Chapter 11

Homework 谭焱

11.1 第十一次作业

Problem 11.1. $f\colon \mathring{D}^n \to \mathring{D}^n$ 连续映射, 举例说明 f 不一定有不动点.

$\mathring{D}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1^n + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$.

Solution. 定义 $f\colon \mathring{D}^n \to \mathring{D}^n, \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathring{D}^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1/2, x_2/2, \ldots, x_{n-1}/2, (x_n + 1)/2)$$

已知 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < 1, x_n < 1$. 所以 $(x_1/2)^2 + (x_2/2)^2 + \cdots (x_{n-1}/2)^2 + ((x_n+1)/2)^2 = \frac{1}{4}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2x_n + 1) < \frac{1}{4}(1+2+1) = 1$, 连续性由定义易得. 所以 f 是将 $\mathring{D}^n$ 映射到 $\mathring{D}^n$ 上. 并且若有不动点 $x, f(x) = x$ 等价于

$$\begin{cases} x_i = x_i/2 & i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ x_n = (x_n + 1)/2 \end{cases}$$

解得 $x = (0, 0, \ldots, 0, 1) \notin \mathring{D}^n$. 即 f 没有不动点. 即连续函数不一定有不动点.

Problem 11.2. 设 X 是拓扑空间, 将 $X \times I$ 空间中 $X \times \{0\}$ 等置为一点 S, 又将 $X \times \{1\}$ 等置为一点 N, 所得商空间记 SX, 证明: $H_n(SX) \cong \tilde{H}_{n-1}(X)$

Solution. 设 $X_1 = SX - \{S\}, X_2 = SX - \{N\}$, 则 $SX = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2, X \times (0,1) = X_1 \cap X_2$. 且 X_1, X_2 等价于 X 上的圆锥体内部点不妨都写为 $\mathring{CX} = X \times (0,1) \cup \{NS\}$

定义 $F\colon \mathring{CX} \times I \to \mathring{CX}$ 为 $F([x,t], s) = [x, (1-s)t + s]$, 连续性显然. 可以验证 $F([x,t], 0) = [x,t] = Id_{\mathring{CX}}, F([x,t], 1) = [x, 1] = NS$. 所以 $1_{\mathring{CX}}$ 是零伦的, 由定义 $\mathring{CX}$ 是可缩的. 我们有 $H_n(X_1) = H_n(X_2) = 0$.

定义 $f\colon X \to X \times (0,1), g\colon X \times (0,1) \to X$ 为 $f(x) = [x, 1/2], g([x,t]) = x$. 则有 $(g \circ f)(x) = x, (f \circ g)(x,t) = (x, 1/2)$. 显然 $(g \circ f) \simeq 1_X$, 定义 $G\colon (X \times (0,1)) \times I \to (X \times (0,1))$ 为 $G([x,t], i) = [x, (t - 1/2)i + 1/2]$, 连续性显然. 可以验证 $G([x,t], 0) = [x, 1/2] = (f \circ g)(x,t), G([x,t], 1) = [x,t] = 1_{X \times (0,1)}$, 即 $f \circ g \simeq 1_{X_1 \cap X_2}$. 所以 $X_1 \cap X_2, X$ 有相同同伦类型, 所以 $\tilde{H}_n(X_1 \cap X_2) = \tilde{H}_n(X)$

通过 (Mayer-Vietoris for Reduced Homology) 和 $X_1, X_2, SX, X_1 \cap X_2$ 之间的正合序列

$$\cdots \to \tilde{H}_n(X_1 \cap X_2) \to \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2) \to \tilde{H}_n(SX) \to \tilde{H}_{n-1}(X_1 \cap X_2) \to \cdots.$$

和 $\tilde{H}_n(X_1) = \tilde{H}_n(X_2) = 0$. 可知 $H_n(SX) = \tilde{H}_n(SX) \cong \tilde{H}_{n-1}(X_1 \cap X_2) \cong \tilde{H}_{n-1}(X)(n > 0)$.

11.2 第十二次作业

Problem 11.3. 定义 $f\colon S^2\to S^2$ 连续映射为

$$(x_0,x_1,x_2)\mapsto(x_0\cos 5+x_1\sin 5, x_0\sin 5-x_1\cos 5, x_3)$$

求 $d(f)$.

