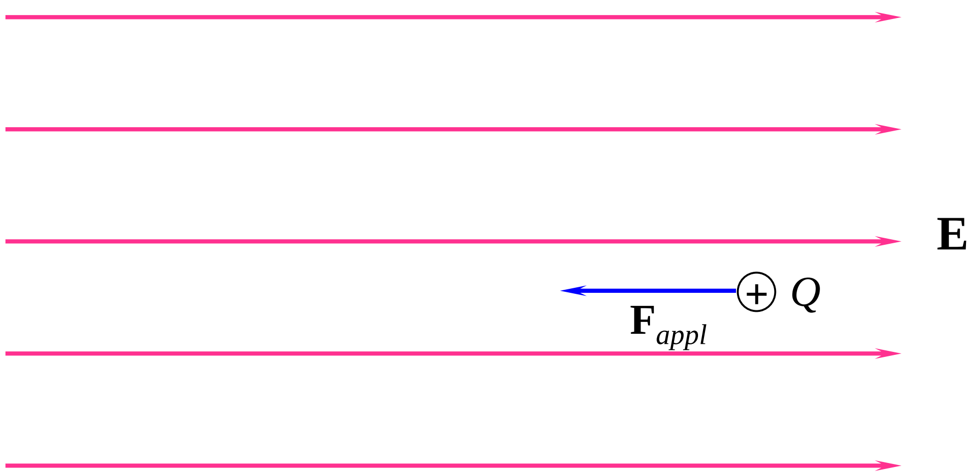
第 4 章

能量与电位
Energy and Potential

4.1 点电荷在电场中运动时消耗的能量

ENERGY EXPENDED IN MOVING A POINT CHARGE IN AN ELECTRIC FIELD

为了移动电场中的电荷Q，需要在电场的反方向为电荷Q施加一个力：

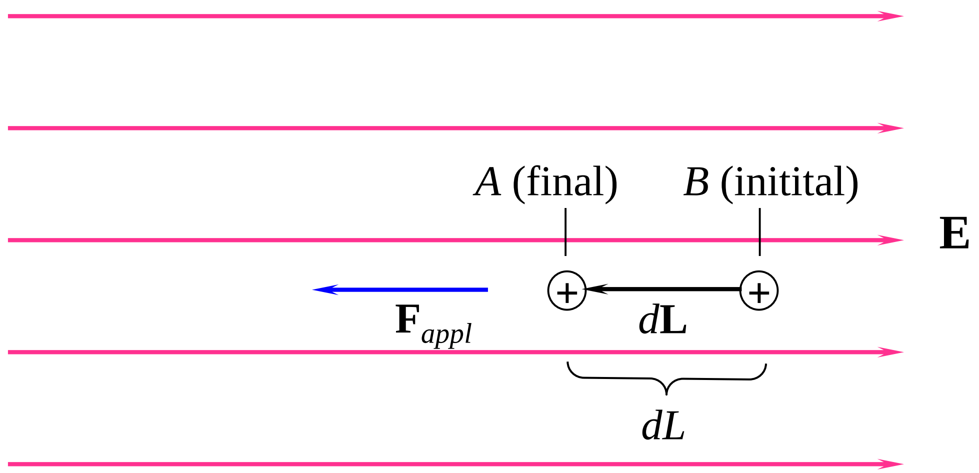


$$\boxed{\mathbf{F}_{appl} = -Q\,\mathbf{E}}$$

4.1 点电荷在电场中运动时消耗的能量

在将点电荷Q从初始位置B移过dL的距离（到最终位置A点）时，所做的功为：

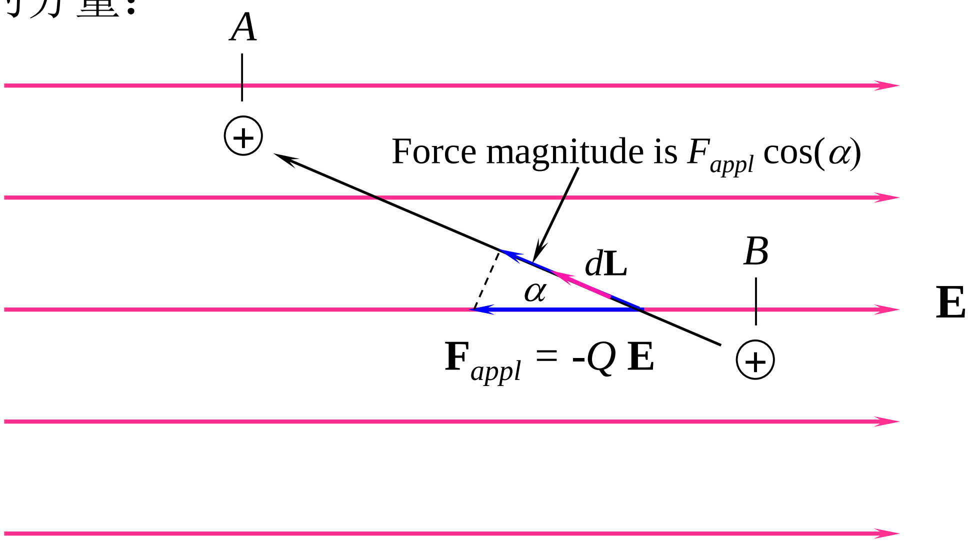
$$dW = F_{appl}\, dL = QE\, dL = \underline{-Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}\ [\mathrm{J}]}$$



