泛函分析

武大爷

Contents

1 拓扑向量空间和分布

1.1 凸集分离定理

设 V 是标量场 $\mathbf{K}$ 上的线性空间。若 X 和 Y 是 V 的非空子集，我们定义集合 aX，$X \pm Y$ 如下：

$$aX = \{ax : x \in X\}, \quad X + Y = \{x + y : x \in X, y \in X\},$$

$$X - Y = X + (-1)Y.$$

当 X 只有一个点时，我们用 $x \pm Y$ 代替 $X \pm Y$。

为了避免记号混乱，我们将集合 A 与 B 的差记为 $A \setminus B$。

形如 $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ 的向量称为 X 的元素的一个有限线性组合，其中 $x_1, \ldots, x_n \in X$，$a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$。

若 0 可以表示成 X 的元素的非平凡的线性组合，即 $0 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$，其中 x_j 是 X 中不同的元素，至少有一个 a_j 非零，$j = 1, 2, \ldots, n$，则称 X 是线性相关的；否则，称 X 是线性独立的。

X 产生的线性子空间：X 中元素的所有有限线性组合构成的集合，作为 V 的线性子空间。这是 V 中包含 X 的最小的线性子空间。

设 V_0 是 V 的线性子空间。定义

$$V/V_0 = \{x + V_0 : x \in V\},$$

并在其上定义如下的加法运算和数乘运算：

$$(x + V_0) + (y + V_0) = (x + y) + V_0 : V/V_0 \times V/V_0 \to V/V_0,$$

$$a(x + V_0) = ax + V_0 : \mathbf{K} \times V/V_0 \to V/V_0,$$

容易验证这两个运算合理定义。则 V/V_0 成为 $\mathbf{K}$ 的线性空间，称为商空间（讲义上为 the quotient of V by V_0，不知如何翻译）。若 V/V_0 有有限维度 n，则称 V_0 在 V 中有余维数 n。

假设 V 和 W 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间。从 V 到 W 的线性算子或线性变换定义为：映射 $V \to W$，满足 $T(ax + by) = aTx + bTy, \forall x, y \in V, \forall a, b \in \mathbf{K}$.

商映射（***quotient mapping***）Q：

$$x \mapsto x + V_0 : V \to V/V_0.$$

Q 为线性映射。

零空间（***null space***）$\{x \in V : Tx = 0\}$ 和像空间（***image space***）$T(V) = \{Tx : x \in V\}$ 是 W 的线性子空间。

若 $T(V_0) = \{0\}$，则可合理定义一个从 V/V_0 到 $T(V)$ 的线性算子 T_0：

$$T_0(x + V_0) = Tx, x \in V.$$

显然 T_0 是满射；当 V_0 为 T 的零空间时，T_0 是双射。

$T = T_0 Q$（*T factors through V/V_0*）。

所有从 V 到 W 的线性算子的集合赋予加法和数乘运算 ($aS + bT$ 由方程 $(aS + bT)x = aSx + bTx$ 定义) 后成为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间。

线性泛函（***linear functional***）——线性算子 $\rho : V \to \mathbf{K}$。

所有 V 上的线性泛函的集合是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，称为 V 的代数对偶空间。

当 ρ 是 V 上的非零线性泛函时，其像 $\rho(V) = \mathbf{K}$。

***Propostion* 1.1.1** *若 ρ 是线性空间 V 上的线性泛函，则 V 上的每个在 ρ 的零空间 V_0 上取值为零（vanishes on the null space V_0 of ρ）的线性泛函为 ρ 的标量倍（a scalar multiple of ρ）。*

若 $\rho \neq 0$，则 V_0 在 V 中有余维数 1。反之，每个在 V 中有余维数 1 的线性子空间必为 V 上的某个非零线性泛函的零空间。

若 $\rho_1, \ldots, \rho_m$ 是 V 上的线性泛函，则 V 上的每个在 $\rho_1, \ldots, \rho_m$ 的零空间的交集上取值为零的线性泛函是 $\rho_1, \ldots, \rho_m$ 的线性组合。

Proof. 不妨设 $\rho \neq 0$。因 V_0 为 ρ 的零空间，故方程 $\rho_0(x + V_0) = \rho(x)$ 合理定义了一个从 V/V_0 到 $\rho(V) = \mathbf{K}$ 的线性算子 ρ_0，从而 V/V_0 是一维的，即 V_0 在 V 中有余维数 1。

类似的，若 V 上的一个线性泛函 σ 在 V_0 上取值为 0，则方程 $\sigma_0(x + V_0) = \sigma(x)$ 合理定义了一个 V/V_0 上的线性泛函 σ_0。因 V/V_0 是一维的，故有 $\sigma_0 = a\rho_0$，且 $\sigma = \sigma_0 Q = a\rho_0 Q = a\rho$，其中 a 为某个标量，Q 为从 V 到 V/V_0 的商映射。

若 V_1 是 V 中余维数为 1 的线性子空间，则存在一维线性空间 V/V_1 上的非零线性泛函 τ_1，$\tau_1 : V/V_1 \to \mathbf{K}$ 为双射。相应的，方程 $\tau(x) = \tau_1(x + V_1)$ 定义了 V 上的非零线性泛函 τ，而 τ 的零空间恰好为 V_1。

命题中最后的论断通过归纳法来证明。首先 $n = 1$ 时的情形已经得证。现假设当 $n = k$ 时论断成立。设 $\sigma, \rho_1, \ldots, \rho_k, \rho_{k+1}$ 是 V 上的线

性泛函，σ 在 $\rho_1, \ldots, \rho_k, \rho_{k+1}$ 的零空间的交集上取值为零，ρ_{k+1} 的零空间记为 V_{k+1}。则有 $\sigma|V_{k+1}$ 在 k 个线性泛函 $\rho_1|V_{k+1}, \ldots, \rho_k|V_{k+1}$ 的零空间的交集上取值为零。由归纳假设，$\sigma|V_{k+1}$ 是 $\rho_1|V_{k+1}, \ldots, \rho_k|V_{k+1}$ 的线性组合 $(a_1\rho_1 + \cdots + a_k\rho_k)|V_{k+1}$。从而又有 $\sigma - a_1\rho_1 - \cdots - a_k\rho_k$ 在 ρ_{k+1} 的零空间 V_{k+1} 上取值为零，因此 $\sigma - a_1\rho_1 - \cdots - a_k\rho_k = a_{k+1}\rho_{k+1}$，即 $\sigma = a_1\rho_1 + \cdots + a_k\rho_k + a_{k+1}\rho_{k+1}$，其中 a_j 为标量，$j = 1, \ldots, k, k+1$。 ■

假设 V 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，$X, Y \subseteq V$。

X 的元素的有限凸组合（a ***finite convex combination*** of elements of X）：形如 $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ 的向量，其中 $x_1, \ldots, x_n \in X$，$a_1, \ldots, a_n$ 为实标量，满足 $a_j > 0$，$j = 1, \ldots, n$，$\Sigma a_j = 1$。

Y 为凸（***convex***）的：$\forall y_1, y_2 \in Y$，$\forall b_1, b_2 > 0$，$b_1 + b_2 = 1$，有 $b_1y_1 + b_2y_2 \in Y$。

coX：X 中元素的所有有限凸组合。coX 是包含 X 的最小凸子集，称为 X 的凸包（***convex hull***）。

$X \subseteq V$ 的内部点（***internal point***）——X 中满足如下性质的向量 x：任意给定 $y \in V$，存在正实数 c，使得 $x + ay \in X$，$\forall a \in [0, c)$。

$\mathbf{R}$ 上的线性空间 V 中的超平面（***hyperplane***）：形如 $x_0 + V_0$ 的集合，其中 x_0 是 V 中的某个向量，V_0 是 V 中余维数为 1 的线性子空间。

由命题 1.1.1，V 的子集 H 为超平面当且仅当 H 可以表示成如下形式：

$$H = \{x \in V : \rho(x) = k\},$$

其中 ρ 为 V 上的某个非零线性泛函，k 为某个实数。

当然 ρ 和 k 并不由 H 所唯一决定，但其变化方式是唯一的，即给定 H，ρ 和 k 只能用 $a\rho$ 和 ak 分别加以替代，其中 a 为非零实数。下面加以证明。

显然 $0 \in H$ 当且仅当 $k = 0$。令 $H = \{x \in V : \rho(x) = k\} = \{x \in V : \rho_1(x) = k_1\}$，则有 $k = 0$ 当且仅当 $k_1 = 0$，此时上述结论成立。若 $k_1 \neq 0$，则 $k \neq 0$，下证 $\frac{\rho}{k} = \frac{\rho_1}{k_1}$，即 $\frac{\rho}{k}(x) - \frac{\rho_1}{k_1}(x) = 0$，$\forall x \in V$。

已有 $H \subseteq \{x \in V : \frac{\rho}{k}(x) - \frac{\rho_1}{k_1}(x) = 0\}$。取 $x_0 \in H$，由 H 定义知 $H = x_0 + Ker(\rho)$。因 $Ker(\rho)$ 在 V 中余维数为 1，$x_0 \notin Ker(\rho)$，故 $V = Span\{x_0, Ker(\rho)\}$。

又由 $k_1 = \rho_1(H) = \rho_1(x_0) + \rho_1(Ker(\rho)) = k_1 + \rho_1(Ker(\rho))$ 知 $Ker(\rho) \subseteq Ker(\rho_1)$。从而 $Span\{x_0, Ker(\rho)\} \subseteq \{x \in V : \frac{\rho}{k}(x) - \frac{\rho_1}{k_1}(x) = 0\} \subseteq V$。这意味着 $V = \{x \in V : \frac{\rho}{k}(x) - \frac{\rho_1}{k_1}(x) = 0\}$。因此 $\frac{\rho}{k} = \frac{\rho_1}{k_1}$，即有 $\rho = \frac{k}{k_1}\rho_1$，而 $k = \frac{k}{k_1}k_1$，结论得证。

由超平面 H，可以相应的定义两个闭半平面：

$$\{x \in V : \rho(x) \geq k\}, \{x \in V : \rho(x) \leq k\},$$

以及两个开半平面：

$$\{x \in V : \rho(x) > k\}, \{x \in V : \rho(x) < k\}.$$

称 H 分离 V 的子集 Y 和 Z，若 Y 包含于由 H 决定的闭半平面的其中一个而 Z 包含于另一个。严格的分离相应的由开半平面定义。将 ρ 和 k 替换为 $a\rho$ 和 ak 分离性质不受影响。

Theorem* 1.1.2** *(Convex Sets Separation Theorem**，凸集分离定理*)*
若 Y 和 Z 是实向量空间 V 的两个不相交的非空凸子集，至少其中一个有一个内部点，则它们可由 V 中的一个超平面 H 分离。若 Y 或 Z 完全由内部点构成，则其包含于由 H 决定的其中一个开半平面中。若 Y 和 Z 都完全由内部点构成，则它们被 H 严格分离。

***Lemma* 1.1.3** *若 ρ 是实复向量空间 V 上的线性泛函，则方程 $\rho_\tau(x) = Re\rho(x)$ 定义了 V 上的实线性泛函 ρ_τ，且*

$$\rho(x) = \rho_\tau(x) - i\rho_\tau(ix), \forall x \in V.$$

反之，V 上的每个实线性泛函都可以以这种方式由一个线性泛函产生。

Proof. 显然，给定 V 上的线性泛函 ρ，方程 $\rho_\tau(x) = Re\rho(x)$ 定义了 V 上的一个实线性泛函 ρ_τ。此外，

$$Im\rho(x) = -Rei\rho(x) = -Re\rho(ix) = -\rho_\tau(ix), \forall x \in V,$$

因此 $\rho(x) = \rho_\tau(x) - i\rho_\tau(ix)$，$\forall x \in V$。

设 $\sigma(x)$ 是 V 上的实线性泛函，定义函数 $\sigma_c : V \to C$：

$$\sigma_c(x) = \sigma(x) - i\sigma(ix), \forall x \in V,$$

显然 $\sigma(x)=Re\sigma_c(x)$，$\sigma_c(x+y)=\sigma_c(x)+\sigma_c(y)$，$\sigma_c(ax)=a\sigma_c(x)$，$\forall x,y\in V$，$\forall a\in\mathbf{R}$。又

$$\begin{aligned}\sigma_c(ix)&=\sigma(ix)-i\sigma(-x)\\&=\sigma(ix)+i\sigma(x)\\&=i[\sigma(x)-i\sigma(ix)]\\&=i\sigma_c(x),\end{aligned}$$

故 σ_c 是 V 上的线性泛函。 ■

***Theorem* 1.1.4** *若 Y 和 Z 是复向量空间 V 的两个不相交的非空凸子集，至少其中一个有一个内部点，则存在 V 上的非零线性泛函 ρ 和实数 k，满足*

$$Re\rho(y)\geq k\geq Re\rho(z),\forall y\in Y,z\in Z.$$

此外，若 Y 完全由内部点构成，则 $Re\rho(y)>k$，$\forall y\in Y$；若 Z 完全由内部点构成，则 $k>Re\rho(z)$，$\forall z\in Z$。

Proof. 先将 Y 和 Z 视为实向量空间 V 的子集，由定理 1.1.2 可知存在 V 上的非零实线性泛函 σ 和实数 k，满足 $\sigma(y)\geq k\geq\sigma(z)$，$\forall y\in Y,z\in Z$。此外，若 Y 或 Z 完全由内部点构成，相应的 $\geq$ 可以替换为 $>$。由引理 1.1.3，存在 V 上的线性泛函 ρ，满足 $\sigma(x)=Re\rho(x)$，$\forall x\in V$。显然 ρ 非零。 ■

设 V 是标量场 K 上的线性空间。

V 上的次线性泛函（***sublinear functional***）——函数 $\rho:V\to\mathbf{R}$，满足对于任意的 $x,y\in V$ 及非负实数 a，有：

$$p(x+y)\leq p(x)+p(y),\quad p(ax)=ap(x).$$

V 上的半范（***semi-norm***）——次线性泛函 p，满足

$$p(ax)=|a|p(x),\quad\forall x\in V,\quad\forall a\in\mathbf{K}.$$

V 上的半范 p 满足：

$$p(x)\geq 0,\quad|p(x)-p(y)|\leq p(x-y),\quad\forall x,y\in V.$$

V 上的范数（***norm***）——半范 p，满足：对于 V 中的任意非零元素 x，有 $p(x)>0$。

称 V 的子集 Y 是平衡的，若：$\forall y\in Y$，$\forall a\in \mathbf{K}, |a|\le 1$，有 $ay\in Y$。

若 p 是 V 上的次线性泛函，立刻可得集合 $V_p=\{x\in V: p(x)<1\}$ 是凸的，包含 0，且完全由内部点构成。当 p 是半范时，则有 V_p 是平衡的。

***Propostion* 1.1.5** *设 W 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间 V 的凸子集，0 是 W 的内部点，则方程*

$$p(x)=inf\{c: c\in \mathbf{R}, c>0, x\in cW\}, \forall x\in V,$$

定义了 V 上的次线性泛函 p。若 W 完全由内部点构成，则 $W=\{x\in V: p(x)<1\}$。若 W 是平衡的，则 p 是半范。

***Theorem* 1.1.6** *若 p 是实向量空间 V 上的次线性泛函，而 ρ_0 是 V 的线性子空间 V_0 上的线性泛函，且*

$$\rho_0(y)\le p(y), \forall y\in V_0,$$

则存在 V 上的线性泛函 ρ，满足

$$\rho(x)\le p(x), \forall x\in V, \quad \rho(y)=\rho_0(y), \forall y\in V_0.$$

Proof. $\mathbf{R}\times V$ 为实向量空间，加法和数乘定义如下

$$(r,x)+(s,y)=(r+s, x+y), \quad a(r,x)=(ar, ax),$$

$$\forall x,y\in V, \quad \forall a,r,s\in \mathbf{R}.$$

由次线性泛函性质立刻可得集合

$$X=\{(r,x)\in \mathbf{R}\times V: r>p(x)\}$$

是非空凸的，且完全由内部点构成。而集合

$$W=\{(\rho_0(y), y): y\in V_0\}$$

是 $\mathbf{R}\times V$ 的线性子空间，且 $X\cap W=\emptyset$。由定理 1.1.2，存在 $\mathbf{R}\times V$ 上的线性泛函 σ 和实数 k，满足

$$\sigma(v)>k\ge \sigma(w), \forall v\in X, \forall w\in W.$$

若 $w \in W$，则对于任意的标量 a，$aw \in W$，因此 $a\sigma(w) = \sigma(aw) \le k$。由 a 和 W 任意性得

$$\sigma(w) = 0, \forall w \in W.$$

则 $k \ge 0$。因 $(1,0) \in X$，故 $\sigma((1,0)) > k \ge 0$。由 $\sigma((1,0)) > 0$，我们不妨用 σ 的某个合适的正标量倍替代 σ，使得 $\sigma((1,0)) = 1$。

方程 $\rho(x) = -\sigma((0,x))$ 定义了 V 上的线性泛函 ρ，且有

$$\sigma((r,x)) = \sigma(r(1,0) + (0,x)) = r - \rho(x), \forall x \in \mathbf{R}, \forall x \in V.$$

任意给定 V 中的 x，对于任意的 $r > p(x)$，有 $(r,x) \in X$，故 $r - \rho(x) = \sigma((r,x)) > 0$. 由 r 的任意性可得 $p(x) \ge \rho(x)$。由 x 任意性即得

$$\rho(x) \le p(x), \forall x \in V.$$

当 $y \in V_0$ 时，有 $(\rho_0(y), y) \in W$，因此

$$\rho_0(y) - \rho(y) = \sigma((\rho_0(y), y)) = 0.$$

即 $\rho(y) = \rho_0(y)$，$\forall y \in V_0$。 ■

***Theorem* 1.1.7** （**Hahn-Banach Functional Extension Theorem**）*若 p 是标量场 K 上的线性空间 V 上的半范，而 ρ_0 是 V 的线性子空间 V_0 上的线性泛函，且*

$$|\rho_0(y)| \le p(y), \forall y \in V_0,$$

则存在 V 上的线性泛函 ρ，满足

$$|\rho(x)| \le p(x), \forall x \in V, \quad \rho(y) = \rho_0(y), \forall y \in V_0.$$

Proof. 若 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$，由定理 1.1.6，及 $p(x) = p(-x)$，结论成立。

现假设 $\mathbf{K} = \mathbf{C}$，并令 V_τ 为将 V 限制在标量场上后得到的实向量空间。那么 p 为 V_τ 上的次线性泛函，方程

$$\sigma_0(y) = Re\rho_0(y)$$

定义了 V_τ 的线性子空间 V_0 上的线性泛函 σ_0，且 $\sigma_0(y) \le p(y)$，$\forall y \in V_0$。

由定理 1.1.6，存在 V_τ 上的线性泛函 σ 满足

$$\sigma(x) \le p(x), \forall x \in V_\tau, \quad \sigma(y) = \sigma_0(y), \forall y \in V_0.$$

显然 σ 是 V 上的实线性泛函，由引理 1.1.3，存在 V 上的线性泛函 ρ 满足 $\sigma(x) = Re\rho(x)$，且有

$$\rho(y) = \sigma(y) - i\sigma(iy) = \sigma_0(y) - i\sigma_0(iy) = \rho_0(y), \forall y \in V_0.$$

任意给定 $x \in V$，可取标量 a 满足 $|a| = 1$，$|\rho(x)| = a\rho(x)$，则有

$$\begin{aligned} |\rho(x)| &= \rho(ax) \\ &= Re\rho(ax) \\ &= \sigma(ax) \\ &\leq p(ax) \\ &= |a|p(x) \\ &= p(x), \end{aligned}$$

即 $|\rho(x)| \leq p(x)$，$\forall x \in V$。 ■

1.2 拓扑向量空间

拓扑空间：设 X 为一个集合，若 $\mathcal{T}$ 为 X 的一族子集合且满足:

(1)X，$\emptyset \in \mathcal{T}$;

(2) 若 $A, B \in \mathcal{T}$，则 $A \cap B \in \mathcal{T}$;

(3) 若 $\tau_1 \subset \mathcal{T}$，则 $\bigcup_{A \in \tau_1} A \in \mathcal{T}$，

则称 $\mathcal{T}$ 为 X 的一个拓扑，$(X, \mathcal{T})$ 为一个拓扑空间，$\mathcal{T}$ 中的每一个集合为 X 的一个开集。此外，若 $U \in \mathcal{T}$，那么 $U^c = X \setminus U$ 称为 X 中的一个闭集。

邻域：设 $(X, \mathcal{T})$ 为一个拓扑空间，$x \in X$，若存在 $U \in \mathcal{T}$ 使得 $x \in U$，则称 U 为 x 的一个邻域。

关系：集合 A 上的一个二元关系是笛卡儿积 $A \times A$ 的一个子集 C。如果 C 是集合 A 上的一个二元关系，我们用记号 xCy 表示 $(x, y) \in C$，读作“x 与 y 有关系 C”。

偏序集：设 Λ 为非空集合，称二元关系 $B \subseteq \Lambda \times \Lambda$ 为集合 Λ 上的一个偏序关系（记为 $\geq$)，若其满足:

(1)$\forall x \in \Lambda$，$(x, x) \in B$;

(2)$\forall x, y \in \Lambda$，若 $(x, y) \in B$，且 $(y, x) \in B$，则 $x = y$;

(3)$\forall x, y, z \in \Lambda$，若 $(x, y) \in B$，且 $(y, z) \in B$，则 $(x, z) \in B$。

具有偏序关系的集合 Λ 就称为偏序集，记为 $(\Lambda, \geq)$。

定向集：设 $(\Lambda, \geq)$ 为偏序集，若 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$，$\exists \beta \in \Lambda$，使得 $\beta \geq \alpha_1, \beta \geq \alpha_2$，则称 $(\Lambda, \geq)$ 为定向集。

共尾: 集合 J 的子集 K 称为在 J 中是共尾的，若 $\forall \alpha \in J$，$\exists \beta \in K$，使得 $\beta \geq \alpha$。

注：若 J 是一个定向集，并且 K 在 J 中是共尾的，则 K 是一个定向集。（证明：K 可继承 J 的偏序关系，而定向性可由共尾性导出）

网（***net***）：设 $(\Lambda, \geq)$ 为定向集，则 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X$ 称为 X 的一个网。

收敛：设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 的一个网，$x_0 \in X$，若对于 x_0 的每一个邻域 U，存在某个 α_U，使得对于任意的 $\alpha \geq \alpha_U$，有 $x_\alpha \in U$，则称网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 收敛于 x_0，记为 $x_\alpha \to x_0$。

触点（或称聚点，***adherent point***）：设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$x_0 \in X$，$A \subseteq X$。若对于 x_0 的任意一个邻域 U，有 $U \cap A \neq \emptyset$，则称 x_0 为集合 A 的一个触点。

闭包：集合 A 的所有触点的集合称为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$。

命题：x_0 是集合 A 的触点当且仅当存在 A 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，使得 $x_\alpha \to x_0$。

证明：若存在 A 中的一个网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，使得 $x_\alpha \to x_0$，则对于 x_0 的任意一个邻域 U，存在某个 $\alpha_U \in \Lambda$，使得对于任意的 $\alpha \geq \alpha_U$，有 $x_\alpha \in A \cap U$，故 $U \cap A \neq \emptyset$。由 U 任意性即得 x_0 是集合 A 的触点。

为了找网，需先定义定向集。为了定义定向集，需先定义一个偏序关系。设 x_0 的所有邻域的集合为 Λ，定义 $B \subseteq \Lambda \times \Lambda$ 为：

$$B = \{(U, V) | U \subseteq V, U, V \in \Lambda\},$$

则易见 B 为 Λ 上的一个偏序关系，记为 $\geq$。容易验证 $(\Lambda, \geq)$ 为定向集。接下去找所需的网。若 x_0 为集合 A 的触点，则对于 x_0 的任意一个邻域 U，存在 $x_U \in U \cap A$，取网 $\{x_U\}_{U\in\Lambda}$，则容易验证该网收敛于 x_0。证毕。

命题：设 $(X, \mathcal{T})$ 为一个拓扑空间，$A \subseteq X$，则 A 是闭集当且仅当 $A = \overline{A}$。

证明：显然 $A \subset \overline{A}$，$\overline{A}$ 为闭集。

若 A 是闭集，则 $X\setminus A$ 是开集，其每一点都不是 A 的触点，故 $\overline{A}\subset A$，从而有 $A=\overline{A}$。

拓扑子空间：设 $(X,\mathcal{T})$ 为一个拓扑空间，$Y\subseteq X$，$\mathcal{T}|_Y=\{U\cap Y|U\in\mathcal{T}\}$，称 $(Y,\mathcal{T}|_Y)$ 为 $(X,\mathcal{T})$ 的一个拓扑子空间。

Hausdorff 空间：设 $(X,\mathcal{T})$ 为一个拓扑空间，若对于任意的 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$，存在 x_1 的一个邻域 V_1 和 x_2 的一个邻域 V_2，使得 $V_1\cap V_2=\emptyset$，则称 $(X,\mathcal{T})$ 为 Hausdorff 空间。

连续函数：设 $(X,\mathcal{T})$，$(Y,\mathcal{S})$ 为两个拓扑空间，$f:(X,\mathcal{T})\to(Y,S)$ 为一个映射。设 $x_0\in X$, 若对于 $f(x_0)$ 的每个邻域 V，存在 x_0 的一个邻域 U，使得 $f(U)\subseteq V$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。若 $f(x)$ 在 X 的每一点上都连续，则称 $f(x)$ 在 X 上是连续的。

命题（连续函数等价定义）：设 $(X,\mathcal{T})$，$(Y,\mathcal{S})$ 为两个拓扑空间，$f:(X,\mathcal{T})\to(Y,S)$ 为一个映射，$x_0\in X$。那么 $f(x)$ 在 x_0 处是连续的当且仅当对于 X 中的任意一个网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，当 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 收敛于 x_0 时，$\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 收敛于 $f(x_0)$。

证明：设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为收敛于 x_0 的任意一个网，V 为 Y 中 $f(x_0)$ 的任意一个邻域。

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则存在 X 中 x_0 的一个邻域 U，使得 $f(U)\subseteq V$。由网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 收敛于 x_0 可知存在某个 $\alpha_U\in\Lambda$，使得对于任意的 $\alpha\geq\alpha_U$，都有 $x_\alpha\in U$，从而有 $f(x_\alpha)\in f(U)\subseteq V$。由任意性可得 $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 收敛于 $f(x_0)$。

现假设对于任意的收敛于 x_0 的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，都有 $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 收敛于 $f(x_0)$。对于 Y 中 $f(x_0)$ 的任意一个邻域 V，令 $U=f^{-1}(V)$，则存在 X 中 x_0 的某个邻域 $U'\subseteq U$。如若不然，则有 $x_0\in\overline{X\setminus U}$。从而存在 $X\setminus U$ 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 收敛于 x_0。但此时显然有 $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 不收敛于 $f(x_0)$，与假设矛盾。由 V 任意性即得 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

---

f 一致连续：$\forall W$ 中 0 的邻域 W_0，$\exists V$ 中 0 的邻域 V_0，满足 $\forall x,y\in V_0$，有 $f(x)-f(y)\in W_0$。

拓扑基：设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$。若对于 X 中的每个开集 U，存在 $\mathcal{B}$ 的子集族 $\mathcal{B}_U$，使得 $U=\bigcup\{A:A\in\mathcal{B}_{\mathcal{U}}\}$，则称 $\mathcal{B}$ 为 $(X,\mathcal{T})$ 的一个基。

命题（拓扑基等价定义）：集族 $\mathcal{B}$ 是集合 $X=\bigcup\{B|B\subseteq\mathcal{B}\}$ 关于某种拓扑的一个基当且仅当对于任意的 $U,V\in\mathcal{B}$ 以及 $x\in U\cap V$，存在某个 $W\in\mathcal{B}$，使得 $x\in W$，且 $W\subseteq U\cap V$。

证明：设集族 $\mathcal{B}$ 是集合 $X=\bigcup\{B|B\in\mathcal{B}\}$ 关于某种拓扑的一个基，那么对于任意的 $U,V\in\mathcal{B}$，由基定义知 U 与 V 皆为开集，故 $U\cap V$ 为 X 中的开集，从而存在 $\mathcal{B}$ 的子集族 $\mathcal{B}_1$，使得 $U\cap V=\bigcup\{A:A\in\mathcal{B}_1\}$。因此，对于任意的 $x\in U\cap V$，存在某个 $A\in\mathcal{B}_1$，使得 $x\in A$。易见 $A\in\mathcal{B}$，$A\subseteq U\cap V$。

设对于任意的 $U,V\in\mathcal{B}$ 以及 $x\in U\cap V$，存在某个 $W\in\mathcal{B}$，使得 $x\in W$，且 $W\subseteq U\cap V$。记 $X=\bigcup\{B|B\in\mathcal{B}\}$，$\mathcal{T}=\{U|\forall x\in U,\exists W\in\mathcal{B},s.t.\quad x\in W,W\subseteq U\}$，可以验证 ‘ $\mathcal{T}$ 为 X 的一个拓扑，而 $\mathcal{B}$ 为 $(X,\mathcal{T})$ 的一个基。

乘积拓扑：设 $(X,\mathcal{T}_1)$，$(Y,\mathcal{T}_2)$ 为两个拓扑空间，$\mathcal{T}=\{U\cap V|U\in\mathcal{T}_1,V\in\mathcal{T}_2\}$。对于任意的 (U_1,V_1)，$(U_2,V_2)\in\mathcal{T}$，有 $(U_1,V_1)\cap(U_2,V_2)=(U_1\cap U_2)\cap(V_1\cap V_2)\in\mathcal{T}$，故 $\mathcal{T}$ 是 $X\times Y$ 的某种拓扑的一个基，该拓扑称为 $X\times Y$ 的乘积拓扑，而 X，Y 称为坐标空间。

投影映射：设 $P_X:X\times Y\to X,(x,y)\mapsto x$，$P_y:X\times Y\to Y,(x,y)\mapsto y$。若 $U\in\mathcal{T}_\infty$，则 $P_X^{-1}(U)=U\times Y$，故 P_X 是连续的（$X\times Y$ 具有乘积拓扑）。同理，P_Y 亦连续。P_X，P_Y 分别称为从 $X\times Y$ 到 X，Y 的投影映射。

拓扑的强弱：设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 是给定集合上的两个拓扑，若 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$，则称拓扑 $\mathcal{T}$ 弱于 $\mathcal{T}'$。

—注：在 James Munkres 的 Topology 一书中，不采用容易引起混淆的强弱概念，而采用粗细的概念，即此处的弱于对应于粗于 (***coarser***)，而强于对应于细于 (***finer***)；当包含关系为真包含关系时，则分别为严格粗于 (***strictly coarser***) 和严格细于 (***strictly finer***)。

命题：设 $(X,\mathcal{T}_1)$，$(Y,\mathcal{T}_2)$ 为两个拓扑空间，

$$P_X:X\times Y\to X,(x,y)\mapsto x,$$

$$P_Y:X\times Y\to Y,(x,y)\mapsto y,$$

则 $X\times Y$ 的乘积拓扑 $\mathcal{T}$ 是 $X\times Y$ 的保证这两个映射都连续的拓扑中最弱的。

证明：设 $\mathcal{T}'$ 是 $X\times Y$ 的任意一个保证这两个映射都连续的拓扑，而 $X\times Y$ 关于乘积拓扑 $\mathcal{T}$ 的基记为 $\mathcal{B}$。对于任意的 $B\in\mathcal{B}$，存在 $U_1\in\mathcal{T}_1$，$U_2\in\mathcal{T}_2$，使得 $B=U_1\cap U_2$。而 $P_X^{-1}(U_1)=U_1\times Y$，$P_Y^{-1}(U_2)=X\times U_2$，由 P_X 及 P_Y 皆在 $(X\times Y,\mathcal{T}')$ 上连续可得 $U_1\times Y\in\mathcal{T}'$，$X\times U_2\in\mathcal{T}'$，而 $(U_1\times Y)\cap(X\times U_2)=U_1\times U_2$，故 $U_1\times U_2\in\mathcal{T}'$。由 B 任意性以及基的定义可知 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$，即 $\mathcal{T}$ 弱于 $\mathcal{T}'$。由 $\mathcal{T}'$ 任意性即得 $X\times Y$ 的乘积拓扑 $\mathcal{T}$ 是 $X\times Y$ 的保证这两个映射都连续的拓扑中最弱的。

线性拓扑空间 (又称拓扑线性空间，拓扑向量空间)：假设集合 V 既是某个标量场 K 上的线性空间，又是一个 Hausdorff 空间。如果它们的代数结构和拓扑结构如此相关联，即映射：

$$\begin{aligned}(x,y)&\mapsto x+y: V\times V\to V,\\(a,x)&\mapsto ax\quad\ : K\times V\to V,\end{aligned}$$

是连续的，其中 $V\times V$ 与 $K\times V$ 的拓扑皆为乘积拓扑，则称 V 为一个线性拓扑空间。

线性拓扑空间举例：标量场 K 上的 K^n

证明思路：

K^n 按照通常数的加法和数乘可构成线性空间。K 按照其上的度量可定义其度量拓扑，K^n 则取乘积拓扑。

复线性空间可以被视为实线性空间，只需限制相应的标量场 K。线性拓扑空间 V 的线性子空间关于相对拓扑也是线性拓扑空间。

在一个线性拓扑空间 V 中，给定的拓扑通常称之为初始拓扑（***initial topology***），为了和其它可以自然引进的拓扑加以区分。

我们之后遇到的初始拓扑都是 $Hausdorff$ 的。在建立理论的早期部分时，通常不假设初始拓扑为 $Hausdorff$ 的。但是，通过简单的商过程可以立即将其变为 $Hausdorff$ 的情形（在原空间中定义一个定价关系，即不能用开集分离的点是等价的，然后基于该等价关系取自然映射，再取商拓扑（参见 James Munkres 的 Topology 一书）即可）。

线性拓扑空间的一些良好性质

若 V_1 为线性拓扑空间 V 的线性子空间，那么 V_1 的闭包也是一个线性子空间。

实际上，设 $x_0, y_0 \in V_0$，a, b 为标量，那么 x_0, y_0 属于 $V_1 \times V_1$ 的闭包 $V_0 \times V_0$，因此是 $V_1 \times V_1$ 中的某个网 $\{(x_j, y_j)\}$ 的极限。因为 V_1 为 V 的子空间，映射 $(x, y) \mapsto ax + by : V \times V \to V$ 是连续的（线性拓扑空间定义），我们有

$$ax_j + by_j \in V_1, \quad ax_j + by_j \to ax_0 + by_0,$$

因此 $ax_0 + by_0$ 属于 V_1 的闭包 V_0。

类似的，可以证明若 V 的某个子集是平衡的或者凸的，那么其闭包也是平衡的或者凸的。

V 中的开集 G 完全由内部点构成：设 $x \in G$，$y \in V$，因映射 $a \mapsto x + ay : R \to V$ 连续，并且将 0 映射到 $x \in G$，故其将某个实区间 $(c, -c)$ 映射到 G 中；特别的，$x + ay \in G$，只要 $0 \leq a < c$。

假设 V 是标量场 K 上的线性拓扑空间，$x \in V$，$W \subseteq V$。

因为连续映射 $x \mapsto x + x_0 : V \to V$ 有连续逆映射 $x \mapsto x - x_0$，故 W 是 0 的一个邻域当且仅当 $x_0 + W$ 是 x_0 的一个邻域。相应的，若确定了 0 的一个邻域基，那么 V 的拓扑也就确定了。

若 W 是 0 的一个邻域，那么对于任意的非零标量 a，aW 也是 0 的一个邻域，因一一映射 $x \mapsto ax : V \to V$ 是同胚的（bicontinuous）。特别的，$-W$ 是 0 的一个邻域。

若 W 是 0 的一个邻域，由映射 $(x, y) \mapsto x + y$ 在 $(0, 0)$ 点处的连续性知存在 0 的一个邻域 V_0，使得 $V_0 + V_0 \subseteq W$。

若 W 是 0 的一个邻域，由映射 $(a, x) \mapsto ax$ 在 $(0, 0)$ 点处的连续性，存在 V 中 0 的一个邻域 V_1，和一个正实数 ϵ，使得 $ax \in W$，$\forall x \in V_1, \forall |a| \leq \epsilon$。由此可得，$\bigcup\{aV_1 : 0 < |a| \leq \epsilon\}$ 是 W 的一个平衡开子集。故0 的每个邻域必包含一个 0 的平衡邻域。

***Propostion* 1.2.1** *设 V 和 W 是同一个标量场 K 上的线性拓扑空间，$T : V \to W$ 是一个线性算子。*

(i) 若 $x_0 \in V$，T 在 x_0 处连续，那么 T 在 V 上一致连续。(ii) 若 C 是 V 的平衡凸子集，$T|C$ 在 0 处连续（平衡集必包含 0），那么 $T|C$ 在 C

上一致连续。

Proof. (i) 因 T 在 x_0 处连续，对于 W 中 0 的任意一个邻域 W_0，存在 V 中 0 的一个邻域 V_0，使得 $Tx \in Tx_0 + W_0$，$\forall x \in x_0 + V_0$。因此，当 $y - x \in V_0$ 时，有 $x_0 + y - x \in x_0 + V_0$，从而 $Tx_0 + Ty - Tx \in Tx_0 + W_0$，故 $Ty - Tx \in W_0$。因此 T 在 V 上一致连续。

(ii) 因 $T|C$ 在 0 处连续，对于 W 中 0 的任意一个邻域 W_0，存在 0 的一个平衡邻域 V_0 使得 $Tx \in \frac{1}{2}W_0$，$\forall x \in V_0 \cap C$。

假设 $x, y \in C$，$y - x \in V_0$。因为 C 是凸的，C 和 V_0 都是平衡的，我们有 $\frac{1}{2}Ty - \frac{1}{2}Tx \in \frac{1}{2}W_0$。因此，$Tx - Ty \in W_0$，$\forall x, y \in C, x - y \in V_0$。这意味着 $T|C$ 在 C 上一致连续。 ■

***Lemma* 1.2.2** *设 V 是一个线性拓扑空间，ρ 是 V 上的线性泛函，p 是 V 上的一个半范。*

(i) 若存在 V 中的非空开集 G 和实数 c，使得 $Re\rho(x) < c$，$\forall x \in G$，则 ρ 在 V 上一致连续。

(ii) 若 p 在 V 中 0 的某个邻域内有界，则 p 在 V 上一致连续。

Proof. (i) 若 G 和 c 有所述性质，我们可以取 $x_0 \in G$ 及 V 中 0 的一个平衡邻域 V_0，使得 $x_0 + V_0 \subseteq G$。给定 V_0 中任意的一个 x，可取一个标量 a 满足 $|a| = 1$ 且 $|\rho(x)| = \rho(ax)$（$a\rho(x) = |\rho(x)|$，$a = \frac{Re\rho(x) - iIm\rho(x)}{|\rho(x)|}$）。则有 $ax \in V_0$（因 V_0 为平衡的），$x_0 + ax \in x_0 + V_0 \subseteq G$，因此

$$c > Re\rho(x_0 + ax) = Re\rho(x_0) + |\rho(x)|.$$

从而有 $|\rho(x)| < b$，$b = c - Re\rho(x_0) > 0$，$\forall x \in V_0$。

给定任意的正实数 ϵ，则对于任意的属于 0 的邻域 $\epsilon b^{-1}V_0$ 的 x，有 $|\rho(x)| < \epsilon$。因此 ρ 在 0 处连续，从而由命题 1.2.1 知 ρ 在 V 上一致连续。

(ii) 假设存在 V 中 0 的邻域 V_0 和一个正实数 b，使得 $p(x) < b$，$\forall x \in V_0$。则给定任意的正实数 ϵ，集合 $\epsilon b^{-1}V_0$ 是 V 中 0 的一个邻域，且 $\forall x, y \in V$，当 $y - x \in \epsilon b^{-1}V_0$ 时，有

$$|p(x) - p(y)| \le p(x - y) < \epsilon.$$

从而 p 在 V 上一致连续。 ■

***Corollary* 1.2.3** *线性拓扑空间 V 上的线性泛函 ρ 连续当且仅当其零空间 $\rho^{-1}\{0\}$ 在 V 中是闭的。*

Proof. 不防设 $\rho \neq 0$。若 ρ 连续，显然有 $\rho^{-1}\{0\}$ 在 V 中是闭的。

反过来，设 $\rho^{-1}\{0\}$ 在 V 中是闭的。则可取 $x_0 \in V$，使得 $\rho(x_0) = 1$。显然 $x_0 \notin \rho^{-1}\{0\}$，则存在 V 中 0 的一个平衡邻域 V_0，使得 $x_0 + V_0$ 与 $\rho^{-1}\{0\}$ 交集为空。

$\forall x \in V_0$，若 $|\rho(x)| \geq 1$，可取标量 a 满足 $|a| \leq 1$，$\rho(ax) = -1$。则有 $ax \in V_0$，$x_0 + ax \in x_0 + V_0$，$\rho(x_0 + ax) = 0$，这和 $x_0 + V_0$ 与 $\rho^{-1}\{0\}$ 交集为空矛盾。从而有 $|\rho(x)| \leq 1$，$\forall x \in V_0$。故由引理 1.2.2(i) 知 ρ 连续。 ■

局部凸空间（***locally convex space***）：线性拓扑空间，其拓扑有一个由凸集构成的基。

***Theorem* 1.2.4** *设 V 为一个实或者复向量空间，Γ 是 V 上的一族半范，其将 V 中的点以如下方式加以分离：若 x 是 V 中的一个非零向量，则存在某个 $p \in \Gamma$，满足 $p(x) \neq 0$。那么 V 上就有一个局部凸拓扑，在该拓扑下，对于 V 中的每个 x_0，如下形式的集族*

$$V(x_0 : p_1, \cdots, p_m; \epsilon) = \{x \in V : p_j(x - x_0) < \epsilon, j = 1, \cdots, m\},$$

是 x_0 的一个邻域基，其中 $\epsilon > 0$，$p_1, \ldots, p_m \in \Gamma$。基于该拓扑，$\Gamma$ 中的每个半范都是连续的。此外，V 上的每个局部凸拓扑，都可以以这种方式由某个合适的半范族产生。

局部凸空间：有充分多的连续线性泛函。

***Corollary* 1.2.5** *局部凸空间中，0 有一个由平衡凸集构成的邻域基。*

Proof. 集合 $V(0 : p_1, \cdots, p_m; \epsilon)$ 是平衡的和凸的。 ■

***Propostion* 1.2.6** *设 V_1 和 V_2 是同一个标量场 K 上的局部凸空间；Γ_j 是 V_j 上产生了 V_j 的拓扑的半范分离族，$j = 1, 2$。*

(i)V_1 上的半范 p 是连续的当且仅当存在一个正实数 C 和有限个 Γ_1 中的元素 $p_1, \ldots, p_m$，使得

$$p(x) \leq Cmax\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}, \forall x \in V_1.$$

