

第二章 插值样条函数

§1. 基本概念

● 三次样条函数：三次多项式样条曲线

特点：

1. 次数最低的 C^2 连续样条， $k(x)$ 连续，计算量小(稳定)
2. 样条可应用于数据拟合，船体放样

● 力学欧拉公式(物理背景)：

$$M(x) = EI k(x),$$

其中： $k(x)$ 表示曲率， E 杨氏模数， I 惯性矩， $M(x)$ 弯矩

将上面公式改写成
$$\frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}$$

考虑小挠度情形： $y'(x) \ll 1$

假设梁的弯矩近似为线性函数： $M(x) \approx ax + b$

得到简化方程：
$$y''(x) = \frac{1}{EI}(ax + b)$$

积分可得：
$$y(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

三次多项式空间 P_3 ：所有次数不大于 3 的多项式的集合

确定一段三次曲线需要满足条件：

(1) 两端函数值+两端一阶导数值

或

(2) 两端函数值+两端二阶导数值

● 插值三次样条定义:

设 $[a, b]$ 上的一个分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 称 $S(x)$ 为 $[a, b]$ 上的三次样条函数, 如果

(i) $S|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_3$

(ii) $S(x) \in C^2[a, b]$

如果给定 $y_i (i=0, 1, \dots, n)$ 使得 $S(x_i) = y_i$, 称 $S(x)$ 为插值三次样条函数。

§2. 插值三次样条构造

问题: 为构造插值三次样条曲线 $S(x)$, 需要知道节点处的一阶或二阶导数, 使得

$$S(x_i) = y_i$$

$$S'(x_i) = y'_i = m_i \text{ 或 } S''(x_i) = y''_i = M_i$$

记 $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, 2, \dots, n$ 构造方法如下:

(一) 三弯矩方程

$$\text{假设 } \begin{cases} S(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ S(x_i) = y_i \end{cases} \quad \begin{cases} S''(x_{i-1}) = M_{i-1} \\ S''(x_i) = M_i \end{cases}$$

$$\text{则有 } S''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

积分并确定常数, 可得

$$S(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6} \right) (x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} \right) (x - x_{i-1}),$$

其中 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 。

根据 $S'(x_i^-) = S'(x_i^+)$, 可得

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 3D_i \quad (i=1,2,\dots,n-1)$$

$$\text{其中 } \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad D_i = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$$

● 边界条件(I): $y'(a) = y'_0, \quad y'(b) = y'_n$

得到

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right) = 3D_0$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n} \left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) = 3D_n$$

将关于 M_i 的方程写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_0 = \mu_n = 1, \quad \lambda_i + \mu_i = 1, \quad (i=1,2,\dots,n-1)$

● 追赶法求解线性方程组

记方程组为 $AM=D$

系数矩阵 A 主对角占优

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} p & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & p & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & p & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & p & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & p \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } \lambda_i + \mu_i = 1, \quad \lambda_i, \mu_i \geq 0, \quad p > 1$$

易知 A 非奇异。

矩阵分解

$$A = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & q_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = BC$$

$$q_{-1} = 0;$$

$$p = 2;$$

for (k=0,1,...,n-1) {

$$p_k = p - \mu_k q_{k-1}$$

$$q_k = \frac{\lambda_k}{p_k} = \frac{\lambda_k}{p - \mu_k q_{k-1}}$$

}

$$p_n = p - \mu_n q_{n-1}$$

解方程组 $AM=D$

$$(BC)M=B(CM)=D, \text{ 令 } CM=Z$$

$$\text{Step 1(追): } BZ = D \rightarrow Z = B^{-1}D$$

$$\text{Step 2(赶): } CM = Z \rightarrow M = C^{-1}Z$$

● 周期边界条件: $y_0 = y_n, \quad m_0 = m_n, \quad M_0 = M_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } D_n = \frac{2}{h_0 + h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right)$$

(二) 三转角方程

计算各点处的(待定)一阶导数, 使得分段 Hermite 插值函数是 C^2 连续的。

$$\text{假设 } \begin{cases} S(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ S(x_i) = y_i \end{cases} \quad \begin{cases} S'(x_{i-1}) = m_{i-1} \\ S'(x_i) = m_i \end{cases}$$

