电磁场第一章：矢量分析

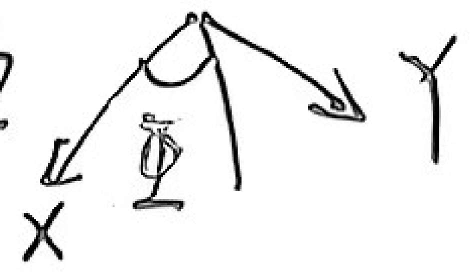
①点乘： $A\cdot B = AB\cos\theta$，A在B上的投影

②叉乘： $A\times B = a_n |A||B|\sin\theta_{AB}$ ←A到B方向

③几个坐标系：

(1) 直角坐标系、$x\cdot y\cdot z$

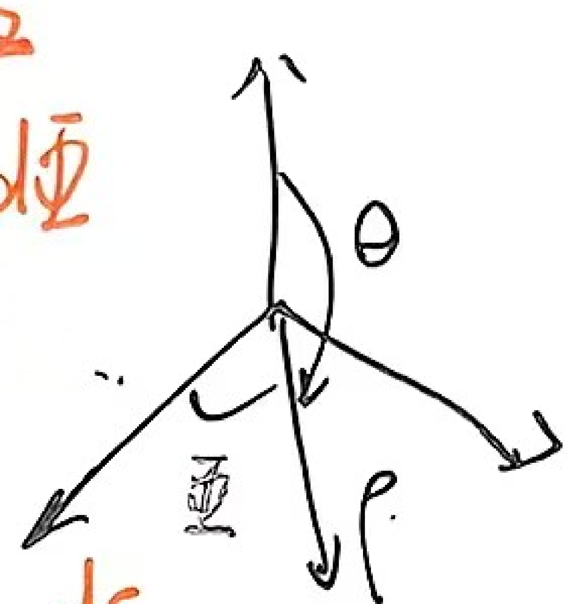
(2) 圆柱坐标系、ρ：P到z轴垂直距离. Φ



, z.

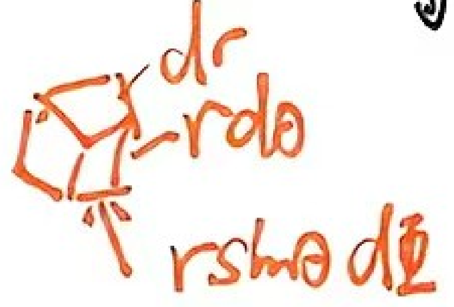
$$dv=\underbrace{\rho\, d\rho\cdot d\Phi}_{\text{一条边}}\cdot dz$$

(3) 球坐标系：θ. Φ. ρ.



其中 $a_r\times a_\theta = a_\Phi$

$$dv = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\Phi$$



重点：几个坐标系的转换：

电磁场第2章：库仑定律和电场强度

① 库仑定律：

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{R^2} \quad 其中 k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

自由空间介电常数 $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12} = \frac{1}{36\pi}10^{-9} F/m$

$$\Downarrow$$

$$\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R^2}|a_n| \leftarrow 单位矢量$$

② 电场强度（矢量）

$$E = \frac{F_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0R_{1t}^2}a_{1t}$$

合电场强度需进行换算

电荷 Q_1 的电场强度：

- 线电荷电场强度 $\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}a_\rho$（与距离成反比）
- 面电荷电场强度 $\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}$（线电荷积分）

③ 电荷密度 ρ_v

$$\rho_v = \lim_{\Delta v\to0}\frac{\Delta Q}{\Delta v} \iff Q = \int_{vol}\rho_v dv$$

电磁场第3章，电通量密度，高斯定律和散度

① 电通量 ψ ($\psi=Q$)

② 电通量密度 D

(1) 球内：$D=\frac{\psi}{4\pi a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}=\int_{vol}\frac{\rho_v dv}{4\pi R^2}a_R$

