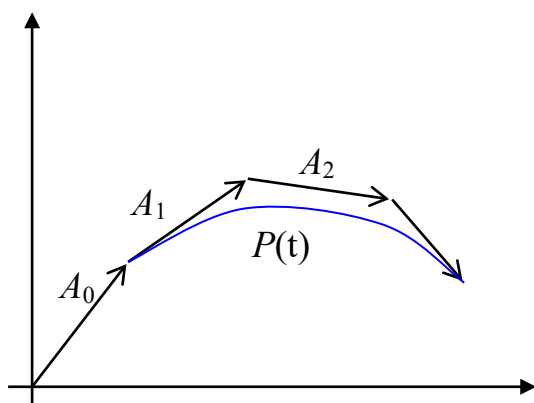


第四章 Bézier 曲线

§1. Bézier 曲线的定义

(a) 原始定义(Bézier)



$$P(t) = \sum_{i=0}^n A_i f_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{其中 } f_{i,n}(t) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{(-t)^i d^{i-1}}{(i-1)! dt^{i-1}} \left[\frac{(1-t)^n - 1}{t} \right] & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{或 } f_{i,n}(t) = \sum_{j=i}^n (-1)^{i+j} C_n^j C_{j-1}^{i-1} t^j, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

速端曲线(Hodograph):

$$H(t) = \frac{1}{n} P'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} A_{i+1} f_{i,n-1}(t)$$

例: $n = 5$

$$f_{0,5}(t) = 1$$

$$f_{1,5}(t) = 5t - 10t^2 + 10t^3 - 5t^4 + 5t^5$$

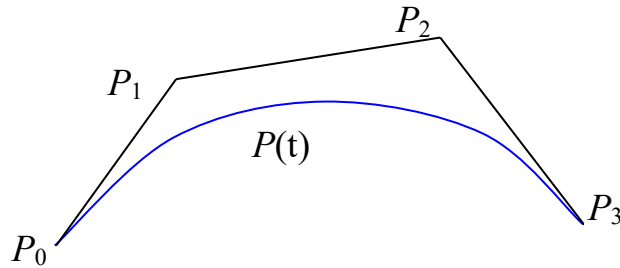
$$f_{2,5}(t) = 10t^2 - 20t^3 + 15t^4 - 4t^5$$

$$f_{3,5}(t) = 10t^3 - 15t^4 + 6t^5$$

$$f_{4,5}(t) = 5t^4 - 4t^5$$

$$f_{5,5}(t) = t^5$$

(b) 一般定义(A. R. Forrest)



$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

其中

P_i , $i = 0, 1, \dots, n$ 为控制顶点,

$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$ 为 Bernstein 基函数

转换关系:

$$A_0 = P_0, \quad A_1 = P_1 - P_0, \quad \dots, \quad A_n = P_n - P_{n-1}$$

$$f_{0,n}(t) = 1, f_{1,n}(t) = f_{0,n}(t) - B_{0,n}(t), f_{2,n}(t) = f_{1,n}(t) - B_{1,n}(t), \dots,$$

$$f_{n,n}(t) = f_{n-1,n}(t) - B_{n-1,n}(t)$$

$$\text{或 } B_{0,n}(t) = f_{0,n}(t) - f_{1,n}(t), \quad B_{1,n}(t) = f_{1,n}(t) - f_{2,n}(t), \quad \dots,$$

$$B_{n-1,n}(t) = f_{n-1,n}(t) - f_{n,n}(t), \quad B_{n,n}(t) = f_{n,n}(t)$$

(c) Bézier 曲线算子表示(常庚哲)

差分算子: $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$

恒等算子: $IP_i = P_i$

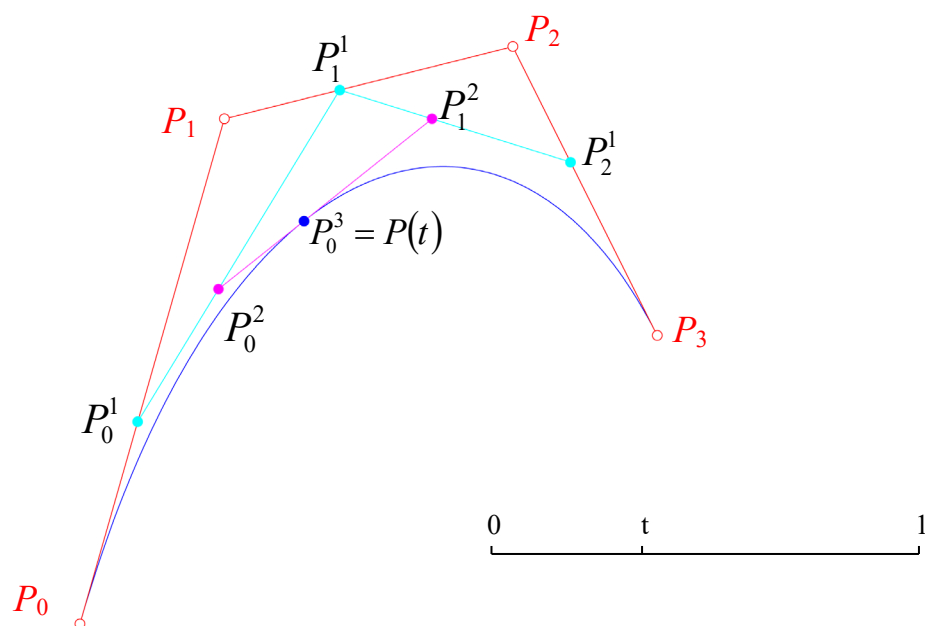
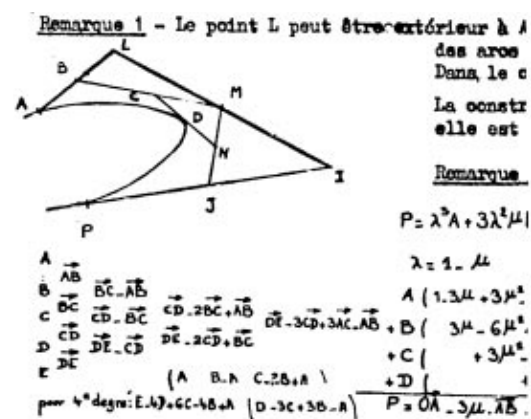
移位算子: $EP_i = P_{i+1}$, $E^r P_i = P_{i+r}$

算子表示曲线: $P(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0$

(d) Bézier 技术的优势

- 曲线形状容易控制(控制多边形)
- 计算稳定(Bernstein 基, 递归求值)

§2. de Casteljau 算法



(a) 几何作图法:

曲线上一点可通过对控制多边形递归割角得到。

$$P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2 \quad P_0^2(t) = (1-t)P_0^1 + tP_1^1$$

$$P_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3 \quad P_1^2(t) = (1-t)P_1^1 + tP_2^1 \quad P_0^3(t) = (1-t)P_0^2 + tP_1^2$$

