第 6 章

电 容
Capacitance

6.1 电容的定义 CAPACITANCE DEFINED

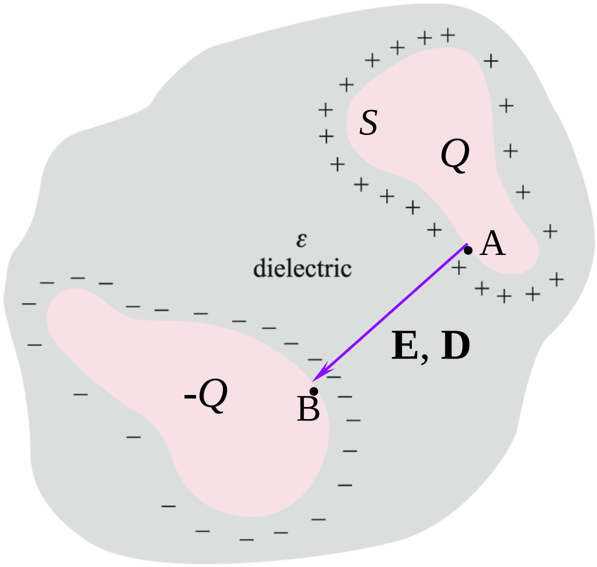
一个简单的电容器由两个带相反电荷的导体组成，周围是均匀的电介质。

将Q 增加了某个系数，会导致**E**和**D**增加了同样的系数。

由于 $$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

而导体之间的电位差为：

$$V_0 = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$



电位差也将以相同的系数增加，所以Q与V_0的比率是一个常数。我们将该结构的电容定义为存储电荷与所施加电压的比率，即：

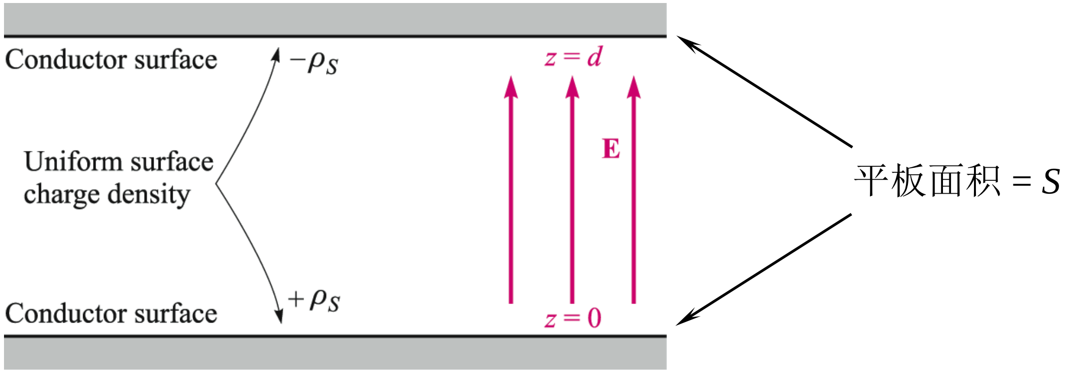
$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0}}$$

单位为C/V 或 法拉第（F，*Farads*）

6.2 平行板电容器 PARALLEL-PLATE CAPACITOR

假定图中两块板间的水平方向长度远大于板块间距 d。

因此，可以认为电场只存在于z轴方向，而电位只沿z轴方向变化。



平行板电容器的电场

在理想导体的表面应用 **D** 的边界条件：

下方平板： $\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}_\ell\Big|_{z=0} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{a}_z = \rho_s \;\Rightarrow\; \underline{\mathbf{D} = \rho_s\,\mathbf{a}_z}$

上方平板： $\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}_u\Big|_{z=d} = \mathbf{D}\cdot(-\mathbf{a}_z) = -\rho_s \;\Rightarrow\; \underline{\mathbf{D} = \rho_s\,\mathbf{a}_z}$

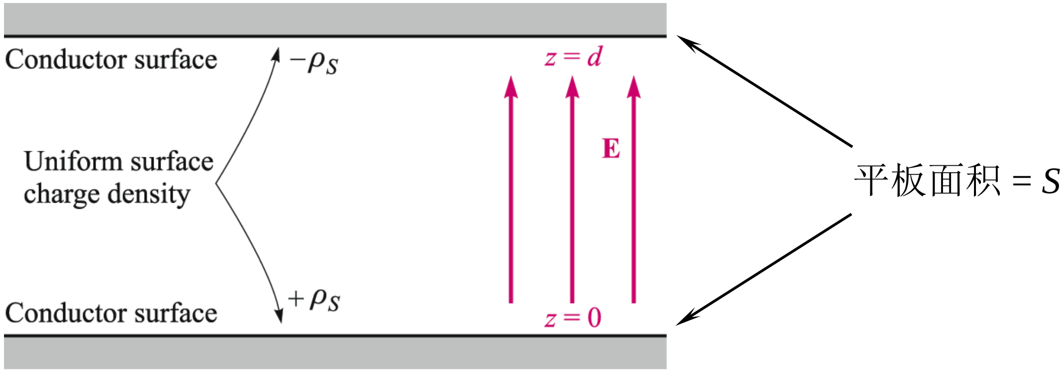
结果相同!

只需在其中一个表面上应用边界条件就可以得到板间的总电场

因此，板块之间的电场为：

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon}\mathbf{a}_z}$$

6.2 平行板电容器 – 电容



已有： $\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon}\mathbf{a}_z$ 那么板间电压可以通过以下方式得到：

$$V_0 = -\int_{\text{upper}}^{\text{lower}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_d^0 \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S}{\epsilon} d$$

由于： $Q = \rho_S S$ 最终可得： $\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}}$

6.2 平行板电容器 – 能量

电容中储存的能量可以通过对它的电场能量密度进行体积分得到：

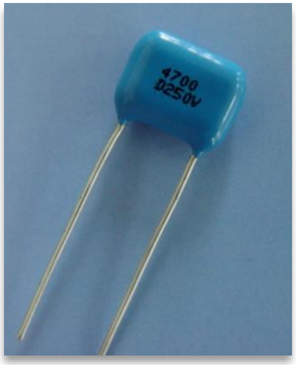
$$W_E = \int_{vol} \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \epsilon E^2 \, dv = \frac{1}{2} \int_S \int_0^d \frac{\epsilon \rho_S^2}{\epsilon^2} dz \, dS = \frac{1}{2} \frac{\rho_S^2}{\epsilon} Sd = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\epsilon S}{d}}_{C} \underbrace{\frac{\rho_S^2 d^2}{\epsilon^2}}_{V_0{}^2}$$

因此，电场能量可表示成以下几种方式：

$$\boxed{W_E = \tfrac{1}{2} C \, V_0^2 = \tfrac{1}{2} Q \, V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

例6.1 计算由云母电介质填充的平行板电容器的电容，已知ε_r=6，平板的面积为10平方英寸，两板间的距离为0.01英寸。



解：可求得平行板的面积和距离为：

$$S = 10 \times 0.0254^2 = 6.45 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

$$d = 0.01 \times 0.0254 = 2.54 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

因此，电容为：

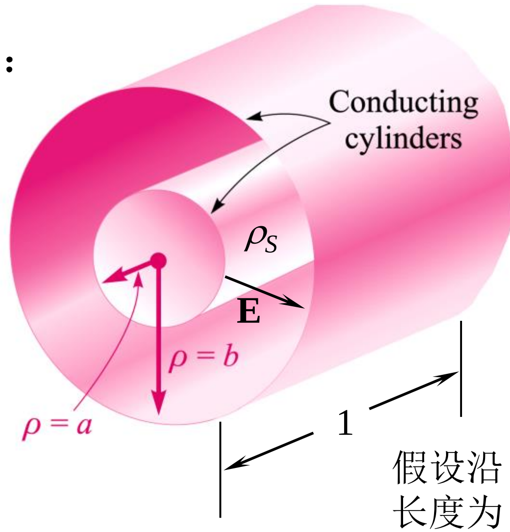
$$C = \frac{6 \times 8.854 \times 10^{-12} \times 6.45 \times 10^{-3}}{2.54 \times 10^{-4}} = 1.349\ \mathrm{nF}$$

