Chapter 1

Homework 21935004 谭焱

1.1 第五次作业

Exercise 1.1. f 是 Abel 群 $\mathbf{G}$ 到 Abel 群 $\mathbf{G}'$ 的同态,$\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H}'$ 分别 1 是 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}'$ 的子群, 且 $f(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}'$. 则可以定义

$$\widetilde{f}: \begin{aligned} &\mathbf{G}/\mathbf{H} \to \mathbf{G}'/\mathbf{H}' \\ &\mathbf{x} + \mathbf{H} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}'. \end{aligned}$$

同态 (合理且同态).

Solution. 合理的: 对于 $\forall h \in \mathbf{H}, \widetilde{f}(x + h + \mathbf{H}) = f(x+h)+\mathbf{H}' = f(x)+f(h)+\mathbf{H}' = f(x)+\mathbf{H}' = \widetilde{f}(x+\mathbf{H})$. 所以 $\widetilde{f}$ 将 x 和 $x + h, \forall h \in \mathbf{H}$ 映射到同一个值, 所以是合理的.

同态: $\forall x, y \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$, $\widetilde{f}(xy + \mathbf{H}) = f(xy) + \mathbf{H}' = f(x)f(y) + \mathbf{H}' = \widetilde{f}(x + \mathbf{H})\widetilde{f}(y + \mathbf{H})$

Exercise 1.2. 对于每个 $n \geq 0, \mathbf{S}_n : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ 是一个函子.

Solution. 对象 $\mathbf{S}_n$ 已定义为 $\mathbf{S}_n(\mathbf{X})$. 如果函数 $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 是连续的. 定义 $\mathbf{S}_n(f) : \mathbf{S}_n(\mathbf{X}) \to \mathbf{S}_n(\mathbf{Y}), x_n \mapsto f(x_n)$. 由 f 的连续性 $f(x_n) = f \circ x_n : \Delta^n \to \mathbf{Y}$ 是一个连续映射 $\sigma : \Delta^n \to \mathbf{Y}$, 即定义是合理的. 当 $f = 1_{\mathbf{X}}$ 时 $\mathbf{S}_n(f)(x_n) = f(x_n) = f \circ x_n = x_n$ 是恒等映射. 并且 $\mathbf{S}_n(fg)(x_n) = (f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = \mathbf{S}_n(f)\mathbf{S}_n(g)(x_n)$. 因此 $\mathbf{S}_n$ 是一个函子.

1.2 第六次作业

Exercise 1.3. X 是拓扑空间. $\sigma : \Delta^1 \to X$ 连续, 直接写出 $P_1^X(\sigma)$ 的定义.

Solution. 令 $\beta_2 = [a_0, b_0, b_1] - [a_0, a_1, b_1], a_i = (e_i, 0), b_i = (e_i, 1)$. 则 $\beta_2 : \Delta_2 \to X \times I, X = [e_1, e_2]$. 对 $\forall e \in \Delta^2, e = (1-t)[e_0, e_1] + te_2$, 定义 $P_1^X(\sigma) : \Delta^2 \to X \times I, t \mapsto (\sigma \times t)_\#\beta_2$, 然后线性拓展得到 $S_1(X)$ 上的全定义 $P_0^X : S_1(X) \to S_2(X \times I)$. 下面验证满足两个条件. 令 δ 为 Δ^1 上的恒等映射.

$P_1^X\sigma_\#(\delta) = P_1^X(\sigma \circ \delta) = P_1^X(\sigma) : t \mapsto (\sigma \times t)_\#\beta_2$;

$(\sigma \times 1)_\# P_1^{\Delta^1}(\delta) : t \mapsto (\sigma \times 1)_\#(\delta \times t)_\#\beta_2 = (\sigma \circ \delta \times t)_\#\beta_2 = (\sigma \times t)_\#\beta_2 = P_1^X\sigma_\#(\delta)$;

$$\begin{aligned}
&(\partial_2 P_1^X + P_0^X\partial_1)(\sigma) \\
&= (\partial_2((\delta \times I)_\#\beta_2) + P_0^X(\partial_1(\delta)))(\sigma) \\
&= ((([b_0, b_1] - [a_0, b_1] + [a_0, b_0]) - ([a_1, b_1] - [a_0, b_1] + [a_0, a_1]) \\
&\quad + P_0^X(e_1 - e_0))(\sigma) \\
&= ([b_0, b_1] - [a_0, a_1] + [a_0, b_0] - [a_1, b_1] \\
&\quad + [(e_1, 0), (e_1, 1)] - [(e_0, 0), (e_0, 1)])(\sigma) \\
&= ([b_0, b_1] - [a_0, a_1])(\sigma) \\
&= ([(e_0, 1), (e_1, 1)] - [(e_0, 1), (e_1, 1)])(\sigma) \\
&= (\lambda_{1\#}^X - \lambda_{0\#}^X)(\sigma)
\end{aligned}$$