三维般集程序进展

谭焱, 邱云昊

September 15, 2022

提纲

1. 程序背景
2. 程序进展
   - 程序架构
   - 计算非流形点的优化
   - 粘合模块的修改
3. 后续工作

股集研究背景

- 多相流中的几何和拓扑问题是求解动边界偏微分方程的核心问题.
- 现有方法对界面的几何和拓扑问题进行回避, 导致了:
  1. 对等距变换的流场不能保证几何性质.
  2. 对同胚映射的流场不能保证拓扑性质.
  3. 精度最高为二阶精度.
  4. 很难对拓扑变化进行严格的处理.
- 我们的核心思想是用几何和拓扑的手段研究几何和拓扑的问题, 其中首要工作在于股集对流相建模.

二维骰集

- 骰集: 空间中边界有界的正则半解析开集. 所有骰集构成的集合被称为骰空间, 记为 $\mathbb{Y}$.
- 二维空间中, 任一个骰集可以唯一表示为

$$\mathcal{Y} = \cup_j^{\perp\perp} \cap_i \mathrm{int}(\gamma_{j,i}),$$

约当曲线 $\gamma_{j,i}$ 是 $\mathcal{Y}$ 内第 j 个连通分量的第 i 条边界.

- 实现了骰集上的布尔代数.

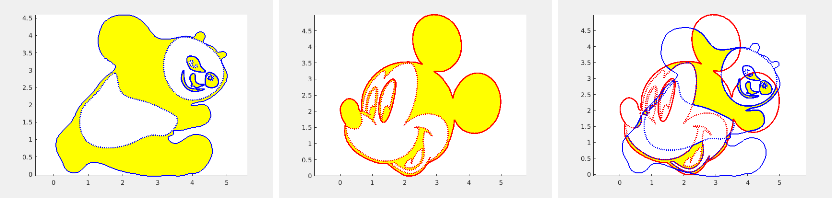
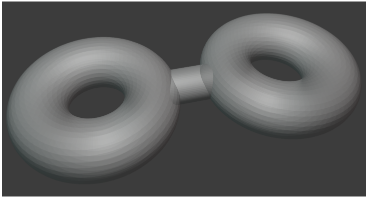
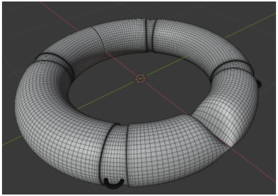


Figure 1: 二维骰集的交

三维骰集

- 二流形的分类定理
  有向的紧二流形是同胚于球或者圆环或它们的有限个连通和.

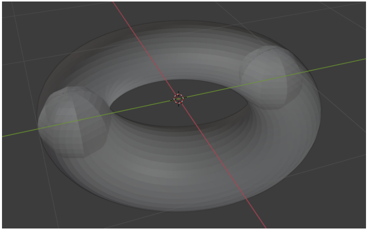
- 黏合紧曲面是一个二维连通紧流形或这种流形的商空间, 其商映射将多个与一维 CW 复形同胚的子集粘在一起; 将这个一维子集删除后该黏合紧曲面仍然是连通的.

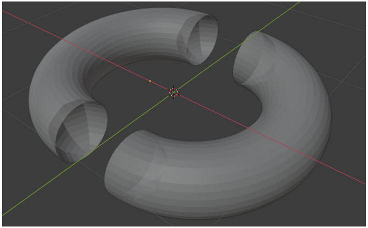
三维殷集的唯一表示

- 任一个殷集 $\mathcal{Y} \in \mathbb{Y}$ 可以唯一表示为

$$\mathcal{Y} = \cup_j^{\perp\perp} \cap_i \mathrm{int}(\Gamma_{j,i}),$$

  黏合紧曲面 $\Gamma_{j,i}$ 是 $\mathcal{Y}$ 的第 j 个连通分量的第 i 个边界.
- 唯一表示中每个内部是有界区域的黏合紧曲面对应一个连通分量.
- 连通分量的边界中每个内部无界的曲面对应连通分量闭包的洞.