问题：在以上控制多边形中可以作几条 Bézier 曲线？

(b) 算法： 计算 Bézier 曲线上一点 $P(t)$

Input: $P_i, i = 0, 1, \dots, n, t \in [0, 1]$

for $i = 0, 1, \dots, n$ set $P_i^0 = P_i$

for $r=1$ to n do

 for $i=0$ to $n-r$ do

$$P_i^r = (1-t)P_i^{r-1} + tP_{i+1}^{r-1}$$

 }

}

output P_0^n

(c) 命题

$P(t) = P_0^n(t)$ ，即：递归割角得到的点是 Bézier 曲线上一点。

归纳法证明：

$n=1$ 时， $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = P_0^1(t)$ ，命题成立。

假设 $n-1$ 时命题成立，即有

$n-1$ 边形 $P_0P_1\dots P_{n-1}$ 递推 $n-1$ 次后生成 $P_0^{n-1}(t)$

$n-1$ 边形 $P_1P_2\dots P_n$ 递推 $n-1$ 次后生成 $P_1^{n-1}(t)$

即假设 $P_0^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{i,n-1}(t)$

$$P_1^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_{i+1} B_{i,n-1}(t)$$

依据割角定义

$$\begin{aligned} P_0^n(t) &= (1-t)P_0^{n-1}(t) + tP_1^{n-1}(t) \\ &= (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{i,n-1}(t) + t\sum_{i=0}^{n-1} P_{i+1} B_{i,n-1}(t) \\ &= (1-t)P_0 B_{0,n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} [(1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)]P_i + tB_{n-1,n-1}(t)P_n \\ &= \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = P(t) \end{aligned}$$

命题得证。

§3. Bernstein 多项式

● 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)逼近定理

每一个闭区间上的连续函数(导数)可以用多项式曲线(导数)来实现任意给定误差精度的逼近。

定理： 设 $f = f(x)$, $x \in [0,1]$ 有直到 k 阶连续导数, 令

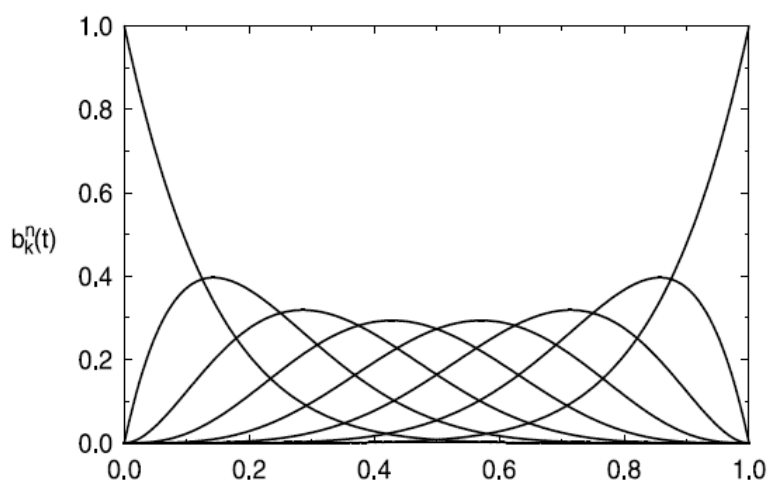
$$B(f, x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_{i,n}(x),$$

其中 $B_{i,n}(x) = C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$ 为 Bernstein 基函数, 则:

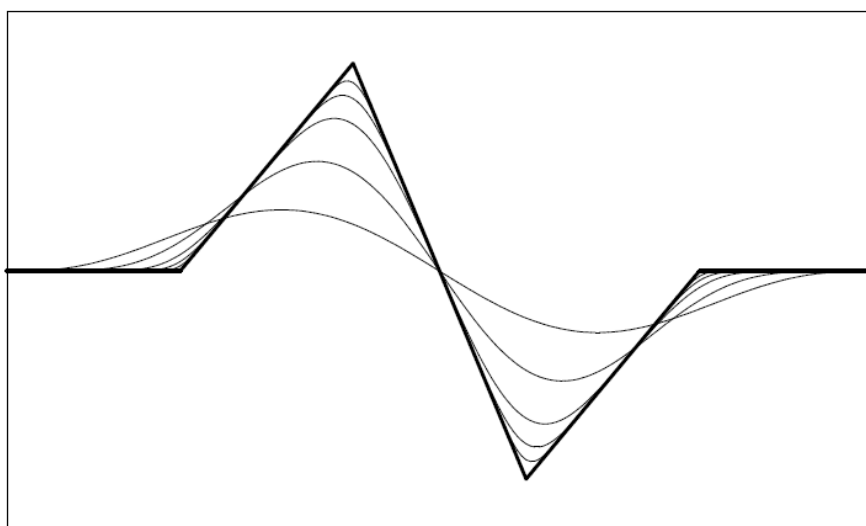
$$B^{(k)}(f, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{一致}} f^{(k)}(x)$$

例: 若 $f(x) = x^2$, 则有 $B(f, x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_{i,n}(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$

评：该定理理论意义大，但实际达到高精度需要高次数曲线。



Bernstein 基函数



上图逼近多项式(自下而上)次数分别为 $n=10, 30, 100, 300, 1000$

注：将 Bézier 曲线的控制多边形记为分段线性曲线 $F(t)$ 且满足

$F\left(\frac{i}{n}\right) = P_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$, 则 Bézier 曲线 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$ 是对控制多边形

形的魏尔斯特拉斯逼近。

● n 次 Bernstein 基函数构成 n 次多项式空间的基

一个等式：

$$\frac{B_{i,n}(t)}{(1-t)^n} = \frac{C_n^i t^i (1-t)^{n-i}}{(1-t)^n} = C_n^i \frac{t^i}{(1-t)^i}$$

令 $u = \frac{t}{1-t}$ ，可以得到：

$$\frac{B_{i,n}(t)}{(1-t)^n} = C_n^i u^i \equiv M_{i,n}(u)$$

命题： n 次 Bernstein 基函数线性无关。

证明： 假设存在常数 c_i ， $i = 0, 1, \dots, n$ ， 使得

$$\sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(t) \equiv 0$$

现在证明 $c_i = 0$ ， $i = 0, 1, \dots, n$ 。

将上式除以 $(1-t)^n$ ， 可得

$$\sum_{i=0}^n c_i \frac{B_{i,n}(t)}{(1-t)^n} = \sum_{i=0}^n c_i M_{i,n}(u) \equiv 0。$$

因为单项式 $M_{0,n}(u)$ ， \dots ， $M_{n,n}(u)$ 线性无关，

所以有 $c_i = 0$ ， $i = 0, 1, \dots, n$ 。 证毕。

思考题：

1. 令 $M_{i,n}(t) = C_n^i t^i$ ， $i = 0, 1, \dots, n$ 。

a. 证明这些函数满足递推式： $M_{i,n}(t) = M_{i,n-1}(t) + tM_{i-1,n-1}(t)$

b. 设计多项式 $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i M_{i,n}(t)$ 求值的类 de Casteljau 算法。

2. 证明 Bernstein 多项式 $B_{i,n}(t)$ 在 $t = \frac{i}{n}$ 处取到最大值， 并计算该最大值。

3. 证明等式： $\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_{i,n}(t) = t$

● 函数的 Bernstein 多项式逼近

$$B_n(f, x) = \sum_{i=0}^n f_i B_{i,n}(x) \quad x \in [0, 1], \text{ 其中 } f_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$B_n(f, x) = \sum_{i=0}^n f_i B_{i,n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad x \in [a, b], \text{ 其中 } f_i = f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)$$

