电磁场与电磁波

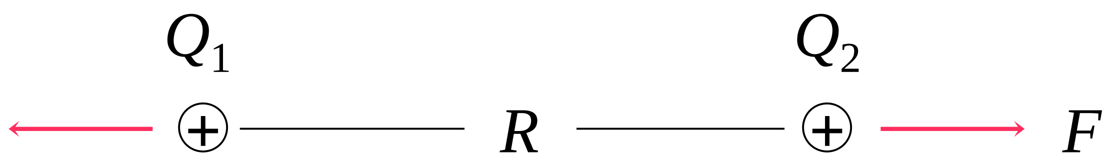
第 2 章

库仑定律和电场强度

Coulomb's Law and Electric Field Intensity

点 –> 线 –> 面

2.1 库仑定律 The Experimental Law of Coulomb



带电体之间的作用力与它们的**带电量**成正比，与它们之间**距离的平方**成反比

$$\boxed{F = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2}}$$

式中： $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$

2.1 库仑定律

自由空间

介电常数

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9}\ \text{F/m}$$

库仑定律可表示为：

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

这里的 F 为标量

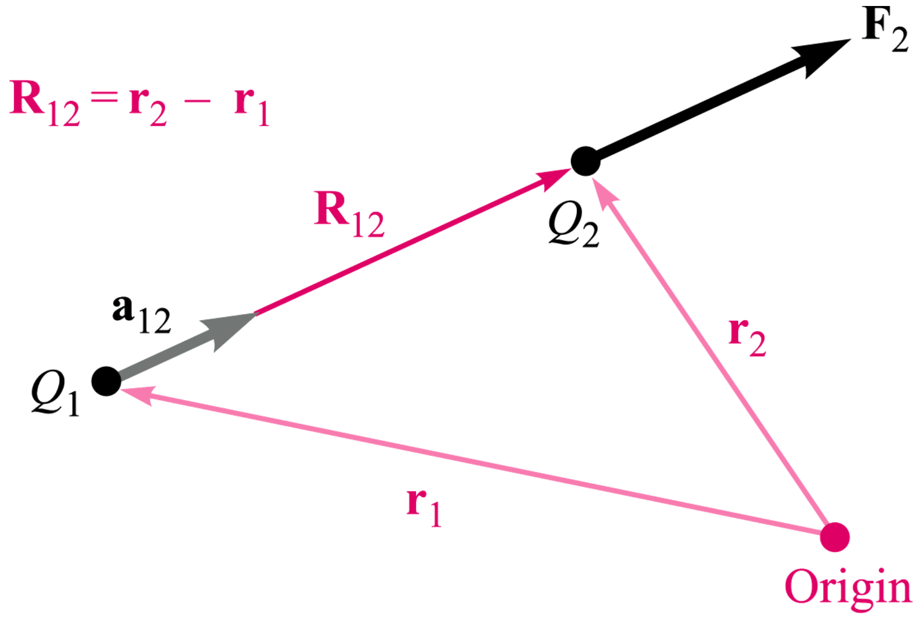
2.1 库仑定律 - 矢量形式

$\boldsymbol{F}_2$的单位矢量：

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

库仑定律的矢量形式：

$$\boxed{\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{12}}$$



例题2.1

- 位于真空中点$M(1, 2, 3)$和$N(2, 0, 5)$处的两个电荷，其带电量分别为$Q_1 = 3\times10^{-4}$C和$Q_2 = -10^{-4}$C，求Q_1对Q_2的作用力

解：$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2-1)\mathbf{a}_x + (0-2)\mathbf{a}_y + (5-3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$

由于：$|\mathbf{R}_{12}| = 3$　　MN方向的单位矢量为: $\mathbf{a}_{12} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3\times10^{-4}(-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9}\times3^2}\left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}\right)$$

$$= -30\left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}\right)\ \mathrm{N}$$

2.2 电场强度 Electric Field Intensity

在试验电荷Q_t处受到点电荷Q_1的作用力为:

$$\mathbf{F}_t = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a}_{1t}$$

式中$\mathbf{a}_{1t}$为Q_1到Q_t的单位矢量

电场强度定义为单位电荷在Q_1的电场中受到的力:

$$\boxed{\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a}_{1t} \quad \text{N/C}}$$

