Chapter 4

Homework 21935004 谭焱

Exercise 4.1. 证 φ 是自然, 即 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 连续, 则有交换图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{H}_1(X) \\ \downarrow h_* & & \downarrow h_\# \\ \pi_1(Y,y_0) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{H}_1(Y) \end{array}$$

Solution. 令 $f:I\to X$ 是 X 中 x_0 处一条闭道路,$\eta:\Delta^1\to I$ 是同胚 $(1-t)e_0+te_1\mapsto t$. 则

$$\varphi\circ h_*([f])=\varphi([h\circ f])=\operatorname{cls} h\circ f\circ\eta$$
$$h_\#\circ\varphi([f])=h_\#(\operatorname{cls} f\circ\eta)=\operatorname{cls} h\circ f\circ\eta$$

所以交换图表成立.

Exercise 4.2. 如果 f 是 X 上一条道路,f^{-1} 是逆道路, 则存在 $\zeta\in S_2(X)$

$$使\partial\zeta=f\circ\eta+f^{-1}\circ\eta$$

Solution. 定义 $\Delta^2\to X$ 上的 σ 满足 $\sigma(1-t,t,0)=f(t),\sigma(0,1-t,t)=f^{-1}(t),\sigma(1-t,0,t)=(f*f^{-1})(t)$. 然后在 Δ 任一点定义 σ, 令 σ 在点 $a=a(t)=(1-t,t,0)$ 和点 $b=b(t)=((2-t)/2,0,t/2)$ 之间是常数, 在点 $c=c(t)=(0,1-t,t)$ 和点 $d=d(t)=((1-t)/2,0,(1+t)/2)$ 之间是常数. 因为 $f(1)=f^{-1}(0)$, 可以检验如此定义的 $\sigma:\Delta^2\to X$ 是连续的, 所以 $\sigma\in S_2(X)$. 并且由于 $[f*f^{-1}]=[i_p]$(p 是路径f的终点), 因此令 $\zeta=\sigma$

$$\partial\zeta=\zeta\varepsilon_0-\zeta\varepsilon_1+\zeta\varepsilon_2=f\circ\eta+f^{-1}\circ\eta-i_p\circ\eta=f\circ\eta+f^{-1}\circ\eta$$

Exercise 4.3. 设 X 是拓扑空间,α,β 是两道路且 $\alpha(1)=\beta(0),\alpha(0)=\beta(1)$, 则 $\varphi([a*\beta])=\operatorname{cls}(\alpha\circ\eta+\beta\circ\eta)$.

Solution. 类似 Exercise 4.2 定义 $\sigma:\Delta^2\to X$, 使得 $\sigma(1-t,t,0)=\alpha(t),\sigma(0,1-t,t)=\beta(t),\sigma(1-t,0,t)=(\alpha*\beta)(t)$. 并且令 σ 在点 $a=a(t)=(1-t,t,0)$ 和点 $b=b(t)=((2-t)/2,0,t/2)$ 之间是常数, 在点 $c=c(t)=(0,1-t,t)$ 和点 $d=d(t)=((1-t)/2,0,(1+t)/2)$ 之间是常数. 因为 $\alpha(1)=\beta(0)$, 验证可得 σ 连续. 取边界 $\partial\sigma=\sigma\varepsilon_0-\sigma\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2=\alpha\circ\eta-(\alpha*\beta)\circ\eta+\beta\circ\eta$. 又因为 $\partial\sigma\in B_1(X)$ 和 $\alpha(0)=\beta(1),\beta(0)=\alpha(1)$ 可得 $\alpha*\beta$ 是 X 上闭道路, 即 $[\alpha*\beta]\in\pi_1(X,x_0),x_0=\alpha(0)$. 综上

$$\varphi([\alpha*\beta])=\varphi([\alpha*\beta])+\partial\sigma=\operatorname{cls}((\alpha*\beta)\circ\eta+\alpha\circ\eta-(\alpha*\beta)\circ\eta+\beta\circ\eta)=\operatorname{cls}(\alpha\circ\eta+\beta\circ\eta)$$