程序的实现方式

- 实现步骤
  1. 计算般集边界上的所有非流形点.
  2. 沿非流形点剪开黏合紧曲面得到若干曲面片.
  3. 根据交并补的需要删除曲面片或改变曲面片方向.
  4. 将曲面片重新粘合成黏合紧曲面集合.
  5. 黏合紧曲面集合唯一表示一个三维般集作为布尔运算结果.
- 代码模块
  1. class TriangleIntersection.
  2. class Triangulation. 找到非流形点.
  3. class Prepast. 生成曲面片.
  4. class RemoveOverlap.
  5. class Locate. 恰当的保留曲面片.
  6. class Past. 生成黏合紧曲面.
  7. YinSet(). 构造般集.

时间瓶颈分析

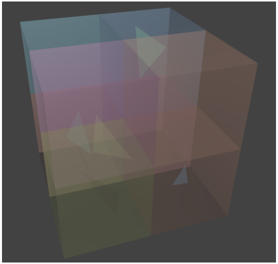
- 求交运算在同一图形的不同加密次数的模型上计算时间.

三角形/个	三角形求交/秒	Ratio	三角化/秒	Ratio	总时间	Ratio
2.11×10^3	5.52×10^{-1}		1.63×10^{-1}		7.63×10^{-1}	
3.46×10^4	1.04×10^2	1.87	2.33×10^0	0.95	1.07×10^2	1.76
1.14×10^5	1.26×10^3	2.09	7.66×10^0	0.99	1.27×10^3	2.07
3.59×10^5	1.28×10^4	2.02	2.42×10^1	1.00	1.29×10^4	2.02
5.39×10^5	2.89×10^4	2.00	3.59×10^1	0.97	2.90×10^4	1.99

- 计算时间过长, 瓶颈在三角形求交, 需求时间复杂度更低的求交算法.
- 三角化的时间复杂度达到理论最优的 O(1),.

使用空间划分降低求交计算时间度

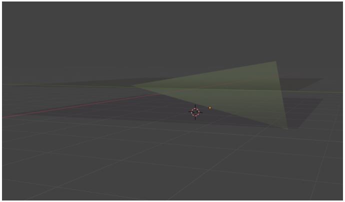
- 三角形相交局部发生, 将三角形划分到不同的局部降低计算量.

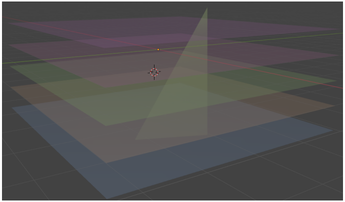


三角形/个	俩俩求交/秒	Ratio	空间划分/秒	Ratio
2.11×10^3	5.52×10^{-1}		4.26×10^{-1}	
3.46×10^4	1.04×10^2	1.87	5.14×10^0	0.89
1.14×10^5	1.26×10^3	2.09	1.36×10^1	0.82
3.59×10^5	1.28×10^4	2.02	3.44×10^1	0.80
5.39×10^5	2.89×10^4	2.00	4.85×10^1	0.84

针对骰集与网格求交优化

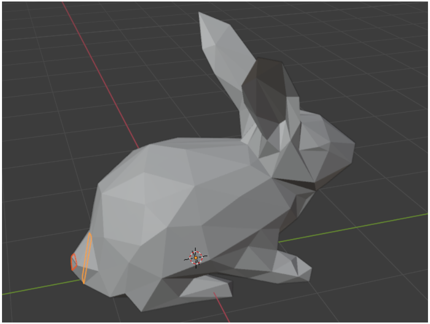
- 有限体积法基于网格的控制体, 求解需大量控制体和计算域求交.
- 不妨假设三角形与至多常数 N 个网格面相交.
- 计算复杂度从 $O(n_1 * n_2)$ 降为 $O(n_2)$.
- 只需替换 TriangleIntersection 模块.

