Chapter 5

Homework 21935004 谭焱

5.1 第九次作业

Exercise 5.1. 若

$$0 \to (S'_*, \partial') \xrightarrow{i_*} (S_*, \partial) \xrightarrow{p_*} (S'', \partial'') \to 0$$

是链复形短正合序列, 则有

$$\cdots \to H_n(S'_*) \xrightarrow{i_*} H_n(S_*) \xrightarrow{p_*} H_n(S''_*) \xrightarrow{d_*} H_{n-1}(S'_*) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(S_*) \to \cdots$$

验证 $\operatorname{im} d_n = \ker H_{n-1}(i)$.

Solution.

1. $\operatorname{im} d_n \subset \ker i_{n-1}$

   对任意 $s''_n \in S''_n$, 由短正合序列得 p 是满射知可取 $s_n \in S_n$ 使得 $s_n = p_n^{-1} s''_n$. 因此

   $$i_{n-1} \circ d_n(s''_n + B''_n) = i_{n-1}(i_{n-1}^{-1} \partial_n p_n^{-1} s''_n + B'_{n-1}) = \partial_n s_n + B_{n-1} = B_{n-1} = 0$$

   .

2. $\operatorname{im} d_n \supset \ker i_{n-1}$

   对任意 $s'_{n-1} \in \ker i_{n-1}$, 那么有 $i_{n-1}(s'_{n-1} + B'_{n-1}) = i_{n-1} s'_{n-1} + B_{n-1} = B_{n-1}$ 等价于存在 $s_n \in S_n$ 使得 $\partial_n s_n = i_{n-1} s'_{n-1}$, 那么有

   $$d_n(p_n s_n + B''_n) = i_{n-1}^{-1} \partial_n p_n^{-1}(p_n s_n) + B'_{n-1} = s'_{n-1}$$

   .

综上 $\operatorname{im} d_n = \ker H_{n-1}(i)$.

Exercise 5.2. 验证 5 引理中第二条.

Solution. 设 $i_k \colon A_k \to A_{k+1}$, $j_k \colon B_k \to B_{k+1}$ 分别为 5 引理中满足正合交换图表的映射. 因此不妨设 f_3 不是单射的并且有

$$a_3, a'_3 \in A_3, a_3 \neq a'_3, s.t. f_3(a_3) = f_3(a'_3) = b_3.$$
$$a_4 = i_3(a_3), a'_4 = i_3(a'_3)$$

那么有

$$f_4 \circ i_3(a_3 - a_3') = j_3 \circ f_3(a_3 - a_3') = j_3(b_3 - b_3) = 0,$$

又因为 f_4 是单射, 那么 $i_3(a_3 - a_3') = 0$, 结合正合性 $\exists a_2, s.t. i_2(a_2) = a_3 - a_3'$. 又因为

$$j_2 \circ f_2(a_2) = f_3 \circ i_2(a_2) = f_3(a_3 - a_3') = 0.$$

和 j_1, j_2 的正合性可知 $\exists b_1, s.t. i(b_1) = f_2(a_2)$. 因为 f_1 是满射, 设 $a_1 \in A_1, s.t. f_1(a_1) = b_1$. 综上可得

$$f_2 \circ i_1(a_1) = j_1 \circ f_1(a_1) = f_2(a_2)$$

又因为 f_2 是单射得 $i_1(a_1) = a_2$. 所以从 i_1, i_2 的正合性知 $a_3 - a_3' = i_2(a_2) = i_2 \circ i_1(a_1) = 0$. 与假设 $a_3 \neq a_3'$ 矛盾. 因此 f_3 是一个单射.

Exercise 5.3. 设 (X, A) 是空间对。$d_n \colon H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ 是连接同态。则写出简洁形式 $(d_n(\operatorname{cls} \delta_n'') = \operatorname{cls} i_{n-1}^{-1} \partial_n p_n^{-1} \delta_n'')$.

Solution. 因为 d_n 是连接同态, 所以 $i_* \colon S_*(A) \to S_*(X), p_* \colon S_*(X) \to S_*(X)/S_*(A)$ 分别是单射和满射并且 $\forall a \in A, i(a) = a, \forall x \in X, p(x) = x + A$. 因此

$$\begin{aligned} d_n(\operatorname{cls} \delta_n'') &= d_n(\delta_n'' + S_n(A) + B_n'') = i_{n-1}^{-1} \partial_n p_n^{-1}(\delta_n'' + S_n(A) + B_n'') \\ &= i_{n-1}^{-1} \partial_n(\delta_n + S_n(A) + B_n) = i_{n-1}^{-1}(\partial_n \delta_n + B_{n-1}(A)) = \operatorname{cls} \partial_n \delta_n. \end{aligned}$$