РЯДЫ

1. **Общие понятия. Числовые ряды**
2. **Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами**
3. **Числовые ряды с членами произвольного знака**
4. **Степенные ряды**
5. **Ряды Тейлора и Маклорена**
6. **Приложения степенных рядов**

1. Общие понятия. Числовые ряды

Выражение вида

$$\boxed{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

называется ***рядом***, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – члены ряда, a_n – ***общий*** член ряда.

Ряд считается заданным, если определена формула общего члена (зависимость a_n от номера n).

Если члены ряда – числа, то ряд называется ***числовым***, если функции, то ***функциональным***, причем если функции степенные, то ряд называется ***степенным***.

Например,

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+1} = \frac{2}{4} + \frac{2}{7} + \frac{2}{10} + \ldots$ – числовой ряд;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \cos x + \cos 2x + \ldots$ – функциональный ряд;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 \ldots$ – степенной ряд.

Сумма n первых членов ряда $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется n-ой ***частичной суммой*** ряда, а выражение $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} \ldots = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ – n-ым ***остатком*** ряда.

Остановимся подробнее на числовых рядах (с действительными членами).

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется ***сходящимся***, если его n-я частичная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ имеет конечный предел при $n \to +\infty$. Число

$$\boxed{S = \lim_{n\to+\infty} S_n}$$

называется при этом ***суммой*** ряда. Если $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не существует или не является конечным, то ряд называют ***расходящимся***.

Пример 1. Ряд (***геометрическая прогрессия***)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots \quad (a \neq 0)$$

сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$ и его сумма определяется формулой $S = b/(1-q)$.

Решение. Действительно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \dfrac{b(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} - b \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{1-q}.$$

Возможны следующие случаи в зависимости от величины q:

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to +\infty$. Поэтому $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$, ряд геометрической прогрессии сходится и его сумма равна $S = b/(1-q)$.

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to +\infty$. Поэтому $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$ и ряд геометрической прогрессии расходится.

3. Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ рассматриваемый ряд $b + b + b + \cdots + b + \cdots$ расходится, так как n-я частичная сумма $S_n = b \cdot n \to +\infty$ при $n \to +\infty$; а при $q = -1$ ряд $b - b + b - b + b - b + \cdots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $S_1 = b$, $S_2 = 0$, $S_3 = b$, $S_4 = 0$, … не имеет предела при $n \to +\infty$.

Свойства числовых рядов:

1) Если к ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$, где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$ расходится.

3) Если ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$, причем $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$.

4) Члены сходящегося ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя их местами.

Необходимый признак сходимости ряда. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится*, то его общий член стремится к нулю, т. е.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.}$$

Доказательство.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = |\text{ряд сходится}| = S - S = 0.$$

Следствие (***достаточное условие расходимости***). Если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не существует или не равен нулю, то ряд расходится:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{расходится}}$$

Если $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, то ряд может сходиться (в одних случаях) или расходиться (в других).

Пример 2. Выяснить, сходится или расходится ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{n+4}=\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{9}{9}+\frac{11}{10}+\cdots;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ (***гармонический ряд***);

в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}+\cdots.$

Решение. а) Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n+4}=2\neq 0$, то выполняется достаточное условие расходимости ряда и рассматриваемый ряд расходится.

б) Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, то необходимый признак сходимости выполняется.

Однако можно заметить, что

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+n}\geq\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2},$$

что противоречит сходимости этого ряда, т. к. в случае его сходимости $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0$.

Следовательно, гармонический ряд расходится.

Рассмотренный пример показывает, что необходимый признак сходимости достаточным в общем случае не является.

в) Необходимый признак сходимости выполняется, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$. Проверим по определению, является ли этот ряд сходящимся. Имеем:

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\to 1=S \text{ при } n\to+\infty.$$

Таким образом, ряд сходится и его сумма равна 1.

2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Рассмотрим ряд, члены которого знакопостоянны (неположительны или неотрицательны). Не ограничивая общности, считаем, что члены ряда положительны.

Ясно, что для таких рядов остается в силе необходимый признак сходимости. Приведем некоторые достаточные признаки сходимости.

Интегральный признак Коши. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$.

Если члены ряда могут быть представлены как значения некоторой неотрицательной, непрерывной, убывающей на промежутке $[1,+\infty)$ функции $f(x)$: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $\ldots$, $a_n = f(n)$, $\ldots$, тогда если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд сходится, если интеграл расходится, то и ряд расходится.