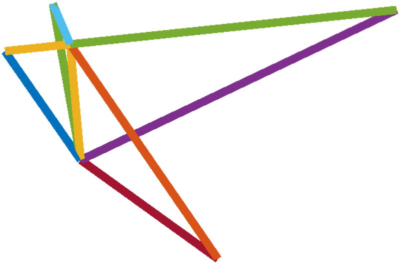




原 Past 方法的问题

- 原 Past 方法只证明了能将骰集正确黏合.
- 无法检测到一些疑似骰集的非骰集输入.

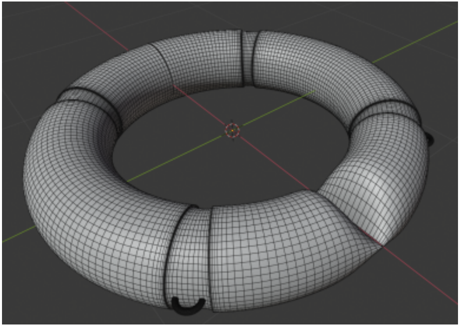




黏合紧曲面的性质

Theorem 3.5 (Jordan Curve Theorem [14]). *The complement of a Jordan curve γ in the plane $\mathbb{R}^2$ consists of two components, each of which has γ as its boundary. One component is bounded and the other is unbounded; both of them are open and path-connected.*

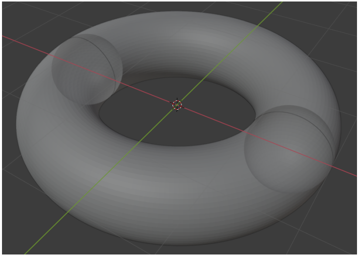
- 黏合紧曲面同样拥有类似性质.

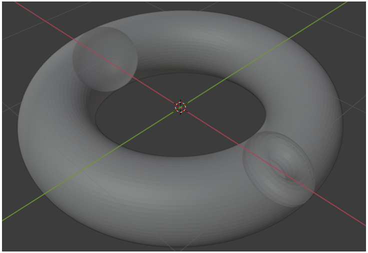


生成黏合紧曲面的方法

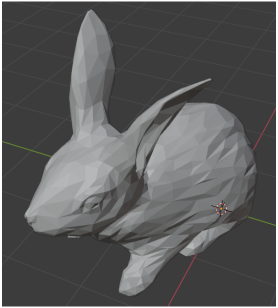
定义 2.18. 广义扇形的**好配对**定义为将这些扇形两两配对，使得不存在两对 (F,F') 和 (G,G') 有恰当交。

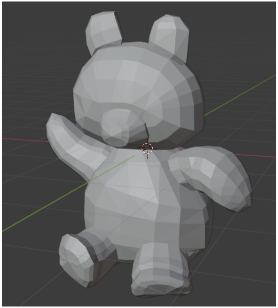
- 好配对粘合可以得到一个连通分量的边界.
- 正向好配对粘合再反向好配对粘合得到黏合紧曲面.
- 该方法检测到 Rabbit 不为殷集.

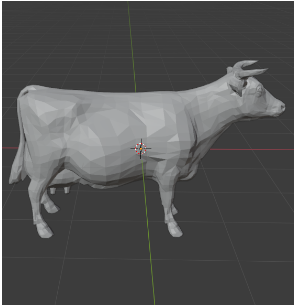




现有测试模型的问题







1. Rabbit 与 Teddy 内部洞边界的方向朝外.
2. cow 尾部有不可定向的曲面片.
3. 缺乏几何结构复杂的骰集测试模型.

后续工作方向

- 增加测试样例.
  1. 熟悉已完成的三维股集表面建模程序.
  2. 截取简单股集模型在复杂流场运行一段时间后的股集.
  3. 使用 blender 构建拓扑结构复杂的模型.
  4. 验证程序的正确性.
- 分析优化计算非流形点.
  1. 分析布尔运算程序速度是否为瓶颈.
  2. 检索更优的三角形求交和三角化算法.
- 重构现有程序.

请老师同学批评指正！