1 2015-2016

Problem 1. 证明映*Banach*空间到自身的紧算子的共轭算子也是紧算子.

Proof. (Theorem 2.4.6) 记S为X中的闭单位球, 令$\epsilon > 0$. 由于$U(S)$全有界, 故

$$\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in S \text{ s.t. } \forall x \in S, \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ s.t. } \|U(x) - U(x_i)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

定义$V \in \mathcal{B}(X^*, \mathbb{C}^n)$

$$\forall \tau \in X^*, \quad V(\tau) = (\tau \circ U(x_1), \ldots, \tau \circ U(x_n)).$$

由于V是有限秩算子, 因此V是紧算子, 从而$V(X_1^*)$全有界, 其中X_1^*为X^*的闭单位球. 因此

$$\exists \tau_1, \ldots, \tau_m \in X_1^* \text{ s.t. } \forall \tau \in X_1^*, \exists j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ s.t. } \|V(\tau) - V(\tau_j)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

又

$$\|V(\tau) - V(\tau_j)\| = \left[\sum_{i=1}^{n} |U^*(\tau)(x_i) - U^*(\tau)(x_j)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

则$\forall x \in S$, 有

$$\begin{aligned}
|U^*(\tau)(x) - U^*(\tau_j)(x)| &\le |U^*(\tau)(x) - U^*(\tau)(x_i)| + |U^*(\tau)(x_i) - U^*(\tau_j)(x_i)| + |U^*(\tau_j)(x_i) - U^*(\tau_j)(x)| \\
&< \|\tau\| \cdot \|U(x) - U(x_i)\| + \frac{\epsilon}{3} + \|\tau_j\| \cdot \|U(x) - U(x_i)\| \\
&\le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

从而得

$$\|U^*(\tau) - U^*(\tau_j)\| = \sup_{x \in S} |U^*(\tau)(x) - U^*(\tau_j)(x)| \le \epsilon.$$

因此$U^*(X_1^*)$全有界, 故U^*是紧算子. □

Problem 2. 证明紧算子的每个非零特征值所对应的特征子空间一定是有限维空间.

Proof. (Theorem 2.4.4和2.4.8(1)). 首先我们证明: 若X是Banach空间, 设$\mathcal{K}(X)$是X上所有紧算子构成的集合, 则$\mathcal{K}(X) = \mathcal{B}(X)$当且仅当$X$是有限维空间.

令S表示X中的闭单位球, 则$\mathcal{K}(X) = \mathcal{B}(X) \Leftrightarrow \mathrm{id}_X$是紧算子$\Leftrightarrow S$紧集$\Leftrightarrow X$有限维.

下证若U是Banach空间上的紧算子, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则$\ker(U - \lambda)$是有限维空间.

令$Z = \ker(U - \lambda)(X)$, 则$\forall x \in Z$, 有$U(x) = \lambda x$, 因此$U(x) \in Z$, 从而由x的任意性知$U(Z) \subseteq Z$, 又由$U \in \mathcal{K}(X)$知U在Z上的限制U_Z为紧算子, 故$U_Z \in \mathcal{K}(Z)$, 且有$U(Z) = \lambda(\mathrm{id}_Z)$($\mathrm{id}_Z$表示$Z$上的恒等算子), $\lambda \neq 0$, 则映射id_Z是紧算子, 从而Z是有限维的. □

Problem 3. 设a是有单位元的C^*-代数A的一个自伴元, 证明它的谱是实数.

Proof. Theorem 3.1.8. □

Problem 4. 证明*Banach*空间的每个有限维子空间都存在闭的补子空间.

Proof. Lemma 2.4.7. □

Problem 5. 设H为*Hilbert*空间且非零向量$x, y \in H$, 证明秩一算子$x \otimes y$的迹类范数$\|x \otimes y\| = \|x\| \cdot \|y\|$.

Proof. 设$\mathcal{E}$为H的规范正交基.

$$\begin{aligned}
\|x \otimes y\|_2 &= \left(\sum_{z \in \mathcal{E}} \|(x \otimes y)(z)\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{z \in \mathcal{E}} \|\langle z, y\rangle x\|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{z \in \mathcal{E}} |\langle z, y\rangle|^2 \|x\|^2\right)^{1/2} = \|x\| \left(\sum_{z \in \mathcal{E}} |\langle z, y\rangle|^2\right)^{1/2} \\
&= \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}$$

□

Problem 6. 设H为*Hilbert*空间, I为$B(H)$中的非零理想, 证明: I包含$B(H)$中的所有有限秩算子.

