Chapter 7

Homework 21935004 谭焱

7.1 第十三次作业

Problem 7.1. 计算 $\mathbb{R}^n - e_r (n > 0)$ 的同调群, 其中 e_r 是 I_r 在 $\mathbb{R}^n$ 中的同胚象.

Solution. 因为 $\mathbb{R}^n$ 同胚于 $S^n - N$, N 为 S^n 中的一点, 因此 $S^n - N$ 中存在子集 e'_r 同胚于 e_r. 令 $X_1 := S^n - N, X_2 := S^n - e'_r$, 由上定义知 $N \in S^n - e'_r, e'_r \in S^n - N$, 所以 $X := X_1^o \cup X_2^o = S^n$ 并且 $X_1 \cap X_2 = S^n - N - e'_r \simeq \mathbb{R}^n - e_r$. 综上利用 Mayer-Vietoris 序列得正合序列

$$\cdots \to \widetilde{H}_{q+1}(\mathbb{R}^n) \oplus \widetilde{H}_{q+1}(S^n - e'_r) \to \widetilde{H}_{q+1}(S^n) \to \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n - e_r) \to \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n) \oplus \widetilde{H}_q(S^n - e'_r) \to \cdots$$

又因为我们已知 $\forall q \geq -1, \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n) = 0, \widetilde{H}_q(S^n - e'_r) = 0$ 然后由正合序列性质知当 $\forall q \geq -1, \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n) \oplus \widetilde{H}_q(S^n - e'_r) = 0$ 时 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n - e_r) = \widetilde{H}_{q+1}(S^n)$. 综上,$n > 1, H_q(\mathbb{R}^n - e_r) = \begin{cases} Z & q = 0, n-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}, H_q(\mathbb{R}^1 - e_r) = \begin{cases} Z \times Z & q = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$.

Problem 7.2. 计算 $\mathbb{R}^3 - s_1$ 的同调群, 其中 s_1 是 S^1 的同胚象.

Solution. 因为 $\mathbb{R}^3$ 同胚于 $S^3 - N$, N 为 S^3 中的一点, 因此 $S^3 - N$ 中存在子集 s'_1 同胚于 s_1. 令 $X_1 := S^3 - N, X_2 := S^3 - s'_1$, 由上定义知 $N \in S^3 - s'_1, s'_1 \in S^3 - N$, 所以 $X := X_1^o \cup X_2^o = S^3$ 并且 $X_1 \cap X_2 = S^3 - N - s'_1 \simeq \mathbb{R}^n - s_1$. 综上利用 Mayer-Vietoris 序列得正合序列

$$\cdots \to \widetilde{H}_{q+1}(\mathbb{R}^3) \oplus \widetilde{H}_{q+1}(S^3 - s'_1) \to \widetilde{H}_{q+1}(S^3) \to \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^3 - s_1) \to \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^3) \oplus \widetilde{H}_q(S^3 - s'_1) \to \widetilde{H}_q(S^3) \to \cdots$$

已知 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^3) = 0, \widetilde{H}_q(S^3) = \begin{cases} Z & q = 3 \\ 0 & otherwise \end{cases}, \widetilde{H}_q(S^3 - s'_1) = \begin{cases} Z & q = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$. 所以当 $q \neq 0, 1, \widetilde{H}_{q+1}(\mathbb{R}^3) \oplus \widetilde{H}_{q+1}(S^3 - s'_1) = \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^3) \oplus \widetilde{H}_q(S^3 - s'_1) = 0$ 我们可知 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^3 - s_1) = \widetilde{H}_{q+1}(S^3)$. 当 $q = 0, 1, \widetilde{H}_{q+1}(S^3) = \widetilde{H}_q(S^3) = 0$ 我们可知 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^3 - s_1) = \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^3) \oplus \widetilde{H}_q(S^3 - s'_1)$. 综上 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^3 - s_1) = \begin{cases} Z & q = 2, 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$. 所以同调群 $H_q(\mathbb{R}^3 - s_1) = \begin{cases} Z & q = 2, 1, 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$.

Problem 7.3. 举例说明在 $D^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \leq 1\}$ 上领域不变性不成立.

Solution. 定义 $D^+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \leq 1, x_n \geq 0\}$, 令 $h\colon D^n \to D^+$ 满足

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, |x_n|).$$

容易验证 h 是同胚的,D^n, D^+ 都是 D^n 的子集.D^n 是开集, 但是 D^+ 中满足 $x_n = 0$ 的所有点都不是 D^+ 在 D^n 中的内点.

Problem 7.4. 证明定义中 $\mathbf{R}P^n$ 与 $S^n/\sim$ 是同胚.