运动路径沿着电场线的相反方向，与电场线平行，且假定电场是恒定的。

4.1 点电荷在电场中运动时消耗的能量

对于任意方向的作用力，实际在做功的方向是所移动距离矢量$\mathbf{dL}$在电场方向的分量：



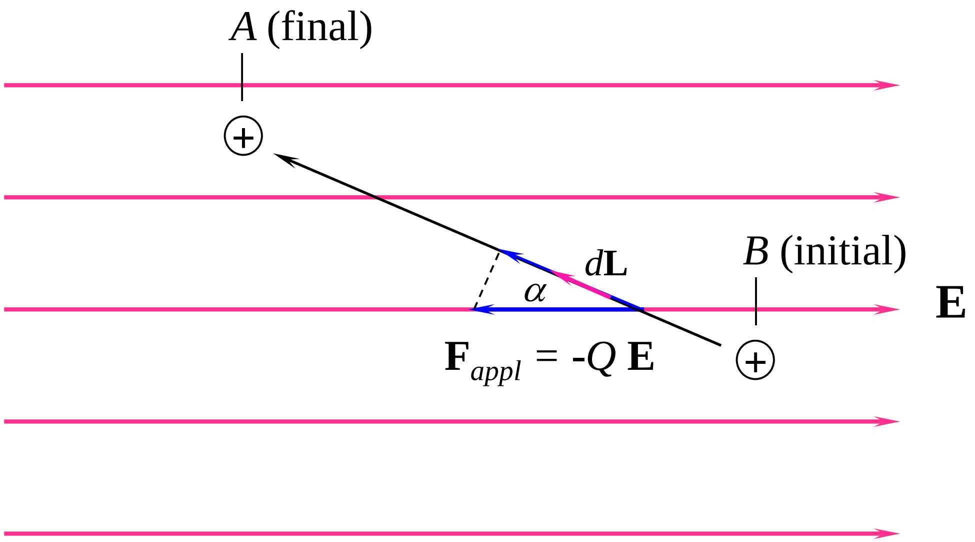
将电荷Q移动$\mathbf{dL}$距离所做的功为：

$$\boxed{dW = F_{appl}\cos(\alpha)\, dL = -Q\mathbf{E}\bullet d\mathbf{L}}$$

4.1 点电荷在电场中运动时消耗的能量

在电场$\boldsymbol{E}$中将电荷Q移动一段有限距离的过程中做的总功为：

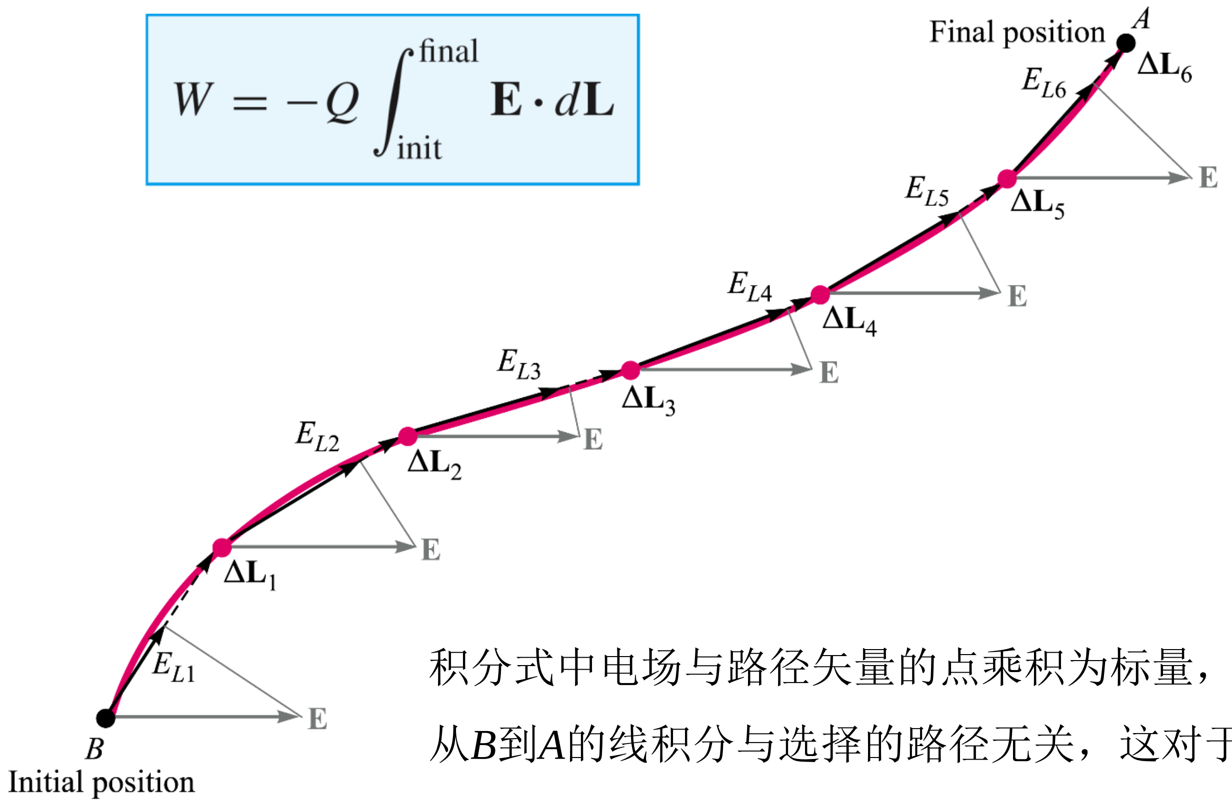
$$\boxed{W = -Q\int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}}$$



4.2 线积分 THE LINE INTEGRAL

做功的积分表达式是通用的， 路径可以是任意形状。

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$



积分式中电场与路径矢量的点乘积为标量，该积分称为线积分

从B到A的线积分与选择的路径无关，这对于非均匀场也成立

4.2 线积分

如何计算线积分： $\displaystyle\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$

由于： $\mathbf{E} = E_x\mathbf{a}_x + E_y\mathbf{a}_y + E_z\mathbf{a}_z$

且： $d\mathbf{L} = dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z$

代入线积分中得：

$$\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_B^A (E_x\mathbf{a}_x + E_y\mathbf{a}_y + E_z\mathbf{a}_z)\cdot(dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z)$$

$$\boxed{= \int_{x_B}^{x_A} E_x\,dx + \int_{y_B}^{y_A} E_y\,dy + \int_{z_B}^{z_A} E_z\,dz}$$

例4.1

有一个非均匀电场：　$\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$

带电量为Q=2的电荷在该电场中沿以下一小段圆弧移动：

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 1$$

起始点为 B (1, 0, 1)，终点为 A (0.8, 0.6 ,1)，求克服电场力所做的功：

解：
$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= -2\int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)\cdot(dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z)$$

$$= -2\int_1^{0.8} y\,dx - 2\int_0^{0.6} x\,dy - 4\int_1^1 dz$$

此处积分只用到了电场和起始点，还未加入路径

例4.1

现有： $W = -2\int_{1}^{0.8} y\,dx - 2\int_{0}^{0.6} x\,dy - 4\cancel{\int_{1}^{1} dz}$

利用圆弧路径的表达式 $x^2 + y^2 = 1 \quad z = 1$ 分别代入上式中的x和y：

$$W = -2\int_{1}^{0.8} \sqrt{1 - x^2}\,dx - 2\int_{0}^{0.6} \sqrt{1 - y^2}\,dy - 0$$

三角换元：$x = sin(x)$

$$= -\left[x\sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x\right]_{1}^{0.8} - \left[y\sqrt{1 - y^2} + \sin^{-1} y\right]_{0}^{0.6}$$

$$= -(0.48 + 0.927 - 0 - 1.571) - (0.48 + 0.644 - 0 - 0)$$

$$= \underline{-0.96\,\mathrm{J}}$$

例4.2 本例与例4.1使用相同的电场**E**和电荷Q=2，且起点B与终点A坐标也相同，唯一不同的是电荷是沿着B到A直线移动，求克服电场力所做的功。

解：以下三个方程分别确定的平面都通过从B到A的直线，其中任何两个平面的交线就是该直线的方程：

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B)$$

从第一个方程可得：$y = -3(x-1)$

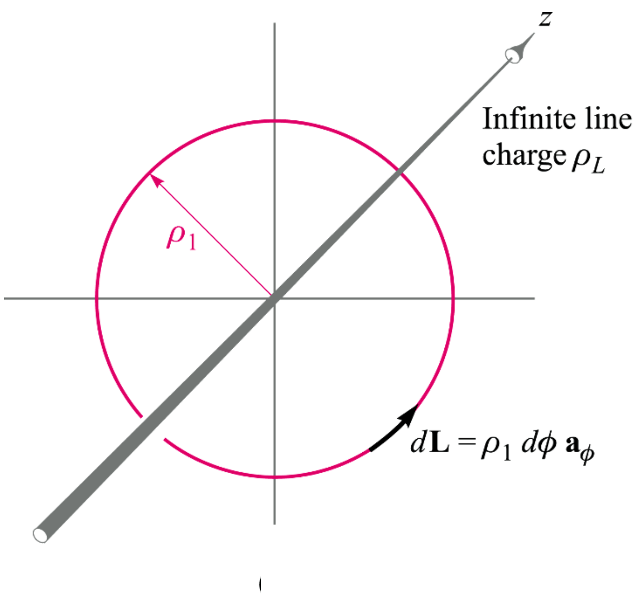
从第二个方程可得：$z = 1$

因此：
$$W = -2\int_1^{0.8} y\,dx - 2\int_0^{0.6} x\,dy - 4\int_1^1 dz$$
$$= 6\int_1^{0.8}(x-1)\,dx - 2\int_0^{0.6}\left(1-\frac{y}{3}\right)dy$$
$$= \underline{-0.96\ \mathrm{J}}$$

静电场中外力做功与所选路径无关

4.2 线积分 – 线电荷电场中的电荷运动

在下图中，将电荷Q围绕着z轴的线电荷运行一周所做的功为：



其中： $\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \dfrac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho$

$$W = -Q\int_{\text{init}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho_1}\mathbf{a}_\rho \cdot \rho_1\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$$