2.2 电场强度

- 若点电荷Q_1位于球坐标系的原点，三维空间中任意一点的电场强度为：

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

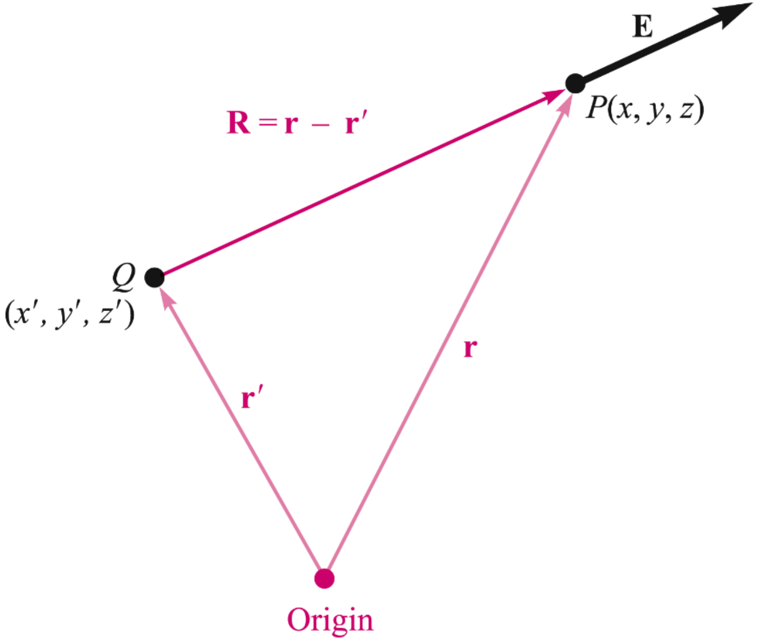
- 该电场只有径向分量，且大小反比于半径的平方

2.2 电场强度 – 点电荷不在原点

- 若点电荷不在坐标系原点，用直角坐标系表示其电场：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$= \frac{Q[(x-x')\mathbf{a}_x + (y-y')\mathbf{a}_y + (z-z')\mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$



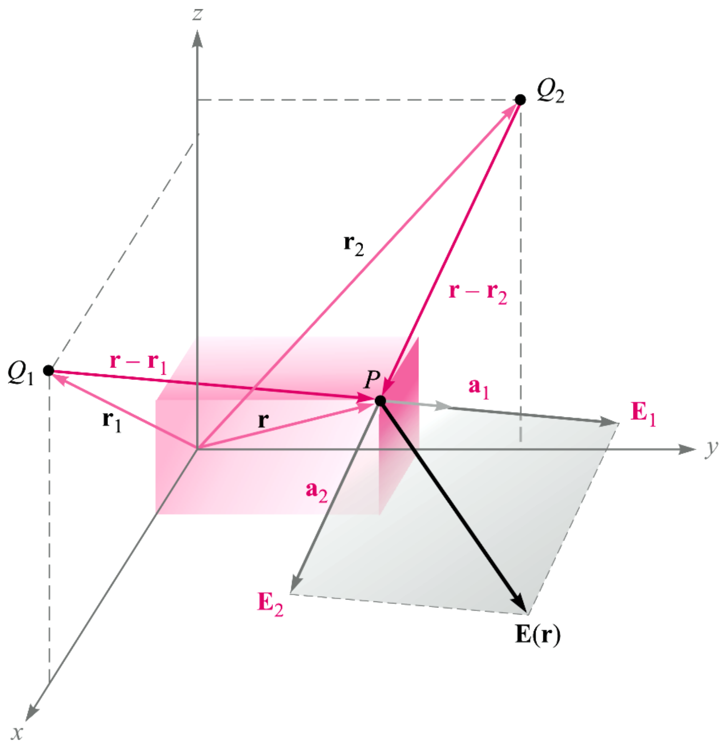
2.2 电场强度 – 合成场强

- 两个点电荷Q_1, Q_2的在P点的合成电场：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2}\mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^2}\mathbf{a}_2$$

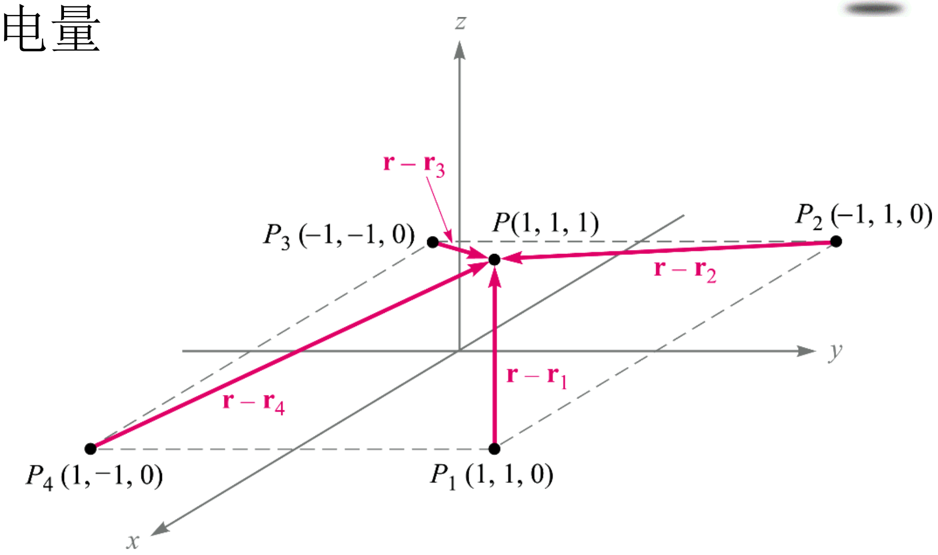
n 个电荷合成电场强度为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|^2}\mathbf{a}_m$$



例题2.2：P_1, P_2, P_3, P_4处各有一个带电量为3nC的点电荷，计算P点电场$\boldsymbol{E}$。

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|^2}\mathbf{a}_m}$$



计算以下各个矢量：

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{r}_2 = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{r}_3 = -\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$$