当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时, 有

$$S(x) = y_{i-1}h_0(x) + y_i h_1(x) + m_{i-1}H_0(x) + m_i H_1(x)$$

根据插值条件, 函数 $h_0(x), h_1(x), H_0(x), H_1(x)$ 应满足如下条件:

$$\begin{bmatrix} h_0(x_{i-1}) & h_0(x_i) & h'_0(x_{i-1}) & h'_0(x_i) \\ h_1(x_{i-1}) & h_1(x_i) & h'_1(x_{i-1}) & h'_1(x_i) \\ H_0(x_{i-1}) & H_0(x_i) & H'_0(x_{i-1}) & H'_0(x_i) \\ H_1(x_{i-1}) & H_1(x_i) & H'_1(x_{i-1}) & H'_1(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解得

$$h_0(x) = \frac{(x_i - x)^2 [2(x - x_{i-1}) + h_i]}{h_i^3}$$

$$h_1(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2 [2(x_i - x) + h_i]}{h_i^3}$$

$$H_0(x) = \frac{(x_i - x)^2 (x - x_{i-1})}{h_i^2} \quad H_1(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2 (x_i - x)}{h_i^2}$$

为保证 $S(x) \in C^2[a, b]$, 则须 $S''(x_i^-) = S''(x_i^+)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$)

将 $S(x)$ 求导并带入等式, 有:

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\text{其中 } \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad C_i = \lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

该方程组有 $n-1$ 个方程， $n+1$ 个未知量。

为使方程组有唯一解，可在两端各增加一个约束条件，从而形成有 $n+1$ 个方程和 $n+1$ 个未知量的方程组。

● 边界条件 I

$$\text{已知} \begin{cases} y'(x_0) = m_0 \\ y'(x_n) = m_n \end{cases}$$

方程组可写成

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3C_1 - \lambda_1 m_0 \\ 3C_2 \\ 3C_3 \\ \vdots \\ 3C_{n-1} - \mu_{n-1} m_n \end{bmatrix}$$

● 边界条件 II

$$\text{已知} \begin{cases} y''(x_0) = y_0'' \\ y''(x_n) = y_n'' \end{cases}$$

$$\text{则有} \begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3 \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{2} y_0'' = 3C_0 - \frac{h_1}{2} y_0'' \\ m_{n-1} + 2m_n = 3 \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \frac{h_n}{2} y_n'' = 3C_n + \frac{h_n}{2} y_n'' \end{cases}$$

特别地，当 $y_0'' = y_n'' = 0$ ，得到的插值函数称为自然插值三次样条函数。(此时，边界处退化为直线情形)

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3C_0 - \frac{h_1}{2} y_0'' \\ 3C_1 \\ 3C_2 \\ \vdots \\ 3C_{n-1} \\ 3C_n + \frac{h_n}{2} y_n'' \end{bmatrix}$$

§3. 三次样条函数的性质

定理 1: 极小模性质

设 $f(x) \in C^2[a, b]$ 是任一被插函数, $s(x)$ 是自然插值三次样条函数(或同时插值边界导数), 则成立

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

式中等号仅当 $f(x) \equiv s(x)$ 时成立。

证明: 考察积分

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f''(x) - s''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [s''(x)]^2 dx \\ & \quad - 2 \int_a^b [f''(x) - s''(x)] s''(x) dx \end{aligned}$$

由插值条件及连续两次分部积分, 有

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f''(x) - s''(x)] s''(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x) - s''(x)] s''(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ [f'(x) - s'(x)] s''(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - [f(x) - s(x)] s'''(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - s(x)] s^{(4)}(x) dx \right\} \\ &= [f'(x) - s'(x)] s''(x) \Big|_a^b \\ &= 0 \end{aligned}$$

当 $f''(x) \equiv s''(x)$, 则 $f(x) - s(x)$ 是线性函数, 又因为 $f(x_i) - s(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ 。 $f(x) - s(x)$ 共有 $n+1 > 2$ 个零点, 故 $f(x) - s(x) \equiv 0$ 。

定理 2: 最佳逼近性质

设 $f(x) \in C^2[a, b]$ 是任一被插函数, $s_f(x)$ 是带有斜率边界条件的插值三次样条函数, $s(x)$ 是与 $s_f(x)$ 具有相同分割的任一三次样条函数, 则有

$$\int_a^b [f''(x) - S_f''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx$$

