电磁场与电磁波

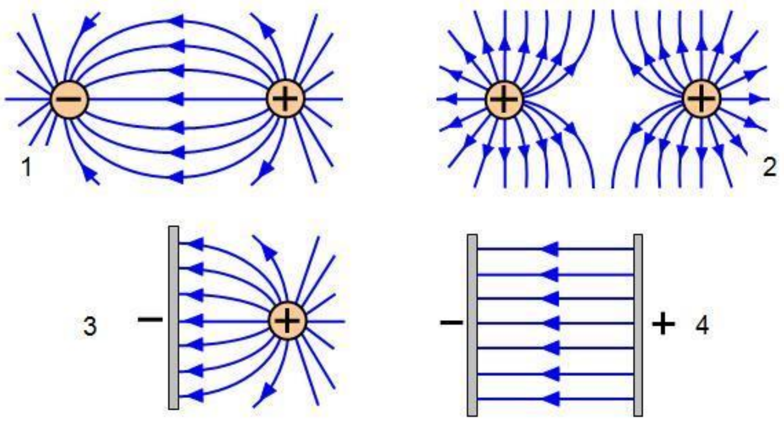
第 3 章

电通量密度、高斯定律和散度

Electric Flux Density, Gauss's Law, and Divergence

前言

- 电力线表明电场中任意点电荷所受电场力的方向
- 视电力线为通量线引入电通量、电通量密度
  - 类似的物理通量：光通量、水流通量、空气通量等



3.1 电通量密度

3.2 高斯定律

3.3 高斯定律的应用：对称分布电荷的电场

3.4 高斯定律的应用：体积元电荷的电场

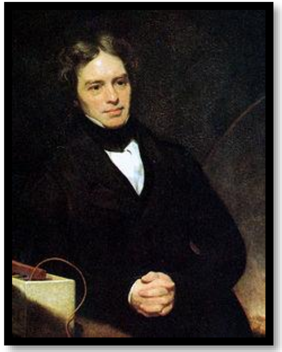
3.5 散度和麦克斯韦第一方程

3.6 矢量算子∇和散度定理

电通量概念 –> 积分形式的电通量规律（高斯定律）–> 微分形式的电通量规律（麦克斯韦第一方程）–> 高斯定律与麦克斯韦第一方程的一致性：散度定理

3.1 电通量密度 ELECTRIC FLUX DENSITY

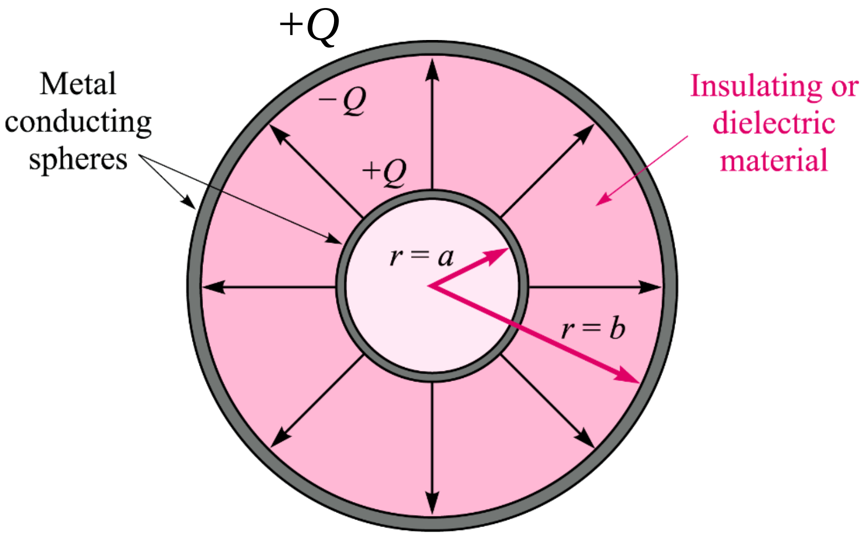
- 法拉第：物理学家，发明家
  - 电动机、电磁感应，发电机，静电屏蔽（法拉第笼），电容单位（法）
- 法拉第实验：同心金属球壳
  - 内球壳加上一个已知的正电荷
  - 内外球壳间填满2cm厚的电介质材料
  - 外球壳瞬间接地，释放其上的电荷
  - 将外球壳分开，分别测量两个外半球壳上的负感应电荷



