2023 年第十五届全国大学生数学竞赛非数学专业初赛培训

一、注意考试范围：

不含向量值函数导数微分、微分方程组，但含向量代数与空间解析几何

(一) 高等数学

1. 函数、极限、连续

(1) 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.

(2) 函数的性质: 有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.

(4) 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.

(5) 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.

(6) 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.

(7) 函数的连续性 (含左连续与右连续)、函数间断点的类型.

(8) 连续函数的性质和初等函数的连续性.

(9) 闭区间上连续函数的性质 (有界性、最大值和最小值定理、介值定理) .

2. 一元函数微分学

(1) 导数和微分的概念、导数的几何意义和物理意义、函数的可导性与连续性之间的关系、平面曲线的切线和法线.

(2) 基本初等函数的导数、导数和微分的四则运算、一阶微分形式的不变性.

(3) 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法.

(4) 高阶导数的概念、分段函数的二阶导数、某些简单函数的 n 阶导数.

(5) 微分中值定理, 包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理等.

(6) 洛必达 (L'Hospital) 法则与求未定式极限.

(7) 函数的极值、函数单调性、函数图形的凹凸性、拐点及渐近线 (水平、铅直和斜渐近线)、函数图形的描绘.

(8) 函数最大值和最小值及其简单应用.

(9) 弧微分、曲率、曲率半径.

3. 一元函数积分学

(1) 原函数和不定积分的概念.

(2) 不定积分的基本性质、基本积分公式.

(3) 定积分的概念和基本性质、定积分中值定理、变上限定积分确定的函数及其导数、牛顿-莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式.

(4) 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法.

(5) 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分.

(6) 广义积分.

(7) 定积分的应用: 平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力及函数的平均值等.

4. 常微分方程

(1) 常微分方程的基本概念: 微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等.

(2) 变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利 (Bernoulli) 方程、全微分方程.

(3) 可用简单的变量代换求解的某些微分方程、可降阶的高阶微分方程.

(4) 线性微分方程解的性质及解的结构定理.

(5) 二阶常系数齐次线性微分方程、高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程.

(6) 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程: 自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积等.

(7) Euler 方程.

(8) 微分方程的简单应用.

5. 向量代数和空间解析几何

(1) 向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积.

(2) 两向量垂直、平行的条件、两向量的夹角.

(3) 向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦.

(4) 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程.

(5) 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离.

(6) 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程、常用的二次曲面方程及其图形.

(7) 空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

6. 多元函数微分学

(1) 多元函数的概念、二元函数的几何意义.

(2) 二元函数的极限和连续的概念、有界闭区域上多元连续函数的性质.

(3) 多元函数偏导数和全微分、全微分存在的必要条件和充分条件.

(4) 多元复合函数、隐函数的求导法.

(5) 二阶偏导数、方向导数和梯度.

(6) 空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线.

(7) 二元函数的二阶 Taylor 公式.

(8) 多元函数极值和条件极值、拉格朗日乘数法、多元函数的最大值、最小值及其简单应用.

7. 多元函数积分学

(1) 二重积分和三重积分的概念及性质、二重积分的计算 (直角坐标、极坐标)、三重积分的计算 (直角坐标、柱面坐标、球面坐标) .

(2) 两类曲线积分的概念、性质及计算、两类曲线积分的关系.

(3) Green 公式、平面曲线积分与路径无关的条件、已知二元函数全微分求原函数.

(4) 两类曲面积分的概念、性质及计算、两类曲面积分的关系.

(5) Gauss 公式、Stokes 公式、散度和旋度的概念及计算.

(6) 重积分、曲线积分和曲面积分的应用 (平面图形的面积、立体图形的体积、曲面面积、弧长、质量、质心、转动惯量、引力、功及流量等)

8. 无穷级数

(1) 常数项级数的收敛与发散、收敛级数的和、级数的基本性质与收敛的必要条件.

(2) 几何级数与 p 级数及其收敛性、正项级数收敛性的判别法、交错级数与莱布尼茨 (Leibniz) 判别法.

(3) 任意项级数的绝对收敛与条件收敛.

(4) 函数项级数的收敛域与和函数的概念.

(5) 幂级数及其收敛半径、收敛区间 (指开区间)、收敛域与和函数.

(6) 幂级数在其收敛区间内的基本性质 (和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)、简单幂级数的和函数的求法.

(7) 初等函数的幂级数展开式.

(8) 函数的傅里叶 (Fourier) 系数与 Fourier 级数、狄利克雷 (Dirichlet) 定理、函数在 $[-l,l]$ 上的 Fourier 级数、函数在 $[0,l]$ 上的正弦级数和余弦级数.