③ D与E的关系：

$D=\varepsilon_0 E$

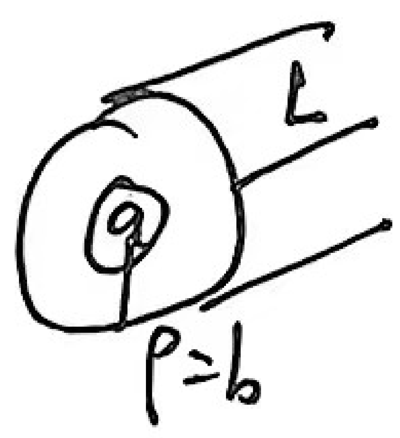
④ 高斯定律：计算任意闭合曲面的电通量：$D_s\cdot\Delta S$

$\psi=\int d\psi=\oint D_s ds=Q$ 相等

计算任意闭合曲面的电荷：$\oint_s D_s ds=\int_{vol}\rho_v dv$

$\Rightarrow D_s=\frac{Q}{\oint_s ds}$

例：同轴电缆：电通量密度



电荷：$2\pi a\cdot L\cdot\rho_s$

电通量 $2\pi\rho\cdot D_s\cdot L$

⑤ 体积元电荷的电场

$\nabla\cdot D=\mathrm{div}D=\rho_v$ 散度公式：(单独求偏导. $\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}$)

$\oint_s D ds=Q=\int_{vol}\rho_v dv=\int_{vol}\nabla\cdot D dv \Rightarrow \oint D\cdot ds=\int_{vol}\nabla\cdot D dv$

曲面积分 ⟶ 体积分

电磁场第4章：能量与电位

① 点电荷在电场中运动时消耗能量

$$W=-Q\int_{init}^{final} E\cdot dL$$ （可以是任意路径）与路径无关

② 线积分

$$dL=\begin{cases} dx\,a_x+dy\,a_y+dz\,a_z \\ d\rho\,a_\rho+\rho\,d\Phi\,a_\Phi+dz\,a_z \\ dr\,a_r+r\,d\theta\,a_\theta+r\sin\theta\,d\Phi\,a_\Phi \end{cases}$$

③ 电位差与定位的定义

$$V_{AB}=\frac{W}{Q}=-\int_B^A E\cdot dL$$

④ 保守场 $\oint E\cdot dL=0$

⑤ 电位可叠加

函数

$$V(r)=\int_{vol}\frac{\boxed{\rho_v(r')}\,dv'}{4\pi\varepsilon_0|r-r'|}$$

⑥ 电位梯度：$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max}=E=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}a_x+\frac{\partial V}{\partial y}a_y+\frac{\partial V}{\partial z}a_z\right)=-\nabla V$

⑦ 电偶极子

$$V=\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

⑧ 能量密度. $W_E=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}Q_mV_m=\frac{1}{2}\int_{vol}\rho_vV\,dv$

$$=\frac{1}{2}\oint_S(VD)\cdot dS-\frac{1}{2}\int_{vol}D\cdot(\nabla V)\,dv$$

电磁场第5章：导体与电介质

①电流与电流密度 $\Rightarrow J$

$$I=\frac{dQ}{dt},\quad \Delta I=J_N\Delta S \Rightarrow I=\int_S J\cdot ds$$

$$=\rho_v \Delta S v_x$$

$$\therefore J=\rho_v v_x$$

进行div变密度

由散度定理：$I=\oint J\cdot ds=\int_{vol}(\nabla\cdot J)\cdot dv=-\frac{d\int_{vol}\rho_v dv}{dt}$

$\nabla\cdot J=-\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$（电流连续性定理）

②导体.

$F=-eE$，v_d 漂移速度 $=-\mu_e E$.

电子的漂移率

$(J=\sigma E)$

$J=\rho_v\cdot v_d=\rho_v\cdot -\mu_e E=\sigma E$（其中 σ 为电导率）

可推出：

$\Rightarrow V=\frac{L}{\sigma S}\cdot I \,/\, R=\frac{L}{\sigma S}$

③切向电场 $E_t=0$

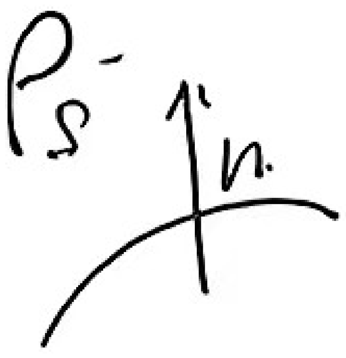
$\Delta h\to 0$

Δw 小但有小值

$\oint E\,dl=0$

④法向电通量

$D_N=\rho_S$



⑤镜像法：

⑥理想电介质的边界条件

电极化率　　ε_0 介电常数.