算子表示:

$$B_n(f, x) = [(1-x)I + xE]^n f_0$$

性质:

$$(1) \quad B'_n(f, x) = n(E-I)[(1-x)I + xE]^{n-1} f_0 = n \sum_{i=0}^{n-1} (f_{i+1} - f_i) B_{i,n-1}(x)$$

$$B_n^{(k)}(f, x) = \frac{n!}{(n-k)!} (E-I)^k [(1-x)I + xE]^{n-k} f_0$$

$$(2) \quad B_n(f, 0) = f_0, \quad B_n(f, 1) = f_1$$

$$B'_n(f, 0) = n(f_1 - f_0), \quad B'_n(f, 1) = n(f_n - f_{n-1})$$

(3) 保型性质:

若 $f(x)$ 为凸函数, 则 $B_n(f, x)$ 也是凸函数。

(4) 线性再生性:

若 $f(x)$ 是线性函数, 则 $B_n(f, x) \equiv f(x)$

(5) 磨光性质:

$$\text{记 } B_n(f, 0, x) = B_n(f, x)$$

$$B_n(f, k, x) = B_n(B_n(f, k-1, x), x),$$

$$\text{则有 } \lim_{k \rightarrow \infty} B_n(f, k, x) = (1-x)f_0 + xf_n$$

● Bernstein 多项式的性质

1. 正性(positive)

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$$

2. 权性(Partition of unity)

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \equiv 1$$

证明：由恒等式 $1 = (t + 1 - t)^n$ ，二项式展开，即得上式。

3. 对称性(symmetry)

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

4. 递推式(recursion)

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$$

5. 导函数(derivative)

$$B'_{i,n}(t) = n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)]$$

6. 最大值(maximum)

当 $t = \frac{i}{n}$ 时， $B_{i,n}(t)$ 达到最大值。

7. 升阶公式(degree elevation)

$$B_{i,n}(t) = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) B_{i,n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t)$$

8. 积分(integral)

$$\int_0^1 B_{i,n}(t) dt = \frac{1}{n+1}$$

§4. Bézier 曲线的基本性质

n 次 Bézier 曲线：

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

其中 P_i , $i = 0, 1, \dots, n$ 为控制顶点。

基本性质:

(1) 仿射不变性

$$AP(t) = \sum_{i=0}^n (AP_i)B_{i,n}(t), \text{ 其中 } A \text{ 为仿射变换矩阵。}$$

(2) 线性参数变换的无关性

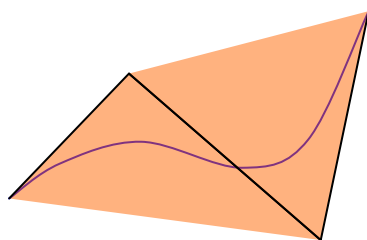
$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right), \quad a \leq u \leq b$$

(3) 凸包性质

Bézier 曲线位于其特征多边形的凸包之内。

凸包: 包含一个(点)集合的最小凸集。

特别地, 一个闭凸多边形内部点可以表示成边界点的凸组合形式。即: $Q = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$, 其中 $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ 。



Bézier 曲线及其控制顶点的凸包。

(4) 端点性质

$$P(0) = P_0, \quad P(1) = P_n,$$

$$P'(0) = n(P_1 - P_0), \quad P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

(5) 对称性

$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$ 与 $\bar{P}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{i,n}(t)$ 表示同一条曲线。

(6) 线性再生性

若 $\{P_i\}_{i=0}^n$ 位于同一条直线上, 则 $P(t)$ 表示一条直线。

(7) 速端曲线与导数曲线

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta P_i B_{i,n-1}(t), \quad \text{其中 } \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

$$P^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k P_i B_{i,n-k}(t)$$

$$P^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k P_0, \quad P^{(k)}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k P_{n-k}$$

§5. Bézier 曲线的离散逼近与几何性质

● 升阶公式及其应用

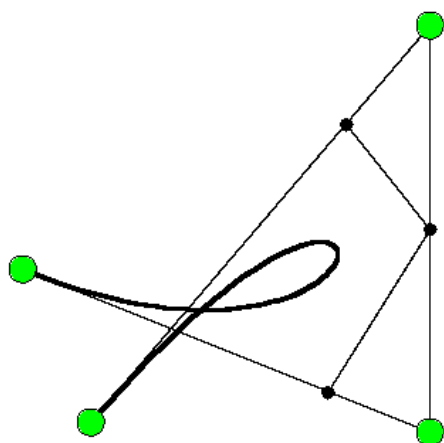
由 $B_{i,n}(t) = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) B_{i,n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t)$, 可得

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \left[\frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i \right] B_{i,n+1}(t), \quad \text{其中 } P_{-1} = P_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

升 r 阶公式

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) \sum_{j=0}^r B_{j,r}(t) = \sum_{i=0}^{n+r} P_i^{(r)} B_{i,n+r}(t),$$

$$\text{其中 } P_i^{(r)} = \sum_{j=0}^n P_j \frac{C_n^j C_r^{i-j}}{C_{n+r}^i}$$



升阶过程是割角过程。

● 收敛性定理

将升阶 r 次后得到的控制多边形 $\{P_i^{(r)}\}_{i=0}^{n+r}$ 表示成参数形式

$$Q_{n+r}(t) = (n+r) \left[\left(\frac{i+1}{n+r} - t \right) P_i^{(r)} + \left(t - \frac{i}{n+r} \right) P_{i+1}^{(r)} \right], \quad t \in \left[\frac{i}{n+r}, \frac{i+1}{n+r} \right]$$

则有: $\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m(t) = P(t)$, 其中 $m = n+r$

证明: $Q_m(t)$ 是 $[0,1]$ 上的分段线性曲线, $Q_m\left(\frac{i}{m}\right)$ 是 $Q_m(t)$ 上第 i 个顶点。

同时, $Q_m(t)$ 是 m 次 Bézier 曲线的控制曲线, $Q_m\left(\frac{i}{m}\right)$ 是其控制顶点。

设 $B_m(F, t) = \sum_{i=0}^m F\left(\frac{i}{m}\right) B_{i,m}(t)$, 即 $F(t)$ 的 m 次 Bernstein 逼近。则有

$$B_m(Q_m, t) = \sum_{i=0}^m Q_m\left(\frac{i}{m}\right) B_{i,m}(t) = P(t)。$$

定义 $Q(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_m(t)$ 。为说明 $Q(t) = P(t)$, 须估计 $Q(t)$ 与 $P(t)$ 之间的差。

$$\begin{aligned} P(t) - Q(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} B_m(P - Q, t) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} [B_m(P, t) - B_m(Q, t)] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} [B_m(P, t) - B_m(Q_m, t) + B_m(Q_m, t) - B_m(Q, t)] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} [B_m(P, t) - B_m(Q_m, t)] + \lim_{m \rightarrow \infty} [B_m(Q_m, t) - B_m(Q, t)] \end{aligned}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} [B_m(P, t) - P(t)] + \lim_{m \rightarrow \infty} B_m(Q_m - Q, t)$$

根据 Weierstrass 逼近定理知, $\lim_{m \rightarrow \infty} [B_m(P, t) - P(t)] = 0$, 且一致收敛。

由于 $Q(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_m(t)$, 对于任意 $\varepsilon > 0$ 和足够大 m 有 $|Q(t) - Q_m(t)| < \varepsilon$,