Solution. 定义 $h: \mathbf{R}^{n+1} \to S^n/\sim$ 为

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{|x|}, |x| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}.$$

因为 h 是 $\mathbf{R}$ 到 S^n 中的投影映射, 所以是连续的并且是开映射, 然后对任意 $x \in S^n/\sim$, 我们有 $h(x) = x$, 所以 h 是满射. 定义定价类 $x \sim y$ 当且仅当 $\exists \lambda \in \mathbf{R}^+, s.t. x = \lambda y$, 并且 $\mathbf{R}^n$ 和此等价类生成的商空间表示为 $\mathbf{R}P^+$. 所以由书中推论 1.10, 映射 $\varphi\colon \mathbf{R}P^+ \to S^n, \varphi([x]) = h(x)$ 是同胚的, 所以 $\mathbf{R}P^+$ 与 S^n 同胚. 由 $\mathbf{R}P^+$ 定义, 我们还知道 $\mathbf{R}P^+/\sim \simeq \mathbf{R}P^n$, 所以 $\mathbf{R}P^n \simeq \mathbf{R}P^+/\sim \simeq S^n/\sim$.

7.2 第十四作业

Problem 7.5. 作出 $\Phi\colon (D^{2n}, S^{2n-1}) \to (\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$ 相对同胚.

Solution. 若 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$, 定义 $\mathbb{C}P^n$ 中的等价类为 $[x] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$. 定义

$$e = \{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n : x_{n+1} \neq 0\}.$$

因此 e 在 $\mathbb{C}P^n$ 中的补集 Y 恰好是 $\mathbb{C}P^{n-1}$. 定义映射 $\phi\colon e \to \mathbf{R}^{2n}$ 为

$$\phi([x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]) \mapsto [\|x_{n+1}^{-1}(x_1 + \overline{x}_1)\|, \|x_{n+1}^{-1}(x_1 - \bar{x}_1)\|, \ldots, \|x_{n+1}^{-1}(x_n + \bar{x}_n)\|, \|x_{n+1}^{-1}(x_n - \bar{x}_n)\|].$$

可以验证 ϕ 是连续开映射, 并且 $\phi(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$,$\forall y \in \mathbf{R}^{2n}$, 令 $x = [y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, \ldots, y_{2n-1} + iy_{2n}, 2] \in e$ 可得 $\phi(x) = y$. 所以 ϕ 是同胚映射, 即 $e \simeq \mathbf{R}^{2n} \simeq D^{2n} - S^{2n-1}$. 综上,$Z = \mathbb{C}P^n = e \cup \mathbb{C}P^{n-1}, e, Y = \mathbb{C}P^{n-1}$ 是 Hausdorff 空间,$e \cap Y = \emptyset$ 令 $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{2n}) \in D^{2n}$, 所以 $\|u\| \leq 1$. 定义 Φ 为

$$\Phi(u) = \left[u_1 + iu_2, \ldots, u_{2n-1} + iu_{2n}, \sqrt{1 - \|u\|^2}\right].$$

Problem 7.6. 计算 $G = S^1 \vee S^1$ 同胚群.

Solution. 定义 $S_1^1 = \{(x_1, x_2) \mid (x-1)_1^2 + x_2^2 = 1\}, S_2^1 = \{(x_1, x_2) \mid (x+1)_1^2 + x_2^2 = 1\}, O = \{(0,0)\}, A = \{(2,0)\}$, 可以看出 $S_1^1 \vee S_2^1 \simeq S^1 \vee S^1$.

令 $v\colon S_1^1 \coprod S_2^1 \to S_1^1 \vee S_2^1$ 为自然映射, 并且令 $\Phi = v \mid S_1^1\colon (S_1^1 - O) \to (S_1^1 \vee S_2^1, S_2^1)$. 定义 $e = \Phi(\{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in S_1^1, (x_1, x_2) \neq O\}), S_1^1 \vee S_2^1 - S_2^1 = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in S_1^1, (x_1, x_2) \neq O\}$, 则 $e \simeq (S_1^1 \vee S_2^1 - S_2^1) \simeq \mathbf{R}^1$. 因为 Φ 是相对同胚的并且 e 是开集, 定义 $U' = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in S_1^1, x_1 > 0\}, U = \Phi(U'), V = S_1^1 \vee S_2^1 - A$, 因此 U, V 是 $S_1^1 \vee S_2^1$ 的开覆盖. 由 (Mayer-Vietoris 序列) 得

$$\cdots H_p(U \cap V) \to H_p(U) \oplus H_p(V) \to H_p(S_1^1 \vee S_2^1) \to H_{p-1}(U \cap V) \to \cdots$$

因为 $U \simeq \mathbf{R}^1, U \cap V = S_1^1 - O - A \simeq S^0$, $H_P(U \cap V) = H_P(S^0), H_P(U) = 0$.

并且 V 可收缩为 S_2^1. 定义 $F\colon V\times I\to V$ 为

$$F(v,t)=\begin{cases}v & \text{if } v\in S_1^2\\ \Phi((1-t)z_1,\frac{z_2}{|z_2|}\sqrt{1-((1-t)z_1-1)^2}) & \text{if } v=\Phi(z)\in e\end{cases}.$$

F 是合理的因为 $S_1^1\vee S_2^1$ 是无交并 $e\cup S_2^1$, 并且 F 是连续的满足 $F(v,0)=v, F(v,1)\subset S_2^1, \forall v\in S_2^1, t\in I, F(v,t)=v$. 综上,$H_p(V)=H_p(S_2^1)$.