P 电极化强度 $=\chi_e\varepsilon_0 E$

$D=\varepsilon_0 E+P$

$\sigma=-\rho_e\mu_e+\rho_h\mu_h$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

电磁场第6章：电容：

① 定义：能存储电场能量（存储电荷与所施压的比率） $C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\varepsilon S}{d}$

② 电场（导体的边界效应，只沿z轴方向变换电位

$$D \cdot n_L \big|_{z=0} = D \cdot a_z = \rho_s \Rightarrow D = \rho_s \cdot a_z.$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_s a_z}{\varepsilon} a_z.$$

由 $C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s \cdot S}{\frac{\rho_s}{\varepsilon} \cdot d} = \frac{\varepsilon S}{d}$ 其中 $\varepsilon_0 = 8.85\ F/m.$

③ 能量 $W_E = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\varepsilon S}{d}}_{C} \cdot \underbrace{\frac{\rho_s^2 d^2}{\varepsilon^2}}_{V^2} = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

④ 场分布图估算电容

$E = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta\psi}{\Delta l_t}$ ← 电通量 $\frac{Q}{S}$ ← 间距

$C = \frac{\Delta l_t}{\Delta l_n}$ $\frac{\text{电力线长度}}{\text{电力线间距}}$

⑤ 泊松方程与拉普拉斯方程 （电荷 → 电荷密度）

$E = -\nabla V$

$\nabla \cdot D = \rho_v = \nabla \cdot \varepsilon E = -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \cdot V) = -\varepsilon \nabla \cdot \nabla \cdot V = -\varepsilon \nabla^2 \cdot V$

例子：体电荷为0，间距为d，中间部分无电荷

拉普拉斯方程：$\nabla^2 V = 0$（若 $\rho_v = 0$）

用两个边界条件 $\begin{cases} V = 0 & at\ x = 0 \\ V = V_1 & at\ x = d \end{cases}$ 同轴电缆例子

电磁场第7章，恒定磁场

$\nabla\cdot D=\rho_v$ 静电场高斯定律

$\nabla\times E=0$ 静电场的保守性

$\nabla\times H=J$ 安培环路定律

$\nabla\cdot B=0$ 恒定磁场高斯定律

$D=\varepsilon_0 E$

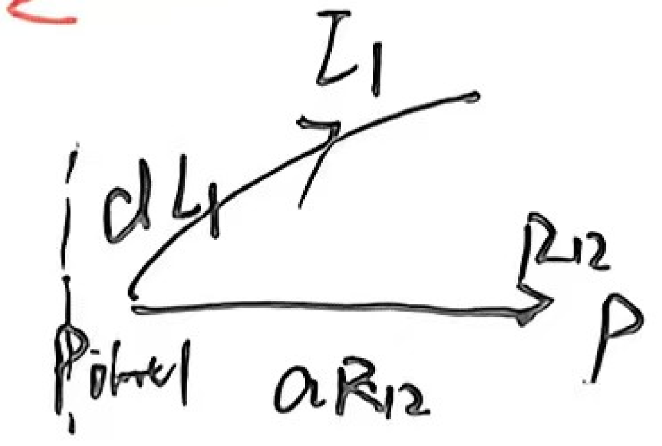
$B=\mu_0 H$

⇓

①毕奥沙伐定律：(载流导线间的作用力)

右手定则 $F=I\times H$ ← 磁场强度

$$dH_2=\frac{I_1 dL_1\times a_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$