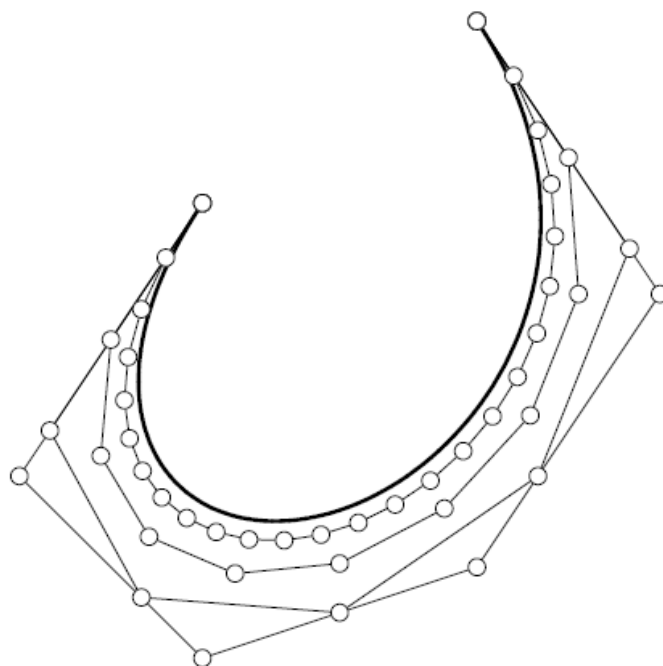
从而,

$$|B_m(Q_m - Q, t)| \leq \sum_{i=0}^m \left| Q_m\left(\frac{i}{m}\right) - Q\left(\frac{i}{m}\right) \right| B_{i,m}(t) < \varepsilon$$

于是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_m(Q_m - Q, t) = 0$$

因此, $P(t) - Q(t) = 0$, 且 $\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m(t) = P(t)$ 是一致收敛。



● Bézier 曲线的降阶逼近

由 Bézier 曲线升阶公式

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \left[\frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) P_i \right] B_{i,n+1}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{P}_i B_{i,n+1}(t)$$

得到升阶前后控制顶点的关系矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n+1} & \frac{n-1}{n+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n+2) \times (n+1)} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_0 \\ \bar{P}_1 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \\ \bar{P}_{n+1} \end{pmatrix}$$

简记成 $MP = \bar{P}$ ，两边乘以 M 转置矩阵，有

$$M^T MP = M^T \bar{P}$$

则得降阶公式

$$P = (M^T M)^{-1} M^T \bar{P}$$

思考题：

1. 证明 Bézier 曲线的弧长总是小于或等于其控制多边形的边长。
2. 设 $\{P_i\}_{i=0}^n$ 是 n 次 Bézier 曲线的控制顶点， $\{Q_i\}_{i=0}^{n+1}$ 是相应的升阶 Bézier 曲线的控制顶点，并设 $s_{\max}(P)$ 是原 Bézier 曲线控制多边形的最长边， $s_{\max}(Q)$ 是升阶后 Bézier 曲线的最长边。则有：
 - a. $s_{\max}(Q) \leq \frac{n}{n+1} s_{\max}(P)$
 - b. 对 Bézier 曲线进行无限次升阶，则控制多边形最长边的边长趋于 0.

● 平面 Bézier 曲线的保型

(a) 凸曲线：平面凸闭集的边界或部分边界。

(b) 定理：平面 Bézier 曲线具有保凸性。即：若控制多边形为凸，则 Bézier 曲线也是凸的。

证明：由于 Bézier 曲线升阶过程是控制多边形割角过程，

一个凸多边形升阶后得到的多边形仍然凸。

记 $A^{(r)}$ 为包含 $\{P_i^{(r)}\}_{i=0}^{n+r}$ 的最小凸集，边界为 $P^{(r)}$ 。

$P^{(0)}$ 凸 $\rightarrow P^{(r)}$ 凸

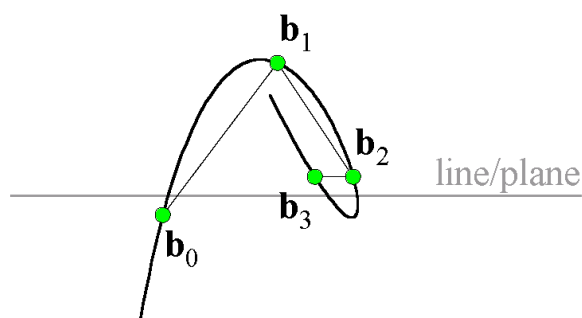
$$A^{(r+1)} \subseteq A^{(r)}, \quad A^{(r)} = \bigcap_{i=0}^r A^{(i)}$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时，可得 $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} A^{(i)}$ 为有界闭凸集。

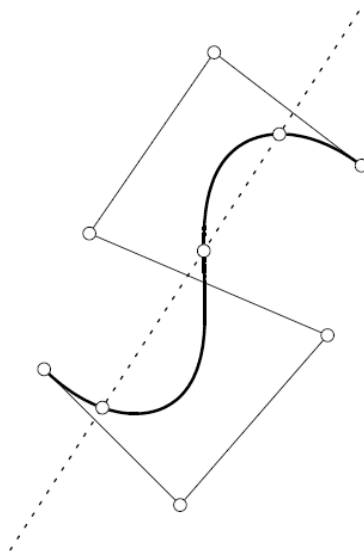
根据升阶原理， $P(t)$ 是 A (部分) 边界，所以 $P(t)$ 是凸曲线。

注：此定理逆命题一般不成立。Bézier 曲线凸，其控制多边形不一定凸，但可通过升阶得到凸控制多边形。

(c) 变差缩减性质 (Variation diminishing)



连接两点的直线与一直线/平面的交点至多是一个，而其它曲线可能不止一个。



- 分段线性插值曲线是变差缩减的。
- Bézier 曲线升阶一次得到的控制多边形是对升阶前的控制

多边形的采样与分段线性插值，所以升阶后的多边形与直线/平面的交点个数不大于升阶前交点个数。

- Bézier 曲线由升阶得到，故 Bézier 曲线与直线/平面的交点个数不大于原控制多边形与直线/平面交点个数。

§6. Bézier 曲线的分割算法

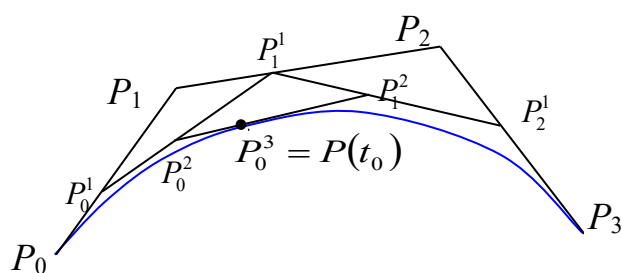
分割定理： n 次 Bézier 曲线 $P(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0$, $0 \leq t \leq 1$,

设 $t_0 \in (0,1)$, 则有

$$P(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n P_i(t_0) B_{i,n}\left(\frac{t}{t_0}\right) & t \in [0, t_0] \\ \sum_{i=0}^n P_i^{n-i}(t_0) B_{i,n}\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right) & t \in [t_0, 1] \end{cases}$$