Proof. Theorem 3.4.6和Theorem 3.4.7. □

Problem 7. 叙述*Hilbert*空间H上有界正规算子的谱分解定理.

Proof. Theorem 4.2.1. □

2 2017-2018

Problem 8. 何为局部凸拓扑向量空间? 如何用半范数来描述局部凸拓扑向量空间的拓扑结构?

解答: 设V是数域K上的向量空间, 且同时是个Hausdorff拓扑空间, 若映射

$$(x,y)\mapsto x+y: V\times V\to V,$$
$$(\alpha,x)\mapsto \alpha x: K\times V\to V,$$

都连续, 其中$V\times V$和$K\times V$上的拓扑皆定义为乘积拓扑, 则称V为拓扑向量空间. 若V上拓扑有一个由凸集构成的基, 则称V是局部凸拓扑向量空间.

对于局部凸拓扑向量空间V, 我们可以找到V上的一族半范数Γ, 其将V中的点分离, 即

$$\forall \text{非零} x\in V, \exists p\in\Gamma \text{ s.t. } p(x)\neq 0,$$

且对于$\forall x_0\in V$, 如下形式的集族

$$V(x_0:p_1,\dots,p_m;\epsilon)=\{x\in V: p_j(x-x_0)<\epsilon, j=1,\dots,m\},$$

构成x_0的一个邻域基, 其中$\epsilon>0, p_1,\dots,p_m\in\Gamma$.

Problem 9. 叙述*Stone-Weierstrass*定理, 给出该定理的一个应用.

解答: Stone-Weierstrass定理: 设X是紧Hausdorff空间, $\mathcal{A}$为$\mathcal{C}(X)$的闭子代数, $\mathcal{A}$将X中的所有点分离, 且$\mathcal{A}$是自伴的: 即若$f\in\mathcal{A}$, 则有$\bar{f}\in\mathcal{A}$. 则

$$\mathcal{A}=\mathcal{C}(X) \text{ 或} \exists x_0\in X \text{ s.t. } \mathcal{A}=\{f: f\in\mathcal{C}(X), f(x_0)=0\}.$$

应用: 设$\mathcal{A}=\mathcal{C}(\mathbb{T})$, 其中$\mathbb{T}$是单位圆, $z:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$是嵌入映射, 则由$z$及其共轭$\bar{z}$生成的闭子代数就是$\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Problem 10. 叙述并证明交换情形的*Gelfand-Naimark-Segal*定理.

解答: (Gelfand-Neimark-Segal定理)设$\mathcal{A}$是有单位元的交换C^*-代数. 则

(1) 若f是$\mathcal{A}$上的正线性泛函, 则存在$\mathcal{A}$的循环表示$(\pi_f,\mathcal{H}_f)$, 其有循环向量e_f满足

$$\forall a\in\mathcal{A},\quad f(a)=\langle \pi_f(a)e_f, e_f\rangle.$$

(2) 若$(\pi,\mathcal{H})$是$\mathcal{A}$的有循环变量e的循环表示, 且

$$\forall a\in\mathcal{A},\quad f(a)=\langle \pi(a)e, e\rangle.$$

则π和π_f等价, 其中$(\pi_f,\mathcal{H}_f)$由(1)得到.

解答: 由于$\mathcal{A}$为交换代数, 可设$\mathcal{A}=\mathcal{C}(X)$, 其中$X$是紧的.

(1) 若f是$\mathcal{A}$上的正线性泛函, 则存在X上正的正规Borel测度μ满足

$$\forall\phi\in\mathcal{A},\quad f(\phi)=\int\phi \mathrm{d}\mu.$$

表示$(\pi_f,\mathcal{H}_f)$可通过令$\mathcal{H}_f=L^2(\mu), \pi_f(\phi)=M_\phi$得到. 而$L^2(\mu)$可从$\mathcal{C}(X)$按如下方式得到: 令

$$\Phi=\{\phi\in\mathcal{C}(X): f(\phi^*\phi)=\int|\phi|^2\mathrm{d}\mu=0\},$$

则Φ是$\mathcal{C}(X)$的一个理想. 定义$\mathcal{C}(X)/\Phi$上的内积为

$$\forall\phi+\Phi,\psi+\Phi\in\mathcal{C}(X)/\Phi,\quad \langle\phi+\Phi,\psi+\Phi\rangle=\int\phi\bar{\psi}\mathrm{d}\mu.$$

$\mathcal{C}(X)/\Phi$关于该内积的完备化空间即为$L^2(\mu)$.