Пример 3. Показать, что ***обобщенный гармонический ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Решение. Если $\alpha \leq 0$, то общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится (достаточное условие расходимости).

В случае $\alpha > 0$ применим интегральный признак Коши. Функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ непрерывна, положительна и убывает при $x \geq 1$. При $\alpha \neq 1$ имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_1^A x^{-\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^A =$$

$$\lim_{A \to +\infty} \left(\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, \text{если } \alpha > 1, \\ +\infty, \qquad \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$, то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A \to +\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim\limits_{A \to +\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty$.

Значит, интеграл, а соответственно, и данный ряд, сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \leq 1$.

Непредельный признак сравнения. Пусть имеется два ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n, a_n \geq 0, b_n \geq 0$. Если неравенство $a_n \leq b_n$. выполняется для всех n, начиная с некоторого номера, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ – расходимость ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Предельный признак сравнения. Пусть имеется два ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n, a_n \geq 0, b_n \geq 0$. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0; \neq \infty}$, то ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся (или расходятся) одновременно.

Сходимость многих рядов можно исследовать сравнением с

- рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$, который сходится при $|q| < 1$;
- гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, который расходится;
- обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$, где $P_k(n)$ и $Q_l(n)$ – многочлены от n степени k и l соответственно, решается сравнением с обобщенным гармоническим рядом при $\alpha = l - k$.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0$. Если $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l}$, то:

- при $l < 1$ ряд сходится,
- при $l > 1$ ряд расходится,
- при $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Даламбера доказывается сравнением с геометрической прогрессией.

Замечания. 1. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражения вида $n!$ или a^n.

2. Признак Даламбера не требует проверки необходимого признака сходимости.

3. Числовые ряды с членами произвольного знака

Числовой ряд

$$\boxed{a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n},$$

где $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, называется ***знакочередующимся***.

Признак Лейбница (достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда). Если для *знакочередующегося* ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ выполнены условия:

1) *модули членов ряда монотонно убывают*: $\boxed{a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n \geq \ldots}$,

2) *предел общего члена ряда равен нулю*: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$,

то ряд *сходится* и его сумма не превосходит первого члена: $S \leq a_1$, а остаток ряда $R_n = S - S_n$ удовлетворяет неравенству $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Ряды, для которых выполняется признак Лейбница, называются рядами Лейбница (лейбницевского типа).

Числовой ряд, содержащий бесконечно много отрицательных и положительных членов, называется ***знакопеременным***. Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, составленный из модулей членов знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, то сходится и знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Для знакопеременных рядов рассматриваются два вида сходимости: абсолютная и условная.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из модулей его членов: $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| - cx$.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n - сх.$ $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| - расх.$

Абсолютно сходящиеся ряды обладают не только всеми *свойствами сходящихся* рядов, но и *дополнительно* свойствами сумм конечного числа слагаемых. Такие ряды можно 1) *перемножать*, 2) *переставлять* местами члены ряда, 3) *подставлять* «ряд в ряд». Условно сходящиеся ряды такими свойствами не обладают. Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или даже расходящийся ряд (*теорема Римана*).

Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости рядов с положительными членами, заменяя всюду общий член ряда его модулем.

4. Степенные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, членами которого являются функции, называется **функциональным**. Придавая x определенное значение x_0, получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u(x_0)$. Если полученный числовой ряд сходится, то x_0 - ***точка сходимости*** ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, если расходится - точка расходимости. ***Областью сходимости*** функционального ряда называется множество всех точек сходимости.

В области сходимости функционального ряда его ***сумма*** является некоторой *функцией* $S(x)$ переменной x. Определяется она в области сходимости равенством $S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - n-$ая частичная сумма ряда.

Частным случаем функциональных рядов являются ***степенные ряды***, т.е. ряды, вида

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots c_n(x-a)^n+\dots=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-a)^n$$

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$$

где c_0, $c_1,\dots,$ – действительные числа - ***коэффициенты*** ряда, a – некоторое число.

От первого ряда можно перейти ко второму, заменив $x-a$ на x. Поэтому дальше будем рассматривать ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$.

Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ всегда содержит, по крайней мере, одну точку: $x=0$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ сходится при $x=x_0\neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x|<|x_0|$; если же ряд расходится при $x=x^*$ то он расходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x|>|x^*|$.