其中 $P_i^r(t_0) = (1-t_0)P_i^{r-1}(t_0) + t_0 P_{i+1}^{r-1}(t_0)$,

$P_i^0(t_0) = P_i$, $i = 0, 1, \dots, n$



证明： $P(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0$

当 $t \in [0, t_0]$, 令 $\frac{t}{t_0} = u$, 则 $t = t_0 u$, 代入上式有

$$\begin{aligned} & [(1-t_0 u)I + t_0 u E]^n P_0 \\ = & [(1-u + u - t_0 u)I + t_0 u E]^n P_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(1-u)I + u[(1-t_0)I + t_0E]\}^n P_0 \\
&= \sum_{i=0}^n C_n^i u^i [(1-t_0)I + t_0E]^i (1-u)^{n-i} P_0 \\
&= \sum_{i=0}^n [(1-t_0)I + t_0E]^i P_0 B_{i,n}(u)
\end{aligned}$$

$$\text{记 } P_0^i(t_0) = [(1-t_0)I + t_0E]^i P_0 = \sum_{j=0}^i P_j B_{j,i}(t_0)$$

$$\text{所以, } P(t) = \sum_{i=0}^n P_0^i(t_0) B_{i,n}\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right), \quad t \in [t_0, 1].$$

$$\text{当 } t \in [t_0, 1], \text{ 令 } v = \frac{t-t_0}{1-t_0}, \text{ 则 } t = t_0 + v(1-t_0),$$

代入 $P(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0$ 中, 有

$$\begin{aligned}
&[(1-t)I + tE]^n P_0 \\
&= \{[(1-t_0)I + t_0E](1-v) + vE\}^n P_0 \\
&= \sum_{i=0}^n E^i [(1-t_0)I + t_0E]^{n-i} P_0 B_{i,n}(v)
\end{aligned}$$

$$\text{而 } [(1-t_0)I + t_0E]^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} E^j B_{j,n-i}(t_0)$$

$$E^i [(1-t_0)I + t_0E]^{n-i} P_0 = \sum_{j=0}^{n-i} E^{i+j} P_0 B_{j,n-i}(t_0) = P_i^{n-i}(t_0)$$

$$\text{所以有 } P(t) = \sum_{i=0}^n P_i^{n-i}(t_0) B_{i,n}\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right), \quad t \in [t_0, 1].$$

Procedure. CurveSplit(P,Q,R,n,t₀)

P[n+1], Q[n+1], R[n+1]分别表示原曲线和分割后两段曲线的控制多边形。

Step 1: for (i=0; i<=n; i++) R[i] = P[i]; // 赋初值

Step 2: for (r=0; r<n; r++) {

```

Q[r] = R[0];
for (i=0; i<n-r; i++) {
    R[i] = (1-t0)R[i] + t0R[i+1];
}
}
Q[n] = R[0]; // end

```

下面公式给出 **Bézier** 曲线及其控制多边形的误差估计，从而可在给定误差范围内计算得到细分层数。

汪氏公式：假设 $P(t)$ 是任一区间 $[a, b]$ 上二阶可导的参数曲线，并且假设 $L(t) = \frac{b-t}{b-a}P(a) + \frac{t-a}{b-a}P(b)$ 是一条通过点 $P(a)$ 和 $P(b)$ 的参数直线。那么，

$$\max |P(t) - L(t)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max |P''(t)|$$

证明：记 $E(t) = P(t) - L(t)$ 。由构造

$$E(a) = E(b) = 0 \Rightarrow E(a) \cdot E'(a) = E(b) \cdot E'(b) = 0$$

对于实值函数 $E(t) \cdot E'(t)$ 应用罗尔定理，存在一个参数 $\tau \in [a, b]$ ，使得 $E(\tau) \cdot E'(\tau)$ 取得最大值，即 $(E(\tau) \cdot E'(\tau))' = E(\tau) \cdot E''(\tau) = 0$ 。根据带余项的 Taylor 公式：

$$E(t) = E(\tau) + E'(\tau)(t - \tau) + \int_{\tau}^t (t - x) E''(x) dx$$

在等式两边点乘 $E(\tau)$ 并由 $E(\tau) \cdot E'(\tau) = 0$ ，得到：

$$E(\tau) \cdot E(t) = E(\tau) \cdot E(\tau) + E(\tau) \cdot \int_{\tau}^t (t - x) E''(x) dx$$

不失一般性，假设 $a \leq \tau \leq (a+b)/2$ (在其余区间类似证明)。

当 $t = a$ 时， $E(a) = 0$ 。因为 $L(x)$ 是线性的，所以 $E''(x) = P''(x)$ ，得到：

$$-E(\tau) \leq E(\tau) = E(\tau) \int_{\tau}^a (a-x) P''(x) dx$$

由 $|a \square b| \leq |a| |b|$ ，得到

$$|E(\tau)|^2 \leq |E(\tau)| \left| \int_{\tau}^a (a-x) P''(x) dx \right|$$

或者 $E(\tau) = 0$ ，或者由 $\tau \leq (a+b)/2$ ，得到

$$\begin{aligned} |E(\tau)| &\leq \left| \int_{\tau}^a (a-x) P''(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\tau}^a (a-x) |P''(x)| dx \\ &\leq \max |P''(x)| \int_{\tau}^a (a-x) dx \\ &\leq \max |P''(x)| \frac{(\tau-a)^2}{2} \\ &\leq \max |P''(x)| \frac{(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

定理证毕。

定理：已知 Bézier 曲线 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$ 。对于任意给定 $\varepsilon > 0$ ，定义：

$$m = \max_{0 \leq k \leq n-2} |P_{k+2} - 2P_{k+1} + P_k|$$

$$l \geq \log_4 \left(\frac{n(n-1)m}{8\varepsilon} \right)$$

设 $C(t)$ 是 $P(t)$ 经 l 阶中点分割后得到的分段 Bézier 曲线， $L(t)$ 是连接分点的折线，则 $\text{dist}(C(t), L(t)) \leq \varepsilon$ 。

§7. Bézier 曲线的分形特性(the fractal nature of Bézier curves)

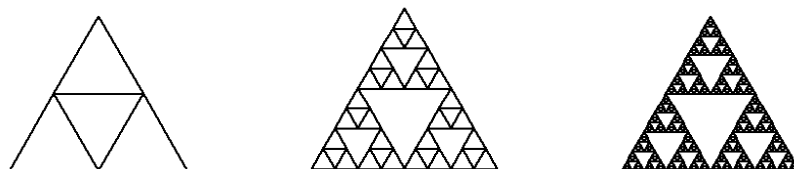
● 迭代函数系统(IFS)

记 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ 为由一组压缩映射(contractive map)构成的迭代函数系统，该系统的不动点构成分形。

例：Koch 曲线



例：The Sierpinski gasket



分形生成算法：

$$A_0 = B ;$$

$$A_1 = W(A_0) = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup \dots \cup w_l(A_0) ;$$

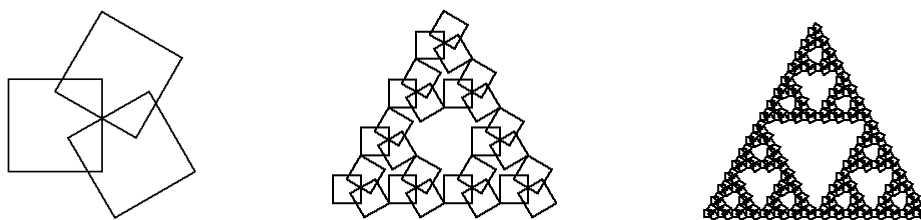
.....