6.3 几个电容器例子 SEVERAL CAPACITANCE EXAMPLES

前面的章节已经利用高斯定律计算出同轴电缆的电场：

$$\mathbf{E}(\rho) = \frac{a\rho_s}{\epsilon\rho}\mathbf{a}_\rho \ \mathrm{V/m} \qquad (a < \rho < b)$$

内导体和外导体上的电荷相等且相反，除了内外导体之间的部分，其它地方 **E**=0。



同轴电缆

现在，导体之间的电位差为：

$$V_0 = -\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_b^a \frac{a\rho_s}{\epsilon\rho}\mathbf{a}_\rho\cdot\mathbf{a}_\rho\, d\rho = \underline{\frac{a\rho_s}{\epsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

内导体上每单位长度的电荷为：

$$Q = \underline{2\pi a(1)\rho_s}$$

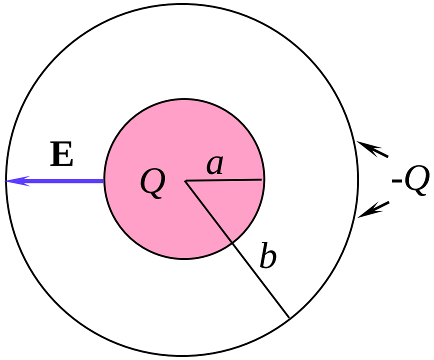
最终求得电容为：

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \ \mathrm{F/m}}$$

6.3 几个电容器例子 – 同心球电容器

考虑两个同心球形导体，半径分别为 a 和 b。 内导体和外导体上带有等量相反的电荷 Q。

由高斯定律可知，电场只存在于球体之间的区域，由下式给出：



$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\,\mathbf{a}_r$$

内外层球壳之间的电位差为：

$$V_0 = -\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\,\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_r\,dr = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

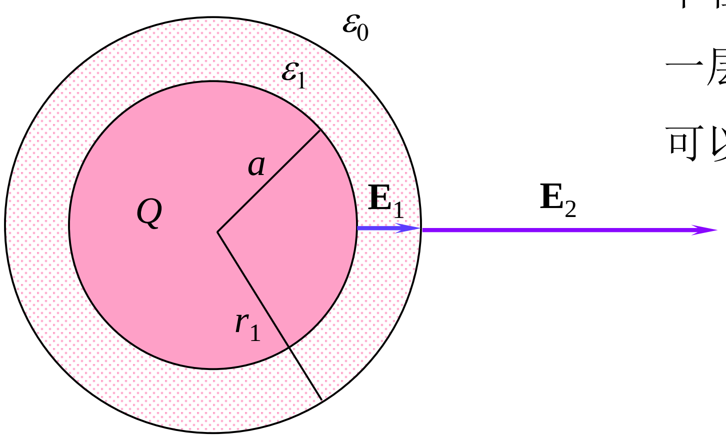
它的电容为:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon}{(1/a)-(1/b)}}$$

注意，当 $b \rightarrow \infty$ (孤立导体球)的电容为：

$$\underline{C \rightarrow 4\pi\epsilon a}$$

6.3 几个电容器例子 – 球形电容器外填充电介质



半径为a的导电球体带有电荷Q。在导体周围有一层厚度为r_1 - a的介电层ε_1。 根据高斯定律，可以计算得这两个区域的电场分别为：

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \qquad (a < r < r_1)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r_1 < r)$$

球体表面的电位为（以无穷远处为零参考点）：

$$V_a - V_\infty = -\int_{r_1}^{a} \frac{Q\,dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q\,dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{1}{\epsilon_0 r_1}\right] = V_0$$

因此，它的电容为：

$$\boxed{C = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{1}{\epsilon_0 r_1}}}$$

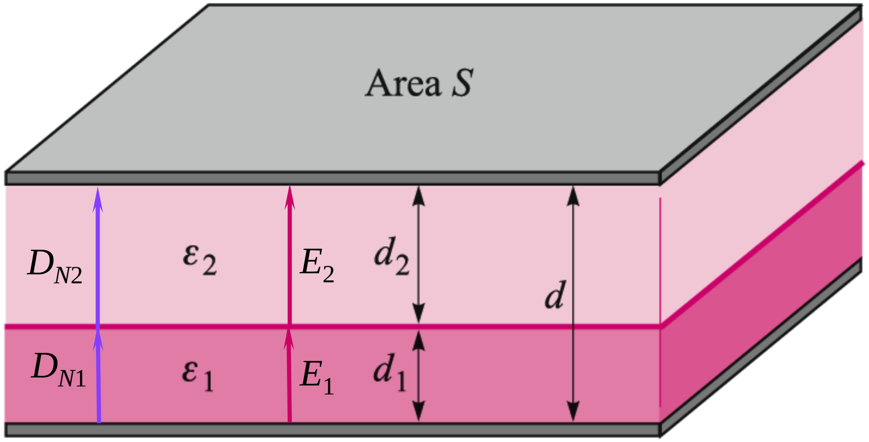
6.3 几个电容器例子 – 平板电容填充两层电介质

在这种情况下，我们使用两个电介质之间边界上法向的 **D** 是连续的这一事实，假设那里不存在表面电荷：

即： $D_{N1} = D_{N2}$　　　因此： $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$

底板和顶板之间的电位差为： $V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2$

从而可以推出: $E_1 = \dfrac{V_0}{d_1 + d_2(\epsilon_1/\epsilon_2)}$



底板表面电荷密度：

$$\rho_{S1} = D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{V_0}{\dfrac{d_1}{\epsilon_1} + \dfrac{d_2}{\epsilon_2}}$$

可求得电容为: $C = \dfrac{Q}{V_0} = \dfrac{\rho_S S}{V_0} = \dfrac{1}{\dfrac{d_1}{\epsilon_1 S} + \dfrac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$　相当于C_1, C_2两个电容串联

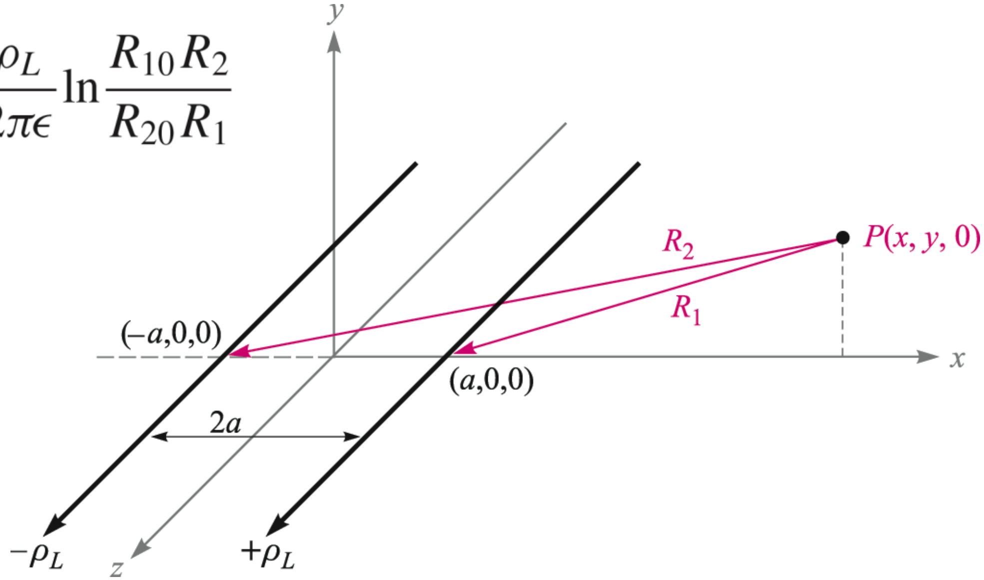
6.4 两导体传输线的电容 CAPACITANCE OF A TWO-WIRE LINE