(2) 设$\pi:\mathcal{C}(X)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$为有循环向量$e$的循环表示. 设$\mu$为$X$上正的正规Borel测度, 满足

$$\int\phi\mathrm{d}\mu=\langle\pi(\phi)e,e\rangle=f(\phi).$$

定义$U_1:\mathcal{C}(X)\to\mathcal{H}$为$U_1(\phi)=\pi(\phi)e$, 则$U_1$是线性的, 且$U_1$的值域在$\mathcal{H}$中稠密. 定义

$$\Phi=\{\phi\in\mathcal{C}(X):f(\phi^*\phi)=\int|\phi|^2\mathrm{d}\mu=0\}.$$

若$\phi\in\Phi$, 则

$$\|U_1(\phi)\|^2=\langle\pi(\phi)e,\pi(\phi)e\rangle=\langle\pi(\phi^*\phi)e,e\rangle=\int|\phi|^2\mathrm{d}\mu=0,$$

故$U_1(\Phi)=0$. 因此由U_1可诱导线性映射

$$U:\mathcal{C}(X)/\Phi\to\mathcal{H},\quad U(\phi+\Phi)=\pi(\phi)e.$$

若定义

$$\langle\phi+\Phi,\psi+\Phi\rangle=\int\phi\bar{\psi}\mathrm{d}\mu,$$

则

$$\langle U(\phi+\Phi),U(\psi+\Phi)\rangle=\langle\pi(\phi)e,\pi(\psi)e\rangle=\langle\pi(\phi\psi^*)e,e\rangle=\int\phi\bar{\psi}\mathrm{d}\mu=\langle\phi+\Phi,\psi+\Phi\rangle.$$

因此U可延拓为从$\mathcal{C}(X)/\Phi$的完备化空间$L^2(\mu)$到$\mathcal{H}$的一个酉变换.

可将$\mathcal{C}(X)$视为$L^2(\mu)$的子集: 若$\phi\in\mathcal{C}(X)$, 则$U(\phi)=\pi(\phi)e$. 若$\phi,\psi\in\mathcal{C}(X)$, 则

$$UM_\phi\psi=U(\phi\psi)=\pi(\phi)\pi(\psi)e=\pi(\phi)U(\psi).$$

故由ψ的任意性知$UM_\phi=\pi(\phi)U$在$L^2(\mu)$的稠密子集$\mathcal{C}(X)$上成立, 从而$UM_\phi=\pi(\phi)U,\forall\phi\in\mathcal{C}(X)$. 这说明了$\pi$和表示$\phi\mapsto M_\phi$是等价的.

Problem 11. 给出希尔伯特空间上紧算子的三条性质.

解答:

(1) 令$U:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$为希尔伯特空间$\mathcal{H}_1$和$\mathcal{H}_2$之间的紧线性映射, 则$\mathcal{H}_1$中的闭单位球在$U$下的像是紧的.

(2) 若U是希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的紧算子, 则$|U|$和U^*都是紧算子.

(3) 若$\mathcal{H}$为希尔伯特空间, 则由$\mathcal{H}$上所有紧算子构成的集合$\mathcal{K}(\mathcal{H})$是自伴的.

(4) 若U为希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的紧正规算子, 则U可对角化.

Problem 12. 从正规算子的谱分解定理出发, 叙述并证明正规矩阵的可对角化定理.

解答: 见钉钉群.

3 2019-2020

Problem 13. 叙述局部凸拓扑线性空间弱拓扑意义下邻域的构造.

解答: 设V是数域K上的线性空间, Γ为V上的一族线性泛函, 其将V中的点按如下方式分离: 若

$$非零x\in V,\quad \rho\in\Gamma\text{ s.t. }\rho(x)\neq0.$$

当$\rho\in\Gamma$时, $p_\rho(x)=|\rho(x)|(x\in V)$定义了$V$上的一个半范数$p_\rho$.

