震源反演小结

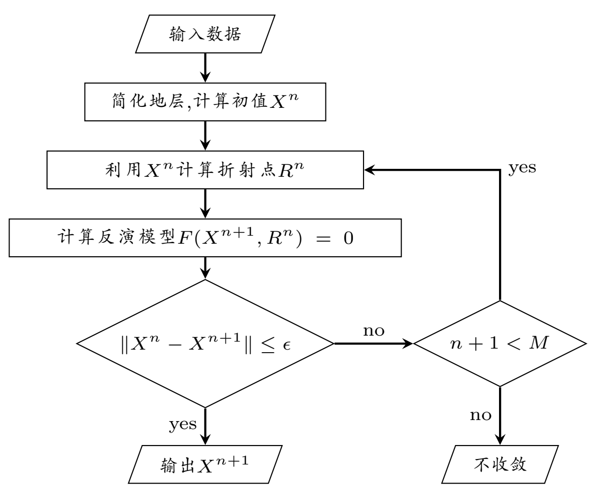
赵书博

March 9, 2021

1 问题介绍

- **Input:**
  1. $D = \{d^k\}$ 检波器坐标;
  2. $T = \{t^k\}$ 检波器拾取的到时;
  3. $L = \{l_i\}$ 地层界面(数据或者函数形式);
  4. $V = \{v_i\}$ 地层速度(**假设波在同一层地层的速度为常数**);
- **Output:**
  1. $X = (x, y, z)$ 震源坐标
- **Note:**
  1. 地层界面一般不是平面;
  2. 地震波在地层界面处会发生折射现象;

2 算法流程



3 震源反演

3.1 获取初值

假设地层为均匀地质, 通过对地震波信号处理, 获取平均速度$\overline{v}$. 根据检波器到时与震源地震信号之间的关系, 有等式

$$(x^k-x)^2+(y^k-y)^2+(z^k-z)^2=\overline{v}^2(t^k-t)^2,\quad k=1,\cdots,N, \tag{3.1}$$

N为检波器个数.

将方程组 (3.1)两两做差化简为线性超定方程组

$$2(x^k-x^l)x+2(y^k-y^l)y+2(z^k-z^l)z-2\overline{v}^2(t^k-t^l)t=f^k,\quad k,l=1,\cdots,N. \tag{3.2}$$

其中$f^k=((x^k)^2-(x^l)^2)+((y^k)^2-(y^l)^2)+((z^k)^2-(z^l)^2)-\overline{v}^2((t^k)^2-(t^l)^2)$. 利用最小二乘方法求解方程组 (3.2),得到初值X^0.

3.2 射线追踪

3.2.1 输入与输出

假设震源X已知

- **Input:**
  1. X 震源坐标
  2. $D=\{d^k\}$ 检波器坐标
  3. $L=\{l_i\}$ 地层函数
  4. $V=\{v_i\}$ 地层速度
- **Output:**
  1. $R=\{r^k\}$ 折射点坐标

3.2.2 算法原理

- **Fermat原理(最短走时原理)**

光在任意介质中从一点传播到另一点时,沿所需时间最短的路径传播.

- **Snell定律**

光入射到不同介质的界面上会发生反射和折射。其中入射光和折射光位于同一个平面上，并且与界面法线的夹角满足如下关系：

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2},$$

其中θ_1和θ_2分别是入射角和折射角, v_1和v_2分别是光在两个介质的传播速度.

首先, 考虑一条射线与一个地层界面相交的情况: 令$r=(r_x,r_y,l(r_x,r_y))$为地层折射点坐标, $d=(d_x,d_y,d_z)$为检波器坐标，$X=(x,y,z)$为震源坐标, v_1和v_2表示两个地层的传播速度, 则地震波的旅时函数可以表示为$\overline{T}(r)$:

$$\overline{T}(r)=\frac{s_1(r)}{v_1}+\frac{s_2(r)}{v_2}$$

其中$s_1(r)=\|r-d\|=\sqrt{(r_x-d_x)^2+(r_y-d_y)^2+(l-d_z)^2}$, $s_2(r)=\|X-r\|=\sqrt{(x-r_x)^2+(y-r_y)^2+(z-l)^2}$.