从 z 轴上的单线电荷的电位场开始研究，零点参考点为$\rho = R_0$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{R_0}{R}$$

可以用上式来写出P点的电位，由两个相反符号的线电荷组成：

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\left(\ln\frac{R_{10}}{R_1} - \ln\frac{R_{20}}{R_2}\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

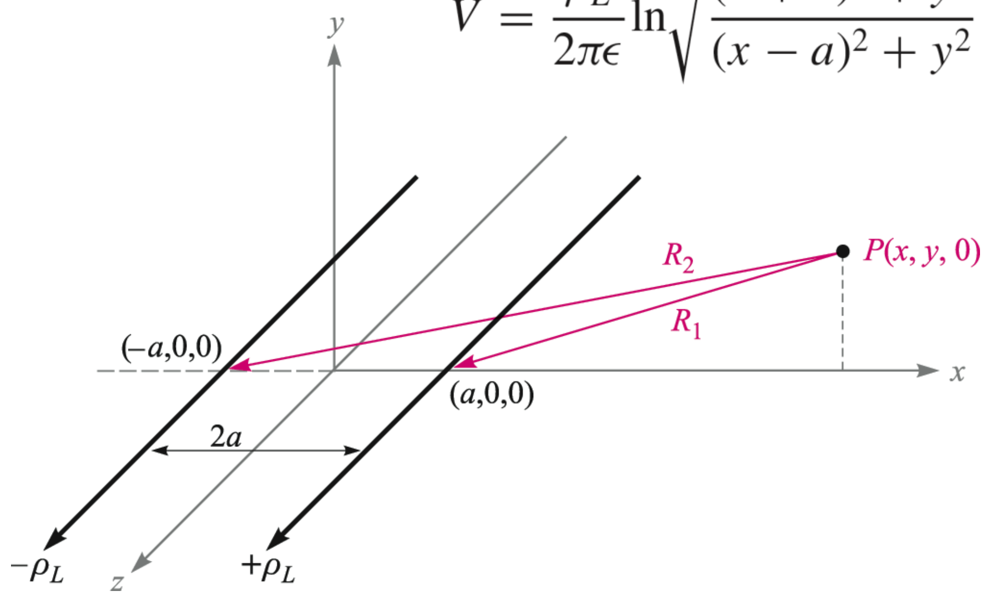


6.4 两导体传输线的电容

现有：
$$V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\left(\ln\frac{R_{10}}{R_1}-\ln\frac{R_{20}}{R_2}\right)=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

选择$R_{10}=R_{20}$，从而将零点基准放在与每条线等距离的地方。这个面就是$x=0$的平面。用x和y来表示R_1和R_2：

$$V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$



6.4 两导体传输线的电容

已有： $V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$

选择 $V=V_1$ 的等位面，并定义无量纲量： $K_1=e^{4\pi\epsilon V_1/\rho_L}$

代入V_1得：

$$K_1=\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

这就是电位为V_1的等位面的方程式。

为了更好地识别表面，展开平方部分：

$$x^2-2ax\frac{K_1+1}{K_1-1}+y^2+a^2=0 \Rightarrow \boxed{\left(x-a\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2}$$

这是一个圆柱体方程，沿x轴方向有一段偏移，半径为b：

$$\boxed{b=\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}}$$

6.4 两导体传输线的电容

已求得等位面的方程为：

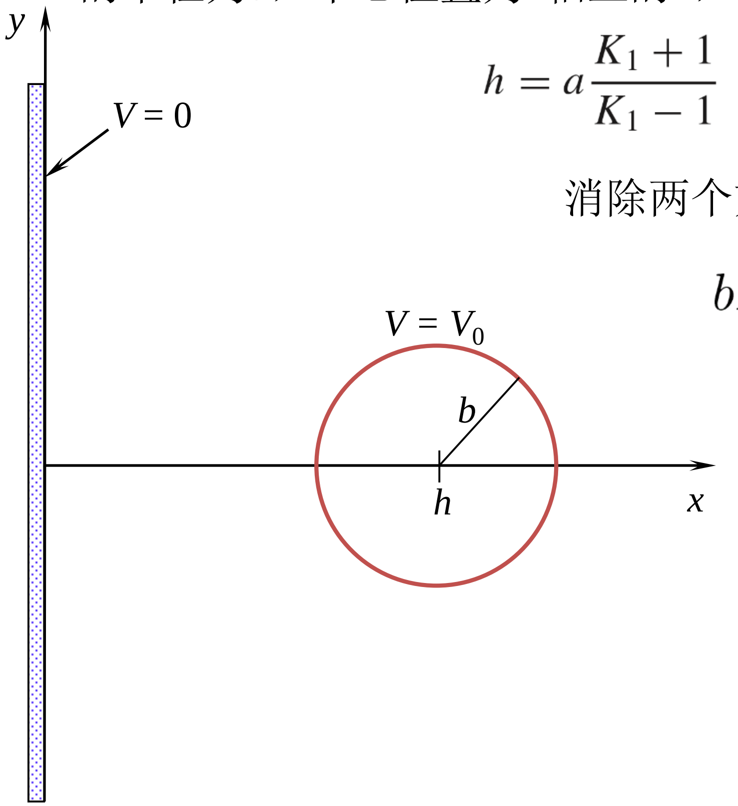
$$\left(x - a\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2$$

这是一个圆（实际上是一个圆柱体）的方程，沿 x 轴偏移距离为 h，半径为b，其中

$$\boxed{h = a\frac{K_1+1}{K_1-1}} \quad 与 \quad \boxed{b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}}$$

6.4 两导体传输线的电容

考虑在y-z平面内有一个接地的导体，以及一个平行于z轴的导电圆柱体，圆柱体的半径为b，中心位置为x轴上的h，其中：



$$h = a\frac{K_1+1}{K_1-1} \quad 和 \quad b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$$

消除两个方程之间的a，得到二次方程：

$$bK_1 - 2h\sqrt{K_1} + b = 0$$

该方程的解为：

由于a为正值，因此选择正号

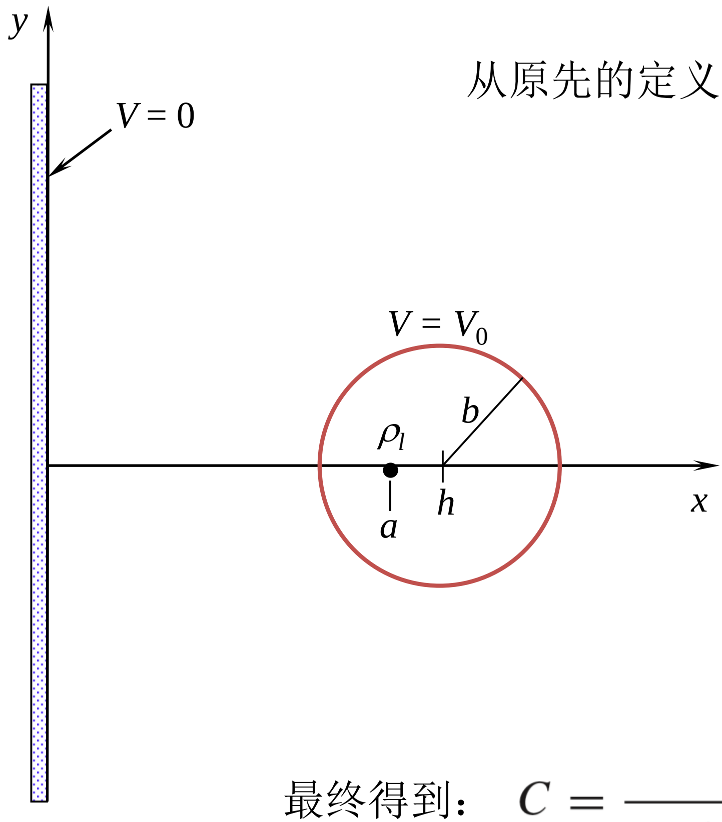
$$\sqrt{K_1} = \frac{h \pm \sqrt{h^2-b^2}}{b}$$