矢量长度：

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| = 1$$

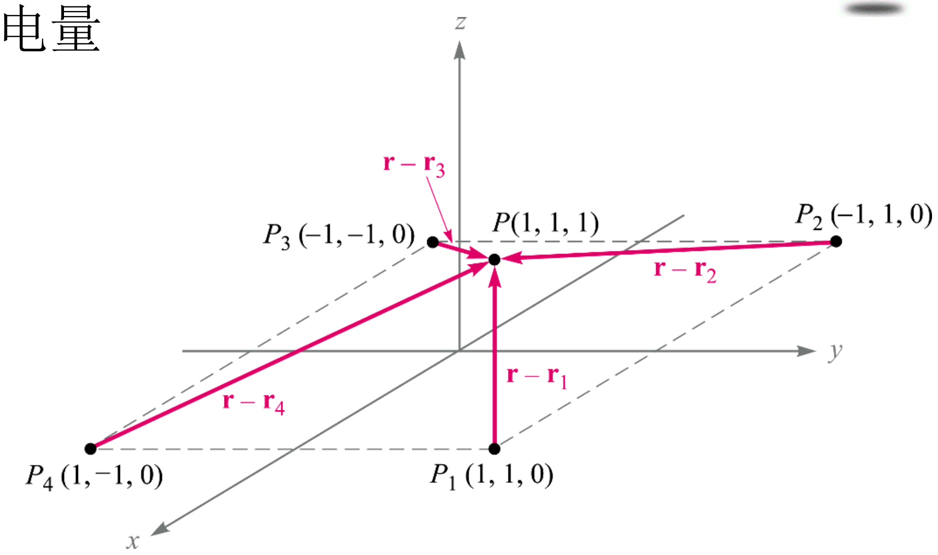
$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| = \sqrt{5}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3| = 3$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_4| = \sqrt{5}$$

例题2.2：P_1, P_2, P_3, P_4处各有一个带电量为3nC的点电荷，计算P点电场$\boldsymbol{E}$。

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|^2}\mathbf{a}_m}$$



计算各个单位矢量：$\mathbf{a}_m = \dfrac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|}$

$$Q/4\pi\epsilon_0 = 3\times10^{-9}/(4\pi\times8.854\times10^{-12}) = 26.96\ \mathrm{V\cdot m}$$

$$\mathbf{E} = 26.96\left[\frac{\mathbf{a}_z}{1}\frac{1}{1^2} + \frac{2\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_z}{\sqrt{5}}\frac{1}{(\sqrt{5})^2} + \frac{2\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z}{3}\frac{1}{3^2} + \frac{2\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z}{\sqrt{5}}\frac{1}{(\sqrt{5})^2}\right]$$

$$= \underline{6.82\mathbf{a}_x + 6.82\mathbf{a}_y + 32.8\mathbf{a}_z\ \mathrm{V/m}}$$

课堂习题 2.1节 - 2.2节

超星学习通

习题2.2， 2.4， 2.6(a)(b)(c)， 2.8， 2.10， 2.28(a)

2.3 连续分布体电荷的电场 – 电荷密度

FIELD ARISING FROM A CONTINUOUS VOLUME CHARGE DISTRIBUTION

在体积元 Δv 中有ΔQ的电荷量, 其电荷密度定义为:

$$\boxed{\rho_\nu = \lim_{\Delta \nu \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \nu}}$$

在整个空间vol中总电荷为:

$$\boxed{Q = \int_{\text{vol}} \rho_\nu d\nu}$$

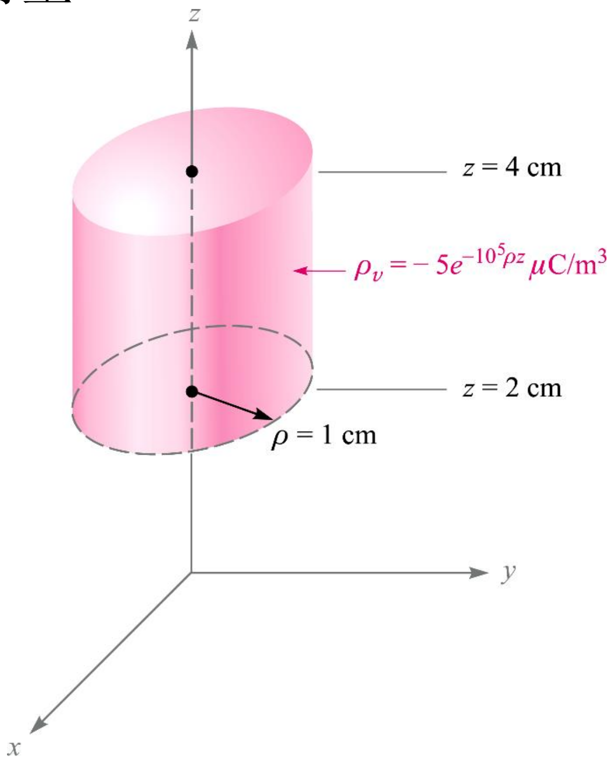
例题2.2：求图中长度为2cm的电子束内的总电荷量

$$Q=\int_{0.02}^{0.04}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{0.01} -5\times10^{-6}e^{-10^5\rho z}\rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