- 法拉第发现外球壳上的总电荷量与内球壳上的电荷量大小相等，且与内外球壳间电介质的材料无关。
  - 球壳间存在某种“位移”，现称电位移、电位移通量或电通量

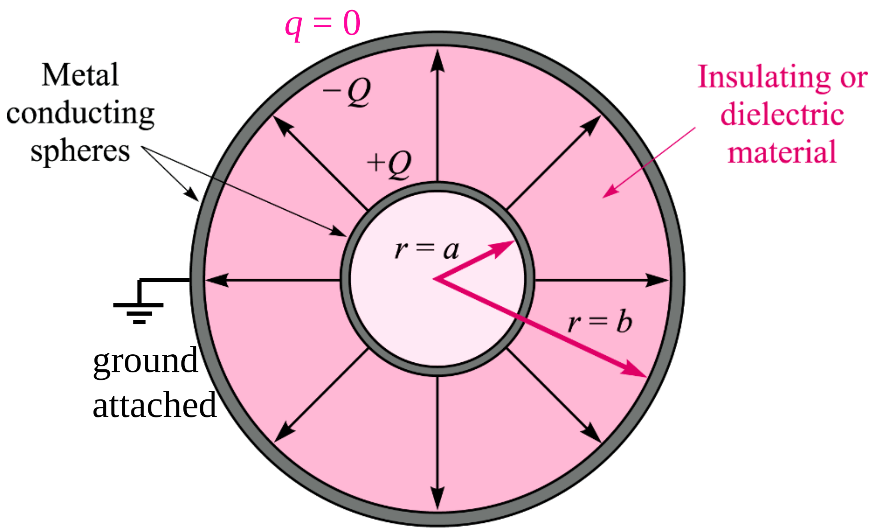
3.1 电通量密度 - 法拉第实验

在外球壳接地前，内球壳总电荷为Q，在外球壳的内侧面感应出电荷-Q，从而使外球壳的外侧面电荷为+Q。



3.1 电通量密度 - 法拉第实验

外球壳瞬间接地使外表面与无限供应的自由电子相连，从而中和了正电荷层。 此后，外球体上的净电荷就是内层上的电荷-Q。

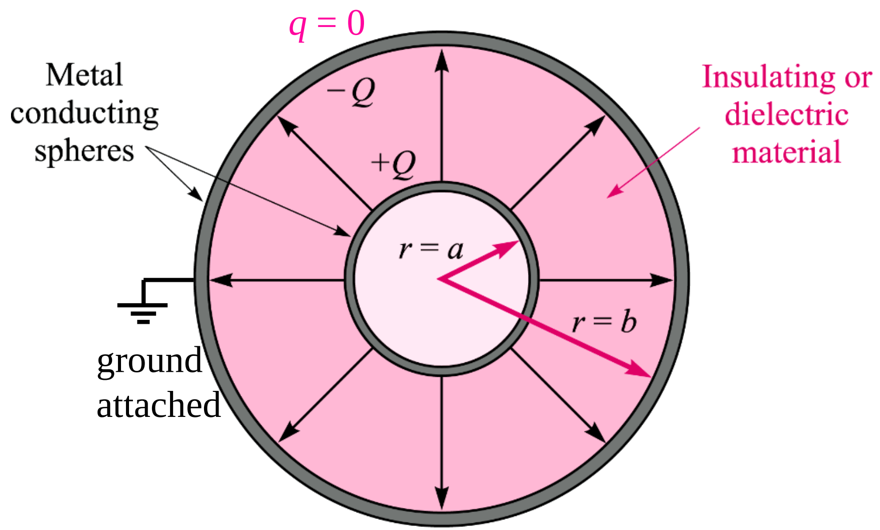


3.1 电通量密度 - 法拉第实验

法拉第认为发生了电荷从内球壳到外球壳的“位移”，现称电位移、电位移通量或简称电通量，表示为Ψ，其大小与发生“位移”的电荷量相同。

即:

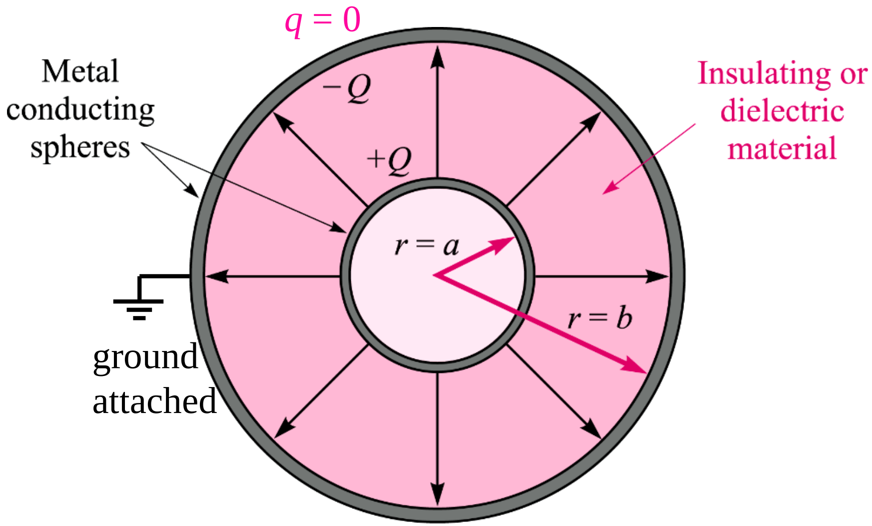
$$\boxed{\Psi = Q}$$



3.1 电通量密度 - 法拉第实验

内球壳电通量密度等于电荷密度，单位为Coul/m²

$$D(r=a)=\frac{\Psi}{4\pi a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}$$

