Лабораторная работа 5

Шибко Татьяна

Вариант 5

Условие

1. Построить сетевой график для максимальной $t_{\text{пес}}$ продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью $P = 0,9973$) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью. Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{\text{пес}}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{\text{пес}} = t_{\max}$), а $t_{\text{опт}}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{\text{опт}} = t_{\min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта. Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Описывается на работы	$t_{\text{пес}}$	$t_{\text{вер}}$	$t_{\text{опт}}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	-	9	4	3	3
b_2	-	7	5	4	7
b_3	-	13	6	2	5
b_4	b_1	8	6	3	8
b_5	b_2	6	5	2	10
b_6	b_2	10	8	3	2
b_7	b_3	9	4	3	6
b_8	b_4, b_5	13	7	5	4
b_9	b_6, b_7	9	6	2	8
b_{10}	b_6, b_7, b_8	11	5	3	3
b_{11}	b_9	9	5	2	5

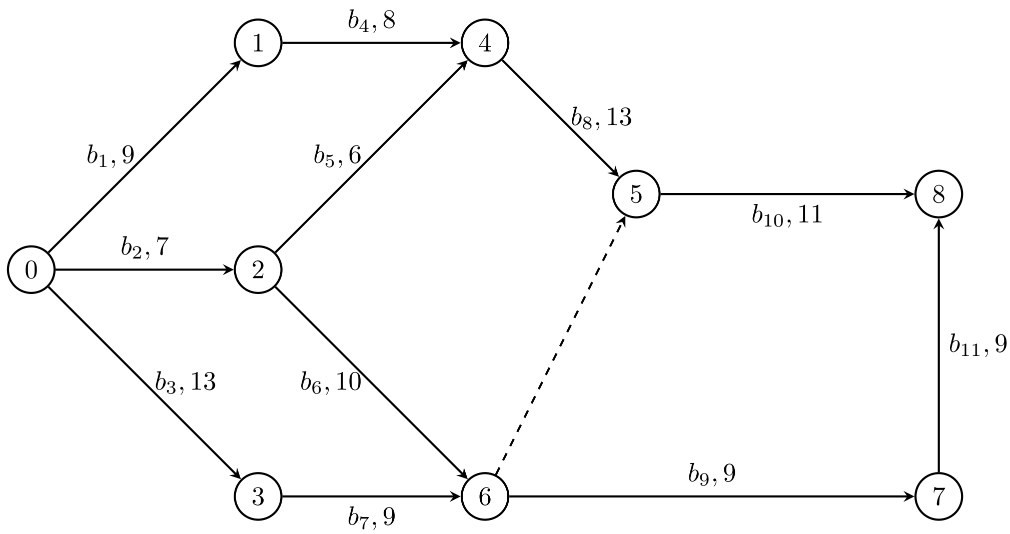
Таблица 1: Данные для сетевого графика

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T = 25$ Заданная надежность $\gamma = 0,90$. Стоимость одного дня проекта равна 11 денежным единицам: $S = 12$.

Задание 1

Построить сетевой график для максимальной $t_{\text{пес}}$ продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

Начнём с построения сетевого графика:



Теперь нужно рассчитать наиболее ранние сроки наступления событий, которые находим по формуле:

$$T_p(i) = \max_{j \subset i} \{T_p(j) + t_{ji}\}$$

Начинаем с Тр(0) = 0.

Тр(1) = Тр(0) $+t_{01}$ = 0 + 9 = 9;

Тр(2) = Тр(0) $+t_{02}$ = 0 + 7 = 7;

Тр(3) = Тр(0) $+t_{03}$ = 0 + 13 = 13;

Тр(4) = max{$T(1)$+t$_{14}$,Тр(2) + t_{24}} = $\max\{9 + 8, 7 + 6\} = 17, 15 = 17$;

Тр(5) = Тр(4) $+t_{45}$ = 17 + 13 = 30;

Тр(6) = max{$T(2)$+t$_{26}$,Тр(3) + t_{36}} = $\max\{7 + 10, 13 + 9\} = 17, 22 = 22$;

Тр(7) = Тр(6) $+t_{67}$ = 22 + 9 = 31;

Тр(8) = max{$T(5)$+t$_{58}$,Тр(7) + t_{78}} = $\max\{30 + 11, 31 + 9\} = 41, 40 = 41$;

Получаем $T_{\text{кр}} = 41$.

Теперь нужно рассчитать наиболее поздние сроки наступления собы тий, которые находим по формуле:

$$T_{\text{п}}(i) = \min_{j \supset i} \{T_{\text{п}}(j) - t_{ji}\}$$

Начинаем с $T_{\text{п}}(8) = T_{\text{кр}} = 41$.