(ii) 线性算子 $T : V_1 \to V_2$ 是连续的当且仅当对于任意给定的 $q \in \Gamma_2$，存在一个正实数 C 和有限个 Γ_1 中的元素 $p_1, \ldots, p_m$，使得

$$q(T(x)) \leq Cmax\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}, \forall x \in V_1.$$

(iii)V_1 上的线性泛函 ρ 是连续的当且仅当存在一个正实数 C 和有限个 Γ_1 中的元素 $p_1, \ldots, p_m$，使得

$$|\rho(x)| \leq Cmax\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}, \forall x \in V_1.$$

Proof. (i) 若 p 是连续的，则集合 $\{x \in V_1 : p(x) < 1\}$ 是 V_1 中 0 的一个邻域，故其包含了某个基本邻域 $V(0 : p_1, \ldots, p_m; \epsilon)$，其中 $\epsilon > 0$，$p_1, \ldots, p_m \in \Gamma_1$。

现假设存在某个 $x \in V_1$，满足 $p(x) > \epsilon^{-1} max\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}$。则可取正数 c 使得 $p(cx) = 1$，并仍记 cx 为 x。

则有 $p_j(x) < \epsilon$，$j = 1, \ldots, m$。这意味着 $x \in V(0 : p_1, \ldots, p_m; \epsilon)$。而 $p(x) = 1$，这与 $V(0 : p_1, \ldots, p_m; \epsilon) \subseteq \{x \in V_1 : p(x) < 1\}$ 矛盾。从而有

$$p(x) \leq Cmax\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}, \forall x \in V_1,$$

其中 $C = \epsilon^{-1}$。

反过来，则有 p 在 $V(0 : p_1, \ldots, p_m; 1)$ 上有界，由引理 1.2.2(ii)，p 在 V_1 上连续。

(ii) 当 q 是 V_2 上的半范时，$q \circ T$ 是 V_1 上的半范。那么由 (i) 可知，我们只需证：T 连续当且仅当对于任意的 $\rho \in \Gamma_2$，$q \circ T$ 连续。由定理 1.2.4，Γ_2 的每个元素 q 在 V_2 上连续，故 T 连续自然导出 $q \circ T$ 连续。

反过来，设对于每个 $q \in \Gamma_2$，$q \circ T$ 连续。V_2 中 0 的每个邻域包含一个基本邻域 $V(0 : p_1, \ldots, p_m; \epsilon)$，其中 $\epsilon > 0$，$q_1, \ldots, q_m \in \Gamma_2$。因 $q_j \circ T$ 连续，$j = 1, \ldots, m$，故集合

$$W = \{x \in V_1 : q_j(Tx) < \epsilon, j = 1, \ldots, m\}$$

是 V_1 中 0 的一个邻域，且

$$T(W) \subseteq V(0 : q_1, \ldots, q_m; \epsilon) \subseteq V.$$

因此 T 在 0 处连续，从而在 V_1 上连续。

(iii) 标量场 K 是一个局部凸空间，其通常的拓扑由单个范数（模函数，modulus function）导出，而 $\rho : V_1 \to K$ 是一个线性算子，故 (iii) 是 (ii) 的一种特殊情况。 ∎

Hahn-Banach 分离定理

***Theorem* 1.2.7** *若 Y 和 Z 是线性拓扑空间 V 上的两个不相交的非空凸子集，Y 是开的，则存在 V 上的一个连续线性泛函 ρ 和一个实数 k，使得*

$$Re\rho(y) > k \geq Re\rho(z), \forall y \in Y, \forall z \in Z.$$

此外，若 Z 也是开的，则 $k > Re\rho(z)$，$\forall z \in Z$。

Proof. 因线性拓扑空间中的开集完全由内部点构成，由定理 1.1.2 和定理 1.1.4 可知存在 V 上的线性泛函 ρ 满足所述不等式；再由引理 1.2.2(i) 可知 ρ 在 V 上连续。 ■

***Theorem* 1.2.8** *若 Y 和 Z 是局部凸空间 V 上的两个不相交的非空闭凸子集，至少有一个是紧的，则存在实数 a，b 以及 V 上的连续线性泛函，使得*

$$Re\rho(y) \geq a > b \geq Re\rho(z), \forall y \in Y, \forall z \in Z.$$

***Corollary* 1.2.9** *若 x 是局部凸空间 V 中的一个非零向量，则存在 V 上的连续线性泛函 ρ，满足 $\rho(x) \neq 0$。*

***Corollary* 1.2.10** *若 Z 是局部凸空间 V 的闭凸子集，$y \in V \setminus Z$，则存在 V 上的连续线性泛函 ρ 和一个实数 b 满足*

$$Re\rho(y) > b, Re\rho(z) \leq b, \forall z \in Z.$$

***Corollary* 1.2.11** *若 Z 是局部凸空间 V 的闭子空间，$y \in V \setminus Z$，则存在 V 上的连续线性泛函 ρ 满足*

$$Re\rho(y) \neq 0, \rho(z) = 0, z \in Z.$$

***Corollary* 1.2.12** *（Hahn-Banach 延拓定理）若 ρ_0 是局部凸空间 V 的子空间 V_0 上的连续线性泛函，则存在 V 上的连续线性泛函 ρ 满足 $\rho|V_0 = \rho_0$。*

Proof. 设 Γ 是一族通过定理 1.2.4 中的方式产生了 V 上的拓扑的半范。将 Γ 中的每个元素限制在 V_0 上，我们得到产生 V_0 上的相对拓扑的一族半范。因 ρ_0 在 V_0 上连续，由命题 1.2.6(iii)，存在一个正实数 C 和有限个 Γ 中的元素 $p_1, \ldots, p_m$，使得

$$|\rho_0(y)| \leq Cmax\{p_1(y), \ldots, p_m(y)\}, \forall y \in V_0.$$

因方程 $p(x) = Cmax\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}$ 定义了 V 上的一个半范 p，则由定理 1.1.7，ρ_0 可以延拓为 V 上的一个线性泛函 ρ，满足

$$|\rho(x)| = p(x) \leq Cmax\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}, \forall x \in V.$$

再由命题 1.2.6(iii)，ρ 连续。 ■

设 V 为标量场 K 上的线性空间，F 为 V 上的一族线性泛函，其将 V 中的点以如下方式加以分离：若 x 是 V 中的一个非零向量，则存在某个 $\rho \in F$，满足 $\rho(x) \neq 0$。当 $\rho \in F$ 时，方程 $p_\rho(x) = |\rho(x)|(x \in V)$ 定义了 V 上的一个半范 p_ρ。

基于此，可定义一族分离半范：$\{p_\rho : \rho \in F\}$。由定理 1.2.4，这族半范可产生 V 上的一个局部凸拓扑，称为由 F 诱导的 V 上的弱拓扑（**weak topology**），记为 $\sigma(V, F)$。在该拓扑下，V 中的每个点 x_0 有一个由所有如下形式的集合构成的邻域基：

$$V(x_0 : \rho_1, \cdots, \rho_m; \epsilon) = \{x \in V : |\rho_j(x) - \rho_j(x_0)| < \epsilon, j = 1, \cdots, m\},$$

其中 $\epsilon > 0$，$\rho_1, \cdots, \rho_m \in F$。

F 中的每个线性泛函相对于 $\sigma(V, F)$ 都是连续的，因 $\forall x_0 \in V$，$\forall \epsilon > 0$，有 $\{x \in V : |\rho(x) - \rho(x_0)| < \epsilon\} = V(x_0; \rho; \epsilon)$ 为 V 中开集。

此外，$\sigma(V, F)$ 是 V 上的保证 F 中的每个线性泛函都连续的拓扑中最弱的：对于 V 上的任意一个保证 F 中的每个线性泛函都连续的拓扑 $\mathcal{T}$，显然所有形如 $V(x_0; \rho_1, \cdots, \rho_m; \epsilon)$ 的集合都属于 $\mathcal{T}$，因此 $\mathcal{T}$ 强于（细于）$\sigma(V, F)$。

***Theorem* 1.2.13** *设 V 是标量场 K 上的线性空间，F 是 V 上的由线性泛函构成的分离族，L 为 F 中的元素的所有有限线性组合构成的集合。那么 $\sigma(V, L)$ 和 $\sigma(V, F)$ 一致，且 L 是 V 上的所有 $\sigma(V, F)-$ 连续的线性泛函的集合。*

Proof.

(i) 因 $F \subseteq V$，故 $\sigma(V, F)$ 粗于 $\sigma(V, L)$。

L 中的每个线性泛函 ρ 都是 F 中的元素的线性组合，而 F 中的每个元素都是 $\sigma(V, F)-$ 连续的，故 ρ 也是 $\sigma(V, F)-$ 连续的。又因 $\sigma(V, F)$ 是保证 L 中每个元素都连续的拓扑中最粗的，故 $\sigma(V, L)$ 粗于 $\sigma(V, F)$。

因此，$\sigma(V,L)$ 和 $\sigma(V,F)$ 一致。

(ii) 接下去证明每个 $\sigma(V,F)-$ 连续的线性泛函 ρ_0 都在 L 中。

给定某个这样的 ρ_0，由命题 1.2.6(iii)，存在 F 中的元素 $\rho_1,\cdots,\rho_m$ 以及正常数 C，使得

$$|\rho_0(x)| \le Cmax\{|\rho_1(x)|,\cdots,|\rho_m(x)|\}, \forall x \in V.$$

特别的，$\forall x \in V$，若 $\rho_j(x) = 0, j = 1,2,\cdots,m$，则 $\rho_0(x) = 0$。由命题 1.1.1，ρ_0 是 $\rho_1,\cdots,\rho_m$ 的线性组合，因而 $\rho_0 \in L$。 ■

***Propostion* 1.2.14** *设 V 是标量场 K（R 或 C）上的线性空间，F 是 V 上的由线性泛函构成的分离族，φ 是从拓扑空间 S 到 V 的一个映射。那么 φ 关于 V 上的 $\sigma(V,F)$ 拓扑连续当且仅当对于任意的 $\rho \in F$，复合映射 $\rho \circ \varphi : S \to K$ 是连续的。*

Proof.

(i) 因为 F 中的每个元素都是 $\sigma(V,F)$ 连续的，故 φ 的连续性自然就导出复合映射 $\rho \circ \varphi$ 的连续性。

(ii) 反过来，设对于 F 中的每个元素 ρ，$\rho \circ \varphi$ 都连续。为了说明 φ 的连续性，只需证明对于任意一个基本的 $\sigma(V,F)-$ 开集 $V_0 = V(x_0 : \rho_1,\cdots,\rho_m;\epsilon)$，有 $\varphi^{-1}(V_0)$ 是 S 中的开集。

由 $\rho_j \in F$，可知 $\rho_j \circ \varphi$ 连续，$j = 1,2,\cdots,m$。又

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(V_0) &= \{s \in S : \varphi \in V_0\} \\ &= \{s \in S : |\rho_j(\varphi(s)) - \rho_j(x_0)| < \epsilon, j = 1,\cdots,m\},\end{aligned}$$

故 $\varphi^{-1}(V_0)$ 是开集。从而 φ 关于 V 上的 $\sigma(V,F)$ 拓扑连续。 ■

假设 V 是局部凸空间。V 上的所有连续线性泛函构成的集合是 V 的代数对偶空间的子空间，记作 $V^\sharp$，并称为 V 上的连续对偶空间。由推论 1.2.9，$V^\sharp$ 将 V 中的点加以分离。拓扑 $\sigma(V,V^\sharp)$ 称为 V 上的弱拓扑。它是保证所有的 $V^\sharp$ 中的线性泛函都连续的拓扑中最粗的。特别的，它比 V 上的初始拓扑粗。当关于弱拓扑使用连续性或紧性等拓扑学概念时，我们称之为弱连续性，弱紧性，等等。由定理 1.2.13，其中 $F = L = V^\sharp$，可得 V 上的弱连续线性泛函恰好就是 $V^\sharp$ 中的元素；也就是说，一个 V 上的线性

泛函是弱连续的当且仅当其关于 V 上的初始拓扑是连续的（初始拓扑如何给定？若初始拓扑是由某个由线性泛函构成的分离族诱导的弱拓扑，则和此处的弱拓扑一致？）。

***Propostion* 1.2.15** *若 V 和 W 是局部凸空间，$T: W \to V$ 是连续线性算子，那么 T 关于 V 和 W 上的弱拓扑亦连续。*

Proof. 用命题 1.2.14 证。

对于任意的 $\rho \in V^\sharp$，由 $V^\sharp$ 定义知 ρ 关于 V 的初始拓扑连续，故 W 上的线性泛函 $\rho \circ T$ 关于 W 上的初始拓扑是连续的，因此关于弱拓扑 $\sigma(W, W^\sharp)$ 亦连续。由命题 1.2.14，其中 S 取为 W，W 的拓扑取为弱拓扑，则由 ρ 任意性可得 T 关于拓扑 $\sigma(W, W^\sharp)$ 和 $\sigma(V, V^\sharp)$ 是连续的。 ■

***Propostion* 1.2.16** *（Mazur 定理）局部凸空间 V 的凸子集 Z 在 V 上的初始拓扑和弱拓扑下的闭包相同。*

Proof. 因 V 上的弱拓扑粗于初始拓扑 τ，故 Z 的 $\tau-$ 闭包 Z^- 包含于 Z 的弱闭包，从而只需证：若 $y \in V$ 且 y 不属于 Z 的 $\tau-$ 闭包 Z^-，则 y 不属于 Z 的弱闭包。因 Z^- 是凸集，由推论 1.2.10 可知，存在一个 V 上的连续线性泛函 ρ 和一个实数 b，使得

$$Re\rho(y) > b, \quad Re\rho(z) \leq b, \forall z \in Z^-.$$

因 ρ 亦是弱连续的，故集合 $S = \{x \in V : Re\rho(x) \leq b\}$ 是弱闭的。又 S 包含 Z，因而也包含 Z 的弱闭包。而 $y \notin S$，故命题得证。 ■

当 V 是局部凸空间，$x \in V$，那么方程

$$\hat{x}(\rho) = \rho(x), \rho \in V^\sharp$$

定义了连续对偶空间 $V^\sharp$ 上的一个线性泛函。集合

$$\hat{V} = \{\hat{x} : x \in V\}$$

是 $V^\sharp$ 的代数对偶空间的一个线性子空间。其将 $V^\sharp$ 中的点加以分离，因：若 $\rho \in V^\sharp$，且 $\hat{x} = 0$，$\forall x \in V$，则 $\rho(x) = 0$，$\forall x \in V$，从而 $\rho = 0$。

我们经常将由 $\hat{V}$ 诱导的弱拓扑记作 $\sigma(V^\sharp, V)$，而不是 $\sigma(V^\sharp, \hat{V})$，并且称 $\sigma(V^\sharp, V)$ 为弱 * 拓扑，有时也称之为 $V^\sharp$ 上的 w^*- 拓扑。

注意到，$V^\sharp$ 中的每个元素 ρ_0 有一个由如下形式的集合构成的邻域基：

$$\{\rho \in V^\sharp : |\rho(x_j) - \rho_0(x_j)| < \epsilon, j = 1, \ldots, m\},$$

其中 $\epsilon > 0$，$x_1, \ldots, x_m \in V$。由定理 1.2.13，取 $V = V^\sharp$，$F = L = \hat{V}$，$V^\sharp$ 上的弱 * 连续线性泛函恰好就是 $\hat{V}$ 中的元素；因此我们有如下结果：

***Propostion* 1.2.17** *（弱 * 连续等价定义）在一个局部凸空间 V 的连续对偶空间 $V^\sharp$ 上的一个线性泛函 ω 是弱 * 连续的当且仅当存在 V 中的一个元素 x，使得对于 $V^\sharp$ 中的每个元素，有 $\omega(\rho) = \rho(x)$。*

假设 V 是一个局部凸空间，Y 为 V 的子集，X 为 V 的凸子集。

Y 的闭凸包（***closed convex hull***）：Y 的凸包 coY 的闭包 $\overline{co}Y$。这是包含 Y 的最小的闭凸集。

X 中的元素 x_0 称为是 X 的端点（***extreme point***），若 x_0 的凸组合 $x_0 = (1-a)x_1 + ax_2$（其中 $0 < a < 1$，x_1 和 x_2 属于 X）表示方式唯一，即 $x_1 = x_2 = x_0$。

称 X 的一个非空凸子集 F 为 X 的一个面（***face***），若如下条件

$$0 < a < 1, \quad x_1, x_2 \in X, \quad (1-a)x_1 + ax_2 \in F$$

的成立意味着 $x_1, x_2 \in F$。

注意到 x_0 为 X 的一个端点当且仅当单点集 $\{x_0\}$ 是 X 的一个面。

显然，若 X 的一族面有非空交集，那么这个交集本身也是 X 的一个面。

此外，若 Y 是 X 的一个面，Z 是 Y 的一个面，那么 Z 是 X 的一个面。特别的，X 的面的一个端点也是 X 的一个端点。

***Lemma* 1.2.18** *若 F 是凸集 X 的一个面，$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in F$，其中 $x_1, \ldots, x_n \in X$，$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 1$，$a_j$ 为非负实数，$j = 1, \ldots, n$，则当 $a_j > 0$（$j = 1, \ldots, n$）时有 $x_j \in F$。*

Proof. 只需证若 $a_1 > 0$，则 $x_1 \in F$。

若 $a_1=1$，则 $a_2=a_3=\cdots=a_n=0$，故 $x_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\in F$。若 $0<a_1<1$，令 $a=1-a_1$，令 y 为 $x_2,\ldots,x_n$ 的凸组合 $a^{-1}(a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$（$\sum\limits_{j=2}^{n}a_j=1-a_1=a$）。则有 $0<a<1$，$x_1,y\in X$，及

$$(1-a)x_1+ay=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\in F.$$

因 F 是凸集 X 的一个面，故 $x_1\in F$。 ■

***Lemma* 1.2.19** *若 X 为局部凸空间 V 中的非空紧凸集，ρ 为 V 上的连续线性泛函，且*

$$c=\sup\{Re\rho(x):x\in X\},$$

则集合 $F=\{x\in X:Re\rho(x)=c\}$ 是 X 的一个紧面。

Proof. 因紧集上的连续实函数可以取到上确界，故集合 F 非空，且易见 F 是凸的和紧的（R 中单点集是闭集，故 $F=Re\rho^{-1}(\{c\})$ 是闭集；而紧集的闭子集是紧的，故 F 是紧的）。

若 $x_1,x_2\in X$，$0<a<1$，$(1-a)x_1+ax_2\in F$，则有

$$Re\rho(x_1)\le c, Re\rho(x_2)\le c,$$

$$(1-a)Re\rho(x_1)+aRe\rho(x_2)=Re\rho((1-a)x_1+x_2)=c;$$

这意味着 $Re\rho(x_1)=Re\rho(x_2)=c$，故 $x_1,x_2\in F$，从而 F 为 X 的一个面。 ■

***Theorem* 1.2.20** （Klein-Milman）*若 X 是局部凸空间 V 中的非空紧凸集，那么 X 有一个端点，且 $X=\overline{co}E$，其中 E 是 X 的所有端点的集合。*

Proof. X 的所有紧面的集合 F 是非空的（$X\in F$），且关于集合的包含关系 $\subseteq$ 成为偏序集。设 F_0 是 F 的子集，关于包含关系为全序的。显然 F_0 有有限交性质，故由紧性，集合 $G_0=\bigcap\{G:G\in F_0\}$ 非空（紧集性质，见 James Munkres 的 Topology（第二版）定理 26.9）。因此 G_0 是 X 的一个紧面，从而是 F 中 F_0 的一个下界。

由 F_0 任意性知 F 的每个全序子集在 F 中有下界，则由 ***Zorn*** 引理知 F 有一个最小元 G。下证 G 为单点集。

假设 G 中有两个不同的元素 x_1，x_2，则由 Hahn-Banach 分离定理（此处用定理 1.2.8），存在 V 上的连续线性泛函 ρ，满足 $Re\rho(x_1) \neq Re\rho(x_2)$。由引理 1.2.19，可选取实数 c，使得集合

$$G_1 = \{x \in G : Re\rho(x) = c\}$$

是 G 的一个紧面。从而 G_1 是 X 的一个紧面，即 $G_1 \in F$。因 $Re\rho(x_1) \neq Re\rho(x_2)$，$x_1$ 和 x_2 中至少有一个不属于 G_1，则 G_1 是 G 的一个真子集（书中为 proper subset），这与 G 是 F 的最小元矛盾。因此 G 是单点集。这意味着 V 的每个非空紧凸子集有一个端点。

令 E 是 X 的所有端点的集合，显然 $\overline{co}E \subseteq X$。假设 $\overline{co}E \subsetneq X$，则存在 $x_0 \in X \setminus \overline{co}E$。由 Hahn-Banach 分离定理（此处用推论 1.2.10），存在 V 上的连续线性泛函 ρ 和实数 a，使得

$$Re\rho(x_0) > a \geq Re\rho(y), y \in \overline{co}E.$$

若 $c_1 = \sup\{Re\rho(x) : x \in X\}$，则 $c_1 > a$。由引理 1.2.19，集合

$$G_2 = \{x \in X : Re\rho(x) = c_1\}$$

是 X 的一个紧面。特别的，G_2 是 V 的非空紧凸子集，故有端点 x_3。由 x_3 是 X 的一个面的端点知 x_3 也是 X 的一个端点，即 $x_3 \in E$。但 $Re\rho(x_3) = c_1 > a \geq Re\rho(x_3)$，矛盾。

因此 $X = \overline{co}E$，其中 E 是 X 的所有端点的集合。 ■

***Corollary* 1.2.21** *若 X 是局部凸空间 V 的非空紧凸子集，ρ 是 V 上的连续线性泛函，则存在 X 的端点 x_0，使得 $Re\rho(x) \leq Re\rho(x_0)$，$\forall x \in X$。*

Proof. 令

$$c = sup\{Re\rho(x) : x \in X\}.$$

由引理 1.2.19，集合 $\{x \in X : Re\rho(x) = c\}$ 是 X 的一个紧面。特别的，其为 V 的非空紧凸子集，故有端点 x_0。由 x_0 是 X 的一个面的端点知 x_0 也是 X 的一个端点，因此

$$Re\rho(x_0) = c \geq Re\rho(x), \forall x \in X.$$

■

接下去考虑赋范空间 X 的连续对偶空间 $V^\sharp$，以及 X 上的弱拓扑 $\sigma(X,X^\sharp)$ 和 $X^\sharp$ 上的弱 * 拓扑 $\sigma(X^\sharp,X)$ 的性质。

$X^\sharp$ 可以很自然地成为一个巴拿赫空间，且 X 和二次对偶空间（the second dual space）$X^{\sharp\sharp}=(X^\sharp)^\sharp$ 的某个子空间等距同构。接下去讨论使得该子空间为全空间 $(X^\sharp)^\sharp$ 的充分必要条件。

X 上的线性泛函 ρ 是连续的当且仅当其有界。有界指：存在非负实数 C 使得

$$|\rho(x)|\leq C||x||,\forall x\in X.$$

当 ρ 是有界的时，C 可能的最小取值为 $||\rho||$（the bound of ρ），定义为：

$$||\rho||=\sup\{\frac{|\rho(x)|}{||x||}:x\in X,x\neq 0\}=\sup\{|\rho(x)|:x\in X,||x||=1\}.$$

X 的连续对偶空间 $X^\sharp$ 和 $B(X,\mathbf{K})$（从 X 到 $\mathbf{K}$ 的所有有界线性算子的集合）一致。赋予以上范数后其为巴拿赫空间，称之为巴拿赫对偶空间（***Banach dual space***）。

***Theorem* 1.2.22** *若 X_0 是赋范空间 X 的子空间，ρ_0 是 X_0 上的有界线性泛函，则存在 X 上的有界线性泛函，使得 $||\rho||=||\rho_0||$，且 $\rho(x)=\rho_0(x)$，$\forall x\in X_0$。*

Proof. 由定理 1.1.7，取 $p(x)=||\rho_0||||x||,x\in X$，则存在 X 上的线性泛函 ρ，满足

$$|\rho(x)|\leq ||\rho_0||||x||,\forall x\in X,\rho(x)=\rho_0(x),\forall x\in X_0.$$

这意味着 ρ 有界，且 $||\rho_0||\geq ||\rho||=sup\{|\rho(x)|:x\in X,||x||=1\}\geq sup\{|\rho(x)|:x\in X_0,||x||=1\}=||\rho_0||$，即有 $||\rho||=||\rho_0||$。 ■

***Corollary* 1.2.23** *若 x_0 是赋范空间 X 中的非零向量（零向量显然也成立），则存在 X 上的有界线性泛函 ρ，满足 $||\rho||=1$，且 $\rho(x_0)=||x_0||$。*

Proof. 方程 $\rho_0(cx_0)=c||x_0||$ 定义了由 x_0 生成的一维子空间 X_0 上的有界线性泛函 ρ_0，满足 $\rho(x_0)=||x_0||$，且 $||\rho_0||=1$。由定理 1.2.22 知推论成立。 ■

***Corollary* 1.2.24** *若 Y 是赋范空间 X 的一个闭子空间，$x_0 \in X \setminus Y$，则存在 X 上的有界线性泛函 ρ，满足 $||\rho|| = 1$，$\rho(y) = 0$，$\forall y \in Y$，且 $\rho(x_0) = d = inf\{||x_0 + y|| : y \in Y\}$，其中 d 称为从 x_0 到 Y 的距离。*

Proof. 因 Y 是赋范空间 X 的一个闭子空间，故可定义 X/Y 上的范数

$$||x + Y|| = inf\{||x + y|| : y \in Y\}, x \in X.$$

X/Y 按该范数为赋范线性空间。

商映射 $Q : X \to X/Y$ 为有界线性算子（$||Qx|| \leq ||x||$），且 $d = ||Qx_0|| > 0$（因 $x_0 \notin Y$）。由推论 1.2.23，存在 X/Y 上的有界线性泛函 ρ_0，满足 $||\rho_0|| = 1$，且 $\rho_0(Qx_0) = d$。方程 $\rho(x) = \rho_0(Qx)$ 定义了 X 上的有界线性泛函 ρ，满足 $\rho(x_0) = d$，$\rho(y) = 0$，$\forall y \in Y$。因 $\rho = \rho_0 Q$，故 $||\rho|| \leq ||\rho_0|| = 1$。可取 $\{x_n\}_n \subseteq Y$，使得 $x_n \to x_0$，$n \to \infty$，则有

$$||\rho|| \cdot ||x_0 - x_n|| \geq |\rho(x_0 - x_n)| = |\rho(x_0)| = d, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

而 $||x_0 - x_n|| \to d$，$n \to \infty$,，故有 $||\rho|| \geq 1$。从而得 $||\rho|| = 1$。 ∎

***Theorem* 1.2.25** *若 X 是赋范空间，$x \in X$，则方程*

$$\hat{x}(\rho) = \rho(x), \rho \in X^\sharp$$

*定义了巴拿赫对偶空间 $X^\sharp$ 上的一个有界线性泛函。映射 $x \mapsto \hat{x}$ 是从 X 到二次对偶空间 $X^{\sharp\sharp}$ 的子空间 $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$ 的等距同构映射（**isometric isomorphism**）。*

Proof. 显然 $\hat{x}$ 为 $X^\sharp$ 上的线性泛函，且映射 $x \mapsto \hat{x}$ 是从 X 到 $X^\sharp$ 的代数对偶空间的线性算子。当 $x_0 \in X$ 时，有

$$|\hat{x}_0(\rho)| = |\rho(x_0)| \leq ||\rho||||x_0||, \forall \rho \in X^\sharp.$$

由推论 1.2.23，可取 $\rho_1 \in X^\sharp$，$||\rho_1|| = 1$，使得

$$\hat{x}_0(\rho_1) = \rho_1(x_0) = ||x_0||.$$

因此 $\hat{x}_0$ 为有界线性泛函，且 $|\hat{x}_0| = ||x_0||$。故映射 $x \mapsto \hat{x}$ 是从 X 到二次对偶空间 $X^{\sharp\sharp}$ 的子空间 $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$ 的等距同构映射。 ∎

当 X 为赋范空间时，定理 1.2.25 中的映射 $x \mapsto \hat{x}$ 称为从 X 到 $X^{\sharp\sharp}$ 的自然等距同构映射，而 $\hat{X}$ 称为 X 在 $X^{\sharp\sharp}$ 中的自然像（natural image）。弱 * 拓扑 $\sigma(X^\sharp, X)$ 为 $X^\sharp$ 上由 $\hat{X}$ 诱导的弱拓扑。

若 $\hat{X} = X^{\sharp\sharp}$，则赋范空间 X 称为是自反的（***reflexive***）。一个自反的赋范空间必然是巴拿赫空间，因为其和巴拿赫对偶空间 $X^{\sharp\sharp}$ 等距同构。当然，很多巴拿赫空间并不是自反的。

***Theorem* 1.2.26** *（Banach-Alaoglu）设 X 为赋范空间，$\hat{X}$ 为 X 在 $X^{\sharp\sharp}$ 中的自然像。*

(i) 单位球 $(X^\sharp)_1$ 关于 $X^\sharp$ 上的弱 * 拓扑是紧的。

(ii)$X^{\sharp\sharp}$ 中 $\hat{X}$ 的单位球的弱 * 闭包是 $X^{\sharp\sharp}$ 的单位球 $(X^{\sharp\sharp})_1$。

***Theorem* 1.2.27** *若 S 是赋范空间 X 的巴拿赫对偶空间 $X^\sharp$ 的有界弱 * 闭子集，则 S 是弱 * 紧的。若还有 S 是凸的，则 S 为其端点集的弱 * 闭凸包。*

Proof. 对于某个正数 r，S 是球 $(X^\sharp)_r$ 的弱 * 闭子集，由定理 1.2.26((i)) 知该球是紧的，故 S 是弱 * 紧的。定理最后的论断可由定理 1.2.20 推出，因 $X^\sharp$ 关于弱 * 拓扑是局部凸空间。 ■

***Theorem* 1.2.28** *赋范线性空间 X 是自反的当且仅当其单位球 $(X)_1$ 在弱拓扑中是紧的。*

设 X 和 Y 是赋范空间，$T : X \to Y$ 是有界线性算子。若 ρ 是 Y 上的连续线性泛函，则复合映射 $\rho \circ T$ 是 X 上的连续线性泛函。相应的，可定义映射 $T^\sharp : Y^\sharp \to X^\sharp$:

$$T^\sharp(\rho) = \rho \circ T, \rho \in Y^\sharp.$$

下说明 $T^\sharp$ 为有界线性算子，且 $||T^\sharp|| = ||T||$。

事实上，对于任意的 $\rho_1, \rho_2 \in Y^\sharp$ 及标量 a_1, a_2，有

$$(a_1\rho_1 + a_2\rho_2) \circ T = a_1(\rho_1 \circ T) + a_2(\rho_2 \circ T).$$

这意味着 $T^\sharp$ 是线性的。

对于任意的 $\rho \in Y^\sharp$，有

$$|(T^\sharp\rho)(x)| = |\rho(Tx)| \le ||\rho||||Tx|| \le ||\rho||||T||||x||, \forall x \in X.$$

故 $||T^\sharp\rho|| \le ||T||||\rho||$，从而 $T^\sharp$ 有界，且 $||T^\sharp|| \le ||T||$。

又对于任意给定的 $x \in X$，由推论 1.2.23，可取 $\rho_1 \in T^\sharp$，满足 $||\rho_1|| = 1$，且 $\rho(Tx) = ||Tx||$。则

$$||Tx|| = \rho(Tx) = |(T^\sharp\rho)(x)| \le ||T^\sharp\rho|| \cdot ||x|| \le ||T^\sharp|| \cdot ||\rho|| \cdot ||x|| = ||T^\sharp|| \cdot ||x||.$$

由 x 任意性可知 $||T|| \le ||T^\sharp||$。

若 $T_1, T_2 : X \to Y$ 为有界线性算子，$\rho \in Y^\sharp$，由 ρ 的线性性可知对于任意的标量 a_1, a_2，有

$$\begin{aligned}(a_1T_1 + a_2T_2)^\sharp\rho \quad &= \rho \circ (a_1T_1 + a_2T_2) \\ &= a_1(\rho \circ T_1) + a_2(\rho \circ T_2) \\ &= a_1T_1^\sharp\rho + a_2T_2^\sharp\rho.\end{aligned}$$

因此 $(a_1T_1 + a_2T_2)^\sharp = a_1T_1^\sharp + a_2T_2^\sharp$，从而映射 $T \mapsto T^\sharp$ 是从 $B(X,Y)$ 到 $B(Y^\sharp, X^\sharp)$ 的保范线性算子（*norm-preserving linear operator*）。

若 X, Y, Z 为赋范空间，$S \in B(Y,Z)$，$T \in B(X,Y)$，则

$$(ST)^\sharp\rho = \rho \circ (ST) = \rho \circ (S \circ T) = (\rho \circ S) \circ T = T^\sharp(S^\sharp\rho), \forall \rho \in Z^\sharp.$$

因此 $(ST)^\sharp = T^\sharp S^\sharp$。算子 $T^\sharp : Y^\sharp \to X^\sharp$ 称为是有界线性算子 $T : X \to Y$ 的巴拿赫共轭算子（***Banach adjoint***）。当 X 和 Y 是希尔伯特空间时，共轭算子 $T^* : Y \to X$ 称为希尔伯特共轭算子（***Hilbert adjoint***）。

***Propostion* 1.2.29** *若 T 为从赋范空间 X 到赋范空间 Y 的有界线性算子，则 $T^\sharp$ 关于 $Y^\sharp$ 和 $X^\sharp$ 上的弱 * 拓扑是连续的。*

Proof. $X^\sharp$ 上的弱 * 拓扑为 $\sigma(X^\sharp, \hat{X})$，其中 $\hat{X}$ 为 X 在 $X^{\sharp\sharp}$ 中的自然像。由命题 1.2.14，只需证明对于任意的 $x \in \hat{X}$，$Y^\sharp$ 上线性泛函 $\hat{x} \circ T^\sharp$ 是弱 * 连续的。设 $x \in X$，令 $y = Tx$，对于任意的 $\rho \in Y^\sharp$，有

$$(\hat{x} \circ T^\sharp)(\rho) = \hat{x}(T^\sharp\rho) = (T^\sharp\rho)(x) = \rho(Tx) = \rho(y) = \hat{y}(\rho).$$

因此 $\hat{x} \circ T^\sharp = \hat{y} \in \hat{Y}$，从而 $\hat{x} \circ T^\sharp$ 关于弱 * 拓扑 $\sigma(Y^\sharp, \hat{Y})$ 是连续的。 ■

1.3 Sobolev Spaces and Distributions

设 $I=(a,b)$ 为开区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 为连续可微函数。则对于每个 $\varphi\in C_c^\infty(I)$（在 I 中有紧支集的无穷可微函数的集合），由分部积分及 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ 可知

$$\int_I f'(s)\varphi(s)ds=-\int_I f(s)\varphi'(s)ds.$$

不难验证，若 $g:I\to\mathbb{R}$ 是连续的，且满足

$$\int_I g(s)\varphi(s)ds=-\int_I f'(s)\varphi'(s)ds,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(I),\quad (*)$$

则有 $g=f'$。事实上，由 $(*)$ 可知

$$\int_I g(s)\varphi(s)ds=\int_I f'(s)\varphi(s)ds,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(I).$$

若 g 和 f' 不相等，则存在 $s_1\in I$ 使得 $g(s_1)\neq f'(s_1)$，从而由 g 和 f' 连续性可知存在包含 s_1 的某个开区间 I_1 使得 $g(s)-f'(s)$ 在 I_1 上恒不等于 0，即恒大于 0 或恒小于 0。此时可选取某个 $\varphi_1\in C_c^\infty(I)$，$supp(\varphi_1)\subseteq I_1$，使得

$$\int_I [g(s)-f'(s)]\varphi_1(s)ds>0,$$

矛盾。故得 g 和 f' 相等。

若 f 没有可微性的假设，如仅假设 $f\in L^1[a,b]$，则方程 $(*)$ 仍可能有解 $g\in L^1[a,b]$。而下面的引理将表明此时 $(*)$ 唯一的决定了 $g\in L^1[a,b]$。

***Lemma* 1.3.1** *(du Bois-Reymond lemma) 若 $I\subset\mathbb{R}$ 是开的，$g:I\to\mathbb{R}$ 是可积的，且满足*

$$\int_\Omega g\varphi d\lambda=0,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(I),$$

则 $g=0$, a.e.，即 g 为 $L^1(I)$ 中的零元。

由此有了下面的定义。

***Definition* 1.3.2** *设 $f\in L^1[a,b]$，若存在 $g\in L^1[a,b]$ 使得 $(*)$ 成立，则称 f 是弱可微的，且称 g 为 f 的弱导数，记为 $g=f'$。*

注意，弱导数仅对整个函数 f 定义，并不像经典导数那样是对单个点定义的。

***Example* 1.3.3** *设 $I=(-1,1)$，$f:I\to\mathbb{R}$，$f(s)=|s|$，$s\in I$。则对于每个 $C_c^\infty(I)$，有*

$$\begin{array}{ll} -\int_{-1}^1 f(s)\varphi'(s)ds & =\int_{-1}^0 s\varphi'(s)ds-\int_0^1 s\varphi'(s)ds \\ & =-\int_{-1}^0 \varphi(s)ds+\int_0^1\varphi(s)ds \\ & =\int_{-1}^1 g(s)\varphi(s)ds, \end{array}$$

其中

$$g(s)=\begin{cases} -1, & -1<s\le 0, \\ +1, & 0<s<1. \end{cases}$$

这说明 $f=|\cdot|$ 是弱可微的，且 $f'=g$。

现作更一般的推广。考虑开集 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$。将集合

$$\mathcal{D}(\Omega)=C_c^\infty(\Omega)$$

中的元素作为试验函数（*test function*）。为了进一步的分析，需要定义 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的收敛这一概念。

对于一个非负的多重指标 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，定义弱导数

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1}\cdot\partial_n^{\alpha_n}},$$

其中 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。

***Definition* 1.3.4** *$\mathcal{D}(\Omega)$ 中的序列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为收敛到 $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$，若存在一个紧集 $K\subseteq\Omega$，使得 $supp(\varphi_n)\subseteq K$，$\forall n\in\mathbb{N}$，且对于每个非负多重指标，有 $D^\alpha\varphi_n\to D^\alpha\varphi$（在 $(C(K),||\cdot||_\infty)$ 中）。*

注：可给出 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的一族可数的分离半范：$||\cdot||_{n,m}$，满足

$$||\varphi||_{n,m}=\sup_{|s|\le n,|\alpha|\le m}|\partial^\alpha\varphi(s)|,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\Omega),$$

其中 α 为非负多重指标，n 和 m 为正整数。可以验证这是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的一族可数的分离半范，从而 $\mathcal{D}(\Omega)$ 为可度量化的空间。

通过定义 1.3.4 可以引进 $\mathcal{D}(\Omega)$ 的拓扑对偶空间（*topological dual space*）$\mathcal{D}^\sharp(\Omega)$。

***Definition* 1.3.5** $\mathcal{D}^\sharp(\Omega)$ *中的元素称为* Ω *上的分布*（distribution）*或广义函数*（generalized functions）。

由定义 1.3.5 可知 J 为一个分布等价于 J 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函，即 J 是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的线性泛函，且满足

$$\varphi_n \to \varphi \quad in\ \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow J(\varphi_n) \to J(\varphi) \quad in\ \mathbb{R},$$

***Example* 1.3.6** *考虑如下由所有* Ω *上的局部可积函数构成的的空间*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \in L^1(K), \text{对于 } \Omega \text{ 的每个紧子集 } K\}.$$

每个 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *可定义为一个* $\mathcal{D}(\Omega)$ *上的线性泛函* J_f*：*

$$J_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi d\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

由勒贝格控制收敛定理及 $\mathcal{D}(\Omega)$ *中的收敛定义可知* J_f *是连续的，且由一般形式的 du Bois-Reymond 引理可知不同的* f *对应不同的* J_f*。*

并不是所有的分布都可以表示为 J_f*，*$f \in L^1_{loc}(\Omega)$*。例如，设* $s_0 \in \Omega$*，则*

$$J(\varphi) = \varphi(s_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

定义了分布 $\delta_{s_0} = J$*，称为* s_0 *处的* Dirac measure*。可以证明不存在* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *使得* $\delta_{s_0} = J_f$*。*

事实上，对于任意的 $\epsilon > 0$*，有*

$$\delta_0(\eta_\epsilon) = \frac{1}{e}.$$

其中 $\eta_\epsilon(x) = \eta(\frac{x}{\epsilon})$*，*$\forall x \in \Omega$*，而* $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$*，满足*

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

而另一方面，对于每个 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*，由控制收敛定理可知*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega f(x)\eta_\epsilon(x)dx = \int_\Omega f(x) \lim_{\epsilon \to 0} \eta_\epsilon(x)dx = 0,$$

故由 δ_0 *连续性知不存在* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *使得* $\delta_0 = J_f$*。类似可证不存在* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *使得* $\delta_{s_0} = J_f$*。*

现在介绍分布的导数。设 $J \in \mathcal{D}^\sharp(\Omega)$，$\alpha$ 为一个非负多重指标，由 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中收敛的定义可知映射

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} J \circ D^\alpha(\varphi)$$

为一个分布。基于此有如下定义。

***Definition* 1.3.7** *设 α 为非负多重指标，定义 $J \in \mathcal{D}^\sharp(\Omega)$ 的 α 阶导数为*

$$D^\alpha J = (-1)^{|\alpha|} J \circ D^\alpha.$$

应注意到每个分布都有任意阶的导数。

***Example* 1.3.8** *若 $f \in C^n(I)$，$I = (-\infty, \infty)$，则对于每个 $k \in \{1, \cdots, n\}$，f 和 $D_k f = \frac{d^k f}{dx^k}$ 都是局部可积的，因此决定了唯一的分布 J_f 和 $J_{D_k f}$。此外，由分部积分，对于每个 $\varphi \in \mathcal{D}(I)$，有*

$$(D_k J_f)(\varphi) = (-1)^k J_f(D_k \varphi) = (-1)^k \int_I f D_k \varphi d\lambda = \int_I (D_k f)\varphi d\lambda = J_{D_k f}(\varphi),$$

因此有

$$D_k J_f = J_{D_k f}.$$

若将 f 视为 J_f，则对于连续可微函数而言，分布意义下的导数和通常的导数是一致的。

类似的，弱可微函数的弱导数和其分布的导数是一致的。

现在给出如下的例子：一个局部可积函数，不是弱可微的，但在分布意义下可微的函数。

考虑 *Heaviside*函数 $H = \chi_{[0,+\infty)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$。对于每个 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$，有

$$DJ_H(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} H\varphi' d\lambda = -\int_0^{+\infty} \varphi'(s)ds = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