将 K_1 代入最开始的两个方程之一，得到：

$$a = \sqrt{h^2-b^2}$$

6.4 两导体传输线的电容

式子 $a = \sqrt{h^2 - b^2}$ 给出了等效线电荷ρ_l 的位置，如图所示。



从原先的定义中，现可得到： $\sqrt{K_1} = e^{2\pi\epsilon V_0/\rho_L}$

上式变换可得： $\rho_L = \dfrac{4\pi\epsilon V_0}{\ln K_1}$

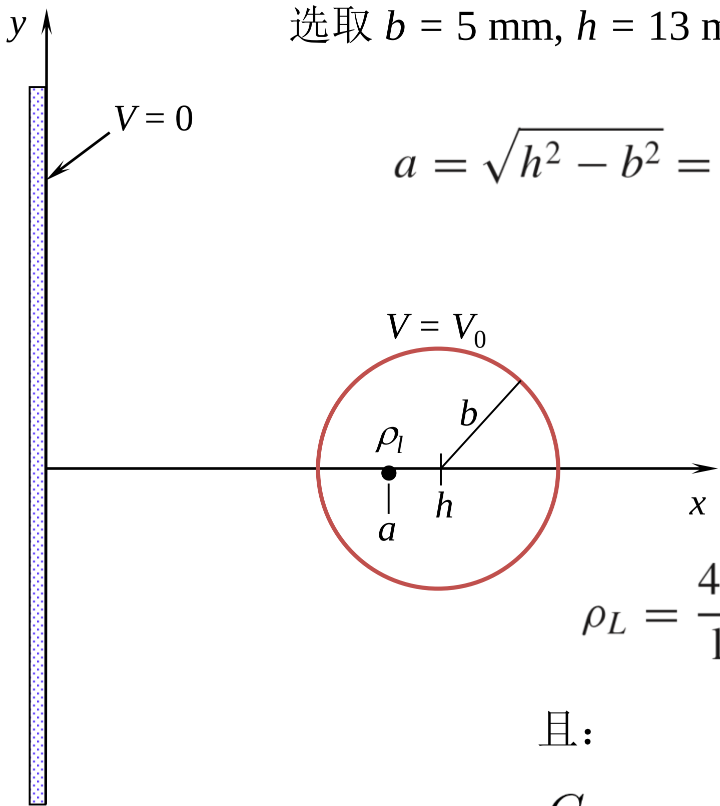
现给定h, b 和 V_0 , 就可以推导出 a, ρ_l 和 K_1

对于z轴方向长度为L的结构，其电容为：

$$C = \frac{\rho_L L}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon L}{\ln K_1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\sqrt{K_1}}$$

最终得到： $C = \dfrac{2\pi\epsilon L}{\ln[(h + \sqrt{h^2 - b^2})/b]} = \dfrac{2\pi\epsilon L}{\cosh^{-1}(h/b)}$

6.4 两导体传输线的电容



选取 b = 5 mm, h = 13 mm, V_0 = 100 V. 计算等效线电荷密度ρ_l 和电容 C

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\text{mm}$$

而: $$\sqrt{K_1} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \frac{13 + 12}{5} = 5$$

得到:

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon V_0}{\ln K_1} = \frac{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times 100}{\ln 25} = \underline{3.46\ \text{nC/m}}$$

且:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(h/b)} = \frac{2\pi \times 8.854 \times 10^{-12}}{\cosh^{-1}(13/5)} = \underline{34.6\ \text{pF/m}}$$

6.4 两导体传输线的电容

也可以通过计算K_1, h, b的值，找出50V的等位面：

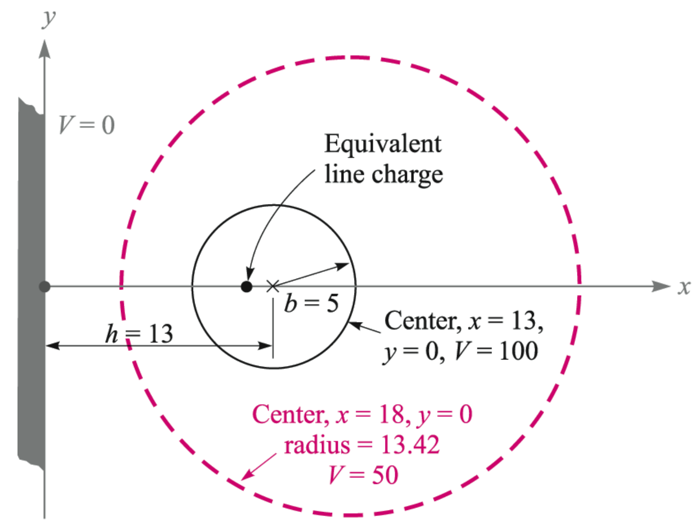
$$K_1 = e^{4\pi\epsilon V_1/\rho_L} = e^{4\pi\times 8.854\times 10^{-12}\times 50/3.46\times 10^{-9}} = 5.00$$

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} = \frac{2\times 12\sqrt{5}}{5-1} = 13.42\,\text{mm}$$

$$h = a\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = 12\frac{5+1}{5-1} = 18\,\text{mm}$$

得到的等位面为图中红色虚线的圆

注意，如果用这些新的尺寸建造电容器，并将电位设置为50V，将产生与以前相同的电容和电荷密度。



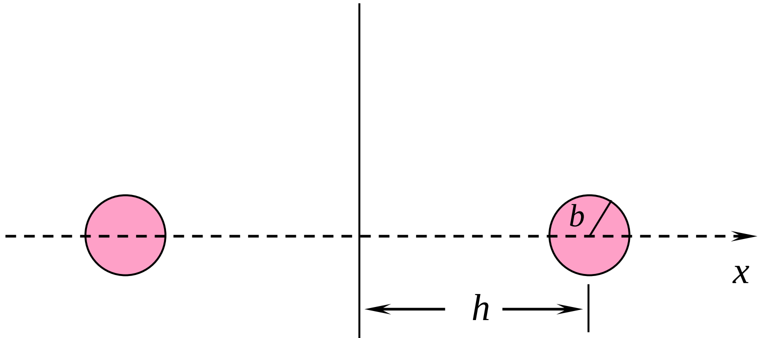
$h = 13$, $b = 5$, $\therefore K_1 = 25$; $\therefore \rho_L = 3.46 \times 10^{-9}$ C/m, $\therefore a = 12$

If $V_1 = 50$, $K_1 = 5$, $h = 18$, $b = 13.42$, ρ_L unchanged

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln 5} = 34.6\ \text{pF/m}$$

6.4 两导体传输线的电容

两导线如图位置放置，对于这两个圆柱体导体（以及它们之间的零电位平面），该结构是**串联**的两个圆柱体/平面电容器，因此总电容是先前得出的结果的二分之一。



$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln[(h+\sqrt{h^2-b^2})/b]} = \frac{2\pi\epsilon L}{\cosh^{-1}(h/b)}$$