Тп(7) = Тп(8) -t_{78} = 41 - 9 = 32;

Тп(6) = Тп(8) -t_{68} = 41 - 9 = 32;

Тп(5) = Тп(8) -t_{58} = 41 - 11 = 30;

Тп(4) = Тп(5) -t_{54} = 30 - 13 = 17;

Тп(3) = Тп(6) -t_{36} = 32 - 9 = 23;

Тп(2) = min{$T(4)$−t$_{24}$,Тп(6) - t_{26}} = $\min\{17 - 6, 32 - 10\} = 9, 22 = 9$;

Тп(1) = Тп(4) -t_{14} = 17 - 8 = 9;

Тп(0) $= \min\{T(3) - t_{03}$,Тп(2) - t_{02},Тп(1) - $t_{01}\} = \min\{13 - 13, 9 - 9, 9 - 9\} = 0, 0, 0 = 0;$

Внесём данные в таблицу:

Событие	Ранний срок, $T_р(i)$	Поздниц срок, $T_п(i)$	Резерв времени, $R(i)$
0	0	0	0
1	9	9	0
2	7	9	2
3	13	23	0
4	17	17	0
5	30	30	0
6	22	32	10
7	31	32	1
8	41	41	0

Критический путь проходит через события с нулевым резервом времени, т.е. через события 0,1,3,4,5,8.

Теперь найдём резервы времени работ. Наиболее ранний возможный срок начала работы $b_к$ = (i,j) равен наиболее раннему сроку наступления события i: $S_р(b_к)=T_р(i)$, а наиболее поздний допустимый срок окончания работы $b_к$= (i,j) равен наиболее позднему сроку наступления события j: $E_п(b_к)=T_п(j)$.

$$r_п(b_k) = r_п(i,j) = T_п(j) - T_р(i) - t_{ij} = E_п(b_k) - S_р(b_k) - t_{ij}$$

Независимый резерв времени работ найдем по формуле:

$$r_н(b_k) = r_н(i,j) = T_р(j) - T_п(i) - t_{ij}$$

Получим следующие данные:

Работа, $b_k = (i,j)$	Продолжительность работы, $t(b_k) = t_{ij}$	$S_р(b_k)$	$E_п(b_k)$	$r_п(b_k)$	$r_н$
$b_1 = (0,1)$	9	0	9	0	0
$b_2 = (0,2)$	7	0	9	2	0
$b_3 = (0,3)$	13	0	23	23	0
$b_4 = (1,4)$	8	9	17	0	0
$b_5 = (2,4)$	6	7	32	19	0
$b_6 = (2,6)$	10	7	32	15	3
$b_7 = (3,6)$	9	13	32	10	0
$b_8 = (4,5)$	13	17	30	0	0
$b_9 = (6,7)$	9	22	32	1	-10
b_{10}=(5,8)	11	30	41	0	0
b_{11}=(7,8)	9	31	41	1	0
ϕ=(6, 5)	0	22	30	8	-2

Осталось найти коэффициенты напряженности некритических дуг. Для начала определим критические работы(резервы времени работ равны нулю): b_1,b_4,b_8,b_{10}.

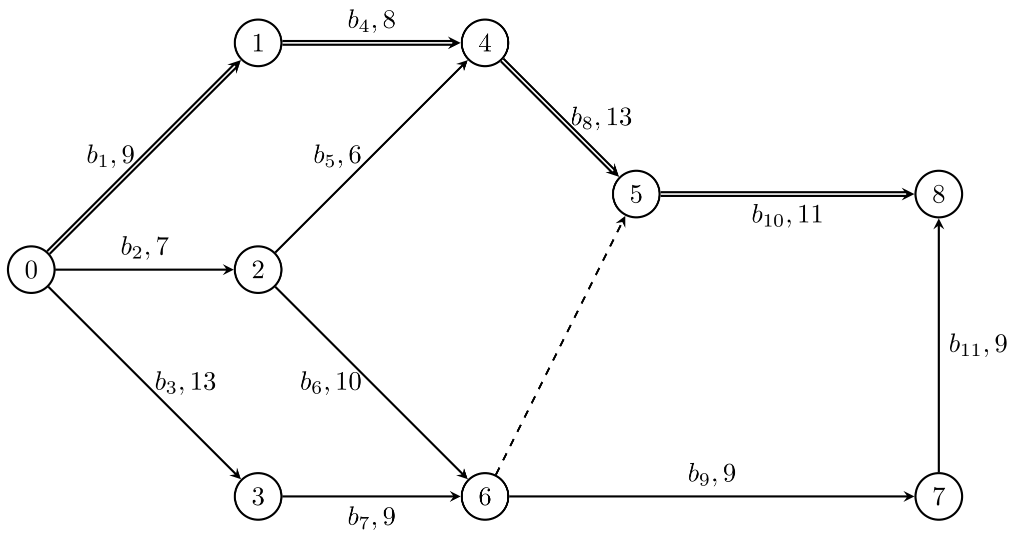
Резерв времени некритической дуги b находим как разность между длиной самой некритической дуги и длиной самой длинной некритической дуги:

$$R(b) = a - b$$

Коэффициент напряженности некритической дуги определим по формуле:

$$N(b) = \frac{b}{a} = 1 - \frac{R(b)}{a}$$

Выделим критический путь двойными стрелками.