二、关于试题：

30 分填空题较常规，大题一般思路比较明确，最后一题有些难度。

多做练习，多总结方法、解题思路等。

$f(x)=\arctan x$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}$

$f(x)=xf'(\xi)$ $\Rightarrow \xi$

三、常用到的一些重要结论

1. 与极限相关

1) “$\frac{\infty}{\infty}$” 型洛必达法则

$\frac{\infty}{\infty}$

定理 若函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 满足：(i) 在 $[a,+\infty)$ 上都可导，且 $G'(x)\neq 0$；

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=\infty$； (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}=A$ (A 可为实数，也可为 $\pm\infty$) .

则 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}=A.$$

$(e^x f(x))'$

例 1 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=0$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

e^x构造 $F(x)=e^x f(x)$. $G(x)=e^x$. $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$

使用洛必达法则时需注意：由极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}=A$ 推得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=A$，反之不一定成立。

例 2 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内存在二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{x^2}=1$，则下列说法正确的是（ A ）.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2x}=1$

A $f''(0)=0$　　　　B $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值

C $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点　　　　D $(0,f(0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

如 $f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\frac{1}{x}+x^2, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{x^2}=1$，但是极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2x}$ 不存在.

2）stolz 定理

（1）设 $\{y_n\}$ 单调增加且趋于 $+\infty$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 存在或为 ∞,

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

（2）设 $\{y_n\}$ 单调减小且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 存在或为 ∞, 则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

3）已知结论

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

4）斯特林公式（Stirling 公式）

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$$

5）重要定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow f(x)=a+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

2. 与导数、微分相关

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

1）泰勒定理

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$R_n(x)$　$o((x-x_0)^n)$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\langle\nabla f(x_0),\Delta x\rangle+\frac{1}{2!}(\Delta x)^T \mathrm{H}_f(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

2）达布定理：

设$f(x)$在$[a,b]$内可导，则对介于$f_+'(a)$与$f_-'(b)$之间的一切值k，必有$\xi\in[a,b]$，使得$f'(\xi)=k$.

$f'(\xi)=0$

3）平面曲率

曲线$y=f(x)$在点(x,y)处的曲率为 $\kappa=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. 与积分相关

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx & f(x)\text{是偶函数}\\ 0 & f(x)\text{是奇函数}\end{cases}$.

(2) 设$f(x)$是R上以T为周期的分段连续有界函数，则$\forall a\in R$都有$\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

$x=\pi-t$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} & n\text{为奇数} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\dfrac{\pi}{2} & n\text{为偶数} \end{cases}.$

(5) $\int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$

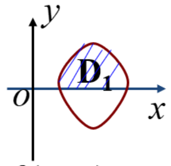
$\cos^n(\pi-x) = (-\cos x)^n$

$$\int_0^{\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, & n\text{是偶数} \\ 0, & n\text{是奇数} \end{cases}.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, & n\text{是偶数} \\ 0, & n\text{是奇数} \end{cases}.$$

(6) 对称性和轮换对称性简化计算

二重积分、三重积分、第一型线面积分结论类似：



如果积分域 D 关于 x 轴对称：你对称，我奇偶

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x,-y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{若 } f(x,-y) = f(x,y). \end{cases}$$

如果积分域 D 关于 $y=x$ 对称：

$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 　　轮换对称性

$\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_2} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 　　D_1, D_2 关于 $y=x$ 对称.

更一般地有结论：

若积分域 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\iint_D [f(x,y) + f(x,-y)]\mathrm{d}\sigma$$

例 2 计算 $I=\iint\limits_{D}\frac{(x^2+y^2)e^x}{1+e^x}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$.

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\left(\frac{(x^2+y^2)e^x}{1+e^x}+\frac{(x^2+y^2)e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)d\sigma.$$

$\frac{1}{1+e^x}$

若积分域 D 关于 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}\sigma$$

若积分域 D 关于坐标原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(-x,-y)]\mathrm{d}\sigma$$

若积分域 D 关于 $y=-x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(-y,-x)]\mathrm{d}\sigma$$

若积分域 V 关于 yOz 面对称，则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)}[f(x,y,z)+f(-x,y,z)]\mathrm{d}V$$

第二型线面积分对称性结论刚好相反

（7）曲线坐标变换

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(V')} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

4. 与无穷级数相关

定理 1（Raabe 准则）

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$a_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$，则

（1）当 $r>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．（2）当 $r<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．

定理 2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n>0$, a_n 单调减，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同敛散；$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} m^n a_{m^n}$ ($m\geq 2$ 是自然数) 同敛散.

