第十五章 隐式化、等距曲线与散乱数据造型

§1. 曲线曲面隐式化

- 概况

参数曲线曲面特点：

几何直观性强，显示和求交算法易设计

参数曲线曲面不足：

干涉判断、点线关系，交线的不封闭性

代数曲线曲面：$F(x,y)=0$，$F(x,y,z)=0$

- 隐式化与逆问题

隐式化：已知参数曲线$x=\dfrac{x(t)}{w(t)}$，$y=\dfrac{y(t)}{w(t)}$，其中 $x(t)$，$y(t)$和$w(t)$均为多项式，寻找表示同一条曲线的隐式方程$F(x,y)=0$。

逆问题：已知曲线$\left(\dfrac{x(t)}{w(t)},\dfrac{y(t)}{w(t)}\right)$上一点$(x,y)$，求对应参数$t$。

两条参数曲线交点可由隐式化和求逆算法得到。

- 参数曲线曲面的隐式化

(a) 两多项式结式

已知多项式$f(t)=\sum_{i=0}^{m}a_it^i$，$g(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i$

设$f(t)=(t-f_1)(t-f_2)\cdots(t-f_m)$，$g(t)=(t-g_1)(t-g_2)\cdots(t-g_n)$

则$f(t)$与$g(t)$的结式为

$$R(f,g)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left(f_i-g_j\right)$$

定理：多项式 $f(t)$ 与 $g(t)$ 有公共根当且仅当它们的结式等于 0.

例： $f(t)=t^2-7t+12=(t-3)(t-4)$

$g(t)=t^2-3t+2=(t-2)(t-1)$

则 $R(f,g)=(3-2)(3-1)(4-2)(4-1)=12$

例： $f(t)=t^2-7t+12=(t-3)(t-4)$

$g(t)=t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$

则 $R(f,g)=(3-2)(3-3)(4-2)(4-3)=0$

(b) Sylvester 结式

已知多项式 $f(t)=\sum_{i=0}^{m}a_it^i$， $g(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i$

则结式可计算为

$$R_t(f,g)=\begin{vmatrix} a_m & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_m & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_m & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_n & \cdots & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_n & \cdots & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_n & \cdots & \cdots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m\text{行}\end{matrix}=0$$

定理：设 $r(t)=(f(t),g(t))$ 是多项式 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的最大公因式，则有 $\deg(r(t))=m+n-\mathrm{rank}(R_t(f(t),g(t)))$。

注：最大公因式 $r(t)=(f(t),g(t))=\mathrm{GCD}(f(t),g(t))$

(c) 参数曲线隐式化

设有参数曲线 $x=\dfrac{x(t)}{w(t)}$， $y=\dfrac{y(t)}{w(t)}$， 其中

$x(t)=\sum_{i=0}^{n}a_it^i$， $y(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i$， $w(t)=\sum_{i=0}^{n}d_it^i$

构造多项式 $p(x,t)=w(t)x-x(t)$， $q(y,t)=w(t)y-y(t)$

易知 $p(x,t)=0$， $q(y,t)=0$ 仅当 x,y,t 满足原参数方程。

写成关于 t 的多项式，有

$$p(x,t)=(d_n x-a_n)t^n+(d_{n-1}x-a_{n-1})t^{n-1}+\cdots+(d_1 x-a_1)t+(d_0 x-a_0)$$

$$q(y,t)=(d_n y-b_n)t^n+(d_{n-1}y-b_{n-1})t^{n-1}+\cdots+(d_1 y-b_1)t+(d_0 y-b_0)$$

计算 $p(x,t)$， $q(y,t)$ 关于 t 的结式，有

$$R_t(p,q)=$$

$$\left.\begin{vmatrix}
d_n x-a_n & \cdots & \cdots & d_1 x-a_1 & d_0 x-a_0 & & & & \\
 & d_n x-a_n & \cdots & \cdots & d_1 x-a_1 & d_0 x-a_0 & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & d_n x-a_n & \cdots & & \cdots & d_1 x-a_1 & d_0 x-a_0 \\
d_n y-b_n & \cdots & \cdots & d_1 y-b_1 & d_0 y-b_0 & & & & \\
 & d_n y-b_n & \cdots & \cdots & d_1 y-b_1 & d_0 y-b_0 & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & d_n y-b_n & \cdots & & \cdots & d_1 y-b_1 & d_0 y-b_0
\end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}n\text{行}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}n\text{行}\end{matrix}\right.=0$$

