{\partial Q_i(0,0)}{\partial u}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

对(Δ)两边关于 t 求导，可得

(**)　$$Q_{i+1}^{(1,1)}(0,0)=a_i(0)Q_i^{(0,2)}(0,0)+b_i(0)Q_i^{(1,1)}(0,0)$$
$$+a_i'(0)Q_i^{(0,1)}(0,0)+b_i'(0)Q_i^{(1,0)}(0,0), \quad i=1,2,\ldots,n$$

(***)　$$Q_{i+1}^{(1,0)}(0,0)=Q_i^{(0,1)}(0,0)$$

iii) Q 点方程的求解

记$\begin{cases} a_i(0)=\alpha_i \\ b_i(0)=\beta_i<0 \end{cases}$　　　$\begin{cases} a_i'(0)=\lambda_i \\ b_i'(0)=\mu_i \end{cases}$

则有

(*)　$$Q_{i+1}^{(0,1)}=\alpha_i Q_i^{(0,1)}+\beta_i Q_i^{(1,0)}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

(**)　$$Q_{i+1}^{(1,1)}=\alpha_i Q_i^{(0,2)}+\beta_i Q_i^{(1,1)}+\lambda_i Q_i^{(0,1)}+\mu_i Q_i^{(1,0)}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

将(*)写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & \cdots & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & 0 & \cdots & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^{(0,1)} \\ Q_2^{(0,1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_n^{(0,1)} \end{pmatrix}=0$$

考虑(**)，有

$$Q_{i+1}^{(1,1)}=\left(\prod_{j=1}^{i}\beta_j\right)Q_1^{(1,1)}+\sum_{j=1}^{i}\beta_i\ldots\beta_{j+1}\left[\alpha_j Q_j^{(0,2)}+\lambda_j Q_j^{(0,1)}+\mu_j Q_j^{(1,0)}\right]$$

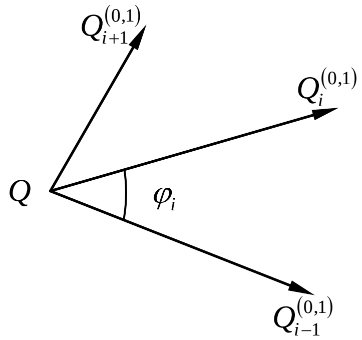
相容性方程

$$\left(1-\prod_{j=1}^{n}\beta_j\right)Q_1^{(1,1)}=\sum_{j=1}^{n}\beta_i\ldots\beta_{j+1}\left[\alpha_j Q_j^{(0,2)}+\lambda_j Q_j^{(0,1)}+\mu_j Q_j^{(1,0)}\right]$$

(c) 几何分析

i) α_i，β_i的几何意义

记$\left|Q_i^{(0,1)}\right| = r_i$，$\varphi_i = \left\langle Q_{i-1}^{(0,1)}, Q_i^{(0,1)} \right\rangle$



则(*)式变成

$$\vec{r}_{i+1} = \alpha_i \vec{r}_i + \beta_i \vec{r}_{i-1}$$

从而有

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{r_{i+1}}{r_i} \dfrac{\sin(\varphi_i + \varphi_{i+1})}{\sin\varphi_i} \\ \beta_i = -\dfrac{r_{i+1}}{r_i} \dfrac{\sin\varphi_{i+1}}{\sin\varphi_i} \end{cases}$$

一般可假设$\varphi_i \neq \pi$

ii) 扭矢方程的解分析

由$\prod_{i=1}^{n} \beta_i = (-1)^n$

相容性方程为

$$\left[1-(-1)^n\right] Q_1^{(1,1)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_n \ldots \beta_{j+1} \left[\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}\right]$$

考虑 n 的奇偶性

1. n 为奇数

自由量$\left\{Q_i^{(0,1)}, Q_i^{(0,2)}\right\}_{i=1}^{n}$

自由量确定后可唯一确定$\left\{Q_i^{(1,1)}\right\}_{i=1}^{n}$

由相容性方程求出$Q_1^{(1,1)}$

其它$Q_i^{(1,1)}$可由下面方程求出

$$Q_{i+1}^{(1,1)} = \left(\prod_{j=1}^{i} \beta_j\right) Q_1^{(1,1)} + \sum_{j=1}^{i} \beta_i \ldots \beta_{j+1} \left[\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}\right]$$

2. n 为偶数

此时相容性方程为

$$0=\sum_{j=1}^{n}\beta_n\ldots\beta_{j+1}\left[\alpha_j Q_j^{(0,2)}+\lambda_j Q_j^{(0,1)}+\mu_j Q_j^{(1,0)}\right]$$