事实上, 一方面,

$$A_{2^k}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^k a_{2^k}.$$

而另一方面,

$$\begin{aligned}A_{2^k}&=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})\\&>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^k a_{2^k}).\end{aligned}$$

由此即得所求结果.

5. 与微分方程相关——常数变易法思想的重要性

① 对 $y'+P(x)y=Q(x)$，用常数变易法法求得其通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$

② 对二阶线性齐次微分方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$，其中 $a_1(x), a_2(x)$ 连续，若已知其一个非零解 y_1，则令其另一解 $y_2=C(x)y_1$，可求得 $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx$.

③ 对二阶线性非齐次微分方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=Q(x)$，其中 $a_1(x), a_2(x), Q(x)$ 连续. 如果求得其对应齐次方程的通解 $y=C_1y_1+C_2y_2$，则令非齐次方程的解为 $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$，求一阶导数，不妨令 $C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0$，再求二阶导数代入方程可得 $C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=Q(x)$，联立解得 $C_1'(x)=\frac{Q(x)y_2}{y_1'y_2-y_1y_2'}$, $C_2'(x)=\frac{-Q(x)y_1}{y_1'y_2-y_1y_2'}$，故原二阶线性非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y_1\int\frac{Q(x)y_2}{y_1'y_2-y_1y_2'}dx-y_2\int\frac{Q(x)y_1}{y_1'y_2-y_1y_2'}dx.$$

6. 一些重要不等式

1）均值不等式： $$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\leqslant\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$$

2）柯西-施瓦茨不等式： $|\langle\alpha,\beta\rangle|\leq\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle}$，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

3）Jensen 不等式

若 $f(x)\in R[a,b]$，且 $m\le f(x)\le M$，$\varphi(x)$是$[m,M]$上的连续下凸函数($\varphi''(x)\ge 0$)，则有 $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$.

离散形式：$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)$

4）holder 不等式：若 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，$p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

特例：柯西不等式 $\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$

5）Minkowski 不等式：若 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，$p\ge 1$，则

$$\left(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

6）Chebyshev 不等式：

若 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，且在$[a,b]$上的单调性一致，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若 $f(x),g(x)$的单调性不一致，则不等号反号.

7）康托洛维奇(Kantorovich)不等式

若 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，且$0\le m\le f(x)\le M$，则

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right)\le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

证明思路：$\dfrac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)}\le 0$，两边积分，再用均值不等式即可.

更一般形式：

设对称正定矩阵 $G\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的最大、最小特征值分别为 $\lambda_{\max}$，$\lambda_{\min}$，则对任意向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\frac{(x^TGx)(x^TG^{-1}x)}{(x^Tx)^2}\leqslant\frac{(\lambda_{\max}+\lambda_{\min})^2}{4\lambda_{\max}\lambda_{\min}}$$

8）一些函数的不等式：

$x>0$时，$x-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x<x$； $0<x<\dfrac{\pi}{2}$上，$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$， $x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3$.

四、考试真题讲解

2022 年 11 月 12 试题

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

（1）极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1+x^2-\cos^2 x}=$________ .

（2）设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1, & x\ge1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 则复合函数 $f[g(x)]$ 的间断点为 $x=$___ .

（3）极限 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=$________.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((n^2+n)x^{n-1}-nx^{n-1}\right)$

$=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''-x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'$

$=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''-x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$

$=x\left(\dfrac{x^2-1+1}{1-x}\right)''-x\left(\dfrac{x-1+1}{1-x}\right)'=\dfrac{2x}{(1-x)^3}-\dfrac{x}{(1-x)^2}$

（4）微分方程 $\frac{dy}{dx}x\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$ 的通解为________.

$\frac{dy}{dx}\sin y+\frac{1}{x\ln x}\cos y=\frac{\cancel{x}}{x\ln x}\cos^2 y$

令 $u=\cos y$, $\frac{du}{dx}-\frac{1}{x\ln x}u=\frac{-1}{\ln x}u^2$

$p=u^{1-2}=\frac{1}{u}$ $\frac{dp}{dx}+\frac{1}{x\ln x}p=\frac{1}{\ln x}$

（5）记 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x+y\le\frac{\pi}{2},0\le x-y\le\frac{\pi}{2}\right\}$，则 $\iint\limits_D y\sin(x+y)dxdy=$________.

二、（本题满分 14 分） 记向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 a，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OB}$，$0\le\lambda\le1$.（1）问当 λ 为何值时，$|\overrightarrow{PQ}|$ 取得最小值；

（2）设（1）中的 λ 满足 $0<\lambda<\frac{1}{5}$，求夹角 a 的取值范围.