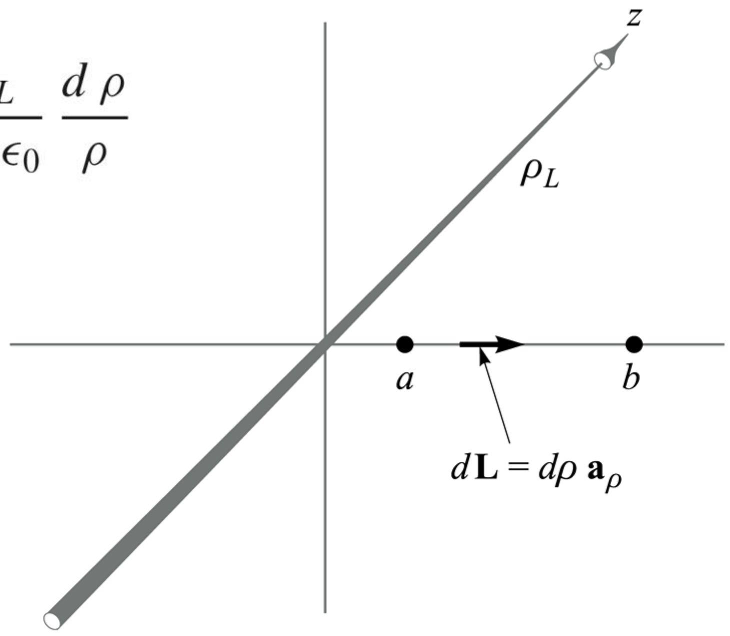
$$= -Q\int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\phi\, \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$

运动路径始终与电场垂直

4.2 线积分 -线电荷电场中的电荷运动

对于同样的线电荷，若电荷Q沿电场径向方向路径由a点运动到b点所做的功为：

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho \cdot d\rho\, \mathbf{a}_\rho = -Q \int_a^b \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho}$$



最终可得： $$W = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

4.2 线积分

三种坐标系中的微分路径长度：

$$d\mathbf{L} = dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z \qquad \text{(rectangular)}$$

$$d\mathbf{L} = d\rho\,\mathbf{a}_\rho + \rho\,d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\,\mathbf{a}_z \qquad \text{(cylindrical)}$$

$$d\mathbf{L} = dr\,\mathbf{a}_r + r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi \qquad \text{(spherical)}$$

4.3 电位差和电位的定义
DEFINITION OF POTENTIAL DIFFERENCE AND POTENTIAL

将电荷从起点移动到终点所做的功转化为电荷得到的电位（Potential）能量。

$$W = -Q\int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

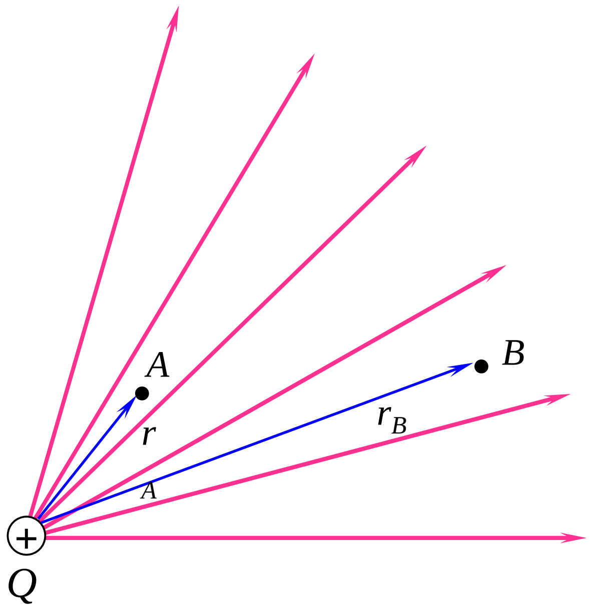
将单位正电荷从电场中的一点移到另一点所做的功定义为：电位差（单位为J/C 或 V伏特）

$$\text{电位差} = \frac{W}{Q} = -\int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \quad \text{Volts}$$

A点与B点的电位差为：

$$\boxed{V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}}$$

4.3 电位差和电位的定义 - 点电荷的电位差



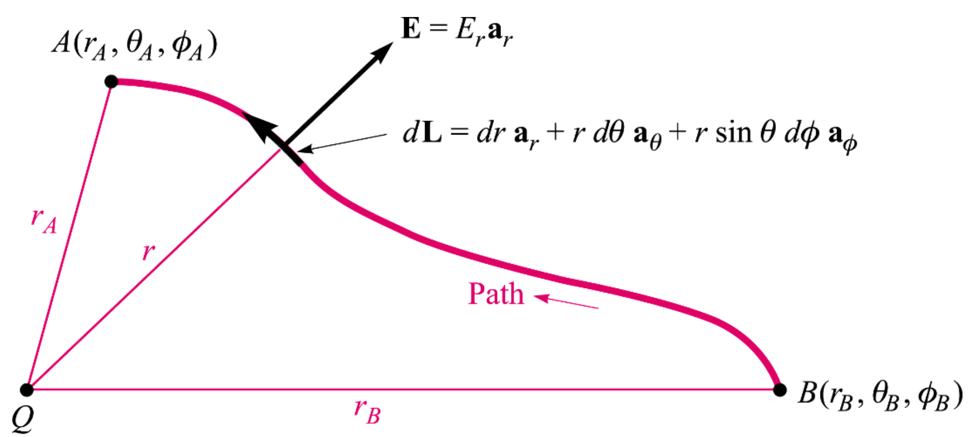
在点电荷Q的电场中，计算将另一单位正电荷从A点移至B点所做的功。点电荷的电场为：

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

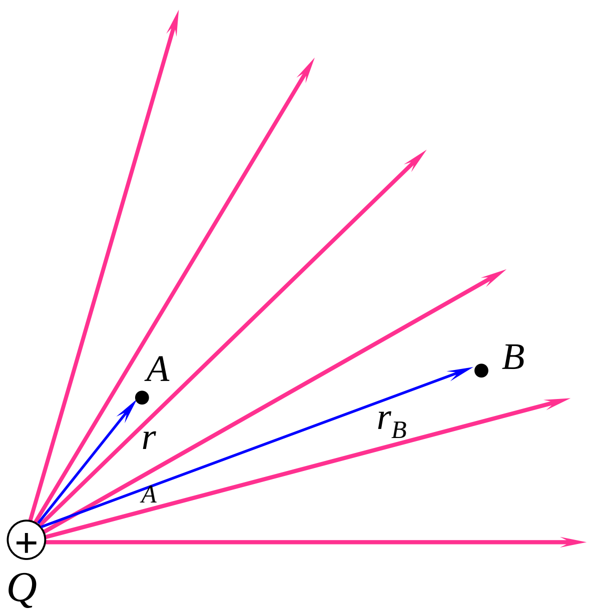
微分移动路径为（球坐标系）：

$$d\mathbf{L} = dr\,\mathbf{a}_r + r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

从B点到达A点的路径并不重要，因为只有半径的变化才会影响做的功。路径的无关性也意味着该场具有保守性。



4.3 电位差和电位的定义 - 点电荷的电位差



继续计算从A点移至B点所做的功：

$$\text{由于：} \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

且：

$$d\mathbf{L} = dr\,\mathbf{a}_r + r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

得到：

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

4.3 电位差和电位的定义 - 保守场

如果在某个场中任意两点间的线积分与路径无关，那个这个场是保守场。自然界中的大多数场都是保守场（意味着能量被保存起来了，例如重力场就是保守场）。保守场的另一个特性是对于闭合路径的线积分为0：

$$\boxed{\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = 0}$$

若某一场中任意闭合路径的线积分都为0，那么该场为保守场。后续章节中将引入场的旋度，如果场中所有点的旋度为0，那么该场为保守场。

课堂习题 4.1节 - 4.3节

- 习题：4.2，4.4，4.6

4.4 点电荷的电位 THE POTENTIAL FIELD OF A POINT CHARGE

上一节中已计算了在点电荷电场中两点之间的电位差为：

$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

假设无限远处的电位为0，令式中B点为无限远处，A点与在原点的点电荷的距离为r，那么A点的电位为：

$$\boxed{V_{r\infty} = V_r - V_\infty = -\int_\infty^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

