电磁场与电磁波

Electromagnetic Fields and Waves

电磁场与电磁波

第 1 章

矢量分析

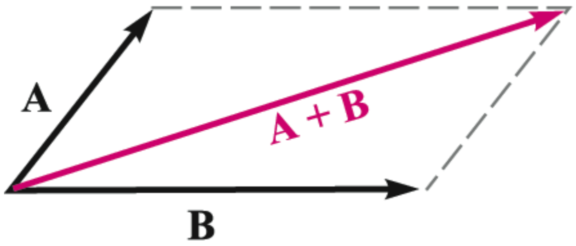
Vector Analysis

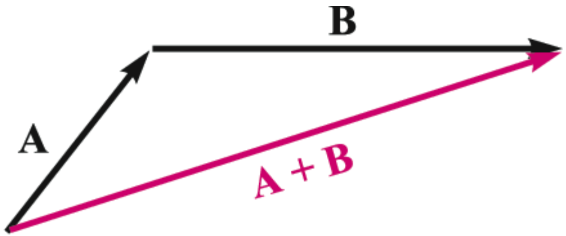
1.1 标量与矢量（Scalars and Vectors）

- 标量：A
  - 用实数表示其值的量
  - 例：质量、密度、体积、电阻等
- 矢量：$\boldsymbol{A}$
  - 在空间中既有大小又有方向的量
  - 例：力、速度、加速度
  - 矢量维度：二维、<u>三维</u>、..、n维

1.2 矢量代数（Vector Algebra）

- 矢量加法



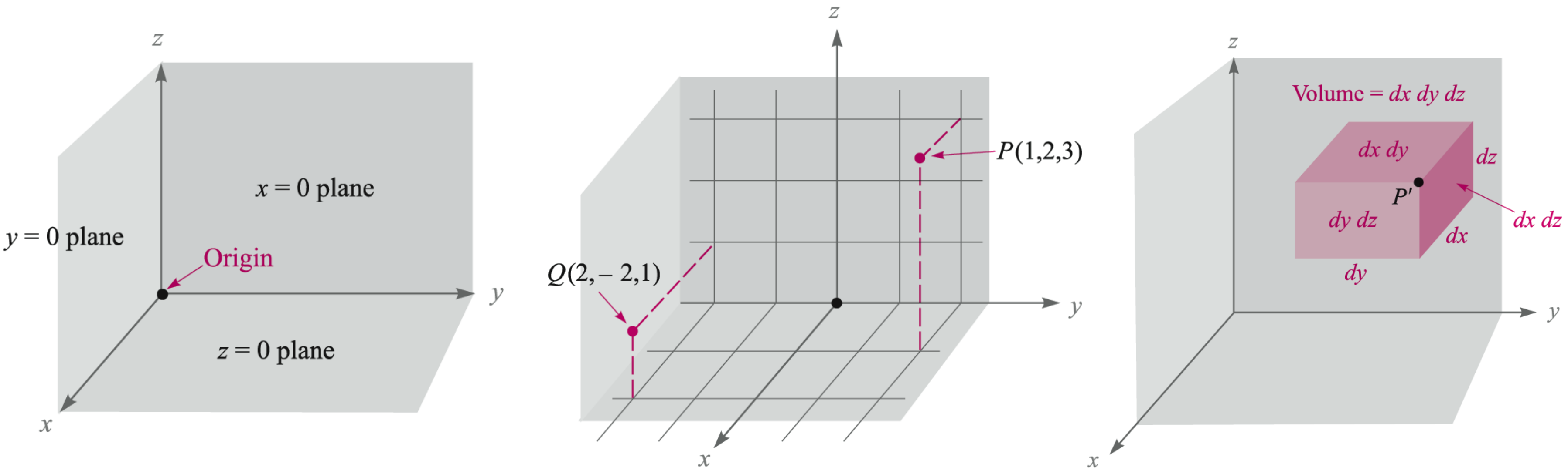


结合律： $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

分配律： $(r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + s(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