Резервы времени и коэффициенты напряженности некритических дуг:

Некритические дуги	a	b	Резерв времени дуги, R(b)	Коэффициент напряженности дуги, N(b)
(0,2,4)	17	13	4	$13/17 \approx 0,76$
(0,2,6,5)	30	17	13	$17/30 \approx 0,56$
(0,3,6,5)	30	22	8	$22/30 \approx 0,73$
(0,2,6,7,8)	41	35	6	$35/41 \approx 0,85$
(0,3,6,7,8)	41	40	1	$40/41 \approx 0,97$

Получаем, что в критической зоне ($N(b) > 0.8$), кроме критического пути, также находятся дуги $(0, 3, 6, 7, 8)$ и $(0, 2, 6, 7, 8)$.

В подкритической зоне ($0.6 \leq N(b) \leq 0.8$) находится дуга $(0, 2, 4)$ и $(0, 3, 6, 5)$. В резервной зоне ($N(b) < 0.6$) дуга $(0, 2, 6, 5)$.

Задание 2

Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью $P = 0,9973$) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{\text{дир}} = 25$ дней. Заданная надежность $\gamma = 0,90$.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

Вернёмся к нашей таблице:

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$
b_1	-	9	4	3
b_2	-	7	5	4
b_3	-	13	6	2
b_4	b_1	8	6	3
b_5	b_2	6	5	2
b_6	b_2	10	8	3
b_7	b_3	9	5	3
b_8	b_4, b_5	13	7	5
b_9	b_6, b_7	9	5	2
b_{10}	b_6, b_7, b_8	11	5	3
b_{11}	b_9	9	5	2

Найдём ожидаемую продолжительность работ для трехпараметрической модели по формуле:

$$t_{ож} = \frac{t_{пес} + 4t_{вер} + t_{опт}}{6}$$

А для двухпараметрической модели найдём ожидаемую продолжительность по формуле:

$$t^*_{ож} = \frac{3t_{пес} + 2t_{опт}}{5}$$

Результаты для упрощения нужно округлить.

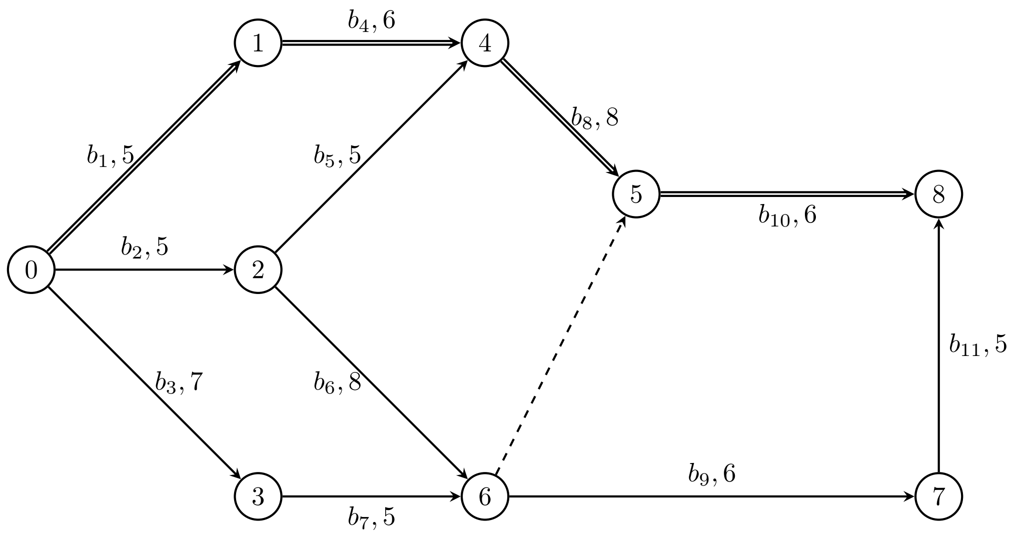
Также нам потребуется найти дисперсию продолжительностей работ по формуле:

$$\sigma^2(t_{ож}) = \left(\frac{t_{пес} - t_{опт}}{6}\right)^2$$

Теперь можно дополнить таблицу:

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	$t_{ож}$	$t^*_{ож}$	σ^2
b_1	-	9	4	3	5	7	1
b_2	-	7	5	4	5	6	0,25
b_3	-	13	6	2	7	9	3,36
b_4	b_1	8	6	3	6	6	0,69
b_5	b_2	6	5	2	5	4	0,4
b_6	b_2	10	8	3	8	7	1,36
b_7	b_3	9	4	3	5	7	1
b_8	b_4, b_5	13	7	5	8	10	1,7
b_9	b_6, b_7	9	6	2	6	6	1,36
b_{10}	b_6, b_7, b_8	11	5	3	6	8	1,7
b_{11}	b_9	9	5	2	5	6	1,36

Теперь построим сетевой график.



