Chapter 1

Time Integrator Story

1.1 原问题

从三体问题方程组

$$
\begin{aligned}
u_1^{'} &= u_4, \\
u_2^{'} &= u_5, \\
u_3^{'} &= u_6, \\
u_4^{'} &= 2 * u_5 + u_1 - \frac{\mu(u_1+\mu-1)}{(u_2^2+u_3^2+(u_1+\mu-1)^2)^{3/2}} - \frac{(1-\mu)(u_1+\mu)}{(u_2^2+u_3^2+(u_1+\mu)^2)^{3/2}}, \\
u_5^{'} &= -2 * u_4 + u_2 - \frac{\mu u_2}{(u_2^2+u_3^2+(u_1+\mu-1)^2)^{3/2}} - \frac{(1-\mu)u_2}{(u_2^2+u_3^2+(u_1+\mu)^2)^{3/2}}, \\
u_6^{'} &= -\frac{\mu u_3}{(u_2^2+u_3^2+(u_1+\mu-1)^2)^{3/2}} - \frac{(1-\mu)u_3}{(u_2^2+u_3^2+(u_1+\mu)^2)^{3/2}},
\end{aligned}
$$

不妨定义 $\mathbf{f}$ 为右端项. 给定两个初始值

$$
\begin{aligned}
U1 &:= (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6) = (0.994, 0, 0, 0, -2.0015851063790825224, 0) \\
U2 &:= (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6) = (0.87978, 0, 0, 0, -0.3797, 0)
\end{aligned}
$$

1.2 理论支持

如上即是一个 (IVP) 初值问题, 将方程组左端的 $\mathbf{u}_t$, 按 t 离散得

$$\mathbf{u}(t_{n+1}) = \mathbf{u}(t_n) + k * \mathbf{f}$$

k 为时间步长.

1.2.1 LMM 方法

拓展该离散方程, 增加使用的已知的时间上 $\mathbf{u}$ 的近似值. 得 (LMM) 线性多步法.

Definition 1.1. 对于求解 IVP 问题的 LMM 方法即

$$\sum_{j=0}^{s} \alpha_j \mathbf{U}^{n+j} = k \sum_{j=0}^{s} \beta_j \mathbf{f}(\mathbf{U}^{n+j}, t_{n+j}),$$

对于 LMM 方法, 有如下定理保证精度.

Theorem 1.2. LMM 方法的单步误差服从

$$\mathcal{L}\mathbf{u}(t_n) = C_0 \mathbf{u}(t_n) + C_1 k \mathbf{u}_t(t_n) + C_2 k^2 \mathbf{u}_{tt}(t_n) + \ldots,$$

这里

$$\begin{aligned}
C_0 &= \sum_{j=0}^{s} \alpha_j \\
C_1 &= \sum_{j=0}^{s} (j\alpha_j - \beta_j) \\
C_2 &= \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{1}{2} j^2 \alpha_j - j\beta_j \right) \\
&\vdots \\
C_q &= \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{1}{q!} j^q \alpha_j - \frac{1}{(q-1)!} j^{q-1} \beta_j \right).
\end{aligned}$$

采取不同的 $\alpha\beta$ 的取法, 并提高精度 p, 即可分别得到 Adams-Bashforth, Adams-Moulton, BDFs 等特殊的 LMM 方法.

并且有定理协助保证 LMM 方法收敛性和, 稳定性.

Theorem 1.3. 一个 LMM 方法是 0 稳定的, 当且仅当 $\rho(x)$ 的所有根 z 满足 $|z| \leq 1$, 并且满足 $|z| = 1$ 的根都不是重根. 这里

$$\rho(x) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j x^j.$$

Definition 1.4. 一个 LMM 方法若阶 $p \geq 1$ 是一致的.

Theorem 1.5. 一个 LMM 方法当且仅当一致并且 0 稳定的时是收敛的.

并且误差满足

Theorem 1.6. 对于一个 IVP 问题, 右端项 $\mathbf{f}$ 对 u, t 都满足 p 阶连续可导. 那么对于一个收敛的 p 阶 LMM 方法和满足如下条件的初始条件

$$\forall i = 0, 1, \ldots, s-1, \qquad \|\mathbf{U}^i - \mathbf{u}(t_i)\| = O(k^p),$$

那么这个 IVP 的数值解满足当 $k > 0$ 充分小时

$$\|\mathbf{U}^{t/k} - \mathbf{u}(t)\| = O(k^p) \qquad \forall t \in [0, T].$$

1.2.2 Runge-Kutta 方法

当不考虑使用时间较远的信息时, 考虑在单步中多次计算提高精度, 如此考虑阶产生了 Runge-Kutta 方法.

