Chapter 5

Homework 21935004 谭焱

5.1 第九次作业

Exercise 5.1. 若

$$0 \to (S'_*, \partial') \overset{i_*}{\to} (S_*, \partial) \overset{p_*}{\to} (S'', \partial'') \to 0$$

是链复形短正合序列, 则有

$$\cdots \to H_n(S'_*) \overset{i_*}{\to} H_n(S_*) \overset{p_*}{\to} H_n(S''_*) \overset{d_*}{\to} H_{n-1}(S'_*) \overset{i_*}{\to} H_{n-1}(S_*) \to \cdots$$

验证 $\operatorname{im} d_n = \ker H_{n-1}(i)$.

Solution.

1. $\operatorname{im} d_n \subset \ker i_{n-1}$

   对任意 $s''_n \in S''_n$, 由短正合序列得 p_n 是满射知可取 $s_n \in S_n$ 使得 $s_n = p_n^{-1} s''_n$. 因此

   $$i_{n-1} \circ d_n(s''_n + B''_n) = i_{n-1}(i_{n-1}^{-1} \partial_n p_n^{-1} s''_n + B'_{n-1}) = \partial_n s_n + B_{n-1} = B_{n-1} = 0$$

   .

2. $\operatorname{im} d_n \supset \ker i_{n-1}$

   对任意 $s'_{n-1} \in \ker i_{n-1}$, 那么有 $i_{n-1}(s'_{n-1} + B'_{n-1}) = i_{n-1}(s'_{n-1}) + B_{n-1} = B_{n-1}$ 等价于存在 $s_n \in S_n$ 使得 $\partial_n s_n = i_{n-1}(s'_{n-1})$, 那么有

   $$d_n(p_n s_n + B''_n) = i_{n-1}^{-1} \partial_n p_n^{-1}(p_n s_n) + B'_{n-1} = s'_{n-1}$$

   .

综上 $\operatorname{im} d_n = \ker H_{n-1}(i)$.

Exercise 5.2. 验证 5 引理中第二条.

Solution. 设 $i_k \colon A_k \to A_{k+1}$, $j_k \colon B_k \to B_{k+1}$ 分别为 5 引理中满足正合交换图表的映射. 因此不妨设 f_3 不是单射的并且有

$$a_3, a'_3 \in A_3, a_3 \neq a'_3, s.t. f_3(a_3) = f_3(a'_3) = b_3.$$
$$a_4 = i_3(a_3), a'_4 = i_3(a'_3)$$

那么有

$$f_4\circ i_3(a_3-a_3')=j_3\circ f_3(a_3-a_3')=j_3(b_3-b_3)=0,$$

又因为 f_4 是单射, 那么 $i_3(a_3-a_3')=0$, 结合正合性 $\exists a_2, s.t. i_2(a_2)=a_3-a_3'$. 又因为

$$j_2\circ f_2(a_2)=f_3\circ i_2(a_2)=f_3(a_3-a_3')=0.$$

和 j_1,j_2 的正合性可知 $\exists b_1, s.t. i(b_1)=f_2(a_2)$. 因为 f_1 是满射, 设 $a_1\in A_1, s.t. f_1(a_1)=b_1$. 综上可得

$$f_2\circ i_1(a_1)=j_1\circ f_1(a_1)=f_2(a_2)$$

又因为 f_2 是单射得 $i_1(a_1)=a_2$. 所以从 i_1,i_2 的正合性知 $a_3-a_3'=i_2(a_2)=i_2\circ i_1(a_1)=0$. 与假设 $a_3\neq a_3'$ 矛盾. 因此 f_3 是一个单射.

Exercise 5.3. 设 (X,A) 是空间对。$d_n\colon H_n(X,A)\to H_{n-1}(A)$ 是连接同态。则写出简洁形式 $(d_n(\operatorname{cls}\delta_n'')=\operatorname{cls} i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}\delta_n'')$.