由此可知 *Heaviside*函数 H 在分布意义下的导数为 Dirac delta 函数，即 $H' = \delta_0$。再由 δ_0 函数性质可知 H 不是弱可微的。

因每个分布在分布意义下都是可微的，我们可以继续求出 δ_0 的导数 δ_0'。此时有

$$(D\delta_0)(\varphi) = -\delta_0(\varphi'), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

即 $\delta_0' = -\delta_0 \circ D$。

现利用分布的导数这一概念，可引进一类重要的函数空间。接下去我们将每个 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ 和其分布 J_f 视为同一，并将其分布的导数 $D^\alpha J_f$ 记成 $D^\alpha f$。

***Definition* 1.3.9** *设开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$，$1 \le p \le \infty$，$k \in \mathbb{N}$，定义 Sobolev 空间为*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \le k\},$$

且赋予范数

$$||f||_{k,p} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\le k} ||D^\alpha f||_p^p)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max_{|\alpha|\le k} ||D^\alpha f||_\infty, & p = \infty. \end{cases}$$

定义 $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$。

由 $L^p(\Omega)$ 的完备性可以证明下面的重要结论。

***Theorem* 1.3.10** *空间 $W^{k,p}(\Omega)$（$1 \le p \le \infty$，$k \in \mathbb{N}$）是巴拿赫空间。若 $p < \infty$，则 $W^{k,p}(\Omega)$ 可分。*

在偏微分方程的研究中，经常会先证明一个方程在 Sobolev 空间中的弱解的存在性，然后再说明通过这些弱解足以提供经典解。由于该原因，下面的结论十分重要。

***Theorem* 1.3.11** *(Sobolev Imbedding theorem) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开的，且 $k > \frac{n}{2} + m$，则*

$$H^k(\Omega) \subseteq C^m(\Omega)$$

是连续嵌入，即对于每个 $f \in H^k(\Omega)$，存在 $\tilde{f} \in C^m(\Omega)$ 使得 $\tilde{f}$ 和 f 在 Ω 上几乎处处相等，且映射

$$T : H^k(\Omega) \to C^m(\Omega), \quad T(f) = \tilde{f}$$

是连续的。

例如，因 $1 > \frac{1}{2} + 0$，故对于 $\mathbb{R}$ 中的每个开区间 I，有 $H^1(I) \subseteq C(I)$。

若 $p < \infty$，则试验函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密。但这对 Sobolev 空间通常是不成立的，即 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在一些 Sobolev 空间中并不稠密。事实上，$\mathcal{D}(\Omega)$ 中所有的函数在 Ω 的边界处为零。若 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在每个 Sobolev 空间 $H^k(\Omega)$ 中稠密，注意到对于充分大的 k，由定理 1.3.11 知 $H^k(\Omega)$ 连续嵌入 $C^m(\Omega) \subseteq C(\Omega)$，这意味着 $\mathcal{D}(\Omega)$ 的闭包（在 $C(\Omega)$ 中的闭包）中的所有元素在 Ω 的边界处消失。但这不可能对 $H^k(\Omega)$ 中的所有函数都成立，除非 $\partial\Omega = \emptyset$，即 $\Omega = \mathbb{R}^n$。基于此有如下定义：

***Definition* 1.3.12** *记 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在巴拿赫空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包。此外，记 $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$。*

粗略的说，可以将 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 中的函数视为 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的在 Ω 的边界处取值为 0 的函数。

2 基本谱理论

2.1 巴拿赫代数

一个代数（***an algebra***）为：向量空间 $\mathcal{A}$，其上有一个双线性映射（bilinear map）

$$\mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}, \quad (A, B) \mapsto AB,$$

满足

$$A(BC) = (AB)C \quad (A, B, C \in \mathcal{A}).$$

注：双线性映射保证了乘法关于加法可分配。

$\mathcal{A}$ 的一个子代数（***subalgebra***）为：$\mathcal{A}$ 的子向量空间 $\mathcal{B}$，满足若 $B, B' \in \mathcal{B}$，则 $BB' \in \mathcal{B}$。将 $\mathcal{A}$ 上的双线性映射限制在 $\mathcal{B}$ 上可得到 $\mathcal{B}$ 上的一个双线性映射，故 $\mathcal{B}$ 也是一个代数。

$\mathcal{A}$ 上的一个范数称为是次可乘（***submultiplicative***）的，若

$$||AB|| \leq ||A||||B|| \quad (A, B \in \mathcal{A}).$$

此时 $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ 称为赋范代数（normed algebra）。若 $\mathcal{A}$ 中有一个单位元（a unit）I，即 $AI = IA = A$，$\forall A \in \mathcal{A}$，$||I|| = 1$，则称 $\mathcal{A}$ 为单位的赋范代数（unital normed algebra）。

若 $\mathcal{A}$ 是赋范代数，则由

$$||AB - A'B'|| \leq ||A||||B - B'|| + ||A - A'||||B'||$$

可知乘法运算是整体连续的（***jointly continuous***）。

一个完备的赋范代数称为巴拿赫代数（***Banach algebra***）。一个完备的单位的赋范代数称为单位的巴拿赫代数（***unital Banach algebra***）。

赋范代数的子代数显然也是赋范代数，只需将范数限制在子代数上。

赋范代数中子代数的闭包是赋范代数。

巴拿赫代数的闭子代数是巴拿赫代数。

***Example* 2.1.1** *若 $\mathcal{S}$ 为一个集合，$\mathcal{S}$ 上的所有有界复值函数构成的集合 $\ell^\infty(\mathcal{S})$ 是一个单位的巴拿赫代数，其上的运算定义如下*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathcal{S},$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), x \in \mathcal{S},$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), x \in \mathcal{S},$$

而其上的范数则为

$$||f||_\infty = \sup_{x \in \mathcal{S}} |f(x)|.$$

***Example* 2.1.2** *若 Ω 是一个拓扑空间，Ω 上的所有有界连续复值函数构成的集合 $\mathcal{C}_b\Omega$ 是 $\ell^\infty(\Omega)$ 的一个闭子代数。因此 $\mathcal{C}_b\Omega$ 是一个单位的巴拿赫代数。*

若 Ω 是紧的，则从 Ω 到 $\mathbb{C}$ 的所有连续函数构成的集合和 $\mathcal{C}_b\Omega$ 相等（紧集上的连续函数必有界）。

***Example* 2.1.3** *设 Ω 是局部紧* Hausdorff *空间（设 X 是拓扑空间，若 X 的每一点都有一个紧邻域，则称 X 为局部紧空间），称从 Ω 到 $\mathbb{C}$ 的连续函数在无穷远处消失，若对于每个 $\epsilon > 0$，集合 $\{\omega \in \Omega| \quad |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ 是紧的。记所有这样的函数的集合为 $\mathcal{C}_0(\Omega)$，其为 $\mathcal{C}_b(\Omega)$ 的闭子代数，从而为巴拿赫代数。*

$\mathcal{C}_0(\Omega)$ 是单位的当且仅当 Ω 是紧的，此时 $\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$。

***Example* 2.1.4** *若 (Ω, μ) 是测度空间，则 Ω 上的本性有界复值可测函数的类的集合 $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ 在赋予通常的逐点定义的运算和本性上确界范数 $f \mapsto ||f||_\infty$ 后为单位的巴拿赫代数。*

***Example* 2.1.5** *若 Ω 为测度空间，记 $\mathcal{B}_\infty(\Omega)$ 为 Ω 上的所有有界复值可测函数，则 $\mathcal{B}_\infty(\Omega)$ 为 $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ 的闭子代数，故为单位的巴拿赫代数。*

***Example* 2.1.6** *平面上的闭单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的在 $\mathbb{D}$ 的内部解析*（analytic）*的所有连续函数的集合 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ 的闭子代数，故 $\mathcal{A}$ 是单位的巴拿赫代数，称为圆盘代数*（**disc algebra**）。

上述例子都是可交换的，但是下面的两个例子通常情况下是不可交换的。

***Example* 2.1.7** *若 $\mathcal{X}$ 是赋范向量空间，记 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 为从 $\mathcal{X}$ 到其自身的所有有界线性映射的集合。在该集合上赋予逐点定义（pointwise-defined）的加法和数乘，赋予乘法 $(U,V) \mapsto U \circ V$，以及算子范数后，$\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 为赋范代数。*

若 $\mathcal{X}$ 是巴拿赫空间，则 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 是完备的，因此为巴拿赫代数。

***Example* 2.1.8** *复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n \times n$ 矩阵构成的代数 $M_n(\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ 一致。因此其为单位的巴拿赫代数。上三角矩阵形如*

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

所有上三角矩阵构成 $M_n(\mathbb{C})$ 的子代数。

若 $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为代数 $\mathcal{A}$ 的一族子代数，则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda$ 也是 $\mathcal{A}$ 的一个子代数。因此，对于 $\mathcal{A}$ 的任意一个子集 $\mathcal{S}$，存在包含 $\mathcal{S}$ 的最小的 $\mathcal{A}$ 的子代数 $\mathcal{B}$，即所有包含 $\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{A}$ 的子代数的交。这一代数称为由 $\mathcal{S}$ 产生的 $\mathcal{A}$ 的子代数。若 $\mathcal{S}$ 是单元素集（*singleton set*）$\{A\}$，则 $\mathcal{B}$ 是 A 的所有幂 A^n（$n = 1, 2, 3, \ldots$）的线性生成空间。

若 $\mathcal{A}$ 是赋范代数，则由 $\mathcal{A}$ 中的集合 $\mathcal{S}$ 产生的 $\mathcal{A}$ 的闭子代数 $\mathcal{C}$ 为包含 $\mathcal{S}$ 的最小的 $\mathcal{A}$ 的闭子代数。易知 $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{B}}$，其中 $\mathcal{B}$ 为由 $\mathcal{S}$ 产生的 $\mathcal{A}$ 的子代数。

若 $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$，其中 $\mathbb{T}$ 为单位圆，而 $z : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 为嵌入映射，则由 z 及其共轭 $\overline{z}$ 产生的闭子代数为 $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ 本身，这可由下面的 $Stone\!-\!Weierstrass$ 定理推出。

***Theorem* 2.1.9** (*Stone-Weierstrass theorem*)*设 X 为紧* Hausdorff *空间，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$ 为闭子代数，并将 X 中的所有点加以分离，且 $\mathcal{A}$ 是自伴的（即若 $f \in \mathcal{A}$，则 $\overline{f} \in \mathcal{A}$）。则 $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$，或存在 $x_0 \in X$，使得 $\mathcal{A} = \{f : f \in \mathcal{C}(X), f(x_0) = 0\}$。*

代数 $\mathcal{A}$ 中的一个左理想（***left ideal***）$\mathcal{I}$：$\mathcal{A}$ 的一个向量子空间，满足对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ 及 $B \in \mathcal{I}$，有 $AB \in \mathcal{I}$。

代数 $\mathcal{A}$ 中的一个右理想（***right ideal***）$\mathcal{I}$：$\mathcal{A}$ 的一个向量子空间，满足对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ 及 $B \in \mathcal{I}$，有 $BA \in \mathcal{I}$。

$\mathcal{A}$ 中的一个理想（***ideal***）：$\mathcal{A}$ 的一个向量子空间，既是左理想又是右理想。

显然，$\{0\}$ 和 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的理想，称为平凡理想。

$\mathcal{A}$ 中的一个极大理想（***maximal ideal***）：$\mathcal{A}$ 的真理想（***proper ideal***），即非平凡理想，且不包含于 $\mathcal{A}$ 的任何其它真理想中。极大左理想或极大右理想定义类似。

若 $\mathcal{A}$ 是单位的，则从 *Zorn's Lemma* 可知每个真理想必包含于一个极大理想之中。

Proof. *Zorn's Lemma*：对于任一非空偏序集，若它的每个全序子集都有上界，则该偏序集中有一个最大元。

若某个理想包含单位元，则由理想定义知该理想为 $\mathcal{A}$，故真理想必不包含单位元。现设 $\mathcal{A}$ 的所有真理想构成的集合为 A_1，其关于集合包含关系成为偏序集，设 A_2 为其任一全序子集，A_2 的每个元素为一个真理想，故其所有元素的并也是一个理想，且不包含单位元，故为真理想，从而为 A_2 中的最大元。由 A_2 任意性可得 A_1 中存在最大元，从而 $\mathcal{A}$ 的每个真理想必包含于一个极大理想之中。 ■

若 $(\mathcal{I}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族代数 $\mathcal{A}$ 的理想，则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{I}_\lambda$ 也是 $\mathcal{A}$ 的理想。因此，若 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}$ 中存在包含 $\mathcal{S}$ 的最小理想 $\mathcal{I}$（$\mathcal{A}$ 中所有包含 $\mathcal{S}$ 的理想的交），称之为由 $\mathcal{S}$ 产生的理想（the ideal *generated* by $\mathcal{S}$）。

定义由 $\mathcal{S}$ 产生的闭理想 $\mathcal{J}$ 为包含 $\mathcal{S}$ 的最小闭理想。

若 $\mathcal{A}$ 为赋范代数，则理想的闭包也是理想。此时易知 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{S}$ 产生的理想的闭包。

***Theorem* 2.1.10** *若 $\mathcal{I}$ 是赋范代数 $\mathcal{A}$ 中的闭理想，则对 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 赋予商范数*

$$||A+\mathcal{I}|| = \inf_{B\in\mathcal{I}} ||A+B||$$

后其成为赋范代数。

Proof. 设 $\epsilon > 0$，$A, B \in \mathcal{A}$，则 ■

从代数 $\mathcal{A}$ 到代数 $\mathcal{B}$ 的一个同态（***homomorphism***）为线性映射 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，满足

$$\varphi(A_1A_2) = \varphi(A_1)\varphi(A_2), \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}.$$

其核 $ker(\varphi)$ 为 $\mathcal{A}$ 中的理想，其像 $\varphi(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{B}$ 的子代数。若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是单位的，且 $\varphi(I) = I$，则称 φ 是单位的。

若 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的理想，则商映射 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ 是同态。

2.2 谱与谱半径（The Spectrum and the Spectrum Radius）

记 $\mathbb{C}[z]$ 为关于不确定变量 z 的复系数多项式构成的代数（the algebra of all polynomials in an indeterminate z with complex coefficients）。若 A 为单位的代数 $\mathcal{A}$ 中的一个元素，$p \in \mathbb{C}[z]$ 为多项式

$$p = \lambda_0 + \lambda_1 z^1 + \cdots + \lambda_n z^n,$$

令

$$p(A) = \lambda_0 I + \lambda_1 A^1 + \cdots + \lambda_n A^n,$$

则映射

$$\mathbb{C}[z] \to \mathbb{A}, p \mapsto p(A),$$

是单位的同态（***unital homomorphism***）。

称 $A \in \mathcal{A}$ 是可逆的（***invertible***），若存在 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 B，使得 $AB = BA = I$。B 是唯一的，记为 A^{-1}。集合

$$Inv(A) = \{A \in \mathcal{A} | A \quad is \quad invertible\}$$

在乘法下为群。

定义 $\mathcal{A}$ 中的元素 A 的谱为如下集合

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathcal{A}} = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - A \notin Inv(\mathcal{A})\}.$$

在不会引起混淆的情况下，我们把 λI 简单记为 λ。

***Example* 2.2.1** 令 $\mathcal{A}=\mathcal{C}(\Omega)$，其中 Ω 为紧 Hausdorff 空间，则 $\sigma(f)=f(\Omega)$，$\forall f\in\mathcal{A}$。

***Example* 2.2.2** 令 $\mathcal{A}=\ell^\infty(\mathcal{S})$，其中 $\mathcal{S}$ 为非空集合，则 $\sigma(f)=\overline{f(\mathcal{S})}$（$\mathbb{C}$ 中的闭包），$\forall f\in\mathcal{A}$。

***Example* 2.2.3** 令 $\mathcal{A}$ 为上三角（upper triangular）$n\times n$ 矩阵构成的代数。若 $A\in\mathcal{A}$，则有

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

容易得知

$$\sigma(A)=\{\lambda_{11},\lambda_{22},\cdots,\lambda_{nn}\}.$$

类似的，若 $\mathcal{A}=M_n(\mathbb{C})$，$A\in\mathcal{A}$，则 $\sigma(A)$ 是 A 的特征值的集合。

因此，我们既可以将谱看作函数值域的推广，也可以看作有限方阵的特征值的集合的推广。

***Remark* 2.2.4** 若 A,B 是单位的代数 $\mathcal{A}$ 中的两个元素，则 $I-AB$ 可逆当且仅当 $I-BA$ 可逆。

Proof. 若 $I-AB$ 有逆元 C，即 $C(I-AB)=(I-AB)C=I$。

先假设 $(I-BA)$ 逆存在，记为 D，即 $D(I-BA)=(I-BA)D=I$。

因 $(I-BA)B=B-BAB=B(I-AB)$，两边分别左乘 D，右乘 C，即有 $BC=DB$。

则 $BCA=DBA=D-I$，故 $D=I+BCA$。

可验证 $D=I+BCA$ 即为 $(I-BA)$ 的逆。 ■

推论：$\forall\lambda\neq 0$，有 $\lambda-AB=\lambda(I-[\lambda^{-1}A]B)$ 可逆当且仅当 $\lambda(I-B[\lambda^{-1}A])=\lambda-BA$ 可逆。

由此可以得出很重要的一个结论：

$$\sigma(AB)\setminus\{0\}=\sigma(BA)\setminus\{0\},\forall A,B\in\mathcal{A}.$$

***Theorem* 2.2.5** *设 A 为单位的代数 $\mathcal{A}$ 中的一个元素，若 $\sigma(A)$ 非空且 $p \in \mathbb{C}[z]$，则*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)).$$

Proof. p 为常值多项式时结论显然成立。现设 p 不是常值多项式，则 p 在 $\mathbb{C}$ 中至少有一个根。若 $\mu \in \mathbb{C}$，则存在 $\mathbb{C}$ 中的元素 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$，其中 $\lambda_0 \neq 0$，满足

$$p - u = \lambda_0(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n), n \geq 1.$$

从而有

$$p(A) - \mu = \lambda_0(A - \lambda_1) \cdots (A - \lambda_n).$$

若 $A - \lambda_i$ 可逆，$i = 1, 2, \cdots, n$，由于各项之间关于乘法可交换，故 $\frac{1}{\lambda_0}(A - \lambda_1)^{-1}(A - \lambda_2)^{-1} \cdots (A - \lambda_n)^{-1}$ 即为 $p - \mu$ 的逆。

若 $p - \mu$ 可逆，则 $A - \lambda_i$ 的逆为 $\lambda_0(p - \mu)^{-1}(A - \lambda_1) \cdots (A - \lambda_{i-1})(A - \lambda_{i+1}) \cdots (A - \lambda_n)$.

这说明 $p - \mu$ 可逆当且仅当 $A - \lambda_i$ 可逆，$i = 1, 2, \cdots, n$。

若 $\mu \in \sigma(p(A))$，即 $p - \mu$ 不可逆，且有

$$p(A) - \mu = \lambda_0(A - a_1) \cdots (A - a_{n_1}), n_1 \geq 1.$$

则存在某个 $A - a_i$（$i = 1, 2, \cdots, n_1$）不可逆。又 $p(a_i) - \mu = 0$，故存在某个 $a_i \in \sigma(A)$，使得 $\mu = p(a_i)$。

若 $\mu = p(b_1)$，$b_1 \in \sigma(A)$，则

$$p(A) - u = \lambda_0(A - b_1)(A - b_2) \cdots (A - b_{n_2}), n_2 \geq 1.$$

因 $A - b_1$ 不可逆，故 $p(A) - \mu$ 不可逆，从而 $\mu \in \sigma(p(A))$。 ■

***Theorem* 2.2.6** *设 $\mathcal{A}$ 为单位的巴拿赫代数，A 为 $\mathcal{A}$ 中的一个元素，满足 $||A|| < 1$。则有 $I - A \in Inv(A)$，且*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Proof. 因 $\sum_{n=0}^{\infty} ||A^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||A||^n = (1 - ||A||)^{-1} < \infty$，$\mathcal{A}$ 完备，故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ 收敛于 $\mathcal{A}$ 中的某个元素 B。因 $(I - A)(I + \cdots + A^n) = I - A^{n+1} = (I + \cdots + A^n)(I - A)$，当 n 趋向于无穷时分别收敛于 $(I - A)B$，I，及 $B(I - A)$，故 B 为 $(I - A)$ 的逆。 ■

定理 2.2.6 中的级数称为 $(I-A)^{-1}$ 的诺伊曼级数（**Neumann series**）。

可微映射定义： 设 f 是从赋范空间 $(X,||\cdot||_1)$ 到赋范空间 $(Y,||\cdot||_2)$ 的映射，对于 X 中的一点 x，若存在一个从 X 到 Y 的线性映射 T 使得

$$f(x+\Delta x)-f(x)=T(\Delta x)+o(||\Delta x||_1),$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{||f(x+\Delta x)-f(x)-T(\Delta x)||_2}{||\Delta x||_1}=0,$$

其中 $x+\Delta x\in X$，则称 f 在 x 点是可微的；若 f 在 X 中的每一点都是可微的，则称 f 在 X 上是可微的。

***Theorem* 2.2.7** *若 $\mathcal{A}$ 是单位的巴拿赫代数，则 $Inv(A)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开的，且映射*

$$Inv(A)\to\mathcal{A},\quad A\mapsto A^{-1}$$

是可微的。

Proof. 设 $A\in Inv(\mathcal{A})$，$||B-A||<||A^{-1}||^{-1}$，则 $||BA^{-1}-I||\leq ||B-A||||A^{-1}||<1$，故由定理 2.2.6，有 $BA^{-1}\in Inv(\mathcal{A})$，因而 $B=BA^{-1}A\in Inv(\mathcal{A})$，故 $Inv(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开的。

若 $B\in\mathcal{A}$，$||B||<1$，则 $I+B\in Inv(\mathcal{A})$，并有

$$\begin{aligned}||(I+B)^{-1}-I+B|| &= ||\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB^n-I+B||\\ &= ||\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nB^n||\\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}||B||^n\\ &= ||B||^2/(1-||B||).\end{aligned}$$

设 $A\in Inv(\mathcal{A})$，$||C||<\frac{1}{2}||A^{-1}||^{-1}$，则 $||A^{-1}C||<\frac{1}{2}<1$，故有

$$||(I+A^{-1}C)^{-1}-I+A^{-1}C||\leq ||A^{-1}C||^2/(1-||A^{-1}C||)\leq 2||A^{-1}C||^2.$$

现假设 Φ 为 $\mathcal{A}$ 上的线性算子，其定义为：$\Phi(B)=-A^{-1}BA^{-1}$。则

$$\begin{aligned}||(A+C)^{-1}-A^{-1}-\Phi(C)|| &= ||(I+A^{-1}C)^{-1}A^{-1}-A^{-1}+A^{-1}CA^{-1}||\\ &\leq ||(I+A^{-1}C)^{-1}-I+A^{-1}C||||A^{-1}||\\ &\leq 2(||A^{-1}||^3||C||^2).\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{C\to 0}\frac{||(A+C)^{-1}-A^{-1}-\Phi(C)||}{||C||}=0.$$

这意味着映射 $\Psi: B\mapsto B^{-1}$ 在 $B=A$ 处可微，且该处导数为 $\Psi'(A)=\Phi$。 ■

不完备的赋范代数例子：

代数 $\mathbb{C}[z]$ 赋予范数

$$||p||=\sup_{|\lambda|\le 1}|p(\lambda)|$$

后成为赋范代数。因 $Inv(\mathbb{C}[z])=\mathbb{C}\setminus\{0\}$（次数大于等于 1 的多项式以及零多项式不可逆）。特别的，多项式 $p_n=1+z/n(\forall n\in\mathbb{N}_+)$ 不可逆。但按上述范数有 $\lim_{n\to\infty}p_n=1\in Inv(\mathbb{C}[z])$，故 $\mathbb{C}[z]\setminus Inv(\mathbb{C}[z])$ 不是闭的，从而 $Inv(\mathbb{C}[z])$ 在 $\mathbb{C}[z]$ 中不是开的。因此，由定理 2.2.7，$\mathbb{C}[z]$ 上的范数是不完备的。

***Lemma* 2.2.8** *设 $\mathcal{A}$ 是一个单位巴拿赫代数，$A\in\mathcal{A}$，则 A 的谱 $\sigma(A)$ 是复平面上以原点为中心的以 $||A||$ 为半径的圆盘的闭子集。*

Proof. 若 $|\lambda|>||A||$，显然此时 λ 不等于 0, 则 $||I-\lambda^{-1}A||$ 是可逆的，$\lambda-A$ 亦可逆。因此，$\lambda\notin\sigma(A)$。这说明 $\forall\lambda\in\sigma(A)$，有 $|\lambda|\le||A||$，即 $\sigma(A)$ 为复平面上以原点为中心的以 $||A||$ 为半径的圆盘的一个子集。

$\forall\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$，$\lambda_0-A\in Inv(\mathcal{A})$。由定理 2.2.7，$Inv(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开的，则存在 $\epsilon>0$，使得 $\forall B\in\mathcal{A}$，$||B-(\lambda_0-A)||<\epsilon$，有 B 可逆。则 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$，$|\lambda-\lambda_0|<\epsilon$，有 $||\lambda-A||$ 可逆，即 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$。由 λ_0 任意性可知 $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ 是开的，从而 $\sigma(A)$ 是闭的。 ■

***Theorem* 2.2.9** *（Gelfand）若 A 是单位的巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 中的一个元素，则 $\sigma(A)$ 的谱非空。*

Proof. 假设 $\sigma(A)\neq\emptyset$。若 $|\lambda|>2||A||$，则 $||\lambda^{-1}A||<\frac{1}{2}$，即 $1-||\lambda^{-1}A||>\frac{1}{2}$。因此

$$||(\lambda^{-1}A)^{-1}||=||\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}A)^n||\le\frac{1}{1-||\lambda^{-1}A||}<2.$$

从而有

$$||(A-\lambda)^{-1}||=||\lambda^{-1}(I-\lambda^{-1}A)^{-1}||<\frac{2}{|\lambda|}<||A||^{-1}.$$

此外，映射 $\lambda \mapsto (A-\lambda)^{-1}$ 是连续的，其在紧圆盘 $2||A||\mathbb{D}$ 上是有界的。因此，我们已经证明了该映射在整个复数域 $\mathbb{C}$ 上是有界的，即存在一个正常数 M，使得 $||(A-\lambda)^{-1}|| \leq M$，$\forall \lambda \in \mathbb{C}$。

若 $\tau \in \mathcal{A}^*$，则函数 $\lambda \mapsto \tau((A-\lambda)^{-1})$ 有界，界为 $M||\tau||$。此外，由逆的可微性，该映射可微，从而为 $\mathbb{C}$ 上的整函数（entire on $\mathbb{C}$）。由复分析中的 *Liouville* 定理，其为常值函数。特别的，有 $\tau(A^{-1}) = \tau((A-I)^{-1})$。由 τ 的任意性，有 $A^{-1} = (A-I)^{-1}$（赋范空间为局部凸空间？），故 $A = A-I$，矛盾。这说明假设不成立，即 $\sigma(A)$ 的谱非空。 ■

Theorem 2.2.10 *(Gelfand-Mazur) 若 $\mathcal{A}$ 是单位的巴拿赫代数，其中的每个非零元素也是可逆的，则 $\mathcal{A} = \mathbb{C}I$。*

Proof. 对于 $\mathcal{A}$ 中任意一个元素 A，由定理 2.2.9 知其谱非空，则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda - A$ 不可逆。但由题意知 $\mathcal{A}$ 中的可逆元只有零元素，故 $\lambda - A = 0$，即 $A = \lambda I$。由 A 任意性（包括零元素），知 $\mathcal{A} = \mathbb{C}I$。 ■

若 A 为单位巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 中的元素，其谱半径定义为

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

由定理 2.2.8 及定理 2.2.9 知单位巴拿赫代数中任一元素的谱非空且为有界闭集，故该定义合理。由注解 2.2.4 知，$r(BA) = r(AB)$，$\forall A, B \in \mathcal{A}$。

Example 2.2.11 *若 $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\Omega)$，其中 Ω 是一个紧 Hausdorff 空间，则 $r(f) = ||f||^{\infty}(f \in \mathcal{A})$。*

Example 2.2.12 *设 $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $||A|| = 1$（范数应为线性算子 A 的算子范数），$r(A) = 0$，因 A 的谱的平方为 A^2 的谱（定理 2.2.5），而 $A^2 = 0$ 的谱为 $\{0\}$。*

Theorem 2.2.13 *（Beurling）若 A 是单位巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 的一个元素，则*

$$r(A) = \liminf{}_{n\geq 1}||A^n||^{1/n} = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}.$$

Proof. 若 $\lambda \in \sigma(A)$，则 $\lambda^n \in \sigma(A^n)$，故 $|\lambda^n| \leq ||A^n||$，则 $r(A) \leq \liminf_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}$。

设 Δ 是 $\mathbb{C}$ 中以 0 为中心而半径为 $1/r(A)$ 的开圆盘，我们采用通常的记号 $1/0=+\infty$。

若 $\lambda\in\Delta$，则有 $I-\lambda A\in Inv(\mathcal{A})$。事实上，若 $\lambda=0$，显然有 $I-\lambda A\in Inv(\mathcal{A})$；若 $\lambda\neq 0$，则 $1/|\lambda|>r(A)$，由谱半径定义知 $1/\lambda-A$ 可逆，从而 $I-\lambda A$ 可逆。

若 $\tau\in\mathcal{A}^*$，则映射

$$f:\Delta\to\mathbb{C},\quad \lambda\mapsto\tau((I-\lambda A)^{-1})$$

是解析的，故存在唯一的复数 λ_n 使得

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\lambda^n,\quad \lambda\in\Delta.$$

然而，若 $|\lambda|<1/||A||$，则 $||\lambda A||<1$，故

$$(I-\lambda A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^nA^n,$$

因此，

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\tau(A^n).$$

从而有 $\lambda_n=\tau(A^n)$，$\forall n\geq 0$。因此，序列 $(\tau(A^n)\lambda^n)$ 收敛于 0（收敛级数通项趋于 0），故有界。而这对任意的 $\tau\in\mathcal{A}^*$ 都成立，从而由一致有界原理（共鸣定理）知 (λ^nA^n) 为有界序列。因此，存在一个正数 M 使得 $||\lambda^nA^n||\leq M$，$\forall n\geq 0$。注意到 $r(A)<\infty$，我们可取 $\lambda\neq 0$，$|\lambda|<1/r(A)$，从而 $||A^n||^{1/n}\leq M^{1/n}/|\lambda|$。因此，$\limsup_{n\to\infty}||A^n||^{1/n}\leq 1/|\lambda|$。

至此，我们证明了若 $r(A)<|\lambda^{-1}|$，则 $\limsup_{n\to\infty}||A^n||^{1/n}\leq|\lambda^{-1}|$。而这对任意的 $\lambda\in\Delta$ 都成立，所以 $\limsup_{n\to\infty}||A^n||^{1/n}\leq r(A)$。又 $r(A)\leq\liminf_{n\to\infty}||A^n||^{1/n}$，故有

$$r(A)=\liminf{}_{n\geq 1}||A^n||^{1/n}=\lim_{n\to\infty}||A^n||^{1/n}.$$

■

***Example* 2.2.14** *设 $\mathcal{A}$ 为闭区间 $[0,1]$ 上的 C^1 函数的集合。其被赋予通常的逐点定义的运算后成为一个代数，再对其赋予范数*

$$||f||=||f||_\infty+||f'||_\infty\quad(f\in\mathcal{A}).$$

该范数保证了求导和取极限可以交换顺序，即 $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ *(应该涉及到一致收敛，可以参考 Rudin 的《数学分析原理》一书的第七章中关于一致收敛与微分关系的内容，主要结论为定理 7.17 (第 3 版))。* $\mathcal{A}$ *在该范数下是完备的，从而* $\mathcal{A}$ *为单位的巴拿赫代数。令* $x : [0,1] \to \mathbb{C}$ *为嵌入映射，则* $x \in \mathcal{A}$*。显然* $\forall n \in \mathbb{N}_+$*，*$||x^n|| = 1 + n$*，则由定理 2.2.13 知* $r(x) = \lim_{n\to\infty}(1+n)^{1/n} = 1 < 2 = ||x||$*，即谱半径严格小于其范数的元素是存在的。*

若 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的非空紧集，其补集 $\mathcal{C} \setminus \mathcal{K}$ 只有一个无界分支（admits exactly one unbounded component），而 $\mathcal{C} \setminus \mathcal{K}$ 的有界分支则称为 $\mathcal{K}$ 的洞。

***Theorem* 2.2.15** *设* $\mathcal{B}$ *为单位巴拿赫代数* $\mathcal{A}$ *的闭子代数，并包含了* $\mathcal{A}$ *的单位。*

(1) 集合 $Inv(\mathcal{B})$ *是* $\mathcal{B} \cap Inv(\mathcal{A})$ *的闭开（clopen）子集。*

(2) 对于 $\mathcal{B}$ *中任意一个元素* B*，有*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(B) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(B), \quad \partial\sigma_{\mathcal{B}}(B) \subseteq \partial\sigma_{\mathcal{A}}(B).$$

(3) 若 $B \in \mathcal{B}$*，*$\sigma_{\mathcal{A}}(B)$ *没有洞，则* $\sigma_{\mathcal{A}}(B) = \sigma_{\mathcal{B}}(B)$*。*

Proof.

(1) 因 $Inv(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个开子集，故 $Inv(\mathcal{B}) \cap Inv(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{B} \cap Inv(\mathcal{A})$ 的开子集，从而 $Inv(\mathcal{B}) = Inv(\mathcal{B}) \cap Inv(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B} \cap Inv(\mathcal{A})$ 的开子集。

设 (B_n) 为 $Inv(\mathcal{B})$ 中的一个序列，收敛于 $\mathcal{B} \cap Inv(\mathcal{A})$ 中的一点 B。由定理 2.2.7 知映射 $Inv(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, $A \mapsto A^{-1}$ 是连续的，故 $Inv(\mathcal{B})$ 中的序列 (B_n^{-1}) 收敛于 $\mathcal{A}$ 中的点 B^{-1}。由 $\mathcal{B}$ 为闭的可知 $B^{-1} \in \mathcal{B}$，则 $B \in Inv(\mathcal{B})$。这说明 $Inv(\mathcal{B})$ 在 $\mathcal{B} \cap Inv(\mathcal{A})$ 中的极限点都在 $Inv(\mathcal{B})$ 中。因此，$Inv(\mathcal{B})$ 在 $\mathcal{B} \cap Inv(\mathcal{A})$ 中是闭开的。

(2) 若 $B \in \mathcal{B}$，由 $Inv(\mathcal{B}) \subseteq Inv(\mathcal{A})$ 即可知 $\sigma_{\mathcal{A}}(B) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(B)$。若 $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(B)$（边界点定义：设 A 是拓扑空间 X 的子集，$x \in X$，若 x 的任意邻域既含有 A 的点也含有不属于 A 的点，则称 x 是 A 的边界点），则 $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(B)$（因 $\sigma_{\mathcal{B}}(B)$ 闭），且存在 $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(B)$ 中的序列 (λ_n) 收敛于 λ。因此，$\lambda_n - B \in Inv(\mathcal{B})$，而 $\lambda - B \notin Inv(\mathcal{B})$。则由 (1) 知 $\lambda - B \notin Inv(\mathcal{A})$（否则会与 $Inv(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{B} \cap Inv(\mathcal{A})$ 的闭子集矛盾），从而有 $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(B)$。又

$\sigma_{\mathcal{A}}(B) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(B)$，故上述收敛于 λ 的 $\mathbb{C} \backslash \sigma_{\mathcal{B}}(B)$ 中的序列 (λ_n) 亦为 $\mathbb{C} \backslash \sigma_{\mathcal{A}}(B)$ 中的序列，从而有 $\lambda \in \partial \sigma_{\mathcal{A}}(B)$。由 λ 任意性即得 $\partial \sigma_{\mathcal{B}}(B) \subseteq \partial \sigma_{\mathcal{A}}(B)$。

(3) 若 $B \in \mathcal{B}$ 且 $\sigma_{\mathcal{A}}(B)$ 没有洞，则 $\mathcal{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(B)$ 无界（$\sigma_{\mathcal{A}}(B)$ 为紧集，故有界，则其补集无界），且是连通的（若不连通，至少有两个连通分支，且至少有一个为无界分支，但因 $\sigma_{\mathcal{A}}(B)$ 为紧集，只能有一个无界分支，故剩下的分支必为有界分支，则 $\sigma_{\mathcal{A}}(B)$ 有洞，矛盾）。由 (1) 和 (2) 知 $\mathbb{C} \backslash \sigma_{\mathcal{B}}(B)$ 为 $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(B)$ 的闭开子集，而 $\mathcal{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(B)$ 连通，即不能表示成两个不相交的非空开集的并，故 $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(B) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(B)$，从而有 $\sigma_{\mathcal{A}}(B) = \sigma_{\mathcal{B}}(B)$。

■

***Example* 2.2.16** *令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$（$\mathbb{T}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的单位圆），$\mathcal{A}$ 为圆盘代数（Example 2.1.6）。若 $f \in \mathcal{A}$，令 $\varphi(f)$ 为其在 $\mathbb{T}$ 上的限制。映射*

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}, \quad f \mapsto \varphi(f)$$

是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的等距同态，其中 $\mathcal{B}$ 为由 $\mathcal{C}$ 的单位元（常值函数 1）和嵌入映射 $z : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 产生的 $\mathcal{C}$ 的闭子代数，等距指 $||\varphi(f)||_\infty = ||f||_\infty$，可由最大模原理得到。$\sigma_{\mathcal{B}}(z) = \sigma_{\mathcal{A}}(z) = \mathbb{D}$，而 $\sigma_{\mathcal{C}}(z) = \mathbb{T}$。

设 A 为单位的巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 中的一个元素。因

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||A^n/n!|| \le \sum_{n=0}^{\infty} ||A||^n/n! < \infty,$$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$ 在 $\mathcal{A}$ 中收敛。记该级数和为 e^A。

在证明下个定理时需用到关于微分的一些基本的结果。

（1）设 f 和 g 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{A}$ 的可微映射，导数分别为 f' 和 g'。则 fg 可微，且 $(fg)' = fg' + f'g$。证明该结论只需模仿 $\mathcal{A}$ 为标量场的情况。

（2）设 f 从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{A}$ 的可微映射，$f' = 0$，则 f 为常数。证明：若 $\tau \in \mathcal{A}^*$，则函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$，$t \mapsto \tau(f(t))$ 可微，导数为 0，从而 $\tau(f(t)) = \tau(f(0))$，$\forall t \in \mathbb{R}$。由 τ 任意性即得 $f(t) = f(0)$，$\forall t \in \mathbb{R}$。

***Theorem* 2.2.17** *设 $\mathcal{A}$ 为单位的巴拿赫代数。*

(1) 若 $A \in \mathcal{A}$，且 $f : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ 是可微的，$f(0) = 1$，且 $f'(t) = Af(t)$，$\forall t \in \mathbb{R}$，则 $f(t) = e^{tA}$，$\forall t \in \mathbb{R}$。

(2) 若 $A \in \mathcal{A}$，则 e^A 是可逆的，逆为 e^{-A}；若 $AB = BA$，则 $e^{A+B} = e^A e^B$。

Proof. 首先，若 $f:\mathbb{R}\to\mathcal{A}$ 由 $f(t)=e^{tA}$ 定义，则可证 $f'(t)=Af(t)$，且 $Af(t)=f(t)A$。

现设 g 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{A}$ 的可微映射，满足 $g'(t)=Ag(t)$，$f(0)=g(0)=1$。记映射 $h:\mathbb{R}\to\mathcal{A}$，$t\mapsto f(t)g(-t)$，则 h 可微，且导数为 0。因此，$h(t)=1$，$\forall t\in\mathbb{R}$。将该结论应用于映射 $t\mapsto e^{tA}$，则有 $e^{tA}e^{-tA}=1$；特别的，$e^{A}e^{-A}=1$。

若 $f:\mathbb{R}\to\mathcal{A}$ 是可微的，$f(0)=1$，$f'(t)=Af(t)$，$\forall t\in\mathbb{R}$，令 $g(t)=e^{tA}$，则有 $g(-t)f(t)=1$，故 $f(t)=e^{tA}$。

现设 A 和 B 是 $\mathcal{A}$ 中的两个可交换的元素，令 $f(t)=e^{tA}e^{tB}$，则 $f(0)=1$，$f'(t)=e^{tA}Be^{tB}+Ae^{tA}e^{tB}=(A+B)f(t)$。因此，$f(t)=e^{t(A+B)}$，$\forall t\in\mathbb{R}$。特别的，我们有 $e^{A+B}=f(1)=e^{A}e^{B}$。 ■

2.3 The Gelfand Representation

这一节的思想是将一个单位的交换巴拿赫代数表示为一个紧的 *Hausdorff*空间上的连续函数构成的代数。先证明一些关于理想和乘法线性函数的结论。

***Theorem* 2.3.1** *设 $\mathcal{I}$ 是单位的巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 的一个理想，若 $\mathcal{I}$ 是真理想，则其闭包 $\overline{\mathcal{I}}$ 亦为真理想。若 $\mathcal{I}$ 是极大理想，则其是闭的。*

Proof. 首先有 $\overline{\mathcal{I}}$ 亦为理想：显然 $\overline{\mathcal{I}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的子空间。对于任意的 $A\in\overline{\mathcal{I}}$，存在 $\{A_n\}\subseteq\mathcal{I}$ 使得 $||A_n-A||\to 0$，$n\to\infty$，则对于任意的 $B\in\mathcal{A}$，有 $||BA-BA_n||\le||B||\cdot||A-A_n||\to 0$，$n\to\infty$，从而由 $\mathcal{I}$ 为理想及 $\overline{\mathcal{I}}$ 闭可知 $BA\in\overline{\mathcal{I}}$，同理有 $AB\in\overline{\mathcal{I}}$，故 $\overline{\mathcal{I}}$ 为理想。

现假设 $\overline{\mathcal{I}}$ 不是真理想，则 $I\in\overline{\mathcal{I}}$，故存在非零元 $B\in\mathcal{I}$，使得 $0<||I-B||<1$，这说明 B 在 $\mathcal{A}$ 中可逆。因 $\mathcal{I}$ 为理想，故 $I=BB^{-1}\in\mathcal{I}$，从而 $\mathcal{I}=\mathcal{A}$，矛盾。

若 $\mathcal{I}$ 是极大理想，因 $\overline{\mathcal{I}}$ 为包含 $\mathcal{I}$ 的真理想，故 $\mathcal{I}=\overline{\mathcal{I}}$。 ■

注：单位的代数的真理想必不含任何可逆元。

***Lemma* 2.3.2** *若 $\mathcal{I}$ 为单位的交换代数*（unital abelian algebra）*$\mathcal{A}$ 的一个极大理想，则 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 为一个域。*

Proof. 代数 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 是单位的和交换的，单位元为 $I+\mathcal{I}$，其中 I 为 $\mathcal{A}$ 的单位元。

若 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 的一个理想，π 为从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 的商映射，则 $\pi^{-1}(\mathcal{J})$ 是 $\mathcal{A}$ 中包含 I 的一个理想（商映射为同态，该结论可参考一般的抽象代数书，如复旦大学出版社的《抽象代数学》（第二版）第三章第三节定理 3-2）。因此，由 $\mathcal{I}$ 的极大性知 $\pi^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{A}$ 或 $\mathcal{I}$。故 $\mathcal{J} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ 或 0。从而，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 及 0 是 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 仅有的两个理想。

现设 $\pi(A)$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 的一个非零元素，则 $\mathcal{J} = \pi(A)(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 的一个非零理想，因此，$\mathcal{J} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$。则存在 $\mathcal{A}$ 的一个元素 B 使得 $(A+\mathcal{I})(B+\mathcal{I}) = I+\mathcal{I}$，故 $(A+\mathcal{I})$ 可逆，从而 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 为一个域（代数为环；除环：非零元素皆可逆；交换的除环称为域）。 ■

若 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是单位的代数之间的单位同态（把单位元映成单位元，见定理 2.1.10 后面的那段话），则 $\varphi(Inv(\mathcal{A})) \subseteq Inv(\mathcal{B})$，故 $\sigma(\varphi(A)) \subseteq \sigma(A)$，$\forall A \in \mathcal{A}$。

交换代数 $\mathcal{A}$ 上的一个特征（character）是指一个非零同态 $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$。记 $\mathcal{A}$ 上的所有特征的集合为 $\Omega(\mathcal{A})$。注意到对于任意的 $A \in \mathcal{A}$，有 $\sigma(\tau(A)) \subseteq \sigma(A)$，$\sigma(\tau(A)) = \{\tau(A)\}$，故有 $\tau(A) \in \sigma(A)$。（应要求 $\mathcal{A}$ 是单位的，此时自然的就有 τ 为单位同态）

***Theorem* 2.3.3** *设 $\mathcal{A}$ 为单位的巴拿赫代数。*

(1) 若 $\tau \in \Omega(\mathcal{A})$，则 $||\tau|| = 1$。

(2) 集合 $\Omega(\mathcal{A})$ 是非空的，且映射

$$\tau \mapsto ker(\tau)$$

定义了一个从 $\Omega(\mathcal{A})$ 到 $\mathcal{A}$ 的所有极大理想构成的集合的双射（bijection）。

Proof.