$$=\int_{0.02}^{0.04}\int_{0}^{0.01} -10^{-5}\pi e^{-10^5\rho z}\rho\,d\rho\,dz$$

$$=\int_{0}^{0.01}\left(\frac{-10^{-5}\pi}{-10^5\rho}e^{-10^5\rho z}\rho\,d\rho\right)_{z=0.02}^{z=0.04}$$

$$=\int_{0}^{0.01} -10^{-10}\pi(e^{-2000\rho}-e^{-4000\rho})d\rho$$



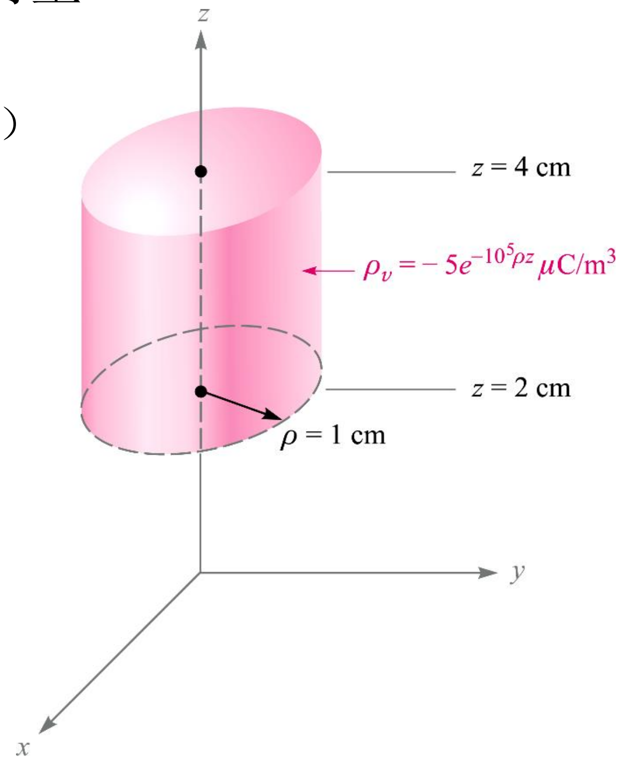
例题2.2：求图中长度为2cm的电子束内的总电荷量

$$Q = \int_0^{0.01} -10^{-10}\pi(e^{-2000\rho} - e^{-4000\rho})d\rho \quad \text{（接上页式子）}$$

$$= -10^{-10}\pi\left(\frac{e^{-2000\rho}}{-2000} - \frac{e^{-4000\rho}}{-4000}\right)_0^{0.01}$$

$$= -10^{-10}\pi\left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{4000}\right)$$

$$= \frac{-\pi}{40} = \underline{0.0785 \text{ pC}}$$



2.3 连续分布体电荷的电场

$\mathbf{r}'$处的元电荷ΔQ 在$\mathbf{r}$处产生的电场强度增量为：

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$= \frac{\rho_\nu\Delta\nu}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

对给定空间内所有电荷产生的电场进行叠加得到总的电场强度：

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')\,d\nu'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

2.4 线电荷的电场 FIELD OF A LINE CHARGE

线电荷沿z轴均匀分布，密度为常量ρ_L C/m

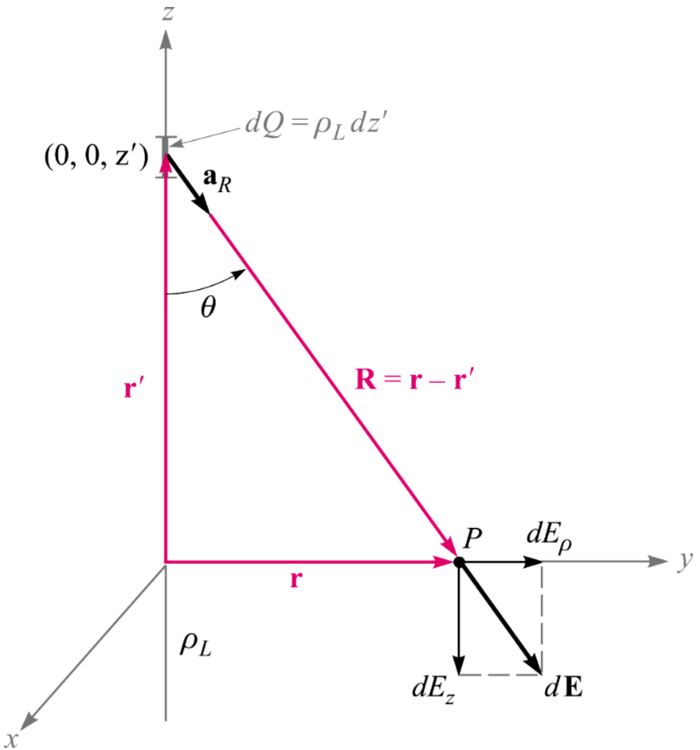
z 轴上的电荷 dQ 在 P 点上电场强度为：

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

其中：
$$\mathbf{r} = y\mathbf{a}_y = \rho\mathbf{a}_\rho$$
$$\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$$