Ожидаемое критическое время $T_{\text{кр}} = 25$. На критическом пути лежат работы: b_1, b_4,b_8, b_{10}.

Найдём дисперсию критического пути:

$$\sigma^2_{\text{кр}} = \sigma^2(b_1) + \sigma^2(b_4) + \sigma^2(b_8) + \sigma^2(b_{10}) = 1 + 0,69 + 1,7 + 1,7 = 5,09$$

Среднеквадратическое отклонение критического пути:

$$\sigma_{\text{кр}} = \sqrt{5,09} = 2,25$$

Теперь найдём вероятность выполнения проекта не позднее $T_{\text{dir}} = 25$ дней:

$$P(t_{\text{кр}} \leq 25) = 0,5 + \Phi\left(\frac{25 - 25}{2,25}\right) = 0,5 + \Phi(0) = 0,5 + 0 = 0,5$$

Значит шансов выполнить проект не позднее заданного срока 50%.

Теперь найдём интервал гарантированного времени выполнения проекта. Воспользуемся правилом "трех сигм": $3\sigma_{\text{кр}} = 6,75 \approx 7$, т.е. с вероятностью $P = 0.9973$ проект будет выполнен за 25 ± 7 дней.

Оценим максимально возможный срок T выполнения проекта с заданной надежностью $\gamma = 0.90$. По таблице значений функции Лапласа найдем доверительный коэффициент z_γ для заданной надежности γ. Так как:

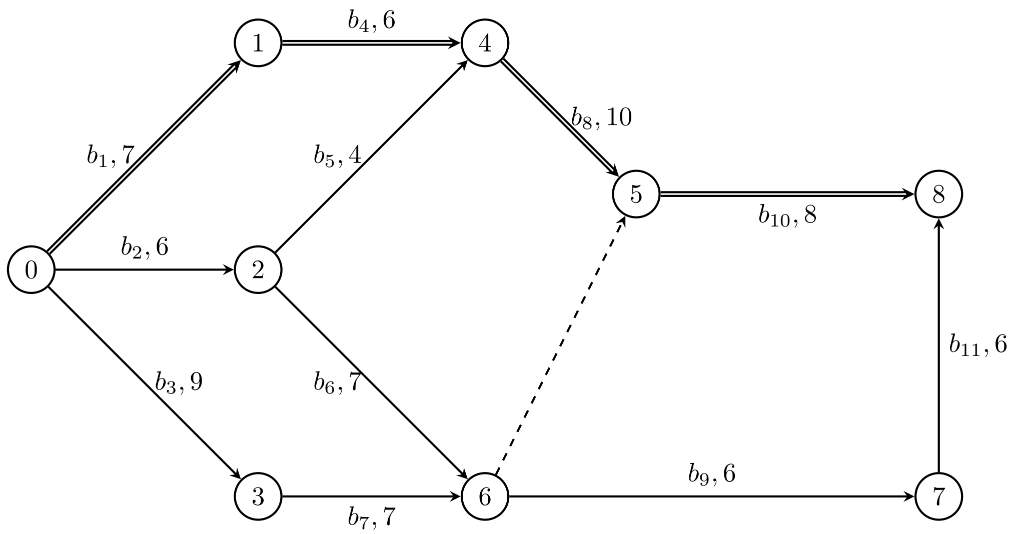
$$P(|t_{\text{кр}} - T_{\text{кр}}| \leq z_{0.90}\sigma_{\text{кр}}) = 2\Phi(z_{0.90}) = 0.90,$$

то из $2\Phi(z_{0.90}) = 0.90 \Rightarrow \Phi(z_{0.90}) = 0.45$ и $z_{0.90} = 1.64$. Теперь, получим:

$$P(|t_{\text{кр}} - 25| \leq 1,64 \cdot 2,25) = P(21,31 \leq t_{\text{кр}} \leq 28,69)$$

это значит, что с надежностью 0.90 проект будет завершен в период от 21 до 29 дней.

Теперь рассмотрим двухпараметрическую модель. Для начала построим структурный сетевой график.



Критический путь не изменился, а значит критическое время $T_{\text{кр}} = 31$. На критическом пути лежат всё те же работы:b_1, b_4,b_8, b_{10}. И дают ту же дисперсию $\sigma^2_{\text{кр}} = 5,09$ Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_{\text{кр}} \approx 2,25$

Теперь найдём вероятность выполнения проекта не позднее $T_{\text{dir}} = 25$ дней:

$$P(t_{\text{кр}} \leq 25) = 0.5 + \Phi\left(\frac{25-31}{2,25}\right) \approx 0,5 - 0,4953 = 0,0047$$

Значит шансов выполнить проект в заданный срок крайне мала.