该表达式给出了距离原点点电荷 r 处任意点的电位，称为电位方程或电位场。

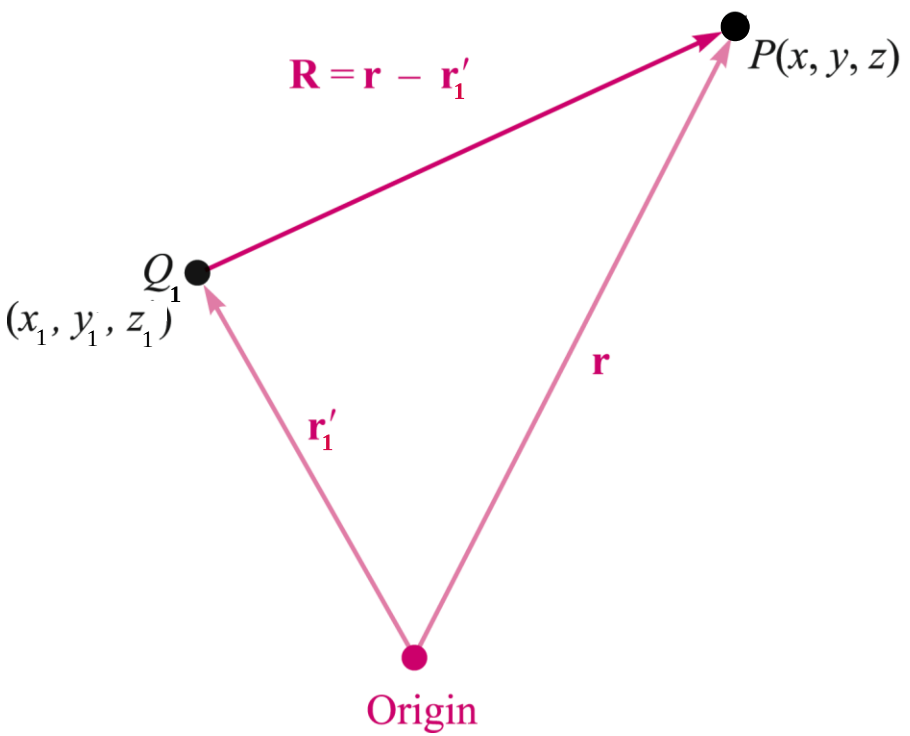
也可以不选择特定点的零参考点表示电位，下式中C_1中可以任选：

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

4.5 点电荷系统的电位 - 点电荷不在原点

THE POTENTIAL FIELD OF A SYSTEM OF CHARGES: CONSERVATIVE PROPERTY

若点电荷Q_1不在原点，那么P点的电位为： $V_P(\mathbf{r}) = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}$



4.5 点电荷系统的电位 - 两个点电荷的电位

若有两个分别位于$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_2$处的点电荷Q_1与Q_2，那么它们在$\mathbf{r}$处产生的电位为：

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}$$

若继续增加电荷数目，对于 n 个电荷在 $\mathbf{r}$ 处产生的电位为：

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|}}$$

4.5 点电荷系统的电位 – 连续分布电荷的电位

若将每个点电荷看成一连续体电荷分布中的一个小元电荷$\rho_v\Delta_v$，那么：

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_v(\mathbf{r}_1)\Delta v_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_2)\Delta v_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_n)\Delta v_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|}$$

当这些小元电荷的数目变为无限多个时，得到如下积分表达式：

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')\,dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

4.5 点电荷系统的电位 – 连续分布电荷的电位

线电荷、面电荷与体电荷的电位方程：

线电荷： $$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\,dL'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

面电荷： $$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')\,dS'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

体电荷： $$V(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')\,dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

上式与前面曾计算过的电场强度表达式相似：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')\,dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

例4.3 求$z = 0$平面上，半径为$\rho = a$的圆环上均匀分布的线电荷ρ_L在 z 轴上所产生的电位 V

解：使用公式

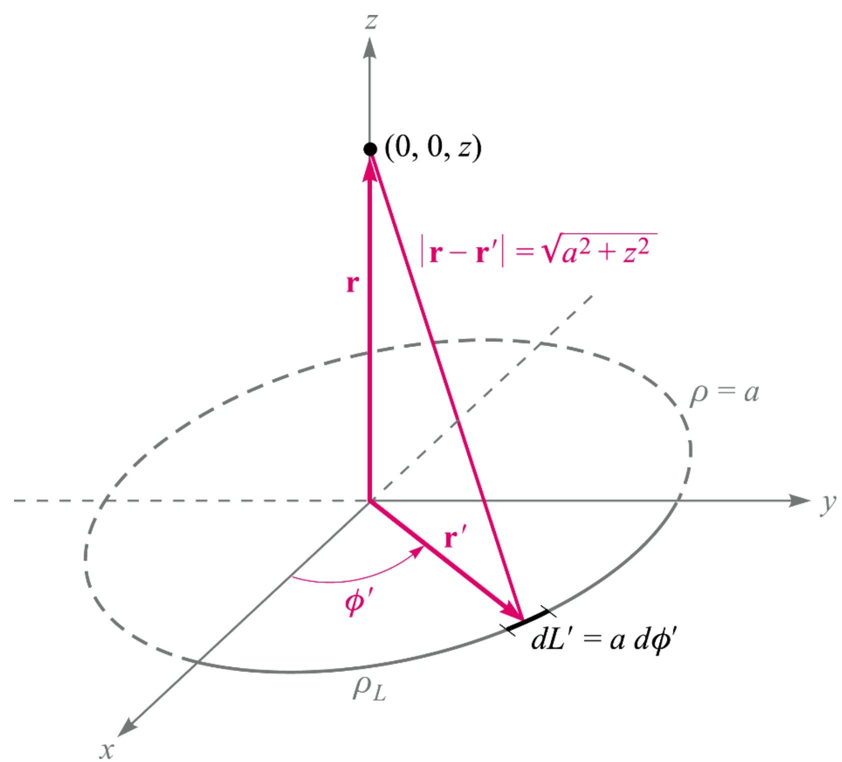
$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\,dL'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

其中：$dL' = ad\phi'$

$$\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{a^2+z^2}$$

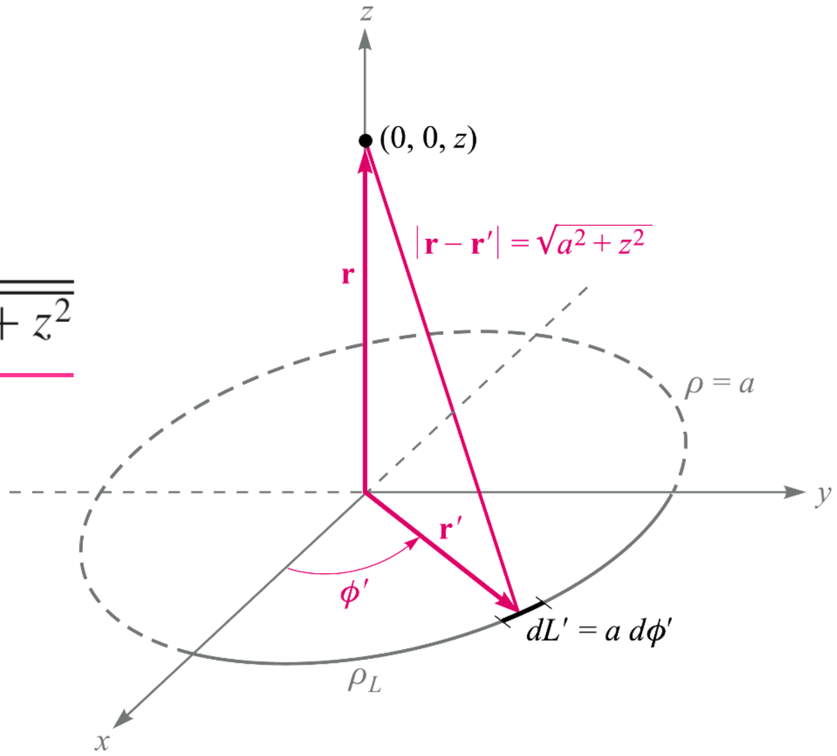


例4.3 求$z = 0$平面上，半径为$\rho = a$的圆环上均匀分布的线电荷ρ_L在 z 轴上所产生的电位 V

代入公式： $$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\,dL'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