证明:

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [f''(x) - S_f''(x) + S_f''(x) - S''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [f''(x) - S_f''(x)]^2 dx + \int_a^b [S_f''(x) - S''(x)]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_a^b [f''(x) - S_f''(x)][S_f''(x) - S''(x)] dx \end{aligned}$$

分部积分, 知上面展开式中最后一项为 0。定理成立。

定理 3: 误差估计

已知函数 $f(x) \in C^4[a, b]$ 及 $[a, b]$ 上的一个分割 Δ , 设 $s(x)$ 是关于 $f(x)$ 的带 I 型或 II 型边界条件的插值三次样条函数, 则有误差估计

$$\|(f - s)^{(r)}\|_{\infty} \leq C_r \|f^{(4)}\|_{\infty} h^{4-r}, \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

$$\text{其中 } C_0 = \frac{5}{384}, \quad C_1 = \frac{1}{24}, \quad C_2 = \frac{3}{8}, \quad C_3 = \frac{\beta + \beta^{-1}}{2}$$

$$h = \max_i h_i, \quad \beta = \frac{\max_i h_i}{\min_i h_i} \text{ 是分割比。}$$

证明: 略。

定理 3 说明, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 插值三次样条函数连同它的一、二、三阶导数一起一致收敛到 $f(x)$ 及其相应的导数。

§3. 三次基样条(Cardinal spline)

- 问题: 给定采样数据 $(x_i, y_i)_{i=0}^n$ 以及端点处的导数值 y'_0 和 y'_n , 其中 $(x_i)_{i=0}^n$ 为单调增加序列, 构造插值函数 $s(x)$ 满足:

$$(1) \quad S(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$(2) \quad S'(a) = y'_0, \quad S'(b) = y'_n$$

(考虑 I 型边界条件, II 型边界可类似做)

● 方法: $S(x) = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i(x) + y'_0 \varphi_{n+1}(x) + y'_n \varphi_{n+2}(x),$

其中 $\varphi_i(x)$ 均为三次样条函数, 且满足

$$\begin{cases} \varphi_i(x_j) = \delta_{ij} & (i, j = 0, 1, \dots, n) \\ \varphi'_i(x_0) = \varphi'_i(x_n) = 0 & (i = 0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x_j) = 0 \\ \varphi'_{n+1}(x_0) = 1 \\ \varphi'_{n+1}(x_n) = 0 \end{cases} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+2}(x_j) = 0 \\ \varphi'_{n+2}(x_0) = 0 \\ \varphi'_{n+2}(x_n) = 1 \end{cases} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

任一 $\varphi_i(x)$ 可由三次样条函数方法求得。

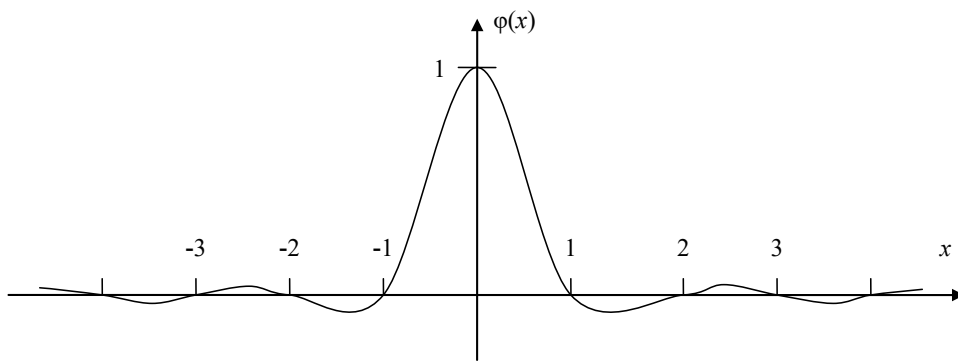
● 基样条特征

考虑定义在所有整数节点上的基样条 $\varphi(x)$,

即满足 $\varphi(j) = \delta_{0j}, \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} (3\lambda + 2)x^3 - 3(\lambda + 1)x^2 + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 3\lambda^j \left[(\lambda + 1)(x - j)^3 - (\lambda + 2)(x - j)^2 + (x - j) \right] & j \leq x < j + 1 \quad (j = 1, 2, \dots) \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