该方程即为参数曲线的隐式方程。

定理：任何平面 n 次有理参数曲线都可表示为平面 n 次代数曲线。

例： $x=t^2+1$， $y=t^2+2t-2$

有 $p(x,t)=-t^2+(x-1)$， $q(y,t)=-t^2-2t+(y+2)$

得隐式方程： $R(p,q)=-x^2+2xy-y^2+10x-6y-13=0$

(d) 参数曲面隐式化

设有参数曲面 $x=\dfrac{x(s,t)}{w(s,t)}$， $y=\dfrac{y(s,t)}{w(s,t)}$， $z=\dfrac{z(s,t)}{w(s,t)}$

可得 $F(x,s,t)=0$， $G(y,s,t)=0$， $H(z,s,t)=0$

利用结式方法，由 $F(x,s,t)=0$ 和 $G(y,s,t)=0$ 可得 $R_1(x,y,s)=0$

由 $G(y,s,t)=0$ 和 $H(z,s,t)=0$ 可得 $R_2(y,z,s)=0$

再由 $R_1(x,y,s)=0$ 和 $R_2(y,z,s)=0$ 得到隐式曲面方程 $R(x,y,z)=0$。

§2. 等距曲线(offset curves)

- 定义

给定平面参数曲线 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$，它的距离为 d 的等距线定义为：$\mathbf{r}_d(t)=\mathbf{r}(t)+d\cdot\mathbf{n}(t)$，其中 $\mathbf{n}(t)=\dfrac{(y'(t),-x'(t))}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}$

这里 $\mathbf{r}(t)$ 称为母线，$\mathbf{n}(t)$ 为 $\mathbf{r}(t)$ 的单位法向量；d 为带符号的偏移量。

定理：对于平面 n 次多项式曲线 $\mathbf{r}(t)=(a(t),b(t))$，其距离为 d 的等距线方程为

$$f_d(x,y)=\mathrm{Res}_t(P(t,x,y),Q(t,x,y))=0$$

其中 $P(t,x,y)=(x-a(t))^2+(y-b(t))^2-d^2$，

$Q(t,x,y)=p(t)(x-a(t))+q(t)(y-b(t))$，$a'(t)=p(t)$，$b'(t)=q(t)$

Res_t 表示关于参数 t 求 Sylvester 结式。

- Pythagorean-hodograph 曲线(PH 曲线)

定义：对参数曲线 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$，如果存在一个多项式 $\sigma(t)$ 使得 $x'^2(t)+y'^2(t)=\sigma^2(t)$，则称 $\mathbf{r}(t)$ 为 PH 曲线。

引理(Kubota)：三个实多项式 $a(t)$，$b(t)$ 和 $c(t)$ 满足 $a^2(t)+b^2(t)=c^2(t)$ 当且仅当存在实多项式 $u(t)$，$v(t)$ 和 $w(t)$ 使得

$a(t)=w(t)(u^2(t)-v^2(t))$，$b(t)=2w(t)u(t)v(t)$，$c(t)=w(t)(u^2(t)+v^2(t))$

推论：PH 曲线可表示为：

$$\mathbf{r}(t)=\left(x(t),y(t)\right)=\left(\int w(t)\left(u^2(t)-v^2(t)\right)dt,\quad \int 2w(t)u(t)v(t)dt\right)$$

定理： PH 曲线的次数为 $\lambda+2\mu+1$，其中 $\lambda=\deg(w(t))$，$\mu=\max\{\deg(u(t)),\deg(v(t))\}$。

例：三次 PH 曲线

$\lambda=\deg(w(t))=0$，

$\mu=\max\{\deg(u(t)),\deg(v(t))\}=1$

可设 $w(t)=1$，$u(t)=u_0B_{0,1}(t)+u_1B_{1,1}(t)$，$v(t)=v_0B_{0,1}(t)+v_1B_{1,1}(t)$

代入积分表达式，可得三次 PH 曲线的 Bézier 表示

$$\mathbf{r}(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)$$

其中 $P_0=(x_0,y_0)$ 任取；$P_1=P_0+\left(u_0^2-v_0^2,2u_0v_0\right)/3$；

$P_2=P_1+(u_0u_1-v_0v_1,u_0v_1+u_1v_0)/3$；$P_3=P_2+\left(u_1^2-v_1^2,2u_1v_1\right)/3$

定理：设 $\mathbf{r}(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)$ 为平面三次 Bézier 曲线，$L_j(j=1,2,3)$ 为其控制多边形边长，θ_1 和 θ_2 分别为向量 P_1P_0 到 P_1P_2 的转角和 P_2P_1 到 P_2P_3 的转角，则 $\mathbf{r}(t)$ 为 PH 曲线的充要条件是