Solution. 取点 x_0 为 $(\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos 5)}}\sin 5, \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos 5)}}(1-\cos 5), 0)$, 可以验证 $x_0\in S^2$, 将 x_0 代入 f 计算得

$$\begin{aligned}f(x_0)&=(\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos 5)}}(\sin 5\times\cos 5+(1-\cos 5)\times\sin 5), \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos 5)}}(\sin 5\times\sin 5-(1-\cos 5)\times\cos 5), 0)\\&=(\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos 5)}}\sin 5, \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos 5)}}(1-\cos 5), 0)\\&=x_0.\end{aligned}$$

即 x_0 是 f 的不动点. 所以 $d(f)\neq -1$ 又因为

$$f(x)=x\begin{bmatrix}\cos 5 & \sin 5 & 0\\ \sin 5 & -\cos 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=: xA$$

中 A 是可逆矩阵且因为 $\det A=-1\implies\forall x\in S^2, xA^{-1}\in S^2$, 所以 f 是双射, 即 f 是同伦等价的. 即 $d(f)=\pm 1$, 由上有 $d(f)\neq -1$ 所以 $d(f)=1$.

Problem 11.4. 作 S^{2n+1} 上一个非零切向量场.

Solution. 定义 $f\colon S^{2n+1}\to\mathbb{R}^{2n+2}$,

$$f(x_0,x_2,\ldots,x_{2n+1})\mapsto(x_1,-x_0,x_3,-x_2,\ldots,x_{2n+1},-x_{2n}).$$

显然 f 是非零的, 由 $x\in S^{2n+1}$. 并且满足

$$\begin{aligned}\langle x,f(x)\rangle&=\sum_{i=1}^{n+1}(x_{2i-1}x_{2i}+x_{2i}(-x_{2i-1}))\\&=0.\end{aligned}$$

所以 f 是一个非零切向量场.

Problem 11.5. 若 $g\colon S^1\to S^1$ 连续且保对经, 即 $a^1\circ g=g\circ a^1$, 证明 $d(g)$ 奇.

Solution. 若 g 没有不动点, 则 g 与 a^1 同伦, 所以 $d(g)=1$ 是奇数.

若 g 有不动点, 不妨设不动点为 $(1,0)$. 因此 $g((-1,0))=(g\circ a^1)((1,0))=(a^1\circ g)((1,0))=-g((1,0))=(-1,0)$, 即 $(-1,0)$ 也是 g 的不动点. 定义路径 $\sigma,\tau\colon I\to S^2$ 为

$$\sigma(t)=(1-2t,4t-4t^2)\qquad\tau(t)=(1-2t,4t^2-4t).$$

$(g\circ\sigma)((1,0))=(1,0),(g\circ\sigma)((-1,0))=(-1,0)$ 所以 $g\circ\sigma$ 与 $k(\sigma-\tau)+\sigma$ 或 $k(\sigma-\tau)+\tau, k\in\mathbb{Z}$ 定端同伦, 不妨设与 $k(\sigma-\tau)+\sigma$ 定端同伦, 而且保对经可知 $\forall x\in\sigma,-x\in\tau,g(-x)=-g(x)$, 所以路径 $g\circ\tau=g\circ a^1\circ\sigma=a^1\circ g\circ\sigma$ 与 $a^1\circ(k(\sigma-\tau)+\sigma)=k(\tau-\sigma)+\tau$ 定端同伦, 合并起来得路径 $(g\circ(\sigma-\tau))$ 与 $(2k+1)(\sigma-\tau)$ 定端同伦. 另一方面, 因为 $\mathrm{cls}(\sigma-\tau)$ 是 $H_1(S^1)$ 的生成元, 结合 $d(g)$ 的定义可知 $g_*(\mathrm{cls}(\sigma-\tau))=d(g)(\mathrm{cls}\,\sigma-\tau)$. 所以 $d(g)=\deg g=2k+1$ 是奇数.

Problem 11.6. 若 $g\colon S^2 \to S^2$ 连续, 且 $\forall x \in S^2, g(x) \neq g(-x)$, 则 g 满映射.

Solution. 若 g 不是满映射. 不妨设 $\exists x_0 \in S^2, s.t.\ \nexists x \in S^2, g(x) = x_0$. 设 g 的值域为 G, 则从点 x_0 出发作射线可以定义一个单射 $f\colon G \to \mathbb{R}^2$. 所以 $f \circ g\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$, 并且因为 f 是单射和 $\forall x \in S^2, g(x) \neq g(-x)$ 可知 $\forall x \in S^2, (f \circ g)(x) \neq (f \circ g)(-x)$. 因此可以定义一个函数 $h\colon S^2 \to S^1$ 为

$$g(x) = ((f \circ g)(x) - (f \circ g)(-x))/\|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(-x)\|.$$

显然 h 是一个保对经映射, 这与当 $m > 1$ 时不存在保对经映射 $h\colon S^m \to S^1$ 矛盾.