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon L}{\cosh^{-1}(h/b)}}$$

最后，如果圆柱体（导线）的尺寸远远小于它们的间距（ b << h ），那么：

$$\ln\left[\left(h+\sqrt{h^2-b^2}\right)/b\right] \doteq \ln[(h+h)/b] \doteq \ln(2h/b)$$

$$\boxed{C \doteq \frac{\pi\epsilon L}{\ln(2h/b)}}$$

课堂练习6.1 - 6.4

习题：6.2(a)， 6.2(b)，6.4(b)，6.14

6.5 采用场分布图估算二维问题中的电容

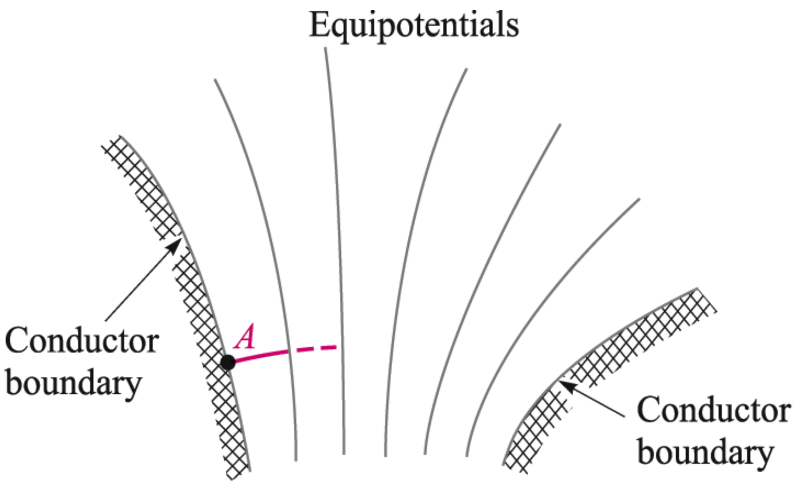
USING FIELD SKETCHES TO ESTIMATE CAPACITANCE IN TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS

这种方法采用了导体和场的这些特性：

1. 导体边界是一个等位面
2. 电场强度和电通量密度两者都垂直于等位面
3. 因此，**E** 和 **D** 都垂直于导体边界且切向分量为零
4. 电通量线不仅起始于而且终止于电荷，因此在无自由电荷和介质均匀的电场中，电通量线仅起始和终止于导体边界上

6.5 采用场分布图估算二维问题中的电容

给定导体边界，可以画出等电位线，并使每两条相邻等位线间的电位差是相同的。



在A点绘制一条电通量线**D**，使其与等电位线成直角交叉。

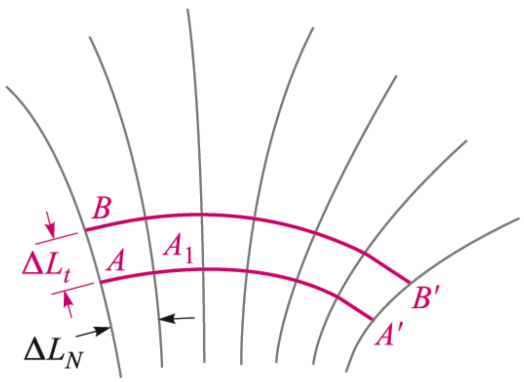
6.5 采用场分布图估算二维问题中的电容

图中显示了两条红色 **D** 线，指出了相邻电场线之间和相邻等电位面之间的间距。 所有电场线必须在90^0处与等电位相交。

两条红色电场线之间的空间形成了一个 类似于“管子”的通量，值为$\Delta\psi$，这与由管子包围起来的导体上的电荷量是一样的。

现在电场可以写成：

$$E = \frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t}$$



假设相邻等电位之间的电位差为ΔV， 也可以将电场写为：

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta L_N}$$

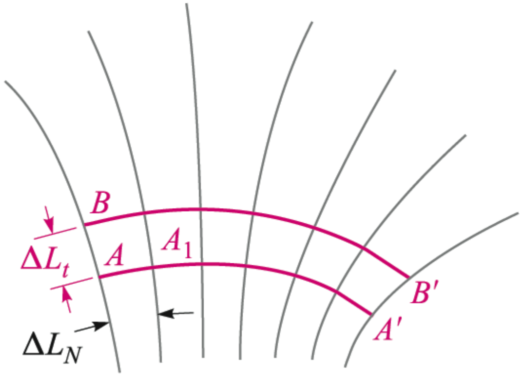
6.5 采用场分布图估算二维问题中的电容

根据图中的线间距，现在有两个电场表达式：

$$E = \frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t} \qquad E = \frac{\Delta V}{\Delta L_N}$$

将两个表达式设为相等，得到：

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t} = \frac{\Delta V}{\Delta L_N}$$



即：$$\boxed{\frac{\Delta L_t}{\Delta L_N} = \text{constant} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta V}}$$

图中做法是将比例 $\Delta L_t / \Delta L_N$ 固定， 最简单的方法是使：

$$\Delta L_t = \Delta L_N$$

因此，在画图时要使每个网格段近似于正方形

6.5 采用场分布图估算二维问题中的电容

图示为完整的场分布图，其绘制方式是将该区域划分为曲线方块。沿着导体壁的每一段都包含了通量$\Delta\psi$（或电荷ΔQ）。导体之间的每一个距离增量代表 ΔV 的电位变化。

假设沿导体壁的分段数为 N_Q

因此，导体上的总电荷为：

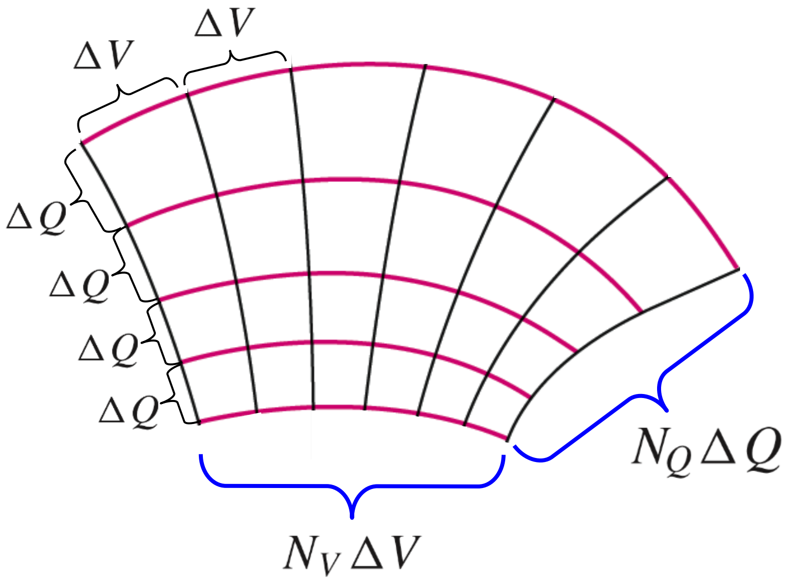
$$Q = N_Q \Delta Q = N_Q \Delta \Psi$$

若导体之间的分段数为N_V，那么导体之间的电位差是：

$$V_0 = N_V \Delta V$$

图中结构的电容为：

$$C = \frac{N_Q \Delta Q}{N_V \Delta V}$$

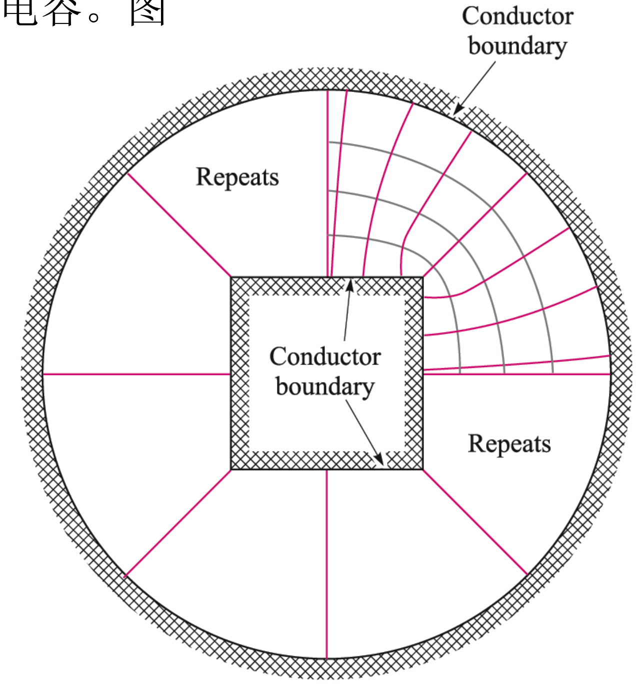


最终得到：

$$\boxed{C = \frac{N_Q}{N_V} \epsilon \frac{\Delta L_t}{\Delta L_N} = \epsilon \frac{N_Q}{N_V}}$$

