第六章 有理 Bézier 曲线与有理 B 样条曲线

§1. 圆锥曲线的有理表示

(a) 有理参数曲线

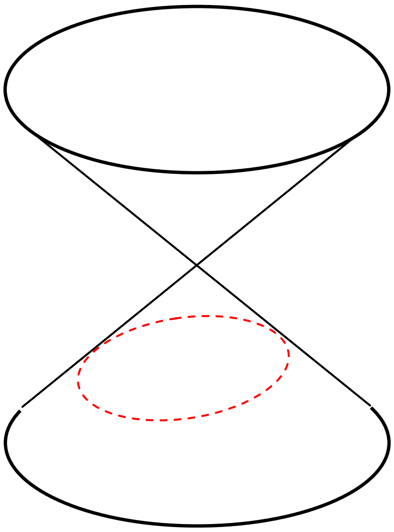
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{X(t)}{W_X(t)} \\ y(t) = \dfrac{Y(t)}{W_Y(t)} \end{cases}$$

圆弧段不能用多项式曲线精确表示，但可以用有理曲线表示。

(b) 二次曲线及其参数化

- 隐式表示方程

  圆锥曲线(conic section)



  隐式表示方程： $F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

- 圆锥曲线的 Liming 构造法

  设 C_1： $F_1(x,y) = 0$， C_2： $F_2(x,y) = 0$ 为两条二次曲线，

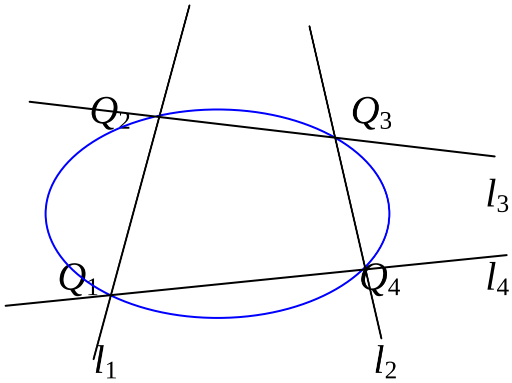
  则 C_λ： $(1-\lambda)F_1(x,y) + \lambda F_2(x,y) = 0$ 也表示一条二次曲线。

  例：给定平面上 4 点 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，分别过 Q_1Q_2，Q_3Q_4，

Q_2Q_3，Q_1Q_4 作 4 条直线，记为 l_1，l_2，l_3，l_4，

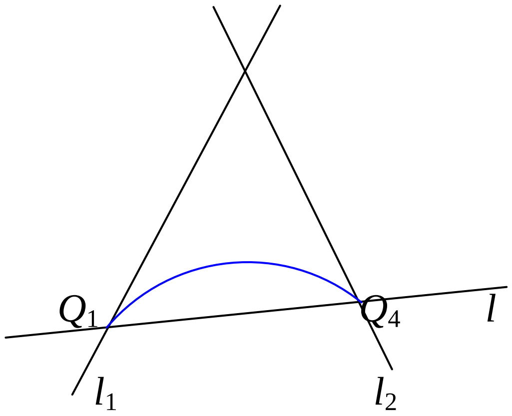
得一族二次曲线 $(1-\lambda)l_1l_2+\lambda l_3l_4=0$，

对任一 λ，该二次曲线过点 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4。



若要确定其中一条，只要让 $(1-\lambda)l_1l_2+\lambda l_3l_4=0$ 经过一固定点，比如 Q_5，解出 λ，即可。

所以，二次曲线可由曲线上 5 点唯一确定。



在二次曲线 $(1-\lambda)l_1l_2+\lambda l_3l_4=0$ 中，令 $Q_2\to Q_1$，$Q_3\to Q_4$，则有 $l_3\to l_4$，不妨设其极限位置 $l_3=l_4=l$，得到二次曲线 $(1-\lambda)l_1l_2+\lambda l^2=0$，此二次曲线过点 Q_1，Q_4，并在端点处与 l_1，l_2 相切。

- 二次曲线的参数化

给定二次曲线 $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

不妨设 $f=0$，

令 $\begin{cases} x=u \\ y=tu \end{cases}$，代入二次曲线方程中，有

$u\left(a+bt+ct^2\right)+\left(d+et\right)=0$，

解出 $u=-\dfrac{d+et}{a+bt+ct^2}$，从而

$$\begin{cases} x=-\dfrac{d+et}{a+bt+ct^2} \\ y=-\dfrac{dt+et^2}{a+bt+ct^2} \end{cases}$$

