Chapter 4

Homework 21935004 谭焱

4.1 第七次作业

Exercise 4.1. 证 φ 是自然, 即 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 连续, 则有交换图表

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{\varphi} & H_1(X)\\ \downarrow h_* & & \downarrow h_*\\ \pi_1(Y,y_0) & \xrightarrow{\varphi} & H_1(Y)\end{array}$$

Solution. 令 $f:I\to X$ 是 X 中 x_0 处一条闭道路,$\eta:\Delta^1\to I$ 是同胚 $(1-t)e_0+te_1\mapsto t$. 则

$$\varphi\circ h_*([f])=\varphi([h\circ f])=\mathrm{cls}\,h\circ f\circ\eta$$
$$h_*\circ\varphi([f])=h_*(\mathrm{cls}\,f\circ\eta)=\mathrm{cls}\,h\circ f\circ\eta$$

所以交换图表成立.

Exercise 4.2. 如果 f 是 X 上一条道路,f^{-1} 是逆道路, 则存在 $\zeta\in S_2(X)$

$$使\partial\zeta=f\circ\eta+f^{-1}\circ\eta$$

Solution. 定义 $\Delta^2\to X$ 上的 σ 满足 $\sigma(1-t,t,0)=f(t),\sigma(0,1-t,t)=f^{-1}(t),\sigma(1-t,0,t)=(f*f^{-1})(t)$. 然后在 Δ 任一点定义 σ, 令 σ 在点 $a=a(t)=(1-t,t,0)$ 和点 $b=b(t)=((2-t)/2,0,t/2)$ 之间是常数, 在点 $c=c(t)=(0,1-t,t)$ 和点 $d=d(t)=((1-t)/2,0,(1+t)/2)$ 之间是常数. 因为 $f(1)=f^{-1}(0)$, 可以检验如此定义的 $\sigma:\Delta^2\to X$ 是连续的, 所以 $\sigma\in S_2(X)$. 并且由于 $[f*f^{-1}]=[i_p]$(p 是路径f的终点), 因此令 $\zeta=\sigma$

$$\partial\zeta=\zeta\varepsilon_0-\zeta\varepsilon_1+\zeta\varepsilon_2=f\circ\eta+f^{-1}\circ\eta-i_p\circ\eta=f\circ\eta+f^{-1}\circ\eta$$

Exercise 4.3. 设 X 是拓扑空间,α,β 是两道路且 $\alpha(1)=\beta(0),\alpha(0)=\beta(1)$, 则 $\varphi([a*\beta])=\mathrm{cls}\,(\alpha\circ\eta+\beta\circ\eta)$.

Solution. 类似 Exercise 4.2 定义 $\sigma:\Delta^2\to X$, 使得 $\sigma(1-t,t,0)=\alpha(t),\sigma(0,1-t,t)=\beta(t),\sigma(1-t,0,t)=(\alpha*\beta)(t)$. 并且令 σ 在点 $a=a(t)=(1-t,t,0)$ 和点 $b=b(t)=((2-t)/2,0,t/2)$ 之间是常数, 在点 $c=c(t)=(0,1-t,t)$ 和点 $d=d(t)=((1-t)/2,0,(1+t)/2)$ 之间是常数. 因为 $\alpha(1)=\beta(0)$, 验证可得 σ 连续. 取边界 $\partial\sigma=\sigma\varepsilon_0-\sigma\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2=\alpha\circ\eta-(\alpha*\beta)\circ\eta+\beta\circ\eta$. 又因为 $\partial\sigma\in B_1(X)$ 和 $\alpha(0)=\beta(1),\beta(0)=\alpha(1)$ 可得 $\alpha*\beta$ 是 X 上闭道路, 即 $[\alpha*\beta]\in\pi_1(X,x_0),x_0=\alpha(0)$. 综上

$$\varphi([\alpha*\beta])=\varphi([\alpha*\beta])+\partial\sigma=\mathrm{cls}\,((\alpha*\beta)\circ\eta+\alpha\circ\eta-(\alpha*\beta)\circ\eta+\beta\circ\eta)=\mathrm{cls}\,(\alpha\circ\eta+\beta\circ\eta)$$

4.2 第八次作业

Exercise 4.4. 若

$$\cdots \to C_{n+1} \to A_n \xrightarrow{h_n} B_n \to C_n \to A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} B_{n-1} \to C_{n-1} \to \ldots$$

是 Abel 群正合序列, 且 $\forall n, h_n$ 是同构, 则 C_n 是平凡群.