6.5 采用场分布图估算二维问题中的电容

对这条外圆内方的传输线，估算它每单位长度的电容。图中显示了一个象限的场和等电位线。



在这种情况下，平行于导体的范围没有被划分成整数个方块数。 在周长的八分之一的范围内，有3.25个划分。

导体之间正好有四个方块，因此：

$$C = \epsilon \frac{N_Q}{N_V} = \epsilon_0 \frac{8 \times 3.25}{4} = \underline{57.6\,\mathrm{pF/m}}$$

6.6 泊松方程和拉普拉斯方程
POISSON’S AND LAPLACE’S EQUATIONS

在给定边界上电位值的条件下，能否求出导体之间区域内的电位函数，以及区域内可能存在的体电荷密度？也就是说要找出**电位**与**电荷密度**的关系。

从麦克斯韦第一方程开始： $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\nu$

式中： $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

且： $\mathbf{E} = -\nabla V$

因而有： $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_\nu$

最终可得： $\nabla \cdot \nabla V = -\dfrac{\rho_\nu}{\epsilon}$ **泊松方程**

6.6 泊松方程和拉普拉斯方程

回顾一下用直角坐标表示的散度： $$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

以及梯度： $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

得到： $$\nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$\nabla \cdot \nabla$简写为∇^2，该运算符称为**拉普拉斯算子**

6.6 泊松方程和拉普拉斯方程

已知： $$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

可表示为： $$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}}$$

该式称为直角坐标系中的**泊松方程**

在体电荷密度为零的情况下，右边项为零，得到：

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$ **拉普拉斯方程**

注意：虽然体电荷密度为0，但在场的奇异处允许点电荷、线电荷和面电荷密度作为场源存在

6.6 泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(rectangular)}$$

拉普拉斯方程在不同坐标系中的表达式

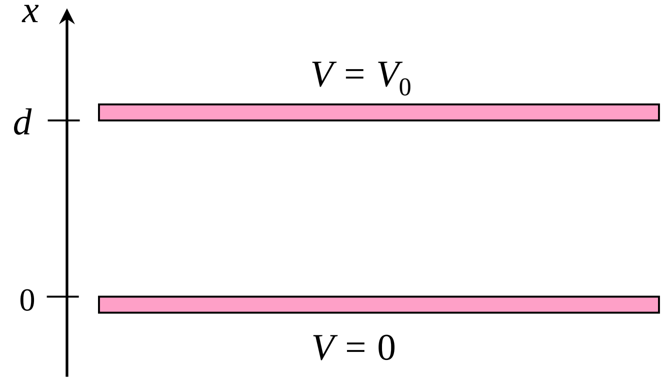
$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{(cylindrical)}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{(spherical)}$$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 平板电容

EXAMPLES OF THE SOLUTION OF LAPLACE'S EQUATION

在右图所示情况中，板块面积 S，两个板块间距为 d，且 d 远小于板块尺寸。因此，可以假设 V 只随 x 变化。



拉普拉斯方程简化为：

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

积分一次得到：

$$\frac{dV}{dx} = A$$

再次积分得到：

$$V = Ax + B$$

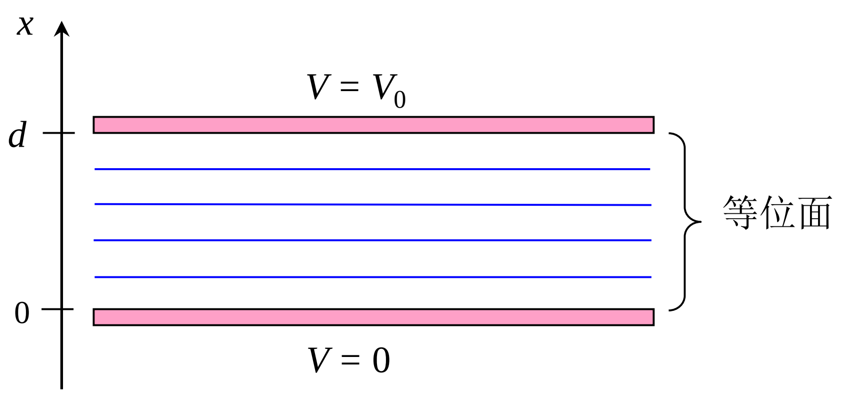
边界条件为：

1. $V = 0$ at $x = 0$
2. $V = V_0$ at $x = d$

式中 A 和 B 是积分常数，要在边界条件下进行计算

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 平板电容

已有： $V = Ax + B$



应用边界条件1：

$0 = A(0) + B \longrightarrow B = 0$

应用边界条件2：

$V_0 = Ad \longrightarrow A = \dfrac{V_0}{d}$

边界条件为：

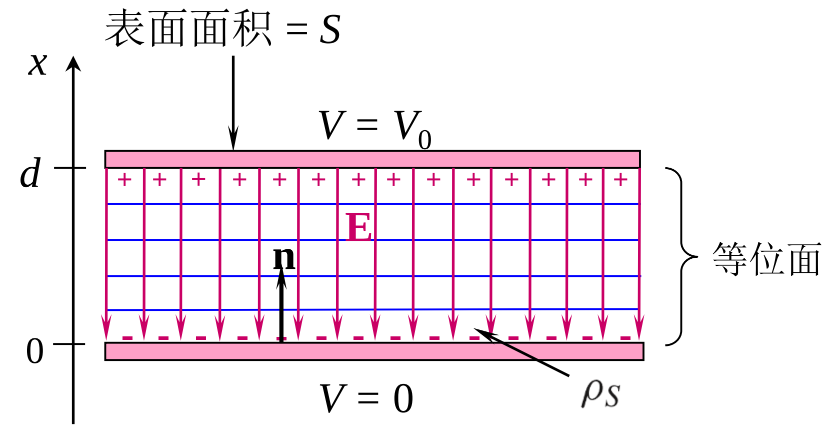
1. $V = 0$ at $x = 0$
2. $V = V_0$ at $x = d$

得到： $\boxed{V = \dfrac{V_0 x}{d}}$

该函数可由图中电容器内的等电位面来描述，其中相邻表面之间存在恒定的电压差

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 平板电容

已知： $V = V_0 \dfrac{x}{d}$



可得： $\mathbf{E} = -\nabla V = -\dfrac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$

由**E**和**D**的关系可得： $\mathbf{D} = -\epsilon\dfrac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$

在下板表面 (z = 0)： $\mathbf{D}_S = \mathbf{D}\big|_{x=0} = -\epsilon\dfrac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$ 与 $\mathbf{n} = \mathbf{a}_x$

利用： $\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\big|_S = \rho_S$ 得到： $D_N = -\epsilon\dfrac{V_0}{d} = \rho_S$