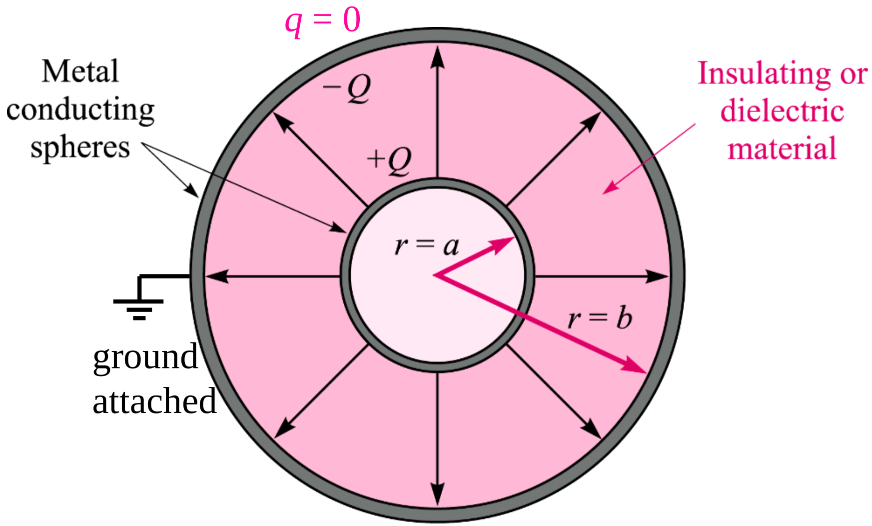


3.1 电通量密度 - 法拉第实验

电通量密度**D**是一个矢量场，其方向为沿球壳半径向外。在两个球面上的电通量密度为：

$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r \qquad \text{(inner sphere)}$$

$$\mathbf{D}\Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2}\mathbf{a}_r \qquad \text{(outer sphere)}$$

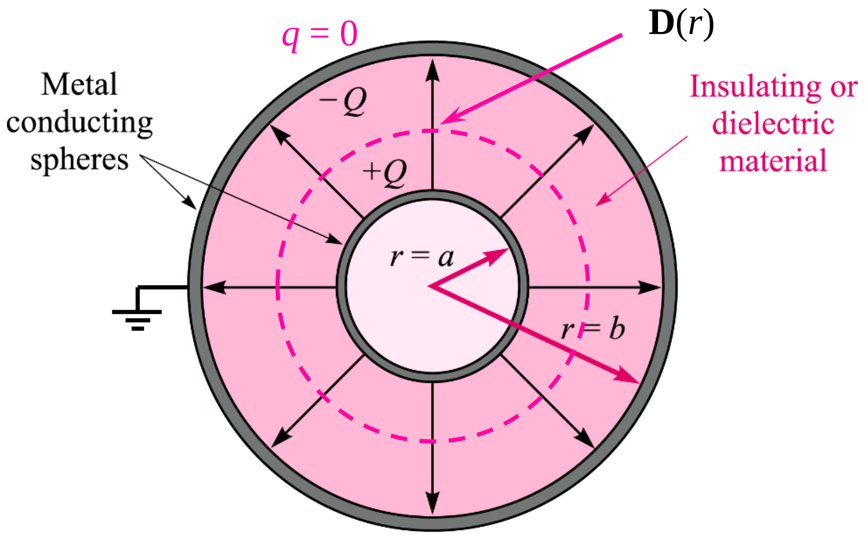


3.1 电通量密度 - 法拉第实验

对于两球壳间任意位置的电通量密度为：

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r}$$

单位为Coulombs/m², 半径r的范围
$(a \le r \le b)$



3.1 电通量密度 - 与电场强度的关系

若令内球壳越来越小，同时保持其上的电荷Q不变，取极限后它就成为一个点电荷。此时，距离点电荷r米处的电通量密度如下：

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r} \quad \mathrm{C/m^2} \quad (0 < r < \infty)$$

回顾自由空间中点电荷的径向电场强度表达式：

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r} \quad \mathrm{V/m} \quad (0 < r < \infty)$$

将两式相比较可以看到： $\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}}$ (free space only)

3.1 电通量密度 – 体电荷电通量密度

第2章中，对于自由空间中某一体电荷分布为：

$$\mathbf{E} = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

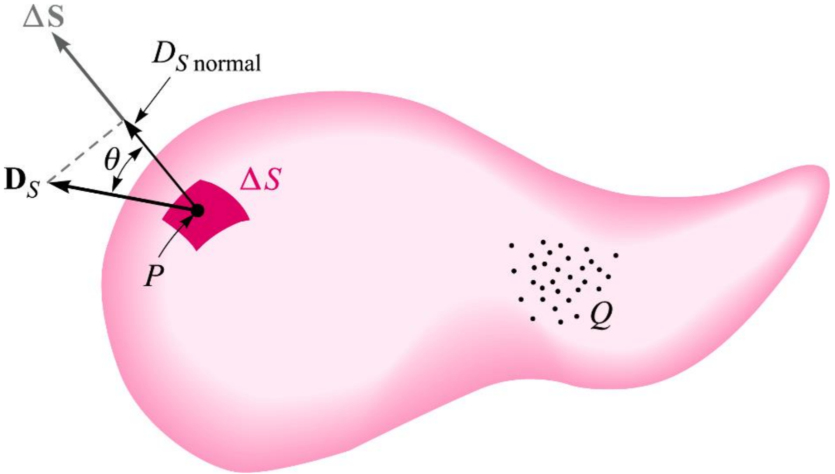
(free space only)

因此：

$$\mathbf{D} = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2}\mathbf{a}_R$$