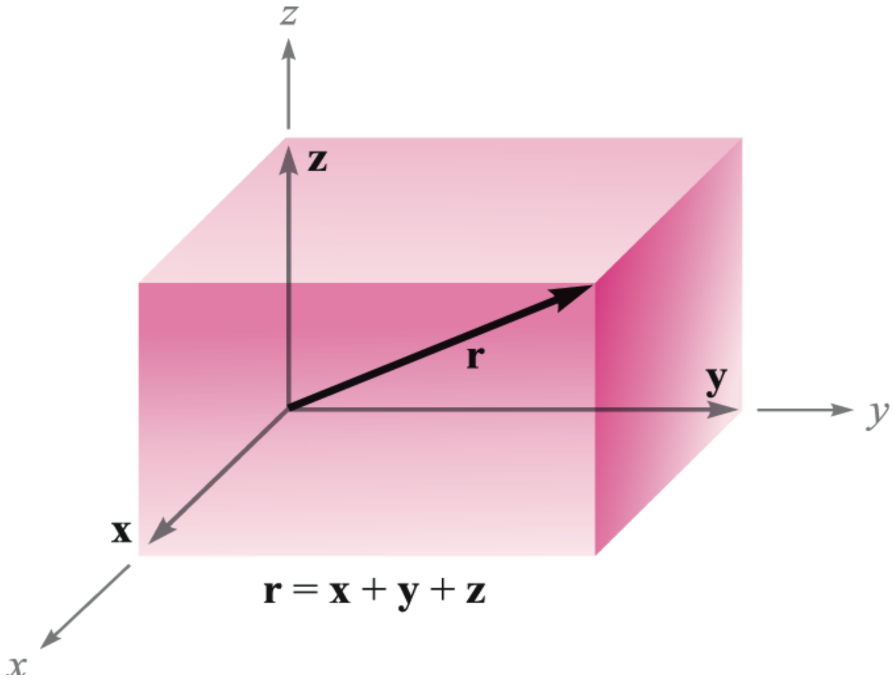
1.3 直角坐标系（Rectangular Coordinate system）

- 直角坐标系（笛卡尔坐标系）
  - 互相垂直的x, y, z轴，可精确描述矢量



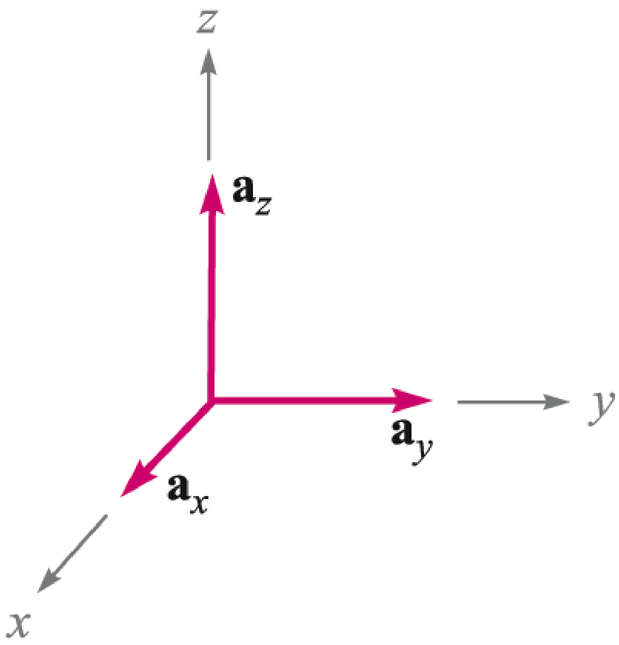
1.4 矢量分量和单位分量（Vector Components and Unit Vectors）

- 矢量分量
  - 可表示为x, y, z三个坐标轴的分量



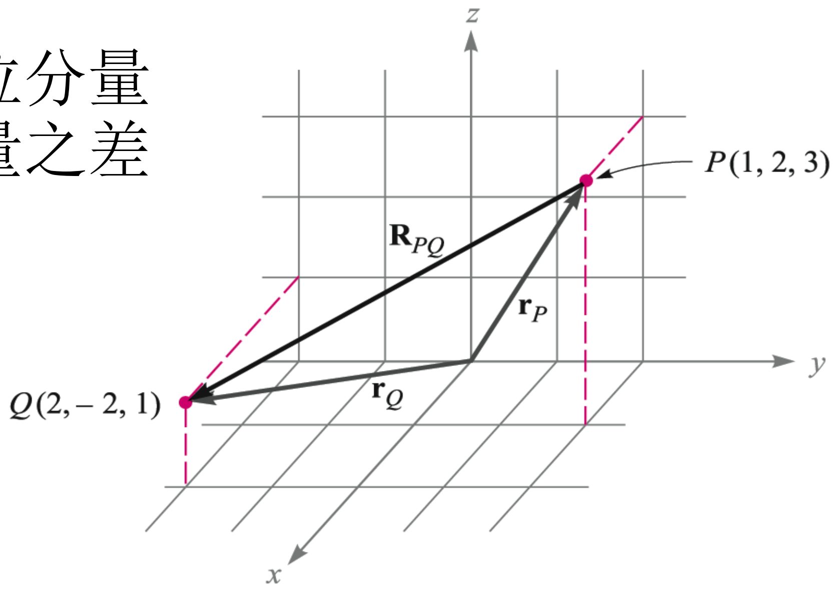
1.4 矢量分量和单位分量（Vector Components and Unit Vectors）