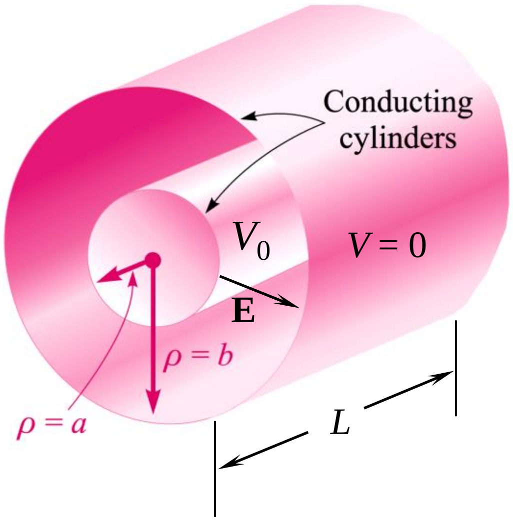
下板表面电荷为： $Q = \displaystyle\int_S \frac{-\epsilon V_0}{d}dS = -\epsilon\frac{V_0 S}{d}$ 电容为：

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}}$$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 同轴电缆

由于 V 只沿半径方向变化，拉普拉斯方程变成：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)=0 \quad (\rho = 0 \text{ 时不成立})$$



我们的目标是计算($a < \rho < b$)区域内的电位函数：

边界条件为：

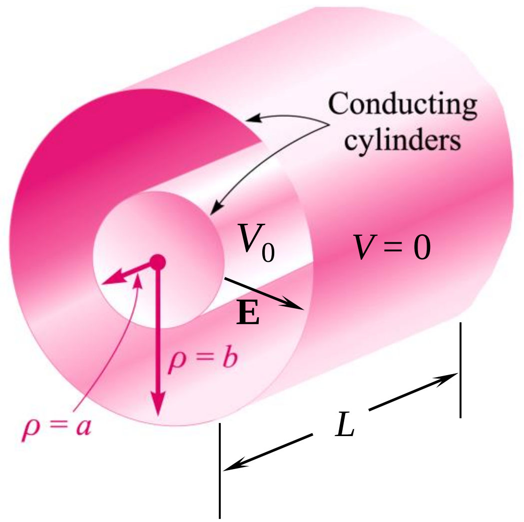
1. $V = 0$ at $\rho = b$
2. $V = V_0$ at $\rho = a$

积分一次得：$$\rho\frac{dV}{d\rho}=A$$

再次积分得：$$V = A\ln\rho + B$$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 同轴电缆

已求得： $V = A\ln\rho + B$



应用边界条件1：

$$0 = A\ln(b) + B \quad \Rightarrow \quad B = -A\ln(b)$$

应用边界条件2：

$$V_0 = A\ln(a) - A\ln(b) = A\ln(a/b) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

边界条件为：

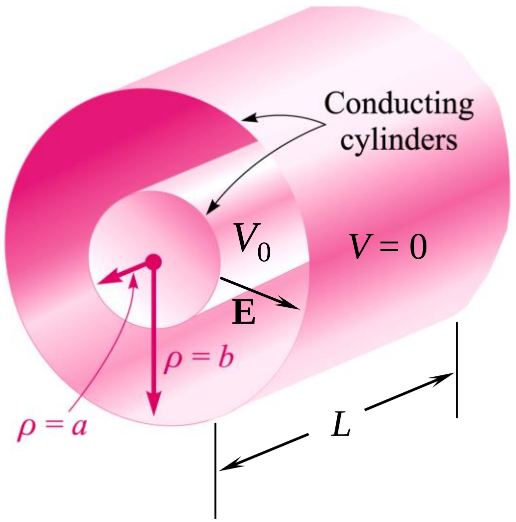
1. $V = 0$ at $\rho = b$
2. $V = V_0$ at $\rho = a$

合并两式得：

$$V(\rho) = -\frac{V_0}{\ln(b/a)}\left[\ln(\rho) - \ln(b)\right] = \boxed{V_0\frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}}$$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 同轴电缆

已经得到导体之间的电位场：$V(\rho) = V_0 \dfrac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}$



根据**E**和*V*的关系得：

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho}\,\mathbf{a}_\rho = \frac{V_0}{\rho}\,\frac{1}{\ln(b/a)}\,\mathbf{a}_\rho$$

内导体上的电荷密度为：

$$\rho_s = \mathbf{D}\cdot\mathbf{a}_\rho\Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V_0}{a}\,\frac{1}{\ln(b/a)}\ \mathrm{C/m^2}$$

内导体上的总电荷为：

$$Q = \int_S \rho_s\, da = 2\pi a L\,\rho_s = \frac{2\pi\epsilon L V_0}{\ln(b/a)}\ \mathrm{C}$$

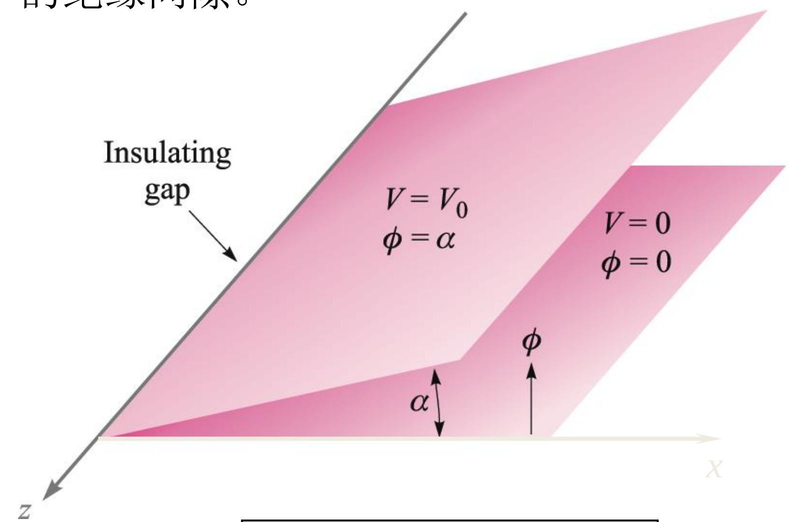
最终求得电容为：

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}\ \mathrm{F}}$$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 斜角板

夹角为 α 的两个无限大径向平面，在z 轴有无限小的绝缘间隙。

使用圆柱坐标表示，假设电位仅随 ϕ 变化。



拉普拉斯方程为：

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0 \quad (\rho > 0)$$

积分一次得： $\dfrac{dV}{d\phi} = A$

再次积分得： $V(\phi) = A\phi + B$

边界条件为：

1. $V = 0$ at $\phi = 0$
2. $V = V_0$ at $\phi = \alpha$

应用边界条件1： $0 = A(0) + B \quad \Rightarrow \quad B = 0$

应用边界条件2： $V_0 = A\alpha \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{V_0}{\alpha}$

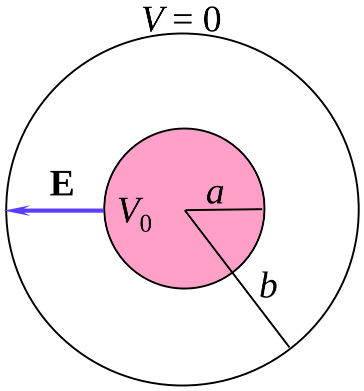
得到: $\boxed{V(\phi) = V_0 \dfrac{\phi}{\alpha}}$

电场强度为：$\mathbf{E} = -\nabla V = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dV}{d\phi}\mathbf{a}_\phi = -\dfrac{V_0}{\alpha\rho}\mathbf{a}_\phi$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 同心球

假设V只随半径变化，拉普拉斯方程变为：

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad \text{或:} \quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$



积分一次： $\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$ 　再次积分： $V(r) = -\frac{A}{r} + B$

边界条件为：

1. $V = 0$ at $r = b$
2. $V = V_0$ at $r = a$

应用边界条件1： $0 = -\frac{A}{b} + B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{A}{b}$

