Chapter 1

数学文档

1.1 需要解决的问题

已有方程

$$-u^{''} = \exp(\sin(x))\sin(x) - \exp(\sin(x))\cos^2(x) \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 1, u(1) = \exp(\sin(1))$$

希望求解 $u(x) = \exp(\sin(x))$ 在 $(0, 1)$ 上的近似值达到一定的精确度.

1.2 求解的方法

1.2.1 离散方程

Assumption 1.1. $-v^{''}$ 可以离散为如下形式

$$\frac{-v_{j-1} + 2v_j + v_{j+1}}{h^2} \qquad 1 \leq j \leq n-1.$$

因此可以将微分方程变为方程组

$$\frac{1}{h^2}A\mathbf{v} = f(\mathbf{v})$$

其中 $\mathbf{v}$ 为 u 在离散格点上的近似值.A 为 $(n-1)\times(n-1)$ 阶已知矩阵.

1.2.2 方程组求解

迭代

方程组求解有迭代法,

Definition 1.2. Jacobi 迭代

$$v_j^* = \frac{1}{2}(v_{j-1}^{(0)} + v_{j+1}^{(0)} + h^2 f_j) \qquad 1 \leq j \leq n-1,$$

加权 Jacobi 迭代

$$v^{(1)} = (1-w)v_j^{(0)} + wv_j^* \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

.

Gauss-Sediel 迭代

$$v_j = \frac{1}{2}(v_{j-1} + v_{j+1} + h^2 f_j) \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

j 从 $1 \to n-1$ 依次进行

red-black Gauss-Sediel 迭代

首先计算

$$v_{2j} = \frac{1}{2}(v_{2j-1} + v_{2j+1} + h^2 f_{2j}),$$

然后

$$v_{2j+1} = \frac{1}{2}(v_{2j} + v_{2j+2} + h^2 f_{2j+1}).$$

多重网格

为了让值 $\mathbf{v}$ 在不同网格上迭代松弛, 需要定义从细网格到粗网格的限制算子 I_h^{2h}, 和粗网格到细网格的插值算子 I_{2h}^h.

Definition 1.3. 插值算子有线性插值如下

$$v_{2j}^h = v_j^{2h},$$

$$v_{2j+1}^h = \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}),$$

$$0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$$

Definition 1.4. 限制算子有全权重限制如下

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h),$$

$$0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$$

插入限制如下

$$v_j^{2h} = v_{2h}^h.$$

不同粗细网格之间的传递松弛方式产生不同的循环策略, 这里采用 V-Cycle.

Definition 1.5. 定义每个 V-Cycle 为函数形式, 满足输入初始值 $\mathbf{v}$ 和右端值 $\mathbf{f}$. 输出近似值 $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} \leftarrow V^h(\mathbf{V}^h, \mathbf{f}^h).$$

1. 使用输入的 $\mathbf{v}^h$ 在方程组 $A^h\mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ 迭代松弛 ν_1 次.
2. 如果当前网格是最粗网格, 跳到第 4 步. 否则运行

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{2h} &\leftarrow I_h^{2h}(\mathbf{f}^h - A^h\mathbf{v}^h), \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow 0, \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow V^{2h}(\mathbf{v}^{2h}, \mathbf{f}^2 h). \end{aligned}$$

3. 使用第 2 步的输出修正初始值

$$\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + I_{2h}^h\mathbf{v}^{2h}.$$

4. 再将 $\mathbf{v}^h$ 松弛迭代 ν_2 次后输出 $\mathbf{v}^h$.

类似有 FMG 算法

Definition 1.6.

$$\mathbf{v}^h \leftarrow FMG^h(\mathbf{f}^h)$$

.

1. 如果已经到了最粗网格, 令 $\mathbf{v}^h \leftarrow 0$ 并且跳到第 3 步. 或者运行

$$\mathbf{f}^{2h} \leftarrow I_h^{2h}(\mathbf{f}^h),$$
$$\mathbf{v}^{2h} \leftarrow FMG^{2h}(\mathbf{f}^2 h).$$

2. 使用第 1 步的输出插值得到

$$\mathbf{v}^h \leftarrow I_{2h}^h.$$

3. 使用 2 输出的 $\mathbf{v}^h$ 和输入的 $\mathbf{f}^h$ 作为初始值调用 ν_0 次 V-Cycle.

结合多重网格和松弛迭代算法得求解算法.

1.3 误差分析

不妨将所有误差假设为正弦函数形式在每个网格点上的大小, 定义误差

$$w_{k,j}^h = \sin\left(\frac{jk\pi}{n}\right), \qquad 1 \le k \le n-1, \quad 0 \le j \le n.$$

考虑迭代和网格之间插值限制对在网格点上的误差的影响.

Theorem 1.7. 全权重限制算子

$$I_h^{2h}\mathbf{w}_k^h = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\mathbf{w}_k^{2h}, \qquad 1 \le k \le \frac{n}{2}.$$

$$I_h^{2h}\mathbf{w}_{k'}^h = -\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\mathbf{w}_k^{2h}, \qquad 1 \le k \le \frac{n}{2}.$$

$$k^{'} = n-k.$$

线性插值算子

$$I_{2h}^h\mathbf{w}_k^{2h} = c_k\mathbf{w}_k^h - s_k\mathbf{w}_{k'}^h, \qquad 1 \le k \le \frac{n}{2}, \quad k^{'} = n-k.$$

$$c_k = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right), s_k = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

在二重网格上的松弛, 结合松弛, 插值算子和限制算子可能运算 TG, TG 作用在 $\mathbf{w}$ 上有

Theorem 1.8.

$$TG\begin{bmatrix}\mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{k'}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_k^{\nu_1+\nu_2}s_k & \lambda_k^{\nu_1}\lambda_{k'}^{\nu_2}s_k \\ \lambda_{k'}^{\nu_1}\lambda_k^{\nu_2}c_k & \lambda_{k'}^{\nu_1+\nu_2}c_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{k'}\end{bmatrix} =: \begin{bmatrix}c1 & c2 \\ c3 & c4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{k'}\end{bmatrix} \qquad 1 \le k \le n/2$$

松弛方法决定了 $\lambda_k^{'}$ 较小, $s_k = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ 当 $k \le n/2$ 较小. 因此每次 TG 算子都是将误差项 $\mathbf{w}$ 缩小.