Chapter 2

Homework 21935004 谭焱

2.1 第三次作业

Exercise 2.1. 设 $\mathbf{S}^1$ 单位圆周

$\Delta : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, x \mapsto (x, x)$ 和 $\eta : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, x \mapsto (x, 1)$.

证明：Δ 和 η 都不是零伦.

Solution. 假设 Δ 是零伦，不妨设 $d : (I, \dot{I}) \to ((\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1), (1,1)), s \mapsto \Delta(e^{2\pi si}) = (e^{2\pi si}, e^{2\pi si})$，令 $f_k : (I, \dot{I}) \to ((\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1), (1,1)), m \mapsto d(mk) = \Delta(e^{2\pi kmi}) = (e^{2\pi kmi}, e^{2\pi kmi})$, 则 f_k 也是零伦的．而且 f_k 是连续的．则存在 $\widetilde{f}_k : I \to \mathbf{R}$, 由 f_k 的定义得 $\widetilde{f}_k : m \mapsto km$, 因此 $\widetilde{f}_k(1) = k$, 既 $\deg f_k = k$ 与零伦函数都满足 $\deg f = 0$ 矛盾.

η 取 $g_k(I, \dot{I}) = \eta(x^{km}) = (x^{km},\ 1)$ 同上可得不是零伦.

Exercise 2.2. $D^2 = \{\zeta \big| ||\zeta|| \le 1\}, \mathbf{S}^1 = \partial \mathbf{D}^2$

则

(i) $\mathbf{S}^1$ 不是 $\mathbf{D}^2$ 的收缩.

(ii) $f : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{D}^2$ 连续映射，则 f 必有不动点.

Solution.

(i) 若 $\mathbf{S}^1$ 不是 $\mathbf{D}^2$ 的收缩核. 不妨设 $g : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$ 是一个连续映射, 满足在 $\mathbf{S}^1$ 上是 $1_{\mathbf{S}^1}$ 定义 $i(x) : \mathbf{S}^1 \mapsto \mathbf{D}^2, x \to x, i \circ g = 1_{\mathbf{S}^1}$, 则它们诱导的在范畴 $\pi_1(\mathbf{D}^2, 1), \pi_1(\mathbf{S}^1, 1)$ 上的函子 i_*, g_* 满足 $g_* \circ i_* = 1_{\mathbf{S}^1}$, 而 $i_* : \pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbf{D}^2, 1) \iff Z \to 0$, 不存在合适的函子 g_* 使得 $g_* \circ i_* : 0 \to \mathbf{Z} \iff 1_{\mathbf{Z}}$.

(ii) 假设不存在不动点，则 $\forall x \in \mathbf{D}^2, x \ne f(x), f(x) \in \mathbf{D}^2$, 因此以 $f(x)$ 为起点作一条射线过 x 交 $\mathbf{S}^1$ 于一点设为 $g(x)$. 则 $g : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$ 是一个满射, 因为 $g(x)$ 在 $\mathbf{S}^1$ 上是 $1_{\mathbf{S}^1}$. 并且 g 是一个连续映射. 由第一问结论, 这是矛盾的.

Exercise 2.3. 设 $\mathbf{X} = \mathbf{U} \cup \mathbf{V}$, 其中 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 是 $\mathbf{X}$ 的道路连通的开子集. $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ 也是道路连通， $x_0 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, 若 $\pi_1(\mathbf{U}, x_0), \pi_1(\mathbf{V}, x_0)$ 都是平凡群

证明：$\pi_1(X, x_0)$ 也是平凡群.

Solution. 对 $\forall s \in \pi_1(X, x_0)$, 若 $s \in U$ 或者$s \in V$，由 $\pi_1(\mathbf{U}, x_0), \pi_1(\mathbf{V}, x_0)$ 都是平凡群可得，$s \simeq_p e_{x_0}$. 若 s 不同时在 U 或 V 中，取 s 每次进出 $U \cap V$ 时在 s 上和 $U \cap V$ 内并且充分接近 $U \cap V$ 边界上的点 x_i, y_i（因为连续性和开集这样的点总成对出现，一个进 x_i 一个出 y_i）. 由于充分接近, 由 x_i, y_i 划分 s 产生的所有路径始终同时属于 U 或 V. 因为这些路径都在 $U \cap V$ 中, 连接上 x_0 产生的所有闭道路可以由 $f_U(I, \dot{I}), f_V(I, \dot{I})$ 表示, 而 U, V 都是平凡群，所以所有 f_U, f_V 分别属于同一个 $[f]_U, [f]_V$. 所以 $\pi_1(\mathbf{X}, x_0) = \pi_1(\mathbf{U}, x_0) \times \pi_1(\mathbf{V}, x_0) = 1$, 即 $\pi_1(\mathbf{X}, x_0)$ 是平凡群.