自由量$\left\{Q_i^{(0,1)},Q_j^{(0,2)},Q_l^{(1,1)};i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n,\ j\neq l\right\}$

$Q_l^{(0,2)}$由相容性方程求出(设$\alpha_l\neq 0$)

不妨取$l=1$，此时$Q_1^{(1,1)}$是自由变量

其它扭矢可由下面方程求出

$$Q_{i+1}^{(1,1)}=\left(\prod_{j=1}^{i}\beta_j\right)Q_1^{(1,1)}+\sum_{j=1}^{i}\beta_i\ldots\beta_{j+1}\left[\alpha_j Q_j^{(0,2)}+\lambda_j Q_j^{(0,1)}+\mu_j Q_j^{(1,0)}\right]$$

(d) 张量积 Bézier 与三角 Bézier 曲面的伞形拼接

i) 记号

曲面 S_i：$Q_i=Q_i(u,v)$，$(u,v)\in D$，$i=1,2,\ldots,n$

Bézier 曲面

$$Q_i(u,v)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}Q_{r,s}^{(i)}B_{r,n}(u)B_{s,n}(v)$$

Bézier 三角片

$$Q_i(u,v)=\sum_{r+s+k=n}R_{r,s,k}^{(i)}J_{r,s,k}^{n}(u,v,1-u-v)$$

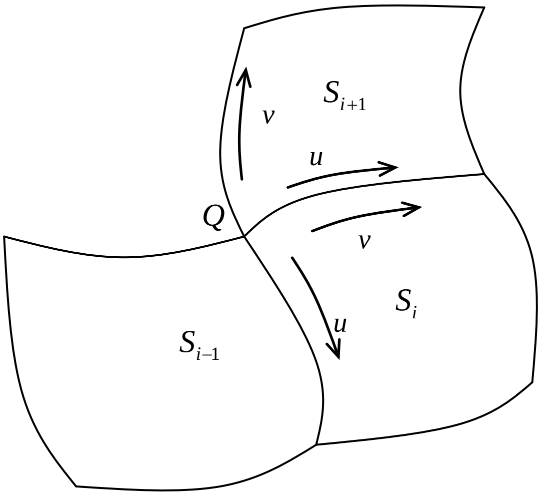
ii) 边界曲线

$$C_i(t)=Q_i(0,t)=Q_{i+1}(t,0)=\sum_{s=0}^{n}C_s^{(i)}B_{s,n}(t)$$

$$C_s^{(i)}=\begin{cases}Q_{0,s}^{(i)} & S_i\text{为Bezier曲面}\\ R_{0,s,n-s}^{(i)} & S_i\text{为Bezier三角片}\end{cases}$$

或

$$C_s^{(i)}=\begin{cases}Q_{s,0}^{(i+1)} & S_{i+1}\text{为Bezier曲面}\\ R_{s,0,n-s}^{(i+1)} & S_{i+1}\text{为Bezier三角片}\end{cases}$$



$Q_{i+1}^{(1,0)}(0,0)=Q_i^{(0,1)}(0,0)=n\left(C_1^{(i)}-C_0^{(i)}\right)$，其中 $C_0^{(i)}=Q$

$C_1^{(i)}=\frac{1}{n}Q_i^{(0,1)}(0,0)+Q$

$Q_{i+1}^{(2,0)}(0,0)=Q_i^{(0,2)}(0,0)=n(n-1)\left(C_2^{(i)}-2C_1^{(i)}+Q\right)$

$Q_i^{(1,1)}(0,0)=n^2\left[Q_{1,1}^{(i)}-Q_{1,0}^{(i)}-Q_{0,1}^{(i)}+Q\right]$ Bézier 曲面

$Q_i^{(1,1)}(0,0)=n(n-1)\left[R_{1,1,n-2}^{(i)}-R_{1,0,n-1}^{(i)}-R_{0,1,n-1}^{(i)}+Q\right]$ Bézier 三角片