结论：圆锥曲线可用二次有理参数曲线精确表示。

(c) 二次有理 Bézier 曲线隐式化

$\mathbf{r}(t)=\dfrac{\sum_{i=0}^{2}\omega_i P_i B_{i,2}(t)}{\sum_{i=0}^{2}\omega_i B_{i,2}(t)}$，其中 P_0,P_1,P_2 为控制顶点，$\omega_0,\omega_1,\omega_2$ 为权因子，

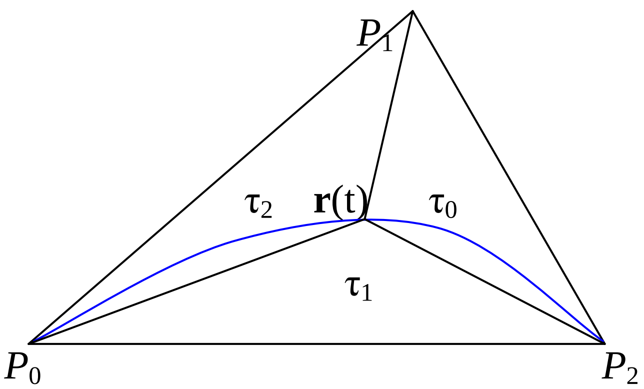
而 $B_{i,2}(t)=C_2^i t^i(1-t)^{2-i}$ 是 Bernstein 基函数。

令

$$\tau_0=\frac{\omega_0(1-t)^2}{D},\quad \tau_1=\frac{2\omega_1 t(1-t)}{D},\quad \tau_2=\frac{\omega_2 t^2}{D} \qquad (*)$$

其中 $D=\omega_0(1-t)^2+2\omega_1 t(1-t)+\omega_2 t^2$，则有

$\mathbf{r}(t)=\tau_0 P_0+\tau_1 P_1+\tau_2 P_2$。



参数(τ_0,τ_1,τ_2)构成点$\mathbf{r}(t)$相对于三角形$\Delta P_0P_1P_2$的重心坐标。

由方程组(*)，可得$\tau_1^2 = 4\dfrac{\tau_0\tau_2\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}$，

写成对称形式：$\dfrac{\tau_1^2}{\tau_0\tau_2} = \dfrac{4\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}$

由重心坐标几何意义，有

$$\tau_0 = \frac{S_{\Delta\mathbf{r}(t)P_1P_2}}{S_{\Delta P_0P_1P_2}}，\quad \tau_1 = \frac{S_{\Delta\mathbf{r}(t)P_2P_0}}{S_{\Delta P_0P_1P_2}}，\quad \tau_2 = \frac{S_{\Delta\mathbf{r}(t)P_0P_1}}{S_{\Delta P_0P_1P_2}}$$

写成坐标形式：

$$\tau_0 = \frac{\begin{vmatrix} x & P_1^x & P_2^x \\ y & P_1^y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_0^x & P_1^x & P_2^x \\ P_0^y & P_1^y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}，\quad \tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} P_0^x & x & P_2^x \\ P_0^y & y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_0^x & P_1^x & P_2^x \\ P_0^y & P_1^y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}，\quad \tau_2 = \frac{\begin{vmatrix} P_0^x & P_1^x & x \\ P_0^y & P_1^y & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_0^x & P_1^x & P_2^x \\ P_0^y & P_1^y & P_2^y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

将上述三式代入方程$\dfrac{\tau_1^2}{\tau_0\tau_2} = \dfrac{4\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}$，化简后可得关于$x$与$y$的二次方程，即为二次有理 Bézier 曲线的隐式表示。

结论：二次有理 Bézier 曲线是圆锥曲线。

(d) 圆锥曲线的标准形式与分类

对$\mathbf{r}(t) = \dfrac{\sum_{i=0}^{2}\omega_i P_i B_{i,2}(t)}{\sum_{i=0}^{2}\omega_i B_{i,2}(t)}$作有理线性参数变换

$$t = \frac{s}{\rho(1-s)+s}，\quad 1-t = \frac{\rho(1-s)}{\rho(1-s)+s}$$

可得

$$\mathbf{r}(s)=\frac{\rho^2\omega_0P_0B_{0,2}(s)+\rho\omega_1P_1B_{1,2}(s)+\omega_2P_2B_{2,2}(s)}{\rho^2\omega_0B_{0,2}(s)+\rho\omega_1B_{1,2}(s)+\omega_2B_{2,2}(s)},$$