Теперь найдём интервал гарантированного времени выполнения проекта. Воспользуемся правилом "трех сигм": $3\sigma_{\text{кр}} = 6,75 \approx 7$, т.е. с вероятностью $P = 0,9973$ проект будет выполнен за 31 ± 7 дней.

Оценим максимально возможный срок T выполнения проекта с заданной надежностью $\gamma = 0,90$. Используя прежде найденный $z_{0,90} = 1.64$, получим:

$$P(|t_{\text{кр}} - 31| \leq 1,64 \cdot 2,25) = P(27,31 \leq t_{\text{кр}} \leq 34,69)$$

это значит, что с надежностью 0,90 проект будет завершен в период от 27 до 35 дней.

Задание 3

Считая $t_{\text{пес}}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{\text{пес}} = t_{\max}$), а $t_{\text{опт}}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{\text{опт}} = t_{\min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

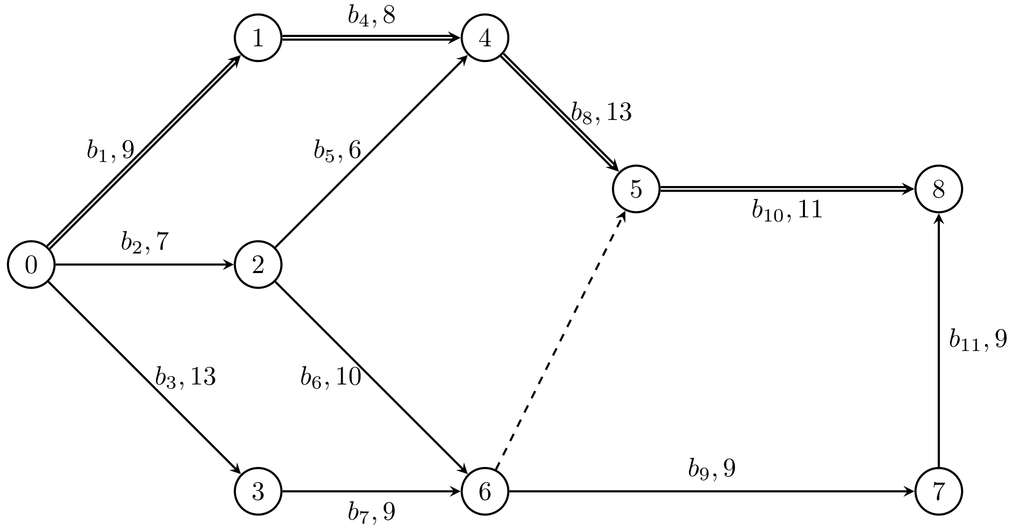
Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: $S = 12$.

Для решения задачи воспользуемся следующими данными:

Составим сетевой график для работ с максимальной продолжительностью:

Работа	Описывается на работы	$t_{\text{пес}}$	$t_{\text{опт}}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	-	9	3	3
b_2	-	7	4	7
b_3	-	13	2	5
b_4	b_1	8	3	8
b_5	b_2	6	2	10
b_6	b_2	10	3	2
b_7	b_3	9	3	6
b_8	b_4, b_5	13	5	4
b_9	b_6, b_7	9	2	8
b_{10}	b_6, b_7, b_8	11	3	3
b_{11}	b_9	9	2	5



Критический путь проходит через работы b_1, b_4, b_8, b_{10} и его длина составляет $T_{\text{кр}} = 41$ дней.

$T_{\text{кр}} = 41$. Стоимость проекта $S_{\max} = 41 * 12 = 492$ ден.ед.

Вспомним резервы некритичных дуг:

R(0,2,4) = 4

R(0,2,6,7,8) = 6

R(0,3,6,7,8) = 1

Следующие дуги включают фиктивную работу:

R(0,2,6,5) = 13

R(0,3,6,5) = 8

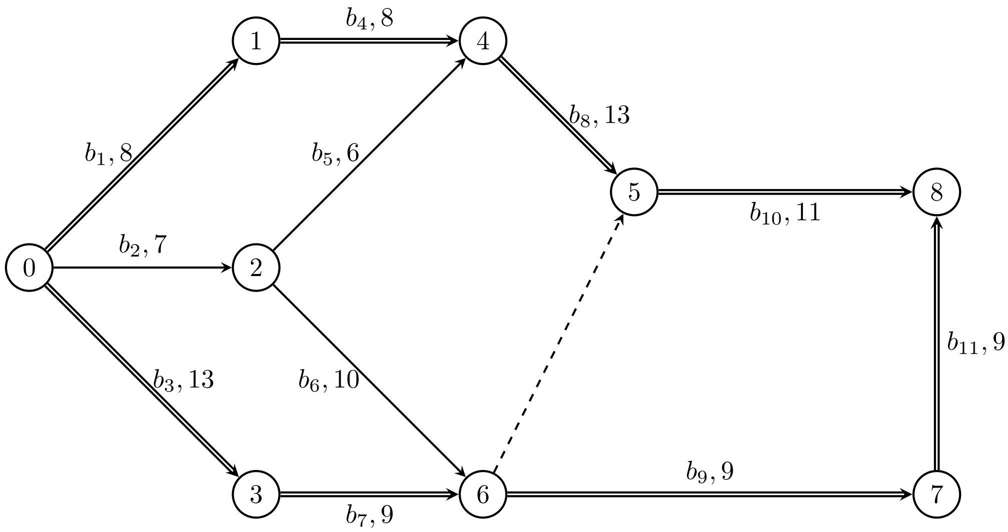
Наименьший резерв имеет дуга $(0, 3, 6, 7, 8)$. Он равен 1 дню.