可得：
$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z$$

代入dE中：
$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz'(\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$



2.4 线电荷的电场

接上页式子： $d\mathbf{E}=\dfrac{\rho_L dz'(\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z'^2)^{3/2}}$

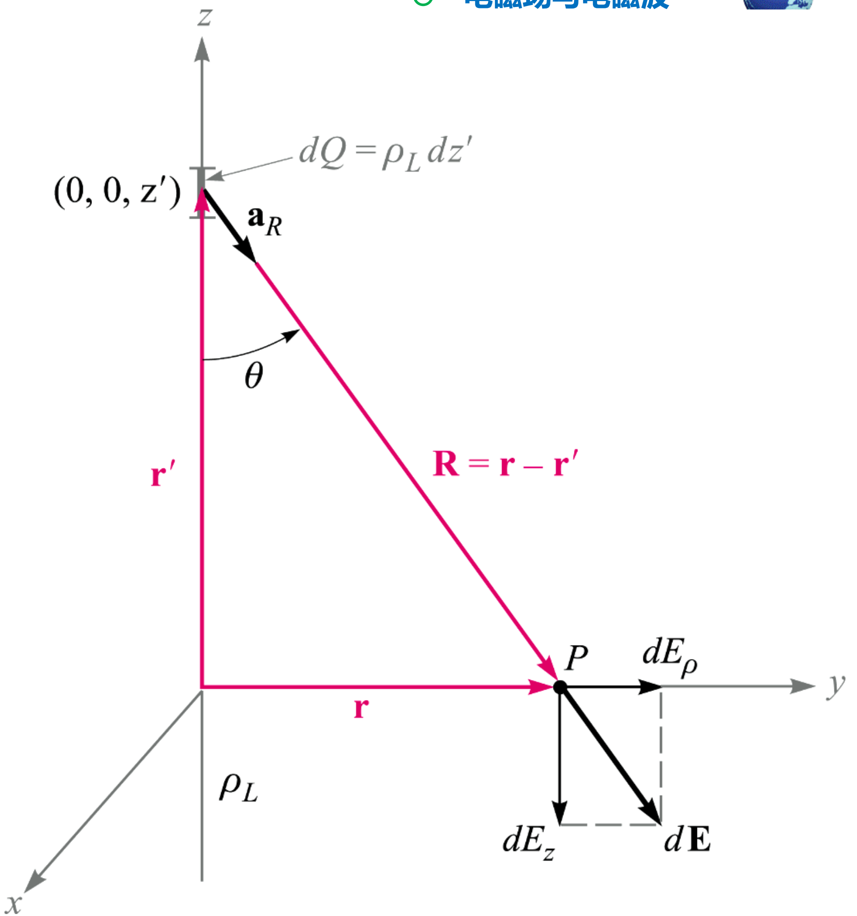
由于线电荷在z轴**对称**分布，故只需考虑$\boldsymbol{E}_\rho$ 分量：

$$dE_\rho=\frac{\rho_L\rho dz'}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z'^2)^{3/2}}$$

P 点总电场强度为：

$$E_\rho=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_L\rho dz'}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\rho\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{z'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}\right)_{-\infty}^{\infty}$$



2.4 线电荷的电场

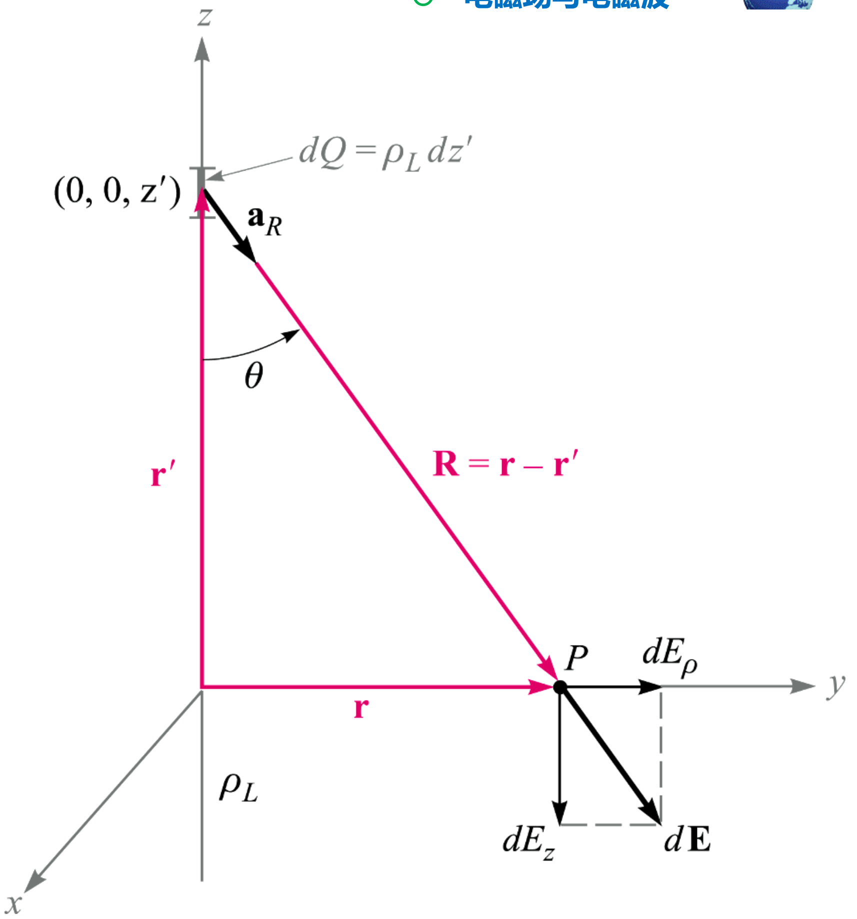
接上页式子：$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\rho\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{z'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}\right)_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