iii) 算法步骤

考虑 m 片曲面组成的伞形曲面

1. m 为奇数

step 1. 首先确定 $C_i(t)$， $i=1,2,\ldots,m$

满足条件 $\{Q,C_1^{(i)};i=1,2,\ldots,m\}$ 共面

step 2. 计算 $\{\alpha_i,\beta_i;i=1,2,\ldots,m\}$

step 3. 确定 $a_i(t)$， $b_i(t)$， $i=1,2,\ldots,m$

满足条件 $a_i(0)=\alpha_i$， $b_i(0)=\beta_i$

计算 $\lambda_i=a_i'(0)$， $\mu_i=b_i'(0)$， $i=1,2,\ldots,m$

step 4. 确定 $Q_{1,1}^{(i)}$ 或 $R_{1,1,n-2}^{(i)}$， $i=1,2,\ldots,m$

由相容性条件以及曲面在角点的导矢公式

step 5. 利用$a_i(t)$，$b_i(t)$确定

$\left\{Q_{1,s}^{(i)}, Q_{s,1}^{(i)}; \quad s = 2,\ldots,n\right\}$，$i = 1,2,\ldots,m$

或

$\left\{R_{1,s,n-s-1}^{(i)}, R_{s,1,n-s-1}^{(i)}; \quad s = 2,\ldots,n-1\right\}$，$i = 1,2,\ldots,m$

step 6. 其余控制顶点由用户确定。

2. m 为偶数

step 1. 首先确定$C_i(t)$，$i = 1,2,\ldots,m$

除$C_2^{(1)}$的所有控制顶点

满足条件$\left\{Q, C_1^{(i)}; i = 1,2,\ldots,m\right\}$共面

step 2. 计算$\left\{\alpha_i, \beta_i; i = 1,2,\ldots,m\right\}$

step 3. 确定$a_i(t)$，$b_i(t)$，$i = 1,2,\ldots,m$

满足条件$a_i(0) = \alpha_i$，$b_i(0) = \beta_i$

计算$\lambda_i = a_i'(0)$，$\mu_i = b_i'(0)$，$i = 1,2,\ldots,m$

step 4. 计算$C_2^{(1)}$

根据$Q_1^{(0,2)} = -\dfrac{1}{\alpha_1\beta_m\cdots\beta_2}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=2}^{m}\beta_m\cdots\beta_{j+1}\left[\alpha_j Q_j^{(0,2)} + \lambda_j Q_j^{(0,1)} + \mu_j Q_j^{(1,0)}\right] \\ +\beta_m\cdots\beta_2\left[\lambda_1 Q_1^{(0,1)} + \mu_1 Q_1^{(1,0)}\right]\end{array}\right)$

以及在$Q(0,0)$处，有

$Q_1^{(0,2)}(0,0) = n(n-1)\left(C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)} + Q\right)$

step 5. 任意给定$Q_{1,1}^{(k)}$或$R_{1,1,n-2}^{(k)}$，其中 k 为某一确定常数

计算$\left\{Q_{1,1}^{(i)}\text{或}R_{1,1,n-2}^{(i)}; i = 1,2,\ldots,m, i \neq k\right\}$

step 6,7. 同奇数情况的 step5,6。

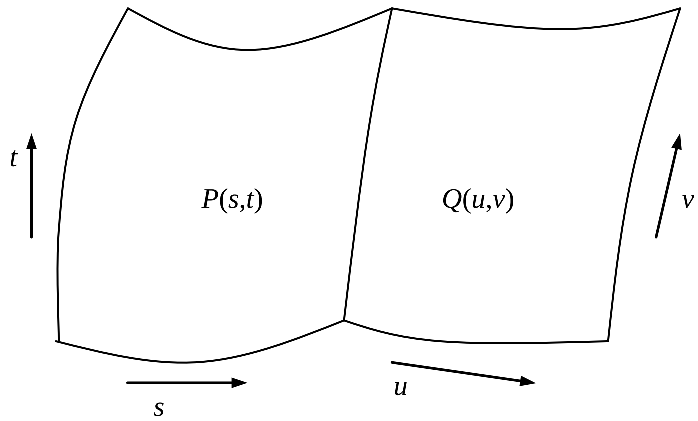
§4. Bézier 曲面 G^2 连续拼接

(a) 一阶光滑条件

设曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$，$(s,t,u,v\in[0,1])$

两曲面在边界处连接：

$P(1,t)=Q(0,v)$，$0\le t=v\le 1$



两曲面在边界处 G^1 连续条件：

$(P_s(1,t),P_t(1,t),Q_u(0,t))=0$

或存在函数 $\alpha(t)>0$，$\beta(t)$ 使得

$Q_u(0,t)=\alpha(t)P_s(1,t)+\beta(t)P_t(1,t)$

特别地，$\alpha(t)\equiv 1$，$\beta(t)=0$，则曲面为 C^1 连续。

(b) Dupin indicatrix(标型)