3.2 高斯定律 GAUSS'S LAW

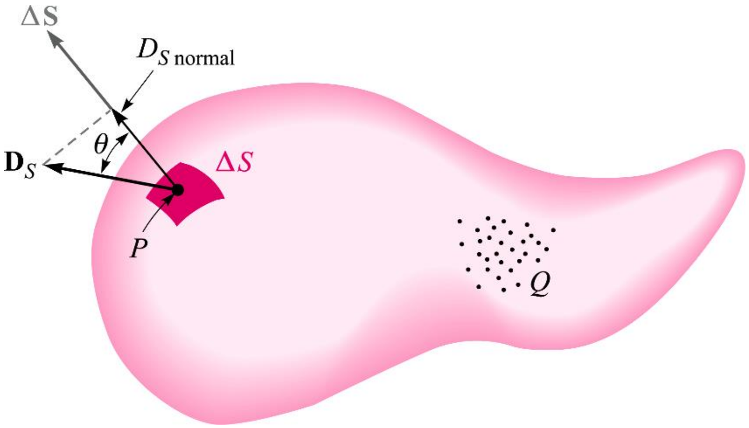
穿过任意闭合曲面的电通量等于该曲面所包含的电荷总量



3.2 高斯定律 – 计算任意闭合曲面的电通量

$$\Delta\Psi = \text{穿过}\Delta S\text{的通量} = D_{S,\text{norm}}\Delta S = D_S \cos\theta\,\Delta S = \mathbf{D}_S \cdot \Delta\mathbf{S}$$

$$\Psi = \int d\Psi = \oint_{\substack{\text{closed}\\ \text{surface}}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$



3.2 高斯定律 - 计算任意闭合曲面的电荷

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \text{charge enclosed} = Q$$

闭合曲面中可能包含多个点电荷：$Q = \sum Q_m$

或是存在以下几种电荷的连续分布：

线电荷：$Q = \int \rho_L \, dL$

体电荷：$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v \, dv$

面电荷：$Q = \int_S \rho_S dS$ (not necessarily a closed surface)

高斯定律：$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_v \, dv$$

穿过任意闭合曲面的电通量等于该曲面所包含的电荷总量

例3.1 点电荷Q置于球坐标系的原点，并选择一个半径为a的球面作为闭合面，求通过该闭合面总的电通量。

解：电通量密度为： $\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$

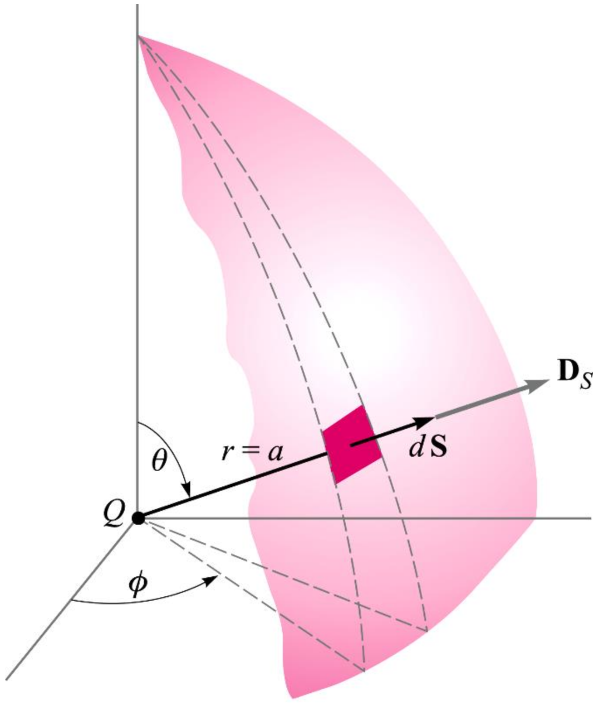
在右图所示半径为a的球面上的电通量密度为： $\mathbf{D}_S = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r$

利用第1章的推导结果，球坐标系中的面积微分元为：

$$dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

加上单位矢量为：

$$d\mathbf{S} = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \mathbf{a}_r$$



例3.1 点电荷Q置于球坐标系的原点，并选择一个半径为a的球面作为闭合面，求通过该闭合面总的电通量。

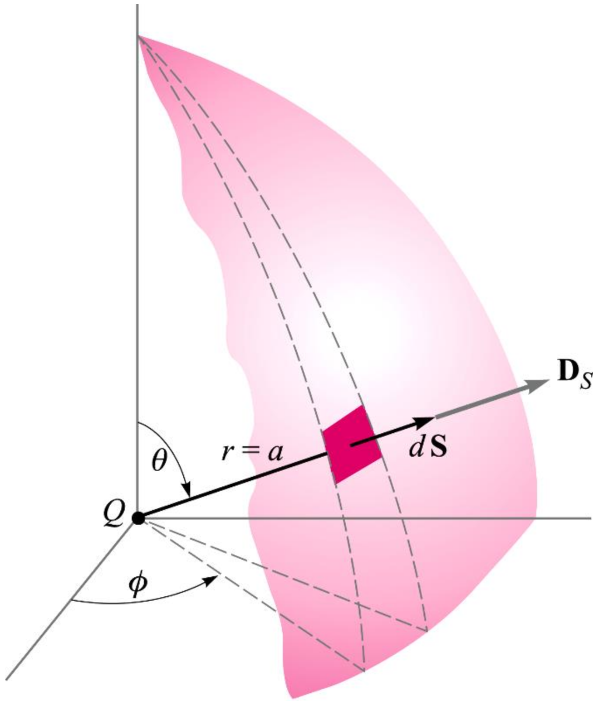
（接上页）被积函数为：

$$\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

闭合面积分为：

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi} (-\cos\theta)_0^{\pi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi} d\phi = \underline{Q}$$