(1) 若 $\tau \in \Omega(\mathcal{A})$，$A \in \mathcal{A}$，则 $\tau(A) \in \sigma(A)$，故 $|\tau(A)| \leq r(A) \leq ||A||$。因此，$\tau$ 的算子范数 $||\tau|| \leq 1$。又因 τ 为非零同态，故 $\tau(I) = \tau(I \cdot I) = [\tau(I)]^2$ 且 $\tau(I) \neq 0$（将单位元映为 0 的同态必为零同态），其中 I 为 $\mathcal{A}$ 的单位元。从而有 $\tau(I) = 1$，故 $||\tau|| = 1$。（举一个 τ 不唯一的例子？）

(2) 记 $\mathcal{A}$ 中的闭理想 $ker(\tau)$（同态核为理想，因 (1) 已说明 τ 连续，$\mathbb{C}$ 中 0 为闭集，故其原像为闭集）为 $\mathcal{I}$。因 $\tau \neq 0$，故 $\mathcal{I}$ 为真理想；又对于任意的 $A \in \mathcal{A}$，有 $\tau(A - \tau(A)I) = \tau(A) - \tau(A)\tau(I) = 0$，即 $A - \tau(A) \in \mathcal{I}$，故 $\mathcal{I} + \mathbb{C}I = \mathcal{A}$。这说明 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{A}$ 的极大理想（设 $\mathcal{J}$ 为任意一个包含 $\mathcal{I}$ 的 $\mathcal{A}$ 的真理想，B 为 $\mathcal{J}$ 的任意一个元素，则存在 $\mathcal{I}$ 中的某个元素 A 和某个

复数 c 使得 $B=A+cI$，则 $cI=B-A\in\mathcal{J}$，由 $\mathcal{J}$ 为真理想知 $c=0$，从而 $B=A\in\mathcal{I}$，由 B 任意性即可得 $\mathcal{J}=\mathcal{I}$，而由 $\mathcal{J}$ 任意性便有 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{A}$ 的极大理想）。

（证单射）若 $\tau_1,\tau_2\in\Omega(\mathcal{A})$，$ker(\tau_1)=ker(\tau_2)$，则 $\forall A\in\mathcal{A}$，因 $A-\tau_2(A)\in ker(\tau_2)$，故 $\tau_2(A-\tau_2(A))=0$，则 $\tau_1(A-\tau_2(A))=\tau_1(A)-\tau_2(A)\tau_1(I)=0$，从而得 $\tau_1(A)=\tau_2(A)$。因此 $\tau_1=\tau_2$。（为什么这么证？核空间决定了每个元素的像，因核空间确定后，每个元素可唯一分解为核空间与单位元的某个复数倍的和，经过 τ 作用后得到的像就是该复数；反过来，已知某个元素 A 的像 $\tau(A)$，则 $A-\tau(A)$I 即为 τ 的核空间中的元素）

（证满射）若 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{A}$ 的任意的一个极大理想，则由定理 2.3.1 知 $\mathcal{I}$ 是闭的，而由引理 2.3.2 知 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 为单位的巴拿赫代数且其中的每个非零元均可逆。因此，由定理 2.2.10 知 $\mathcal{A}/\mathcal{I}=\mathcal{C}(I+\mathcal{I})=\mathbb{C}I+\mathcal{I}$。则对于 $\mathcal{A}$ 中任意一个元素 A，存在某个复数 a 使得 $A+\mathcal{I}=aI+\mathcal{I}$，即 $A-aI\in\mathcal{I}$，并且由 $\mathcal{I}$ 为极大理想知该复数 a 是唯一确定的（若存在另一个不同于 a 的复数 a' 满足 $A=aI+A_1=a'I+A_2$，其中 $A_1,A_2\in\mathcal{I}$，则 $(a-a')I=A_1-A_2\in\mathcal{I}$，因 $a-a'\neq 0$，则 $\mathcal{I}$ 包含单位元，与 $\mathcal{I}$ 为极大理想矛盾）。故 $\mathcal{A}=\mathcal{I}\bigoplus\mathbb{C}I$（$\bigoplus$ 表示直和）。定义 $\tau:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ 如下

$$\tau(A+\lambda)=\lambda, A\in\mathcal{I},\lambda\in\mathbb{C}.$$

容易验证 τ 为 $\mathcal{A}$ 的一个特征，且 $ker(\tau)=\mathcal{I}$。

因 $\mathcal{A}$ 是单位的，故 $\mathcal{A}$ 必有最大理想（因平凡理想 $\{0\}$ 为真理想），从而 $\Omega(\mathcal{A})$ 是非空的。 ■

***Theorem* 2.3.4** *设 $\mathcal{A}$ 为单位的交换巴拿赫代数。则*

$$\sigma(A)=\{\tau(A)|\tau\in\Omega(\mathcal{A})\}\quad (A\in\mathcal{A}).$$

Proof. 设 A 为 $\mathcal{A}$ 的一个元素，λ 为 A 的谱中的任一元素（由定理 2.2.9 知 A 的谱非空），则 $\mathcal{I}=(A-\lambda)\mathcal{A}$ 为真理想（必不包含单位元，因 $A-\lambda$ 不可逆），故包含在某个极大理想 $ker(\tau)$ 中（见定理 2.1.9 后面的内容；由定理 2.3.3 知可取为某个特征 τ 的核），其中 $\tau\in\Omega(\mathcal{A})$。因 $A-\lambda=(A-\lambda)I\in\mathcal{I}$，故 $\tau(A-\lambda)=0$，则 $\tau(A)=\lambda$。由 λ 任意性知 $\sigma(A)\subseteq\{\tau(A)|\tau\in\Omega(\mathcal{A})\}$。由定理 2.3.3 之前的说明可知反过来的包含关系亦成立，从而有 $\sigma(A)=\{\tau(A)|\tau\in\Omega(\mathcal{A})\}$。 ■

若 $\mathcal{A}$ 是单位的交换巴拿赫代数，由定理 2.3.3 知 $\Omega(\mathcal{A})$ 包含在 $\mathcal{A}^*$ 的闭单位球中。赋予 $\Omega(\mathcal{A})$ 相对弱 * 拓扑（the relative weak* topology），称拓扑空间 $\Omega(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的特征空间（character space）或谱（spectrum）。

***Theorem* 2.3.5** *若 $\mathcal{A}$ 是单位的交换巴拿赫代数，则 $\Omega(\mathcal{A})$ 是一个紧 Hausdorff 空间。*

Proof. 容易验证 $\Omega(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}^*$ 的闭单位球 $\mathcal{S}$ 中是弱 * 闭的。由 Banach-Alaoglu 定理（定理 1.2.26?）知 $\mathcal{S}$ 是弱 * 紧的，故 $\Omega(\mathcal{A})$ 是弱 * 紧的。详细证明可参见张恭庆的《泛函分析讲义》下册。 ■

设 $\mathcal{A}$ 是单位的交换巴拿赫代数，因此 $\Omega(\mathcal{A})$ 是非空的。若 $A \in \mathcal{A}$，定义 $\hat{A}$ 为

$$\hat{A} : \Omega(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto \tau(A).$$

易见 $\Omega(\mathcal{A})$ 上的拓扑是使得所有 $\hat{A}$ 函数连续的最小的拓扑。因此，$\hat{A} \in \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$。

称 $\hat{A}$ 为 A 的 Gelfand 变换（*Gelfand transform*）。

***Theorem* 2.3.6** *(Gelfand Representation) 设 $\mathcal{A}$ 为单位的交换巴拿赫代数。则映射*

$$\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A})), \quad A \mapsto \hat{A},$$

是一个范数递减（norm-decreasing）的同态，

$$r(A) = ||\hat{A}||_\infty \quad (A \in \mathcal{A}),$$

而 $\sigma(A) = \hat{A}(\Omega(\mathcal{A}))$。

Proof. 由定理 2.3.4 知谱 $\sigma(A)$ 是 $\hat{A}$ 的值域（range）。因此，$r(A) = ||\hat{A}||_\infty$，这意味着映射 $A \mapsto \hat{A}$ 是范数递减的 ($||\hat{A}||_\infty = r(A) \leq ||A||$)。由 $\mathcal{A}$ 的特征为非零同态，容易验证该映射是一个同态。 ■

Gelfand representation 的核称为代数 $\mathcal{A}$ 的根（*radical*），其由谱半径为 0 的元素组成。因此，其包含了幂零（nilpotent）元素 (幂零元素的谱为 $\{0\}$)。若根为 0，则 $\mathcal{A}$ 称为是半单纯的（*semisimple*）。

令 A 和 B 为单位的交换巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 的两个元素，则有

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B),$$

$$r(AB) \leq r(A)r(B).$$

事实上，由定理 2.3.6 知

$$r(A+B) = ||\widehat{A+B}||_\infty \leq ||\hat{A}||_\infty + ||\hat{B}||_\infty = r(A) + r(B).$$

类似的，有

$$r(AB) = ||\widehat{AB}||_\infty \leq ||\hat{A}||_\infty ||\hat{B}||_\infty = r(A)r(B).$$

然而对于一般的代数来说，谱半径经常不满足上述的次可加性和次乘性，见下例。

令 $\mathcal{A} = M_2(\mathcal{C})$，$\mathcal{A}$ 是单位的代数。设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

则因 A 和 B 都是幂零元，有 $r(A) = r(B) = 0$。但 $r(A+B) = r(AB) = 1$(直接计算，$A+B$ 的谱为 $\{1, -1\}$，AB 的谱为 $\{0, 1\}$)。

***Theorem* 2.3.7** *设 $\mathcal{A}$ 为由 I 和元素 A 产生的单位的巴拿赫代数。则 $\mathcal{A}$ 是交换的，且*

$$\hat{A} : \Omega(\mathcal{A}) \to \sigma(A), \quad \tau \to \tau(A),$$

为同态。

Proof. 易见 $\mathcal{A}$ 为 $\{I\} \cup \{A^n | n \in \mathbb{N}_+\}$ 张成的线性子空间。则由 I 和 A 是交换的可知 $\mathcal{A}$ 是交换的。由定理 2.3.6 知 $\hat{A}$ 是双射。由 $\Omega(\mathcal{A})$ 上的的拓扑为相对弱 * 拓扑知 $\hat{A}$ 是连续的。又 $\Omega(\mathcal{A})$（定理 2.3.5）和 $\sigma(A)$（谱为 $\mathbb{C}$ 中的有界闭集，故为紧集；*Hausdorff*空间的子空间亦是 *Hausdorff*空间，$\mathbb{C}$ 为 *Hausdorff*空间）是紧的 *Hausdorff*空间，故 $\hat{A}$ 为同胚 (homeomorphism)。 ■

注：设 X 和 Y 是拓扑空间，$f : X \to Y$ 是一个连续的双射。若 X 是紧的，且 Y 是 *Hausdorff*的，则 f 是同胚。

Proof. 只需证明 f^{-1} 是连续的，而为证明此只需证明：对于 X 中的任意一个开集 A，$f(A)$ 为 Y 中的开集。

对于 X 中的任意一个开集 A，其补集 A^c 是闭集，而紧集的闭子集为紧的，故 A^c 为紧的。又连续函数将紧集映成紧集，故 $f(A^c)$ 为 Y 中的紧集，则由 Y 为 *Hausdorff*的知 $f(A^c)$ 为闭集 (*Hausdorff*条件保证紧集为闭集)，从而 $f(A)=[f(A^c)]^c$ 为 Y 中的开集。证毕。 ■

2.4 紧算子与 Fredholm 算子

称巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 之间的线性映射 $U:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是紧的，若其将 $\mathcal{X}$ 中的闭单位球映射成 $\mathcal{Y}$ 中的准紧集。因 $\mathcal{Y}$ 是完备的，故其中的集合准紧等价于全有界。则 U 是有界的。

***Remark* 2.4.1** *紧算子的值域是可分的。(参考《实变函数与泛函分析概要》下册第八章第七节)*

紧算子的理论是从对线性积分方程的分析中产生的。两者之间的联系见如下的例子。

***Example* 2.4.2** *令 $I=[0,1]$，$\mathcal{X}$ 为巴拿赫空间 $\mathcal{C}(I)$，其范数为上确界范数。若 $k\in\mathcal{C}(I^2)$，定义 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 如下:*

$$U(f)(s)=\int_0^1 k(s,t)f(t)dt \quad (f\in\mathcal{X}, s\in I).$$

我们证明 $U(f)\in\mathcal{X}$。首先注意到 $\forall s,s'\in I$，有

$$\begin{aligned}|U(f)(s)-U(f)(s')| &= |\textstyle\int_0^1[k(s,t)-k(s',t)]f(t)dt|\\ &\leq \textstyle\int_0^1|k(s,t)-k(s',t)|\cdot|f(t)|dt\\ &\leq ||f||_\infty \sup_{t\in I}|k(s,t)-k(s',t)|.\end{aligned}$$

因 I^2 为紧的，故 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得：由 $max|s-s'|,|t-t'|<\delta$ 可得 $|k(s,t)-k(s',t')|<\epsilon$。则有

$$|s-s'|<\delta\Rightarrow|U(f)(s)-U(f)(s')|\leq\epsilon||f||_\infty. \quad (*)$$

因此，$U(f)$ 是连续的，即 $U(f)\in\mathcal{X}$。下面证明 U 还是 $\mathcal{X}$ 上的紧算子。

若 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的闭单位球，则由 $(*)$ 式知 $U(\mathcal{S})$ 是等度连续的，且由

$$||U(f)||\leq max_{s\in[0,1]}\int_0^1|k(s,t)f(t)|dt\leq||k||_\infty||f||_\infty$$

知 $U(\mathcal{S})$ 是有界的。从而由 Arzelà-Ascoli 定理知 $U(\mathcal{S})$ 是全有界的。因此，U 是 $\mathcal{X}$ 上的一个紧算子。函数 k 称为算子 U 的核，且 U 称为积分算子。

Arzelà-Ascoli 定理（参考《泛函分析学习指南》）：集合 $F \subset C(M)$ 是一个列紧集的充分必要条件是

(1)F 一致有界，即存在非负常数 M_1，对任何 $f \in F$，都有 $|f(x)| \leq M_1$；

(2)F 是等度连续的，即任给 $\epsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$，使得对任意 $f \in F$，以及 $x_1, x_2 \in M$，只要 $\rho(x_1, x_2) < \delta$，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$。

若 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，记 $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是所有从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的有界线性映射构成的向量空间。其赋予算子范数后成为一个巴拿赫空间。而所有从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的紧算子构成的集合记为 $\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$。

***Theorem* 2.4.3** *设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，$U \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$。则以下条件等价：*

(1)U 是紧的；

(2) 对于 $\mathcal{X}$ 中的每个有界集 $\mathcal{S}$，$U(\mathcal{S})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中是准紧的；

(3) 对于 $\mathcal{X}$ 中的每个有界序列 (x_n)，序列 $(U(x_n))$ 有在 $\mathcal{Y}$ 中收敛的子列。

由定理 2.4.3 的 (2) 知 $\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$。由紧算子为线性映射及定理 2.4.3 的 (3) 可知 $\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的向量子空间。

若 $\mathcal{X}' \xrightarrow{V} \mathcal{X} \xrightarrow{U} \mathcal{Y} \xrightarrow{W} \mathcal{Y}'$ 是巴拿赫空间之间的有界线性映射，U 为紧算子，则 WUV 是紧算子（有界集 $\xrightarrow{V}$ 有界集 $\xrightarrow{U}$ 准紧集 $\xrightarrow{W}$ 准紧集，最后一步是因为赋范线性空间之间的有界线性算子连续，故将准紧集映成准紧集）。

因此，$\mathcal{K}(\mathcal{X}) = \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 中的一个理想（因 $\mathcal{X}$ 上的紧算子左乘或右乘一个 $\mathcal{X}$ 上的有界线性算子后还是 $\mathcal{X}$ 上的紧算子）。

***Theorem* 2.4.4** *若 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间，则 $\mathcal{K}(\mathcal{X}) = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ 当且仅当 $\mathcal{X}$ 是有限维的。*

Proof. 记 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{X}$ 中的闭单位球，则由 $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 的一个理想知 $\mathcal{K}(\mathcal{X})=\mathcal{B}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{X})$ 包含 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 的单位元 $\Leftrightarrow id_{\mathcal{X}}$ 是紧算子 $\Leftrightarrow \mathcal{S}$ 是紧的 $\Leftrightarrow \mathcal{X}$ 是有限维的。（赋范空间中的单位球是紧的当且仅当该空间是有限维的，可参考《实变函数与泛函分析概要》下册第七章定理 2.2，P86）

注：巴拿赫空间保证了 $\mathcal{K}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$。 ■

***Theorem* 2.4.5** *若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，则 $\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 的一个闭子向量空间。*

Proof. 对于 $\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 中的闭包中的任一元素 U，存在 $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 中的序列 (U_n) 收敛于 U。

记 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{X}$ 中的闭单位球，设 $\epsilon>0$。则由 (U_n) 收敛于 U 知存在正整数 N 使得

$$||U_N-U||<\frac{\epsilon}{3}.$$

因 U_N 为紧算子，故 $U_N(\mathcal{S})$ 全有界，从而存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathcal{S}$，使得对于任意的 $x\in\mathcal{S}$，存在某个 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$||U_N(x)-U_N(x_j)||<\frac{\epsilon}{3},$$

则有

$$\begin{aligned}||U(x)-U(x_j)|| &\le ||U(x)-U_N(x)||+||U_N(x)-U_N(x_j)||\\ &\quad +||U_N(x_j)-U(x_j)||\\ &\le ||U-U_N||||x||+||U_N(x)-U_N(x_j)||\\ &\quad +||U-U_N||||x_j||\\ &< \tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3}\\ &=\epsilon.\end{aligned}$$

这说明 $U(\mathcal{S})$ 是全有界的，因此 $U\in\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$。

■

一个有界线性算子 $U:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是有限秩的 (of finite rank) 若 $U(\mathcal{X})$ 是有限维的，且 $rank(U)=dim(U(\mathcal{X}))$。

若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，$U\in\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是有限秩的，则有 $U\in\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$。（有限维空间 $U(\mathcal{X})$ 中的闭单位球是紧的。）从而由定理 2.4.5 知有限秩算子列的极限是紧算子。

反过来，巴拿赫空间中的紧算子是不是有限秩算子的极限？在下一章中，我们将看到该结论对于一般的巴拿赫空间并不成立。

若 $U:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间之间的有界线性映射，定义 U 的转置 $(transpose)U^*\in\mathcal{B}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$ 为 $U^*(\tau)=\tau\circ U$，$\tau\in\mathcal{X}^*$。

***Theorem* 2.4.6** *设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，$U\in\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$，则 $U^*\in\mathcal{K}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$。（反过来亦成立）*

Proof. 记 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{X}$ 中的闭单位球，令 $\epsilon>0$。则 $U(\mathcal{S})$ 全有界，故存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathcal{S}$，使得对于任意的 $x\in\mathcal{S}$，存在某个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$||U(x)-U(x_i)||<\frac{\epsilon}{3}.$$

定义 $V\in\mathcal{B}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{C}^n)$：$V(\tau)=(\tau\circ U(x_1),\cdots,\tau\circ U(x_n)),\tau\in\mathcal{Y}^*$。因 V 是有限秩的，故 V 为紧算子，从而 $V(\mathcal{Y}_1^*)$ 全有界，其中 $\mathcal{Y}_1^*$ 为 $\mathcal{Y}^*$ 的闭单位球。因此，存在 $\mathcal{Y}_1^*$ 中的泛函 $\tau_1,\cdots,\tau_m$ 使得 $\forall\tau\in\mathcal{Y}_1^*$，存在某个 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$||V(\tau)-V(\tau_j)||<\frac{\epsilon}{3}.$$

又

$$||V(\tau)-V(\tau_j)||=\left[\sum_{i=1}^{n}|U^*(\tau)(x_i)-U^*(\tau_j)(x_i)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

则 $\forall x\in\mathcal{S}$，有

$$\begin{array}{rcl}|U^*(\tau)(x)-U^*(\tau_j)(x)| & \leq & |U^*(\tau)(x)-U^*(\tau)(x_i)| \\ & + & |U^*(\tau)(x_i)-U^*(\tau_j)(x_i)| \\ & + & |U^*(\tau_j)(x_i)-U^*(\tau_j)(x)| \\ & < & ||\tau||\cdot||U(x)-U(x_i)||+\frac{\epsilon}{3} \\ & + & ||\tau_j||\cdot||U(x)-U(x_i)|| \\ & \leq & \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} \\ & = & \epsilon.\end{array}$$

从而得

$$||U^*(\tau)-U^*(\tau_j)||=\sup_{x\in\mathcal{S}}|U^*(\tau)(x)-U^*(\tau_j)(x)|\leq\epsilon.$$

这说明 $U*(\mathcal{Y}_1^*)$ 是全有界的，故 U^* 是紧算子，即 $U^*\in\mathcal{K}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$。 ∎

巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 之间的一个有界线性映射 $U:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 称为是下有界的（bounded below），若存在一个正数 δ，使得 $||U(x)||\geq\delta||x||$，$\forall x\in\mathcal{X}$。

此时 $U(\mathcal{X})$ 必然是闭的：对于 $U(\mathcal{X})$ 中的任一柯西列 $\{U(x_n)\}$，$\{x_n\}$ 为 $\mathcal{X}$ 中的柯西列，故由 $\mathcal{X}$ 完备知 $\{x_n\}$ 收敛于某个 $x\in\mathcal{X}$。因此，由 U 连续得 $\{U(x_n)\}$ 收敛于 $U(x)$，这说明 $U(\mathcal{X})$ 是完备的，从而在 $\mathcal{Y}$ 中是闭的。

注意到每个可逆的有界线性算子是下有界的。而 $U:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 不是下有界的当且仅当存在 $\mathcal{X}$ 中的单位向量序列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty}||U(x_n)||=0$。

***Lemma* 2.4.7** *设 $\mathcal{X}$ 为巴拿赫空间，$\mathcal{V}\subseteq\mathcal{X}$ 为有限维子空间，则存在一个闭子空间 $\mathcal{M}$ 使得 $\mathcal{X}=\mathcal{M}\bigoplus\mathcal{V}$。*

Proof. 因 $\mathcal{V}$ 为有限维子空间，故完备，从而是闭的。设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathcal{V}$ 的一组基，对于每个 $x\in\mathcal{V}$，有

$$x=a_1(x)e_1+\cdots+a_n(x)e_n,$$

该表达式唯一。对于 $i=1,2,\cdots,n$，容易验证 $a_i(x)$ 是 $\mathcal{V}$ 上的线性泛函，下证 $a_i(x)$ 连续：

$\mathcal{V}$ 继承 $\mathcal{X}$ 的范数 $||\cdot||$，同时 $\mathcal{V}$ 又可看作 n 个闭子空间的直和——$span\{e_1\}\oplus span\{e_2\}\oplus\cdots\oplus span\{e_n\}$，此时 $\mathcal{V}$ 作为直和空间有另一范数 $||\cdot||_1$，满足 $||a_1(x)e_1+\cdots+a_n(x)e_n||_1=||a_1(x)e_1||+\cdots+||a_n(x)e_n||$，可验证 $\mathcal{V}$ 按这两个范数都是巴拿赫空间，且 $||x||\leq||x||_1$，$\forall x\in\mathcal{V}$，故由范数定价命题可知存在 $K>0$，使得 $||x||_1\leq K||x||$，$\forall x\in\mathcal{V}$，由此容易说明 $a_i(x)$ 连续。

由 Hahn-Banach 延拓定理知每个 a_i 可以延拓为 $\mathcal{X}$ 上的连续线性泛函，记为 $a_1^*,\cdots,a_n^*$。令 $\mathcal{M}=\bigcap_{i=1}^n Ker(a_i^*)$，则 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个闭子线性空间。

现取 $x\in\mathcal{M}\cap\mathcal{V}$。则 $a_i^*(x)=0$，$i=1,2,\cdots,n$。又 a_i^* 为 a_i 在 $\mathcal{V}$ 上的延拓，$x\in\mathcal{V}$，故有 $a_i(x)=a_i^*(x)=0$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $x=\sum_{i=1}^n a_i(x)e_i=0$。这说明 $\mathcal{M}\cap\mathcal{V}=\{0\}$。

对于每个 $x\in\mathcal{X}$，令

$$x'=a_1^*(x)e_1+\cdots+a_n^*(x)e_n.$$

则 $x' \in \mathcal{V}$，故 $a_i^*(x') = a_i(x')$。又因 $a_i(e_i) = 1$ 及 $a_i(e_j) = 0 (i \neq j)$，故

$$a_i^*(x - x') = a_i^*(x) - a_i(x') = a_i^*(x) - a_i^*(x) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此 $x - x' \in \mathcal{M}$。从而有 $\mathcal{X} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{V}$。

■

***Theorem* 2.4.8** *设 U 为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 上的一个紧算子，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。则*

(1) 空间 $ker(U - \lambda)$ 是有限维的。

(2) 空间 $(U - \lambda)(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{X}$ 中是闭的且余维数有限。事实上，$(U - \lambda)(\mathcal{X})$ 的余维数为 $ker(U^* - \lambda)$ 的维数。

Proof.

(1) 令 $\mathcal{Z} = ker(U - \lambda)$。则 $\forall x \in \mathcal{Z}$，有 $U(x) = \lambda x$，故 $U(x) \in \mathcal{Z}$，从而由 x 任意性得 $U(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Z}$。

又由 $U \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ 知 U 在 $\mathcal{Z}$ 上的限制 $U_{\mathcal{Z}}$ 为紧算子，故 $U_{\mathcal{Z}} \in \mathcal{K}(\mathcal{Z})$。且有 $U(\mathcal{Z}) = \lambda(id_{\mathcal{Z}})$（$id_{\mathcal{Z}}$ 表示 $\mathcal{Z}$ 上的恒等映射），$\lambda \neq 0$，则映射 $id_{\mathcal{Z}}$ 是紧算子，从而 $\mathcal{Z}$ 是有限维的。

(2) 因 $\mathcal{Z}$ 是有限维的，故由引理 2.4.7 知存在 $\mathcal{X}$ 的闭子向量空间 $\mathcal{Y}$ 使得 $\mathcal{X} = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Y}$。则有 $(U - \lambda)\mathcal{X} = (U - \lambda)\mathcal{Y}$，故为证明 $(U - \lambda)(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{X}$ 中是闭的，只需证 $(U - \lambda)$ 在 $\mathcal{Y}$ 上的限制 $(U - \lambda)_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是下有界的。

假设 $(U - \lambda)_{\mathcal{Y}}$ 不是下有界的，则存在 $\mathcal{Y}$ 中的单位向量序列 $\{x_n\}$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} ||(U - \lambda)(x_n)|| = 0.$$

由 U 是紧的，不妨设 $\{U(x_n)\}$ 是收敛的（否则可取收敛子列）。因

$$x_n = \lambda^{-1}[U(x_n) - (U - \lambda)(x_n)],$$

故序列 $\{x_n\}$ 为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 中的收敛子列，从而收敛于某个 $x \in \mathcal{X}$。又 $\{x_n\} \subset \mathcal{Y}$，$\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{X}$ 的闭子空间，故 $x \in \mathcal{Y}$。又

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n == \lim_{n \to \infty} \lambda^{-1}[U(x_n) - (U - \lambda)(x_n)] = \lambda^{-1} U(x),$$

即 x 满足 $U(x) = \lambda x$，故 $x \in \mathcal{Y} \cap ker(U - \lambda) = \{0\}$，因此 $x = 0$。但 x 是 $\mathcal{Y}$ 中的单位向量序列的极限，而 $\mathcal{Y}$ 中的单位球是闭的，故 x 也应是单位向量，矛盾。这说明 $(U - \lambda)_{\mathcal{Y}}$ 是下有界的。

现令 $\mathcal{W}=\mathcal{X}/(U-\lambda)(\mathcal{X})$。为了说明 $(U-\lambda)(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{X}$ 中是有限余维的，需证明 $\mathcal{W}$ 是有限维的，为此我们只需证明 $\mathcal{W}^*$ 是有限维的。

令 $\pi:\mathcal{X}\to\mathcal{W}$ 为商映射。π^* 的像包含在 $U^*-\lambda$ 的核之中（因 $(U^*-\lambda)(\pi^*)(w)=w\circ\pi\circ(U-\lambda)=0$，$\forall w\in\mathcal{W}^*$）。

设 $\sigma\in ker(U^*-\lambda)$，则 $\sigma\in\mathcal{X}^*$，且 $(U^*-\lambda)(\sigma)=\sigma\circ(U-\lambda)=0$，故 $\sigma\big((U-\lambda)(\mathcal{X})\big)=0$。则由 $\sigma\in\mathcal{X}^*$ 知 $\sigma\big(x+(U-\lambda)(\mathcal{X})\big)$ 定义了一个从 $\mathcal{W}$ 到 $\sigma(\mathcal{X})=\mathbb{C}$ 的有界线性映射 τ，满足 $\sigma=\tau\circ\pi=\pi^*(\tau)$，$\tau\in\mathcal{W}^*$。这说明 $\pi^*(\mathcal{W}^*)=ker(U^*-\lambda)$。

由定理 2.4.6 知 $U^*\in\mathcal{X}^*$ 是紧的，则由 (1) 知 $ker(U^*-\lambda)$ 是有限维的。而 π^* 的像包含在 $ker(U^*-\lambda)$ 之中，因此 π^* 的像是有限维的。又 π^* 是单射 (若 $\pi^*(\tau_1)=0$，即 $\tau_1\circ\pi=0$，$\tau_1\in\mathcal{W}^*$，则 $\forall y\in\mathcal{W}$，因商映射 π 是满射，故存在 $x\in\mathcal{X}$ 使得 $\pi(x)=y$，则有 $\tau_1(y)=\tau_1(\pi(x))=0$，从而得 π^* 为单射)，故 π^* 的原像 $\mathcal{W}^*$ 是有限维的，从而有

$$dim(\mathcal{W})=dim(\mathcal{W}^*)=dim(\pi^*(\mathcal{W}^*))=dim(ker(U^*-\lambda)).$$

■

若 $U:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ 是向量空间 $\mathcal{X}$ 上的线性映射，则空间序列 $\{ker(U^n)\}_n$ 递增的（关于集合包含关系）。若 $ker(U^n)\neq ker(U^{n+1})$，$\forall n\in\mathbb{N}$，则称 U 具有无限的升数 (*ascent*)，并记 $ascent(U)=+\infty$。否则我们称 U 具有有限的升数，并定义 $ascent(U)$ 为满足 $ker(U^p)=ker(U^{p+1})$ 的最小的 p；此时，$ker(U^p)=ker(U^n)$，$\forall n\geq p$。

空间序列 $\{U^n(\mathcal{X})\}_n$ 是递减的。若 $U^n(\mathcal{X})\neq(U^{n+1}\mathcal{X})$，$\forall n\in\mathbb{N}$，则称 U 具有无限的降数 (*descent*)，并记 $descent(U)=+\infty$。否则我们称 U 具有有限的降数，并定义 $descent(U)$ 为满足 $U^p(\mathcal{X})=U^{p+1}(\mathcal{X})$ 的最小的 p。此时，$U^p(\mathcal{X})=U^n(\mathcal{X})$，$\forall n\geq p$。

F.Riesz 定理：若 $\mathcal{Y}$ 是赋范线性空间 $\mathcal{X}$ 的一个真闭子空间，$\epsilon>0$，则存在 $\mathcal{X}$ 中的一个单位向量 x 使得 $||x+\mathcal{Y}||>1-\epsilon$。

***Theorem* 2.4.9** *设 U 为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 上的紧算子，假设 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$。则 $U-\lambda$ 具有有限的升数和降数。*

Proof.

假设升数是无限的。记 $N_n = ker(U-\lambda)^n$，$\forall n \in \mathbb{N}$。则 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，$N_{n-1}$ 是 N_n 的真闭子空间，故由 Riesz 定理知，存在单位向量 $x_n \in N_n$，使得 $||x_n + N_{n-1}|| \geq \frac{1}{2}$。若 $m < n$，则

$$U(x_n) - U(x_m) = \lambda x_n + (U-\lambda)(x_n) - (U-\lambda)(x_m) - \lambda x_m = \lambda x_n - z,$$

其中 $z = -(U-\lambda)(x_n) + (U-\lambda)(x_m) + \lambda x_m \in N_{n-1}$。因此，

$$||U(x_n) - U(x_m)|| = ||\lambda x_n - z|| = |\lambda| ||x_n - \lambda^{-1} z|| \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

这说明序列 $\{U(x_n)\}_n$ 没有收敛子列，与 U 为紧算子矛盾。从而得 $U-\lambda$ 具有有限的升数。

假设降数是无限的。记 $M_n = (U-\lambda)^n(\mathcal{X})$，$\forall n \in \mathbb{N}$。则 $\forall n \in \mathbb{N}$，有 M_{n+1} 为 M_n 的真闭子空间 (闭子空间由定理 2.4.8(2) 可得，也可参见《实变函数与泛函分析概要》第四版下册第八章定理 7.7，P209)，故由 Riesz 定理知，存在单位向量 $x_n \in M_n$，使得 $||x_n + M_{n+1}|| \geq \frac{1}{2}$。若 $m > n$，则

$$U(x_n) - U(x_m) = \lambda x_n + (U-\lambda)(x_n) - (U-\lambda)(x_m) - \lambda x_m = \lambda x_n - z,$$

其中 $z = -(U-\lambda)(x_n) + (U-\lambda)(x_m) + \lambda x_m \in M_{n+1}$。因此，

$$||U(x_n) - U(x_m)|| = ||\lambda x_n - z|| = |\lambda| ||x_n - \lambda^{-1} z|| \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

这说明序列 $\{U(x_n)\}_n$ 没有收敛子列，与 U 为紧算子矛盾。从而得 $U-\lambda$ 具有有限的降数。

■

设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，$U \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$。称 U 为 *Fredholm*的，若 $ker(U)$ 是有限维的而 $U(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中是有限余维的。定义 U 的零数 (*nullity*) 为 $dim(ker(U))$，记作 $nul(U)$；定义 U 的亏数 (*defect*) 为 $U(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中的余维数，记作 $def(U)$。U 的指标 *index*定义为

$$ind(U) = nul(U) - def(U).$$

因 $U(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中是有限余维的，故存在 $\mathcal{Y}$ 的有限维子向量空间使得 $U(\mathcal{X}) \oplus \mathcal{Z} = \mathcal{Y}$，从而由下面的定理得 $U(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中是闭的。

***Theorem* 2.4.10** *设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，$U \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$。假设存在一个闭子向量空间 $\mathcal{Z}$ 使得 $U(\mathcal{X}) \oplus \mathcal{Z} = \mathcal{Y}$。则 $U(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中是闭的。*

Proof.

有界线性映射

$$\mathcal{X}/ker(U) \to \mathcal{Y}, \quad x + ker(U) \mapsto U(x),$$

和 U 有相同的值域，且是单射的，故不失一般性，不妨设 U 是单射的（不是单射时可以考虑上述映射，所以不妨设）。

映射

$$V : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}, \quad (x, z) \mapsto U(x) + z,$$

是巴拿赫空间之间的一个连续线性同构 (两个赋范线性空间的笛卡尔积的范数定义为各自的范数的和？)，故由开映射定理，V^{-1} 也是连续的。若 $x \in \mathcal{X}$，则

$$||x|| = ||V^{-1}U(x)|| \leq ||V^{-1}||||U(x)||,$$

故有

$$||U(x)|| \geq ||V^{-1}||^{-1}||x||.$$

因此，U 下有界，从而 $U(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中是闭的。

■

★★★★★

***Theorem* 2.4.11** *设 $\mathcal{X} \xrightarrow{U} \mathcal{Y} \xrightarrow{V} \mathcal{Z}$ 是巴拿赫空间 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ 之间的 Fredholm 线性映射。则 VU 是 Fredholm 的，且*

$$ind(VU) = ind(V) + ind(U).$$

★★★★★

Proof.

(1) 由 U 和 V 为 Fredholm 算子知 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$，$V \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$，故

$$VU \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}).$$

(2) 设 $\mathcal{Y}_2 = ker(V) \cap U(\mathcal{X})$ （其中 $\mathcal{Y}_2$ 在 U 下的原像即为 VU 的核），存在 $\mathcal{Y}$ 的子向量空间 $\mathcal{Y}_1$，$\mathcal{Y}_3$，$\mathcal{Y}_4$，使得

$$U(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}_2 \oplus \mathcal{Y}_3, \quad ker(V) = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus U(\mathcal{X}) \oplus \mathcal{Y}_4.$$

其中 $\mathcal{Y}_1$，$\mathcal{Y}_3$，$\mathcal{Y}_4$ 都是有限维的。

将 U 限制在 $\mathcal{X}$ 的子空间 $ker(VU)$ 上得到的线性映射

$$ker(VU) \to \mathcal{Y}_2, \quad x \mapsto U(x),$$

是满射 (因 $\forall U(x) \in \mathcal{Y}_2 = ker(V) \cap U(\mathcal{X})$，有 $VU(x) = 0$，即 $x \in ker(VU)$)，且和 U 具有相同的核 (因 $ker(U) \subset ker(VU)$)。故 $ker(VU)/ker(U)$ 和 $\mathcal{Y}_2$ 之间存在一个线性双射，且由 $\mathcal{Y}_2$ 是有限维的知 $ker(VU)/ker(U)$ 是有限维的。又 $ker(U)$ 是有限维的，故得 $ker(VU)$ 是有限维的，且有

$$nul(VU) = nul(U) + dim(\mathcal{Y}_2).$$

(3) 因 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus U(\mathcal{X}) \oplus \mathcal{Y}_4$，$U(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}_2 \oplus \mathcal{Y}_3$，故

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2 \oplus \mathcal{Y}_3 \oplus \mathcal{Y}_4.$$

又 $ker(V) = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$，故得

$$V(\mathcal{Y}) = V(\mathcal{Y}_3) \oplus V(\mathcal{Y}_4), \quad V(\mathcal{Y}_3) = VU(\mathcal{X}).$$

因此，$V(\mathcal{Y}) = VU(\mathcal{X}) \oplus V(\mathcal{Y}_4)$。

(注意，线性映射保持直积是有条件的，不能由 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus U(\mathcal{X}) \oplus \mathcal{Y}_4$ 和 $V(\mathcal{Y}_1) = 0$ 直接推出 $V(\mathcal{Y}) = VU(\mathcal{X}) \oplus V(\mathcal{Y}_4)$，因 $U(\mathcal{X})$ 可能包含 $ker(V)$ 中的元素。)

因 $V(\mathcal{Y})$ 在 $\mathcal{Z}$ 中是有限余维的，故存在 $\mathcal{Z}$ 的有限维子向量空间 $\mathcal{Z}'$ 使得 $V(\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{Z}' = \mathcal{Z}$，则有

$$\mathcal{Z} = VU(\mathcal{X}) \oplus V(\mathcal{Y}_4) \oplus \mathcal{Z}'.$$

因 $V(\mathcal{Y}_4) \oplus \mathcal{Z}'$ 是有限维的，故 $VU(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{Z}$ 中是有限余维的。

至此可得 VU 是 Fredholm 算子。

(4) 映射

$$\mathcal{Y}_4 \to V(\mathcal{Y}_4), \quad y \mapsto V(y),$$

是线性同构，故 $dim(\mathcal{Y}_4) = dim(V(\mathcal{Y}_4))$。

因 $\mathcal{Z} = VU(\mathcal{X}) \oplus V(\mathcal{Y}_4) \oplus \mathcal{Z}' = V(\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{Z}'$，故

$$\begin{aligned} def(VU) &= dim(V(\mathcal{Y}_4)) + dim(\mathcal{Z}') \\ &= dim(\mathcal{Y}_4) + dim(\mathcal{Z}') \\ &= dim(\mathcal{Y}_4) + def(V). \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
nul(VU)+def(U)+def(V) &= nul(U)+dim(\mathcal{Y}_2) \\
&\quad +dim(\mathcal{Y}_1)+dim(\mathcal{Y}_4) \\
&\quad +def(V) \\
&= nul(U)+nul(V)+dim(\mathcal{Y}_4)+def(V) \\
&= nul(U)+nul(V)+def(VU).
\end{aligned}$$

从而我们有

$$\begin{aligned}
ind(VU) &= nul(VU)-def(VU) \\
&= nul(U)+nul(V)-def(U)-def(V) \\
&= ind(U)+ind(V).
\end{aligned}$$

■

***Theorem* 2.4.12** *设 U 为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 上的紧算子，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。*

(1) 算子 $U-\lambda$ 是 Fredholm 的，指数为 0。

(2) 若记 $U-\lambda$ 的（有限）升数为 p，则

$$\mathcal{X} = ker(U-\lambda)^p \oplus (U-\lambda)^p(\mathcal{X}).$$

Proof.