由此可定义一族分离半范数:$\{p_\rho:\rho\in\Gamma\}$. 由定理1.2.4知这族半范数可生成V上的一个局部凸拓扑. 称为由Γ诱导的V上的弱拓扑, 记为$\sigma(V,F)$. 在该拓扑下, V中的每个向量x_0有一个由所有如下形式的集合构成的邻域基:

$$V(x_0:\rho_1,\dots,\rho_m;\epsilon)=\{x\in V:|\phi_j(x)-\rho_j(x_0)|<\epsilon,j=1,\dots,m\},$$

其中$\epsilon>0,\rho_1,\dots,\rho_m\in\Gamma$.

Γ中的每个线性泛函相对于$\sigma(V,\Gamma)$都是连续的: 因为$\forall x_0\in V,\forall\epsilon>0$, 有$\{x\in V:|\rho(x)-\rho(x_0)|<\epsilon\}=V(x_0;\rho;\epsilon)$为$V$中开集.

Problem 14. 证明有限秩算子*Hilbert*意义下的伴随算子也是有限秩算子.

Proof. 设U是希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的有限秩算子, 即$\dim(U(\mathcal{H})) = n < +\infty$. 对$\forall y \in \mathcal{H}$, 考虑$U(\mathcal{H})$上的有界线性泛函

$$f : Ux \mapsto \langle Ux, y \rangle.$$

由于$U(\mathcal{H})$是有限维的, $U(\mathcal{H})$的对偶空间$(U(\mathcal{H}))^*$也是有限维的. 因此

$$\exists f_1, f_2, \ldots, f_n \in (U(\mathcal{H}))^* \text{ s.t. } f = \sum_{j=1}^{n} f_j.$$

再由Riesz表示定理知

$$\forall j = 1, \ldots, n, \exists y_j \text{ s.t. } f_j(Ux) = \langle Ux, y_j \rangle,$$

因此

$$\langle x, U^* y \rangle = \langle Ux, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle Ux, y_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, U^* y_j \rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{n} U^* y_j \rangle \Rightarrow U^* y = \sum_{j=1}^{n} U^* y_j.$$

因此$U^*(\mathcal{H})$有限维. □

Problem 15. 证明有限维*Hilbert*空间上的线性泛函表示定理, 并证明有限维*Hilbert*空间上的每个线性泛函都连续.

Proof. 有限维Hilbert空间上的线性泛函表示定理: 设$\mathcal{H}$是有限维希尔伯特空间, φ是$\mathcal{H}$上的有界线性泛函. 则存在唯一的$y \in \mathcal{H}$使得

$$\forall x \in \mathcal{H} \text{ s.t. } \varphi(x) = \langle x, y \rangle.$$

首先我们证明

$$\exists y \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H} \text{ s.t. } \varphi(x) = \langle x, y \rangle.$$

设$e_1, \ldots, e_n$是$\mathcal{H}$的一个规范正交基, 则$\forall x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n \rangle e_n\right) \\ &= \langle x, e_1 \rangle \varphi(e_1) + \cdots + \langle x, e_n \rangle \varphi(e_n) \\ &= \langle x, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)} e_n \rangle. \end{aligned}$$

因此令

$$y = \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)} e_n,$$

即有$\forall x \in \mathcal{H}, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$.

下证唯一性. 假设存在$y_1, y_2 \in \mathcal{H}$使得

$$0 = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle = \langle x, y_1 - y_2 \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

取$x = y_1 - y_2$则得$y_1 - y_2 = 0$, 即$y_1 = y_2$.

φ的连续性:

$$\|\varphi\| = \sup_{\|v\|=1} |\varphi(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\langle v, u \rangle| \leq \sup_{\|v\|=1} \|v\| \|u\| = \|u\|.$$

□

Problem 16. 若U是*Hilbert*空间$\mathcal{H}$上的紧正规算子, 则U可对角化.

Proof. 根据Zorn引理, 存在最大的由U的特征向量构成的规范正交集$\mathcal{E}$. 令$\mathcal{K}$是$\mathcal{E}$线性生成的闭线性空间, 则$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$, 且$U$在$\mathcal{K}$上的限制$U_\mathcal{K} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$可对角化. 下面考虑$U$在$\mathcal{K}^\perp$上的限制$U_{\mathcal{K}^\perp}$.