课堂习题 3.1 - 3.2

超星学习通

3.3 高斯定律的应用

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

若Q已知, 那么可以利用高斯定律计算电通量密度**D**:

如果能够选定一个符合以下两个条件的闭合面S，那么这个问题就比较容易求解:

1. $\mathbf{D}_s$与所选择的闭合面处处垂直或相切，这样$\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$值就成为$D_s\, dS$或0
2. 在闭合面上$\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$不为0处，$D_s$=常数

积分为可以简化为:

$$\oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\oint_S D_s\, dS}_{\text{Condition 1}} = \underbrace{D_s \oint_S dS}_{\text{Condition 2}} = Q$$

因此:

$$\boxed{D_s = \frac{Q}{\oint_S dS}}$$

对于半径为r的球面:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

3.3 高斯定律的应用：线电荷的电场/电通量密度

考虑以密度ρ_L 从$-\infty$到∞沿z轴均匀分布线电荷的电场。

对以下两个问题的回答有助于确定电场分布的特点：

1. 电场随哪个坐标变量变化（或D是哪个变量的函数）？
2. **D**存在哪些分量？

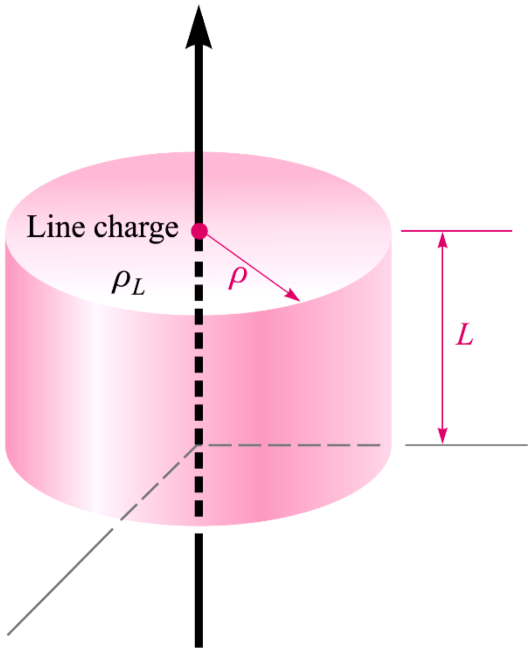
高斯定律的应用依赖于对称性，均匀线电线电场分布是对称的，D仅存在径向分量：

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$$

并且这个分量仅是 ρ 的函数:

$$D_\rho = f(\rho)$$

因此，选择闭合面为半径为ρ、长度为 L 的的圆柱面

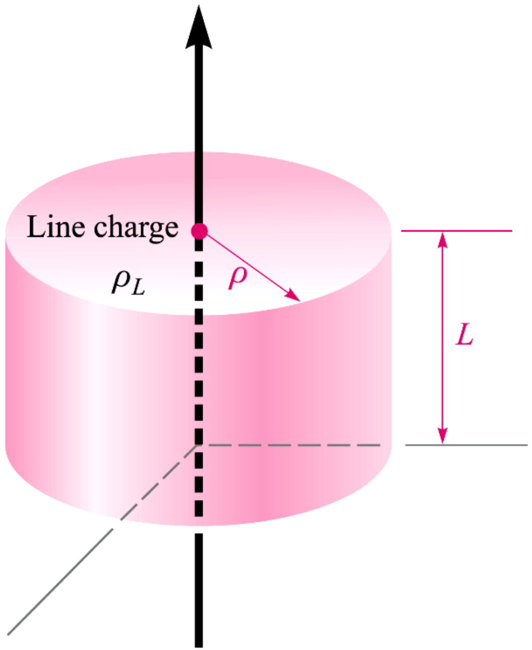


3.3 高斯定律的应用：线电荷的电场/电通量密度

应用高斯定律：

$$Q = \oint_{\text{cyl}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S \int_{\text{sides}} dS + 0 \int_{\text{top}} dS + 0 \int_{\text{bottom}} dS$$

$$= D_S \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \, d\phi \, dz = D_S 2\pi \rho L$$



可得： $$D_S = D_\rho = \frac{Q}{2\pi \rho L}$$

闭合面包围的总电荷可以用线电荷密度ρ_L表示为： $Q = \rho_L L$

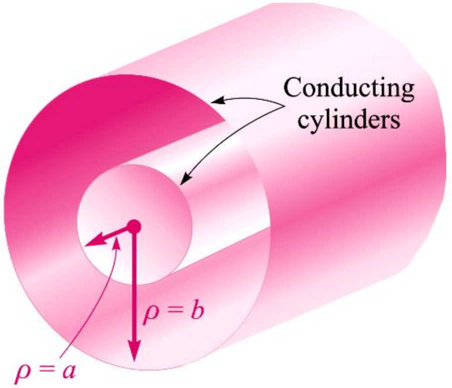
因此： $$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \rho}$$ 或： $$\boxed{E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0 \rho}}$$