根据Fermat原理,

$$\frac{d\overline{T}}{dr}(r_x, r_y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial r_x}(r_x, r_y) = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{(r_x - d_x) + (l - d_z)l'_{r_x}}{s_1(r)} - \dfrac{1}{v_2}\dfrac{(x - r_x) + (z - l)l'_{r_x}}{s_2(r)} = 0, \\ \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial r_y}(r_x, r_y) = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{(r_y - d_y) + (l - d_z)l'_{r_y}}{s_1(r)} - \dfrac{1}{v_2}\dfrac{(y - r_y) + (z - l)l'_{r_y}}{s_2(r)} = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

可以通过拟牛顿法迭代–Broyden方法求解非线性方程组 (3.3)得到r_i.

Algorithm 1: Broyden方法

Input: Equations to be solved $F(\mathbf{x})$, initial guess $\mathbf{x}_0$, tolerance value tol, maximum iteration steps M.

Output: Approximate solution $\mathbf{x}$.

```
Compute Jacobi matrix A_0 = J(x), where J(x)_{i,j} = ∂F_i/∂x_j (x);
f_0 ← F(x_0);
invA ← A_0^{-1} (use Gaussian elimination);
x_1 ← x_0 − invA * f_0 ;
k ← 1;
while k < M do
    f_1 ← F(x_k);
    y ← f_1 − f_0;
    s ← −invA * f_1;
    invA ← invA + ((s − invA * y) * s^T * invA) / (s^T * invA * y);
    t ← −invA * f_1;
    x_{k+1} ← x_k + t;
    if |t| < tol then
        break;
    else
        f_0 ← f_1;
    end
end
return x_{k+1};
```

针对多地层情况，我们采取分段迭代射线追踪算法，

Algorithm 2: 分段迭代射线追踪

Input: velocity $= \{v_i \mid v_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n, i \in \mathbb{N}^+\} \in \mathbb{R}^n$,
layer$= \{l_i \mid l_i : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}, 1 \le i \le n, i \in \mathbb{N}^+\}$,
$X \in \mathbb{R}^d$, $d_i \in \mathbb{R}^d$, $M \in \mathbb{N}^+$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$

Output: $R = \{r_i \mid r_i \in \mathbb{R}^d, 1 \le i \le m, i \in \mathbb{N}^+\}$

```
source ← X
detector ← d_i
[initialPoint,relatedVelocity] ← computeInitialGuess(source,detector,layer)
for j = 1 : M do
    initialPoint0 ← initialPoint
    for i = 1 : numLay do
        iterPoint ← initialPoint(i, i + 1, i + 2)
        iterVelocity ← relatedVelocity(i, i + 1)
        iterLayer ← layer(i)
        refPoint ← computeSingleRefPoint(iterPoint,iterVelocity,iterLayer)
        initialPoint(i+1) ← refPoint
        if |initialPoint − initialPoint0| ≤ ϵ then
            break
        end
    end
end
```

取检波器与震源连成的直线段与地层的交点作为迭代的初值。

3.3 反演模型

假设已知所有的射线路径，$\bar{t}_i^k$为k条射线在第i个地层的旅时，

$$S^k(X) = \sum_{i=1}^{n_k+1} v_i \bar{t}_i^k, \tag{3.4}$$

其中

$$S^k(X) = |d^k - r_1^k(X)| + \sum_{i=1}^{n_k-1} |r_{i+1}^k(X) - r_i^k(X)| + |r_{n_k}^k(X) - X|. \tag{3.5}$$

3.3.1 旅时分割

根据分段旅时和总旅时的关系，以及分段地层旅时与地层传播速度的关系，可以得到

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_k+1} \bar{t}_i^k = T^k \\ \bar{t}_i^k = \frac{|r_i^k - r_{i+1}^k|}{v_i} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \bar{t}_i^k(X) = c_i^k(X) T^k. \tag{3.6}$$

将$\bar{t}_i^k(X) = c_i^k(X) T^k$代入 (3.4)得到

$$S^k(X) = \sum_{i=1}^{n_k+1} v_i \left(c_i^k(X) T^k\right) = \left(\sum_{i=1}^{n_k+1} v_i c_i^k(X)\right) T^k = V^k(X) T^k = V^k(X)(t^k - t) \tag{3.7}$$

将方程 (3.7)两边同乘V^l，消去未知数t，得到

$$V^l S^k - V^k S^l - V^l V^k (t^l - t^k) = 0, \quad l \le k. \tag{3.8}$$

记方程组 (3.8)为

$$G(X) = 0. \tag{3.9}$$

其中, $G(X) = \{g_i\}_{i=1}^{m}$. 最终求解超定非线性系统 (3.9),得到震源X.