三、（本题满分 14 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶可导，$f(0)=1$，且当 $x\ge0$ 时，$f(x)\ge0$, $\boxed{f'(x)\le0,\ f''(x)\le f(x)}$，证明：$f'(0)\ge-\sqrt{2}$.

$x>0$, $[0,x]$ $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$

$[0,x]$. $f'(x)-f'(0)=f''(\xi)x$.

$f'(x)\le0\Rightarrow f(x)在x>0$ ↓.

$0\le f(x)\le1$.

构 $g(x)=f'^2(x)-f^2(x)$　　$g'(x)=2f'(x)(f''(x)-f(x))\ge0$.

$g(x)\ge g(0)=f'^2(0)-1$　　$f'^2(0)\le f'^2(x)-f^2(x)+1\le1+f'^2(x)\le1+\frac{1}{x^2}$

$x\in[0,1]$

$f'(\xi)=\frac{f(x)-1}{x}\Rightarrow-\frac{1}{x}\le f'(\xi)\le0$　　$f'^2(0)\le2$.

四、(本题满分 14 分) 证明：对任意正整数 n，恒有：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 dx \le \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2$.

I

$n=1$ 验证成立！

$n\geq 2$

$|\sin nx| \le n\sin x$

$x-\frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x$

$\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le 1$

$I \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\left(\frac{\pi}{2x}\right)^4 dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^3}dx$?

$I \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, n^4\, dx$

$I = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2n}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}}_{I_2}$

$I_1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2n}} x\cdot n^4 dx = \frac{\pi^2}{8}n^2.$

$I_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^3}dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{1}{-2x^2}\Big|_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4n^2}{\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2}\right)$

$= \frac{\pi^2}{8}(n^2-1)$

$$\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,t)\,dt\right)' = f(x,\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x) + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_x(x,t)\,dt.$$

五、(本题满分 14 分) 设 $z=f(x,y)$ 是区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 上的可微函数，$f(0,0)=0$，且 $dz|_{(0,0)}=3dx+2dy$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}$. $=I$

$I = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,du}{\frac{1}{4}x^4} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x\int_x^{\sqrt{x^2}} f(x^2,u)du + \int_0^{x^2}(-f(t,x))dt}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\int_0^{x^2} f(t,x)dt}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-f(\xi,x)\cdot x^2}{x^3}$

$0<\xi<x^2.$

$= -\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3\xi+2x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})}{x} = -2-\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{o(\sqrt{\xi^2+x^2})}{\sqrt{\xi^2+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{\xi^2+x^2}}{x} = -2$

$0<\frac{\xi}{x}<x$

$f(x,y) = f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}) = 3x+2y+o(\sqrt{x^2+y^2})$

六、（本题满分 14 分）设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $=S$ 收敛，证明：存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

$\sum 2^n a_n$

$S.$ $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ $R_n=S-S_n.$

记 $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$, $R_n \downarrow$

$a_n=R_{n-1}-R_n.$ 取 $b_n=\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n}>0.$ $R_0=S$

$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sqrt{R_0}-\sqrt{R_n}=\sqrt{S}-\sqrt{R_n}\to\sqrt{S}.$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n-1}-R_n}{\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n}}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n})=0.$

2022 年12 月11 日

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

（1）函数 $f(x)=2x^3-6x+1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的值域为________.

（2）设 $x\in(-\infty,+\infty)$，则极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(ne^x+i)(ne^x+i+1)}$ =________.

（3）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+4xy+e^y=1$ 确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ =________.

（4）设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint_D (x+y-x^2)dxdy$ =________.

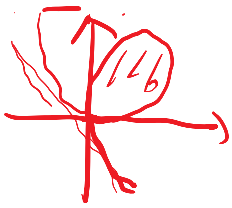
（5）设可微函数 $f(x,y)$ 对任意 u,v,t 满足 $f(tu,tv)=t^2 f(u,v)$，点 $P(1,-1,2)$ 位于曲面 $z=f(x,y)$ 上，又设 $f_x'(1,-1)=3$，则该曲面在店 P 处的切平面方程为________.

二、（本题满分 14 分） 设函数 $z=f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，$u=\sqrt{x^2+y^2}$，且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$

三、（本题满分 14 分）设曲线 $C: x^3+y^3-\dfrac{3}{2}xy=0$.（1）已知曲线 C 存在斜渐近线，求其斜渐近线的方程；（2）求由曲线 C 所围成的平面图形的面积.



