25. 证明：

①封闭性：$\forall x, y \in R$，$x * y = x + y + xy \in R$

②结合律：$\forall x, y, z \in R$ $(x*y)*z = x+y+xy+z+xz+yz+xyz$

$x*(y*z) = x*(y+z+yz) = x+y+z+yz+xy+xz+xyz$

$\therefore (x*y)*z = x*(y*z)$ *满足结合律

③有幺元 $\forall x \in R$ $x*0 = x+0+0 = x$

综合①②③得到$\langle R, * \rangle$是含幺半群

27. 证明：(1)

$\forall x \in S$，若 $x * x \neq x$，

则 $x*(x*x) \neq (x*x)*x$

与半群满足结合律矛盾。

$\therefore x*x = x$

(2) $\forall x, y \in S$

$x*(x*y*x) = x*x*y*x$ （结合律）

$= x*y*(x*x)$ （由(1)）

$= (x*y*x)*x$ （结合律）

$\therefore x = x*y*x$

(3) $\forall x, y, z \in S$

$(x*y*z)*(x*z) = x*y*(z*x*z)$ （结合律）

$= x*y*z$ （由(2)）

$= (x*z*x)*y*z$ （由(2)）

$= (x*z)*(x*y*z)$ （结合律）

$\therefore x*y*z = x*z$

27. 证明:　(1). $x * y = x * (x * x)$

$= (x * x) * x$　(结合律)

$= y * x$

(2) $y * y = (x * x) * y$

$= x * (x * y)$　(结合律)

由*运算的封闭性,可知 $x * y = x$ 或 $x * y = y$

① 若 $x * y = x$　则 $y * y = x * (x * y)$

$= x * x$

$= y$

② 若 $x * y = y$　则 $y * y = x * (x * y)$

$= x * y$

$= y$

即: $y * y = y$