(1) 由定理 2.4.8 即得 $U-\lambda$ 是 Fredholm 的，而由定理 2.4.9 知 $U-\lambda$ 具有有限的升数和降数。设 $m,n > max\{ascent(U-\lambda), descent(U-\lambda)\}$，$m,n \in \mathbb{N}_+$，$m \neq n$，则由升数和降数定义知

$$nul(U-\lambda)^m = nul(U-\lambda)^n, \quad def(U-\lambda)^m = def(U-\lambda)^n,$$

故得

$$ind\big((U-\lambda)^m\big) = ind\big((U-\lambda)^n\big).$$

从而由定理 2.4.11，我们有 $m\,ind(U-\lambda) = n\,ind(U-\lambda)$。则由 $m \neq n$ 得 $ind(U-\lambda)=0$。

(2) 若 $x \in ker(U-\lambda)^p \cap (U-\lambda)^p(\mathcal{X})$，则存在 $y \in \mathcal{X}$，使得 $x = (U-\lambda)^p(y)$，且 $(U-\lambda)^{2p}(y) = (U-\lambda)^p(x) = 0$。由 p 为升数知

$$ker(U-\lambda)^p = ker(U-\lambda)^{2p},$$

故 $(U-\lambda)^p(y)=0$，即 $x=0$，从而有 $ker(U-\lambda)^p\cap(U-\lambda)^p(\mathcal{X})=\{0\}$。

又由 (1) 知

$$0=ind(U-\lambda)^p=nul(U-\lambda)^p-def(U-\lambda)^p,$$

故 $nul(U-\lambda)^p=def(U-\lambda)^p$，即 $(U-\lambda)^p(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{X}$ 中的余维数等于 $ker(U-\lambda)^p$ 的维数。又 $ker(U-\lambda)^p\cap(U-\lambda)^p(\mathcal{X})=\{0\}$，故得

$$\mathcal{X}=ker(U-\lambda)^p\oplus(U-\lambda)^p(\mathcal{X}).$$

■

***Corollary* 2.4.13** *(Fredholm Alternative，Fredholm 择抉定理) 算子 $U-\lambda$ 是单射当且仅当其为满射。*

Proof. 由定理 2.4.12 知 $U-\lambda$ 的指数为 0，故 $U-\lambda$ 的零数为 0 当且仅当其亏数为 0，即 $U-\lambda$ 是单射当且仅当其为满射。 ■

***Remark* 2.4.14** *若 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 是向量空间 $\mathcal{X}$ 的互补的向量子空间，V,U 为 $\mathcal{Y},\mathcal{Z}$ 上的线性映射，定义 $\mathcal{X}$ 上的线性映射 $U\oplus V$ 为：*

$$(U\oplus V)(y+z)=U(y)+V(z)\qquad(y\in\mathcal{Y},z\in\mathcal{Z}).$$

容易验证 $U\oplus V$ 可逆当且仅当 U 和 V 是可逆的。

若 $\mathcal{X}$ 是巴拿赫空间，$W\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$，记 $\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}(W)$ 为 $\sigma(W)$。若 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 是向量空间 $\mathcal{X}$ 的互补的向量子空间，$U\in\mathcal{B}(\mathcal{Y})$，$V\in\mathcal{B}(\mathcal{Z})$，$W\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$，$W=U\oplus V$，则 $\sigma(W)=\sigma(U)\cup\sigma(V)$。

***Theorem* 2.4.15** *设 U 为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 上的紧算子。则 $\sigma(U)$ 是至多可列的，且 $\sigma(U)$ 的每个非零点是 U 的特征值，且为 $\sigma(U)$ 的孤立点。*

Proof.

设 λ 是 $\sigma(U)$ 的一个非零点，则 $U-\lambda$ 不可逆，故不是双射，则由 Fredholm 择抉定理知 $U-\lambda$ 不是单射，因此 $(U-\lambda)x=0$ 有非零解，故 λ 为 U 的一个特征值。

由定理 2.4.12 知算子 $U-\lambda$ 有有限的升数 p，且 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}\oplus\mathcal{Z}$，其中 $\mathcal{Y}=ker(U-\lambda)^p$，$\mathcal{Z}=(U-\lambda)^p(\mathcal{X})$。$\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 是闭的，且是 U 的不变子空间 (即 $U(\mathcal{Y})\subset\mathcal{Y}$，$U(\mathcal{Z})\subset\mathcal{Z}$，可直接验证)。因此，$U-\lambda=$

$(U_{\mathcal{Y}} - \lambda(id_{\mathcal{Y}})) \oplus (U_{\mathcal{Z}} - \lambda(id_{\mathcal{Z}}))$，其中 $U_{\mathcal{Y}}$ 及 $U_{\mathcal{Z}}$ 分别为 U 在 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 上的限制。

因 $\big((U_{\mathcal{Y}} - \lambda(id_{\mathcal{Y}}))\big)^p(\mathcal{Y}) = (U-\lambda)^p(\mathcal{Y}) = 0$，故 $(U_{\mathcal{Y}} - \lambda(id_{\mathcal{Y}}))^p = 0$。则 $U_{\mathcal{Y}} - \lambda(id_{\mathcal{Y}})$ 的谱为单点集 $\{0\}$，故 $U_{\mathcal{Y}}$ 的谱 $\sigma(U_{\mathcal{Y}})$ 是单点集 $\{\lambda\}$。

此外，由 U 为紧算子知 $U_{\mathcal{Z}}$ 为紧算子。又 $ker(U_{\mathcal{Z}} - \lambda(id_{\mathcal{Z}}))^p = ker(U-\lambda)^p \cap \mathcal{Z} = 0$，故 $U_{\mathcal{Z}} - \lambda(id_{\mathcal{Z}})$ 为单射，从而 Fredholm 择抉定理知 $U_{\mathcal{Z}} - \lambda(id_{\mathcal{Z}})$ 为双射，故可逆，从而 $U_{\mathcal{Z}} - \lambda(id_{\mathcal{Z}})$ 亦可逆。因此，$\lambda \notin \sigma(U_{\mathcal{Z}})$。

又由 $(U-\lambda) = (U_{\mathcal{Y}} - \lambda(id_{\mathcal{Y}})) \oplus (U_{\mathcal{Z}} - \lambda(id_{\mathcal{Z}}))$ 知 $U-\lambda$ 可逆当且仅当 $U_{\mathcal{Y}} - \lambda(id_{\mathcal{Y}})$ 及 $U_{\mathcal{Z}} - \lambda(id_{\mathcal{Z}})$ 皆可逆，故有

$$\sigma(U) = \sigma(U_{\mathcal{Y}}) \cup \sigma(U_{\mathcal{Z}}).$$

而 $\sigma(U_{\mathcal{Y}})$ 是单点集 $\{\lambda\}$，$\lambda \notin \sigma(U_{\mathcal{Z}})$，故 $\sigma(U_{\mathcal{Z}}) = \sigma(U) \setminus \{\lambda\}$，从而由谱是闭集知 λ 是 $\sigma(U)$ 的一个孤立点。

下证 $\sigma(U)$ 是有限集或者是以零为聚点的可列集。

对于任意的正整数 K，有 $P_K = \{\lambda : \frac{1}{K} \leq \lambda \leq K\} \cap \sigma(U)$ 为紧集 $\sigma(U)$ 的闭子集，从而为紧集。又紧集中的每个无限点集必在该紧集中有聚点，而 $\sigma(U) \setminus \{0\}$ 中的每个点都是孤立点，故 P_K 只能为有限集。由此即得 $\sigma(U) = \sum_{K=1}^{\infty} P_K$ 为至多可列集，即 $\sigma(U)$ 或者是有限集，或者是可列集。

若 $\sigma(U)$ 是可列集，则因 $\sigma(U)$ 为紧集及紧集中的每个无限点集必在该紧集中有聚点知 $\sigma(U)$ 中必有聚点，但 $\sigma(U)$ 中的每个非零点都是 $\sigma(U)$ 的孤立点，故只能有 $0 \in \sigma(U)$，且 0 为 $\sigma(U)$ 的聚点。

■

***Example* 2.4.16** *令 $I = [0,1]$，$k \in \mathcal{C}(I^2)$，考虑积分方程*

$$\int_0^1 k(s,t)f(t)dt - \lambda f(s) = g(s).$$

这里 λ 是非零的标量，$g \in \mathcal{C}(I)$ 为一个已知的函数，而 $f \in \mathcal{C}(I)$ 则是未知的。若 U 是关于核 k 的一个紧的积分算子 (见例 2.4.2)，则我们可以将上述方程重写为

$$(U-\lambda)(f) = g.$$

U 的非零的谱形如 $\{\lambda_n | 1 \leq n \leq N\}$(因紧算子的谱可列)，其中 N 是一个正整数或 ∞。若 $0 \neq \lambda \neq \lambda_n$，$\forall n$，则 $U-\lambda$ 可逆，故积分方程有唯一

解：$f=(U-\lambda)^{-1}(g)$。若对于某个 n，$\lambda=\lambda_n$，则 $U-\lambda$ 不可逆，故由 *Fredholm* 择抉定理知 $U-\lambda$ 不是单射，从而

$$\int_0^1 k(s,t)f(t)dt-\lambda f(s)=0$$

有非零解，且由定理 2.4.8 知非零解的个数是有限的。

若 $N=\infty$，则由定理 2.4.15 知 $\lim_{n\to\infty}=0$。

***Example* 2.4.17** 紧算子的谱的表现出来的特点是一般的算子所不具备的。

设 $\mathcal{H}$ 是可分的希尔伯特空间，有规范正交基（orthonormal basis，完备的规范正交系）$(e_n)_{n=1}^{\infty}$。若 (λ_n) 是一个有界的标量序列，定义 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 $U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n e_n$，其中 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n$。称 U 为相对基 $\{e_n\}$ 有对角线 (λ_n) 的对角算子（*the diagonal operator with the diagonal* (λ_n) *with respect to the basis* (e_n)）。

对于任意的 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n\in\mathcal{H}$，由 $\{e_n\}$ 为规范正交基及 (λ_n) 为有界标量序列知

$$||U(x)||^2=||\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n e_n||^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n a_n|^2\le\sup_n|\lambda_n|^2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\sup_n|\lambda_n|^2\cdot||x||^2,$$

即 $||U||\le\sup_n|\lambda_n|$。又

$$||U(e_n)||=||\lambda_n e_n||=|\lambda_n|||e_n||,\quad\forall n\in\mathbb{N}_+,$$

故 $||U||\ge\sup_n|\lambda_n|$，从而有 $||U||=\sup_n|\lambda_n|$。（至此已验证 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$）

U 可逆当且仅当 $\inf_n|\lambda_n|>0$：先设 $\inf_n|\lambda_n|=0$，则 (λ_n) 存在子列 (λ_{n_k}) 收敛于 0。若 U 可逆，则由 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间知 U^{-1} 亦为 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子，$e_{n_k}=I(e_{n_k})=U^{-1}U(e_{n_k})=U^{-1}(\lambda_{n_k}e_{n_k})=\lambda_{n_k}U^{-1}(e_{n_k})$，则有

$$1=||e_{n_k}||=||\lambda_{n_k}U^{-1}(e_{n_k})||\le|\lambda_{n_k}|||U^{-1}||\to 0,\quad k\to\infty,$$

矛盾。（$\mathcal{H}$ 中的单位元 I 为 $\sum_{n=1}^{\infty}e_n$）

若 $\inf_n|\lambda_n|>0$，此时相对基 $\{e_n\}$ 有对角线 (λ_n^{-1}) 的对角算子即为 U^{-1}。

这说明 $\sigma(U)$ 是集合 $\{\lambda_n|n\in\mathbb{N}_+\}$ 的闭包（为啥？$\lambda I-U=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_n)e_n$，$\lambda I-U$ 不可逆当且仅当 $\inf_n|\lambda-\lambda_n|=0$，即当且仅当 λ 属于集合 $\{\lambda_n|n\in\mathbb{N}_+\}$ 的闭包）。

实际上，给定 $\mathcal{C}$ 中的任一非空紧集 $\mathcal{K}$，选取 $\mathcal{K}$ 中的一个稠密序列。若 U 是相应的对角线算子，则 $\sigma(U)=\mathcal{K}$。因此，谱可以是任意的一个非空紧集。

3 希尔伯特空间上的算子和 GNS 构造

3.1 C^*-Algebras

代数 $\mathcal{A}$ 上的一个对合（*involution*）为：$\mathcal{A}$ 上的共轭线性映射（$\varphi(\alpha A)=\overline{\alpha}\varphi(A)$，$\alpha\in\mathbb{C}$）$A\mapsto A^*$，满足 $A^{**}=A$ 且 $(AB)^*=B^*A^*$（A^* 即表示 A 在对合映射下的像），$\forall A,B\in\mathcal{A}$。$(\mathcal{A},*)$ 称为一个对合代数，或者 $*$-代数。

若 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子集，定义 $\mathcal{S}^*=\{A^*|A\in\mathcal{S}\}$，若 $\mathcal{S}^*=\mathcal{S}$，则称集合 $\mathcal{S}$ 是自伴的(*self-adjoint*)。

$\mathcal{A}$ 的一个自伴子代数 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个 $*$-子代数，且将 $\mathcal{A}$ 的 involution 限制在 $\mathcal{B}$ 上后 $\mathcal{B}$ 成为一个 $*$-代数。

因 $\mathcal{A}$ 的一族 $*$-子代数的交还是 $*$-子代数，故对于 $\mathcal{A}$ 的每个子集 $\mathcal{S}$，存在一个最小的 $\mathcal{A}$ 的 $*$-子代数 $\mathcal{B}$ 包含 $\mathcal{S}$，称之为 $\mathcal{S}$ 产生的 $\mathcal{A}$ 的 $*$-子代数。

若 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个自伴理想，则商代数 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 是一个 $*$-代数，其对合为：$(A+\mathcal{I})^*=A^*+\mathcal{I}\quad(A\in\mathcal{A})$。

$\mathcal{A}$ 的一个元素 A 为自伴的或*hermitian*的，若 $A=A^*$。对于 $\mathcal{A}$ 中的每个元素 A，存在唯一的自伴元素 $B,C\in\mathcal{A}$ 使得 $A=B+iC$，其中 $B=\frac{1}{2}(A+A^*)$，$C=\frac{1}{2i}(A-A^*)$(唯一性：若 $A=B+iC=B_1+iC_1$，其中 B_1,C_1 是自伴的，则 $-i(C-C_1)=B-B_1=B^*-B_1^*=(B-B_1)^*=(-i(C-C_1))^*=i(C^*-C_1^*)=i(C-C_1)$，故 $C-C_1=B-B_1=0$)。A^*A 和 AA^* 都是自伴的。

$\mathcal{A}$ 的自伴元素的集合记为 $\mathcal{A}_{sa}$。

称 A 是正规的 (*normal*)，若 $A^*A=AA^*$。此时由 A 产生的 $*$-代数是交换的，且事实上是所有形如 A^mA^{*n} 的元素的线性扩张，其中 $m,n\in\mathbb{N}$，$n+m\geq 1$。

称元素 P 为一个投影 (*projection*)，若 $P=P^*=P^2$。(希尔伯特空间上即为正交投影)

若 $\mathcal{A}$ 有单位 I，则 $I=(I^*)^*=(II^*)^*=II^*=I^*$。若 $A\in Inv(\mathcal{A})$，则 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$，因 $I=I^*=(AA^{-1})^*=(A^{-1})^*A^*$。即 A 可逆当且仅当 A^* 可逆。因此，对于任意的 $A\in\mathcal{A}$，$\lambda\in\mathbb{C}$，$\lambda-A$ 可逆当且仅当 $(\lambda-A)^*=\overline{\lambda}-A^*$ 可逆，故有

$$\sigma(A^*)=\{\overline{\lambda}\in\mathbb{C}|\lambda\in\sigma(A)\}.$$

$\mathcal{A}$ 中的元素 U 是一个酉元 (unitary)，若 $U^*U=UU^*=I$。若 $U^*U=I$，则 U 为一个等距（*isometry*）；若 $UU^*=I$，则 U 为一个余等距（*co-isometry*）。

若 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 $*$-代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之间的同态，且保持了共轭性（*adjoints*），即 $\varphi(\mathcal{A}^*)=(\varphi(A))^*(A\in\mathcal{A})$，则 φ 是一个 $*$-同态。若 φ 还是双射，则其为 $*$-同构。

若 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 $*$-同态，则 $ker(\varphi)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的自伴理想，而 $\varphi(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B}$ 的 $*$-子代数。

$*$-代数 $\mathcal{A}$ 的自同构为：$*$-同构 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$。若 $\mathcal{A}$ 是单位的，且 U 为 $\mathcal{A}$ 中的酉元，则

$$Ad\,U:\mathcal{A}\to\mathcal{A},\quad \mathcal{A}\mapsto UAU^*,$$

为 $\mathcal{A}$ 的自同构。这样的自同构称为内部（*inner*）。

$\mathcal{A}$ 的元素 A 和 B 是酉元等价的（*unitarily equivalent*），若存在 $\mathcal{A}$ 的酉元 U 使得 $B=UAU^*$。因所有的酉元构成一个群，故这是 $\mathcal{A}$ 上的等价关系。

若 A 和 B 是酉元等价的，则 $\sigma(A)=\sigma(B)$。

巴拿赫 $*$-代数：$*$-代数 $\mathcal{A}$，其上有一个完备的次可乘范数，满足 $||A^*||=||A||$，$\forall A\in\mathcal{A}$（对合运算等距）。若 $\mathcal{A}$ 还有一个单位元 I，满足 $||I||=1$，则称 $\mathcal{A}$ 为单位的巴拿赫 $*$-代数。

C^*-代数：巴拿赫 $*$-代数，满足

$$||A^*A||=||A||^2\quad(A\in\mathcal{A}).$$

C^*-代数的一个闭 $*$-子代数显然也是一个 C^*-代数。因此称 C^*-代数的一个闭 $*$-子代数为 C^*-子代数。

若 C^*-代数有一个单位元 I，因 $||I||=||I^*I||=||I||^2$，且由 $I\neq0$ 知 $||I||>0$，故 $||I||=1$。类似的，若 P 是一个投影，则 $||P||=||P^2||=||PP||=||P^*P||=||P||^2$，故 $||P||=0$（零投影），或 $||P||=1$（非零投影）。

若 U 是 $\mathcal{A}$ 的一个酉元，则 $||U|| = ||U^*|| = 1$，因 $||U||^2 = ||U^*||^2 = ||U^*U|| = ||I|| = 1$。因此，$\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$（$\mathbb{T}$ 为单位圆）：若 $\lambda \in \sigma(U)$，则因 U 可逆知 $\lambda \neq 0$，且由 $(\lambda^{-1} - U^{-1})(-\lambda U) = \lambda - U$ 知 $\lambda^{-1} \in \sigma(U^{-1}) = \sigma(U^*)$，故 $|\lambda| \leq ||U|| = 1$ 且 $|\lambda^{-1}| \leq ||U^*|| = 1$，从而有 $|\lambda| = 1$。

***Example* 3.1.1** *标量场 $\mathcal{C}$ 是一个单位的 C^*-代数，其* involution *定义为复共轭 $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$。*

***Example* 3.1.2** *若 Ω 是一个局部紧 Hausdorff 空间，则 $\mathcal{C}_0(\Omega)$（例 2.1.3）是一个 C^*-代数，其 involution 为 $f \mapsto \overline{f}$。类似的，以下的所有代数都是 C^*-代数，其 involution 为 $f \mapsto \overline{f}$：*

(a)$\ell^\infty(\mathcal{S})$，其中 $\mathcal{S}$ 是一个集合（例 2.1.1）；

(b)$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$，其中 (Ω, μ) 是一个测度空间；

(c)$\mathcal{C}_b(\Omega)$，其中 Ω 是一个拓扑空间（例 2.1.2）；

(d)$\mathcal{B}_\infty(\Omega)$，其中 Ω 是一个测度空间.

***Example* 3.1.3** *若 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，则 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个 C^*-代数。*

***Example* 3.1.4** *若 Ω 是一个非空集合，$\mathcal{A}$ 为 C^*-代数，则 $\ell^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ 在赋予逐点定义的对合后是一个 C^* 代数。这是例 3.1.2(a) 的推广。*

若 Ω 是一个局部紧 Hausdorff 空间，称一个连续函数 $f : \Omega \to \mathcal{A}$ 在无穷远处消失，若 $\forall \epsilon > 0$，集合

$$\{\omega \in \Omega | \; ||f(\omega)|| \geq \epsilon\}$$

是紧的。记所有这样的函数的集合为 $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathcal{A})$。这是 $\ell^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ 的一个 C^*-子代数。

***Theorem* 3.1.5** *若 A 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的自伴元素，则 $r(A) = ||A||$（单位代数中才有谱的概念）。*

Proof. 因 $A = A^*$，故 $||A^2|| = ||A||^2$。从而有 $||A^{2^n}|| = ||A||^{2n}$，$\forall n \in \mathbb{N}_+$，因此由定理 2.2.13(Beurling) 知

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ||A^{2^n}||^{\frac{1}{2^n}} = ||A||.$$

■

***Corollary* 3.1.6** *一个单位的 $*$-代数上至多只有一个范数使其成为 C^*-代数。*

Proof. 若 $||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 都是单位的 $*$-代数 $\mathcal{A}$ 上使其成为 C^*-代数的范数，则由定理 3.1.5 有

$$||A||_j^2 = ||A^*A||_j = r(A^*A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A^*A)} |\lambda|, \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (j = 1, 2),$$

即 $||A||_1 = ||A||_2$，$\forall A \in \mathcal{A}$，故 $||\cdot||_1 = ||\cdot||_2$。从而一个 $*$-代数上至多只有一个范数使其成为 C^*-代数。。 ■

***Lemma* 3.1.7** *令 $\mathcal{A}$ 是一个赋予了满足 $||A||^2 \leq ||A^*A||(A \in \mathcal{A})$ 的对合的巴拿赫代数，则 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。*

Proof. 不等式 $||A||^2 \leq ||A^*A|| \leq ||A^*||\cdot||A||$ 意味着 $||A|| \leq ||A^*||$，$\forall A \in \mathcal{A}$。故 $||A|| \leq ||A^*|| \leq ||A^{**}|| = ||A||$，即有 $||A|| = ||A^*||$。从而有

$$||A||^2 \leq ||A^*A|| \leq ||A^*|| \cdot ||A|| = ||A||^2,$$

即 $||A^*A|| = ||A||^2$，$\forall A \in \mathcal{A}$。故 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。 ■

***Theorem* 3.1.8** *一个从单位的巴拿赫 $*$-代数到单位的 C^*-代数的单位的 $*$-同态 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 必然是范数减少的。*

Proof. 若 $A \in \mathcal{A}$，则 $\sigma(\varphi(A)) \subseteq \sigma(A)$（见 P63 定理 2.3.3 前面的说明），故 $r(\varphi(A)) \leq r(A)$，$\forall A \in \mathcal{A}$。则有 $||\varphi(A)||^2 = ||\varphi(A)^*\varphi(A)|| = ||\varphi(A^*A)|| = r(\varphi(A^*A)) \leq r(A^*A) \leq ||A^*A|| \leq ||A||^2$。因此，$||\varphi(A)|| \leq ||A||$。 ■

***Theorem* 3.1.9** *若 A 是一个单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的一个 hermitian 元素，则 $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$。*

Proof. 因 e^{iA}（见定理 2.2.17 前的说明）是酉元（由定理 2.2.17，因 iA 与 $-iA$ 可交换，故 $e^{iA}(e^{iA})^* = e^{iA}e^{(iA)^*} = e^{iA}e^{-iA} = e^{iA+(-iA)} = I$），故 $\sigma(e^{iA}) \subseteq \mathbb{T}$（单位圆）（见例 3.1.1 前说明）。

若 $\lambda \in \sigma(A)$，$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(A-\lambda)^{n-1}}{n!}$，则

$$e^{iA} - e^{i\lambda} = (e^{i(A-\lambda)-1})e^{i\lambda} = (A - \lambda)Be^{i\lambda}.$$

因 B 和 A 可交换，$A-\lambda$ 不可逆，故 $e^{iA}-e^{i\lambda}$ 不可逆（若可逆，则由 B 和 A 可交换及 $e^{i\lambda}$ 与任意元素可交换知 $A-\lambda$ 有左逆元和右逆元，此时必有左逆元和右逆元相等：$CA=AD=I\Rightarrow C=C(AD)=(CA)D=D$，故 $A-\lambda$ 可逆，矛盾）。因此，$e^{i\lambda}\in\mathbb{T}$，则有 $\lambda\in\mathbb{R}$。从而得 $\sigma(A)\subseteq\mathbb{R}$。

注：对于任意的 $A\in\mathcal{A}$，$\lambda\in\mathbb{C}$，$\lambda-A$ 可逆当且仅当 $(\lambda-A)^*=\overline{\lambda}-A^*$ 可逆，故若 A 为 hermitian 元，即 $A=A^*$，则有 $\lambda\in\sigma(A)\Leftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma(A)$。由此只能说明虚数在 $\sigma(A)$ 中成对出现，而定理则直接证明了 λ 只能是实数。这说明定理的结论更强。 ■

***Theorem* 3.1.10** *若 τ 是一个单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的特征，则其保持共轭。*

Proof. 若 $A\in\mathcal{A}$，则 $A=B+iC$，其中 B，C 是 $\mathcal{A}$ 的 hermitian 元。因 $\tau(B)\in\sigma(B)$，$\tau(C)\in\sigma(C)$，则由定理 3.1.9 知 $\tau(B)$ 和 $\tau(C)$ 都是实数，因而有

$$\tau(A^*)=\tau(B-iC)=\tau(B)-i\tau(C)=\overline{\tau(B)+i\tau(C)}=\overline{\tau(A)}.$$

■

***Theorem* 3.1.11** （*Gelfand*）*若 $\mathcal{A}$ 是一个非零的单位交换 C^*-代数，则 Gelfand 表示*

$$\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A})),\quad A\mapsto\hat{A},$$

是一个等距 $*$-同构。

Proof. 由定理 2.3.6 知 φ 是一个范数减少的同态，$||\varphi(A)||_\infty=r(A)$。若 $\tau\in\Omega(\mathcal{A})$，则 $\varphi(A^*)(\tau)=\widehat{A^*}(\tau)=\tau(A^*)=\overline{\tau(A)}=\overline{\varphi(A)(\tau)}=\varphi(A)^*(\tau)$，因此 φ 是一个 $*$-同态。此外，由

$$||\varphi(A)||^2=||\varphi(A^*)\varphi(A)||=||\varphi(A^*A)||=r(A^*A)=||A^*A||=||A||^2$$

可知 φ 是等距的。

因此，$\varphi(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ 的一个闭 $*$-子代数，其将 $\Omega(\mathcal{A})$ 中的点加以分离，且有 $\varphi(I)(\tau)=1$。则由 Stone-Weierstrass 定理（定理 2.1.9）知 $\varphi(\mathcal{A})=\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$。 ■

***Theorem* 3.1.12** 令 $\mathcal{B}$ 是一个单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的 C^*-子代数，包含 $\mathcal{A}$ 的单位，则

$$\sigma_{\mathcal{B}}(B) = \sigma_{\mathcal{A}}(B) \quad (B \in \mathcal{B}).$$

Proof. 先设 B 是 $\mathcal{B}$ 的 hermitian 元。此时由定理 3.1.9 知 $\sigma_{\mathcal{A}}(B) \subset \mathbb{R}$，则其没有洞，因而由定理 2.2.15 知 $\sigma_{\mathcal{B}}(B) = \sigma_{\mathcal{A}}(B)$。因此，$B$ 在 $\mathcal{B}$ 中可逆当且仅当 B 在 $\mathcal{A}$ 中可逆。

现设 B 是 $\mathcal{B}$ 中的任意一个在 $\mathcal{A}$ 可逆的元素，则存在 $\mathcal{A}$ 中的元素 A 使得 $BA = AB = I = I^*$。则有 $A^*B^* = (BA)^* = I = (AB)^* = B^*A^*$，故

$$BB^*A^*A = B(B^*A^*)A = BA = I = A^*B^* = A^*(AB)B^* = A^*ABB^*.$$

这说明 hermitian 元 BB^* 在 $\mathcal{A}$ 中可逆，因而在 $\mathcal{B}$ 中可逆。则存在 $C \in \mathcal{B}$ 使得 $BB^*C = I$，因此由逆元唯一性知 $B^*C = A$，从而得 $A \in \mathcal{B}$。故由 $BA = AB = I$ 知 B 在 $\mathcal{B}$ 中可逆。

至此证明了 $\mathcal{B}$ 中的元素在 $\mathcal{A}$ 中的可逆性等价于在 $\mathcal{B}$ 中的可逆性。证毕。 ∎

设 $\mathcal{S}$ 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的子集。由 $\mathcal{S}$ 产生的 C^*-代数为包含 $\mathcal{S}$ 的最小的 $\mathcal{A}$ 的 C^*-子代数。若 $\mathcal{S} = \{A\}$，记由 $\mathcal{S}$ 产生的 C^* 子代数为 $\mathcal{C}^*(A)$。若 A 是正规的，则 $C^*(A)$ 是交换的。类似的，若 $\mathcal{A}$ 是单位的，A 是正规的，则由 I 和 A 产生的 C^*-子代数是交换的。

注：对于一般的 A，$\mathcal{C}^*(A)$ 为

$$\overline{span}\{B_1^{m_1}B_2^{m_2}\cdots B_n^{m_n} | n \in \mathbb{N}_+, m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{N}_+, B \in \{A, A^*\}\}.$$

当 A 是正规的，即 $AA^* = A^*A$ 时，则有

$$\mathcal{C}^*(A) = \overline{span}\{A^{n_1}, (A^*)^{n_2}, A^{n_3}(A^*)^{n_4} | n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}_+\}.$$

由单位元 I 和非单位元 A 产生的单位的 C^*-子代数为 $\mathcal{C}^*(A, I)$

$$\overline{span}\{I, B_1^{m_1}B_2^{m_2}\cdots B_n^{m_n} | n \in \mathbb{N}_+, m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{N}_+, B \in \{A, A^*\}\}.$$

当 A 为正规元时，$\mathcal{C}^*(A, I)$ 为单位的交换的 C^*-子代数。

若 A 是单位的 C^*-代数的一个正规元，由定理 3.1.11 知 $r(A) = ||\hat{A}||_\infty = ||A||$。这实际上是定理 3.1.5 的结论的推广（自伴元是正规元）。

若 $\mathcal{A}$ 是单位的 C^*-代数，$A \in \mathcal{A}_{sa}$，即 A 为自伴的，则 e^{iA} 是酉元，但并不是所有的酉元都是这个形式。然而，利用定理 3.1.11，我们可以给出一些条件来确保一个酉元具有这样的形式。

***Theorem* 3.1.13** *设 U 是单位的 C^* 代数 $\mathcal{A}$ 中的一个酉元。若 $\sigma(U) \neq \mathbb{T}$，则存在 $A \in \mathcal{A}_{sa}$，使得 $U = e^{iA}$。若 $||I - U|| < 2$，则 $\sigma(U) \neq \mathbb{T}$。*

Proof. 若 $\sigma(U) \notin \mathbb{T}$，必存在某个 $e^{i\theta} \in \mathbb{T} \setminus \sigma(U)$，其中 $\theta \in [0, 2\pi]$。

令 $\lambda = e^{i(\pi-\theta)} \in \mathbb{T}$，则由 $(\lambda U)^*(\lambda U) = \overline{\lambda}\lambda U^*U = U^*U = UU^* = (\lambda U)(\lambda U)^*$ 知 λU 亦为酉元。且由 $-1 - \lambda U = \lambda(e^{i\theta} - U)$ 知 $-1 \in \sigma(\lambda U)$。

若对 λU，存在 $A \in \mathcal{A}_{sa}$，使得 $\lambda U = e^{iA}$，则 $U = \lambda^{-1}e^{iA} = e^{i(\theta-\pi)}e^{iA} = e^{i(A+(\theta-\pi)I)}$，而由对合运算为共轭线性的及 A 和 I 皆自伴知 $A + (\theta - \pi)I$ 是自伴的。故不妨设 $-1 \notin \sigma(U)$。

由 U 为酉元知 U 是正规的，因此不妨设 $\mathcal{A}$ 是交换的（否则，可考虑由 I 和 U 产生的单位的交换的 C^*-子代数 $\mathcal{C}^*(I, A)$，此时由定理 3.1.12 知 U 在 $\mathcal{C}(I, A)$ 中的谱和在 $\mathcal{A}$ 中的谱相同）。

设 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ 为 Gelfand 表示，令 $f = \varphi(U)$，记复数域上的对数函数的主值分支为 $ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$，$ln(z) = ln|z| + i\ argz$，$-\pi < arg\ z \leq \pi$。则 $g = ln \circ f$ 是 $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ 的一个良定义的元素（由定理 2.3.4 知 $f = \varphi(U) = \hat{U}$ 的值域等于 U 的谱，故不包含负实轴上的点和原点，从而得 g 是良定义的），且 $e^g = f$。因 f 的值域包含在单位圆中，故 $|f(\omega)| = 1$，$\forall \omega \in \Omega(\mathcal{A})$，从而 g 的实部为 0，即得 $g = ih$，其中 $h = \overline{h} \in \Omega(\mathcal{A})$。令 $A = \varphi^{-1}(h)$，则由 φ 是 $*$-同构及 h 自伴知 $A \in \mathcal{A}_{sa}$。又

$$\varphi(U) = f = e^g = e^{ih} = e^{\varphi(iA)} = \varphi(e^{iA}),$$

故由 φ 为双射知得 $U = e^{iA}$（其中 $e^{\varphi(iA)} = \varphi(e^{iA})$ 可用 φ 的线性性及 e^{iA} 的定义加以验证）。

最后，由 U 是正规的知 $I - U$ 是正规的。由定理 2.2.9 知 U 的谱非空，从而由定理 2.2.5 可得 $\sigma(I - U) = 1 - \sigma(U)$，故

$$||I - U|| = r(I - U) = \sup\{|1 - \lambda| \big| \lambda \in \sigma(U)\}.$$

因此，当 $||I - U|| < 2$ 时，有 $-1 \notin \sigma(U)$，从而得 $\sigma(U) \neq \mathbb{T}$。 ■

接下去讨论函数演算（*functional calculus*）。

若 $\theta:\Omega\to\Omega'$ 是紧的 Hausdorff 空间 Ω 和 Ω' 之间的连续映射，则其转置映射

$$\theta^t:\mathcal{C}(\Omega')\to\mathcal{C}(\Omega),\quad f\mapsto f\circ\theta,$$

是一个单位的 $*$-同态。此外，若 θ 是一个同胚，则 θ^t 为 $*$-同构。

单位的 C^*-代数之间的 $*$-同构必是等距的：设 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 为单位的 C^*-代数之间的 $*$-同构，则 φ^{-1} 亦为 $*$-同构，故由定理 3.1.8 知 φ 和 φ^{-1} 都是范数减少的，因而有

$$||A||=||\varphi^{-1}(\varphi(A))||\le||\varphi(A)||\le||A||,\quad\forall A\in\mathcal{A}.$$

这说明 $||\varphi(A)||=||A||$，$\forall A\in\mathcal{A}$，即 φ 等距。

***Theorem* 3.1.14** *令 A 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的正规元，$z:\sigma(A)\to\mathbb{C}$ 为嵌入映射（inclusion map）。则存在唯一的单位 $*$-同构 $\varphi:\mathcal{C}(\sigma(A))\to\mathcal{C}^*(A,I)\subseteq\mathcal{A}$ 使得 $\varphi(z)=A$。*

Proof. 记由 I 和 A 产生的单位的交换 C^*-代数 $\mathcal{C}^*(I,A)$ 为 $\mathcal{B}$，令 $\psi:\mathcal{B}\to\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{B}))$ 为 Gelfand 表示。则由定理 3.1.11 知 ψ 为 $*$-同构。由 $\hat{A}:\Omega(\mathcal{B})\to\sigma(A)$ 为同胚（定理 2.3.7）知 $\hat{A}^t:\mathcal{C}(\sigma(A))\to\mathcal{B}$ 亦为 $*$-同构。

令 $\varphi:\mathcal{C}(\sigma(A))\to\mathcal{B}$ 为复合映射 $\psi^{-1}\circ\hat{A}^t$，则 φ 为 $*$-同构，且有

$$\varphi(z)=\psi^{-1}\circ\hat{A}^t(z)=\psi^{-1}(\hat{A}^t(z))=\psi^{-1}(\hat{A})=A.$$

容易验证 φ 是单位的，故 φ 为单位 $*$-同构。

由 1 和 z 产生的单位的交换 C^*-代数 $\mathcal{C}^*(1,z)$ 为 $\mathcal{C}(\sigma(A))$ 的闭子代数，将 $\sigma(A)$ 中的点加以分离且是自伴的，则由 Stone-Weierstrass 定理（定理 2.1.9）知 $\mathcal{C}(\sigma(A))=\mathcal{C}^*(1,z)$。因此 $\mathcal{C}(\sigma(A))$ 与 $\mathcal{C}^*(A,I)$ 之间的单位 $*$-同构由其在 z 处的值所唯一决定。从而得 φ 是唯一的单位 $*$-同构 $\varphi:\mathcal{C}(\sigma(A))\to\mathcal{C}^*(A,I)\subseteq\mathcal{A}$ 使得 $\varphi(z)=A$。 ∎

令 A 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的正规元，$z:\sigma(A)\to\mathbb{C}$ 为嵌入映射（*inclusion map*）。称满足 $\varphi(z)=A$ 的唯一的单位 $*$-同构 $\varphi:\mathcal{C}(\sigma(A))\to\mathcal{C}^*(A,I)\subseteq\mathcal{A}$ 为在 A 处的函数演算（*the functional calculus at A*）。

若 p 是多项式，则 $\varphi(p)=p(A)$，故对于 $f\in\mathcal{C}(\sigma(A))$，不妨记 $\varphi(f)=f(A)$。

令 $\mathcal{B}$ 为 φ 的像，则 $\mathcal{B}$ 为由 I 和 A 产生的 C^*-代数 $\mathcal{C}^*(A,I)$ 。若 $\tau\in\Omega(\mathcal{B})$，因映射 $f\mapsto f(\tau(A))$ 和 $f\mapsto\tau(f(A))$ 为从 $\mathcal{C}(\sigma(A))$ 到 $\mathbb{C}$ 的 $*$-同态，且在 1 和 z 处的值分别相等，故 $f(\tau(A))=\tau(f(A))$。

***Theorem* 3.1.15** *设 A 为单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的一个正规元，令 $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$，则有*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

此外，若 $g \in \mathcal{C}(\sigma(f(A)))$，则

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Proof. 设 $\mathcal{B}$ 是由 I 和 A 产生的 C^*-子代数，则 $\sigma(f(A)) = \{\tau(f(A))|\tau \in \Omega(\mathcal{B})\} = \{f(\tau(A))|\tau \in \Omega(\mathcal{B})\} = f(\sigma(A))$。

设 $\mathcal{C}$ 为由 I 和 $f(A)$ 产生的 C^*-子代数，则 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$，且 $\forall \tau \in \Omega(\mathcal{B})$，$\tau$ 在 $\mathcal{C}$ 上的限制 $\tau_{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的特征。则有

$$\tau((g \circ f)(A)) = g(f(\tau(A))) = g(\tau(f(A))) = \tau_{\mathcal{C}}(g(f(A))) = \tau(g(f(A))).$$

因此，$(g \circ f)(A) = g(f(A))$。

■

***Theorem* 3.1.16** *设 Ω 为一个紧的 Hausdorff 空间，对于 $\omega \in \Omega$，令 δ_ω 为 $\mathcal{C}(\Omega)$ 上的特征，满足 $\delta_\omega(f) = f(w)$，$f \in \mathcal{C}(\Omega)$。则映射*

$$\Omega \to \Omega(\mathcal{C}(\Omega)), \quad \omega \mapsto \delta_\omega$$

是一个同胚。

Proof. 该映射是连续的：若 $(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为 Ω 中收敛于某点 ω 的网，则 $\lim_{\lambda\in\Lambda} f(\omega_\lambda) = f(\omega)$，$\forall f \in \mathcal{C}(\Omega)$，故网 $(\delta_{\omega_\lambda})$ 弱 * 收敛于 δ_ω。

该映射是单射：若 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$，$\omega_1 \neq \omega_2$，则由 Urysohn 引理知存在 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，使得 $f(w_1) = 0$，$f(w_2) = 1$，因而 $\delta_{\omega_1} \neq \delta_{\omega_2}$。

该映射是满射：设 $\tau \in \Omega(\mathcal{C}(\Omega))$。则 $M = ker(\tau)$ 是 $\mathcal{C}(\Omega)$ 的一个真 C^* 子 -代数。同时，M 分离了 Ω 中的点，因若 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$，$\omega_1 \neq \omega_2$，则由 Urysohn 引理知存在 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，满足 $f(\omega_1) \neq f(\omega_2)$，故 $g = f - \tau(f) \in M$，$g(\omega_1) \neq g(\omega_2)$。则由 Stone-Weierstrass 定理知存在 $\omega \in \Omega$，使得 $g_1(\omega) = 0$，$\forall g_1 \in M$。因此，$(f_1 - \tau(f_1))(\omega) = 0$，即 $f_1(w) = \tau(f_1)$，$\forall f_1 \in \mathcal{C}(\Omega)$。这说明 $\tau = \delta_\omega$。

又因映射 $\omega \mapsto \delta_\omega$ 是紧的 Hausdorff 空间之间的连续双射，故为同胚。

■

3.2 Positive Elements of C^*-Algebras

这一节我们介绍 C^*-Algebras 的 hermitian 元构成的集合上的一个偏序关系。主要的结果是正算子的正平方根的存在性和唯一性。

***Remark* 3.2.1** *设 $\mathcal{A}=\mathcal{C}(\Omega)$，其中 Ω 是一个紧的 Hausdorff 空间。则 $\mathcal{A}_{sa}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的实值函数的集合（$f=\overline{f}\Leftrightarrow f$ is real valued），由此可定义 $\mathcal{A}_{sa}$ 上的一个自然的偏序关系：$f\leq g\Leftrightarrow f(\omega)\leq g(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$。*

$f\in\mathcal{A}$ 是正的 (positive)，即 $f\geq 0$，当且仅当存在某个 $g\in\mathcal{A}$，使得 $f=\overline{g}g$。此时 f 有一个唯一的正平方根，即函数 $w\mapsto\sqrt{f(\omega)}$。