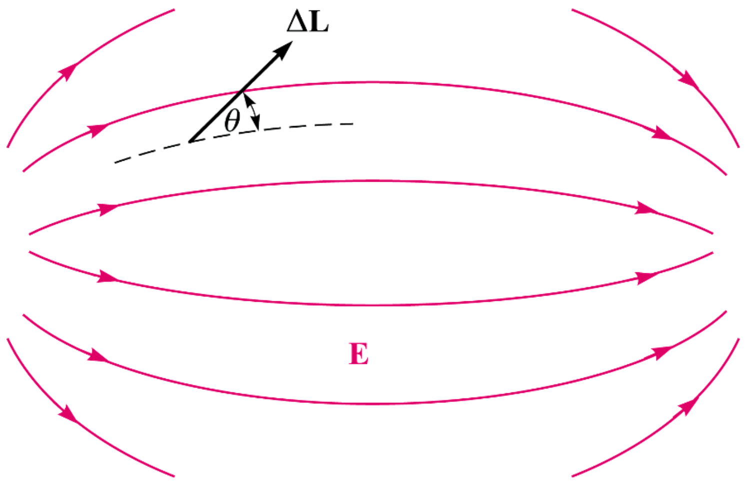
得到：

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a\, d\phi'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$



4.6 电位梯度 POTENTIAL GRADIENT

在$\Delta\mathbf{L}$ 的距离与方向上电位的变化取决于该矢量与电场的角度，即：



$$\Delta V \doteq -\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{L}$$

或 $$\Delta V \doteq -E\,\Delta L\cos\theta$$

从而可得： $$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta$$

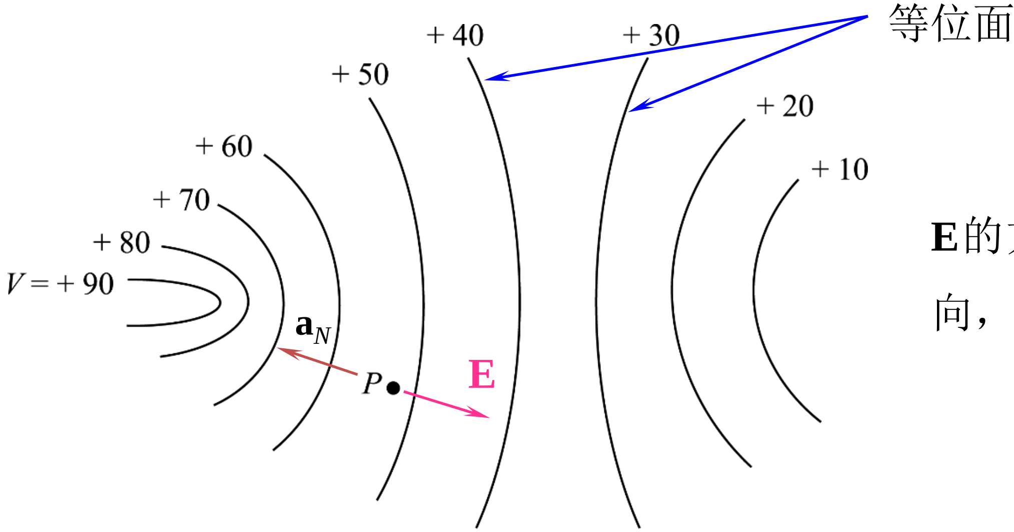
该式的最大值为： $$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{\max} = E$$ 此时$\Delta\mathbf{L}$与电场$\mathbf{E}$的方向相反

4.6 电位梯度 - 等位面

延着电场相反方向电位的增速最快

$$\mathbf{E} = -\left.\frac{dV}{dL}\right|_{\max} \mathbf{a}_N$$

垂直于等位面的单位矢量，方向指向较高电位



E的方向指向电位下降最快的方向，称为电位V的负梯度方向

4.6 电位梯度 - 电位梯度的推导与表示

在直角坐标系中，电位的变化可分解为三个坐标轴的微分分量之和，用以下微分式表示：

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

由于已知：

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz$$

得到：

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

三式矢量相加得到：

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)}$$

4.6 电位梯度 - 电位梯度的推导与表示

得到了电场 **E** 与电位V之间的关系

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)}$$

发现可以用del算子来简化该式： $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$

因此，在静电场中，**E**和V之间的关系可以更简洁的表示为：

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$$

E 等于 V 的负梯度

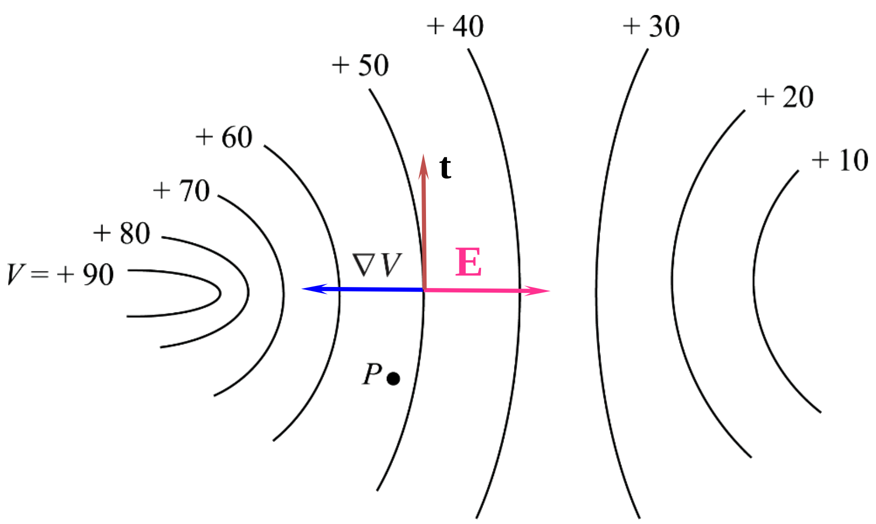
注意：式中 V 为标量而**E**为矢量，可见标量的梯度为矢量，方向为电位增加速率最大的方向

4.6 电位梯度 - 梯度矢量的方向

V 的梯度的物理解释是一个电位标量的最大空间变化率，且方向为最大变化率的方向，故而为矢量。在任意点上，梯度与等位面的切线互相垂直，用矢量点乘表示即：

$$\nabla V \cdot \mathbf{t} = 0$$

上式中，**t**为等位面切线方向的单位矢量



4.6 电位梯度 - 不同坐标系下的电位梯度

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \qquad \text{(rectangular)}}$$

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \qquad \text{(cylindrical)}}$$

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi \qquad \text{(spherical)}}$$

例4.4 给定一个电位场$V = 2x^2y - 5z$和点P(-4, 3, 6)，求P点的电位V、电场强度**E**以及**E**的方向、电通量密度**D**和体电荷密度ρ_v

解：点P(-4, 3, 6)的电位为：

$$V_P = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66 \text{ V}$$

利用梯度求解电场强度：

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -4xy\mathbf{a}_x - 2x^2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

E在P点的值为：

$$\mathbf{E}_P = 48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

以及：

$$|\mathbf{E}_P| = \sqrt{48^2 + (-32)^2 + 5^2} = 57.9 \text{ V/m}$$

E在P点的方向为单位矢量：

$$\mathbf{a}_{E,P} = (48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)/57.9$$
$$= 0.829\mathbf{a}_x - 0.553\mathbf{a}_y + 0.086\mathbf{a}_z$$