$L_2=\sqrt{L_1L_3}$，$\theta_1=\theta_2$。

平面三次 PH 曲线曲率

$$k(t)=\frac{2(u_0v_1-u_1v_0)}{\left[(u_0(1-t)+u_1t)^2+(v_0(1-t)+v_1t)^2\right]^2}$$

易知平面三次 PH 曲线没有拐点。

- 具有有理等距线的参数曲线

定理：设 $Z(t)=x(t)+y(t)\mathbf{i}$ 是以 t 为实参数的多项式曲线，则它的等距线可有理参数化当且仅当 $Z'(t)$ 可表示成如下形式：

$$x'(t)+y'(t)\mathbf{i}=\rho(t)(Mt+1)G^2(t)$$

其中$\rho(t)$，$G(t)$分别表示实、复多项式，M为 0 或虚部不为 0 的常数。

假设$M=\lambda+\mu\mathbf{i}$，$G(t)=u(t)+v(t)\mathbf{i}$，可得具有有理等距曲线的多项式曲线$Z(t)=x(t)+y(t)\mathbf{i}$的一个表示：

$$\begin{cases} x(t)=\int\rho(t)\{(\lambda t+1)(u^2(t)-v^2(t))-2\mu t u(t)v(t)\}dt \\ y(t)=\int\rho(t)\{2(\lambda t+1)u(t)v(t)+\mu t(u^2(t)-v^2(t))\}dt \end{cases}$$

§3. 散乱数据造型

- 基本问题与方法

(a) 问题

任给$\{(P_i,f_i)\}_{i=0}^n$，求$F=F(P)$，使得

(i) **插值** $F(P_i)=f_i$，$i=0,1,\ldots,n$

(ii) **逼近** 在一定意义下使$F(P)$与所给定的数据的误差尽量小。

(b) 方法

(i) 全局逼近与插值

优点：具有整体相关性，逼近度高，数学处理与表示简单

缺点：几何形状难以控制，计算复杂，难以交互构造

(ii) 局部方法

优点：易于几何构造，计算简单

缺点：连续性与光滑性较低，缺少数据相关性

- 二元 Lagrange 插值

(a) 矩形网格

由一元 Lagrange 插值得到

(b) 直线相交网上的插值

在 Oxy 平面上任意给定 $n+1$ 条直线

$$l_i : a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

使得它们两两相交且任意三条直线无公共交点

设 $l_i \cap l_j = P_{ij}$，有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个交点

给定 $\{(P_{ij}, f_{ij})\}$，记 $u_i(x,y) = a_i x + b_i y + c_i$

令 $S_{ij}(x,y) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i,j}}^{n} u_l(x,y)$

则有

$$S_{ij}(P_{rs}) \begin{cases} = 0 & (i,j) \neq (r,s) \\ \neq 0 & (i,j) = (r,s) \end{cases}$$

构造基函数

$$L_{ij}(x,y) = \frac{S_{ij}(x,y)}{S_{ij}(P_{ij})}$$

$$L_{ij}(P_{rs}) \begin{cases} = 1 & (i,j) = (r,s) \\ = 0 & (i,j) \neq (r,s) \end{cases}$$

得到插值函数

$$F(x,y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{n} f_{ij} L_{ij}(x,y)$$

关于基函数 $\{L_{ij}(x,y)\}$ 有如下结论：

线性无关

分别为 $n-1$ 次多项式

有 $n(n+1)/2$ 个基函数

从而，有：

$\{L_{ij}(x,y)\}_{0,i<j}^{n}$ 构成了 $\pi_{n-1}(R^2)$ 空间的一组完全基。

(c) 三角形网格上的 Lagrange 插值

给定 $n>0$ 及 $\left\{\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right), f_{ijk}\right\}_{i+j+k=n}$

令 $S_{ijk}(u,v,w)=\prod_{r=0}^{i-1}\left(u-\frac{r}{n}\right)\prod_{s=0}^{j-1}\left(v-\frac{s}{n}\right)\prod_{t=0}^{k-1}\left(w-\frac{t}{n}\right)$

则有

$S_{ijk}\left(\frac{\bar{r}}{n},\frac{\bar{s}}{n},\frac{\bar{t}}{n}\right)\begin{cases}\neq 0 & (i,j,k)=(\bar{r},\bar{s},\bar{t})\\ =0 & (i,j,k)\neq(\bar{r},\bar{s},\bar{t})\end{cases}$，其中 $\bar{r}+\bar{s}+\bar{t}=n$