四、（本题满分 14 分）证明：当 $a>0$ 时，$\left(\dfrac{2a+2}{2a+1}\right)^{\sqrt{a+1}}>\left(\dfrac{2a+1}{2a}\right)^{\sqrt{a}}$.

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+1}\ln\left(1+\dfrac{1}{2a+1}\right)>\sqrt{a}\ln\left(1+\dfrac{1}{2a}\right)\cdot\sqrt{2}$

$f\left(\dfrac{1}{2a+1}\right)>f\left(\dfrac{1}{2a}\right)$

$\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{1+(2a+1)}\ln\left(1+\dfrac{1}{2a+1}\right)>\sqrt{2a}\ln\left(1+\dfrac{1}{2a}\right)\cdot\sqrt{2a+1}$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\ln(1+x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}\ln(1+x)$ $\downarrow$

五、（本题满分 14 分） 计算曲线积分 $I=\oint_\Gamma (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2Rx\\ x^2+y^2=2rx\end{cases}(0<r<R, z\geq 0)$，方向与 z 轴正向符合右手螺旋法则.

六、（本题满分 14 分）证明方程 $x=\tan\sqrt{x}$ 有无穷多个正根，且所有正根 $\{r_n\}$ 可以按递增顺序排列为 $0<r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots$，并讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cot\sqrt{r_n}\right)^{\lambda}$ 的收敛性，其中 λ 是正常数.

$\sqrt{x}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\left((k-1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^2,\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right)$ $k=1,2,\dots$

2023 年 3 月 5 日

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

（1）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\left[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right]=$__________.

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某一邻域内可微，且满足

$$f(1+x)-3f(1-x)=4+2x+o(x),$$ $f(1)$

其中 $o(x)$ 是当 $x\to 0$ 时 x 的高阶无穷小，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

__________.

（3）设 $y=y(x)$ 是初值问题 $\begin{cases} y''-2y'-3y=1, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$ 的解，则 $y(x)=$__________.

（4）设可微函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z^2$，又设 $u=x$，$v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，$w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$，则对函数 $w=w(u,v)$，偏导数 $\left.\dfrac{\partial w}{\partial u}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}=$__________.

$W(u,v)=W(x(u,v),y(u,v))$

（5）设 $a>0$，则均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0)$ 的重心坐标为__________.

二、（本题满分 14 分）设函数 $f(x)=e^{-x}\underbrace{\int_0^x\frac{t^{2023}}{1+t^2}dt}_{g(x)}$，正整数 $n\le 2023$，求导数 $f^{(n)}(0)$.

$g^{(k)}(0)\ \cdots$

$g'(x)=\dfrac{x^{2023}}{1+x^2}$

$g'(0)=0$

$g'(x)\cdot(1+x^2)=x^{2023}$

$g'(0)=0\ \cdots$

$k\le 2023$

$g^{(k)}(0)=0.$

三、（本题满分 14 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{3})}{x}=0$. 证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

$x\to 0.$ n 确定

$f(x)=f(\frac{x}{3})+x\cdot\alpha_1(x)$

$f(\frac{x}{3})=f(\frac{x}{3^2})+\frac{x}{3}\alpha_2(\frac{x}{3})\ \cdots\ f(\frac{x}{3^{n-1}})=f(\frac{x}{3^n})+\frac{x}{3^{n-1}}\alpha_n(\frac{x}{3^{n-1}})$

$f(x)=f(\frac{x}{3^n})+x\underbrace{\left(\alpha_1(x)+\frac{1}{3}\alpha_2(\frac{x}{3})+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\alpha_n(\frac{x}{3^{n-1}})\right)}_{\alpha(x)}$

$x\to 0$

$f(x)=f(\frac{x}{3^n})+x\alpha(x)$ $n\to\infty$ $f(x)=x\alpha(x)$

四、（本题满分 14 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=2$. 证明：存在两两互异的点 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得

$x_1\in[0,\xi_3]$ $x\in[\xi_3,1]$ φ

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_3}\geq 2.$$

$f(\xi_3)=?$

2020 年第十二届预赛试题

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，试证：

~~(1) 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=2-3x_0$；~~

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$。

$g(x)=f(x)+x$

五、（本题满分 14 分） 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续的偶函数，计算曲线积分：

$I=\oint_L \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$，其中曲线 L 为正向圆周 $x^2+y^2=-2y$.

六、（本题满分 14 分）设函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+e^{-t}\sin^3 t}\mathrm{d}t$，$(x>0)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 收敛，且 $\frac{1}{3}<\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})<\frac{5}{6}$.

0

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ $\leq$