如果假设电场存在于自由空间：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} = -35.4xy\,\mathbf{a}_x - 17.71x^2\,\mathbf{a}_y + 44.3\,\mathbf{a}_z \text{ pC/m}^3$$

最后利用散度关系求得电荷密度：

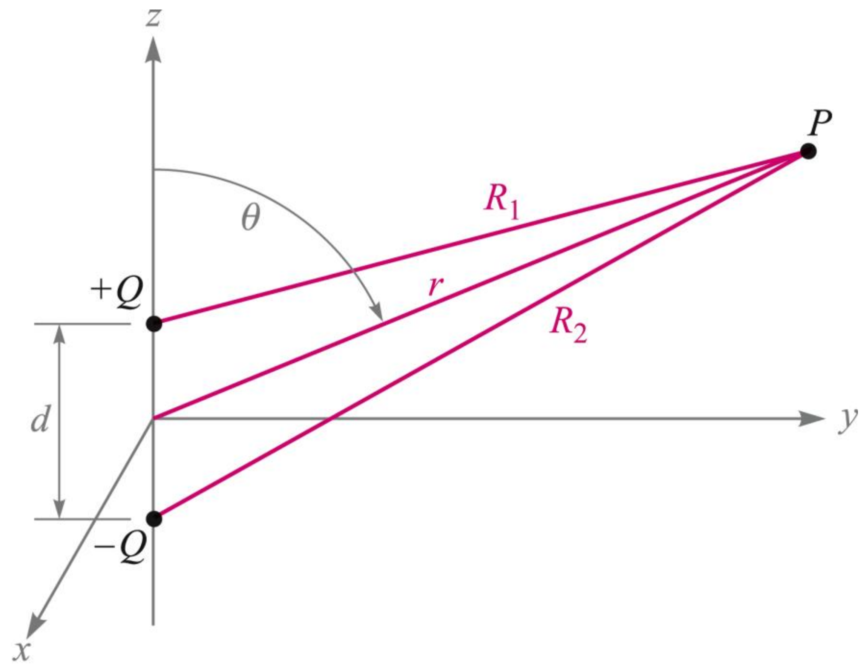
$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = -35.4y \text{ pC/m}^3$$

课堂习题 4.4 - 4.6

- 习题：
  - 4.10, 4.16, 4.18

4.7 电偶极子 THE ELECTRIC DIPOLE

电偶极子指电量相同符号相反的一对点电荷。图中的点电荷+Q与-Q就是一对电偶极子。计算它们在P点共同产生的电场与电位方程。



P点的电位为两个点电荷的电位方程之和：

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

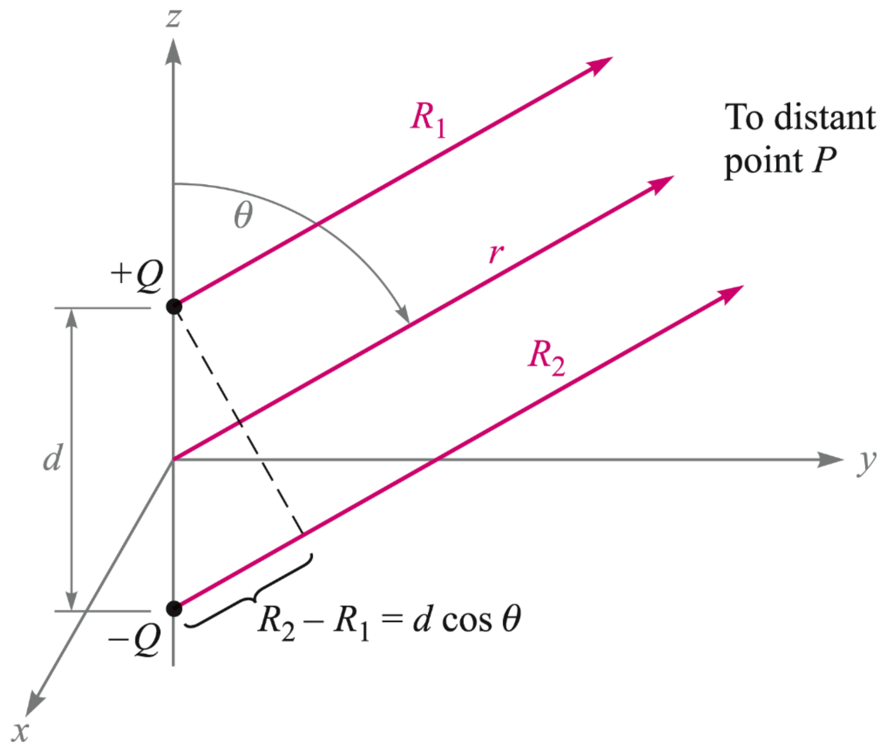
4.7 电偶极子 - 电位方程

在$r >> d$处，三个距离矢量近似平行。因此，对于较远的一点P而言，R_1与R_2近似相等：

$$R_1 R_2 \doteq r^2$$

且：　$R_2 - R_1 \doteq d\cos\theta$

最终得到：$$\boxed{V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$



4.7 电偶极子 - 由电位方程求电场强度

已求得电位方程为：

$$\boxed{V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

由于电场强度为电位的负梯度，可得：

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi\right)$$

$$\mathbf{E} = -\left(-\frac{Qd\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{a}_r - \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{a}_\theta\right)$$