Definition 1.7. 一个 s 步的显式 Runge-Kutta 方法是一种如下形式的单步法.

$$\begin{cases} y_1 = f(U^n, t_n), \\ y_2 = f(U^n + k a_{2,1} y_1, t_n + c_2 k), \\ y_3 = f(U^n + k(a_{3,1} y_1 + a_{3,2} y_2), t_n + c_3 k), \\ \quad \dots \\ y_s = f(U^n + k(a_{s,1} y_1 + a_{s,2} y_2 + \cdots + a_{s,s-1} y_{s-1}), t_n + c_s k), \\ U^{n+1} = U^n + k(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots b_s y_s) =: U^n + \Phi(U^n, t_n; k), \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $a_{i,j}, b_i, c_i$ 都是实数, 并且

$$\forall i = 1, 2, \dots, s, \qquad c_i = \sum_{j=0}^{i} a_{i,j}.$$

当 $s = 2$ 可以特化为 Euler method, 当 $s = 4$ 时特化为 classical fourth-order Runge-Kutta method. 即之后程序展示中使用的两种方法.

Definition 1.8. modified Euler method 是一种有如下形式的单步法

$$\begin{cases} y_1 = f(U^n, t_n), \\ y_2 = f(U^n + \frac{k}{2} y_1, t_n + \frac{k}{2}), \\ U^{n+1} = U^n + k y_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

]

Definition 1.9. Runge-Kutta method 是一种有如下形式的单步法

$$\begin{cases} y_1 = f(U^n, t_n), \\ y_2 = f(U^n + \frac{k}{2} y_1, t_n + \frac{k}{2}), \\ y_3 = f(U^n + \frac{k}{2} y_2, t_n + \frac{k}{2}), \\ y_4 = f(U^n + k y_3, t_n + k), \\ U^{n+1} = U^n + \frac{k}{6}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4). \end{cases} \tag{1.3}$$

与 LMM 方法类似,Runge-Kutta method 也有定理保持 consistent, stable 和 convergence.

Theorem 1.10. 一个 Runge-Kutta method 是 consistent, 当且仅当若 (u, t) 在 f 的定义域中时满足

$$\lim_{k \to 0} \Phi(u, t; k) = f(u, t)$$

并且可以怎么 Euler method 的精确度为 2 阶,classical Runge-Kutta method 精确度为 5 阶..

1.3 程序实现结果

make run 将会输出 modified Euler method 和 classical Runge-Kutta method 在两个初值上不同步数计算的结果的误差和所用时间. 可以看出 Runge-Kutta method 误差会小很多, 并且计算所用时间只多一倍.

将它们的结果画出, 如下图所示, 其中红线是 2400000 步 modifiedEuler 法的计算结果作为精确解. 黄线为计算的近似解其中 Euler method 为 24000 步,Runge-Kutta method 为 6000 步.