取 $\rho=\sqrt{\dfrac{\omega_2}{\omega_0}}$，则可得

$$\mathbf{r}(s)=\frac{P_0B_{0,2}(s)+\varpi_1P_1B_{1,2}(s)+P_2B_{2,2}(s)}{B_{0,2}(s)+\varpi_1B_{1,2}(s)+B_{2,2}(s)}，\ 其中\ \varpi_1=\sqrt{\frac{\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}}$$

标准二次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}(t)=\frac{P_0B_{0,2}(t)+\omega_1P_1B_{1,2}(t)+P_2B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t)+\omega_1B_{1,2}(t)+B_{2,2}(t)}$$

导矢：

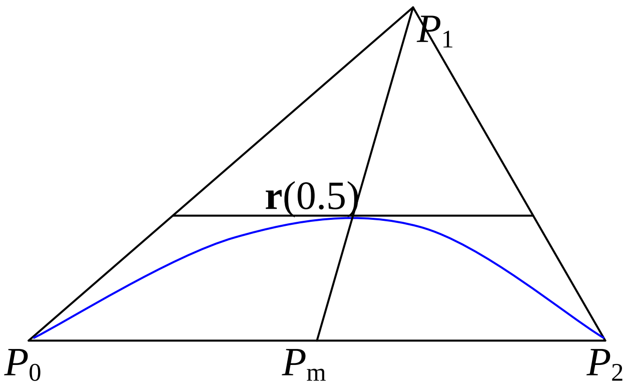
记 $\mathbf{r}(t)=\dfrac{P(t)}{W(t)}$，则有 $P(t)=\mathbf{r}(t)W(t)$，两边求导，有

$$P'(t)=\mathbf{r}'(t)W(t)+\mathbf{r}(t)W'(t)$$

即： $\mathbf{r}'(t)=\dfrac{P'(t)-\mathbf{r}(t)W'(t)}{W(t)}$

特别地， $\mathbf{r}'(0)=2\omega_1(P_1-P_0)$， $\mathbf{r}'(1)=2\omega_1(P_2-P_1)$

肩点(shoulder point)**：** $\mathbf{r}(0.5)$



记 $P_m=\dfrac{1}{2}(P_0+P_2)$，则点 P_1， $\mathbf{r}(0.5)$ 和 P_m 共线，且 $\dfrac{|P_m-\mathbf{r}(0.5)|}{|\mathbf{r}(0.5)-P_1|}=\omega_1$

肩点处导矢 $\mathbf{r}'(0.5)$ 与矢量 P_2-P_0 平行

分类(classification)**：**

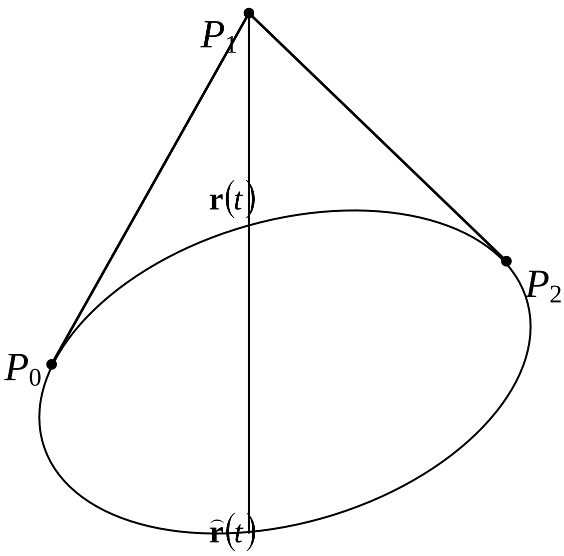
给定二次有理曲线段

$$\mathbf{r}(t)=\frac{P_0B_{0,2}(t)+\omega_1P_1B_{1,2}(t)+P_2B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t)+\omega_1B_{1,2}(t)+B_{2,2}(t)}，\quad \omega_1>0，\quad t\in[0,1]$$

构造该曲线段补圆锥曲线

$$\hat{\mathbf{r}}(t)=\frac{P_0B_{0,2}(t)-\omega_1P_1B_{1,2}(t)+P_2B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t)-\omega_1B_{1,2}(t)+B_{2,2}(t)}，\quad t\in[0,1]$$

曲线$\mathbf{r}(t)$与$\hat{\mathbf{r}}(t)$有相同的隐式表示$\frac{\tau_1^2}{\tau_0\tau_2}=\frac{4\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}$



容易验证P_1， $\mathbf{r}(t)$与$\hat{\mathbf{r}}(t)$三点共线。

依据补曲线$\hat{\mathbf{r}}(t)$是否有奇异点对曲线$\mathbf{r}(t)$进行分类:

若$\hat{\mathbf{r}}(t)$无奇异点，则$\mathbf{r}(t)$是椭圆线段；

若$\hat{\mathbf{r}}(t)$有一个奇异点，则$\mathbf{r}(t)$是抛物线段；

若$\hat{\mathbf{r}}(t)$有两个奇异点，则$\mathbf{r}(t)$是双曲线段。

$\hat{\mathbf{r}}(t)$的奇异点由方程$B_{0,2}(t)-\omega_1B_{1,2}(t)+B_{2,2}(t)=0$来确定。

设$\omega_1>0$，求解方程$B_{0,2}(t)-\omega_1B_{1,2}(t)+B_{2,2}(t)=0$，有

$$t_{1,2}=\frac{1+\omega_1\pm\sqrt{\omega_1^2-1}}{2+2\omega_1}$$

当$0<\omega_1<1$时，方程无实根，$\mathbf{r}(t)$是椭圆线段；

当$\omega_1=1$时，有唯一实根，$\mathbf{r}(t)$是抛物线段；

当$\omega_1>1$时，有两个不同实根，$\mathbf{r}(t)$是双曲线段。

(e) 圆锥曲线段的构造

- 给定两端点，两端点切向以及曲线上一点

  依据二次有理 Bézier 曲线在端点处的导矢公式，可由端点和端切向得到二次有理 Bézier 曲线控制多边形，采样标准表示形式，有

  $$\mathbf{r}(t)=\frac{P_0B_{0,2}(t)+\omega_1P_1B_{1,2}(t)+P_2B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t)+\omega_1B_{1,2}(t)+B_{2,2}(t)}$$

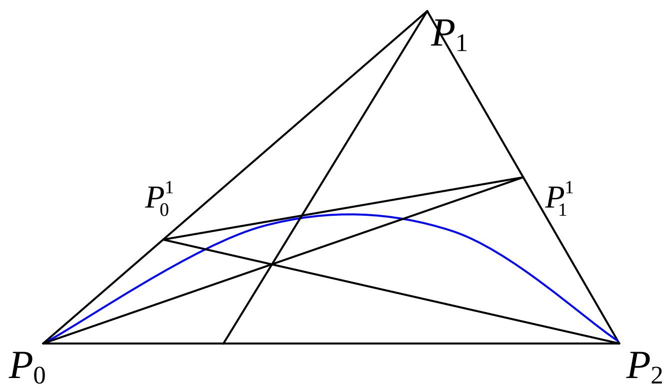
  权因子ω_1可根据曲线插值给定点 P 得到

  设点 P 在三角形$\Delta P_0P_1P_2$的重心坐标为(τ_0,τ_1,τ_2)，根据隐式表示$\frac{\tau_1^2}{\tau_0\tau_2}=\frac{4\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}$以及$\omega_0=\omega_2=1$，得到

  $$\omega_1=\frac{\tau_1}{2\sqrt{\tau_0\tau_2}}$$

- 给定两端点，两端点切向以及曲线的一条切线

  同上，由边界条件可得到二次有理 Bézier 曲线的控制多边形。



根据有理曲线的 de Casteliau 算法，有

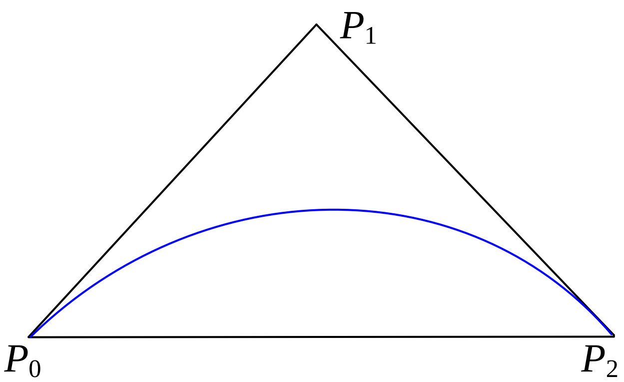
$$P_0^1=(1-t)\frac{1}{\omega_0^1}P_0+t\frac{\omega_1}{\omega_0^1}P_1\text{，其中 }\omega_0^1=1-t+t\omega_1$$

$$P_1^1=(1-t)\frac{\omega_1}{\omega_1^1}P_1+t\frac{1}{\omega_1^1}P_2\text{，其中 }\omega_1^1=(1-t)\omega_1+t$$

从上面二式中消去参数 t，可得

$$\omega_1=\sqrt{\frac{|P_0^1-P_0|}{|P_1-P_0^1|}\frac{|P_2-P_1^1|}{|P_1^1-P_1|}}$$