线电荷电场强度为：

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho}$$

线电荷电场强度与距离成反比



例：位于 $x = 6$ 和 $y = 8$ 且平行于 z 轴的一条无限长线电荷，求任意场点$P(x,y,z)$处的电场强度 $\mathbf{E}$。

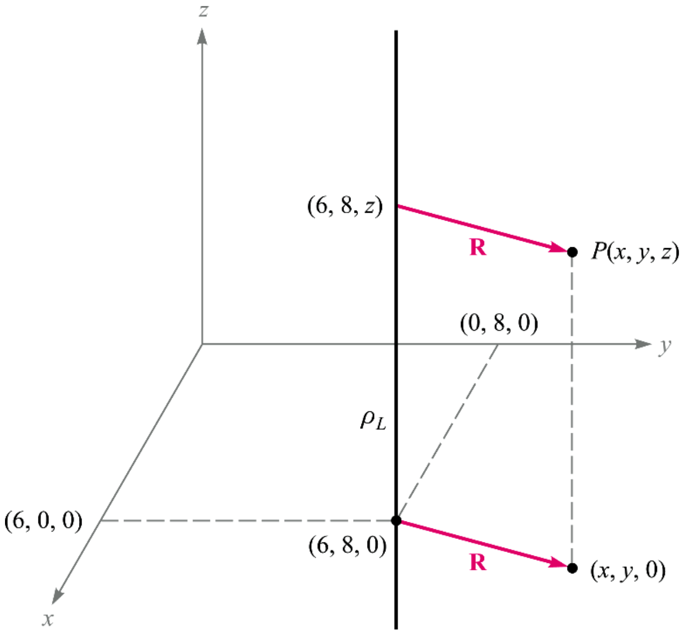
解：用线电荷与场点P之间的径向距离代替公式中的ρ

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}}\mathbf{a}_R$$

式中：

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{(x-6)\mathbf{a}_x+(y-8)\mathbf{a}_y}{\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\frac{(x-6)\mathbf{a}_x+(y-8)\mathbf{a}_y}{(x-6)^2+(y-8)^2}}$$



课堂习题 2.3节 - 2.4节

超星学习通

习题2.12，2.14(a)(b)，2.16(a)(b)(c)，2.18(a)(b)(c)，2.20(a)(b)

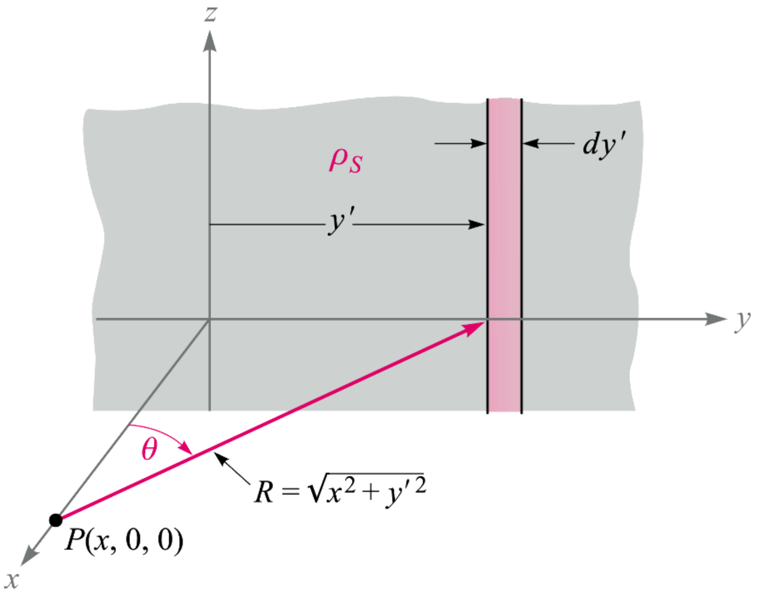
2.5 面电荷的电场 FIELD OF A SHEET OF CHARGE

整个y-z平面都均匀覆盖了密度为ρ_s的面电荷。场点P位于x轴上，将面电荷分解为宽度为dy'的线元电荷，可以计算出该线电荷在P点的电场。

由于**对称性**，电场y与z分量互相抵消，只需计算x分量：

$$dE_x = \frac{\rho_S\, dy'}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y'^2}}\cos\theta$$

$$= \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\frac{x\,dy'}{x^2+y'^2}$$