Рассмотрим варианты сокращения работ на нашем критическом пути. Обозначим через Δ_k величину сокращения стоимости проекта при сокращении продолжительности работы b_k на 1 день, через t_k^c - количество дней, на которое можно сократить работу b_k, а через $\Sigma\Delta_k$ - суммарное сокращение стоимости проекта при сокращении продолжительности работы b_k на t_k^c дней.

$$\Delta_k = S - s_k,\ S = 12$$

Работа	t_{max}	t_{min}	s_k	$\Delta_k = S - s_k$	t_k^c	$\Sigma\Delta_k = \Delta_k \cdot t_k^c$
b_1	9	3	3	9	1	9
b_4	8	3	8	4	-	0
b_8	13	5	4	8	-	0
b_{10}	11	3	5	7	-	0

b_1 сокращать выгоднее, поэтому эту работу сократим на 1 день. Общее сокращение составит 9 единиц.



Критическое время этого варианта – 80 дней. Рассмотрим резервы новых некритических дуг.

R(0,2,4) $= 3$

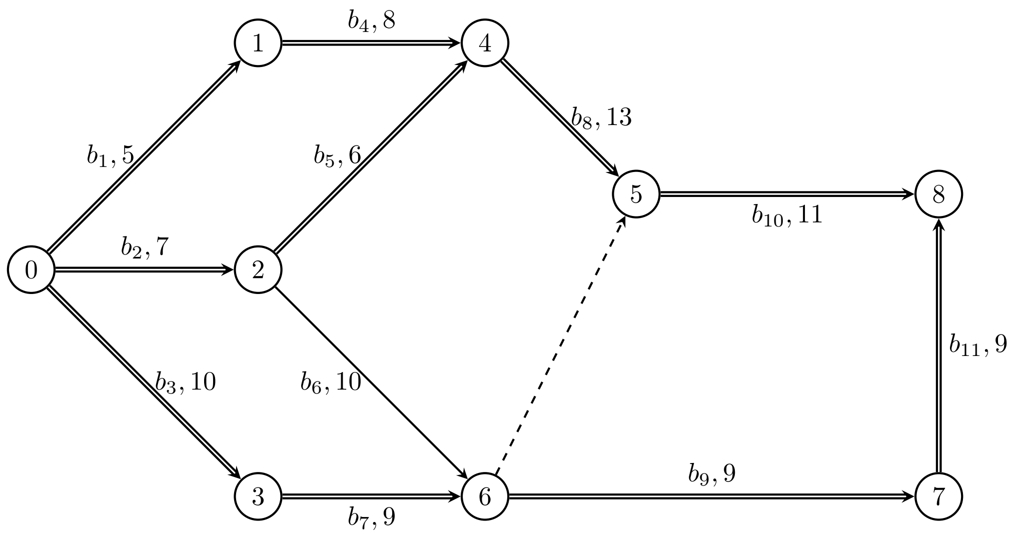
R(0,2,6) $= 5$

Наименьший резерв имеет дуга $(0, 2, 4)$. Он равен 3 дням.

Эта дуга опирается на следующую часть критического пути: $(0, 1, 4)$. Она опирается на работы b1 и b4, однако, если сокращать работу b1 или b4, то вместе с этим придется сокращать и работы b3, b7, b9, b11, т.к. они лежат на параллельном критичном пути.

Работа	Резерв сокражения	s_k	$\Delta_k = S - s_k$	t_k^c	$\Sigma\Delta_k = \Delta_k \cdot t_k^c$
$b_1 + b_3$	$\min\{8-3, 13-2\}$	8	4	3	12
$b_1 + b_7$	$\min\{8-3, 9-3\}$	9	3	-	0
$b_1 + b_9$	$\min\{8-3, 9-2\}$	11	1	-	0
$b_1 + b_{11}$	$\min\{8-3, 9-2\}$	8	4	-	0
$b_4 + b_3$	$\min\{8-3, 13-2\}$	15	-3	-	0
$b_4 + b_7$	$\min\{8-3, 9-3\}$	14	-2	-	0
$b_4 + b_9$	$\min\{8-3, 9-2\}$	16	-4	-	0
$b_4 + b_{11}$	$\min\{8-3, 9-2\}$	13	-1	-	0