$U^*(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$: $\forall x \in \mathcal{K}$, 设$Ux = \lambda x$, 则$\lambda U^* x = U^* U x = U U^* x \in \mathcal{K}$, 因此$U^* x \in \mathcal{K}$.

$U_{\mathcal{K}^\perp}(\mathcal{K}^\perp) \subseteq \mathcal{K}^\perp$: $\forall x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{K}^\perp$, 由$U^* x \in \mathcal{K}$得

$$\langle x, Uy \rangle = \langle U^* x, y \rangle = 0 \Rightarrow Uy \in \mathcal{K}^\perp.$$

由U是紧正规算子知U在$\mathcal{K}^\perp$上的限制$U_{\mathcal{K}^\perp} : \mathcal{K}^\perp \to \mathcal{K}^\perp$也是紧正规算子.

由于$U_{\mathcal{K}^\perp}$的特征向量亦为U的特征向量, 再结合$\mathcal{E}$的极大性可知$U_{\mathcal{K}^\perp}$无特征向量, 根据定理2.2.9, $\sigma(U_{\mathcal{K}^\perp}) \neq \emptyset$, 再由定理2.4.15知$\sigma(U_{\mathcal{K}^\perp})$中的非零元为$U_{\mathcal{K}^\perp}$的特征值, 因此$\sigma(U_{\mathcal{K}^\perp}) = \{0\}$. 由$U_{\mathcal{K}^\perp}$正规知$\|U_{\mathcal{K}^\perp}\| = r(U_{\mathcal{K}^\perp}) = 0$，因此$U_{\mathcal{K}^\perp}(\mathcal{K}^\perp) = 0$, 而再由$U_{\mathcal{K}^\perp}$无特征向量得到$\mathcal{K}^\perp = 0$, 因此$\mathcal{K} = \mathcal{H}$, 故$\mathcal{E}$为$\mathcal{H}$的由$U$的特征向量构成的规范正交基, 即得$U$可对角化. □

Problem 17. 证明可分赋范线性空间的对偶空间的单位球关于弱*拓扑是可分的度量空间.

Proof. (Kesavan P149.) Let V be separable and $\{x_n\}$ a countable dense set in V. We may assume, without loss of generality, that $x_n \neq 0$ for all n. For f and $g \in B^*$, define

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|x_n\|} |(f-g)(x_n)|. \tag{*}$$

It is easy to check that $d(\cdot,\cdot)$ is well defined and that it defines a metric on B^*. Let U be a weak* open neighborhood of $f_0 \in B^*$ of the form

$$U = \{f \in B^* | |(f-f_0)(y_i)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq k\},$$

where $\varepsilon > 0$ and $y_i \in V$ for $1 \leq i \leq k$. Since $\{x_n\}$ is dense, there exists x_{n_i} such that $\|y_i - x_{n_i}\| < \varepsilon/4$ for each $1 \leq i \leq k$. Now choose $r > 0$ such that

$$r 2^{n_i} \|x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ for all } 1 \leq i \leq k.$$

Consider the ball $B_d(f_0; r)$ in B^* provided with the metric defined in (*). If f belongs to this ball, i.e., $d(f, f_0) < r$, then for each $1 \leq i \leq k$, we have

$$\begin{aligned}
|(f-f_0)(y_i)| &\leq |(f-f_0)(y_i - x_{n_i})| + |(f-f_0)(x_{n_i})| \\
&\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2^{n_i} \|x_{n_i}\| r \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Thus $B_d(f_0; r) \subset U$ and so every weak* open set is also open in the metric topology.

On the other hand, consider a ball $B_d(f_0; r)$. Consider the weak* open neighborhood of f_0 given by

$$U_k^\varepsilon = \left\{ f \in B^* | \left| (f - f_0)\left(\frac{1}{\|x_i\|} x_i\right) \right| < \varepsilon, 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Choose $\varepsilon < r/2$ and k such that

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} < \frac{r}{4}.$$

If $f \in U_k^\varepsilon$, then

$$\begin{aligned}
d(f, f_0) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n \|x_n\|} |(f-f_0)(x_n)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|x_n\|} |(f-f_0)(x_n)| \\
&< \varepsilon \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{r}{2} + 2 \cdot \frac{r}{4} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Thus, $U_k^\varepsilon \subset B_d(f_0; r)$ which shows that every open set in the metric topology is also weak* open. Thus, the weak* and the metric topologies on B^* are the same. $\square$