所有线电荷电场相加后得到面电荷电场为：

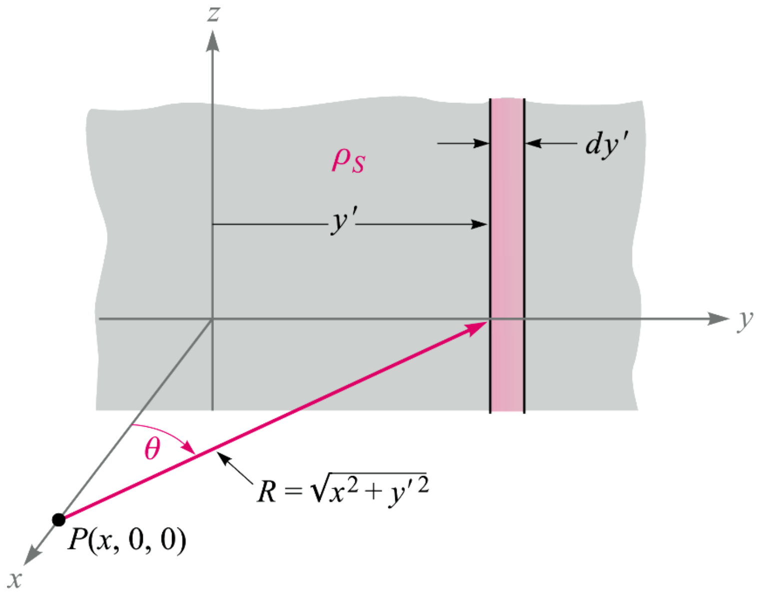
$$E_x = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dy'}{x^2+y'^2} = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\tan^{-1}\frac{y'}{x}\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}$$