构造基函数

$$L_{ijk}(u,v,w)=\frac{S_{ijk}(u,v,w)}{S_{ijk}\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)}$$

$\{L_{ijk}(u,v,w): i+j+k=n\}$ 为 $\pi_n(R^2)$ 空间的一组基。

- Shepard 方法

(a) 问题

对任意函数 $f=f(x,y)$ 及 $\{(x_i,y_i)\}_0^n$，求 $F(x,y)$，使得

$F(x_i,y_i)=f_i=f(x_i,y_i)$

(b) 基本公式

$$F_\mu(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{f_i}{d_i^{\mu}(x,y)}}{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{d_i^{\mu}(x,y)}} & (x,y)\neq(x_i,y_i)\\[2ex] f_i & (x,y)=(x_i,y_i)\end{cases}$$

其中 $d_i(x,y)=\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

性质：

1. 凸组合性质

   由定义易知。

2. 最大最小性质

   $\min_i\{f_i\} \le F_\mu(x,y) \le \max_i\{f_i\}$

3. 插值性质

4. 优化性质

   记 $\omega_i(x,y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{n} d_j^\mu(x,y)$

   优化目标函数

   $$\min_{C(x,y)} \sum_{i=0}^{n} \omega_i(x,y)\left(C(x,y) - f_i\right)^2$$

   可得 $C(x,y) = F_\mu(x,y)$

5. 连续与光滑性

   对于 $\mu > 0$

   $$F_\mu(x,y) \in \begin{cases} C^{+\infty} & \mu\text{偶数} \\ C^{\frac{\mu-1}{2}} & \mu\text{奇数} \\ C^{\left\lfloor \frac{\mu}{2} \right\rfloor} & \mu\text{实数} \end{cases}$$

   不足之处：虽然插值函数光滑，但在数据点附近表现为平点(导数为 0)。

(c) 局部 Shepard 方法

由于 Shepard 插值函数是由凸组合得到，修改权函数使其具有局部支撑性，从而得到局部 Shepard 方法。

记

$$\varphi_R(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{r} & 0<r\le\dfrac{R}{3}\\ \dfrac{27}{4R}\left(\dfrac{r}{R}-1\right)^2 & \dfrac{R}{3}<r\le R\\ 0 & r>R\end{cases}$$

改写

$$F_\mu(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{i=0}^{n} f_i(\varphi_R(d_i(x,y)))^\mu}{\sum_{i=0}^{n}(\varphi_R(d_i(x,y)))^\mu} & (x,y)\ne(x_i,y_i)\\ f_i & (x,y)=(x_i,y_i)\end{cases}$$

局部 Shepard 方法具有局部性质，以及插值、连续、凸组合等性质。

- 径向基插值(radial basis interpolation)

(a) 基本原理

设曲面为

$$S(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\phi(d_i(x,y))+P_m(x,y)$$

其中α_i为待定系数

插值条件：

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\phi(d_i(x_l,y_l))+P_m(x_l,y_l)=f_l,\quad l=0,1,\ldots,n$$

有解条件：

$$\det(\phi(d_i(x_l,y_l)))\ne 0$$

常用的径向基函数有:

-Kriging 方法的 Gauss 分布函数：$\phi(r)=e^{-c^2r^2}$；

-Kriging 方法的 Markoff 分布函数：$\phi(r)=e^{-c|r|}$；

-Hardy 的 Multi-Quadric 函数：$\phi(r)=\left(c^2+r^2\right)^{\beta}$；

-Hardy 的逆 Multi-Quadric 函数：$\phi(r)=\left(c^2+r^2\right)^{-\beta}$；

-Duchon 的薄板样条：$\phi(r)=r^{2k}\log r$，$\phi(r)=r^{2k+1}$；

以及紧支柱正定径向基函数。

(b) Multi-Quadric 方法(MQ 方法)

改进型：

$$S(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_iB_i(x,y)+\sum_{j=0}^{m}b_jP_j(x,y)$$

其中 $B_i(x,y)=\left(d_i^2(x,y)+r^2\right)^{\frac{1}{2}}$

由插值条件，可得

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}a_iB_i(x_l,y_l)+\sum_{j=0}^{m}b_jP_j(x_l,y_l)=f_l & l=0,1,\ldots,n\\ \sum_{j=0}^{n}a_jP_l(x_j,y_j)=0 & l=0,1,\ldots,m\end{cases}$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix}B & E\\ E' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\ 0\end{pmatrix}$$

其精确集：$\operatorname{span}\{P_j(x,y);j=0,1,\ldots,m\}$。

(c) 薄板样条方法(thin plate spline)