2.2 第四次作业

Exercise 2.4. $\mathbf{G}$ 是拓扑群，e 是单位元, α, β 是 $\mathbf{G}$ 中 e 处两条闭道路.

证明: $\alpha * \beta \simeq \alpha \cdot \beta \ \mathbf{rel}\ \dot{\mathbf{I}}$

Solution.

因为 β 是单位元为 e 的拓扑群 $\mathbf{G}$ 内闭道路. 因此

存在 $\beta^{-1}, \beta\cdot\beta^{-1}=\gamma$, 设 e 处常道路是 γ, 取连续函数

$$f:(I,\dot{I})\to\mathbf{G},$$

$$f(s)=\begin{cases}\alpha(2s) & s\in[0,\frac{1}{2})\\ \beta(2s-1) & s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$g:(I,\dot{I})\to\mathbf{G},$$

$$g(s)=\begin{cases}\gamma(2s)=e & s\in[0,\frac{1}{2})\\ \beta^{-1}(2s-1) & s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

显然 f,g 分别是 $\alpha*\beta$ 和$\gamma*\beta^{-1}$ 的函数表达. 所以 $(\alpha*\beta)\cdot(\gamma*\beta^{-1})=\begin{cases}(\alpha(2s)\cdot\gamma(2s)) & s\in[0,1/2)\\ (\beta(2s-1)\cdot\beta^{-1}(2s-1)) & s\in[1/2.1]\end{cases}=(\alpha\cdot\gamma)*(\beta\cdot\beta^{-1})=\alpha*\gamma$, 另一边由群运算的结合律 $(\alpha\cdot\beta)\cdot(\gamma\cdot\beta^{-1})=\alpha$.

α 和 $\alpha*\gamma$ 显然定端同伦. 则存在连续函数 H 使得 $t=0,1$ 两端是 $H(s,0)=(\alpha*\gamma)(s)$ 和 $H(s,1)=\alpha(s)$. 因为 $\mathbf{G}$ 是拓扑群, 令 $K(s,t)=H(s,t)\cdot(\gamma*\beta^{-1})(s)$,$K(s,t)$ 是一个连续映射, 结合上面点乘推导满足 $K(s,0)=(\alpha*\beta)(s), K(s,1)=(\alpha\cdot\beta)(s)$ 所以 $\alpha*\beta, \alpha\cdot\beta$ 定端同伦.

Exercise 2.5. 证明两个自由 Abel 群同构, 当且仅当它们有相同的秩.

Solution. 无限自由 Abel 群与有限自由 Abel 群显然不同构. 只考虑有限秩.

设两个 Abel 群为 $\mathbf{A},\mathbf{B}$. 基分别为 $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$. 则 $\forall a\in\mathbf{A},\forall b\in\mathbf{B}$, $a=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i$, $b=\sum_{j=1}^{m}l_jb_j$.

充分性, 若 $m=n$, 定义映射 $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}, a_i\mapsto b_i$. 显然 f 是一个双射, 否则与 a_i,b_i 分别是 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的基矛盾.

必要性, 若 f 是 $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ 的一个同构双射, 不妨设 $n<m$, 然后令 $b_i'=f(a_i)$ $i=1,2\ldots n$. 因为 f 是一个满射, 存在 x 满足 $f(x)=b$, $\forall b\in\mathbf{B}$, 由基的定义存在 $t_i\in 0,1$ 有 $\sum_{i=1}^{n}t_ia_i=x$, 结合 f 是同态的.$b=f(x)=f(\sum_{i=1}^{n}t_ia_i)=\sum_{i=1}^{n}t_if(a_i)=\sum_{i=1}^{n}t_ib_i'$, 由 b 的任意性和 f 是同构双射, 知 b_i' 是 $\mathbf{B}$ 的基. 即 $\mathrm{rank}\mathbf{A}=\mathrm{rank}\mathbf{B}$.