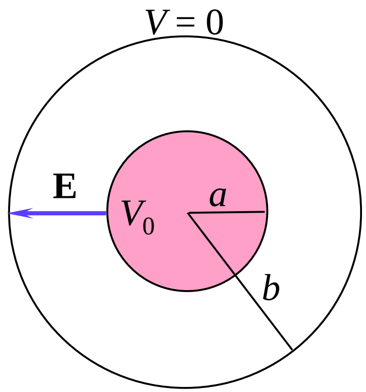
应用边界条件2：

$$V_0 = -\frac{A}{a} + \frac{A}{b} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{V_0}{(1/b) - (1/a)}$$

电位方程为： $\boxed{V(r) = V_0\frac{(1/r) - (1/b)}{(1/a) - (1/b)}}$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 同心球

已求得： $V(r) = V_0 \dfrac{(1/r) - (1/b)}{(1/a) - (1/b)}$ $(a < r < b)$



导体间的电场为：

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{dV}{dr}\mathbf{a}_r = \frac{V_0}{r^2[(1/a) - (1/b)]}\mathbf{a}_r \quad \mathrm{V/m}$$

内导体的电荷密度为：

$$\rho_s = \mathbf{D}\cdot\mathbf{a}_r\Big|_{r=a} = \frac{\epsilon V_0}{a^2[(1/a) - (1/b)]} \quad \mathrm{C/m^2}$$

内导体的总电荷为：

$$Q = \int_S \rho_s\, da = 4\pi a^2\, \rho_s = \frac{4\pi\epsilon V_0}{[(1/a) - (1/b)]} \quad \mathrm{C}$$

电容为：

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon}{[(1/a) - (1/b)]} \quad \mathrm{F}}$$

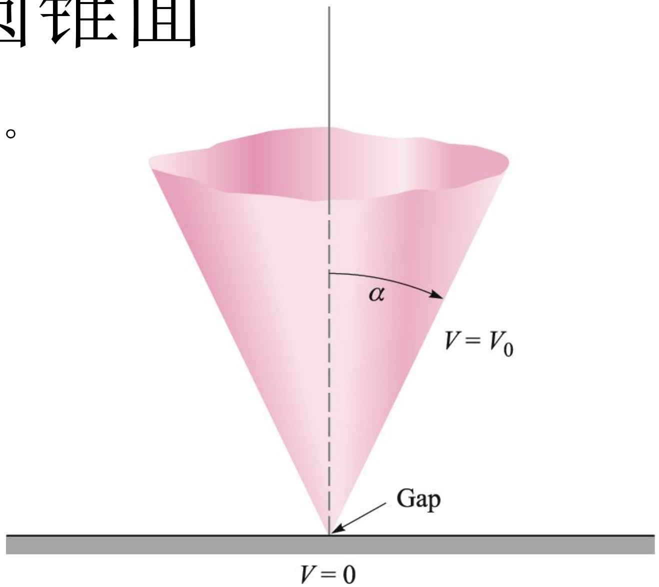
6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 圆锥面

在右图所示的导体中，等位面是恒定θ的表面（圆锥面）。

假设电势场只随θ变化，拉普拉斯方程就变成：

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\right)=0$$

r与 θ不能为0



积分一次： $$\sin\theta\frac{dV}{d\theta}=A$$

因此电位为： $$V=\int\frac{A\,d\theta}{\sin\theta}+B=A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+B$$

边界条件为：

1. $V = 0$ at $\theta = \pi/2$
2. $V = V_0$ at $\theta = \alpha$

应用边界条件1：

$$0=A\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+B=B \quad\Rightarrow\quad B=0$$

应用边界条件2：

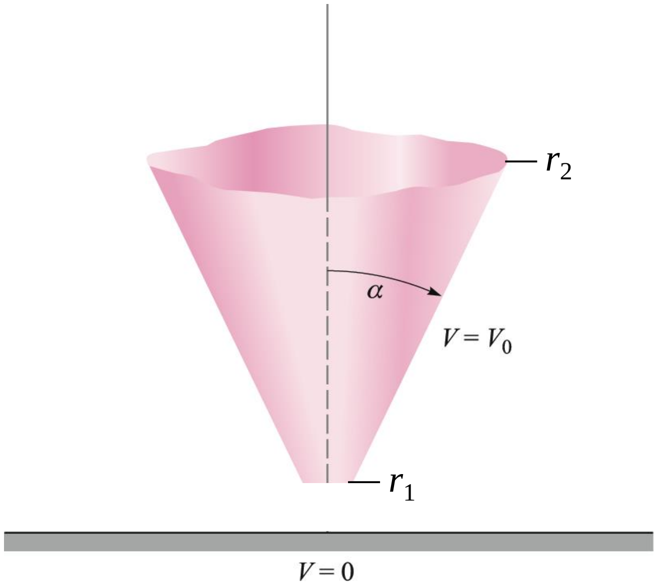
$$V_0=A\ln\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad A=\frac{V_0}{\ln\tan(\alpha/2)}$$

得到电位方程： $$\boxed{V(\theta)=V_0\frac{\ln\tan(\theta/2)}{\ln\tan(\alpha/2)}}$$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 圆锥面

在这种情况下，圆锥体处于半径r_1和 r_2之间，且圆锥角度为α，在导体之间的区域的电位方程为：

$$V(\theta) = V_0 \frac{\ln \tan(\theta/2)}{\ln \tan(\alpha/2)}$$



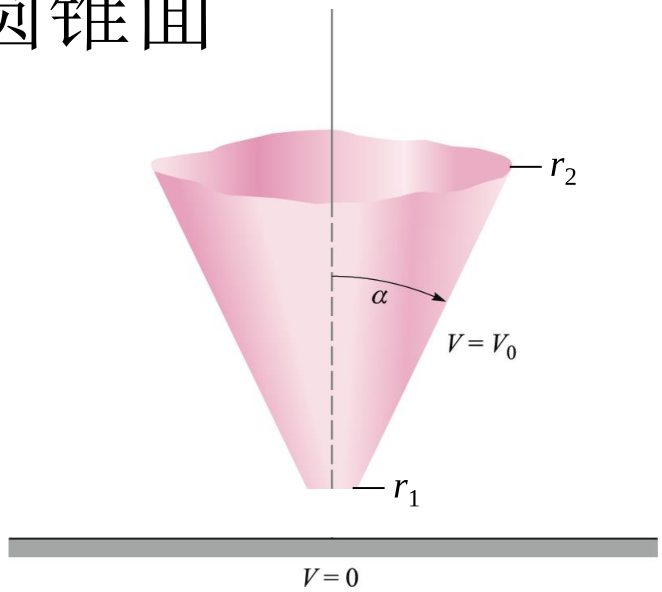
那么导体之间的电场为：

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{-1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin\theta \ln\left(\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)}\mathbf{a}_\theta$$

6.7 拉普拉斯方程解的例子 – 圆锥面

现在可以通过以下方式找到锥体表面的电荷密度：

$$\rho_s = \mathbf{D}\cdot\mathbf{a}_\theta\Big|_{\theta=\alpha} = \frac{-\epsilon V_0}{r\sin\alpha\ln\left[\tan(\alpha/2)\right]}$$



圆锥上的总电荷为：

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{-\epsilon V_0}{r\sin\alpha\ln\left[\tan(\alpha/2)\right]}\,r\sin\alpha\,dr\,d\phi = \frac{-2\pi\epsilon V_0(r_2-r_1)}{\ln\left[\tan(\alpha/2)\right]}$$

最终，求得电容为：

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{-2\pi\epsilon(r_2-r_1)}{\ln\left[\tan(\alpha/2)\right]}}$$

这是一个近似的结果，因为忽略了在锥体边缘存在的边缘场。 边缘场对于较小的α更重要

习题：

- 课堂习题：6.24, 6.26
- 课后习题：6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.9, 6.13 6.35