$$A_{n+1} = W(A_n) = w_1(A_n) \cup w_2(A_n) \cup \dots \cup w_l(A_n) ;$$

记 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, 有 $A = W(A)$ 。

特别地， B 须为紧集，吸引子 A 与初始集 B 无关。

例：The Sierpinski gasket



● Bézier 曲线的迭代生成(分形特性)

由 Bézier 曲线分割定理， n 次 Bézier 曲线 $P(t)$ 可以分割为两段同次数 Bézier 曲线 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 。

$$\text{记 } L = \begin{pmatrix} B_{0,0}(1/2) & 0 & \cdots & 0 \\ B_{0,1}(1/2) & B_{1,1}(1/2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,n}(1/2) & B_{1,n}(1/2) & \cdots & B_{n,n}(1/2) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} B_{0,n}(1/2) & B_{1,n}(1/2) & \cdots & B_{n,n}(1/2) \\ 0 & B_{0,n-1}(1/2) & \cdots & B_{n-1,n-1}(1/2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,0}(1/2) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

令 $P = (P_0 \ P_1 \ \cdots \ P_n)^T$ ，则 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 的控制顶点可由下列矩阵计算得到： $LP = Q = (Q_0 \ Q_1 \ \cdots \ Q_n)^T$ ， $MP = R = (R_0 \ R_1 \ \cdots \ R_n)^T$

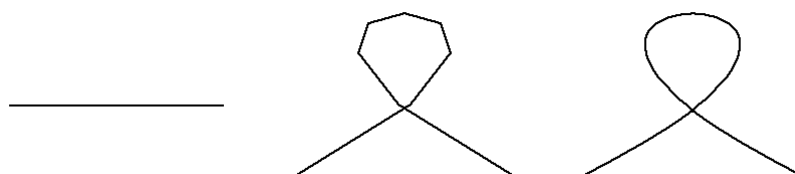
构造压缩映射 $L_p = P^{-1}LP$ ， $M_p = P^{-1}MP$ ，则 $\{L_p, M_p\}$ 构成迭代函数系统。

为保证矩阵 P 的可逆性，可将点的坐标提升到高维空间，比如：

生成二次 Bézier 曲线， $P = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$

生成三次 Bézier 曲线， $P = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

相应地，最后变换得到的点也要投影到原平面上。



例：用 IFS 生成一条三次 Bézier 曲线。

§8. Bézier 曲线的动力学性质

已知 Bézier 曲线 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$, 其中 $P_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T$, $i = 0, 1, \dots, n$ 。

将曲线提升至 $n+1$ 维空间, 得到曲线 $X(t) = \sum_{i=0}^n X_i B_{i,n}(t)$, 令矩阵

$$M_X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-3} & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-3} & y_{n-2} & y_{n-1} & y_n \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{n-3} & z_{n-2} & z_{n-1} & z_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} B_{0,n}(t) \\ B_{1,n}(t) \\ B_{2,n}(t) \\ B_{3,n}(t) \\ \vdots \\ B_{n-1,n}(t) \\ B_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

则曲线 $X(t) = \sum_{i=0}^n X_i B_{i,n}(t)$ 可以表示成

$$X(t) = M_X \Phi(t)$$

示成将矩阵 M_X 表示成分块矩阵

$$M_X = \begin{bmatrix} P_I & P_{II} \\ I_{n-2} & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则其逆矩阵为 } M_X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-2} \\ P_{II}^{-1} & -P_{II}^{-1} P_I \end{bmatrix}。$$

易知 $\Phi'(t) = C_n \Phi(t)$, 其中

$$C_n = \begin{bmatrix} -n & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -n+2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & -n+4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix}$$

曲线 $X(t) = \sum_{i=0}^n X_i B_{i,n}(t)$ 满足如下线性微分系统

$$\begin{cases} X(t) = AX(t), & t \in [0, 1] \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

其中 $A = M_X C_n M_X^{-1}$ 。

注：上述结论不限于多项式曲线，只要 $\Phi(t)$ 张成的线性空间对微

分运算封闭，则以 $\Phi(t)$ 为基函数构造得到的曲线一定是线性微分系统的解。

基于微分系统表示，得到曲线 $X(t)$ 又可写成 $X(t) = e^{At} X_0$ ，进一步可得 $X(t + \Delta t) = e^{A\Delta t} X(t)$ ，通过预计算矩阵

$$M_A = e^{A\Delta t} = I + A\Delta t + \frac{A^2(\Delta t)^2}{2!} + \dots + \frac{A^n(\Delta t)^n}{n!},$$

则可由初值 X_0 出发依次求出曲线上等步长参数对应的点

$$X_{i+1} = M_A X_i, \quad i = 0, 1, \dots$$

§9. 各种表示到 Bézier 表示的转化

(a) 幂级数到 Bézier 表示的转化

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i t^i = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0, 1]$$

已知 P_i , $i = 0, 1, \dots, n$, 求 \mathbf{b}_i , $i = 0, 1, \dots, n$

● 算法 1 (Horner 算法)

$$R_0(t) = P_n$$

$$R_k(t) = tR_{k-1}(t) + P_{n-k}, \quad k = 1, \dots, n$$

$$R_n(t) = P(t)$$

$$\text{设 } R_l(t) = \sum_{i=0}^l R_i^l B_{i,l}(t)$$

$$\text{则 } R_k(t) = tR_{k-1}(t) + P_{n-k}$$

$$= t \sum_{i=0}^{k-1} R_i^{k-1} B_{i,k-1}(t) + P_{n-k}$$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{i}{k} R_{i-1}^{k-1} B_{i,k}(t) + \sum_{i=0}^k P_{n-k} B_{i,k}(t)$$

$$= \sum_{i=0}^k \left[P_{n-k} + \frac{i}{k} R_{i-1}^{k-1} \right] B_{i,k}(t)$$

递推式: $R_i^k = P_{n-k} + \frac{i}{k} R_{i-1}^{k-1}$, $i = 0, 1, \dots, k$, $k = 1, \dots, n$, $R_0 = P_n$

● 算法 2

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i t^i, \quad t \in [0, 1]$$

令 $Q_i = \frac{1}{C_n^i} P_i$, 有

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n C_n^i Q_i t^i \\ &= (I + Et)^n Q_0 \\ &= [(I + E)t + I(1-t)]^n Q_0 \\ &= \sum_{i=0}^n (I + E)^i Q_0 B_{i,n}(t) \end{aligned}$$

取 $\mathbf{b}_i = (I + E)^i Q_0$, $i = 0, 1, \dots, n$

有 $P(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_{i,n}(t)$

(b) Lagrange 插值转换

$$L^n(t) = \sum_{i=0}^n Q_i L_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_{i,n}(t),$$

其中 $L_i^n(t) = \frac{(t-t_0) \cdots (t-t_{i-1})(t-t_{i+1}) \cdots (t-t_n)}{(t_i-t_0) \cdots (t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1}) \cdots (t_i-t_n)}$