2.5 面电荷的电场

面电荷电场为：

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_N$$

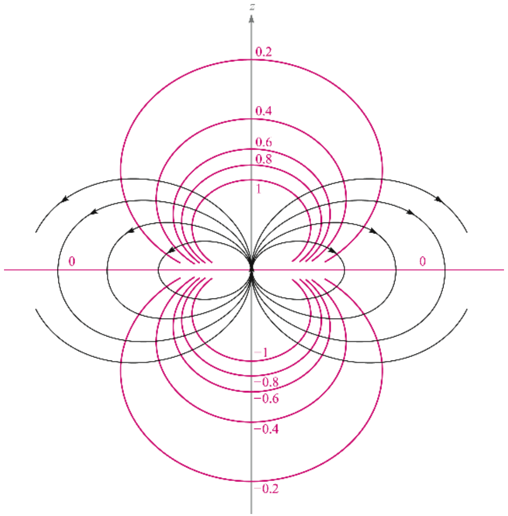
其中单位矢量$\boldsymbol{a}_N$沿 x 轴方向



结果为常数！电场方向和大小均不变，与距离无关

2.6 电力线和电场分布图

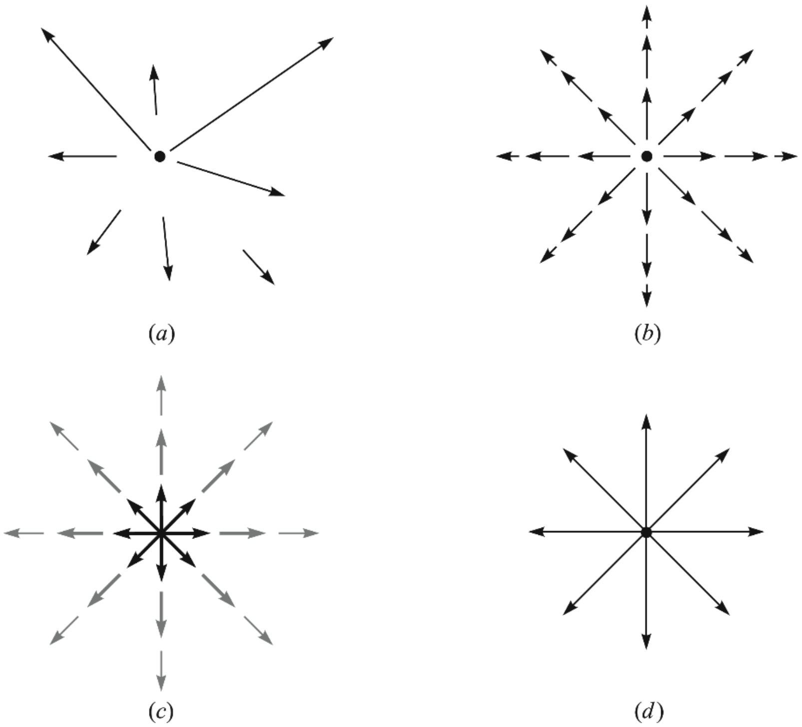
STREAMLINES AND SKETCHES OF FIELDS



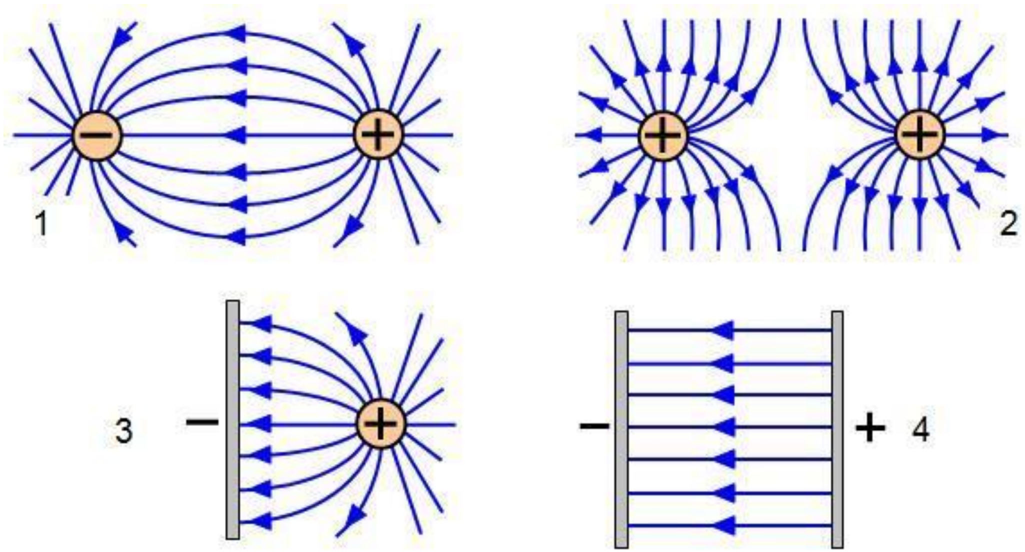
- 如何表示空间中复杂的电场?
  - 用图形比方程式更直观
- 电力线
  - 电场中的电荷沿电力线方向加速运动
- 电场分布图
  - 由多条电力线组成的图，线间距与电场强度大小成反比

2.6 电力线和电场分布图

- 对于线电荷横截面的电场，用图形表示该电场的几种可能的方式：
  a) 箭头起点为代表的电场点，箭头长度表示该点的强度
  b) 缩短箭头，显示出了电场的对称性。
  c) 用较深的颜色表示较强的电场，更直观。
  d) 电力线场图的常见形式，直观表示出对称性和电场方向。电力线间的距离与电场强度大小成反比



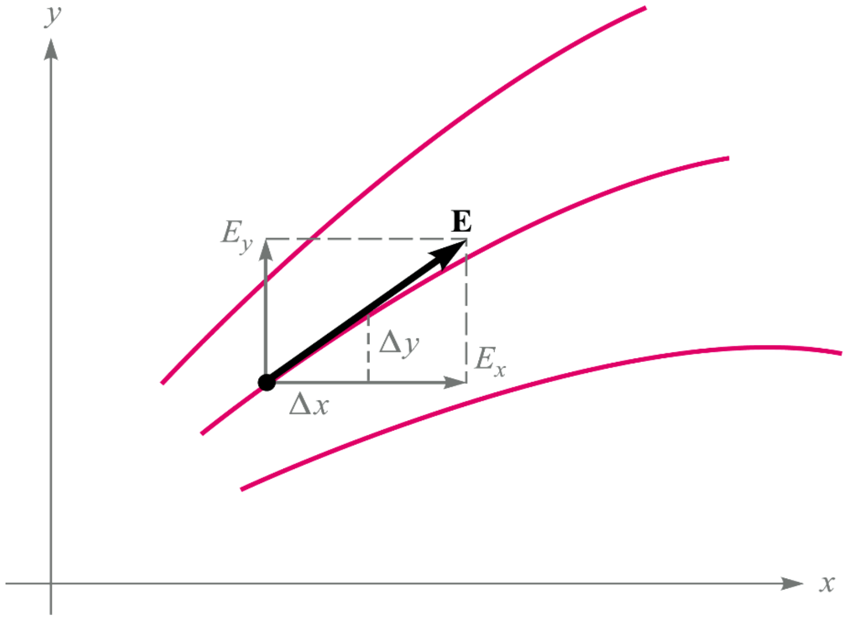
2.6 电力线和电场分布图



2.6 电力线和电场分布图

电力线任意点上的斜率为该点电场y方向分量与x方向分量的比率：

$$\boxed{\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}}$$



例：密度为$2\pi\epsilon_0$的均匀线电荷的电力线方程

圆柱坐标系中线电荷的电场为：$\mathbf{E}=\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$

转换为直角坐标系为：$\mathbf{E}=\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{a}_x+\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{a}_y$

求比率得微分方程：$\frac{dy}{dx}=\frac{E_y}{E_x}=\frac{y}{x}$ or $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$

解得：$\ln y=\ln x+C_1$ or $\ln y=\ln x+\ln C$

最后得电力线方程为：$y=Cx$

课堂习题 2.5节 - 2.6节

超星学习通

习题：2.22， 2.24(a)(b)， 2.26， 2.30

课后习题

2.1, 2.2, 2.3, 2.6, 2.10, 2.12, 2.13, 2.17, 2.19, 2.28