(f) 圆弧段的有理表示



三角形 $\Delta P_0P_1P_2$ 为等腰三角形，即 $\|P_1-P_0\|=\|P_2-P_1\|$

记 $\angle P_1P_0P_2=\theta$，并取 $\omega_1=\cos\theta$，则

$$\mathbf{r}(t)=\frac{P_0B_{0,2}(t)+\omega_1P_1B_{1,2}(t)+P_2B_{2,2}(t)}{B_{0,2}(t)+\omega_1B_{1,2}(t)+B_{2,2}(t)}$$

表示一段圆弧段($\theta<\frac{\pi}{2}$)。

半圆的表示： 设 $P_0=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix}0\\\tan\theta\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，取 $\omega_1=\cos\theta$，有

$$\mathbf{r}(t)=\frac{(1-t)^2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}+\cos\theta 2t(1-t)\begin{bmatrix}0\\\tan\theta\end{bmatrix}+t^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{(1-t)^2+\cos\theta 2t(1-t)+t^2}$$

令 $\theta \to \frac{\pi}{2}$，有

$$\mathbf{r}(t)=\frac{(1-t)^2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}+2t(1-t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+t^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{(1-t)^2+t^2}$$

§2. 有理 Bézier 曲线性质与算法

(a) 齐次坐标表示(homogeneous coordinates)

n 次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i B_{i,n}(t)},$$

控制顶点：P_i，$i=0,1,\ldots,n$

权因子：$\omega_i \geq 0$，$i=0,1,\ldots,n$，不全为 0。

Bernstein 基函数：$B_{i,n}(t)=C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$，$i=0,1,\ldots,n$

当 $\omega_0=\omega_1=\cdots=\omega_n=1$时，$\mathbf{r}(t)=\sum_{i=0}^{n}P_i B_{i,n}(t)$。

齐次坐标表示：

设 $P_i=(x_i,y_i,z_i)$，齐次坐标表示为 $\overline{P}_i=(X_i,Y_i,Z_i,\omega_i)$，

则有：$x_i=\frac{X_i}{\omega_i}$，$y_i=\frac{Y_i}{\omega_i}$，$z_i=\frac{Z_i}{\omega_i}$。

记 $R_i=(\omega_i P_i,\omega_i)$，$i=0,1,\ldots,n$，可得齐次坐标表示的 Bézier 曲线

$$R(t)=\sum_{i=0}^{n}R_i B_{i,n}(t)$$

(b) 基本性质

1. 凸包性质

$$\mathbf{r}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i B_{i,n}(t)}=\sum_{i=0}^{n}P_i\frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^{n}\omega_j B_{j,n}(t)}$$

由 $\frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^{n}\omega_j B_{j,n}(t)}\geq 0$ 和 $\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^{n}\omega_j B_{j,n}(t)}\equiv 1$ 知凸包性成立。

2. 直线再生性

若控制顶点共线，则有理 Bézier 曲线是一条直线。

3. 仿射不变性

设 A 为仿射变换矩阵，则有

$$A\mathbf{r}(t)=\sum_{i=0}^{n}AP_i\frac{\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^{n}\omega_j B_{j,n}(t)}$$

4. 权因子作用

让某一个权因子 $\omega_i\to\infty$ 而其它权因子不变，则曲线 $\mathbf{r}(t)\to P_i$。

5. 端点性质

设 $\omega_0\neq 0$， $\omega_n\neq 0$， 则有： $\mathbf{r}(0)=P_0$， $\mathbf{r}(1)=P_n$

端点切向： $\mathbf{r}'(0)=n\frac{\omega_1}{\omega_0}(P_1-P_0)$， $\mathbf{r}'(1)=n\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}(P_n-P_{n-1})$

6. 平面有理 Bézier 曲线的顶点共面性

不妨设 $\mathbf{r}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i B_{i,n}(t)}$ 是 x-y 平面上的有理 Bézier 曲线，则其

所有控制顶点也都位于同一平面上。

证明：由 $z(t)=\dfrac{\sum_{i=0}^{n} z_i\omega_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^{n}\omega_j B_{j,n}(t)}=0$ 知 $\sum_{i=0}^{n} z_i\omega_i B_{i,n}(t)\equiv 0$，再由 Bernstein 基函数的线性无关性，知 $z_i\omega_i=0$ 或 $z_i=0$，$i=0,1,\dots,n$。