3.3 高斯定律的应用：同轴电缆的电场/电通量密度

有两个同心的圆柱体，z轴为它们共同的中心轴（同轴电缆）。

有密度为ρ_S的表面电荷存在于内圆柱体的外表面。

预计会有一个沿ρ方向的电场，且该电场应该只随ρ而变化（类似线电荷）。因此，选择长度为L，半径为ρ的圆柱形闭合面作为高斯表面，其中$a<\rho<b$。



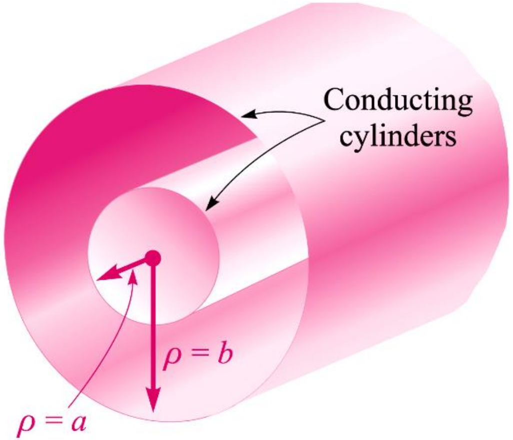
依据高斯定律：$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_0^L \int_0^{2\pi} D_S\,\mathbf{a}_\rho \cdot \underbrace{\mathbf{a}_\rho\,\rho\,d\phi\,dz}_{d\mathbf{S}} = 2\pi\rho D_S L = Q$$

长度为L的内导体上的总电荷为：$$Q = \int_{\rho=a} \rho_S\,dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_S\,a\,d\phi\,dz = 2\pi a L \rho_S$$

3.3 高斯定律的应用：同轴电缆的电场/电通量密度

由上页两式联立可得同轴电缆的电通量为：

$$\mathbf{D}(\rho) = \frac{Q}{2\pi\rho L}\mathbf{a}_\rho = \frac{a\rho_S}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$



对应的电场强度为：

$$\mathbf{E} = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho \ \mathrm{V/m} \qquad (a < \rho < b)$$

3.3 高斯定律的应用：同轴电缆的电场/电通量密度

同轴电缆外部的电场/电通量如何分布？

由于每一条从内圆柱体电荷发出的电通量线都必终止于外圆柱体内表面上的一个负电荷，所以外圆柱体内表面上的总电荷为：

$$Q_{\text{outer cyl}} = -2\pi a L \rho_{S,\text{inner cyl}}$$

外圆柱体内表面的面电荷分布满足：

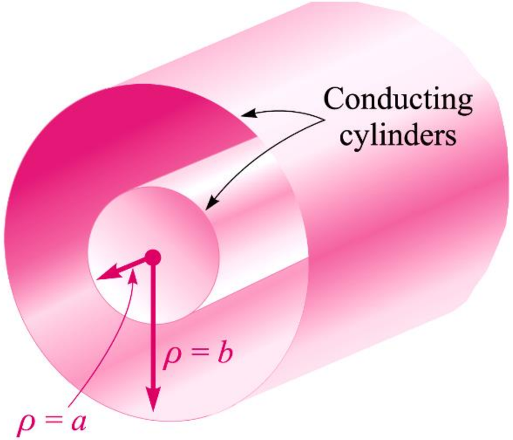
$$2\pi b L \rho_{S,\text{outer cyl}} = -2\pi a L \rho_{S,\text{inner cyl}}$$

若选择半径$\rho > b$的闭合圆柱面作为高斯面，那么它所包含的总电荷为0，因为内外圆柱导体上的电荷大小相等，符号相反：

$$0 = D_S 2\pi \rho L \qquad (\rho > b)$$

或： $$D_S = 0 \qquad (\rho > b)$$

外圆柱体起到了电场屏蔽作用



例3.2 一内半径为1mm，外半径为4mm，50cm的同轴电缆的内外导体之间充满空气。内导体上的总电荷为30nC，求每个导体上的电荷密度和***E***、***D***的分布。

解：先求内导体上的面电荷密度：

$$\rho_{S,\text{inner cyl}} = \frac{Q_{\text{inner cyl}}}{2\pi aL} = \frac{30\times 10^{-9}}{2\pi(10^{-3})(0.5)} = 9.55\ \mu\text{C/m}^2$$

外导体内表面上的负电荷密度为：

$$\rho_{S,\text{outer cyl}} = \frac{Q_{\text{outer cyl}}}{2\pi bL} = \frac{-30\times 10^{-9}}{2\pi(4\times 10^{-3})(0.5)} = -2.39\ \mu\text{C/m}^2$$

电缆内的电通量密度为：
$$D_\rho = \frac{a\rho_S}{\rho} = \frac{10^{-3}(9.55\times 10^{-6})}{\rho} = \frac{9.55}{\rho}\ \text{nC/m}^2$$

电缆内的电场为：
$$E_\rho = \frac{D_\rho}{\epsilon_0} = \frac{9.55\times 10^{-9}}{8.854\times 10^{-12}\rho} = \frac{1079}{\rho}\ \text{V/m}$$