Solution. 令序列中 C_{n+1} 到 A_n 的映射为 i_n, 类似定义 $B_n \to C_n$ 为 p_n, 如下所示.

$$\ldots \xrightarrow{p_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{i_n} A_n \xrightarrow{h_n} B_n \xrightarrow{p_n} C_n \xrightarrow{i_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} B_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{i_{n-2}} \ldots$$

因为 h_n 是同构, 并且这是正合序列, 所以 $\ker p_n = \operatorname{im} h_n = B_n$, 即 $\operatorname{im} p_n = 0$, 由正合序列可知 $\ker i_{n-1} = 0$. 另一方面, 由于 h_{n-1} 是同构得 $\operatorname{im} i_{n-1} = \ker h_{n-1} = 0$. 因此 $\dim C_n = \ker i_{n-1} + \operatorname{im} i_{n-1} = 0$, 即 C_n 是平凡群对任意 n 成立.

Exercise 4.5. 若 $U_* \subset T_* \subset S_*$ 是链子复形, 那么存在一个链复形的短正合序列

$$0 \to T_*/U_* \xrightarrow{i} S_*/U_* \xrightarrow{p} S_*/T_* \to 0.$$

其中 $i_n \colon t_n + U_n \mapsto t_n + U_n, p_n(s_n + U_n) = s_n + T_n$.

Solution. 增加定义映射 f, h 如下所示

$$0 \xrightarrow{f} T_*/U_* \xrightarrow{i} S_*/U_* \xrightarrow{p} S_*/T_* \xrightarrow{h} 0.$$

只需验证 f, i, p, h 满足正合条件.

- $\operatorname{im} f = \ker i$

  $i(f(0)) = i(0) = 0 \Rightarrow \operatorname{im} f \subset \ker i$,

  $t_n + U_n \in \ker i, i(t_n + U_n) = t_n + U_n = U_n \Rightarrow t_n \in U_n \Rightarrow t_n + U_n = 0 + U_n = f(0)$, 即 $\ker i \subset \operatorname{im} f$.

- $\operatorname{im} i = \ker p$

  $t_n \in T_*, p(i(t_n + U_n)) = p(t_n + U_n) = t_n + T_n = 0 + T_n \Rightarrow \operatorname{im} i \subset \ker p$,

  $s_n + U_n \in \ker p, p(s_n + U_n) = s_n + T_n = T_n \Rightarrow s_n \in T_n \Rightarrow s_n + U_n \in T_n \Rightarrow s_n + U_n = i(s_n + U_n)$, 即 $\ker p \subset \operatorname{im} i$.

- $\operatorname{im} p = \ker h$

  $s_n \in S_*, h(p(s_n + U_n)) = h(s_n + T_n) = 0 \Rightarrow \operatorname{im} p \subset \ker h$,

  $s_n + T_n \in \ker h, h(s_n + T_n) = 0, p(s_n + U_n) = s_n + T_n \Rightarrow \ker h \subset \operatorname{im} p$.

Exercise 4.6. 若 f, g 是从链复形 (S'_*, ∂') 到 (S_*, ∂) 的链映射, 且 $f \simeq g$, 而 p, q 是从 (S_*, ∂) 到 (S''_*, ∂'') 的链映射, 且 $p \simeq q$. 则 $p \circ f \simeq q \circ g$.

Solution.

由书上 **Theorem 5.3** $f \simeq g \Leftrightarrow H_n(f) = H_n(g), p \simeq q \Leftrightarrow H_n(p) = H_n(q)$, 并且只需证 $H_n(p \circ f) = H_n(q \circ g)$. 因为 $H_n(f) = H_n(g), H_n(p) = H_n(q) \Rightarrow H_n(p) \circ H_n(f) = H_n(q) \circ H_n(g)$. 而又有函子性质和 $p, q \in \operatorname{Hom}(S'_*, S_*), f, g \in \operatorname{Hom}(S_*, S''_*)$, 所以 $H_n(p \circ f) = H_n(p) \circ H_n(f) = H_n(q) \circ H_n(g) = H_n(q \circ g)$. 结合 **Theorem 5.3** $p \circ f \simeq q \circ g$.