(c) 离散逼近

- 有理 de Castljau 算法

1. 算法

对齐次坐标表示 Bézier 曲线用 de Castljau 算法，可得：

$$P_i^r(t)=\begin{cases} P_i & r=0 \\ \dfrac{(1-t)\omega_i^{r-1}(t)}{\omega_i^r(t)}P_i^{r-1}(t)+\dfrac{t\omega_{i+1}^{r-1}(t)}{\omega_i^r(t)}P_{i+1}^{r-1}(t) & \begin{matrix} i=0,1,\dots,n-r \\ r=1,2,\dots,n \end{matrix} \end{cases}$$

$$\omega_i^r(t)=\begin{cases} \omega_i & r=0 \\ (1-t)\omega_i^{r-1}(t)+t\omega_{i+1}^{r-1}(t) & \begin{matrix} i=0,1,\dots,n-r \\ r=1,2,\dots,n \end{matrix} \end{cases}$$

2. 命题

$P_i^r(t)=\dfrac{\sum_{j=0}^{r}\omega_{i+j}P_{i+j}B_{j,r}(t)}{\sum_{j=0}^{r}\omega_{i+j}B_{j,r}(t)}$ 是 r 阶有理 Bézier 曲线，且 $P_0^n(t)=\mathbf{r}(t)$

证明：

由于 $\omega_i^r(t)=\begin{cases} \omega_i & r=0 \\ (1-t)\omega_i^{r-1}(t)+t\omega_{i+1}^{r-1}(t) & \begin{matrix} i=0,1,\dots,n-r \\ r=1,2,\dots,n \end{matrix} \end{cases}$

有 $\omega_i^r(t)=[(1-t)I+tE]\omega_i^{r-1}(t)$

$$=[(1-t)I+tE]^r\omega_i^0(t)=[(1-t)I+tE]^r\omega_i=\sum_{j=0}^{r}\omega_{i+j}B_{j,r}(t)$$

同理 $P_i^r(t)=\dfrac{1}{\omega_i^r(t)}[(1-t)I+tE]^r\left(\omega_i^0(t)P_i^0(t)\right)$

$$=\frac{\sum_{j=0}^{r}\omega_{i+j}P_{i+j}B_{j,r}(t)}{\sum_{j=0}^{r}\omega_{i+j}B_{j,r}(t)}\qquad \begin{array}{c} i=0,1,\ldots,n-r \\ r=1,2,\ldots,n \end{array}$$

上式中，取$i=0,r=n$，可得$P_0^n(t)=\dfrac{\sum_{j=0}^{n}\omega_j P_j B_{j,n}(t)}{\sum_{j=0}^{n}\omega_j B_{j,n}(t)}=\mathbf{r}(t)$。

- 分割定理与算法

设$t_0\in(0,1)$，有

$$\mathbf{r}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{i=0}^{n}P_0^i(t_0)\omega_0^i(t_0)B_{i,n}(u)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_0^i(t_0)B_{i,n}(u)} & u=\dfrac{t}{t_0}\in[0,1] \\[2ex] \dfrac{\sum_{i=0}^{n}P_{n-i}^i(t_0)\omega_{n-i}^i(t_0)B_{i,n}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_{n-i}^i(t_0)B_{i,n}(v)} & v=\dfrac{t-t_0}{1-t_0}\in[0,1]\end{cases}$$

- 包络性质

定义$\mathbf{r}_k(\lambda;t)=\dfrac{\sum_{i=0}^{n-k}P_i^k(\lambda)\omega_i^k(\lambda)B_{i,n-k}(t)}{\sum_{i=0}^{n-k}\omega_i^k(\lambda)B_{i,n-k}(t)}$，$0<k<n$

定理：曲线$\mathbf{r}(t)$是曲线簇$\{\mathbf{r}_k(\lambda;t)|\lambda\in[0,1]\}$的包络。

- 升阶公式

$$\mathbf{r}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i B_{i,n}(t)}=\frac{\sum_{i=0}^{n+k}\omega_{i,k}P_{i,k}B_{i,n+k}(t)}{\sum_{i=0}^{n+k}\omega_{i,k}B_{i,n+k}(t)}$$

其中

$$P_{i,k}=\left[\sum_{j=0}^{n}P_j\omega_j\binom{n}{j}\binom{k}{i-j}\Big/\binom{n+k}{i}\right]\Big/\omega_{i,k}$$

$$\omega_{i,k} = \sum_{j=0}^{n} \omega_j \binom{n}{j}\binom{k}{i-j} \bigg/ \binom{n+k}{i}$$