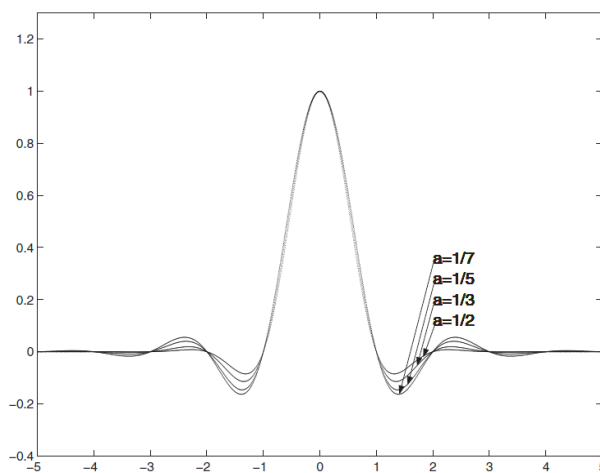
$$\lambda = \sqrt{3} - 2 \approx -0.268$$



- (a) 相邻两段异号；
- (b) 每段有一个极值点，j+1 段极值点是 j 段极值点的 λ 倍；
- (c) 节点处导数满足 $m_{j+1} = \lambda m_j$

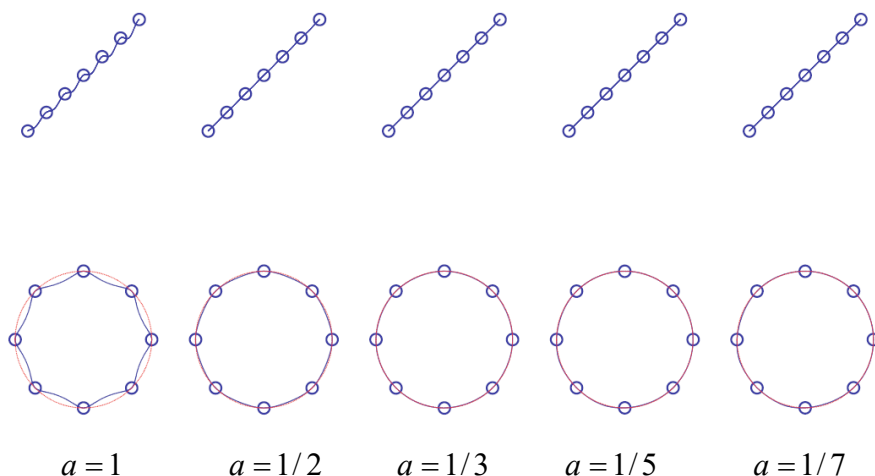
● 其它形式基样条

$$\phi(x, a) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} e^{-ax^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



ACM TOG 30(2), article10, 2011

造型实例



§4. 二次样条函数

● 二次样条特点

光顺性好， C^1 连续

● 二次样条定义

设 $[a, b]$ 上的一个分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ，称 $S(x)$ 为 $[a, b]$ 上的二次样条函数，如果

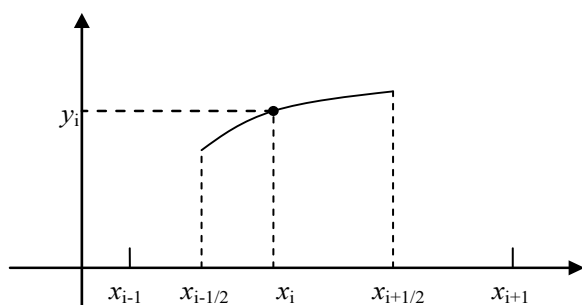
(i) $S(x) \in C^1[a, b]$

(ii) $S|_{[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]} \in P_2$ ，其中 $x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

● 连续性方程

若 $S(x_i) = y_i$ ， $S'(x_i) = m_i$ ， $S''(x_i) = M_i$

则当 $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 时有：
$$S(x) = y_i + m_i(x - x_i) + \frac{1}{2}M_i(x - x_i)^2$$