Solution. 因为 d_n 是连接同态, 所以 $i_*\colon S_*(A)\to S_*(X), p_*\colon S_*(X)\to S_*(X)/S_*(A)$ 分别是单射和满射并且 $\forall a\in A, i(a)=a, \forall x\in X, p(x)=x+A$. 因此设 $\operatorname{cls}\delta_n''=\delta_n+S_n(A), \delta_n\in S_n(X)$,

$$\begin{aligned}d_n(\operatorname{cls}\delta_n'')&=d_n(\delta_n+S_n(A)+B_n(X,A))=i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(\delta_n+S_n(A)+B_n(X,A))\\&=i_{n-1}^{-1}\partial_n(\delta_n+S_n(A)+B_n(X))=i_{n-1}^{-1}(\partial_n\delta_n+B_{n-1}(X))=\partial_n\delta_n+B_{n-1}(A).\end{aligned}$$

5.2 第十次作业

Exercise 5.4. 已知 $H_p(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=n \text{ 或} 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 求 $H_p(D^{n+1},S^n), D^{n+1}=\{(x_0,x_1,\dots,x_n)\mid x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2\leq 1\}$.

Solution. 我们已知 $H_p(D^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$, 又因为定理 5.8 得

$$\cdots\to H_k(S^n)\xrightarrow{i_*}H_k(D^{n+1})\xrightarrow{p_*}H_k(D^{n+1},S^n)\xrightarrow{d}H_{k-1}(S^n)\xrightarrow{i_*}\cdots$$

是正合序列. 因此对于 $k>0$ 时,$H_k(D^{n+1})=0$, 结合正合序列性质得 $H_k(D^{n+1},S^n)\cong H_{k-1}(S^n)$, 若 $k=0$, 有正合序列

$$\cdots\to H_0(S^n)\xrightarrow{i_*}H_0(D^{n+1})\xrightarrow{p_*}H_0(D^{n+1},S^n)\xrightarrow{d}0.$$

所以 $H_0(D^{n+1},S^n)\cong H_0(D^{n+1})$.

综上,$H_p(D^{n+1},S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=0,1 \text{ 或} n+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

Exercise 5.5.

$$0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{j}C\to 0$$

是 Abel 群的短正合序列若 $\exists$ 同态 π 是 $j\circ\pi=Id_C$, 则 $B\cong A\oplus C$. 举例说明 $0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{j}C\to 0$ 短正合序列, 不一定有 $B\cong A\oplus C$.

Solution. 由短正合序列定义知,i 是单射,j 是满射. 可以定义映射 $f\colon A\oplus C\to B$ 为 $\forall a\in A, c\in C, f(a,c)=i(a)+\pi(c)$.

$\forall b\in B, j(b)\in C$, 所以 $j(f(0,j(b))-b)=j\circ i(0)+j\circ\pi(j(b))-j(b)=0+j(b)-j(b)=0$, 所以由短正合序列定义 $(f(0,j(b))-b)\in\ker j=\operatorname{im} i$. 即 $\exists a\in A, s.t. i(a)=f(0,j(b))-b\Longrightarrow f(a,f(b))=i(a)+\pi(j(b))=b$. 所以 f 是满射.

已知 i 是单射, 且 $\pi\circ j=Id_C$ 得 π 也是单射, 所以 $f(a,c)=i(a)+\pi(c)$ 是单射.

综上,f 是双射, 即 $B\cong A\oplus C$

反例令 $A=\mathbb{Z}_z, B=\mathbb{Z}_4, C=\mathbb{Z}_2$,$i(0)=0, i(1)=2, j(0)=0, j(1)=1, j(2)=0, j(3)=1$, 容易验证满足短正合序列性质, 但是 $\mathbb{Z}_4\ncong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$.

Exercise 5.6. 设 S^n 为 n 维球面. 证明: $S^1\times S^3, S^2\times S^2, S^4$ 互不同胚.

Solution. 已知 $n\neq 0$ 时, $H_p(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=n\text{ 或}0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$, 因此 $H_1(S^1\times S^3)=H_1(S^1)\oplus H_1(S^3)=\mathbb{Z}$, 然而 $H_1(S^2\times S^2)=H_1(S^2)\oplus H_1(S^2)=0, H_1(S^4)=0$. 并且 $H_4(S^4)=\mathbb{Z}\neq H_4(S^2\times S^2)=H_4(S^2)\oplus H_4(S^2)=0$. 综上 $S^1\times S^3, S^2\times S^2, S^4$ 互不同胚.