特别地，$k=1$时，有

$$\omega_{i,1} = \frac{i}{n+1}\omega_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1}\omega_i$$

$$P_{i,1} = \left[\frac{i}{n+1}\omega_{i-1}P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1}\omega_i P_i\right] \bigg/ \left[\frac{i}{n+1}\omega_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1}\omega_i\right]$$

易知，点$P_{i,1}$位于线段$P_{i-1}P_i$上，且以$\{P_{i,1}\}$为控制顶点的曲线仍是原曲线。

另外，有理 Bézier 曲线中某些权因子可能为 0，则相应的控制顶点对曲线形状不起作用，升阶后可减少或去除 0 权因子现象。

- 几何形状分析

定理：平面有理 Bézier 曲线具有保凸性和变差缩减性。

保凸性可由分割定理和多项式 Bézier 曲线类似方法可证。

证明变差缩减性：

设$l: ax+by+c=0$是平面上任意一条直线，写成向量形式

$AP+c=0$，其中$A=(a,b)$，$P=(x,y)^T$

则直线 l 与有理 Bézier 曲线的交点方程

$$A\sum_{i=0}^{n} P_i \omega_i B_{i,n}(t) + c\sum_{i=0}^{n}\omega_i B_{i,n}(t) = 0,$$

即：$\sum_{i=0}^{n}(AP_i + c)\omega_i B_{i,n}(t) = 0$

由笛卡尔(Cartesian)符号定理，多项式函数正根的个数不大于其系数的变号数，命题得证。

(d) 权因子与参数变换

$$\mathbf{r}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i B_{i,n}(t)}$$，权因子 $\omega_i \ge 0$， $i=0,1,\ldots,n$， 不全为 0.

若 $\omega_j=0$， 则 $\mathbf{r}(t)$ 与 P_j 无关。($j\neq 0,n$)

若 $\omega_0=0$ 或 $\omega_n=0$，则 $\mathbf{r}(t)$ 退化为 n-1 次曲线，且与 P_0 (或 P_n)无关。

设 $t=\dfrac{as}{b(1-s)+as}$， 且 $ab>0$， 则有 $t'(s)>0$ 且 $t(0)=0$， $t(1)=1$。

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t(s))=\frac{\sum_{i=0}^{n}a^i b^{n-i}\omega_i P_i B_{i,n}(s)}{\sum_{i=0}^{n}a^i b^{n-i}\omega_i B_{i,n}(s)}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\overline{\omega}_i P_i B_{i,n}(s)}{\sum_{i=0}^{n}\overline{\omega}_i B_{i,n}(s)}$$

令 $\overline{\omega}_0=\overline{\omega}_n=1$， 解得 $a=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\omega_n}}$， $b=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\omega_0}}$

结论：n 次有理 Bézier 曲线权因子自由度 $\le n-1$。

(e) 二次有理参数变换

- 有理参数变换

一次有理参数变换(Moebius 变换)： $t\to\dfrac{at}{b(1-t)+at}$

二次有理参数变换： $t\to s(t)=\dfrac{pt+(1-p)t^2}{1-2(1-p)t+2(1-p)t^2}$

可验证：$s(0)=0$，$s(1)=1$，$s(1-t)=1-s(t)$，$s'(1-t)=s'(t)$，且 $s'(0)=s'(1)=p$

该二次有理参数变换有 1 个自由度 p。

- 圆锥曲线的重新参数化：

设 $\mathbf{r}(t)=\dfrac{P_0(1-t)^2+2P_1\omega t(1-t)+P_2t^2}{(1-t)^2+2\omega t(1-t)+t^2}$

重新参数化可得：$\mathbf{r}(t)=\dfrac{\sum_{i=0}^{4}\omega_i Q_i B_{i,4}(t)}{\sum_{i=0}^{4}\omega_i B_{i,4}(t)}$，

其中：

$Q_0=P_0$， $Q_1=\dfrac{P_0+\omega P_1}{1+\omega}$， $Q_2=\dfrac{p^2P_0+2\omega(1+p^2)P_1+p^2P_2}{2(p^2+p^2\omega+\omega)}$，

$Q_3=\dfrac{\omega P_1+P_2}{1+\omega}$， $Q_4=P_2$

$\omega_0=1$， $\omega_1=\dfrac{1+\omega}{2}p$， $\omega_2=\dfrac{p^2+p^2\omega+\omega}{3}$， $\omega_3=\omega_1$， $\omega_4=\omega_0$。

(f) 密切插值(osculatory interpolation)