考虑参数曲面 $X(u,v)$，

曲面法向：$N=\dfrac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}$

曲面曲线 $X(u(s),v(s))$ 的切向 $T=X_u\dot{u}+X_v\dot{v}$

曲面 $X(u,v)$ 沿 T 方向的法曲率

$$k_n=\frac{L_{11}\dot{u}^2+2L_{12}\dot{u}\dot{v}+L_{22}\dot{v}^2}{g_{11}\dot{u}^2+2g_{12}\dot{u}\dot{v}+g_{22}\dot{v}^2}$$

其中$g_{11}=X_u\cdot X_u$， $g_{12}=X_u\cdot X_v$， $g_{22}=X_v\cdot X_v$

$L_{11}=N\cdot X_{uu}$， $L_{12}=N\cdot X_{uv}$， $L_{22}=N\cdot X_{vv}$

主曲率、主方向： k_1， k_2， T_1， T_2

欧拉公式： $k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$，其中$\theta$为$T$与$T_1$夹角。

设$k_n=\frac{1}{\rho}$，并令$y_1=\sqrt{\rho}\cos\theta$， $y_2=\sqrt{\rho}\sin\theta$

则欧拉方程可改写为

$$k_1y_1^2+k_2y_2^2=1$$

此方程定义的二次曲线称为 Dupin 标型。

渐进方向： $L_{11}\dot{u}^2+2L_{12}\dot{u}\dot{v}+L_{22}\dot{v}^2=0$

Dupin 标型可由渐进方向再加一第三方向的法曲率唯一确定。

(c) 二阶光滑条件

两相邻曲面在连接线处切平面和 Dupin 标型均一致。

曲面$P(s,t)$和$Q(u,v)$的渐进方向分别由下式得到：

$$L_{11}^P\dot{s}^2+2L_{12}^P\dot{s}\dot{t}+L_{22}^P\dot{t}^2=0$$

$$L_{11}^Q\dot{u}^2+2L_{12}^Q\dot{u}\dot{v}+L_{22}^Q\dot{v}^2=0$$

在边界处的渐进方向满足

$$T=P_s\dot{s}+P_t\dot{t}=Q_u\dot{u}+Q_v\dot{v}$$

由 G^1 条件知$Q_u=\alpha P_s+\beta P_t$， $Q_v=P_t$

解得$\dot{s}=\alpha\dot{u}$， $\dot{t}=\beta\dot{u}+\dot{v}$

代入到$L_{11}^P\dot{s}^2+2L_{12}^P\dot{s}\dot{t}+L_{22}^P\dot{t}^2=0$

并与式$L_{11}^Q\dot{u}^2+2L_{12}^Q\dot{u}\dot{v}+L_{22}^Q\dot{v}^2=0$比较系数

计算后可得

$$\det\left[P_s, P_t, Q_{uu} - \left(\alpha^2 P_{ss} + 2\alpha\beta P_{st} + \beta^2 P_{tt}\right)\right] = 0$$

上述方程等价于

$$Q_{uu} = \alpha^2 P_{ss} + 2\alpha\beta P_{st} + \beta^2 P_{tt} + pP_s + qP_t$$

特别地，当 $\alpha \equiv 1$， $\beta = p = q = 0$， 曲面 $P(s,t)$ 和 $Q(u,v)$ 在公共边界处 C^2 连续。

(d) Bézier 曲面 G^2 拼接

已知一张 Bézier 曲面 $P(s,t)$，设计一个算法给出 $Q(u,v)$ 的构造方法，使得这两张曲面在公共边界处 G^2 连续。

§5. 有理曲线曲面的几何连续拼接

(a) 有理曲线几何连续性条件：

设有理曲线 $R(t) = \dfrac{P(t)}{\omega(t)}$， $\overline{R}(t) = \dfrac{\overline{P}(t)}{\overline{\omega}(t)}$

齐次坐标表示形式：

$Q(t) = \left(P(t), \omega(t)\right)$， $\overline{Q}(t) = \left(\overline{P}(t), \overline{\omega}(t)\right)$

曲线在连接点 $R(t_0) = \overline{R}(t_0)$ 处为 G^n 的充要条件：

存在参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 和数量函数 $e(t)$，使得

$$\left.\frac{d^k \overline{Q}(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d^k\left(e(t)Q(t)\right)}{dt^k}\right|_{t=t_0}, \quad k = 0,1,2\ldots,n$$

(b) 有理曲面几何连续性条件：

有理曲面可表示成齐次坐标，采用与有理曲线类似的方法可得连续性条件。