Отсюда видно, что стоит сократить работу b1 + b3 на 3 дня, что сократит общую стоимость на 12 единиц. Обновим наш график:



Проверим резервы некритичных дуг:

R(2,6) = 2

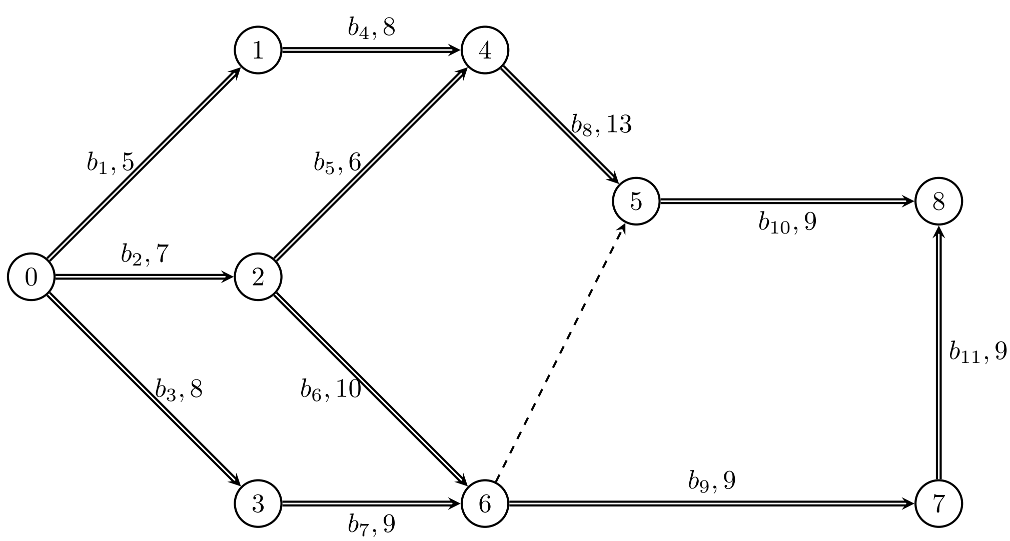
R(2,6,5) = 9

Наименьший резерв имеет дуга $(2, 6)$. Он равен 2 дням.

Эта дуга опирается на следующую часть критического пути: $(0, 3, 6)$, так как еявляется частью $(0, 2, 6)$. Она опирается на работы b_3 и b_7. Одну из них надо сократить. Длина пути $(0, 3, 6) = 19$, а длина $(0, 2, 6) = 17$. Параллельные дуги для пути $(0, 3, 6, 7, 8)$: $(0, 2, 4, 5, 8)$ и $(0, 1, 4, 5, 8)$. Если мы сократим $(4, 5)$ или $(5, 8)$, то оба пути сократяться. Но если сокращать $(0, 2)$ или $(2, 4)$, то нужно будет сократить $(0, 1)$ или $(1, 4)$, чтобы второй путь сократился.

Работа	Резерв сокражения	s_k	$\Delta_k = S - s_k$	t_k^c	$\Sigma\Delta_k = \Delta_k \cdot t_k^c$
$b_3 + b_8$	$\min\{10-2, 13-5\}$	9	3	-	-
$b_3 + b_{10}$	$\min\{10-2, 11-3\}$	8	4	2	8

Уменьшаем b_3 и b_10 на 2.



И так, у нас параллельные критические пути: $(0, 1, 4, 5, 8)$, $(0, 2, 4, 5, 8)$, $(0, 2, 6, 7, 8)$, $(0, 3, 6, 7, 8)$ Мы хотим сократить b_8=$(4, 5)$.

Значит нужно найти ещё способ одновременно сократить пути $(0, 2, 6, 7, 8)$ и $(0, 3, 6, 7, 8)$.

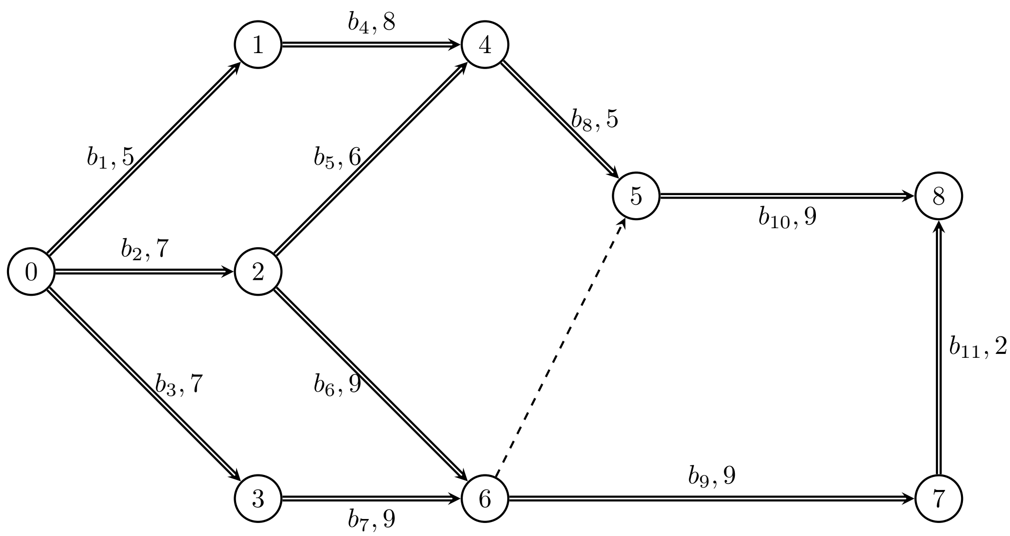
Можно взять $(6, 7)$ или $(7, 8)$, или $((2, 6)$ и $((0, 3)$ или $(3, 6)))$.