最后由含入映射 $\alpha\colon U-A\hookrightarrow S_1^1-A, \beta\colon S_1^1-O-A\hookrightarrow S_1^1-A, j\colon S_2^1\hookrightarrow V, k\colon U\cap V\hookrightarrow V$ 都是同伦等价知分别诱导同构的链映射 α_*,β_*,j_*,k_*, 并且因为 $\phi\colon(S_1^1,O)\to(S_1^1\vee S_2^1,S_2^1)$ 是相对同胚, 即 $S_1^1-O\simeq S_1^1\vee S_2^1-S_2^1$ 并且 $A\in S_1^1, A\in(S_1^1\vee S_2^1-S_2^1)$ 所以 $\Phi\,|\,U'\colon S_1^1-A\to U\cap V$ 也是同胚映射得 $(\Phi\,|\,U')_*$ 是同构, 综上 $k_*\colon H_p(U\cup V)\to H_p(V)$ 满足 $k_*=(\Phi\,|\,(S_1^1-A))_*\alpha_*(\Phi\,|\,U')_*^{-1}=j_*f_*\beta_*^{-1}\alpha_*(\Phi\,|\,U')_*^{-1}$, 其中 $j_*\colon H_p(S_2^1)\to H_p(V), \beta_*\alpha_*^{-1}(\Phi\,|\,U')_*\colon H_p(S_1^1-A-O)\to H_p(U\cap V)$ 和 k_*, f_* 是可交换的. 所以

$$\cdots H_p(S^0)\to H_p(S^1)\to H_p(S_1^1\vee S_2^1)\to H_{p-1}(S^0)\to\cdots$$

当 $p\neq 0,1$ 时 $H_p(S^0)=H_{p-1}(S^0)=0$ 所以 $H_p(S^1\vee S^1)=H_p(S^1)$.

当 $p=1$ 时, 替换为 $\bar{H}$ 可得

$$\cdots\bar{H}_1(S^0)\to\bar{H}_1(S^1)\to\bar{H}_1(S_1^1\vee S_2^1)\to\bar{H}_0(S^0)\to\bar{H}_0(S^1)\to\cdots$$

设 $i_*\colon\bar{H}_1(S^1)\to\bar{H}_1(S^1\vee S^1)$, 则 $\bar{H}_1(S^0)=\bar{H}_0(S^1)=0$ 暗示 $\ker i_*\cong\bar{H}_1(S^1)=Z, \operatorname{im} i_*\cong\bar{H}_0(S^0)=Z$. 由同态基本定理有 $\bar{H}_1(S^1\vee S^1)/\ker i_*\cong\operatorname{im} i_*$, 得 $\bar{H}_1(S^1\vee S^1)\cong Z\oplus Z$.

当 $p=0$ 时,$\bar{H}_0(S^1)=\bar{H}_{-1}(S^0)=0$ 所以 $\bar{H}_0(S^1\vee S^1)=0$.

综上 $H_p(S^1\vee S^1)=\begin{cases}Z\oplus Z & q=1\\ Z & q=0\\ 0 & otherwise\end{cases}$

Problem 7.7. 计算 $Z=D^3\coprod_f S^2$, 其中 $f\colon S^2\to S^2$ 度为 3 的连续映射.

Solution. 令 $Y=S^2$ 则 $p\neq 2,3$ 时有 $H_p(Z)\cong H_p(S^2)$ 并且有正合序列

$$0\to H_3(S^2)\xrightarrow{i_*}H_3(Z)\to H_2(S^2)\xrightarrow{f_*}H_2(S^2)\to H_2(Z)\to 0$$

因为 f 的度为 3, 所以诱导的 $f_*\colon H_2(S^2)\to H_2(S^2)$ 是乘 3. 得新正合序列

$$0\to 0\xrightarrow{i_*}H_3(Z)\to\mathbb{Z}\xrightarrow{3}\mathbb{Z}\to H_2(Z)\to 0$$

设序列中的函数 $k_*\colon H_3(Z)\to H_2(S^2)$, 因为 f_* 是单射即 $\ker f_*=0$ 得 $\operatorname{im} k_*=0$, 又由正合序列性质和 i_* 的定义域为 0, 有 $\ker k_*=\operatorname{im} i_*=0$, 所以同态基本定理给出 $H_3(Z)/\ker k_*\cong\operatorname{im} k_*\Longrightarrow H_3(Z)=0$.

设序列中的函数 $h_*\colon H_2(S^2)\to H_2(Z)$, 由正合序列和 $H_2(Z)\to 0$ 知 h_* 是满射, 即 $\operatorname{im} h_*=H_2(Z)$. 正合序列还可得 $\ker h_*=\operatorname{im} f_*=\operatorname{im} 3=3\mathbb{Z}$, 所以同态基本定理给出 $H_2(Z)=\operatorname{im} h_*\cong\mathbb{Z}/\ker h_*\cong\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

综上 $H_p(D^3\coprod_f S^2)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=0\\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & p=2\\ 0 & otherwise\end{cases}.$