在半节点 $x_{i-1/2}$ 处 C^1 连续,

$$\begin{cases} S(x_{i-1/2}^-) = S(x_{i-1/2}^+) \\ S'(x_{i-1/2}^-) = S'(x_{i-1/2}^+) \end{cases} \quad (i=1, \dots, n)$$

消去 M_i 得到 m 连续性方程

$$\lambda_i m_{i-1} + 3m_i + \mu_i m_{i+1} = 4c_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

$$\text{其中 } \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad c_i = \lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

端点导数 m_0 , m_n 事先给定, 其它导数 m_i 由方程组求解得到。

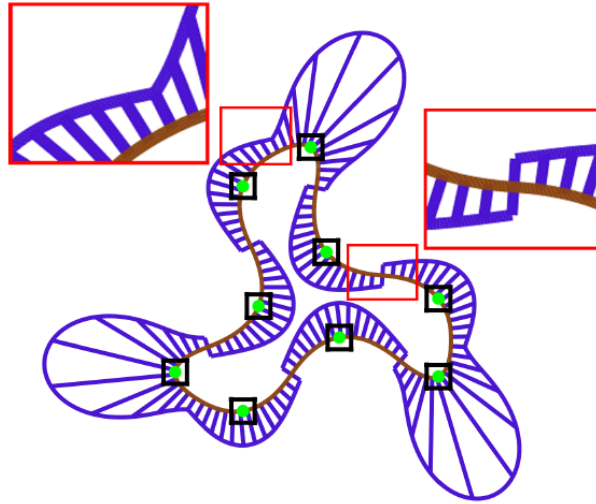
类似地, 得到 M 连续性方程

$$\mu_i M_{i-1} + 3M_i + \lambda_i M_{i+1} = 4d_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

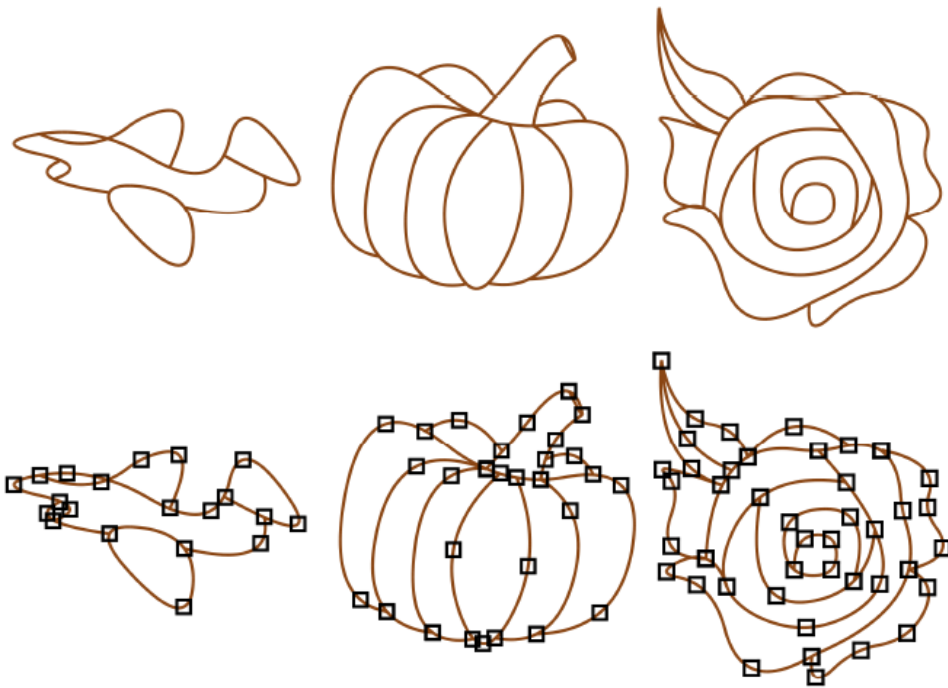
$$\text{其中 } d_i = \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$$

思考题:

1. 利用追赶法构造三次插值样条函数。
2. 二次样条函数中为什么要引入半节点? 若用原区间分割点作为节点, 如何设定边界条件和构造插值函数?
3. 文献阅读: k-Curves: Interpolation at Local Maximum Curvature, siggraph 2017.



k-curve(曲线曲率极大值点出现在控制顶点处)



k-curve 造型