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ называют число $R>0$ такое, что при $|x|<R$ ряд абсолютно сходится, а при $|x|>R$ расходится, интервал $(-R;R)$ называют ***интервалом*** (промежутком) ***сходимости*** степенного ряда.

Чтобы получить *область сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$, нужно найти интервал сходимости этого ряда и исследовать вопрос о сходимости соответствующих числовых рядов на концах интервала сходимости (т.е. при $x=-R$ и при $x=R$).

Замечание.

1. Если степенной ряд сходится лишь в одной точке, то считают, что $R=0$, если на всей числовой оси, то $R=+\infty$.

2. Для ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид $(x_0-R;x_0+R)$, дополнительное исследование проводится на концах при $x=x_0-R$ и при $x=x_0+R$.

Таким образом, *областью сходимости* степенного ряда является интервал сходимости с возможным присоединением одного или двух его концов (тех, где соответствующий числовой ряд сходится).

Для ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ радиус сходимости можно найти по формуле: $R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Однако интервал сходимости рядов *удобно определять* с помощью признака Даламбера, непосредственно применяя его к ряду, составленному из модулей членов исходного ряда. Так поступают, если степенной ряд содержит не все степени x или записан по степеням $(x-x_0)$, где x_0 – некоторое число, т.е. если ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^n$ и в других случаях.

Свойства степенных рядов: степенные ряды внутри интервалов сходимости обладают всеми свойствами абсолютно сходящихся рядов и дополнительно их можно 1) *дифференцировать* и 2) *интегрировать*, при этом радиус сходимости и промежуток сходимости не изменятся, область сходимости может измениться, в частности, дифференцирование не улучшает, а интегрирование не ухудшает сходимости степенного ряда; отметим также, что сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.

Пример. Можно показать, что областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ является интервал $(-1,1)$, а областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ - промежуток $[-1,1)$.

Нетрудно видеть, что ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ получается почленным интегрированием ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. При этом радиус сходимости и промежуток сходимости не изменились, а область сходимости изменилась, в частности, добавилась точка $x=-1$. Таким образом, интегрирование не ухудшило сходимость степенного ряда.

Если проинтегрировать еще раз, получим ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ с областью сходимости $[-1,1]$.

5. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в окрестности точки a любое число раз. ***Рядом Тейлора*** для функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$ называется ряд вида

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots.}$$

В частности, при $a = 0$ получаем ***ряд Маклорена*****:**

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}.$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$. В общем случае соответствие между функцией и ее рядом Тейлора обозначается знаком $\sim$.

Теорема. Если модули всех производных функции $f(x)$ ограничены в окрестности точки a одним и тем же числом $M > 0$, то для любых x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к самой функции $f(x)$, т.е. имеет место разложение $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, причем оно единственно.

Основные табличные разложения в ряд Маклорена

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$	$x \in (-\infty; +\infty),$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$	$x \in (-\infty; +\infty),$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$	$x \in (-\infty; +\infty),$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots,$	$x \in (-1; 1),$
$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$	$x \in (-1; 1),$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad x \in (-1;1],$$
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad x \in [-1;1]$$

6. Приложения степенных рядов

1. Приближенное вычисление значения функции в точке x_0.

Раскладываем функцию $y = f(x)$ в степенной ряд и находим сумму этого ряда при $x = x_0$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$, для чего берем столько членов ряда, чтобы остаток ряда r_n не превосходил по модулю заданную точность ε.

Если получается знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, то его остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого отбрасываемого члена, поэтому первый из отбрасываемых членов должен быть по модулю меньше ε.

В остальных случаях подбирают ряд с большими по модулю членами, сумму которого легко найти (обычно ряд геометрической прогрессии), и оценивают остаток суммой этого ряда.

2. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Степенные ряды применяются для приближенного вычисления определенных интегралов $\int_a^b f(x)dx$ в случаях, если первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции или нахождение первообразной сложно. Если подынтегральная функция $f(x)$ разложима в степенной ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R, R)$ включает в себя отрезок интегрирования $[a,b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

3. Приближенное решение дифференциальных уравнений.

В случае, когда точное решение задачи Коши для дифференциального уравнения (ДУ) в элементарных функциях не представляется возможным или оказывается очень сложным, это решение (если оно представимо) удобно искать в виде степенного ряда.

При решении задачи Коши $\boxed{y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0}$ используем ряд Тейлора

$$\boxed{y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots},$$

где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, а остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n=2,3,\ldots)$ находят путем последовательного дифференцирования уравнения и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.