注意到，若 $f=\overline{f}$，也可以用范数来描述使 f 为正的对应的条件：设 $t\in\mathbb{R}^+$（$\mathbb{R}^+$ 应表示非负实数集），若对于该 t，有 $||f-t||_\infty\leq t$，则 f 是正的。反过来，设 $t\in\mathbb{R}^+$，若 $f\geq 0$，$||f||_\infty\leq t$，则 $||f-t||_\infty\leq t$。

我们将对 $C(\Omega)$ 的这些性质作推广，即在任意的一个 C^*-代数上定义一个偏序关系，并得到许多类似的结果。

在一个单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中，称其元素 A 是正的，若 A 是 hermitian 元且 $\sigma(A)\subseteq\mathbb{R}^+$。我们用 $A\geq 0$ 表示 A 是正的，并记 $\mathcal{A}$ 中的所有正元的集合为 $\mathcal{A}^+$。

对于单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的任意一个包含 $\mathcal{A}$ 的单位的 C^*-子代数 $\mathcal{B}$，由定理 3.1.12 知 $\sigma_{\mathcal{B}}(B)=\sigma_{\mathcal{A}}(B)$，$\forall B\in\mathcal{B}$。因此，$B\in\mathcal{B}^+\Leftrightarrow$B 为 hermitian 元且 $\sigma_{\mathcal{B}}(B)(=\sigma_{\mathcal{A}}(B))\subseteq\mathbb{R}^+\Leftrightarrow B\in\mathcal{B}\cap\mathcal{A}^+$，即得 $\mathcal{B}^+=\mathcal{B}\cap\mathcal{A}^+$。

若 $\mathcal{S}$ 是一个非空集合，由例 2.2.2 知 $\sigma(f)$ 是 f 的值域的闭包，则 $f\in\ell^\infty(\mathcal{S})$ 在 C^*-代数意义下是正的当且仅当 $f\geq 0$，$\forall x\in\mathcal{S}$。

若 Ω 是一个紧的 Hausdorff 空间，由例 2.2.1 知 $\sigma(f)$ 是 f 的值域，则 $f\in\mathcal{C}(\Omega)$ 是正的当且仅当 $f(\omega)\geq 0$，$\forall\omega\in\Omega$。

若 A 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的 hermitian 元，则由 A 和 I 产生的单位的交换 C^*-代数 $\mathcal{C}^*(A,I)$ 为

$$\overline{span}\{I,A^n|n\in\mathbb{N}_+\}.$$

***Theorem* 3.2.2** *设 $\mathcal{A}$ 是单位的 C^*-代数，$A\in\mathcal{A}^+$，则存在唯一的 $B\in\mathcal{A}^+$，使得 $B^2=A$。*

Proof. 考虑由 A 和 I 产生的单位的交换 C^*-代数 $\mathcal{C}^*(A,I)$。由 Remark3.2.1 后的说明可知 $A\in(\mathcal{C}^*(A,I))^+$。设 Ω 是 $\mathcal{C}^*(A,I)$ 的特征空间，由定理 2.3.5

知 Ω 是紧的 Hausdorff 空间。由定理 3.1.11，可将 $\mathcal{C}^*(A,I)$ 视为 $\mathcal{C}(\Omega)$（等距 $*$-同构意义下），且由定理 2.3.7 知在 Gelfand 变换下，$\mathcal{C}^*(A,I)$ 中的正元与 $\mathcal{C}(\Omega)$ 中的正元一一对应，因而由 Remark 3.2.1 知存在 $B \in (\mathcal{C}^*(A,I))^+ \subseteq \mathcal{A}^+$，使得，$B^2 = A$。

现设 $C \in \mathcal{A}^+$，$C^2 = A$，则 $CA = AC = C^3$。因 $B \in \mathcal{C}^*(A,I) = \overline{span}\{I, A^n | n \in \mathbb{N}_+\}$，而 C 和 A 及 I 可交换，故 C 和 B 可交换。

设 $\mathcal{B}$ 为由 B，C 和 I 产生的 $\mathcal{A}$ 的单位的交换 C^*-子代数，设 Ω_1 是 $\mathcal{B}$ 的特征空间，令 $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}(\Omega_1)$ 为 $\mathcal{B}$ 的 Gelfand 表示，则 $\varphi(B)$ 和 $\varphi(C)$ 是 $\varphi(A)$ 在 $\mathcal{C}(\Omega_1)$ 中的平方根。由 Remark 3.2.1 可知 $\varphi(B) = \varphi(C)$，而 φ 为等距 $*$-同构，因此 $B = C$。至此唯一性得证。 ■

若 $\mathcal{A}$ 是单位的 C^*-代数，A 为其正元，记满足 $B^2 = A$ 的唯一的正元 B 为 $A^{1/2}$。若 $C \in \mathcal{A}$ 是 hermitian 元，则由定理 3.1.9 知其谱包含在 $\mathbb{R}$ 中，则 C^2 的谱包含在 $\mathbb{R}^+$ 中，因此 C^2 是正元。记

$$|C| = (C^2)^{1/2}, \quad C^+ = \frac{1}{2}(|C| + C), \quad C^- = \frac{1}{2}(|C| - C).$$

考虑由 C 和 I 产生的 $\mathcal{A}$ 的单位的交换 C^*-子代数 $\mathcal{C}^*(C,I)$，则由 $C^2 \in \big(\mathcal{C}^*(C,I)\big)^+$ 知 $|C| \in \big(\mathcal{C}^*(C,I)\big)^+$。设 Ω 是 $\mathcal{C}^*(C,I)$ 的特征空间，令 $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}(\Omega)$ 为 $\mathcal{C}^*(C,I)$ 的 Gelfand 表示。则 $\varphi(C^+) = \frac{1}{2}[\varphi(|C|) + \varphi(C)]$，$\varphi(C^-) = \frac{1}{2}[\varphi(|C|) - \varphi(C)]$，容易验证 $\varphi(C^+)$ 和 $\varphi(C^-)$ 都是 $\mathcal{C}(\Omega)$ 中的正元，则 $|C|, C^+, C^- \in \big(\mathcal{C}^*(C,I)\big)^+ \subset \mathcal{A}^+$，且满足 $C = C^+ - C^-$，$C^+C^- = 0$。

***Remark* 3.2.3** *若 A 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的闭单位球中的 hermitian 元，则 $I - A^2 \in \mathcal{A}^+$（$I - A^2$ 为 hermitian 元且其谱包含于 $\mathbb{R}^+$ 中），且*

$$U = A + i\sqrt{I - A^2}, \quad V = A - i\sqrt{I - A^2}$$

是酉元，满足 $A = \frac{1}{2}(U + V)$。又 $\mathcal{A}$ 中的每个元素 B 有 hermitian 元分解：$B = \frac{1}{2}(B + B^*) + i \cdot \frac{(B - B^*)}{2i}$，故单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 由酉元线性扩张而成。

***Lemma* 3.2.4** *设 $\mathcal{A}$ 是一个单位的 C^*-代数，A 是 $\mathcal{A}$ 的 hermitian 元，$t \in \mathbb{R}^+$。若 $||A - tI|| \le t$，则 $A \ge 0$。反之，若 $||A|| \le t$，$A \ge 0$，则 $||A - tI|| \le t$。*

Proof. 在由 I 和 A 产生的单位的交换 C^*-代数 $\mathcal{C}^*(A,I)$ 中考虑即可。利用 Gelfand 表示和定理 3.1.11 的结论，可得 $||\hat{A} - t||_\infty = ||A - tI|| \le t$，则由

Remark 3.2.1 可知 $\hat{A}$ 为 $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{C}^*(A, I)))$ 中的正元，从而得 A 为 $\mathcal{A}$ 中的正元。剩余结论类似可证。 ■

注：由引理 3.2.4 可知，若 $\mathcal{A}$ 是一个单位的 C^*-代数，则$\mathcal{A}^+$ 在 $\mathcal{A}$ 中是闭的。事实上，设 $A \in \overline{\mathcal{A}^+}$，则存在 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_+} \subset \mathcal{A}^+$，使得

$$||A_n - A|| \to 0, \quad n \to \infty.$$

取 $t_n = ||A_n||$，$n \in \mathbb{N}_+$，$t = ||A||$，则由 $\big|||A_n|| - ||A||\big| \leq ||A_n - A||$ 知

$$\lim_{n\to\infty} |t_n - t| = 0.$$

因 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_+} \subset \mathcal{A}^+$，由引理 3.2.4 可得

$$\begin{aligned} ||A - tI|| &\leq ||A - A_n|| + ||A_n - t_n I|| + ||(t_n - t)I|| \\ &\leq ||A - A_n|| + t_n + |t_n - t| \\ &\leq ||A - A_n|| + 2|t_n - t| + t, \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 即得 $||A - tI|| \leq t$，其中 $t = ||A|| \in \mathbb{R}^+$。又

$$||A_n - A^*|| = ||A_n^* - A^*|| = ||(A_n - A)^*|| = ||A_n - A|| \to 0, \quad n \to \infty.$$

这说明 $A = A^*$。因此，由引理 3.2.4 知 $A \in \mathcal{A}^+$，从而得 $\mathcal{A}^+$ 在 $\mathcal{A}$ 中是闭的。

***Lemma* 3.2.5** *单位的 C^*-代数中的两个正元的和仍为正元。*

Proof. 设 $\mathcal{A}$ 是单位的 C^*-代数，$A, B \in \mathcal{A}^+$。由引理 3.2.4 知

$$\big|\big|A - ||A||\,\big|\big| \leq ||A||, \quad \big|\big|B - ||B||\,\big|\big| \leq ||B||.$$

则有

$$\big|\big|A + B - ||A|| - ||B||\,\big|\big| \leq \big|\big|A - ||A||\,\big|\big| + \big|\big|B - ||B||\,\big|\big| \leq ||A|| + ||B||.$$

因此，由引理 3.2.4 知 $A + B \geq 0$。 ■

***Theorem* 3.2.6** *设 A 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的任一元素，则 A^*A 是正的。*

Proof. 首先证明若 $-A^*A \in \mathcal{A}^+$，则 $A=0$。由 Remark2.2.4 知 $\sigma(-AA^*)\setminus\{0\}=\sigma(-A^*A)\setminus\{0\}$，因此由 $-A^*A\in\mathcal{A}^+$ 可得 $-AA^*\in\mathcal{A}^+$。记 $A=B+iC$，其中 $B,C\in\mathcal{A}_{sa}$。则 $A^*A+AA^*=2B^2+2C^2$，故 $A^*A=2B^2+2C^2+(-AA^*)\in\mathcal{A}^+$。这说明 $\sigma(A^*A)\in\mathbb{R}^+\cap(-\mathbb{R}^+)=\{0\}$，因此 $||A||^2=||A^*A||=r(A^*A)=0$，即 $A=0$。

现设 A 是 $\mathcal{A}$ 中的任一元素，下面证明 A^*A 是正的。记 $D=A^*A$，则 D 是 hermitian 元，因而有 $D=D^+-D^-$。记 $F=AD^-$，则

$$-F^*F=-D^-A^*AD^-=-D^-(D^+-D^-)D^-=(D^-)^3\in\mathcal{A}^+,$$

故由第一部分的证明知 $F=0$。则 $(D^-)^3=0$，故 $D^-=0$。因此，$A^*A=D^+\in\mathcal{A}^+$。

■

由定理 3.2.6，可将 $|A|$ 的定义加以推广：设 A 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的任一元素，定义 $|A|=(A^*A)^{1/2}$。

若 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，可在 $\mathcal{A}_{sa}$ 上定义偏序关系：$A\le B\Leftrightarrow B-A\in\mathcal{A}^+$，使 $\mathcal{A}_{sa}$ 成为一个偏序集（poset）。该偏序关系有平移不变性，即

$$A\le B\Rightarrow A+C\le B+C,\ \forall A,B,C\in\mathcal{A}_{sa}.$$

而 $\forall t\in\mathbb{R}^+$，有

$$A\le B\Rightarrow tA\le tB.$$

此外，$A\le B\Leftrightarrow -A\ge -B$。

***Theorem* 3.2.7** *设 $\mathcal{A}$ 是一个单位的 C^*-代数，则*

(1) 集合 $\mathcal{A}^+=\{A^*A|A\in\mathcal{A}\}$；

(2) 若 $A,B\in\mathcal{A}_{sa}$，$C\in\mathcal{A}$，则 $A\le B\Rightarrow C^*AC\le C^*BC$；

(3) 若 $0\le A\le B$，则 $||A||\le||B||$；

(4) 若 A 和 B 是正的可逆元，则 $A\le B\Rightarrow 0\le B^{-1}\le A^{-1}$。

Proof.

(1) 由定理 3.2.6 知 $\{A^*A|A\in\mathcal{A}\}\subseteq\mathcal{A}^+$，而由正元的正平方根的存在性可知 $\mathcal{A}^+\subseteq\{A^*A|A\in\mathcal{A}\}$。

(2) 由 $A\le B$ 可得 $C^*BC-C^*AC=C^*(B-A)C=C^*(B-A)^{1/2}(B-A)^{1/2}C=((B-A)^{1/2}C)^*((B-A)^{1/2}C)$，因此由定理 3.2.6 知 $C^*AC\le C^*BC$。

(3) 设 Ω 是 $\mathcal{C}^*(B,I)$ 的特征空间，令 $\varphi:\mathcal{C}^*(B,I)\to\mathcal{C}(\Omega)$ 为 $\mathcal{C}^*(B,I)$ 的 Gelfand 表示。由 B 为正元知 B 为 hermitian 元，则 $\sigma(B)\subseteq\mathbb{R}$。又

$$\varphi(||B||I-B)(\tau)=\tau(||B||I-B)=||B||-\tau(B)\geq 0,\ \forall\tau\in\Omega.$$

其中最后一个不等式成立是因为 $\tau(B)\in\sigma(B)$。因此，$\varphi(||B||I-B)$ 为 $\mathcal{C}(\Omega)$ 中的正元，从而 $||B||I-B$ 为 $\mathcal{C}^*(B,I)$ 中的正元，即得 $B\leq||B||I$。

因此，由 $0\leq A\leq B$ 知 $A\leq||B||I$。对 $C^*(A,I)$ 再次应用 Gelfand 表示可得 $||B||\geq\tau(A)$，$\forall\tau\in\Omega(C^*(A,I))$，即 $||B||\geq r(A)$。由 A 是 hermitian 元及定理 3.1.5 知 $r(A)=||A||$，从而得 $||A||\leq||B||$。

(4) 先证 $\forall C\in\mathcal{A}$ 若 $C\geq I$，则 C 可逆，C^{-1} 为正的，且 $C^{-1}\leq I$。事实上，对 $C^*(C,I)$ 应用 Gelfand 表示（记为 φ），由 $C\geq I$ 可知 $\varphi(C-I)$ 为正元，即

$$\varphi(C-I)(\tau)=\tau(C-I)=\tau(C)-1\geq 0,\quad\forall\tau\in\Omega(C^*(C,I)).$$

由此可知 C 可逆，C^{-1} 为正的，且

$$\varphi(I-C^{-1})(\tau)=\tau(I-C^{-1})=1-\tau(C^{-1})=1-\frac{1}{\tau(C)}\geq 0,\ \forall\tau\in\Omega(C^*(C,I)).$$

从而得 $C^{-1}\leq I$。

现由 (2) 及 A 和 B 是正的可逆元知

$$\begin{aligned}0\leq A\leq B\ &\Rightarrow I=A^{-1/2}AA^{-1/2}\leq A^{-1/2}BA^{-1/2}\\ &\Rightarrow 0\leq(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1}\leq I,\end{aligned}$$

即 $0\leq A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}\leq I$。因此，$0\leq B^{-1}\leq(A^{1/2})^{-1}(A^{1/2})^{-1}=A^{-1}$。

■

***Theorem* 3.2.8** *若 A 和 B 是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中正元，则 $A\leq B$ 意味着 $A^{1/2}\leq B^{1/2}$。*

Proof. 我们只需证明 $A^2\leq B^2\Rightarrow A\leq B$。由 B 与 A 为正元可知 $B-A$ 为 hermitian 元，故只需证 $\sigma(B-A)\subseteq\mathbb{R}^+$，即只需证 $\forall t>0$，$-t-(B-A)\notin\sigma(B-A)$，即证 $\forall t>0$，$t+B-A$ 可逆。

现设 $t>0$，下证 $t+B-A$ 可逆。为此，先证 $(t+B+A)(t+B-A)$ 可逆。令 C 和 D 为 $(t+B+A)(t+B-A)$ 的 hermitian 分解中的实部和虚部，则 $(t+B+A)(t+B-A)=C+iD$，$C=C^*$，$D=D^*$，且

$$\begin{aligned} C &= \tfrac{1}{2}\big[(t+B+A)(t+B-A)+((t+B+A)(t+B-A))^*\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(t+B+A)(t+B-A)+(t+B-A)(t+B+A)\big] \\ &= t^2+2tB+B^2-A^2 \\ &\geq t^2. \end{aligned}$$

因此，C 是可逆的正元。则 $C^{-1}=C^{-1/2}C^{-1/2}$，且 $C^{-1/2}DC^{-1/2}$ 为 hermitian 元，因此 $C^{-1/2}DC^{-1/2}\subseteq\mathbb{R}$。考虑 $C^*(I,C^{-1/2}DC^{-1/2})$ 上的 Gelfand 表示 φ，则 $\forall\tau\in\Omega(C^*(I,C^{-1/2}DC^{-1/2}))$，有

$$\varphi(I+iC^{-1/2}DC^{-1/2})(\tau)=1+i\tau(C^{-1/2}DC^{-1/2}),$$

其中 $\tau(C^{-1/2}DC^{-1/2})\in\sigma(C^{-1/2}DC^{-1/2})$ 为实数。则 $\varphi(I+iC^{-1/2}DC^{-1/2})$ 可逆，从而得 $I+iC^{-1/2}DC^{-1/2}$ 可逆。则由

$$C^{-1/2}(C+iD)C^{-1/2}=I+iC^{-1/2}DC^{-1/2}$$

知 $C^{-1/2}(C+iD)C^{-1/2}$ 可逆，故 $(C+iD)=C^{1/2}\big[C^{-1/2}(C+iD)C^{-1/2}\big]C^{1/2}$ 可逆，即 $(t+B+A)(t+B-A)$ 可逆。则 $(t+B-A)$ 有左逆元 F，即 $F(t+B-A)=I$，从而有

$$(t+B-A)F^*=(t+B-A)^*F^*=(F(t+B-A))^*=I^*=I.$$

这说明 $(t+B-A)$ 有左逆元和右逆元，从而可逆。证毕。

■

在任意的一个单位的 C^*-代数中，$0\leq A\leq B\Rightarrow A^2\leq B^2$ 不一定成立。例如，取 C^* 代数 $\mathcal{A}=M_2(\mathbb{C})$，其上的对合定义为

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\overline{\alpha}&\overline{\gamma}\\\overline{\beta}&\overline{\delta}\end{pmatrix}.$$

令 P 和 Q 为投影

$$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

则 $0 \leq P \leq P+Q$，但 $P^2=P$，$Q^2=Q$，

$$(P+Q)^2-P^2=Q+PQ+QP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

该矩阵有负的特征值。因此，$P^2 \leq (P+Q)^2$ 不成立。（矩阵的谱为其特征值的集合）

事实上，$0 \leq A \leq B \Rightarrow A^2 \leq B^2$ 仅在单位的交换 C^*-代数中成立。

3.3 Operators and Sesquilinear Forms

在这一节中我们将这一章的前两节的内容应用到希尔伯特空间上。

***Theorem* 3.3.1** *令 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 为希尔伯特空间。*

(1) 若 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$，则存在唯一的 $U^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$，满足

$$\langle U(x_1), x_2\rangle = \langle x_1, U^*(x_2)\rangle \quad (x_1 \in \mathcal{H}_1,\ x_2 \in \mathcal{H}_2).$$

(2) 映射 $U \mapsto U^*$ 是共轭线性的，$U^{**}=U$，且

$$||U|| = ||U^*|| = ||U^*U||^{1/2}.$$

Proof. 若 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$，$x_2 \in \mathcal{H}_2$，则函数

$$\mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}, \quad x_1 \mapsto \langle U(x_1), x_2\rangle$$

是 $\mathcal{H}_1$ 上的连续线性泛函，故由希尔伯特空间上的连续线性泛函的 Riesz 表示定理知存在唯一的 $\mathcal{H}_1$ 中的元素（记为 $U^*(x_2)$）使得

$$\langle U(x_1), x_2\rangle = \langle x_1, U^*(x_2)\rangle \quad (x_1 \in \mathcal{H}_1).$$

则 U^* 为从 $\mathcal{H}_2$ 到 $\mathcal{H}_1$ 上的映射，且有

$$||U^*(x_2)|| = \sup_{||x_1||\leq 1} |\langle U(x_1), x_2\rangle| \leq ||U|| \cdot ||x_2||,$$

即 $||U^*|| \leq ||U||$，故 U^* 是有界的，且容易验证 U^* 是线性的和唯一的，(1) 证毕。

若 $x_1 \in \mathcal{H}_1$，$||x_1|| \leq 1$，则由施瓦茨不等式知

$$\langle U(x_1), U(x_1)\rangle = \langle x_1, U^*U(x_1)\rangle \leq ||x_1|| \cdot ||U^*U(x_1)|| \leq ||U^*U||,$$

故有

$$||U||^2 = \sup_{||x_1||\le 1} ||U(x_1)||^2 \le ||U^*U|| \le ||U^*|| \cdot ||U|| \le ||U||^2.$$

因此，$||U|| = ||U^*|| = ||U^*U||^{1/2}$。

容易验证映射 $U \mapsto U^*$ 是共轭线性的。$\forall x_1 \in \mathcal{H}_1$，有

$$\langle x_2, U^{**}(x_1)\rangle = \langle U^*(x_2), x_1\rangle = \langle x_2, U(x_1)\rangle \quad (x_2 \in \mathcal{H}_2).$$

则有 $U^{**}(x_1) = U(x_1)$，$\forall x_1 \in \mathcal{H}_1$。故 $U^{**} = U$。证毕。

■

若 $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ 是希尔伯特空间之间的连续线性映射，则称映射 $U^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ 为 U 的共轭（*adjoint*）。注意到

$$ker(U^*) = (im(U))^{\perp} = \overline{im(U)}^{\perp},$$

其中 $im(U)$ 为 U 的值域，则

$$\mathcal{H}_2 = \overline{im(U)} \oplus ker(U^*), \quad ker(U^*)^{\perp} = \overline{im(U)}.$$

由 $U^{**} = U$ 知，$\overline{im(U^*)} = ker(U)^{\perp}$。

若 $\mathcal{H}_1 \xrightarrow{U} \mathcal{H}_2 \xrightarrow{V} \mathcal{H}_3$ 为希尔伯特空间之间的连续线性映射，则 $(VU)^* = U^*V^*$。

若 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，则 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在对合 $U \mapsto U^*$ 下是一个 C^*-代数，其中 U^* 是 U 的共轭。

特别的，$M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ 是一个 C^*-代数，其中 $M_n(\mathbb{C})$ 上的对合由 $(\lambda_{ij})^*_{ij} = (\overline{\lambda}_{ji})_{ij}$ 给定。

若 $\mathcal{H}$ 是一个向量空间，映射 $\sigma : \mathcal{H}^2 \to \mathbb{C}$ 是一个半双线性形式，若其关于第一个变量是线性的，关于第二变量是共轭线性的。对于这样的半双线性形式，有如下的极化恒等式成立：

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} i^k \sigma(x + i^k y, x + i^k y).$$

因此，$\mathcal{H}^2$ 上的半双线性形式 σ 和 σ' 相等当且仅当 $\sigma(x, x) = \sigma'(x, x)$，$\forall x \in \mathcal{H}$。

若 $\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间，$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则 $(x, y) \mapsto \langle U(x), y\rangle$ 是 $\mathcal{H}^2$ 上的半双线性形式。因此，若 $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则 $U = V$ 当且仅当 $\langle U(x), x\rangle = \langle V(x), x\rangle$，$\forall x \in \mathcal{H}$。

若 $U^*U = UU^* = I$，则称 U 为酉算子。U 等距等价于 $U^*U = I$：

$$\langle x, x\rangle = \langle U(x), U(x)\rangle = \langle x, U^*U(x)\rangle\,, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

因此，U 为酉算子等价于 U 等距且为满射（此时 U 可逆且其逆为 U^*，故有 $UU^* = I$）。

***Example* 3.3.2** *设 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，而 U 为相对基 (e_n) 有对角线 (λ_n) 的对角算子（例 2.4.17）。则有*

$$\langle U^*(e_n), e_m\rangle = \langle e_n, U(e_m)\rangle = \langle e_n, \lambda_m e_m\rangle = \overline{\lambda_m}\delta_{nm},$$

其中 δ_{nm} 为 Kronecker delta symbol 记号，故有 $U^*(e_n) = \overline{\lambda_n} e_n$。则 U^* 相对基 (e_n) 也是对角的，其对角序列为 $(\overline{\lambda_n})$。因所有相对同一个基有对角线的对角算子可交换，故 $UU^* = U^*U$，即 U 是正规的。

***Theorem* 3.3.3** *设 P, Q 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的投影。则下列条件等价：*

(1)$P \le Q$.

(2)$PQ = P$.

(3)$QP = P$.

(4)$P(\mathcal{H}) \subseteq Q(\mathcal{H})$.

(5)$||P(x)|| \le ||Q(x)|| \quad (x \in \mathcal{H})$.

(6)$Q - P$ 是一个投影.

Proof. 由投影定义可知条件 (2) 和 (3) 等价：

$$PQ = P \Leftrightarrow (PQ)^* = P^* \Leftrightarrow Q^*P^* = P^* \Leftrightarrow QP = P.$$

条件 (3) $\Rightarrow$ (4)：

$$P(\mathcal{H}) = QP(\mathcal{H}) \subseteq Q(\mathcal{H}).$$

条件 (4) $\Rightarrow$ (3)：$\forall x \in \mathcal{H}$，由 $P(\mathcal{H}) \subseteq Q(\mathcal{H})$ 知存在 $y \in \mathcal{H}$，使得 $P(x) = Q(y)$，故有

$$P(x) = Q(y) = Q^2(y) = Q(Q(y)) = Q(P(x)) = QP(x).$$

（任一投影算子的像是该投影算子自身的不动点的集合。）

条件 (2) $\Rightarrow$ (6)：

$$(Q-P)^* = Q^* - P^* = Q - P, (Q-P)^2 = Q^2 - QP - PQ + P^2 = Q - P.$$

条件 (6) $\Rightarrow$ (1)：由投影算子定义知任一投影算子 T 是 hermitian 的，且其谱 $\sigma(T)=\sigma(T^2)=(\sigma(T))^2\Rightarrow\sigma(T)\subset\mathbb{R}_+$，故 T 为正算子。因此有

$$Q-P\ is\ a\ projection\Rightarrow Q-P\ is\ positive\Rightarrow P\leq Q.$$

条件 (1) $\Rightarrow$ (5)：

$$\begin{aligned}||Q(x)||^2-||P(x)||^2 &= \langle Q(x),Q(x)\rangle-\langle P(x),P(x)\rangle\\ &= \langle Q^*Q(x),x\rangle-\langle P^*P(x),x\rangle\\ &= \langle Q(x),x\rangle-\langle P(x),x\rangle\\ &= \langle (Q-P)(x),x\rangle\\ &= \langle (Q-P)^{1/2}(x),(Q-P)^{1/2}(x)\rangle\\ &= ||(Q-P)^{1/2}(x)||^2\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

条件 (5) $\Rightarrow$ (2)：

$$||P(I-Q)(x)||\leq||Q(I-Q)(x)||=||(Q-Q^2)(x)||=0\ (\forall x\in\mathcal{H})\Rightarrow P=PQ.$$

■

希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的算子 U 是正规的（$UU^*=U^*U$）当且仅当 $||U(x)||=||U^*(x)||\ (x\in\mathcal{H})$，这是因为：由极化恒等式知

$$UU^*=U^*U\Leftrightarrow\langle UU^*(x),x\rangle=\langle U^*U(x),x\rangle\,,\quad\forall x\in\mathcal{H},$$

同时有

$$\langle (UU^*-U^*U)(x),x\rangle=||U^*(x)||^2-||U(x)||^2.$$

因此，若 U 是正规的，则 $ker(U)=ker(U^*)$。

希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 之间的连续线性映射 $U:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ 是一个**部分等距**（*a partial isometry*），若 U 在 $ker(U)^\perp$ 上是等距的，即 $||U(x)||=||x||$，$\forall x\in ker(U)^\perp$。

***Theorem* 3.3.4** *设 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 是希尔伯特空间，$U\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$。则下列条件等价：*

(1)$U=UU^*U$.

(2)U^*U 为投影.

(3)UU^* 为投影.

(4)U 为部分等距.

Proof.

条件 (1) $\Rightarrow$ (2)：

$$(U^*U)^2 = U^*UU^*U = U^*(UU^*U) = U^*U.$$

条件 (2) $\Rightarrow$ (1)：

$$\begin{aligned} ||U(I-U^*U)||^2 &= ||(U(I-U^*U))^*U(I-U^*U)|| \\ &= ||(I-U^*U)U^*U(I-U^*U)|| \\ &= ||(U^*U-(U^*U)^2)(I-U^*U)|| \\ &= 0, \end{aligned}$$

故 $U(I-U^*U)=0$，从而得 $U=UU^*U$。

条件 (2) $\Rightarrow$ (3)：$(UU^*)^3 = U(U^*UU^*U)U^* = U(U^*U)U^* = (UU^*)^2$，故 $\sigma(UU^*) \subseteq \{0,1\}$（$\{0,1\}?[0,1]?$）。则由函数演算知 UU^* 为投影。由 $U^{**}=U$ 知条件 (3) $\Rightarrow$ (2) 亦成立。

条件 (1) $\Rightarrow$ (4)：设 $U=UU^*U$，则 U^*U 为投影，且有 $U^*=U^*UU^*$。则

$$U^*(\mathcal{H}_2) = U^*U\big(U^*(\mathcal{H}_2)\big) \subseteq U^*U(\mathcal{H}_1).$$

而 $\mathcal{H}_1 = ker(U) \oplus \overline{U^*(\mathcal{H}_2)}$，故有

$$U^*U(\mathcal{H}_1) = U^*U\big(\overline{U^*(\mathcal{H}_2)}\big) \subseteq \overline{U^*U\big(U^*(\mathcal{H}_2)\big)} = \overline{U^*(\mathcal{H}_2)}.$$

从而由投影算子的值域是闭的即得

$$ker(U)^\perp = \overline{U^*(\mathcal{H}_2)} = U^*U(\mathcal{H}_1)$$

因此，若 $x \in ker(U)^\perp = U^*U(\mathcal{H}_1)$，则 $U^*U(x)=x$，故有

$$||U(x)||^2 = \langle U(x), U(x)\rangle = \langle U^*U(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = ||x||^2,$$

即得 $||U(x)|| = ||x||$，$\forall x \in \mathcal{H}_1$，故 U 为部分等距。

注：投影算子的值域是闭的——设 P 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的任一投影，对于任意的 $y \in \overline{P(\mathcal{H})}$，存在 $\{P(x_n)\}_n \in P(\mathcal{H})$（$x_n \in \mathcal{H}$），使得 $P(x_n) \to y$，从而由 P 为有界线性算子及 $P^2=P$ 知 $P(x_n) = P(P(x_n)) \to P(y)$，故由极限唯一性即得 $y = P(y) \in P(\mathcal{H})$，由 y 任意性即可知 P 的值域是闭的。

条件 (4) $\Rightarrow$ (2)：设 U 为部分等距，而 P 是将 $\mathcal{H}_1$ 投影到 $ker(U)^\perp$ 上的投影。若 $x \in ker(U)^\perp$，则有

$$\langle U^*U(x), x\rangle = ||U(x)||^2 = ||x||^2 = \langle x, x\rangle = \langle P(x), x\rangle .$$

若 $x \in ker(U)$，$U^*U(x) = 0 = P(x)$，故有

$$\langle U^*U(x), x\rangle = 0 = \langle P(x), x\rangle .$$

因此，$\langle U^*U(x), x\rangle = \langle P(x), x\rangle$，$\forall x \in \mathcal{H}_1$，故 $U^*U = P$（见例 3.3.2 前说明）。 ■

***Theorem* 3.3.5** （*Polar Decomposition*）*设 V 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的连续线性算子。则存在唯一的部分等距 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得*

$$V = U|V|, \quad ker(U) = ker(V),$$

且 $U^*V = |V|$。

Proof. 若 $x \in \mathcal{H}$，则有 $|| \, |V|(x)||^2 = \langle |V|(x), |V|(x)\rangle = \langle |V|^2(x), x\rangle = \langle V^*V(x), x\rangle = \langle V(x), V(x)\rangle = ||V(x)||^2$。因此，映射

$$U_0 : |V|(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}, \quad |V|(x) \mapsto V(x),$$

是良定义的（若 $|V|(x) = |V|(y)$，则 $||V(x) - V(y)|| = ||V(x-y)|| = || \, |V|(x-y)|| = || \, |V|(x) - |V|(y)|| = 0$，即得 $V(x) = V(y)$），且是等距的和线性的。因此，由 $\mathcal{H}$ 完备知在 $\overline{|V|(\mathcal{H})}$ 上有唯一的 U_0 的线性等距延拓（仍记为 U_0），定义 $\mathcal{H}$ 上的映射 U 为

$$U = \begin{cases} U_0, & on \ \overline{|V|(\mathcal{H})}, \\ 0, & on \ \overline{|V|(\mathcal{H})}^\perp. \end{cases}$$

则 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$U|V| = V$，且 U 在 $ker(U)^\perp = \overline{|V|(\mathcal{H})}$（$ker(U) = \overline{|V|(\mathcal{H})}^\perp$）上是等距的。因此，$U$ 是部分等距，且 $ker(U) = \overline{|V|(\mathcal{H})}^\perp = ker(|V|) = ker(V)$（$ker(|V|) = ker(V)$ 可从 $|| \, |V|(x)|| = ||V(x)||(\, \forall x \in \mathcal{H})$ 推知）。

对于任意的 $x, y \in \mathcal{H}$，由 $U|V| = V$ 知

$$\langle U^*V(x), |V|(y)\rangle = \langle V(x), V(y)\rangle = \langle V^*V(x), y\rangle = \langle |V|(x), |V|(y)\rangle .$$

因此，对于任意的 $z \in \overline{|V|(\mathcal{H})}$（取闭包基于内积连续性），有

$$\langle U^*V(x), z\rangle = \langle |V|(x), z\rangle\,;$$

而对于任意的 $z \in \overline{|V|(\mathcal{H})}^{\perp} = ker(U)$，有

$$\langle U^*V(x), z\rangle = \langle U(x), U(z)\rangle = 0 = \langle |V|(x), z\rangle\,,$$

故对于任意的 $z \in \mathcal{H}$，有 $\langle U^*V(x), z\rangle = \langle |V|(x), z\rangle$，即得 $U^*V(x) = |V|(x)$。从而由 x 任意性得 $U^*V = |V|$。

现 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是另一个满足 $V = U|V|$ 和 $ker(U) = ker(V)$ 的部分等距，则 W 和 U 在 $\overline{|V|(\mathcal{H})}$（因 $V = W|V| = U|V|$，且 U,V 连续）和 $\overline{|V|(\mathcal{H})}^{\perp} = ker(V) = ker(W) = ker(U)$ 上相等。因此，$W = U$。

■

向量空间 $\mathcal{H}^2$ 上的半双线性形式 τ 称为是 hermitian 的，若 $\tau(y,x) = \overline{\tau(x,y)}$，$\forall x, y \in \mathcal{H}$。由极化恒等式知半双线性形式是 hermitian 的当且仅当 $\tau(x,x) \in \mathbb{R}$，$\forall x \in \mathcal{H}$。

半双线性形式称为是正的，若 $\tau(x,x) \geq 0$，$\forall x \in \mathcal{H}$。因此，正的半双线性形式是 hermitian 的。

对于正的半双线性形式，有如下的柯西 -施瓦兹不等式成立：

$$|\tau(x,y)| \leq \sqrt{\tau(x,x)}\sqrt{\tau(y,y)} \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

由该不等式可知 $p : x \mapsto \sqrt{\tau(x,x)}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的半范。

赋范向量空间 $\mathcal{H}^2$ 上的半双线性形式 τ 称为是有界的，若存在正数 $M \geq 0$，满足

$$|\tau(x,y)| \leq M||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

τ 的范数 $||\tau||$ 定义为

$$||\tau|| = \min\{M \geq 0 : |\tau(x,y)| \leq M||x|| \cdot ||y||, \forall x, y \in \mathcal{H}\}.$$

则有 $|\tau(x,y)| \leq ||\tau|| \cdot ||x|| \cdot ||y||$。一个半双线性形式是连续的当且仅当其有界。

***Theorem* 3.3.6** *若 U 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子，则半双线性形式*

$$\tau_U : \mathcal{H}^2 \to \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto \langle U(x), y\rangle\,,$$

是 hermitian 的当且仅当 U 是 hermitian 的，是正的当且仅当 U 是正的。

Proof. τ_U 是 hermitian 的 $\Leftrightarrow \tau_U(x,x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \langle U(x), x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \langle U(x), x\rangle = \overline{\langle U(x), x\rangle} = \langle x, U(x)\rangle = \langle U^*(x), x\rangle$, $\forall x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow U = U^* \Leftrightarrow U$ 是 hermitian 的。

τ_U 是正的 $\Rightarrow U$ 是正的：设 τ_U 是正的，则 τ_U 是 hermitian 的，故 U 是 hermitian 的。下证 $\sigma(U) \subseteq \mathbb{R}_+$，为此只需证若 $\lambda < 0$ 则 $U - \lambda$ 可逆。

设 $\lambda < 0$，$x \in \mathcal{H}$，则

$$\begin{aligned} ||(U-\lambda)(x)||^2 &= \langle (U-\lambda)(x), (U-\lambda)(x)\rangle \\ &= ||U(x)||^2 + |\lambda|^2||x||^2 - 2\lambda \langle U(x), x\rangle \\ &\geq |\lambda|^2||x||^2, \end{aligned}$$

即 $||(U-\lambda)(x)||^2 \geq |\lambda|^2||x||^2$。由 x 任意性知 U 是下有界的，从而 $(U-\lambda)(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{H}$ 中是闭的，且 $ker(U-\lambda) = 0$。则由 U 是 hermitian 的及 $\lambda \in \mathbb{R}$ 知

$$(U-\lambda)(\mathcal{H}) = ker((U-\lambda)^*)^\perp = ker(U-\lambda)^\perp = 0^\perp = \mathcal{H}.$$

因此，$U - \lambda$ 是可逆的。证毕。

U 是正的 $\Rightarrow \tau_U$ 是正的：设 U 是正的，则对于任意的 $x \in \mathcal{H}$，有

$$\tau_U(x,x) = \langle U(x), x\rangle = \langle U^{1/2}(x), U^{1/2}(x)\rangle = ||U^{1/2}(x)||^2 \geq 0,$$

故 τ_U 是正的。

■

由定理 3.3.6 可知，若 U 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子，则 U 是 hermitian 的当且仅当 $\langle U(x), x\rangle \in \mathbb{R}$，$\forall x \in \mathcal{H}$；$U$ 是正的当且仅当 $\langle U(x), x\rangle \geq 0$，$\forall x \in \mathcal{H}$。

***Theorem* 3.3.7** *设 τ 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界半双线性形式，则存在唯一的 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子使得*

$$\tau(x,y) = \langle U(x), y\rangle \quad (x, y \in \mathcal{H}),$$

且 $||U|| = ||\tau||$。

Proof. 唯一性：设 $U, U_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，满足 $\tau(x,y) = \langle U(x), y\rangle = \langle U_1(x), y\rangle$，$\forall x, y \in \mathbb{H}$。则 $U(x) = U_1(x)$，$\forall x \in \mathbb{H}$，故 $U = U_1$。

存在性：对于每个 $y\in\mathcal{H}$，函数 $\mathcal{H}\to\mathbb{C},x\mapsto\tau(x,y)$ 是连续线性的，则由 Riesz 表示定理知存在唯一的 $V(y)\in\mathcal{H}$，使得

$$\tau(x,y)=\langle x,V(y)\rangle\,,\quad \forall x\in\mathcal{H},$$

且有

$$||V(y)||=\sum_{||x||\le 1}|\tau(x,y)|\le||\tau||\cdot||y||.$$

则映射 $V:\mathcal{H}\to\mathcal{H},y\mapsto V(y)$ 是有界线性的，且 $||V||\le||\tau||$。令 $U=V^*$，则 $U\in\mathcal{H}$，且

$$\tau(x,y)=\langle x,V(y)\rangle=\langle U(x),y\rangle\,,\quad \forall x,y\in\mathcal{H},$$

则 $\forall x,y\in\mathcal{H}$，有

$$|\tau(x,y)|=|\left\langle U(x),y\right\rangle|\le||U(x)||\cdot||y||\le||U||\cdot||x||\cdot||y||.$$

因此，$||\tau||\le||U||$。又 $||U||=||U^*||=||V||\le||\tau||$，故 $||\tau||=||U||$。

■

3.4 The Hilbert-Schmidt Operators

在这一节中我们分析一类重要的算子——Hilbert-Schmidt 算子。

我们将希尔伯特空间视为对偶空间。设 $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为希尔伯特空间，定义 $\mathcal{H}_*=\mathcal{H}$，$\mathcal{H}_*$ 上的加法与 $\mathcal{H}$ 相同，而数乘则定义为：$(in\ \mathcal{H}_*)\ \lambda x=\overline{\lambda}x\ (in\ \mathcal{H})$，$\lambda\in\mathbb{C}$，$x\in\mathcal{H}_*$。$\mathcal{H}_*$ 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 则定义为：

$$\langle x,y\rangle_*=\langle y,x\rangle\,,\quad x,y\in\mathcal{H}_*.$$

则 $(\mathcal{H}_*,\langle\cdot,\cdot\rangle_*)$ 亦为希尔伯特空间，且由 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 诱导的范数和由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 诱导的范数相等。

若 $x\in\mathcal{H}_*$，定义 $V(x)\in(\mathcal{H}_*)^*$ 为：

$$V(x)(y)=\langle y,x\rangle_*=\langle x,y\rangle\,.$$

由 Riesz 表示定理知映射

$$V:\mathcal{H}\to(\mathcal{H}_*)^*,\quad x\mapsto V(x),$$

为等距的线性同构。

$\mathcal{H}$ 上的弱 * 拓扑称为弱拓扑。$\mathcal{H}$ 中的网 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 在弱拓扑意义下收敛到一点 x 当且仅当 $\langle x, y\rangle = \lim_\lambda(x_\lambda, y)$ $(y \in \mathcal{H})$。因此，弱拓扑弱于范数拓扑，且希尔伯特空间之间的有界线性映射是弱连续的。

弱拓扑的重要性：由 Banach-Alaoglu 定理（定理 1.2.26）知希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的闭单位球是弱紧的。

