Chapter 1

Homework 21935004 谭焱

1.1 第五次作业

Exercise 1.1. f 是 Abel 群 $\mathbf{G}$ 到 Abel 群 $\mathbf{G}'$ 的同态,$\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H}'$ 分别 1 是 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}'$ 的子群, 且 $f(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}'$. 则可以定义

$$\widetilde{f}: \begin{aligned} &\mathbf{G/H} \to \mathbf{G'/H'} \\ &\mathbf{x+H} \mapsto \mathbf{f(x)+H'}. \end{aligned}$$

同态 (合理且同态).

Solution. 合理的: 对于 $\forall h \in \mathbf{H}, \widetilde{f}(x+h+\mathbf{H}) = f(x+h)+\mathbf{H}' = f(x)+f(h)+\mathbf{H}' = f(x)+\mathbf{H}' = \widetilde{f}(x+\mathbf{H})$. 所以 $\widetilde{f}$ 将 x 和 $x+h, \forall h \in \mathbf{H}$ 映射到同一个值, 所以是合理的.

同态: $\forall x, y \in \mathbf{G/H}$, $\widetilde{f}(xy+\mathbf{H}) = f(xy)+\mathbf{H}' = f(x)f(y)+\mathbf{H}' = \widetilde{f}(x+\mathbf{H})\widetilde{f}(y+\mathbf{H})$

Exercise 1.2. 对于每个 $n \geq 0, \mathbf{S}_n : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ 是一个函子.

Solution. 对象 $\mathbf{S}_n$ 已定义为 $\mathbf{S}_n(\mathbf{X})$. 如果函数 $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 是连续的. 定义 $\mathbf{S}_n(f) : \mathbf{S}_n(\mathbf{X}) \to \mathbf{S}_n(\mathbf{Y}), x_n \mapsto f(x_n)$. 由 f 的连续性 $f(x_n) = f \circ x_n : \Delta^n \to \mathbf{Y}$ 是一个连续映射 $\sigma : \Delta^n \to \mathbf{Y}$, 即定义是合理的. 当 $f = 1_{\mathbf{X}}$ 时 $\mathbf{S}_n(f)(x_n) = f(x_n) = f \circ x_n = x_n$ 是恒等映射. 并且 $\mathbf{S}_n(fg)(x_n) = (f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = \mathbf{S}_n(f)\mathbf{S}_n(g)(x_n)$. 因此 $\mathbf{S}_n$ 是一个函子.