记 $\omega_n(t) = \frac{(t-a_1)(t-a_2) \cdots (t-a_n)}{(b-a_1)(b-a_2) \cdots (b-a_n)}$, 则 $\omega_n(t) = \omega_{n-1}(t) \frac{t-a_n}{b-a_n}$

设 $\omega_n(t) = \sum_{i=0}^n X_i^n B_{i,n}(t)$

$$\omega_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i^{n-1} B_{i,n-1}(t)$$

$$\begin{aligned}
\omega_n(t) &= \omega_{n-1}(t) \frac{t - a_n}{b - a_n} = \omega_{n-1}(t) \frac{(1 - a_n)t - a_n(1 - t)}{b - a_n} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1 - a_n}{b - a_n} X_i^{n-1} B_{i,n-1}(t) t - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_n}{b - a_n} X_i^{n-1} B_{i,n-1}(t) (1 - t) \\
&= \sum_{i=0}^n \left(\frac{1 - a_n}{b - a_n} \frac{i}{n} X_i^{n-1} - \frac{a_n}{b - a_n} \frac{n - i}{n} X_i^{n-1} \right) B_{i,n}(t)
\end{aligned}$$

得到递推式

$$X_i^n = \frac{1 - a_n}{b - a_n} \frac{i}{n} X_i^{n-1} - \frac{a_n}{b - a_n} \frac{n - i}{n} X_i^{n-1}$$

(c) 函数多项式曲线的矢量表示

$$y(x) = \sum_{i=0}^n y_i B_{i,n}(x), \quad x = \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_{i,n}(x) \quad // \text{线性函数再生性}$$

矢量表示

$$\begin{aligned}
P(t) &= (t, y(t)) \\
&= \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}, y_i \right) B_{i,n}(t)
\end{aligned}$$

笛卡尔符号定理：设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x)$ (实系数)，若 $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ 的变号数为 p ，则 $f(x) = 0$ 的正实根数等于 p (或比 p 少一个偶数)。

思考题：

1. 利用 Bézier 曲线分割算法与凸包性质设计两条 Bézier 曲线求交算法。
2. 设计一个算法，求 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 在 $[0, 1]$ 中的全部根。
3. 参考下面文章实现 Bézier 曲线的动力学生成算法。

Yang Xunnian and Hong Jialin (2019), Dynamic evaluation of exponential polynomial curves and surfaces via basis transformation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(5):

§10. 开花(blossom)

● de Casteljau 算法的推广

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0 & & & & & & \\
 P_1 & P_0^1(t_1) & & & & & \\
 P_2 & P_1^1(t_1) & P_0^2(t_1, t_2) & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
 P_n & P_{n-1}^1(t_1) & P_{n-2}^2(t_1, t_2) & \cdots & P_0^n(t_1, t_2, \dots, t_n) & &
 \end{array}$$

$P_0^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是变量 t_1, t_2, \dots, t_n 的函数, 记 $P_0^n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbf{b}(t_1, t_2, \dots, t_n)$

当 $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$ 时 $\mathbf{b}(t_1, t_2, \dots, t_n) = P(t)$ 是 Bézier 曲线上的点。

$P_i = \mathbf{b}(0^{\langle n-i \rangle}, 1^{\langle i \rangle})$, 其中 $t^{\langle i \rangle}$ 表示 i 重 t 。

当 $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ 时 $\mathbf{b}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 表示一区域。

● 开花的定义

n 次多项式 $P(t)$ 的开花 $\mathbf{b}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是具有下面三个性质的多变量多项式:

1. 对称性

$$\mathbf{b}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbf{b}(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}),$$

其中 σ 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个任意置换。

2. 多仿射性

$$\mathbf{b}(t_1, \dots, (1-\alpha)u_k + \alpha v_k, \dots, t_n) = (1-\alpha)\mathbf{b}(t_1, \dots, u_k, \dots, t_n) + \alpha\mathbf{b}(t_1, \dots, v_k, \dots, t_n)$$

3. 对角线性质

$$\mathbf{b}(t, t, \dots, t) = P(t)$$

例1. 考虑 $1, t, t^2, t^3$ 作为三次多项式, 这些单项式的开花如下:

$$P(t) = 1 \rightarrow \mathbf{b}(t_1, t_2, t_3) = 1$$

$$P(t)=t \rightarrow \mathbf{b}(t_1, t_2, t_3)=\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$$

$$P(t)=t^2 \rightarrow \mathbf{b}(t_1, t_2, t_3)=\frac{t_1 t_2+t_2 t_3+t_3 t_1}{3}$$

$$P(t)=t^3 \rightarrow \mathbf{b}(t_1, t_2, t_3)=t_1 t_2 t_3$$

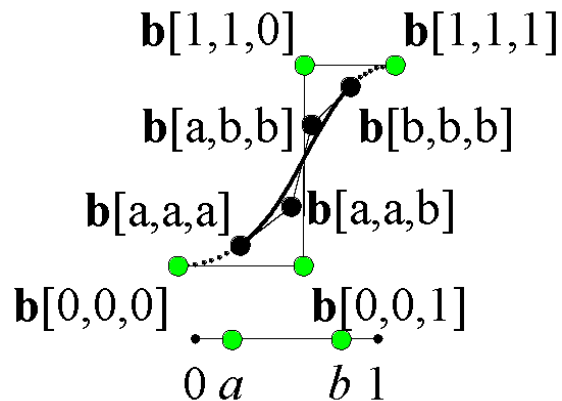
例2. Bézier 曲线的开花

$$P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$$

$$\mathbf{b}(t_1, t_2, \dots, t_n)=[(1-t_1)I+t_1E][(1-t_2)I+t_2E]\cdots[(1-t_n)I+t_nE]P_0$$

开花将一元函数的高次多项式转化成多元函数的线性表示。

● 开花与分割算法



$n=3$ 时控制顶点的计算。

计算曲线 $P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$ 当 $t \in [a, b]$ 时 Bézier 表示的控制顶点。

当 $t \in [a, b]$, 记 $t = a + (b-a)u$, 则 $u \in [0, 1]$

有 $(1-t)I+tE=[1-a-(b-a)u]I+[a+(b-a)u]E$

$$=(1-a)I+(1-b)uI-(1-a)uI+a(1-u)E+buE$$

$$=[(1-a)I+aE](1-u)+[(1-b)I+bE]u$$

代入 $P(t)=[(1-t)I+tE]^n P_0$, 可得

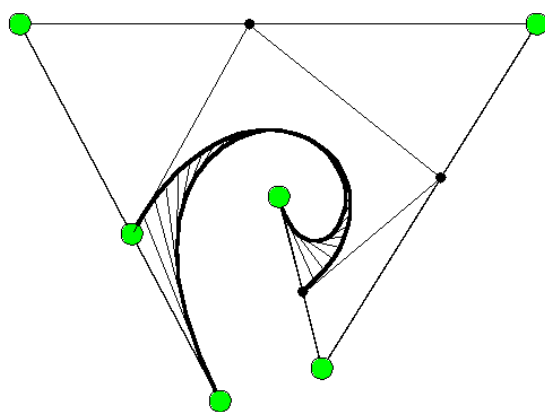
$$P(t)=\{[(1-a)I+aE](1-u)+[(1-b)I+bE]u\}^n P_0$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n C_n^i [(1-b)I + bE]^i u^i [(1-a)I + aE]^{n-i} (1-u)^{n-i} P_0 \\
&= \sum_{i=0}^n [(1-b)I + bE]^i [(1-a)I + aE]^{n-i} P_0 B_{i,n}(u) \\
&= \sum_{i=0}^n Q_i B_{i,n}(u)
\end{aligned}$$