3.4 高斯定律的应用：体积元电荷的电场

APPLICATION OF GAUSS’S LAW: DIFFERENTIAL VOLUME ELEMENT

- 将高斯定律于不具备对称性的问题
- 选择一个**D**在其上近似为常数的足够小的高斯闭合面
- 导出麦克斯韦方程组中的一个方程

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v}$$

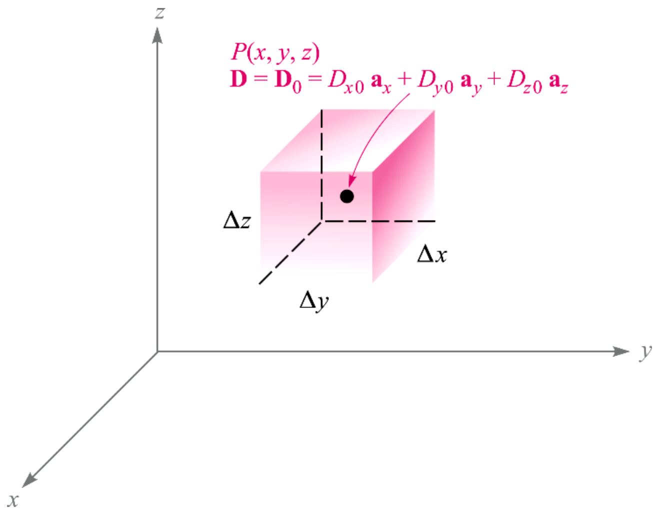
3.4 高斯定律的应用：体积元电荷的电场

直角坐标系中的任一点P处的电通量$\mathbf{D}$可以表示$\mathbf{D}_0 = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$.

选取以P点为中心、长宽高分别为Δx，Δy和Δz的一个立方体表面为闭合面，

应用高斯定律有：

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} + \int_{\text{left}} + \int_{\text{right}} + \int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}}$$



对于上式中的第一项有：

$$\begin{aligned}\int_{\text{front}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{front}}\cdot\Delta\mathbf{S}_{\text{front}} \\ &\doteq \mathbf{D}_{\text{front}}\cdot\Delta y\,\Delta z\,\mathbf{a}_x \\ &\doteq D_{x,\text{front}}\Delta y\,\Delta z\end{aligned}$$

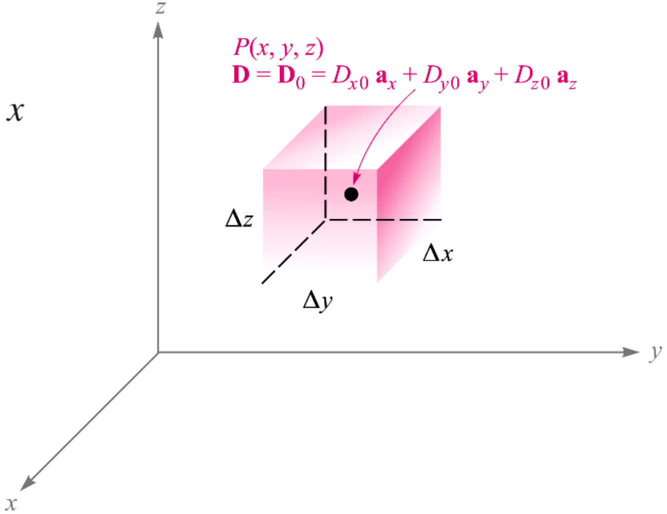
3.4 高斯定律的应用：体积元电荷的电场

由于前表面距离P点为Δx/2，所以：

$$D_{x,\text{front}} \doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{rate of change of } D_x \text{ with } x$$

$$\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

其中，D_{x0}是D_x在P点的值



现有：$\displaystyle\int_{\text{front}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\,\Delta z$

与此类似，后表面的积分为：

$$\int_{\text{back}} \doteq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\,\Delta z$$

两个积分相加：$\displaystyle\int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} \doteq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$

对于后表面，电通量D_{x0}是穿入的，所以为符号为负

3.4 高斯定律的应用：体积元电荷的电场

对于其它表面的计算类似：

$$\int_{\text{right}} + \int_{\text{left}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

$$\int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

整理上述结果得到：

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \underbrace{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z}_{\Delta v} = Q \quad \text{(应用高斯定律)}$$

式中Q为Δv 的体积元中所包含的电荷量

例3.3 对于以下$\boldsymbol{D}$，求中心位于原点，一个大小为$10^{-9}m^3$的体积元内的总电荷。

$$\mathbf{D} = e^{-x}\sin y\,\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\,\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z\ \mathrm{C/m^2}$$

解：分别计算三个偏导数：

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x}\sin y$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x}\sin y$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

在原点处，前两项为0。体积元内的电荷约等于$2\Delta v$

当$\Delta v = 10^{-9}m^3$时，包含总电荷数为2nC

课堂习题 3.3 - 3.4

超星学习通

3.5 散度和麦克斯韦第一方程

DIVERGENCE AND MAXWELL’S FIRST EQUATION

当闭合曲面所包围的体积减小到0时，通量密度**A**的散度则表示从单位体积的表面穿出的通量的流量。

- 散度：可理解为散发程度
  - 例：水流速度场的散度为0
  - 例：炸药爆炸时空气散度大于零，灯发光时光线散度大于零
- 如果一矢量场的散度为正，说明该点存在矢量的源（Source）
- 如果一矢量场的散度为负，说明该点存在矢量的沟（Sink）

3.5 散度和麦克斯韦第一方程

当闭合曲面所包围的体积减小到0时，通量密度**A**的<u>散度</u>则表示从单位体积的表面穿出的通量的流量。

用数学形式表示：

$$\boxed{\text{Divergence of } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}}$$

应用上一节中得到的积分结果：

$$\text{div } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

当矢量场为电通量时：

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \underline{\rho_v = \text{div } \mathbf{D}}$$