$I=kb$

↑

表面电流密度： $\Rightarrow IdL=kds$

电场强度

H是线面体积分：$\oint_S D\cdot ds=Q=\int_{vol}\rho_v dv$

$\oint E\cdot dL=0$

$\oint H\cdot dL=I=\int_S J\cdot ds$

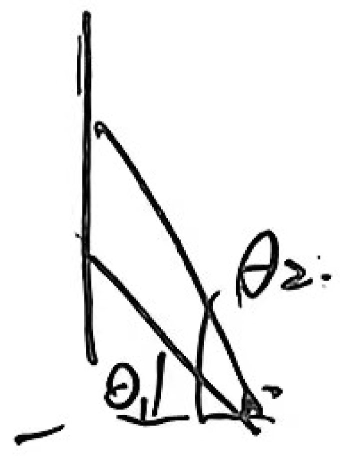
$\oint_S B\cdot ds=0$

$H=\frac{I}{2\pi\rho}\cdot a_\Phi$

直导线

$H=\frac{1}{4\pi\rho}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)a_\varphi$

+推导



$H=\frac{I\pi a^2 a_z}{2\pi(a^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$ 电流环

②磁距：$I(\pi a^2)a_z=m$

类似高斯定律(电场)

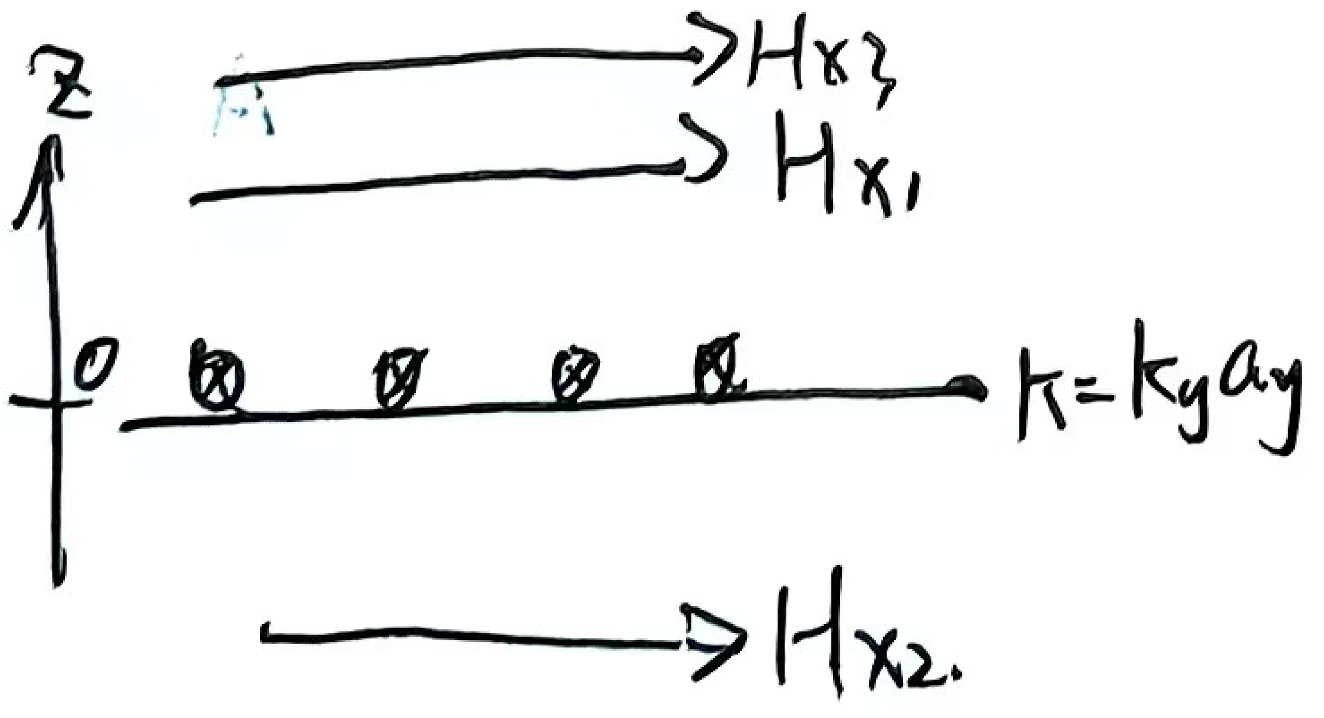
③安培环路定理：磁场强度沿闭合路径的线积分

$$\oint HdL=I$$

$$\therefore \oint H\cdot dL=\int_0^{2\pi}H_\Phi\cdot\rho d\Phi=H_\Phi\rho\int_0^{2\pi}d\Phi=H_\Phi\cdot 2\pi\cdot\rho=I$$