控制顶点

$$Q_i = [(1-b)I + bE]^i [(1-a)I + aE]^{n-i} P_0 = \mathbf{b}(a^{\langle n-i \rangle}, b^{\langle i \rangle})$$

● 极形式(polar)



n 次 Bézier 曲线 $P(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0 = \mathbf{b}(t^{\langle n \rangle})$

对于参数 t_1 进行一次 de Casteljau 割角得到割点 $P_0^1(t_1), \dots, P_{n-1}^1(t_1)$

以 $P_0^1(t_1), \dots, P_{n-1}^1(t_1)$ 为控制多边形构造 $n-1$ 次 Bézier 曲线

$$P_1(t) = \mathbf{b}(t_1, t^{\langle n-1 \rangle})$$

有

$$\begin{aligned}
P_1(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)P_i + t_1 P_{i+1}] B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)P_i + t_1 P_{i+1} - P_i^1(t)] B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1(t) B_{i,n-1}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (t_1 - t) \sum_{i=0}^{n-1} [P_{i+1} - P_i] B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) B_{i,n-1}(t) \\
&= P(t) + \frac{t_1 - t}{n} \frac{d}{dt} P(t)
\end{aligned}$$

称 $P_1(t)$ 是 $P(t)$ 相应于参数 t_1 的极形式。

验证：

$$\begin{aligned}
P_1(t) \Big|_{t=t_1} &= P(t_1) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_1(t) \Big|_{t=t_1} &= \frac{n-1}{n} P'(t_1) // P'(t_1)
\end{aligned}$$

故 $P(t)$ 是曲线簇 $\{P_1(t) = \mathbf{b}(t_1, t^{\langle n-1 \rangle}) \mid t_1 \in [0, 1]\}$ 的包络。

类似地， $P(t)$ 也是曲线簇 $\{P_r(t) = \mathbf{b}(t_1^{\langle r \rangle}, t^{\langle n-r \rangle}) \mid t_1 \in [0, 1]\}$ 的包络。

§11. Bézier 曲线造型简介

● Bézier 曲线拟合

问题：给定点列 Q_0, Q_1, \dots, Q_N ，以及参数 t_0, t_1, \dots, t_N ，构造一条 $n (\leq N)$ 次 Bézier 曲线拟合已知点列。

方法 1. 设 Bézier 曲线方程为 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$ ，列出下面方程

$$P(t_j) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t_j) = Q_j, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} B_{0,n}(t_0) & \cdots & B_{n,n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{0,n}(t_N) & \cdots & B_{n,n}(t_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

将上述方程简记成 $MP = Q$ 。

由于基函数 $B_{0,n}(t)$, $B_{1,n}(t)$, \dots , $B_{n,n}(t)$ 线性无关，矩阵 M 的列

向量线性无关，因而 M 列满秩。

若 $n = N$ ，则 M 可逆且 $P = M^{-1}Q$ 。

若 $n < N$ ，控制顶点可由 $M^T M P = M^T Q$ 得到，即 $P = (M^T M)^{-1} M^T Q$ 。

方法 2. 假设 $n < N$ ，构造如下目标函数

$$f(P_0, P_1, \dots, P_n) = \sum_{j=0}^N \|Q_j - P(t_j)\|^2$$

为使 $f(P_0, P_1, \dots, P_n)$ 达到最小，则控制顶点须满足下面方程

$$\frac{\partial f(P_0, P_1, \dots, P_n)}{\partial P_i} = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

展开后，可得

$$\sum_{j=0}^N \left[Q_j - \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(t_j) \right] B_{i,n}(t_j) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

整理后可得 $MP = Q$ 。

光滑拟合

动机：由最小二乘拟合出的曲线较好地逼近数据点，但光顺性不一定好。允许适当增加误差，同时加强光顺性。

光顺性约束： $\Delta^2 P_i = P_i - 2P_{i+1} + P_{i+2} = 0$ ， $i = 0, 1, \dots, n-2$

写成矩阵形式： $SP = 0$ 。

与曲线拟合条件联立，有 $\begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

该系数矩阵 $\begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix}$ 仍然列满秩，采用与最小二乘同样的方法可解方程组。

● 几何 Hermite 插值

(a) 点-法式插值

问题：已知空间中两点 Q_0, Q_1 以及两单位法向量 $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1$ ，构造一条三次 Bézier 曲线(端点)插值 Q_0, Q_1 ，且 Bézier 曲线的端点切向分别垂直 $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1$ 。

根据插值条件，可直接得到：

$$P_0 = Q_0, \quad P_3 = Q_1$$

由切/法向插值，分别在 Q_0, Q_1 处的切平面取

$$P_1 = Q_0 + l_0 T_0,$$

$$P_2 = Q_1 - l_1 T_1,$$

其中 $l_0 > 0$, $l_1 > 0$ ，缺省取法 $l_0 = l_1 = 0.4 \|Q_1 - Q_0\|$ 。

得到插值 Bézier 曲线为 $P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t)$ 。

(b) 三次几何 Hermite 插值

问题：已知平面上两点 Q_0, Q_1 ，两单位切向量 T_0, T_1 以及两曲率 k_0, k_1 ，构造一条插值三次 Bézier 曲线。

设插值 Bézier 曲线为 $P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t)$ ，

根据插值条件，有

$$P_0 = Q_0, \quad P_3 = Q_1$$

$$P_1 = Q_0 + l_0 T_0, \quad P_2 = Q_1 - l_1 T_1$$

$$k_0 = 2T_0 \times (P_2 - P_1) / 3l_0^2, \quad k_1 = 2T_1 \times (P_1 - P_2) / 3l_1^2 \quad (*)$$

其中 $A \times B = a_1 b_2 - a_2 b_1$

令 $D = Q_1 - Q_0$ ，由曲率插值方程(*)可得

$$(T_0 \times T_1) l_0 = (D \times T_1) - \frac{3}{2} k_1 l_1^2$$

$$(T_0 \times T_1) l_1 = (T_1 \times D) - \frac{3}{2} k_0 l_0^2$$

如果端点曲率符号与端点连线以及端切向一致，则方程组存在正解。

上述方程的解可以通过数值方法求解。

定理: 设 $Q(t)$ 是一条曲率不为 0 的光滑曲线，如果 $h = \|Q_1 - Q_0\|$ 足够小，则上述方程有解，且插值曲线 $P(t)$ 与原曲线的距离 $\text{dist}(P(t), Q(t)) = O(h^6)$ 。

证明参见文献 CAGD 4(1987), 269-278.

思考题:

1. 输入任意控制多边形，利用 deCasteljau 算法绘制 Bézier 曲线。
2. 实现 Bézier 曲线光顺拟合数据点算法。
3. 用几何 Hermite 插值方法逼近一圆弧段并计算误差。
4. 阅读文献 Gerald Farin, Class A Bézier curves, Computer Aided Geometric Design 23 (2006) 573–581.