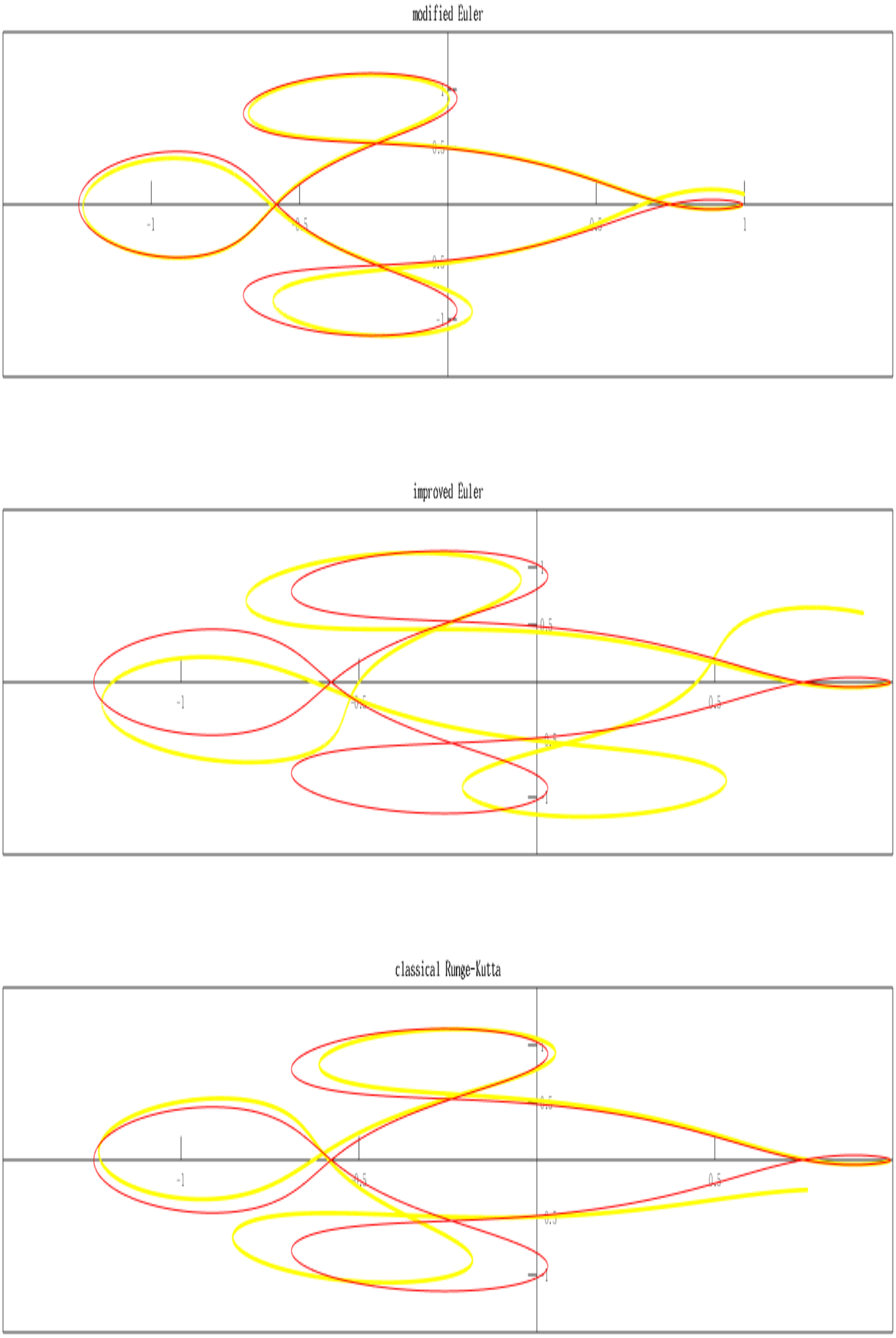

图 1.1: 第一组初始值的数值结果

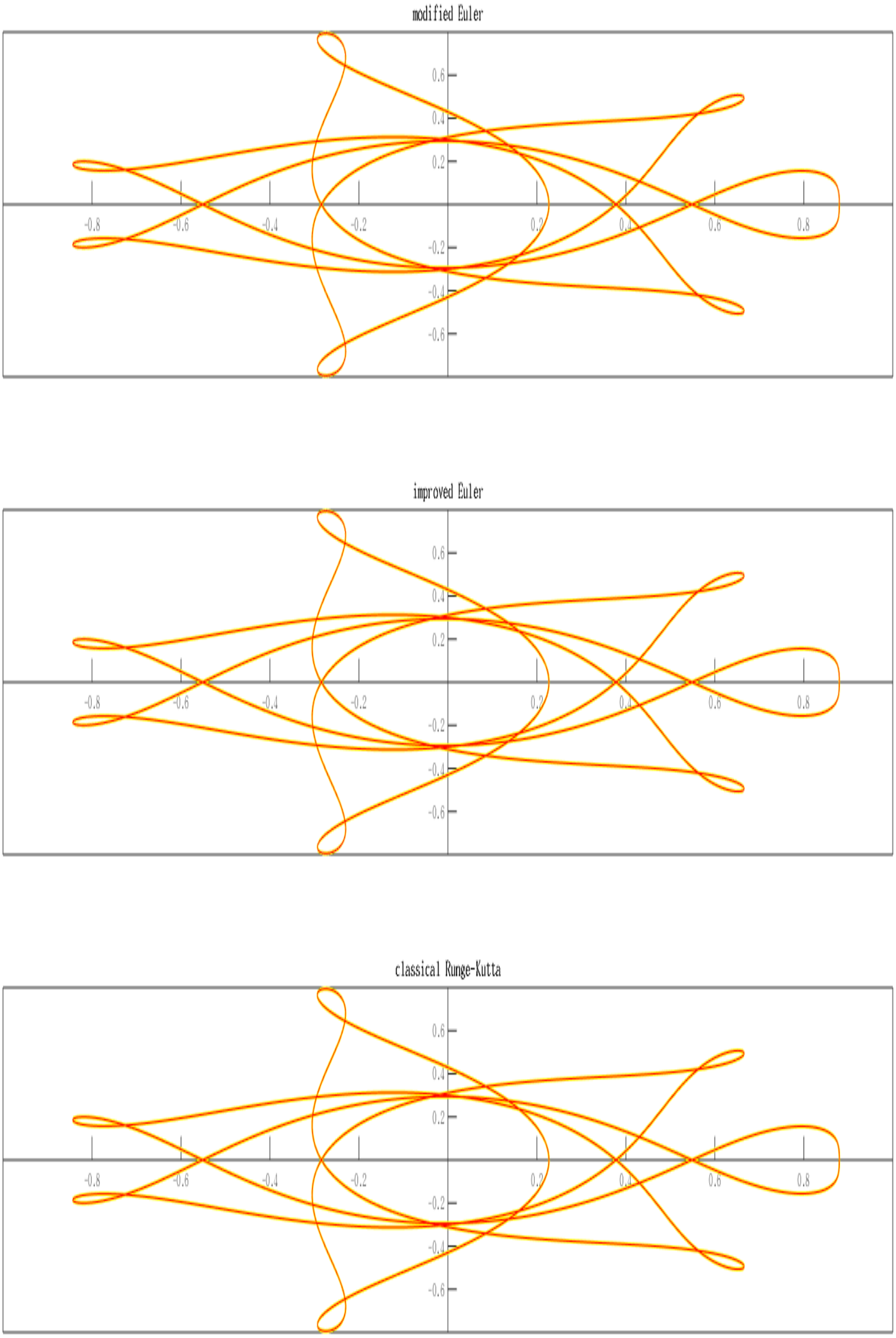

图 1.2: 第二组初始值的数值结果