Chapter 2

Homework 21935004 谭焱

2.1 第三次作业

Exercise 2.1. 设 $\mathbf{S}^1$ 单位圆周

$\Delta : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, x \mapsto (x, x)$ 和 $\eta : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, x \mapsto (x, 1)$.

证明：Δ 和 η 都不是零伦.

Solution. 假设 Δ 是零伦，令 $f_k(I, \dot{I}) : m \mapsto \Delta(x^{km}) = (x^{km}, x^{km})$, 则 f_k 也是零伦的. 而且 f_k 是连续的. 则存在 $\widetilde{f_k} : I \to \mathbf{R}$, 由 f_k 的定义得 $\widetilde{f_k} : m \mapsto km$, 因此 $\widetilde{f_k}(1) = k$, 既 $[f_k] = k$ 与零伦函数都属于 $[f] = 0$ 矛盾.

η 取 $g_k(I, \dot{I}) = \eta(x^{km}) = (x^{km},\ 1)$ 同上可得不是零伦.

Exercise 2.2. $D^2 = \{\zeta \big| ||\zeta|| \leq 1\}, \mathbf{S}^1 = \partial \mathbf{D}^2$

则

(i) $\mathbf{S}^1$ 不是 $\mathbf{D}^2$ 的收缩.

(ii) $f : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{D}^2$ 连续映射，则 f 必有不动点.

Solution.

(i) 因为 $\pi_1(\mathbf{S}, 1)$ 同构于 $\mathbb{Z}$, 而 $\pi_1(\mathbf{D}^2, x_0) = \{1\}, \forall x_0 \in \mathbf{D}^2$. 收缩时保持 π_1 的性质，所以 $\mathbf{S}^1$ 不是 $\mathbf{D}^2$ 的收缩.

(ii) 假设不存在不动点，则 $\forall x \in \mathbf{D}^2, x \neq f(x), f(x) \in \mathbf{D}^2$, 因此以 $f(x)$ 为起点作一条射线过 x 交 $\mathbf{S}^1$ 于一点设为 $g(x)$. 则 $g : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$ 是一个满射, 因为 $g(x)$ 将 $\mathbf{S}^1$ 上的点映射到自身. 定义 $i(x) : \mathbf{S}^1 \mapsto \mathbf{D}^2, x \to x$, $i \circ g = 1_{\mathbf{S}^1}$, 则它们诱导的在范畴 $\pi_1(\mathbf{D}^2, 1), \pi_1(\mathbf{S}^1, 1)$ 上的函子 i_*, g_* 满足 $g_* \circ i_* = 1_{\mathbf{S}^1}$, 而 $i_* : \pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbf{D}^2, 1) \iff Z \to 0$, 不存在合适的函子 g_* 使得 $g_* \circ i_* : 0 \to \mathbf{Z} \iff 1_{\mathbf{Z}}$.

Exercise 2.3. 设 $\mathbf{X} = \mathbf{U} \cup \mathbf{V}$, 其中 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 是 $\mathbf{X}$ 的道路连通的开子集. $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ 也是道路连通， $x_0 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, 若 $\pi_1(\mathbf{U}, x_0), \pi_1(\mathbf{V}, x_0)$ 都是平凡群

证明：$\pi_1(X, x_0)$ 也是平凡群.

Solution. 对 $\forall s \in \pi_1(X, x_0)$, 若 $s \in U$ 或者$s \in V$, 由 $\pi_1(\mathbf{U}, x_0), \pi_1(\mathbf{V}, x_0)$ 都是平凡群可得，$s \simeq_p e_{x_0}$. 若 s 不同时在 U 或 V 中，取 s 每次进出 $U \cap V$ 时在 s 上和 $U \cap V$ 内并且充分接近 $U \cap V$ 边界上的点 x_i, y_i (因为连续性和开集这样的点总成对出现，一个进 x_i 一个出 y_i). 由于充分接近,x_i, y_i 之间 s 部分路径始终同时属于 U 或 V. 因此可以由 $f_U(I, \dot{I}), f_V(I, \dot{I})$ 表示, 而 U, V 都是平凡群，所以所有 f_U, f_V 分别属于同一个 $[f]_U, [f]_V$. 所以 $\pi_1(\mathbf{X}, x_0) = \pi_1(\mathbf{U}, x_0) \times \pi_1(\mathbf{V}, x_0) = 1$, 即 $\pi_1(\mathbf{X}, x_0)$ 是平凡群.

2.2 第四次作业

Exercise 2.4. $\mathbf{G}$ 是拓扑群，e 是单位元, α, β 是 $\mathbf{G}$ 中 e 处两条闭道路.

证明: $\alpha * \beta \simeq \alpha \cdot \beta$ **rel** $\dot{\mathbf{I}}$

Solution. 由道路乘法定义和 α, β 都是 e 处闭道路, 知 $\alpha * \beta$ 是 e 处闭道路. 因此要证 $\alpha * \beta \simeq \alpha \cdot \beta$ **rel** $\dot{\mathbf{I}}$, 只需 $\alpha \cdot \beta$ 是 e 处闭道路.

因为 $\mathbf{G}$ 是拓扑群, 且单位元是 e. 因此存在连续映射将 $\alpha \times \beta$ 映射到 $\alpha \cdot \beta$. 又因为 $\alpha \cdot \beta$ 的原像是 $\alpha \times \beta$ 内的 (e, e) 处闭道路, 并且 $\alpha \cdot \beta : (\mathbf{G} \times \mathbf{G}) \mapsto \mathbf{G}$ 使得 $(\alpha \cdot \beta)(e, e) = e$ 所以 $\alpha \cdot \beta$ 是 e 点的闭道路, 得证.

Exercise 2.5. 证明两个自由 Abel 群同构, 当且仅当它们有相同的秩.

Solution. 无限自由 Abel 群与有限 Abel 群显然不同构. 只考虑有限秩. 设两个 Abel 群为 $\mathbf{A},\mathbf{B}$. 基分别为 $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$. 则 $\forall a\in\mathbf{A},\forall b\in\mathbf{B}$, $a=\sum_{i=1}^n k_i a_i$, $b=\sum_{j=1}^m l_j b_j$.

充分性, 若 $m=n$, 定义映射 $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B},a_i\mapsto b_i$. 显然 f 是一个双射, 否则与 a_i,b_i 分别是 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的基矛盾.

必要性, 若 f 是 $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ 的一个同构双射, 不妨设 $n<m$, 然后令 $b_i'=f(a_i)$ $i=1,2\ldots n$. 因为 f 是一个满射, 存在 x_j 满足 $f(x_j)=b_j$, 由基的定义存在 $t_i\in 0,1$ 有 $\sum_{i=1}^n t_i a_i=x_j$, 结合 f 是同态的.$b_j=f(x_j)=f(\sum_{i=1}^n t_i a_i)=\sum_{i=1}^n t_i f(a_i)=\sum_{i=1}^n t_i b_i'$, 由 j 的任意性, 知 b_i' 是 b_j 的一组基, 即 $\mathbf{B}$ 的基. 即 $\mathrm{rank}\mathbf{A}=\mathrm{rank}\mathbf{B}$.