***Theorem* 3.4.1** *令 $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 之间的紧线性映射。则 $\mathcal{H}_1$ 中的闭单位球在 U 下的像是紧的。*

Proof. 令 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{H}_1$ 中的闭单位球，则 $\mathcal{S}$ 是弱紧的，而 U 是弱连续的，故 $U(\mathcal{S})$ 是弱紧的（连续函数将紧集映成紧集），从而是弱闭的。因弱拓扑弱于范数拓扑，故 $U(\mathcal{S})$ 是范数闭的（*norm-closed*）。又由 U 为紧算子知 $U(\mathcal{S})$ 是范数准紧的，从而为范数紧的。 ■

***Theorem* 3.4.2** *令 U 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的紧算子。则 $|U|$ 和 U^* 都是紧的。*

Proof. 设 U 的极化分解为 $U = W|U|$，则 $|U| = W^*U$，其中 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为部分等距。则由 U 是紧算子知 $|U|$ 也是紧的。又 $U^* = (W|U|)^* = |U|W^*$，故 U^* 也是紧的。 ■

***Corollary* 3.4.3** *若 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，则 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 是自伴的。*

因此，由 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 中的闭理想（见定理 2.4.3 后面的内容）知 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 为 C^*-代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$（$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 C^*-代数见定理 3.3.1 后面的内容）的一个闭 $*$-子代数，故亦为 C^*-代数。

希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子 U 是可对角化的（*diagonalisable*），若 $\mathcal{H}$ 有一个由 U 的特征向量构成的规范正交基。可对角化算子必然是正规的（例 3.3.2），但不是所有的正规算子都是可对角化的。

***Theorem* 3.4.4** *若 U 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的紧的正规算子，则 U 可对角化。*

Proof. 所有由 U 的特征向量构成的规范正交集关于集合包含关系构成一个偏序集，且该偏序集的每个全序子集有一个由该全序子集的所有元素的并构成的最大元。则由 Zorn's 引理，存在最大的由 U 的特征向量构成的规

范正交集 $\mathcal{E}$。若 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{E}$ 的闭线性生成空间，则 $\mathcal{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}^{\perp}$，$\mathcal{K}$。由 U 是紧的正规算子知 U 在 $\mathcal{K}^{\perp}$ 上的限制 $U_{\mathcal{K}^{\perp}}:\mathcal{K}^{\perp}\to\mathcal{K}^{\perp}$ 也是紧的和正规的。

（注：$U_{\mathcal{K}^{\perp}}$ 的像空间为 $\mathcal{K}^{\perp}$——易见 $U(\mathcal{K})\subseteq\mathcal{K}$，则由 U 为正规的可知 $U^*(\mathcal{K})\subseteq\mathcal{K}$。事实上，设 $Ux=\lambda x$，则 $U^*Ux=\lambda U^*x$，则 $U(U^*x)=U^*Ux=\lambda U^*x$，故 $U^*x\in\mathcal{K}$，由此可知 $U^*(\mathcal{K})\subseteq\mathcal{K}$。从而若 $x\in\mathcal{K},y\in\mathcal{K}^{\perp}$，则 $U^*(x)\in\mathcal{K}$，$\langle x,Uy\rangle=\langle U^*x,y\rangle=0$，故有 $U_{\mathcal{K}^{\perp}}(\mathcal{K}^{\perp})\subseteq\mathcal{K}^{\perp}$。）

由 $U_{\mathcal{K}^{\perp}}$ 为 U 在 $\mathcal{K}^{\perp}$ 上的限制知 $U_{\mathcal{K}^{\perp}}$ 的特征向量亦为 U 的特征向量，故由 $\mathcal{E}$ 的极大性可知 $U_{\mathcal{K}^{\perp}}$ 无特征向量，因此由定理 2.4.15 和定理 2.2.9 知 $\sigma=\{0\}$。因此，由定理 3.1.5 知 $||U_{\mathcal{K}^{\perp}}||=r(U_{\mathcal{K}^{\perp}})=0$，故 $U_{\mathcal{K}^{\perp}}=0$。而 $U_{\mathcal{K}^{\perp}}$ 无特征向量，故 $\mathcal{K}^{\perp}=0$。从而有 $\mathcal{K}=\mathcal{H}$，故 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的由 U 的特征向量构成的规范正交基，即得 U 可对角化。 ■

设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，记 $\mathcal{H}$ 上的有限秩算子的集合为 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$。容易验证 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个自伴理想。

***Theorem* 3.4.5** *若 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，则 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 中稠密。*

Proof. 因 $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})}$（因 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 自伴）和 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 都是自伴的，故只需证对于 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 的每个自伴元 U，有 $U\in\overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})}$。

由定理 3.4.4，可设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的由 U 的特征向量构成的规范正交基，并 $\epsilon>0$。由定理 2.4.15 可知，所有满足 $|\lambda|\geq\epsilon$ 的 U 的特征值 λ 构成的集合是有限集。而由定理 2.4.8 知所有和 $\mathcal{S}$ 中的特征值对应的 $\mathcal{E}$ 中的特征向量构成的集合 $\mathcal{S}'$ 是有限集。

现定义 $\mathcal{H}$ 的算子 V 如下：$V(x)=\lambda x$，$x\in\mathcal{S}'$，$Ux=\lambda x$；$V(x)=0$，$x\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{S}'$。则 V 为 $\mathcal{H}$ 上的有限秩对角算子。故 V 是正规的，且有

$$(U-V)(x)=\begin{cases}0 & x\in span\ \mathcal{S}',\\ U(x) & x\in(span\ \mathcal{S}')^{\perp}=\overline{span}\ \mathcal{E}\setminus\mathcal{S}'.\end{cases}$$

若 $(U-V)x=\lambda x$，$x=y+z\in\mathcal{H}=span\ \mathcal{S}'\oplus\overline{span}\ \mathcal{E}\setminus\mathcal{S}'$，$y\in span\ \mathcal{S}'$，$z\in\overline{span}\ \mathcal{E}\setminus\mathcal{S}'$，则 $Uz=(U-V)x=\lambda(y+z)$。故得 $\lambda y=Uz-\lambda z\in\overline{span}\ \mathcal{E}\setminus\mathcal{S}'$。若 $\lambda\neq 0$，则有 $y=0$，从而得 $Uz=\lambda z$。而 $z\in\overline{span}\ \mathcal{E}\setminus\mathcal{S}'$，故 $\lambda\in\sigma(U)\setminus\mathcal{S}$。从而由 $U-V$ 是正规的可知

$$||U-V||=r(U-V)\leq\sup_{\lambda\in\sigma(U)\setminus\mathcal{S}}|\lambda|\leq\epsilon.$$

这说明 $U \in \overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})}$，证毕。 $\blacksquare$

若 x, y 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的元素，定义 $\mathcal{H}$ 上的算子 $x \otimes y$ 为

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle x, \quad \forall z \in \mathcal{H}.$$

则有

$$||x \otimes y|| = \sup_{||z||=1} ||(x \otimes y)(z)|| = \sup_{||z||=1} || \langle z, y \rangle x|| = \sup_{||z||=1} | \langle z, y \rangle | \cdot ||x||,$$

而 $| \langle z, y \rangle | \leq ||z|| \cdot ||y||$，且若 $y \neq 0$，则可取 $z = \frac{y}{||y||}$，此时有 $| \langle z, y \rangle | = ||y||$，故 $\sup\limits_{||z||=1} | \langle z, y \rangle | \cdot ||x|| = ||y|| \cdot ||x||$。即得

$$||x \otimes y|| = ||x|| \cdot ||y||.$$

当 x 和 y 都非零时，$x \otimes y$ 的秩为 1。

设 $x, x', y, y' \in \mathcal{H}$，$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

(1) 对于任意的 $z \in \mathcal{H}$，有

$$\begin{aligned}(x \otimes x')(y \otimes y')(z) &= (x \otimes x')(\langle z, y' \rangle y) = \langle \langle z, y' \rangle y, x' \rangle x \\ &= \langle z, y' \rangle \langle y, x' \rangle x = \langle y, x' \rangle \langle z, y' \rangle x \\ &= \langle y, x' \rangle (x \otimes y')(z), \quad \forall z \in \mathcal{H},\end{aligned}$$

即得

$$(x \otimes x')(y \otimes y') = \langle y, x' \rangle (x \otimes y').$$

(2) 对于任意的 $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$，有

$$\langle \langle z_1, y \rangle x, z_2 \rangle = \langle z_1, y \rangle \langle x, z_2 \rangle = \langle z_1, \langle z_2, x \rangle y \rangle,$$

即

$$\langle (x \otimes y)(z_1), z_2 \rangle = \langle z_1, (y \otimes x)(z_2) \rangle,$$

故得

$$(x \otimes y)^* = (y \otimes x).$$

(3) 对于任意的 $z \in \mathcal{H}$，有

$$(U \circ (x \otimes y))(z) = U((x \otimes y)(z)) = U(\langle z, y \rangle x) = \langle z, y \rangle U(x) = (U(x) \otimes y)(z),$$

故得

$$U \circ (x \otimes y) = U(x) \otimes y.$$

(4) 对于任意的 $z \in \mathcal{H}$，有

$$((x\otimes y)\circ U)(z) = (x\otimes y)(U(z)) = \langle U(z), y\rangle\, x = \langle z, U^*(y)\rangle\, x = (x\otimes U^*(y))(z),$$

即得

$$(x \otimes y) \circ U = x \otimes U^*(y).$$

算子 $x \otimes x$ 是一个秩为 1 的投影，当且仅当 $\langle x, x\rangle = 1$，即 x 为单位向量。反过来，每个秩为 1 的投影都可以表示为 $x \otimes x$，其中 x 为某个单位向量。事实上，设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交集（*orthonormal set*），则算子 $\sum_{j=1}^n e_j \otimes e_j$ 是将 $\mathcal{H}$ 投影到其子空间 $span\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的正交投影（*orthogonal projection*）。

若 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个秩为 1 的算子，x 是 $U(\mathcal{H})$ 中的非零元素，则必存在某个 $y \in \mathcal{H}$，使得 $U = x \otimes y$。事实上，设 $z \in \mathcal{H}$，则 $U(z) = \tau(z)x$，其中 $\tau(z)$ 为与 z 有关的某个复数。容易验证映射 $\tau : z \mapsto \tau(z)$ 是 $\mathcal{H}$ 上的线性泛函。此外，由 $||U(z)|| = |\tau(z)| \cdot ||x||$ 及 U 有界可知 $||U|| = ||\tau|| \cdot ||x||$，故 τ 有界。从而由 Riesz 表示定理知存在 $y \in \mathcal{H}$，使得 $\tau(z) = \langle z, y\rangle$，$\forall z \in \mathcal{H}$。因此，$U = x \otimes y$。

***Theorem* 3.4.6** *若 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，则 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 可由所有秩为 1 的投影线性生成。*

Proof. 设 $U \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$。因 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 是自伴的，故 $U = \frac{U+U^*}{2} + i\frac{U-U^*}{2i}$ 为 hermitian 元 $\frac{U+U^*}{2}, \frac{U-U^*}{2i} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ 的线性组合，故不妨设 U 为 hermitian 的。

设 $U = W|U|$ 为 U 的极化分解，则由 $U \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ 可知 $|U| = W^*U \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$。故 $U = U^+ - U^- = \frac{|U|+U}{2} - \frac{|U|-U}{2}$ 为 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 中的正元 U^+ 和 U^- 的线性组合，故不妨设 $U \geq 0$。

因 $U(\mathcal{H})$ 是有限维的，故 $U(\mathcal{H})$ 为希尔伯特空间，设 $e_1, \cdots, e_n$ 为其规范正交基。令 $P = \sum_{j=1}^n e_j \otimes e_j$，则 P 是将 $\mathcal{H}$ 投影到 $U(\mathcal{H})$ 的投影，且有 $U = PU = U^{1/2}PU^{1/2} = \sum_{j=1}^n U^{1/2}(e_j\otimes e_j)U^{1/2}$，故 $U = \sum_{j=1}^n x_j\otimes x_j$，其中 $x_j = U^{1/2}(e_j)$。设 $x_j = \lambda_j f_j$，其中 f_j 为单位向量，$\lambda_j \in \mathbb{C}$，$j = 1, 2, \cdots, n$。则有 $U = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 f_j \otimes f_j$，其中 $f_j \otimes f_j$（$j = 1, 2, \cdots, n$）都是秩为 1 的投影。证毕。 ■

***Theorem* 3.4.7** *若 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，$\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的非零理想，则 $\mathcal{I}$ 包含 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$。*

Proof. 设 U 为 $\mathcal{I}$ 中的非零算子，则存在某个 $x \in \mathcal{H}$，使得 $U(x) \neq 0$。若 P 为秩为 1 的投影，则 $P = y \otimes y$，其中 y 为 $\mathcal{H}$ 中的某个单位向量。

则存在 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $VU(x) = y$（例如，可取 $V = \frac{y \otimes U(x)}{||U(x)||^2}$）。因此，有

$$P = VU(x) \otimes VU(x) = VU(x \otimes VU(x)) = VU[(x \otimes x)U^*V^*],$$

故由 $U \in \mathcal{I}$ 知 $P \in \mathcal{I}$。因此，$\mathcal{I}$ 包含了所有秩为 1 的投影，从而由定理 3.4.6 知 $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{I}$。

注：由 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的理想可知 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的所有非零理想构成的集合中的最小元（关于集合包含关系）。 ∎

设 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 的一族元素。记 Λ 的所有非空有限子集的集合为 Λ'，并对每个 $\mathcal{F} \in \Lambda'$，令 $x_{\mathcal{F}} = \sum_{\lambda \in \mathcal{F}} x_\lambda$。定义 Λ' 中的偏序关系为：$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$。则 $(x_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F} \in \Lambda'}$ 是一个网。称 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 可和至 (*summable to*) 某个元素 $x \in \mathcal{X}$，若网 $(x_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F} \in \Lambda'}$ 收敛至 x。此时记 $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$。

若 $x_\lambda \in \mathbb{R}_+$，$\forall \lambda \in \Lambda$，则 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 可和当且仅当 $sup_{\mathcal{F} \in \Lambda'} \sum_{\lambda \in \mathcal{F}} x_\lambda < \infty$，此时有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sup_{\mathcal{F} \in \Lambda'} \sum_{\lambda \in \mathcal{F}} x_\lambda.$$

因此，若 $x_\lambda \in \mathbb{R}_+$，$\forall \lambda \in \Lambda$，则 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 无论可和与否，都可定义

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sup_{\mathcal{F} \in \Lambda'} \sum_{\lambda \in \mathcal{F}} x_\lambda.$$

设 U 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子（线性算子条件保证了 $(Tx, y) = (y, T^*x)$，$\forall x, y \in \mathcal{H}$），假设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{H}$ 的规范正交基（没有特殊说明时，在讨论希尔伯特 $\mathcal{H}$ 中的规范正交基时，规范正交基是指完备（等价于满足 Parseval 等式）的规范正交集，详细内容及存在性可参见张恭庆《泛函分析讲义》上册）。定义 U 的 Hilbert-Schmidt 范数为

$$||U||_2 = (\sum_{x \in \mathcal{E}} ||U(x)||^2)^{1/2}.$$

该定义与基的选择无关：设 $\mathcal{E}'$ 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的另一个规范正交基。则对于 $\mathcal{E}$ 的每个有限的非空子集 $\mathcal{F}$，有

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} ||U(x)||^2 &= \textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}}\sum_{y\in\mathcal{E}'} |\langle U(x), y\rangle|^2 \quad (\text{规范正交基定义}) \\
&= \textstyle\sum_{y\in\mathcal{E}'}\sum_{x\in\mathcal{F}} |\langle U(x), y\rangle|^2 \quad (\text{有限个无穷级数的和}) \\
&= \textstyle\sum_{y\in\mathcal{E}'}\sum_{x\in\mathcal{F}} |\langle x, U^*(y)\rangle|^2 \\
&\leq \textstyle\sum_{y\in\mathcal{E}'}\sum_{x\in\mathcal{E}} |\langle x, U^*(y)\rangle|^2 \\
&= \textstyle\sum_{y\in\mathcal{E}'} ||U^*(y)||^2,
\end{aligned}$$

故得

$$\sum_{x\in\mathcal{E}} ||U(x)||^2 \leq \sum_{y\in\mathcal{E}'} ||U^*(y)||^2.$$

从而由对称性及 $U^{**} = U$ 知

$$\sum_{x\in\mathcal{E}} ||U(x)||^2 \leq \sum_{y\in\mathcal{E}'} ||U^*(y)||^2 \leq \sum_{x\in\mathcal{E}} ||U(x)||^2.$$

再由 $\mathcal{E}'$ 任意性即得

$$\sum_{x\in\mathcal{E}} ||U(x)||^2 = \sum_{x\in\mathcal{E}} ||U^*(x)||^2 = \sum_{y\in\mathcal{E}'} ||U(y)||^2.$$

这说明 $||U||_2$ 的定义与基无关，且有 $||U^*||_2 = ||U||_2$。

设 U 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子，若 $||U||_2 < \infty$，则称 U 为 Hilbert-Schmidt 算子。$\mathcal{H}$ 上的所有 Hilbert-Schmidt 算子的集合记为 $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$。

***Example* 3.4.8** *设 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 为可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，U 为 $\mathcal{H}$ 上的关于 (e_n) 的对角算子，其对角线为 (λ_n)。则 $||U||_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2}$，故 U 是一个 Hilbert-Schmidt 算子当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$。*

更一般的，对于任意的 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，设 $(\alpha_{n,m})$ 为 U 关于基 (e_n) 的矩阵，即 $\alpha_{n,m} = \langle U(e_m), e_n\rangle$，则有

$$||U||_2 = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle U(e_m), e_n\rangle|^2} = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n,m}|^2}.$$

因此，U 是一个 Hilbert-Schmidt 算子当且仅当 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n,m}|^2 < \infty$。

***Theorem* 3.4.9** *设 U 和 V 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子，$\lambda \in \mathbb{C}$。则有*

(1)$||U+V||_2 \leq ||U||_2 + ||V||_2$，$||\lambda U||_2 = |\lambda| \cdot ||U||_2$;

(2)$||U|| \leq ||U||_2 = ||U^*||_2$;

(3)$||UV||_2 \leq ||U|| \cdot ||V||_2$，$||UV||_2 \leq ||U||_2 \cdot ||V||$.

Proof. 设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{H}$ 的任一规范正交基，而 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的任一有限的非空子集，则有

$$\begin{aligned}\sqrt{\textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} ||U(x)+V(x)||^2} &\leq \sqrt{\textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}}(||U(x)||+||V(x)||)^2}\\ &\leq \sqrt{\textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} ||U(x)||^2} + \sqrt{\textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} ||V(x)||^2}\\ &\leq \sqrt{\textstyle\sum_{x\in\mathcal{E}} ||U(x)||^2} + \sqrt{\textstyle\sum_{x\in\mathcal{E}} ||V(x)||^2},\end{aligned}$$

其中第二个不等式可通过两边平方再用柯西不等式验证。由此可得 $||U+V||_2 \leq ||U||_2 + ||V||_2$。等式 $||\lambda U||_2 = |\lambda| \cdot ||U||_2$ 按定义可直接验证。

$||U||_2 = ||U^*||_2$ 已在例 3.4.8 前证明。现设 x 是 $\mathcal{H}$ 的一个单位向量，$\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{H}$ 的任一规范正交基，则有

$$\begin{aligned}||U(x)||^2 &= \textstyle\sum_{y\in\mathcal{E}} |\langle U(x), y\rangle|^2\\ &\leq \textstyle\sum_{y\in\mathcal{E}} |\langle x, U^*(y)\rangle|^2\\ &\leq \textstyle\sum_{y\in\mathcal{E}} ||x||^2 \cdot ||U^*(y)||^2\\ &= \textstyle\sum_{y\in\mathcal{E}} ||U^*(y)||^2\\ &= ||U^*||_2^2 = ||U||_2^2.\end{aligned}$$

由 x 任意性即得 $||U|| \leq ||U||_2$。(讲义上的证明方法：若 x 是 $\mathcal{H}$ 的一个单位向量，则必有一个规范正交基 $\mathcal{E}$ 包含 x。因此，$||U(x)||^2 \leq \sum_{y\in\mathcal{E}} ||U(y)||^2 = ||U||_2^2$。由 x 任意性即得 $||U|| \leq ||U||_2$。)

设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{H}$ 的任一规范正交基，则

$$||UV||_2^2 = \sum_{x\in\mathcal{E}} ||UV(x)||^2 \leq ||U||^2 \sum_{x\in\mathcal{E}} ||V(x)||^2 = ||U||^2 ||V||_2^2.$$

因此有 $||UV||_2 \leq ||U|| \cdot ||V||_2$。且有

$$||UV||_2 = ||(UV)^*||_2 = ||V^*U^*||_2 \leq ||V^*|| \cdot ||U^*||_2 = ||U||_2 \cdot ||V||.$$

∎

***Corollary* 3.4.10** *$\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的自伴理想，并且关于 Hilbert-Schmidt 范数是一个赋范 $*$-代数，且由 $||U||_2 = ||U^*||_2$（$\forall U \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$）知该对合是等距的。*

设 $\mathcal{E}$ 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的规范正交基。若 $x, y \in \mathcal{H}$，则

$$\begin{aligned} ||x\otimes y||_2 &= (\sum_{z\in\mathcal{E}} ||(x\otimes y)(z)||^2)^{1/2} \\ &= (\sum_{z\in\mathcal{E}} ||\langle z,y\rangle x||^2)^{1/2} \\ &= (\sum_{z\in\mathcal{E}} |\langle z,y\rangle|^2 ||x||^2)^{1/2} \\ &= ||x||(\sum_{z\in\mathcal{E}} |\langle z,y\rangle|^2)^{1/2} \\ &= ||x||\cdot||y||, \end{aligned}$$

即得 $||x\otimes y||_2 = ||x||\cdot||y||$，故 $x\otimes y \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$。从而由定理 3.4.6 知 $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$。

3.5 The Trace-Class Operators

***Lemma* 3.5.1** *设 U_1, U_2 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子。若 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，$V = U_1^*U_2$ 则 $(\langle V(x),x\rangle)_{x\in\mathcal{E}}$ 是绝对可积的，即*

$$\sum_{x\in\mathcal{E}} |\langle V(x),x\rangle| < +\infty,$$

且有

$$\sum_{x\in\mathcal{E}} \langle V(x),x\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k||U_2 + i^kU_1||_2^2.$$

Proof. 若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的有限的非空子集，则

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} |\langle V(x),x\rangle| &= \textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} |\langle U_2(x),U_1(x)\rangle| \\ &\le \textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} ||U_2(x)||\cdot||U_1(x)|| \\ &\le \sqrt{\textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} ||U_2(x)||^2}\sqrt{\textstyle\sum_{x\in\mathcal{F}} ||U_1(x)||}. \end{aligned}$$

因此，$(\langle V(x),x\rangle)_{x\in\mathcal{E}}$ 是绝对可积的，且有

$$\langle V(x),x\rangle = \langle U_2(x),U_1(x)\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k||U_2(x) + i^kU_1(x)||_2^2.$$

则由极化恒等式知

$$\sum_{x\in\mathcal{E}} \langle V(x), x\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \sum_{x\in\mathcal{E}} ||(U_2 + i^k U_1)(x)||_2^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||U_2 + i^k U_1||_2^2.$$

■

若 U 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子，可定义其迹类范数（trace-class norm）为 $||U||_1 = || \, |U|^{1/2}||_2^2$。若 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，则

$$||U||_1 = \sum_{x\in\mathcal{E}} \langle |U|(x), x\rangle \,.$$

若 $||U_1|| < +\infty$，则称 U 为迹类算子。迹类算子和 Hilbert-Schmidt 算子之间的关系由下列结果给定。

***Theorem* 3.5.2** *设 V 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子。则下列条件等价：*

(1) V 为迹类的；
(2) $|V|$ 为迹类的；
(3) $|V|^{1/2}$ 为 Hilbert-Schmidt 算子；
(4) 存在 $\mathcal{H}$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子 U_1, U_2 使得 $V = U_1U_2$。

Proof.

(1) ⇒ (2)：$||V||_1 < \infty \Rightarrow || \, |V| \, ||_1 = || \, |V|^{1/2}||_2^2 = ||V||_1 < \infty$。

(2) ⇒ (3)：$|| \, |V| \, ||_1 < \infty \Rightarrow || \, |V|^{1/2}||_2 = || \, |V| \, ||_1^{1/2} < \infty$。

(3) ⇒ (4)：设 $V = U|V|$ 为 V 的极化分解，则 $V = (U|V|^{1/2})|V|^{1/2}$，若 $|V|^{1/2} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$，由推论 3.4.10 知 $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的自伴理想，故 $U|V|^{1/2} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$。令 $U_1 = U|V|^{1/2}$，$U_2 = |V|^{1/2}$，即得 U_1, U_2 为 Hilebert-Schmidt 算子，且 $V = U_1U_2$。

(4) ⇒ (1)：设 $V = U_1U_2$，其中 $U_1, U_2 \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$。设 $V = W|V|$ 为 V 的极化分解，则 $|V| = W^*V = (W^*U_1)U_2 = (U_1^*W)^*U_2$。由 $U_1 \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ 及 $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的自伴理想知 $U_1^*W \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$。

设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，则由引理 3.5.1 可知

$$||V||_1 = \sum_{x\in\mathcal{E}} \langle |V|(x), x\rangle < \infty,$$

故 V 为迹类算子。

■

由定理 3.5.2 可知，若 V 为希尔伯特空间上的迹类算子，则有 $V = U_1U_2$，其中 $U_1, U_2 \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$，故 $V \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$。设 U 为 $\mathcal{H}$ 上的任一有界线性算子，则 $UV = (UU_1)U_2$ 和 $VU = U_1(U_2U)$ 都是迹类算子。

设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，定义迹类算子 V 的迹如下

$$tr(V) = \sum_{x\in\mathcal{E}} \langle V(x), x\rangle .$$

由引理 3.5.1 可知该定义与基的选择无关。

***Theorem* 3.5.3** *设 U 和 V 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子。设条件 (1) 和 (2) 为*

(1) U 和 V 都是 Hilbert-Schmidt 算子;

(2) V 为迹类的.

若条件 (1) 或 (2) 成立，则有

$$tr(UV) = tr(VU).$$

Proof. 对于 (1)，由引理 3.5.1 知

$$\begin{aligned}
tr(UV) &= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k||V + i^kU^*||_2^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k||(V + i^kU^*)^*||_2^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k||V^* + (-i)^kU||_2^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k|(-i)^k| \cdot ||U + i^kV^*||_2^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k||U + i^kV^*||_2^2 \\
&= tr(VU).
\end{aligned}$$

对于 (2)，由定理 3.5.2 可知存在 $U_1, U_2 \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$，使得 $V = U_1U_2$。则由 (1) 知

$$tr(UV) = tr((UU_1)U_2) = tr(U_2(UU_1)) = tr(U_1(U_2U)) = tr(VU).$$

■

***Theorem* 3.5.4** *设 U 和 V 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子，$\lambda \in \mathbb{C}$。则有*

(1)$||U+V||_1 \le ||U||_1 + ||V||_1$，$||\lambda U||_1 = |\lambda| \cdot ||U||_1$*;*

(2)$||U|| \le ||U||_1 = ||U^*||_1$*;*

(3)$||UV||_1 \le ||U|| \cdot ||V||_1$，$||UV||_1 \le ||U||_1 \cdot ||V||$.

Proof.

(1) 设 U 和 V 都是迹类算子。则有极化分解 $U = W|U|$，$V = W_1|V|$，$U+V = W_2|U+V|$。由此可知

$$|U+V| = W_2^*(U+V) = W_2^*W|U| + W_2^*W_1|V|.$$

设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，则有

$$\begin{array}{rcl}
||U+V||_1 & = & \sum_{x\in\mathcal{E}} \langle\, |U+V|(x), x \,\rangle \\
& = & |\sum_{x\in\mathcal{E}} \langle\, W_2^*W|U|(x), x \,\rangle + \sum_{x\in\mathcal{E}} \langle\, W_2^*W_1|V|(x), x \,\rangle\,| \\
& = & |\sum_{x\in\mathcal{E}} \langle\, |U|^{1/2}(x), |U|^{1/2}W^*W_2(x) \,\rangle \\
& + & \ \sum_{x\in\mathcal{E}} \langle\, |V|^{1/2}(x), |V|^{1/2}W_1^*W_2(x) \,\rangle\,| \\
& \le & \sum_{x\in\mathcal{E}} |\langle\, |U|^{1/2}(x), |U|^{1/2}W^*W_2(x) \,\rangle| \\
& + & \sum_{x\in\mathcal{E}} |\langle\, |V|^{1/2}(x), |V|^{1/2}W_1^*W_2(x) \,\rangle| \\
& \le & (\sum_{x\in\mathcal{E}} ||\, |U|^{1/2}(x)\, ||^2)^{1/2} \cdot (\sum_{x\in\mathcal{E}} ||\, |U|^{1/2}W^*W_2(x)\, ||^2)^{1/2} \\
& + & (\sum_{x\in\mathcal{E}} ||\, |V|^{1/2}(x)\, ||^2)^{1/2} \cdot (\sum_{x\in\mathcal{E}} ||\, |V|^{1/2}W_1^*W_2(x)\, ||^2)^{1/2} \\
& = & ||U||_1^{1/2} \cdot ||\, |U|^{1/2}W^*W_2\, ||_2 + ||V||_1^{1/2} \cdot ||\, |V|^{1/2}W_1^*W_2\, ||_2 \\
& \le & ||U||_1^{1/2} \cdot ||\, |U|^{1/2}||_2 \cdot ||W^*|| \cdot ||W_2\, || \\
& + & ||V||_1^{1/2} \cdot ||\, |V|^{1/2}||_2 \cdot ||W_1^*|| \cdot ||W_2\, || \\
& \le & ||U||_1^{1/2} \cdot ||U||_1^{1/2} + ||V||_1^{1/2} \cdot ||V||_1^{1/2} \\
& = & ||U||_1 + ||V||_1
\end{array}$$

故得 $||U+V||_1 \le ||U||_1 + ||V||_1$。

注：设 U 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的部分等距算子，则 $\forall x = y+z \in \mathcal{H} = ker(U) \oplus ker(U)^{\perp}(\ y \in ker(U), z \in ker(U)^{\perp})$，有

$$||U(x)|| = ||U(y+z)|| = ||U(z)|| = ||z|| \le ||y|| + ||z|| = ||x||,$$

故由 x 任意性得 $||U|| \le 1$，且当 U 非零时，有 $||U|| = 1$。

(2) 由各范数定义知 $||U||_1 = ||\, |U|^{1/2}||_2^2 \ge ||\, |U|^{1/2}||^2$。而由 $|U|^{1/2}$ 为 C^*-代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的自伴元知 $||\, |U|^{1/2}||^2 = ||\, |U|\, || = ||U||$。故得 $||U|| \le ||U||_1$。

设 $U = W|U|$ 为 U 的极化分解，则

$$UU^* = W|U|^2W^* = W|U|(W^*U)W^* = W|U|W^*(W|U|)W^* = (W|U|W^*)^2,$$

故 $|U^*|^2 = UU^* = (W|U|W^*)^2$。由 $|U|$ 为正元及定理 3.2.7(2) 知 $W|U|W^*$ 亦为正元，因此由正元平方根的唯一性知 $|U^*| = W|U|W^*$。从而有

$$||U^*||_1 = tr(|U^*|) = tr(W|U|W^*) = tr(UW^*) = tr(W^*U) = tr(|U|) = ||U||_1,$$

即得 $||U||_1 = ||U^*||_1$。

(3) 设 $U = W|U|$ 为 U 的极化分解，$VU = W_1|VU|$ 为 VU 的极化分解，$W_2 = W_1^*VW$，则 $|VU| = W_1^*VU = W_1^*V(W|U|) = W_2|U|$。因此，由 $W_2^*W_2 \leq ||W_2^*W_2||I = ||W_2||^2I$ 知

$$|VU|^2 = |U|W_2^*W_2|U| \leq |U|^2||W_2||^2 = |U|^2||W_1^*VW||^2 \leq |U|^2||V||^2,$$

故由定理 3.2.8 知 $|VU| \leq |U| \cdot ||V||$。因此，若 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，则由定理 3.3.6 知

$$||VU||_1 = \sum_{x\in\mathcal{E}} \langle |VU|(x), x\rangle \leq \sum_{x\in\mathcal{E}} ||V|| \langle |U|(x), x\rangle = ||V|| \cdot ||U||_1.$$

此外，$||UV||_1 = ||V^*U^*||_1 \leq ||V^*|| \cdot ||U^*||_1 = ||V|| \cdot ||U||_1 = ||U||_1 \cdot ||V||$。由 U 和 V 的任意性即可知 (3) 成立。

■

设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，记 $\mathcal{H}$ 上的所有迹类算子的集合为 $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$。则由定理 3.5.4 知 $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的自伴理想，而函数 $U \mapsto ||U||_1$ 为 $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ 上的范数，使 $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ 成为一个赋范 *-代数。

***Theorem* 3.5.5** *设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，函数*

$$tr : \mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C},\ U \mapsto tr(U),$$

是线性的，且

$$|tr(VU)| \leq ||V|| \cdot ||U||_1, \quad V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ U \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}).$$

Proof. 由迹的定义可知迹是线性的。令 $U=W|U|$ 为 U 的极化分解，$\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交基。则

$$\begin{aligned}
|tr(VU)| &= |\sum_{x\in\mathcal{E}}\langle VU(x),x\rangle| \\
&= |\sum_{x\in\mathcal{E}}\langle W|U|(x),V^*(x)\rangle| \\
&= |\sum_{x\in\mathcal{E}}\langle |U|^{1/2}(x),|U|^{1/2}W^*V^*(x)\rangle| \\
&\le \sum_{x\in\mathcal{E}}||\,|U|^{1/2}(x)\,||\cdot||\,|U|^{1/2}W^*V^*(x)\,|| \\
&\le (\sum_{x\in\mathcal{E}}||\,|U|^{1/2}(x)\,||^2)^{1/2}\cdot(\sum_{x\in\mathcal{E}}||\,|U|^{1/2}W^*V^*(x)\,||^2)^{1/2} \\
&= ||U||_1^{1/2}\cdot||\,|U|^{1/2}W^*V^*\,||_2 \\
&\le ||U||_1^{1/2}\cdot||\,|U|^{1/2}\,||_2\cdot||V|| \quad \text{（定理 3.4.9）} \\
&= ||U||_1\cdot||V||,
\end{aligned}$$

故有 $|tr(VU)|\le||U||_1\cdot||V||$。

注：由定义可知

$$\begin{aligned}
||\,|U|^{1/2}\,||_2^2 &= \sum_{x\in\mathcal{E}}||\,|U|^{1/2}(x)\,||^2=\sum_{x\in\mathcal{E}}\langle\,|U|^{1/2}(x),|U|^{1/2}(x)\,\rangle \\
&= \sum_{x\in\mathcal{E}}\langle|U|(x),x\rangle=||U||_1.
\end{aligned}$$

■

若 $x,y\in\mathcal{H}$，则 $|x\otimes y|^2=(x\otimes y)^*(x\otimes y)=(y\otimes x)(x\otimes y)=\langle x,x\rangle\, y\otimes y$。故由 $|x\otimes y|^{1/2}$ 为自伴元及二范数定义可知

$$||x\otimes y||_1=||\,|x\otimes y|^{1/2}\,||_2^2=||\,|x\otimes y|^2\,||_2^{1/2}=||\,\langle x,x\rangle\, y\otimes y||_2^{1/2}=||x||\cdot||y||$$

即得 $||x\otimes y||_1=||x||\cdot||y||$。

此外，设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的规范正交基，则有

$$tr(x\otimes y)=\sum_{z\in\mathcal{E}}\langle(x\otimes y)z,z\rangle=\sum_{z\in\mathcal{E}}\langle\langle z,y\rangle\, x,z\rangle=\sum_{z\in\mathcal{E}}\langle z,y\rangle\langle x,z\rangle=\langle x,y\rangle\,.$$

即得 $tr(x\otimes y)=\langle x,y\rangle$。

由上知 $x\otimes y\in\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$。从而有

$$\mathcal{F}(\mathcal{H})\subseteq\mathcal{L}^1(\mathcal{H})\subseteq\mathcal{L}^2(\mathcal{H}).$$

3.6 Gelfand-Naimark-Segal Construction

这一节将研究 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的表示，即著名的 Gelfand-Naimark-Segal 构造。

***Definition* 3.6.1** *C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的一个表示为 $(\pi, \mathcal{H})$，其中 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个 $*$-同态。若 $\mathcal{A}$ 有单位元，则有 $\pi(I) = I$。常将 $\mathcal{H}$ 省略，直接称 π 为一个表示。*

***Example* 3.6.2** *若 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个 σ-有限的测度空间（σ-有限：X 可以表示为可数个具有有限 σ 测度的可测集的并），$\mathcal{H} = L^2(\mu)$，则 $\pi : L^\infty(\mu) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\phi \mapsto M_\phi$（其中 M_ϕ 表示乘法算子：$M_\phi(f) = \phi \cdot f, \forall f \in L^2(\mu)$）是一个表示。*

***Example* 3.6.3** *若 X 是一个紧空间，μ 为 X 上的一个正规 Borel 测度（可参考实分析或测度论书），则 $\pi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{B}(L^2(\mu)), f \mapsto M_f$ 是一个表示。*

***Definition* 3.6.4** *C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的表示 π 称为是循环的 (cyclic)，若存在 $\mathcal{H}$ 中的向量 e 使得 $\overline{\pi(\mathcal{A})e} = \mathcal{H}$；此时 e 称为 π 的一个循环向量。*

上述两个例子中的表示都是循环的。恒等表示 $i : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是循环的，且每个非零向量都是该表示 i 的循环向量。事实上，设 $x \in \mathcal{H}$，x 非零，对于任意的 $y \in \mathcal{H}$，可定义有界线性映射 $\varphi_x : \mathcal{H} = span\{x\} \oplus span\{x\}^\perp \to \mathcal{H}$，满足 $\varphi(\lambda x + z) = \lambda y$，$\forall z \in span\{x\}^\perp$，$\forall \lambda \in \mathbb{C}$。由此即得 $\mathcal{B}(\mathcal{H})(x) = \mathcal{H}$。

下面是另一种得到表示的方式。

***Definition* 3.6.5** *若 $\{(\pi_\alpha, \mathcal{H}_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$（$\Lambda$ 为非空指标集）是单位的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的一族表示，则该族表示的直和为表示 $(\pi, \mathcal{H})$，其中 $\mathcal{H} = \oplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha$，$\pi(a) = \{\pi_\alpha(a)\}$，$\forall a \in \mathcal{A}$。*

事实上，$\forall a \in \mathcal{A}$，由定理 3.1.8 可知 $||\pi_\alpha(a)|| \leq ||a||$，$\forall \alpha \in \Lambda$，则对于任意的 $\{x_\alpha\} \in \mathcal{H} = \{\{y_\alpha\} : y_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha,\ ||\{y_\alpha\}||_{\mathcal{H}} = (\sum_\alpha ||y_\alpha||^2)^{1/2} < \infty\}$，有

$$(\sum_\alpha ||\pi_\alpha(a)x_\alpha||^2)^{1/2} \leq (\sum_\alpha ||\pi_\alpha(a)||^2 \cdot ||x_\alpha||^2)^{1/2} \leq ||a|| \cdot (\sum_\alpha ||x_\alpha||^2)^{1/2},$$

由此可知 π 为 $\mathcal{H}$ 上的有界算子。容易验证 π 是一个表示。

***Definition* 3.6.6** *C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的两个表示 $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ 和 $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ 是等价的，若存在一个酉变换 $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ 使得 $U\pi_1(a)U^{-1} = \pi_2(a)$，$\forall a \in \mathcal{A}$。*

***Theorem* 3.6.7** *若 π 是有单位 I 的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的表示，则存在 $\mathcal{A}$ 的一族循环表示 $\{\pi_\alpha\}$ 使得 π 和 $\oplus_\alpha \pi_\alpha$ 是等价的。*

Proof. 设 $E \subset \mathcal{H}$，E 不包含零向量，且 $\forall e, f \in E$，$e \neq f$，有 $\pi(\mathcal{A})e \perp \pi(\mathcal{A})f$。令 $\mathcal{E}$ 为由所有这样的集合 E 构成的集族。$\mathcal{E}$ 关于集合的包含关系成为一个偏序集。由 $\mathcal{E}$ 中的每个元素的定义及 Zorn 引理可知 $\mathcal{E}$ 有一个最大元 E_0。

令 $\mathcal{H}_0 = \overline{span\{\pi(\mathcal{A})e : e \in E_0\}}$。若 $h \in \mathcal{H}_0^\perp$，则 $\langle \pi(a)e, h\rangle = 0$，$\forall a \in \mathcal{A}$，$\forall e \in E_0$。因此，若 $a, b \in \mathcal{A}$，$e \in E_0$，则有

$$\langle \pi(a)e, \pi(b)h\rangle = \langle \pi(b)^*\pi(a)e, h\rangle = \langle \pi(b^*a)e, h\rangle = 0.$$

由 a 和 b 任意性即得 $\pi(\mathcal{A})e \perp \pi(\mathcal{A})h$，$\forall e \in E_0$。而 $I \in \mathcal{A}$，则 $\forall e \in E_0$，有 $\pi(I)e \perp \pi(I)h = 0$，即 $e \perp h$，从而因 $e \neq 0$ 可知 $h \neq e$。因此，若 $h \neq 0$，则 $E_0 \cup \{h\} \in \mathcal{E}$，这与 E_0 的极大性矛盾，故得 $h = 0$。这说明 $\mathcal{H}_0^\perp$ 只有零元素，从而得 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$。

设 $e \in E_0$，令 $\mathcal{H}_e = \overline{\pi(\mathcal{A})e}$，则 $\mathcal{H}_e$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间，故为希尔伯特空间。若 $a \in \mathcal{A}$，由 π 保持乘法可知 $\pi(a)\mathcal{H}_e \subseteq \mathcal{H}_e$。又 $a^* \in \mathcal{A}$，而 $\pi(a)^* = \pi(a^*)$，故 $\pi(a)^*\mathcal{H}_e \subseteq \mathcal{H}_e$。

现定义 $\pi_e : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_e)$ 为 $\pi_e(a) = \pi(a)|\mathcal{H}_e$，则 π_e 是 $\mathcal{A}$ 的一个循环表示。由 $\mathcal{H} = \oplus\{\mathcal{H}_e : e \in E_0\}$，有 $\pi = \oplus\{\pi_e : e \in E_0\}$。