问题：已知三次有理 Bézier 曲线的控制多边形，并给定两端点处的曲率，求曲线权因子使得有理 Bézier 曲线插值给定曲率。

设三次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}(t)=\frac{P_0B_{0,3}(t)+P_1\omega_1B_{1,3}(t)+P_2\omega_2B_{2,3}(t)+P_3B_{3,3}(t)}{B_{0,3}(t)+\omega_1B_{1,3}(t)+\omega_2B_{2,3}(t)+B_{3,3}(t)}$$

则曲线的曲率

$$k(t)=\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

特别地，

$$k(0)=\frac{2}{3}\frac{\omega_2}{\omega_1^2}\frac{|(P_1-P_0)\times(P_2-P_0)|}{|P_1-P_0|^3}=\frac{2}{3}\frac{\omega_2}{\omega_1^2}c_0$$

$$k(1)=\frac{2}{3}\frac{\omega_1}{\omega_2^2}\frac{|(P_3-P_2)\times(P_3-P_1)|}{|P_3-P_2|^3}=\frac{2}{3}\frac{\omega_1}{\omega_2^2}c_1$$

若已知$k(0)=k_0$， $k(1)=k_3$，则有

$$\omega_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{c_0^2 c_1}{k_0^2 k_3}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{c_0 c_1^2}{k_0 k_3^2}\right)^{\frac{1}{3}}。$$

思考题：

1. 把 $x^2 - y^2 = 1$ 上从(1,0)到($\sqrt{2}$,1)之间的一段曲线表示为二次有理 Bézier 曲线。
2. 证明：双曲线和椭圆不能表示成任何次数的整曲线。
3. 将半圆弧表示成三次有理 Bézier 曲线。

§3. 有理 B 样条曲线

(a) 非均匀有理 B 样条

Non-uniform rational B-spline(NURBS)

- 定义

给定：节点分割 $\pi_n^k = \{t_0, t_1, \cdots, t_{n+k}\}$，

控制顶点 $\{P_i\}_{i=0}^n$，

权因子 $\{\omega_i\}_{i=0}^n$

定义 k 阶有理 B 样条曲线

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i N_{i,k}(t)}, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$$

若 $\omega_0 = \omega_1 = \ldots = \omega_n$，则有理 B 样条曲线退化为 $P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t)$。

- 权因子作用

记 $R_{i,k}(t)=\dfrac{\omega_i N_{i,k}(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\omega_i N_{i,k}(t)}$， $i=0,1,\ldots,n$

若 $\omega_i\to+\infty$， 而 $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\ldots,\omega_n$ 保持不变，

则有 $R_{i,k}(t)\to 1$， $R_{j,k}(t)\to 0$， $j\neq i$， $t\in(t_i,t_{i+k})$

所以，当 $\omega_i\to+\infty$，有 $P(t)\to P_i$， $t\in(t_i,t_{i+k})$。

- 齐次坐标表示

在 R^3 中， $P(t)=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}\omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\omega_i N_{i,k}(t)}=(x(t),y(t),z(t))$

记 $\overline{P_i}=(\omega_i P_i,\omega_i)=(\omega_i x_i,\omega_i y_i,\omega_i z_i,\omega_i)$， $i=0,1,\ldots,n$

可得 NURBS 的齐次坐标表示

$$\overline{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}\overline{P_i}N_{i,k}(t)=(X(t),Y(t),Z(t),W(t))$$

利用齐次坐标表示，可以将有理 B 样条的求值，节点插入等运算转化成整(非有理)B 样条形式。

$x(t)=\dfrac{X(t)}{W(t)}$， $y(t)=\dfrac{Y(t)}{W(t)}$， $z(t)=\dfrac{Z(t)}{W(t)}$。

(b) 三次有理 B 样条曲线

- 三次有理 B 样条曲线可以达到 C^2 连续。
- 三次有理 B 样条曲线插值可以转化成整 B 样条曲线插值。

给定：空间中型值点 $Q_0,Q_1,\ldots,Q_K$，权因子 $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_K$ 和对应节点 $\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_K$

构造：三次有理 B 样条曲线$P(t)=\dfrac{\sum_{i=0}^{L}\overline{\omega}_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{L}\overline{\omega}_i N_{i,k}(t)}$，其中$L=K+2$，

使得：$P(\tau_j)=Q_j$； $j=0,1,\cdots,K$

算法：

1. 将型值点和权因子表示成齐次坐标形式$\{Q_i\omega_i,\omega_i\}_{i=0}^{K}$；
2. 在四维空间中做 B 样条曲线插值；
3. 将齐次坐标曲线投影到三维空间中。