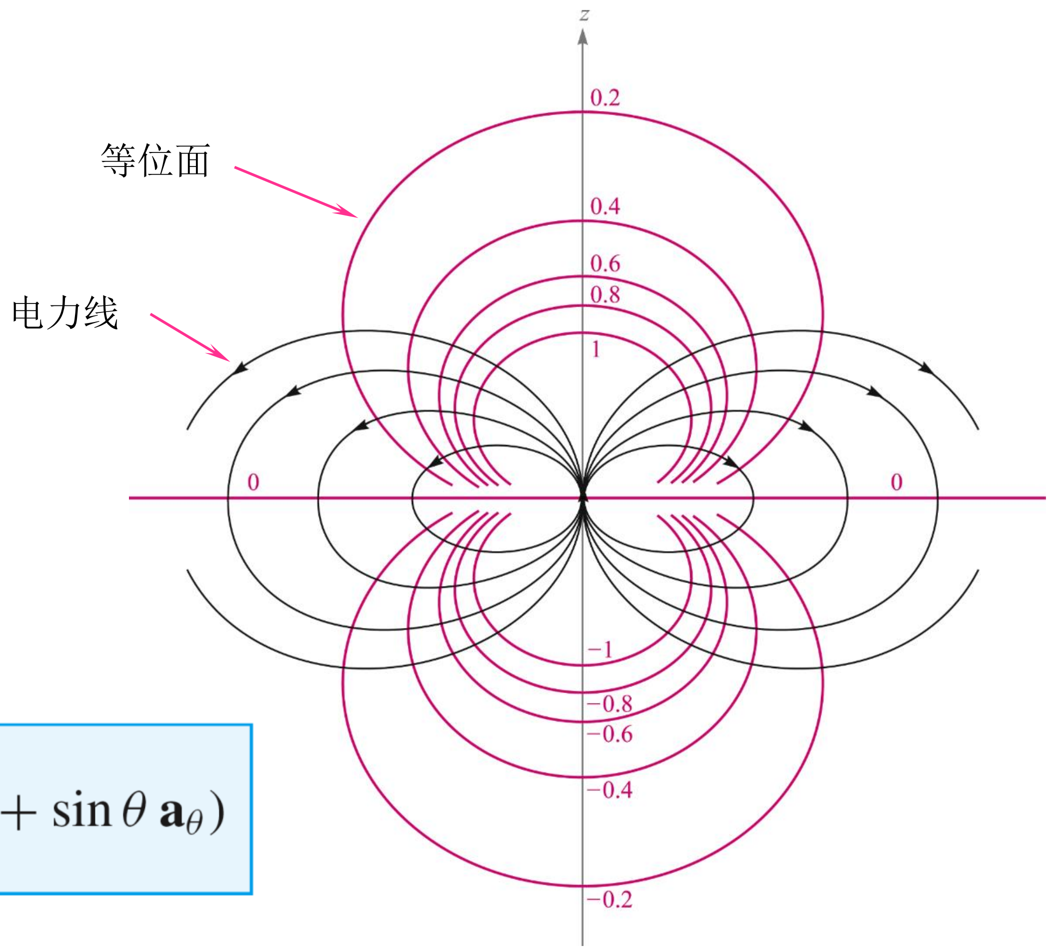
最终可得电场强度为：

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta)}$$

4.7 电偶极子 - 等位面与电场分布

$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta)$$

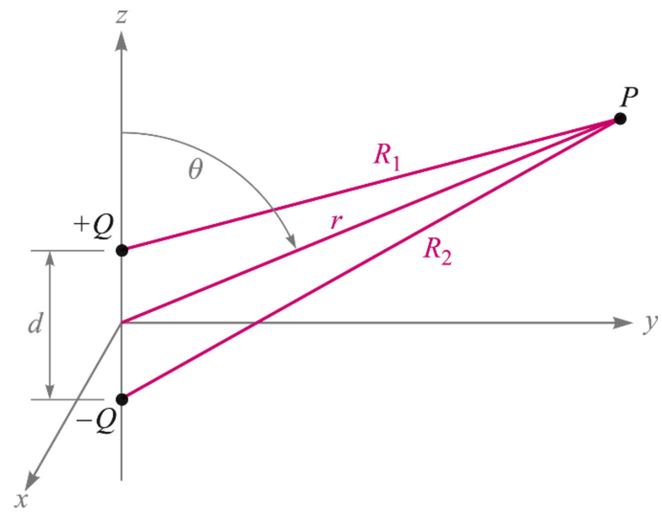


4.7 电偶极子 - 偶极矩

偶极矩矢量由负电荷方向指向正电荷方向，定义为：

$$\boxed{\mathbf{p} = Q\mathbf{d}}$$

根据图中的设置，$\mathbf{p}$ 的方向为 $\mathbf{a}_z$



$\mathbf{d}$在r方向的分量为： $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r = d\cos\theta$

简化电位方程的表示： $V = \dfrac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 该式对于任意方向的偶极矩 $\mathbf{p}$ 都成立

上式可写为更一般的形式，与坐标系的选取无关，且偶极子的中心无需在原点：

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

式中r'为偶极子的中心。

课堂习题 4.7节

- 习题：
  - 4.30（多选）

4.8 静电场中的能量密度

ENERGY DENSITY IN THE ELECTROSTATIC FIELD

两个点电荷的电场能量

Q_1 $\qquad\qquad\qquad$ Q_2

Q_1 单独存在时能量为 0 $\oplus$ —— $R_{2,1}$ —— $\oplus$ ← - - - - - - - -

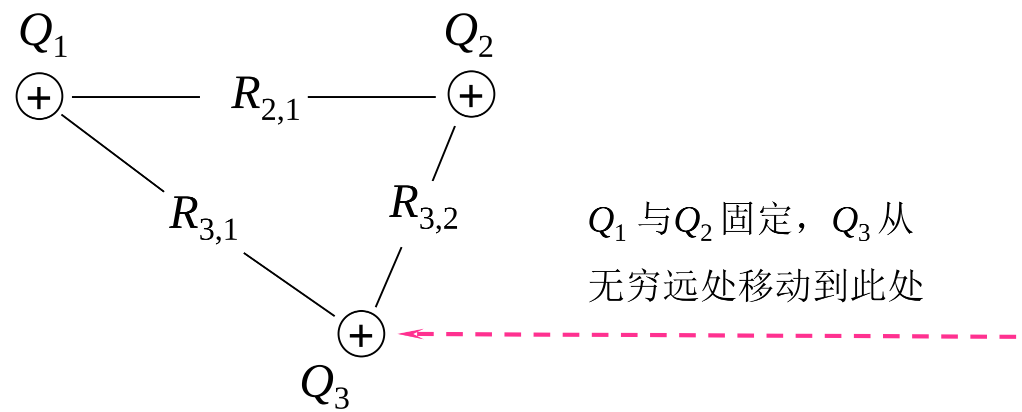
将Q_2从无穷远处移向Q_1

将Q_2 移到当前位置需要做的功为：

$$\boxed{W_E(2\ \text{charges}) = Q_2 V_{2,1} = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{2,1}}}$$

这就是在这两个点电荷组成的系统中所储存的能量

4.8 静电场中的能量密度 - 三个点电荷



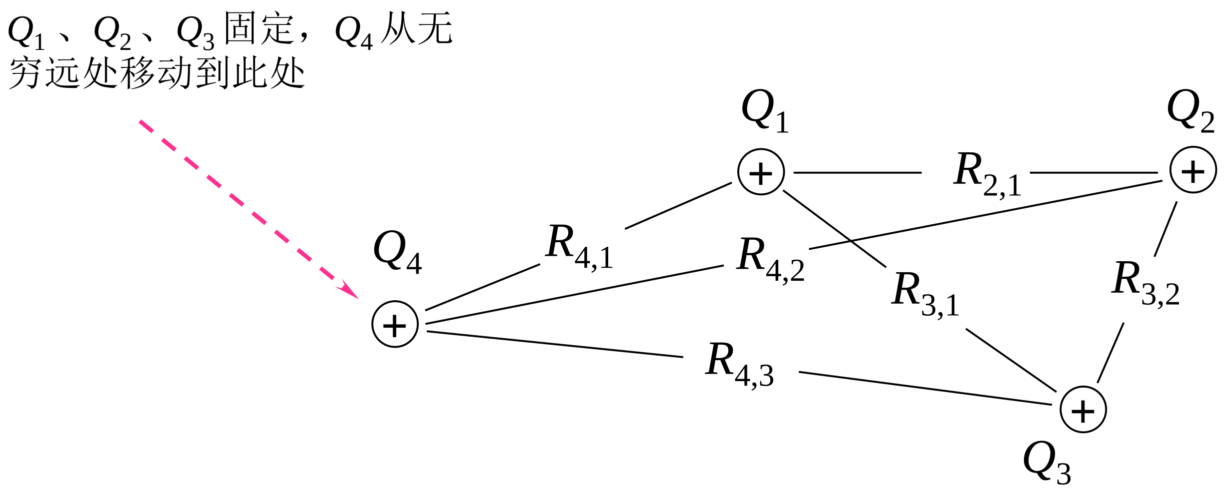
Q_1 与Q_2固定，Q_3从无穷远处移动到此处

该系统所存储的能量为原有两电荷存储的能量加上Q_3加入之后所带来的能量：

$$\boxed{W_E(3\ \text{charges}) = Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2}}$$

式中： $V_{3,1} = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{3,1}}$ ， $V_{3,2} = \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{3,2}}$

4.8 静电场中的能量密度 - 四个点电荷



该系统所存储的能量为原有3个电荷的系统存储的能量加上Q_4加入之后所带来的能量：

$$W_E(4 \text{ charges}) = Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} + Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3}$$

式中： $V_{4,1} = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{4,1}}$ $V_{4,2} = \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{4,2}}$ and $V_{4,3} = \dfrac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{4,3}}$

4.8 静电场中的能量密度 - 四个点电荷

四个电荷总能量为:

$$W_E(4\ \text{charges}) = Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} + Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3} \quad \text{J（焦耳）}$$

根据点电荷电位的公式，上式也可以对称地写为：

$$W_E(4\ \text{charges}) = Q_1V_{1,2} + Q_1V_{1,3} + Q_2V_{2,3} + Q_1V_{1,4} + Q_2V_{2,4} + Q_3V_{3,4}$$