Если переводить на работы, то это b_9 или b_{11} или $b_6 + (b_3$ или $b_7)$.

Для пути $(0, 2, 6, 5, 8)$ резерв будет равен 9.

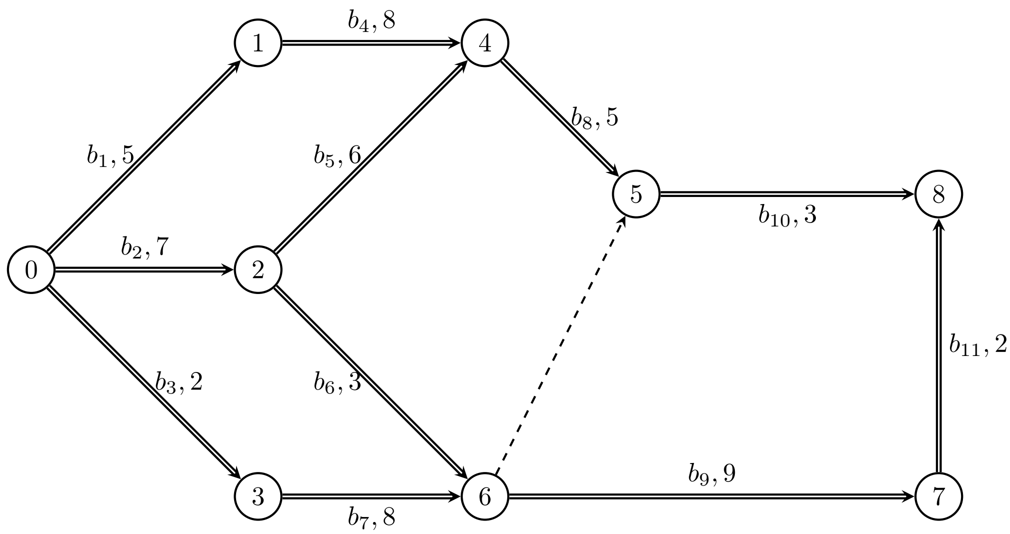
Работа	Резерв сокражения	s_k	$\Delta_k = S - s_k$	t_k^c	$\Sigma\Delta_k = \Delta_k \cdot t_k^c$
$b_8 + b_9$	$\min\{8, 7\} = 7$	12	0	-	0
$b_8 + b_{11}$	$\min\{8, 7\} = 7$	9	3	7	21
$b_8 + b_6 + b_3$	$\min\{8, 7, 6\} = 6$	11	1	1	1
$b_8 + b_6 + b_7$	$\min\{8, 7, 6\} = 6$	12	0	-	0

Теперь сокращаем на 7, b_8 и $b_1 1$, а потом на 1 b_8, b_6 и b_3.



И так, у нас параллельные критические пути: $(0, 1, 4, 5, 8)$, $(0, 2, 4, 5, 8)$, $(0, 2, 6, 7, 8)$, $(0, 3, 6, 7, 8)$. Теперь попробуем тоже самое сделать с $b_{10} = (5, 8)$.

Работа	Резерв сокражения	s_k	$\Delta_k = S - s_k$	t_k^c	$\Sigma\Delta_k = \Delta_k \cdot t_k^c$
$b_{10} + b_9$	$\min\{9 - 3, 9 - 2\} = 6$	11	1	-	0
$b_{10} + b_{11}$	$\min\{9 - 3, 2 - 2\} = 0$	8	4	-	0
$b_{10} + b_6 + b_3$	$\min\{9 - 3, 9 - 3, 7 - 2\} = 5$	10	2	5	10
$b_{10} + b_6 + b_7$	$\min\{9 - 3, 9 - 3, 7 - 3\} = 4$	11	1	1	1



Мы получили оптимальную стоимость пути. Минимальный срок выполнения = 25 дням.

Стоимость выполнения: 492 - 9 - 12 - 8 - 21 - 1 - 5 - 1 = 435 денежных единиц.