长直导线：$H_\Phi=\frac{I}{2\pi\rho}$

④磁场在电流片上方和下方是不连续的，差值为电流面的表面电流密度



$H_x=\frac{1}{2}k_y$ $z>0$ (与距离无关，$H_{x3}=H_{x1}$)

$H_x=-\frac{1}{2}k_y$ $z<0$

⑤ 旋度

$$\oint H dl = \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

如：$\nabla \times A = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{A_z}{\partial y} - \frac{A_y}{\partial z}\right)e_x + \left(\frac{A_x}{\partial z} - \frac{A_z}{\partial x}\right)e_y + \left(\frac{A_y}{\partial x} - \frac{A_x}{\partial y}\right)e$

用于极小的闭合电流环：

$$\oint H \cdot dL = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y = J_z \Delta x \Delta y$$

⑥ 麦克斯维第二方程、

$\nabla \times H = J$ （安培环路定律点形式）

已知 $\oint E \cdot dL = 0 \Rightarrow \nabla \times E = 0$ 如果一个场定义在该场点上的旋度都为0 那么该场为保守场

⑦ 斯托克斯定理

一个小区域为 ΔS 垂直于表面微分元的旋度分量可以、

$$\frac{\oint H \cdot dL_{\Delta s}}{\Delta S} = (\nabla \times H)a_n$$

$$\Downarrow$$

$$\oint H \cdot dl \equiv \int_S (\nabla \times H) \cdot ds$$

电流密度

$\Downarrow$ $\nabla \times H = J$ 对两侧积分

电流　　线积分

$$\int_S (\nabla \times H) \cdot ds = \int_S J \cdot ds = \oint H \cdot dL = I$$

⑧ 磁通量和磁感应强度

电通 $\psi = \oint D \cdot ds = Q$

高斯定律点形式

磁通 $\Phi = \oint B \cdot ds = 0 = \int_V \nabla \cdot B \cdot dv = 0 \Rightarrow \nabla B = 0$

（磁通量线始终闭合）

⑨ 磁位、磁矢位、矢量磁位 A

由 $E = -\nabla V$

$\Rightarrow H = -\nabla V_m$

$\nabla \times H = J = \nabla \times (-\nabla V_m)$

$\Rightarrow H = -\nabla V_m \; (J=0)$

$B = \nabla \times A$

$H = \nabla \times A \cdot \frac{1}{\mu_0}$

$\nabla^2 A = -\mu_0 J$

电磁场第8章：磁场力、材料和电感

①运动电荷受的力：

静止 $F=EQ$ （电场产生）

运动 $F_m=Q(V\times B)$ 叉乘右手 （磁场产生）

$$F=Q[E+(V\times B)]$$ —— 洛伦兹力方程

②元电流.

↳受磁场 B → 霍尔电压.

J为电流密度.

dv体积元

dl J电流密度 B

$$J=\rho_v\cdot V$$

$$dF=dQ\cdot V\times B=\rho_v\,dv\cdot V\times B=J\times B\cdot dv$$

电流体积元

$\boxed{推广至}$：体电流、面电流、线电流

$J\,dv$ $\quad K\,ds$ $\quad I\,dl$

$\Rightarrow dF$

$J\times B\,dv$	3维	体积分
$K\times B\,ds$	2维	面积分
$I\,dl\times B$	1维	线积分

$$F=I\cdot L\times B=BIL\sin\theta.$$

③元电流之间的作用力

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

④闭合回路所受的力和力矩

$$T=R\times F$$