将上面两式相加可以得到一个更具对称性的式子：

$$2W_E = Q_1(V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}) + Q_2(V_{2,1}+V_{2,3}+V_{2,4}) + Q_3(V_{3,1}+V_{3,2}+V_{3,4}) + Q_4(V_{4,1}+V_{4,2}+V_{4,3})$$

每一个括号中的电位和等于除该点处电荷外，所有其它电荷在这点所产生电位之和

4.8 静电场中的能量密度 - 四个点电荷

接上页式子:

$$2W_E = Q_1(V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4})+Q_2(V_{2,1}+V_{2,3}+V_{2,4})+Q_3(V_{3,1}+V_{3,2}+V_{3,4})+Q_4(V_{4,1}+V_{4,2}+V_{4,3})$$

其它电荷在当前电荷处产生的电位:

$$\begin{cases} V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} \\ V_2 = V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} \\ V_3 = V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} \\ V_4 = V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3} \end{cases}$$

得到: $$W_E(4\ \text{charges}) = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + Q_4V_4) = \underline{\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4} Q_m V_m}$$

4.8 静电场中的能量密度 - *n*个点电荷

扩展上页结果，得到对于*n*个电荷的能量公式：

$$W_E(n\ \text{charges}) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_m V_m$$

对于式中的V_m为：

$$V_m = \sum_{p=1}^{n} V_{m,p} \qquad (p \neq m)$$

注意该式为除了第*m*个电荷外其它电荷的电位之和

4.8 静电场中的能量密度 - 连续分布的电荷

若电荷的分布是连续的，可通过密度函数来表示其分布，那么可以将下式改为积分形式来进行运算：

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_m V_m$$

式中的Q替换为$dq = \rho_v\, dv$，求和改为对整个电荷分布部分的积分：

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{vol}} \rho_v V\, dv}$$

其中V是在电荷载体中与位置相关的电位函数

4.8 静电场中的能量密度 - 连续分布的电荷

利用麦克斯韦第一方程，用电通量密度**D**替换ρ_v：

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \rho_v V\, dv = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} (\nabla\cdot\mathbf{D})V\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} [\nabla\cdot(V\mathbf{D}) - \mathbf{D}\cdot(\nabla V)]\, dv$$

上式中用到了矢量恒等式： $\nabla\cdot(V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla\cdot\mathbf{D}) + \mathbf{D}\cdot(\nabla V)$

然后，利用散度定理将第一项积分项化为面积分，闭合面为包围这个电荷载体的外表面：

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D})\cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D}\cdot(\nabla V)\, dv$$

4.8 静电场中的能量密度 - 连续分布的电荷

接上页式子:

$$W_E = \frac{1}{2}\cancel{\oint_S (V\mathbf{D})\cdot d\mathbf{S}} - \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D}\cdot(\nabla V)\,dv$$

式中第一项的积分范围必须包含所有电荷，在它之外没有任何其它电荷。假设选取一个半径无限大的曲面作为积分面。

在无穷远处，电位和电通量密度**D**可使用点电荷的公式进行计算：

$$V \doteq k_1\left(\frac{1}{r}\right) \qquad D \doteq k_2\left(\frac{1}{r^2}\right)$$ 因此： $$VD \doteq k_1k_2\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

由于被积项以$1/r^3$的速度趋近于零，而积分球面以r^2的速度增长，因此该积分项值为0

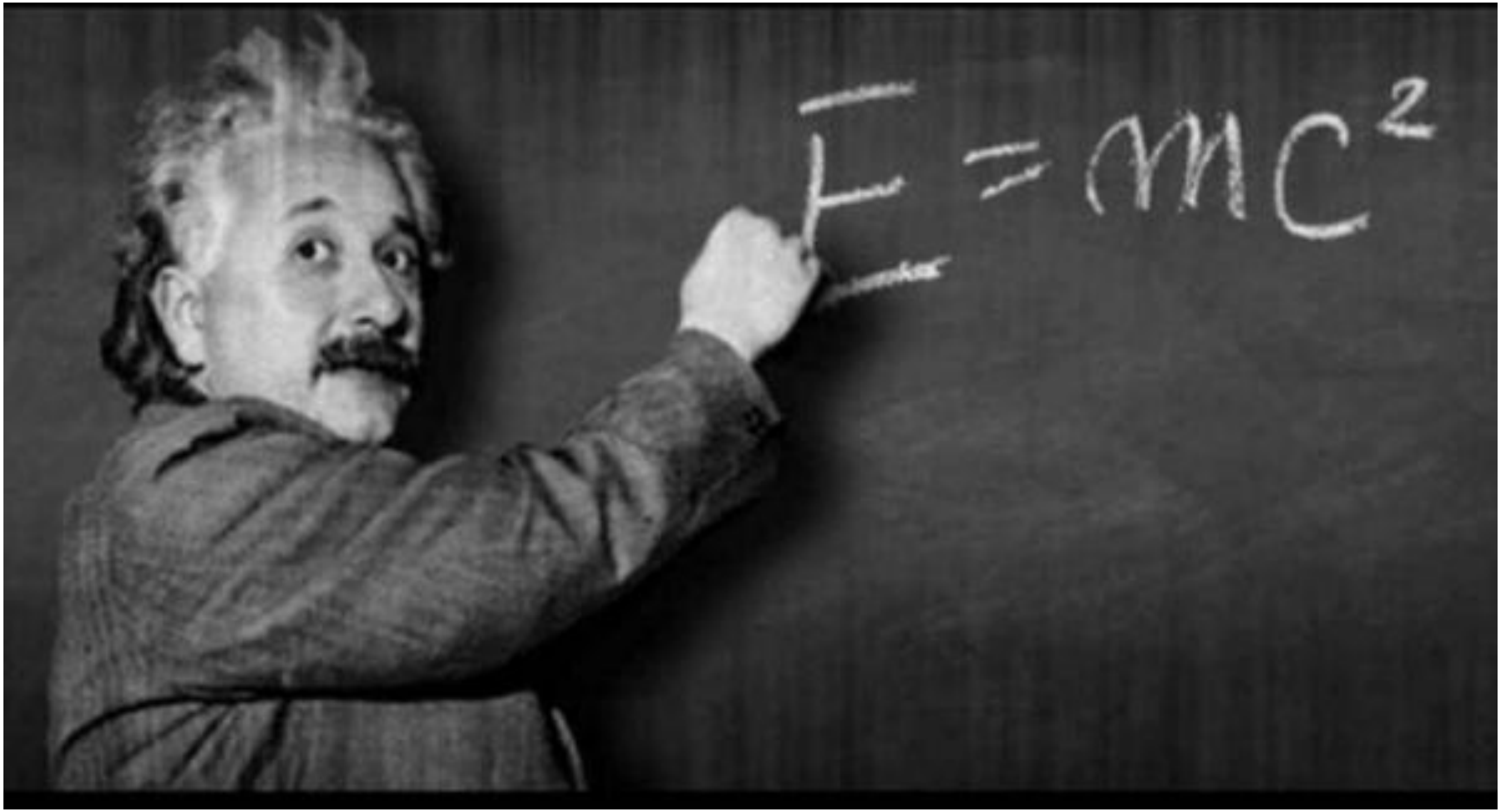
4.8 静电场中的能量密度 - 连续分布的电荷

电场能量表达式简化为： $$W_E = -\frac{1}{2}\int_{vol} \mathbf{D}\cdot\nabla V\,dv$$

由于已知： $$\mathbf{E} = -\nabla V$$

代入式中可得到： $$\boxed{W_E = \int_{vol} \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv}$$

因此电场的能量密度为： $$\boxed{w_E = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \mathrm{J/m^3}}$$


E = mc2

课堂习题 4.8节

- 习题：4.20, 4.22, 4.24

- 课后习题：4.1, 4.2, 4.4, 4.8, 4.10, 4.13, 4.14, 4.23, 4.26, 4.31, 4.32, 4.34, 4.35, 4.36