麦克斯韦第一方程

3.5 散度和麦克斯韦第一方程

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v}$$

- 表明离开一无限收缩体积单元的单位体积电通量等于该处电荷密度
- 麦克斯韦第一方程称为高斯定律的点形式，或微分方程形式
- 高斯定律称为麦克斯韦第一方程的积分形式

3.5 散度和麦克斯韦第一方程

三种不同坐标系的散度公式

直角坐标系：

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \qquad \text{(rectangular)}$$

圆柱坐标系：

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{(cylindrical)}$$

球坐标系：

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \, D_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \qquad \text{(spherical)}$$

例3.4 对于以下$\mathbf{D}$，求原点处的div $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = e^{-x}\sin y\,\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\,\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$$

解：根据散度定义得到：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ &= -e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + 2 = 2\end{aligned}$$

散度的运算结果为**标量**

3.6 矢量算子∇和散度定理

THE VECTOR OPERATOR ∇ AND THE DIVERGENCE THEOREM

∇(del)运算符（哈密顿算子，nabla算子）是一种矢量微分运算符，定义如下：

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

∇与通量场**D**的点乘积为**D**的散度：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) \cdot (D_x\mathbf{a}_x + D_y\mathbf{a}_y + D_z\mathbf{a}_z)$$

$$= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{D}$$

3.6 矢量算子∇和散度定理

根据麦克斯韦第一方程（或高斯定律）有：

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

从高斯定律可得：

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv = \int_{\text{vol}} \nabla\cdot\mathbf{D}\, dv$$

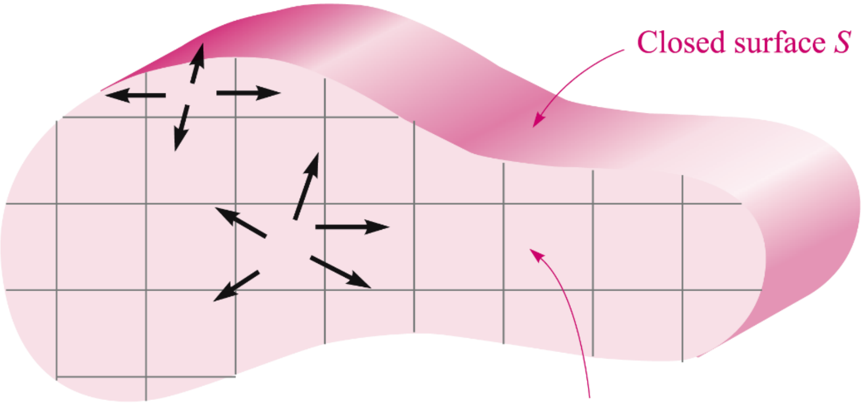
可推导出散度定理：

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \nabla\cdot\mathbf{D}\, dv}$$

3.6 矢量算子∇和散度定理

散度定理：任意矢量场的法向分量在闭合面上的面积分等于它的散度在闭合面所包围的体积内的体积分。

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathrm{vol}} \nabla\cdot\mathbf{D}\,dv}$$



例3.5 在空间区域为 $x = 0$ 到 1，$y = 0$ 到 2，$z = 0$ 到 3 的平行六面体内，有以下矢量场 **D**，分别计算散度定理的等号两端的值。

$$\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y \ \mathrm{C/m^2}$$

解：首先计算散度定理等号左边的面积分。注意到**D**平行于表面z=0和z=3，因此在这两个表面上，$\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$

对于剩余的4个表面，有：

$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3\int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0}\cdot(-dy\,dz\,\mathbf{a}_x) + \int_0^3\int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1}\cdot(dy\,dz\,\mathbf{a}_x) \\
&+ \int_0^3\int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0}\cdot(-dx\,dz\,\mathbf{a}_y) + \int_0^3\int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2}\cdot(dx\,dz\,\mathbf{a}_y) \\
&= -\int_0^3\int_0^2 (D_x)_{x=0}dy\,dz + \int_0^3\int_0^2 (D_x)_{x=1}dy\,dz \\
&- \int_0^3\int_0^1 (D_y)_{y=0}dx\,dz + \int_0^3\int_0^1 (D_y)_{y=2}dx\,dz
\end{aligned}$$

例3.5 在空间区域为 $x=0$ 到 1，$y=0$ 到 2，$z=0$ 到 3 的平行六面体内，有以下矢量场 **D**，分别计算散度定理的等号两端的值。

$$\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y \ \mathrm{C/m^2}$$

（接上页）然而，由于 $(D_x)_{x=0} = 0$, and $(D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2}$ ，因此只剩下：

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy\, dz = \int_0^3 \int_0^2 2y\, dy\, dz$$

$$= \int_0^3 4\, dz = 12$$

计算得到六面体内总电荷量为12C。

例3.5 在空间区域为 $x = 0$ 到 1，$y = 0$ 到 2，$z = 0$ 到 3 的平行六面体内，有以下矢量场 **D**，分别计算散度定理的等号两端的值。

$$\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y \ \mathrm{C/m^2}$$

（接上页）接下来计算散度定理等号右边的部分：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 2y$$

体积分为：

$$\int_{\mathrm{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_0^2 2y\, dy\, dz$$
$$= \int_0^3 4\, dz = 12$$

同样计算得到六面体内总电荷量为12C，与散度定理等号左边部分相等。

课堂习题 3.5 - 3.6

超星学习通

课后习题：3.2, 3.4, 3.5, 3.10, 3.12, 3.13, 3.16, 3.25, 3.27