由变分问题找插值函数 $S(x,y)$

$$\min_{S\in C^2(R^2)}\int\left[S_{xx}^2+2S_{xy}^2+S_{yy}^2\right]dxdy$$

设 $S(x,y)=\phi(d(x,y))$，其中 $\phi=\phi(t)\in C^2$

$$d(x,y)=\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

则有 $\phi(t)=(t^2+r^2)\ln(t^2+r^2)$，其中 r 为常数

薄板样条插值公式

$$S(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_i\phi(d_i(x,y))+\sum_{j=0}^{m}b_jP_j(x,y)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_i\left\{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]+r^2\right\}\ln\left\{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]+r^2\right\}+\sum_{j=0}^{m}b_jP_j(x,y)$$

插值约束条件

$$\begin{cases} S(x_i,y_i)=f_i & i=0,1,\dots,n \\ \sum_{j=0}^{n}a_jP_i(x_j,y_j)=0 & i=0,1,\dots,m \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} B & E \\ E' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

该方程组解存在唯一(Micchelli 证)。

(d) 移动最小二乘方法(moving least squares)

设 $(x_i,f_i)_{i=0}^{n}$ 为一组采样数据，若对数据进行最小二乘拟合，可先假定一拟合函数，然后求出该函数的系数。

最小二乘拟合：不妨设拟合函数为一 2 次函数，即

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

构造函数 $F(a,b,c)=\sum_{i=0}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-f_i)^2\theta_i$

由 $F(a,b,c)=\min$，得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial a}=\sum_{i=0}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-f_i)x_i^2\theta_i=0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial b}=\sum_{i=0}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-f_i)x_i\theta_i=0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial c}=\sum_{i=0}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-f_i)\theta_i=0 \end{cases}$$

求解上述方程组，得到

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} x_i^4\theta_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^3\theta_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2\theta_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^3\theta_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2\theta_i & \sum_{i=0}^{n} x_i\theta_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2\theta_i & \sum_{i=0}^{n} x_i\theta_i & \sum_{i=0}^{n} \theta_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^2\theta_i \\ \sum_{i=0}^{n} f_i x_i\theta_i \\ \sum_{i=0}^{n} f_i\theta_i \end{pmatrix}$$

从而得到拟合函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$。

移动最小二乘拟合： 设拟合函数 $f(x) = a(x)x^2 + b(x)x + c(x)$，构造函数

$$F(a(x), b(x), c(x)) = \sum_{i=0}^{n} \left(a(x)x_i^2 + b(x)x_i + c(x) - f_i\right)^2 \theta_i\left(\|x_i - x\|\right)$$

与最小二乘类似的解法，得到

$$\begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \\ c(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} x_i^4\theta_i(\|x_i - x\|) & \sum_{i=0}^{n} x_i^3\theta_i(\|x_i - x\|) & \sum_{i=0}^{n} x_i^2\theta_i(\|x_i - x\|) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^3\theta_i(\|x_i - x\|) & \sum_{i=0}^{n} x_i^2\theta_i(\|x_i - x\|) & \sum_{i=0}^{n} x_i\theta_i(\|x_i - x\|) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2\theta_i(\|x_i - x\|) & \sum_{i=0}^{n} x_i\theta_i(\|x_i - x\|) & \sum_{i=0}^{n} \theta_i(\|x_i - x\|) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^2\theta_i(\|x_i - x\|) \\ \sum_{i=0}^{n} f_i x_i\theta_i(\|x_i - x\|) \\ \sum_{i=0}^{n} f_i\theta_i(\|x_i - x\|) \end{pmatrix}$$

由此得到拟合函数 $f(x) = a(x)x^2 + b(x)x + c(x)$。

- 自然邻域插值

  基本方法：由定义域中点集生成 Voronoi 图，并由局部重心坐标构造插值函数。

- 点曲面 (Point based surface)

  基本方法：移动最小二乘(moving least squares)

阅读文献：

1. Sugihara K. Surface interpolation based on new local coordinates.

Computer Aided Design 1999;13(1):51-58.

2. AMENTA, N. AND KIL, Y. J. 2004b. Defining point set surfaces. *ACM Trans. Graph. 23*, 3, 264–270.
3. 陈发来.曲面隐式化新进展.中国科学技术大学学报2014；44(5):345-361.
4. LEVIN, D. 2003. Mesh-independent surface interpolation. In *Geometric Modeling for Scientific Visualization*, G. Brunnett, B. Hamann, K. Mueller, and L. Linsen, Eds. Springer-Verlag.