■

由定理 3.6.7 可知，对循环表示的理解十分重要。

设 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为有循环向量 e 的循环表示，其中 $\mathcal{A}$ 为单位的 C^*-代数，$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。定义 $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 为 $f(a) = \langle \pi(a)e, e\rangle$。则 f 是 $\mathcal{A}$ 上的一个有界线性泛函，满足 $||f|| \leq ||e||^2$（因 $|f(a)| = |\langle \pi(a)e, e\rangle| \leq ||\pi(a)e|| \cdot ||e|| \leq ||\pi(a)|| \cdot ||e||^2 \leq ||a|| \cdot ||e||^2$，$\forall a \in \mathcal{A}$）。又 $f(I) = ||e||^2$，故 $||f|| = ||e||^2$。此外，有

$$f(a^*a) = \langle \pi(a^*a)e, e\rangle = \langle \pi(a)^*\pi(a)e, e\rangle = ||\pi(a)e||^2 \geq 0.$$

***Definition* 3.6.8** *设 $\mathcal{A}$ 为 C^*-代数，称线性泛函 $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 是正的，若 $f(a) \geq 0$，$\forall a \in \mathcal{A}_+$。$\mathcal{A}$ 上的一个状态是一个 $\mathcal{A}$ 上的范数为 1 的线性泛函。*

***Propostion* 3.6.9** *若 f 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的一个正线性泛函，则有 $|f(y^*x)|^2 \leq f(y^*y)f(x^*x)$，$\forall x, y \in \mathcal{A}$。*

Proof. 定义 $[\cdot,\cdot] : \mathcal{A}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) = f(y^*x)$，则 $[\cdot,\cdot]$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个半内积（semi-inner product，和内积的不同之处：不要求有共轭对称性，不要求由 $[x, x] = 0$ 可得 $x = 0$，其余定义相同）。从而由柯西 -施瓦兹不等式即得命题结论。 ■

***Corollary* 3.6.10** *若 f 是有单位 I 的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的非零正线性泛函，则 f 是有界的，且 $||f|| = f(I)$。*

Proof. 注意到若 $a \geq 0$，则 $a \leq ||a||I$，故得 $f(a) \leq ||a||f(I)$。则 $\forall x \in \mathcal{A}$，有 $|f(x)|^2 = |f(I^*x)|^2 \leq f(I^*I)f(x^*x) = f(I)f(x^*x) \leq f(I)f(I)||x^*x|| = f(I)^2||x||^2$，即 $|f(x)| \leq f(I)||x||$。因此，$||f|| \leq f(I)$，又 $||I|| = 1$，故 $||f|| = f(I)$。 ■

***Example* 3.6.11** *若 X 是一个紧空间，则 $C(X)$ 上的正线性泛函和 X 上正的正规 Borel 测度相对应，而 $C(X)$ 上的状态和 X 上的概率测度相对应。*

***Theorem* 3.6.12** *(Gelfand-Naimark-Segal Construction). 设 $\mathcal{A}$ 是单位的 C^*-代数。*

(1) 若 f 是 $\mathcal{A}$ 上的一个正线性泛函，则存在 $\mathcal{A}$ 的一个循环表示 $(\pi_f, \mathcal{H}_f)$，其有一个循环向量 e_f，满足 $f(a) = \langle \pi_f(a)e_f, e_f \rangle$，$\forall a \in \mathcal{A}$。

(2) 若 $(\pi, \mathcal{H})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个有循环向量 e 的循环表示，若 $(\pi_f, \mathcal{H}_f)$ 满足 (1)，其中 $f(a) = \langle \pi(a)e, e \rangle$，$\forall a \in \mathcal{A}$，则 π 和 π_f 是等价的。

在证明该定理前，先考虑 $\mathcal{A}$ 为交换代数的情形。此时可设 $\mathcal{A} = C(X)$，其中 X 是紧的。

对于 (1) 若 f 是 $\mathcal{A}$ 上的一个正线性泛函，则存在 X 上的一个正的正规 Borel 测度 μ，满足 $f(\phi) = \int \phi d\mu$，$\forall \phi \in \mathcal{A}$。表示 $(\pi_f, \mathcal{H}_f)$ 可通过令 $\mathcal{H}_f = L^2(\mu)$，$\pi_f(\phi) = M_\phi$ 得到。那么如何得到 $L^2(\mu)$ 呢？一种从 $C(X)$ 得到 $L^2(\mu)$ 的方式如下：

令 $\Phi = \{\phi \in C(X) : f(\phi^*\phi) = \int |\phi|^2 d\mu = 0\}$。$\Phi$ 是 $C(X)$ 中的一个理想。定义 $C(X)/\Phi$ 上的内积为

$$\langle \phi + \Phi, \psi + \Phi \rangle = \int \phi\overline{\psi} d\mu.$$

$C(X)/\Phi$ 关于该内积的完备化空间即为 $L^2(\mu)$。

对于 (2)，设 $\pi : C(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为有循环向量 e 的循环表示。设 μ 为 X 上的正的正规 Borel 测度，满足

$$\int \phi d\mu = \langle \pi(\phi)e, e\rangle = f(\phi).$$

现定义 $U_1 : C(X) \to \mathcal{H}$ 为 $U_1(\phi) = \pi(\phi)e$。则 U_1 是线性的，且 U_1 的值域在 $\mathcal{H}$ 中稠密。定义 $\Phi = \{\phi \in C(X) : f(\phi^*\phi) = \int |\phi|^2 d\mu = 0\}$。若 $\phi \in \Phi$，则

$$||U_1(\phi)||^2 = \langle \pi(\phi)e, \pi(\phi)e\rangle = \langle \pi(\phi^*\phi)e, e\rangle = \int |\phi|^2 d\mu = 0,$$

故 $U_1(\Phi) = 0$。因此，由 U_1 可诱导一个线性映射 $U : C(X)/\Phi \to \mathcal{H}$，$U(\phi + \Phi) = \pi(\phi)e$。若定义

$$\langle \phi + \Phi, \psi + \Phi\rangle = \int \phi\overline{\psi} d\mu,$$

则 $\langle U(\phi + \Phi), U(\psi + \Phi)\rangle = \langle \pi(\phi)e, \pi(\psi)e\rangle = \langle \pi(\phi\psi^*)e, e\rangle = \int \phi\overline{\psi} d\mu = \langle \phi + \Phi, \psi + \Phi\rangle$。因此，$U$ 可延拓为从 $C(X)/\Phi$ 的完备化空间 $L^2(\mu)$ 到 $\mathcal{H}$ 的一个酉变换。

可将 $C(X)$ 视为 $L^2(\mu)$ 的子集：若 $\phi \in C(X)$，则 $U(\phi) = \pi(\phi)e$。若 $\phi, \psi \in C(X)$，则有

$$UM_\phi\psi = U(\phi\psi) = \pi(\phi)\pi(\psi)e = \pi(\phi)U(\psi).$$

故由 ψ 任意性得 $UM_\phi = \pi(\phi)U$ 在 $L^2(\mu)$ 的稠密子集 $C(X)$ 上成立，从而得 $UM_\phi = \pi(\phi)U$，$\forall \phi \in C(X)$。这说明 π 和表示 $\phi \mapsto M_\phi$ 是等价的。

Proof. 设 f 是 $\mathcal{A}$ 上的一个正线性泛函，定义 $\Phi = \{x \in \mathcal{A} : f(x^*x) = 0\}$。可以验证 Φ 在 $\mathcal{A}$ 中是闭的。事实上，由推论 3.6.10 知 f 是有界的，故连续。若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_+} \subseteq \Phi$ 收敛于 $x_0 \in \mathcal{A}$，即 $\lim_{n\to} ||x_n - x_0|| = 0$，则由 $\mathcal{A}$ 为 C^*-代数知

$$\begin{aligned} ||x_0^*x_0 - x_n^*x_n|| &= ||x_0^*(x_0 - x_n) + (x_0 - x_n)^*x_n|| \\ &\leq ||x_0^*|| \cdot ||x_0 - x_n|| + ||(x_0 - x_n)^*|| \cdot ||x_n|| \\ &= ||x_0|| \cdot ||x_0 - x_n|| + ||x_0 - x_n|| \cdot ||x_n|| \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty,\ \{||x_n||\}_n\text{有界}). \end{aligned}$$

从而由 f 连续即可知 $f(x_0^*x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n^*x_n) = 0$，故 $x_0 \in \Phi$。这说明 Φ 在 $\mathcal{A}$ 中是闭的，且容易验证 Φ 是 $\mathcal{A}$ 的子向量空间。

此外，若 $a \in \mathcal{A}$，$x \in \Phi$，则由命题 3.6.9 可知

$$|f\big((ax)^*(ax)\big)|^2 = |f(x^*(a^*ax))|^2 \leq f(x^*x)f(x^*a^*aa^*ax) = 0.$$

故 Φ 是 $\mathcal{A}$ 的闭左理想。现将 $\mathcal{A}/\Phi$ 作为向量空间来考虑。对于 $x, y \in \mathcal{A}$，定义

$$\langle x+\Phi, y+\Phi\rangle = f(y^*x).$$

可以验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathcal{A}/\Phi$ 上的一个良定义的内积。令 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{A}/\Phi$ 关于由该内积诱导的范数的完备化空间。

设 $a \in \mathcal{A}$，$x \in \Phi$，因 Φ 为 $\mathcal{A}$ 的一个左理想，故 $x+\Phi \to ax+\Phi$ 是 $\mathcal{A}/\Phi$ 上的良定义的线性变换。此外有

$$||ax+\Phi||^2 = \langle ax+\Phi, ax+\Phi\rangle = f(x^*a^*ax).$$

注意到 $||a^*a||I - a^*a \geq 0$，故由定理 3.2.7 可知

$$0 \leq x^*(||a^*a|| - a^*a)x = ||a||^2x^*x - x^*a^*ax,$$

即 $x^*a^*ax \leq ||a||^2x^*x$。因而有

$$||ax+\Phi||^2 = f(x^*a^*ax) \leq f(||a||^2x^*x) = ||a||^2f(x^*x) = ||a||^2||x+\Phi||^2.$$

现定义 $\pi_f(a) : \mathcal{A}/\Phi \mapsto \mathcal{A}/\Phi$ 如下：

$$\pi_f(a)(x+\Phi) = ax+\Phi,$$

则 $\pi_f(a)$ 为有界线性算子，$||\pi_f(a)|| \leq ||a||$。从而 $\pi_f(a)$ 可以延拓为 H_f 上的有界线性算子。

可以验证映射

$$\pi_f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad a \longrightarrow \pi_f(a)$$

是一个表示。

令 $e_f = I + \Phi \in \mathcal{H}_f$。则

$$\pi_f(\mathcal{A})e_f = \{a+\Phi : a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}/\Phi,$$

从而由 H_f 定义即可知 $\pi_f(\mathcal{A})e_f$ 在 H_f 中稠密，故 e_f 为 H_f 的一个循环向量，且有

$$\langle \pi_f(a)e_f, e_f\rangle = \langle aI+\Phi, I+\Phi\rangle = f(I^*a) = f(a),$$

即得 (1) 成立。

现设 $(\pi,\mathcal{H})$，e 和 f 如 (2) 中所述，$(\pi_f,\mathcal{H}_f)$ 为 (1) 中所构造的表示。设 e_f 为 π_f 的循环向量，满足 $f(a)=\langle \pi_f(a)e_f,e_f\rangle$，$\forall a\in\mathcal{A}$。则有

$$\langle \pi_f(a)e_f, e_f\rangle = \langle \pi(a)e, e\rangle, \quad \forall a\in\mathcal{A}.$$

定义从 $\mathcal{H}_f$ 的稠密子空间 $\pi_f(\mathcal{A})e_f$ 到 $\mathcal{H}$ 的线性映射为 $U\pi_f(a)e_f=\pi(a)e$。注意到

$$\langle \pi(a)e, \pi(a)e\rangle = \langle \pi(a^*a)e, e\rangle = \langle \pi_f(a^*a)e_f, e_f\rangle = ||\pi_f(a)e_f||^2,$$

故 U 是良定义的（若 $\pi_f(a_1)e_f=\pi_f(a_2)e_f$，则 $0=||\pi_f(a_1)e_f-\pi_f(a_2)e_f||=||\pi_f(a_1-a_2)e_f||=||\pi(a_1-a_2)e||=||\pi(a_1)e-\pi(a_2)e||$，故 $\pi(a_1)e=\pi(a_2)e$）且等距。因此，U 可以延拓为从 $\mathcal{H}_f$ 到 $\mathcal{H}$ 的酉变换。同时，若 $x,a\in\mathcal{A}$，则有 $(U\pi_f(a))\pi_f(x)e_f = U(\pi_f(a)\pi_f(x)e_f) = U\pi_f(ax)e_f = \pi(ax)e = \pi(a)(\pi(x)e) = \pi(a)(U\pi_f(x)e_f) = (\pi(a)U)\pi_f(x)e_f$。由 x 和 a 任意性及 $\pi_f(\mathcal{A})e_f$ 在 H_f 中稠密即得 $\pi(a)U=U\pi_f(a)$，$\forall a\in\mathcal{A}$，故 π 和 π_f 是等价的。从而得 (2) 成立。

■

Gelfand-Naimark-Segal 构造通常简称为 GNS 构造。不难证明，若 f 是 $\mathcal{A}$ 上的一个正线性泛函，$\alpha>0$，则表示 π_f 和表示 $\pi_{\alpha f}$ 是等价的。故只需考虑关于状态的循环表示。若 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，令 $S_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 上的所有状态的集合。注意到 $S_{\mathcal{A}}$ 包含于 $\mathcal{A}^*$ 的单位球中。$S_{\mathcal{A}}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的状态空间。

***Theorem* 3.6.13** *设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为有单位 I 的 C^*-代数，$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$。若 f 是 $\mathcal{B}$ 上的一个状态，则存在 $\mathcal{A}$ 上的一个状态 $\hat{f}$，使得 $\hat{f}|\mathcal{B}=f$。*

Proof. 令 L 为 $\mathcal{A}$ 的所有自伴元素构成的实线性空间，L_1 为 $\mathcal{B}$ 的所有自伴元素构成的实线性空间，$P=\{x\in L: x\geq 0\}$，$L_2=L_1+P-P$。容易验证 L_2 是一个实线性空间。 ■

***Theorem* 3.6.14** *设 $\mathcal{A}$ 是有单位 I 的 C^*-代数。则 $S_\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}^*$ 中的一个弱 * 紧凸子集。此外，若 $a \in \mathcal{A}$ 为正元，则 $||a|| = \sup\{f(a) : a \in S_\mathcal{A}\}$，且该上确界可取到。*

Proof. 若 $\mathcal{A}$ 可交换，则可设 $\mathcal{A} = C(X)$，X 为紧的 Hausdorff 空间，$g \in C(X)_+$，则存在 $x \in X$，$||x|| = 1$，使得 $g(x) = ||g||$。注意到 δ_x（该记号参见定理 3.1.16）是 $C(X)$ 上的一个非零正线性泛函，则由推论 3.6.10 知 $||\delta_x|| = \delta_x(I) = 1$（$C(X)$ 中的单位元 I 为常值函数 1），故 δ_x 为一个状态。$\forall f \in S_\mathcal{A}$，有 $|f(g)| \leq ||f|| \cdot ||g|| = ||g||$，故 $||g|| \geq \sup\{f(g) : f \in S_\mathcal{A}\}$。又 $||g|| = g(x) = \delta_x(g)$，$\delta_x \in S_\mathcal{A}$，故得 $||g|| = \sup\{f(g) : f \in S_\mathcal{A}\}$。

对于一般的非交换的 $\mathcal{A}$，设 $a \in \mathcal{A}_+$，则有 $||a|| \geq \sup\{f(a) : f \in S_\mathcal{A}\}$。考虑由 a 和 I 产生的 $\mathcal{A}$ 的交换 C^*-子代数 $\mathcal{B} = \mathcal{C}^*(a, I)$，则 $a \in \mathcal{B}_+$。根据上述交换情形的结论可知，存在 $\mathcal{B}$ 上的状态 f_1，使得 $f_1(a) = ||a||$。从而由定理 3.6.13 可知存在 $\mathcal{A}$ 上的状态 $\hat{f}_1$，使得 $\hat{f}_1|\mathcal{B} = f_1$，特别的，有 $\hat{f}_1(a) = f_1(a)$。由此即得 $||a|| = \sup\{f(a) : f \in S_\mathcal{A}\}$。 ∎

***Theorem* 3.6.15** *设 $\mathcal{A}$ 是有单位 I 的 C^*-代数，则存在 $\mathcal{A}$ 的一个表示 $(\pi, \mathcal{H})$ 使得 π 是一个等距。若 $\mathcal{A}$ 是可分的，则可取 $\mathcal{H}$ 是可分的。*

Proof. 暂空。 ∎

4 Spectral Theorems of Bounded Normal Operators

4.1 Spectral Measures and Spectral Integrals

设 X 为一个集合，$\mathcal{F}$ 为 X 的子集构成的 σ-代数，$\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间。

一个关于 $(X, \mathcal{F}, \mathcal{H})$ 的谱测度 E 是一个从 σ-代数 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的映射，满足

(1) 对于每个 $S \in \mathcal{F}$，$E(S)$ 是一个正交投影算子；

(2)$E(\emptyset) = 0$，$E(X) = I$；

(3) 若 $\{S_n\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中两两不相交的集合（*pairwise disjoint sets*），则

$$E(\bigcup_{n=1}^{\infty})S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n).$$

现在，我们证明对于任意的 $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$，有

$$E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2).$$

事实上，若 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$，则由 (3) 可得 $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2)$，两边平方后，由 (1) 可知

$$E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_1)E(S_2) + E(S_2)E(S_1) + E(S_2)$$

故得 $E(S_1)E(S_2) + E(S_2)E(S_1) = 0$。两边左乘 $E(S_1)$ 和右乘 $E(S_2)$ 后分别可得

$$E(S_1)E(S_2) + E(S_1)E(S_2)E(S_1) = 0,$$
$$E(S_1)E(S_2)E(S_1) + E(S_2)E(S_1) = 0,$$

故有 $E(S_1)E(S_2) - E(S_2)E(S_1) = 0$。从而有

$$E(S_1)E(S_2) = E(S_2)E(S_1) = 0.$$

由此可知对于任意的 $A, B \in \mathcal{F}$，若 $A \subset B$，则

$$E(A)E(B) = E(A)[E(B \setminus A) + E(A)] = 0 + E(A)E(A) = E(A),$$

即得 $E(A)E(B) = E(A)$。

一般情况下，由 (3) 可得

$$\begin{aligned} E(S_1 \cap S_2) + E(S_1 \cup S_2) \quad &= E(S_1 \cap S_2) + \\ &\quad\ E(S_1 \setminus S_2) + E(S_1 \cap S_2) + E(S_2 \setminus S_1) \\ &= E(S_1 \cap S_2) + E(S_1 \setminus S_2) \\ &\quad\ E(S_1 \cap S_2) + E(S_2 \setminus S_1) \\ &= E(S_1) + E(S_2), \end{aligned}$$

方程两边同乘 $E(S_1)$ 即得

$$E(S_1 \cap S_2) + E(S_1) = E(S_1) + E(S_1)E(S_2),$$

从而有 $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2)$。

设 Ω 为一个紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{F}$ 是 Ω 的所有 Borel 子集的集合，$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。此时，关于 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{H})$ 的谱测度 E 称为关于 $(\Omega, \mathcal{H})$ 的谱测度。

记 $M(\Omega)$ 为 Ω 上的所有具有有限全变差（*finite total variation*）的 Borel 复测度构成的集合，$\mathcal{B}_\infty(\Omega)$ 为 Ω 上的所有有界 Borel-可测复值函数构成的 C^*-代数。

若 E 是关于 $(\Omega, \mathcal{H})$ 的谱测度，则对于任意的 $x, y \in \mathcal{H}$，函数 $E_{x,y}: S \mapsto \langle E(S)x, y\rangle$ 是一个有限全变差 Borel 复测度。

事实上，易见 $E_{x,y}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的复测度。此外，若 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是两两不相交的 Borel 集，令 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为复数，满足 $|a_i| = 1$，$|\langle E(S_i)x, y\rangle| = a_i \langle E(S_i)s, y\rangle$，则有

$$\sum_i |\langle E(S_i)x, y\rangle| = \sum_i \langle E(S_i)a_i x, y\rangle \leq ||\sum_i E(S_i)a_i x|| \cdot ||y||.$$

现由 $E(S_i)E(S_j) = E(S_i \cap S_j) = E(\emptyset) = 0$ 知，$\{E(S_i)a_i x\}_{i=1}^n$ 是有限的两两正交的向量序列：

$$\langle E(S_i)a_i x, E(S_j)a_j x\rangle = \langle E(S_j)E(S_i)a_i x, a_j x\rangle = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

故由 $|a_i| = 1$（$i = 1, 2, \cdots, n$）知 $||\sum\limits_{i=1}^n E(S_i)a_i x||^2 = \sum\limits_{i=1}^n ||E(S_i)a_i x||^2 = \sum\limits_{i=1}^n ||E(S_i)x||^2 = ||\sum\limits_{i=1}^n E(S_i)x||^2 = ||E(\bigcup\limits_{i=1}^n S_i)x||^2 \leq ||x||^2$, 从而得

$$\sum_{i=1}^n |E_{x,y}(S_i)| = \sum_{i=1}^n |\langle E(S_i)x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

由此可知 $E_{x,y}$ 是具有有限全变差的 Borel 复测度。

***Lemma* 4.1.1** *设 Ω 为一个紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，对于任意的 $x, y \in \mathcal{H}$，有 $\mu_{x,y} \in M(\Omega)$。再设对于 Ω 的每个 Borel 集 S，函数*

$$\tau_S: \mathcal{H}^2 \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \mu_{x,y}(S)$$

是一个半双线性形式。则对于任意的 $f \in \mathcal{B}_\infty(\Omega)$，函数

$$\tau_f: \mathcal{H}^2 \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \int f d\mu_{x,y}$$

是一个半双线性形式。

Proof. 先设 f 是简单函数，可写成 $f=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\chi_{S_j}$，其中 $S_1,\cdots,S_n$ 是 Ω 的两两不相交的 Borel 子集，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是复数。则

$$\int fd\mu_{x,y}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\int\chi_{S_j}d\mu_{x,y}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_{x,y}(S_j),$$

故 τ_f 是半双线性形式 τ_{S_j}（$j=1,2,\cdots,n$）的线性组合，而 $\mathcal{H}^2$ 上的半双线性形式的集合赋予逐点定义的运算后是一个向量空间，从而 τ_f 亦为半双线性形式。

现设 f 是 $\mathcal{B}_\infty(\Omega)$ 的任意一个元素，则存在简单函数序列 $(f_n)\subset\mathcal{B}_\infty(\Omega)$，使得 $\lim_{n\to\infty}||f_n-f||_\infty=0$。从而有

$$|\int fd\mu_{x,y}-\int f_nd\mu_{x,y}|\leq\int|f_n-f|d|\mu_{x,y}|\leq||f_n-f||_\infty|\mu_{x,y}|(\Omega),$$

故得 $\int fd\mu_{x,y}=\lim_{n\to\infty}\int f_nd\mu_{x,y}$，对于任意的 $x,y\in E$。从而由 $\int f_nd\mu_{x,y}$（$\forall n\in\mathbb{N}_+$）为半双线性形式即可知 τ_f 是 $\mathcal{H}^2$ 上的半双线性形式。

■

***Theorem* 4.1.2** *设 Ω 为一个紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，E 是一个关于 $(\Omega,\mathcal{H})$ 的谱测度。则对于每个 $f\in\mathcal{B}_\infty(\Omega)$，函数*

$$\tau_f:\mathcal{H}^2\longrightarrow\mathbb{C},\quad(x,y)\longmapsto\int fdE_{x,y}$$

是一个有界的半双线性形式，且 $||\tau_f||\leq||f||_\infty$。

Proof. 由 $E_{x,y}$ 的定义可知对于 Ω 的每个 Borel 子集 S，$\tau_S:\mathcal{H}^2\to\mathbb{C}$，$(x,y)\mapsto E_{x,y}(S)$ 是半双线性形式，且有 $E_{x,y}\in M(\Omega)$，从而由引理 4.1.1 可知 τ_f 是一个半双线性形式，故只需证 $||\tau_f||\leq||f||_\infty$。事实上，由

$$|\int fdE_{x,y}|\leq||f||_\infty\cdot|E_{x,y}|(\Omega)\leq||f||_\infty\cdot||x||\cdot||y||$$

即得 $||\tau_f||\leq||f||_\infty$。 ■

***Theorem* 4.1.3** *设 Ω 为一个紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，E 是一个关于 $(\Omega,\mathcal{H})$ 的谱测度。则对于每个 $f\in\mathcal{B}_\infty(\Omega)$，存在唯一的 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子 U 满足*

$$\langle U(x),y\rangle=\int fdE_{x,y}\quad(x,y\in\mathcal{H}),$$

且有 $||U||=||\tau_f||$（τ_f 定义同定理 4.1.2）。

Proof. 由定理 4.1.2 和定理 3.3.7 即得。 ■

我们用 $\int fdE$ 来表示 U，并且称之为 f 关于 E 的积分。应注意到，由定理 4.1.3 可知，对于每个 Borel 集 S 有 $\int \chi_S dE = E(S)$。

***Theorem* 4.1.4** *设 Ω 为一个紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，E 是一个关于 $(\Omega, \mathcal{H})$ 的谱测度。则映射*

$$\Phi : \mathcal{B}_\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad f \longmapsto \int fdE$$

是单位的 *-同态

Proof. 线性性易证，而有界性由定理 4.1.2 和定理 4.1.3 即得。因简单函数在 $\mathcal{B}_\infty(\Omega)$ 中稠密，为证 $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ 和 $\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*$，只需证 f 和 g 是简单函数的情形。再由 Φ 的线性性，不妨设 $f = \chi_S$，$g = \chi_{S'}$，其中 S 和 S' 是任意的两个 Ω 的 Borel 子集。则有 $\Phi(fg) = \int \chi_S \chi_{S'} dE = E(S \cap S') = E(S)E(S') = \int \chi_S dE \int \chi_{S'} dE = \Phi(f)\Phi(g)$, 且由 $E(S)$ 为投影知 $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f) = E(S) = (E(S))^* = (\Phi(f))^*$。

又 $\mathcal{B}_\infty(\Omega)$ 中的单位元为常值函数 1，而 $\Phi(1) = \Phi(\chi_\Omega) = E(\Omega) = I$，故得 Φ 为单位的 *-同态。 ■

***Theorem* 4.1.5** *设 Ω 为一个紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，$\varphi : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为单位的 *-同态。则存在唯一的关于 $(\Omega, \mathcal{H})$ 的谱测度 E 满足*

$$\varphi(f) = \int fdE \quad (f \in \mathcal{C}(\Omega)).$$

此外，φ 可以延拓为映射 Φ，满足

$$\Phi : \mathcal{B}_\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad f \longmapsto \int fdE$$

是单位的 *-同态。

若 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则对于所有的 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ 有 U 和 $\varphi(f)$ 可交换当且仅当对于所有的 Ω 的 Borel 子集 S 有 U 和 $E(S)$ 可交换。

Proof. 若 $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则函数

$$\tau_{x,y} : \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto \langle \varphi(f)x, y \rangle$$

是线性的，且有 $||\tau_{x,y}|| \leq ||x|| \cdot ||y||$。由 Riesz-Kakutani 定理，存在唯一的 $\mu_{x,y} \in M(\Omega)$，使得对于任意的 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ 有 $\tau_{x,y}(f) = \int fd\mu_{x,y}$。此外， ■

4.2 Spectral Theorem and Applications

***Theorem* 4.2.1** *设 U 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界正规算子，则*

(1) 存在唯一的关于 $(\sigma(U),\mathcal{H})$ 的谱测度 E 使得 $U=\int zdE$，其中 z 为由 $\sigma(U)$ 到 $\mathbb{C}$ 的包含映射；

(2) 若 G 是 $\sigma(U)$ 的非空相对开集，则 $E(G)\neq 0$；

(3) 若 $A\in B(\mathcal{H})$，则 $AU=UA$ 且 $AU^*=U^*A$ 当且仅当对于 $\sigma(U)$ 的每个 Borel 子集，有 $AE(\Delta)=E(\Delta)A$。

Proof. (1) 由定理 3.1.4，设 $\varphi:\mathcal{C}(\sigma(U))\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 U 处的函数演算，则 φ 是单位的 *-同态。由定理 4.1.5 可知存在唯一的关于 $(\sigma(U),\mathcal{H})$ 的谱测度 E 满足

$$\varphi(f)=\int fdE \quad (f\in\mathcal{C}(\sigma(U))).$$

特别的，有

$$U=\varphi(z)=\int zdE.$$

设 E' 为另一个使得 $U=\int zdE'$ 的关于 $(\sigma(U),\mathcal{H})$ 的谱测度，则 $\int zdE'=\int zdE$。又有

$$\int 1dE'=\int\chi_{\sigma(U)}dE'=E'(\sigma(U))=I=\int 1dE,$$

而由 1 和 z 可生成 $\mathcal{C}(\sigma(U))$，故得

$$\int fdE'=\int fdE=\varphi(f),\quad \forall f\in\mathcal{C}(\sigma(U)).$$

从而由 E 唯一性得 $E=E'$。

(2) 若 G 是 $\sigma(U)$ 的非空相对开集，则由 Uryson 定理，存在非零的 $f_0\in\mathcal{C}(\sigma(U))$，满足 $0<f_0\leq\chi_G$。因此，由定理 4.1.5 可知 $E(G)=\Phi(\chi_G)\geq\Phi(f_0)=\varphi(f_0)>0$，故 $E(G)\neq 0$。

(3) 设 $A\in B(\mathcal{H})$。若 $AU=UA$，$AU^*=U^*A$，即 $A\varphi(z)=\varphi(z)A$，$A\varphi(\overline{z})=\varphi(\overline{z})A$，则对任一多项式 $p_n(z,\overline{z})$ 有 $A\varphi(p_n(z,\overline{z}))=Ap_n(U,U^*)=p_n(U,U^*)A=\varphi(p_n(z,\overline{z}))A$。由 Stone-Weierstrass 定理可知 $\mathcal{C}(\sigma(U))$ 为 $z,\overline{z}$ 的线性生成空间，故由 φ 为单位的 *-同态知对于每个 $f\in\mathcal{C}(\sigma(U))$，有

$Af(U) = A\varphi(f) = A\varphi(\lim_n p_n(z,\overline{z})) = A\lim_n \varphi(p_n(z,\overline{z})) = \lim_n A\varphi(p_n(z,\overline{z})) = \lim_n \varphi(p_n(z,\overline{z}))A = f(U)A$。从而由定理 4.1.5 知，对于 $\sigma(U)$ 的每个 Borel 子集有 $AE(\Delta) = E(\Delta)A$。反之，若对于 $\sigma(U)$ 的每个 Borel 子集有 $AE(\Delta) = E(\Delta)A$，则由定理 4.1.5 知对于任意的 $f \in \mathcal{C}(\sigma(U))$，$U$ 和 $\varphi(f)$ 可交换。特别的，对于 $z,\overline{z} \in \mathcal{C}(\sigma(U))$，有 $AU = A\varphi(z) = \varphi(z)A = UA$，$AU^* = A\varphi(\overline{z}) = \varphi(\overline{z})A = U^*A$。证毕。

■

定理 4.2.1 中的谱测度 E 称为 the resolution of the identity for U。

由定理 3.1.4 及定理 4.1.5 可知 $f(U) = \int fdE$，$\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(U))$。再由定理 4.1.5，可定义 $f(U) = \int fdE$，$\forall f \in \mathcal{B}_\infty(\sigma(U))$。单位的 *-同态

$$\mathcal{B}_\infty(\sigma(U)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad f \mapsto f(U)$$

称为 U 处的 Borel 函数演算。

下面给出谱定理的几个应用和著名的 Fuglede-Putnam 定理。

Propostion 4.2.2 *若 N 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个有界的正规算子，$N = \int zdE(z)$，则 N 是紧的当且仅当对于每个 $\epsilon > 0$，$E(\{z \in \sigma(N) : |z| > \epsilon\})$ 的秩有限。*

Proof. 设 $\epsilon > 0$，令 $\Delta_\epsilon = \{z \in \sigma(N) : |z| > \epsilon\}$，$E_\epsilon = E(\Delta_\epsilon)$，$\varphi : \mathcal{B}_\infty(\sigma(N)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 N 处的 Borel 函数演算。则有

$$\begin{aligned} N - NE_\epsilon &= \int zdE(z) - \int zdE(z)\int \chi_{\Delta_\epsilon}(z)dE(z) \\ &= \varphi(z) - \varphi(z)\varphi(\chi_{\Delta_\epsilon}(z)) \\ &= \varphi(z) - \varphi(z\chi_{\Delta_\epsilon}(z)) \\ &= \varphi(z - z\chi_{\Delta_\epsilon}(z)) \\ &= \varphi(z\chi_{\mathbb{C}\setminus\Delta_\epsilon}(z)) \\ &= \varphi(\phi(z)) \\ &= \phi(N), \end{aligned}$$

其中 $\phi(z) = z\chi_{\mathbb{C}\setminus\Delta_\epsilon}(z) \in \mathcal{B}_\infty(\sigma(N))$。则由 φ 为单位 *-同态及定理 3.1.8 知

$$||N - NE_\epsilon|| = ||\phi(N)|| = ||\varphi(\phi(z))|| \leq ||\phi(z)|| = sup\{|z| : z \in \sigma(N)\setminus\Delta_\epsilon\} \leq \epsilon.$$

若对于每个 $\epsilon > 0$ 都有 $E_\epsilon = E(\{z \in \sigma(N) : |z| > \epsilon\})$ 的秩有限，则 NE_ϵ 为有限秩算子，$\forall\epsilon > 0$。从而由定理 2.4.5 及有限秩算子为紧算子可知 N 是紧的。

反之，若 N 是紧的，设 $\epsilon > 0$，令 $\phi(z) = z^{-1}\chi_{\Delta_\epsilon}(z)$，则 ϕ 是一个有界 Borel 可测函数，即 $\phi \in \mathcal{B}_\infty(\sigma(N))$。则 $\phi(N) = \varphi(\phi(z)) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，从而由 N 是紧的可知 $N\phi(N)$ 也是紧的。但 $N\phi(N) = \varphi(z)\varphi(\phi(z)) = \varphi(z\phi(z)) = \int \chi_{\Delta_\epsilon}(z)dE(z) = E_\epsilon$。则 E_ϵ 为紧的投影算子，故其秩有限（紧的投影算子限制在其像空间（亦为希尔伯特空间，因投影算子的像空间是闭的）上为紧的恒等映射，故其像空间中的单位球是紧的，从而得其像空间是有限维的）。

注：投影算子的像空间是闭的：设 P 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的投影算子，$\forall y = P(x) \in P(\mathcal{H})$，$P(y) = P(P(x)) = Px = y = Iy$，即 $(I-P)y = 0$，故 $P(\mathcal{H}) \subseteq ker(I-P)$，又 $\forall z \in ker(I-P)$，$(I-P)z = z - Pz = 0$，即 $z = Pz$，故 $z \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$，从而得 $P(\mathcal{H}) = ker(I-P)$，而 $I - P$ 为 $\mathcal{H}$ 上的连续线性算子，故 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 是闭的。

■

***Theorem* 4.2.3** *若希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是可分的，$\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的含有非紧的算子的理想，则 $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$。*

Proof. 设 $A \in \mathcal{I}$，A 不紧，则由极化分解可知 $|A|$ 不紧，则 $A^*A = |A|^2$ 亦不是紧算子，否则 $|A| = |A|(A^*A)$ 亦为紧算子，矛盾。现考虑 A^*A，令 $A^*A = \int zdE(z)$。则由命题 4.2.2 知存在 $\epsilon > 0$，使得 $P = E(\Delta_\epsilon)$ 的秩无限，其中 $\Delta_\epsilon = \{z \in \sigma(A^*A) : |z| > \epsilon\}$。但因 $\mathcal{H}$ 是可分的，故 $dim\ P(\mathcal{H}) = dim\ \mathcal{H} = \aleph_0$（$\aleph_0$ 为可列集的基数）。设 $U : \mathcal{H} \to P(\mathcal{H})$ 为等距同构（存在性：不同的可分希尔伯特空间都是等距同构的，而投影算子 P 的像空间 $P(\mathcal{H})$ 亦为希尔伯特空间）。可以验证 $I = U^*PU$。但 $P = E(\Delta_\epsilon) = \int \chi_{\Delta_\epsilon}(z)dE(z) = \int zdE(z) \int z^{-1}\chi_{\Delta_\epsilon}(z)dE(z) = A^*A(\int z^{-1}\chi_{\Delta_\epsilon}(z)dE(z)) \in \mathcal{I}$，故 $I \in \mathcal{I}$。因此有 $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$。■

由定理 3.4.5 和定理 3.4.7 及 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的闭理想可得如下推论：

***Corollary* 4.2.4** *若 $\mathcal{H}$ 是可分的，则 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的唯一的非平凡的闭理想为 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$。*

***Propostion* 4.2.5** *若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个 $S.O.T$（强算子拓扑）闭 C^*-子代数，则 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的投影的范数闭线性生成空间。*

Proof. 若 $A \in \mathcal{A}$，则 $\frac{A+A^*}{2}, \frac{A-A^*}{2i} \in \mathcal{A}_{sa}$，而 $A = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2i}$，故 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}_{sa}$ 的线性生成空间。设 $A = \int tdE(t)$。若 $[a,b] \subset \mathbb{R}$，则存在定义在 $\mathbb{R}$ 上

的函数序列 $\{u_n\}$，满足当 n 充分大时有 $0 \le u_n \le 1$，

$$u_n(t) = \begin{cases} 1 & a \le t \le b - \frac{1}{n}, \\ 0 & t \le a - \frac{1}{n}, t \ge b, \\ \text{线性} & a - \frac{1}{n} \le t \le a, b - \frac{1}{n} \le t \le b. \end{cases}$$

则有 $u_n(t) \to \chi_{[a,b)}(t)$，$n \to \infty$，$\forall t \in \mathbb{R}$。若 $h \in \mathcal{H}$，则

$$\begin{aligned} ||u_n(A)h - E[a,b)h||^2 &= \langle \big[u_n(A) - E[a,b)\big]h, \big[u_n(A) - E[a,b)\big]h \rangle \\ &\quad (u_n(A) \text{ 和 } E[a,b) \text{ 都是正规算子}) \\ &= \langle \big[u_n(A) - E[a,b)\big]^2 h, h \rangle \\ &= \langle \big[\textstyle\int u_n(t)dE(t) - \int \chi_{[a,b)}(t)dE(t)\big]^2 h, h \rangle \\ &= \langle \big[\textstyle\int (u_n(t) - \chi_{[a,b)}(t))dE(t)\big]^2 h, h \rangle \\ &= \langle \textstyle\int |u_n(t) - \chi_{[a,b)}(t)|^2 dE(t)\, h, h \rangle \\ &= \textstyle\int |u_n(t) - \chi_{[a,b)}(t)|^2 dE_{h,h}(t) \\ &\longrightarrow 0 \quad (\text{控制收敛定理}). \end{aligned}$$

由此即得 $u_n(A)$ 按强算子拓扑收敛于 $E[a,b) = E([a,b) \cap \sigma(A))$。因 $\mathcal{A}$ 按强算子拓扑是闭的，故 $E[a,b) \in \mathcal{A}$。现设 (α, β) 为包含 $\sigma(A)$ 的开区间。若 $\epsilon > 0$，则存在分割 $\alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$，满足 $|t - \sum_{k=1}^n t_k \chi_{[t_{k-1},t_k)}(t)| < \epsilon$，$\forall t \in \sigma(A)$。则 $t - \sum_{k=1}^n t_k \chi_{[t_{k-1},t_k)}(t)$ 作为 $\sigma(A)$ 上的有界 Borel 可测函数，其范数 $||t - \sum_{k=1}^n t_k \chi_{[t_{k-1},t_k)}(t)|| \le \epsilon$。因此由 Borel 函数演算为单位 *-同态可知

$$||A - \sum_{k=1}^n t_k E[t_{k-1}, t_k)|| \le ||t - \sum_{k=1}^n t_k \chi_{[t_{k-1},t_k)}(t)|| \le \epsilon.$$

由 ϵ 任意性即得 $\mathcal{A}$ 中的自伴算子 A 属于 $\mathcal{A}$ 中的投影的范数闭线性生成空间。从而由 A 任意性得 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 中的投影的范数闭线性生成空间。 ■

Theorem 4.2.6 *（Fuglede-Putnam）. 若 N 和 M 分别为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 上的有界正规算子，$B : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ 为满足 $NB = BM$ 的有界线性映射，则有 $N^*B = BM^*$。*

Proof. 由假设可知 $N^k B = BM^k$，$\forall k \in \mathbb{N}_+$（$N^k B = N^{k-1}(NB) = N^{k-1}(BM) = (N^{k-1}B)M$，$\forall k \ge 2$）。因此，若 $p(z)$ 为多项式，则 $p(N)B = Bp(M)$。对于给定的 $z \in \mathbb{C}$，有 $e^{i\bar{z}N}$ 和 $e^{i\bar{z}M}$ 分别为 N 和 M 的多项式的

极限，故得 $e^{i\overline{z}N}B = Be^{i\overline{z}M}$，$\forall z \in \mathbb{C}$。即得 $B = e^{-i\overline{z}N}Be^{i\overline{z}M}$，$\forall z \in \mathbb{C}$。定义 $f : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, $z \mapsto e^{-izN^*}Be^{izM^*}$，则有

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-izN^*}Be^{izM^*} \\ &= e^{-izN^*}(e^{-i\overline{z}N}Be^{i\overline{z}M})e^{izM^*} \\ &= e^{-izN^*}e^{-i\overline{z}N}Be^{i\overline{z}M}e^{izM^*} \\ &= e^{-i(zN^*+\overline{z}N)}Be^{i(\overline{z}M+zM^*)} \quad (N \text{ 和 } M \text{ 正规，定理 } 2.2.17). \end{aligned}$$

但对于每个 $z \in \mathbb{C}$，$zN^* + \overline{z}N$ 和 $\overline{z}M + zM^*$ 都是 hermitian 元，故 $e^{-i(zN^*+\overline{z}N)}$ 和 $e^{i(\overline{z}M+zM^*)}$ 都是酉元。因此，$||f(z)|| \leq ||e^{-i(zN^*+\overline{z}N)}|| \cdot ||B|| \cdot ||e^{i(\overline{z}M+zM^*)}|| = ||B||$，$\forall z \in \mathbb{C}$。则 f 为从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ 的有界整函数，从而由刘维尔定理可知 f 为常数。因此 $\forall z \in \mathbb{C}$，有

$$0 = f'(z) = (e^{-izN^*}Be^{izM^*})' = -iN^*e^{-izN^*}Be^{izM^*} + ie^{-izN^*}BM^*e^{izM^*},$$

取 $z = 0$，即得 $0 = -iN^*B + iBM^*$，故有 $N^*B = BM^*$。 ■