- 单位分量
  - 长度为1的x, y, z三个坐标轴的分量



1.4 矢量分量和单位分量（Vector Components and Unit Vectors）

- 例：通过单位分量计算两个矢量之差



$$\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (2-1)\mathbf{a}_x + (-2-2)\mathbf{a}_y + (1-3)\mathbf{a}_z$$

$$= \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$$

1.4 矢量分量和单位分量（Vector Components and Unit Vectors）

任一矢量$\boldsymbol{B}$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$$

$\boldsymbol{B}$的大小

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

$\boldsymbol{B}$的单位矢量

$$\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

例1.1：确定从原点指向点G(2,-2,-1)的单位矢量

解：将**G**表示为分量形式：$\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$

矢量**G**的大小：$|\mathbf{G}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$

矢量**G**的单位矢量为：

$$\mathbf{a}_G = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|} = \frac{2}{3}\mathbf{a}_x - \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z = 0.667\mathbf{a}_x - 0.667\mathbf{a}_y - 0.333\mathbf{a}_z$$

课堂习题 1.1节 - 1.4节（超星学习通）

- 习题1.2(a)、(b)
- 习题1.4
- 习题1.14
- 习题1.16

1.5 矢量场（Vector Field）

矢量场为位置矢量的矢量函数。

例如，流动的海水可认为是一个场。任一位置的水速矢量**v**为：

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{a}_x + v_y\mathbf{a}_y + v_z\mathbf{a}_z$$

海水流速场可定义为位置矢量**r**的函数，其中***r*** = (*x*, *y*, *z*)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r})\mathbf{a}_x + v_y(\mathbf{r})\mathbf{a}_y + v_z(\mathbf{r})\mathbf{a}_z$$

1.6 点乘（The Dot Product）

给定矢量$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$，点乘定义为：

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta_{AB}}$$

矢量点乘满足交换律：

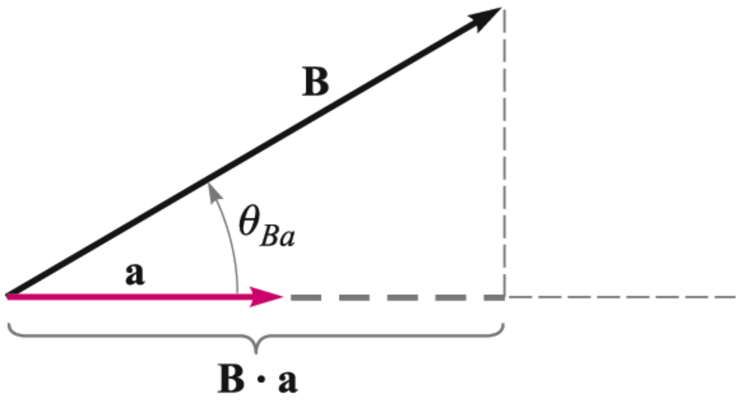
$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}$$

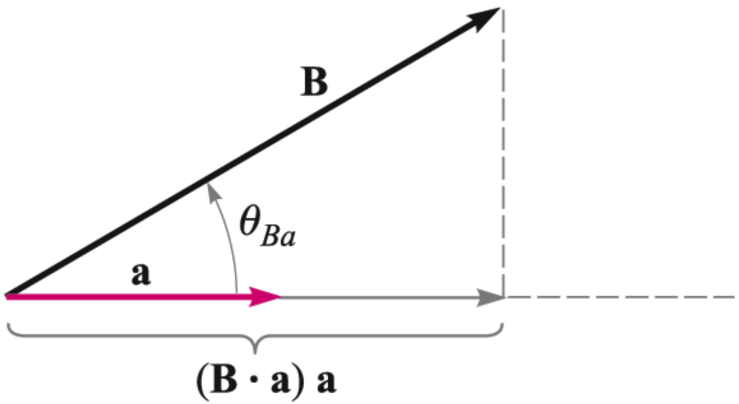
矢量与本身点乘：

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2}$$

注意：点乘积为标量

1.6 点乘（The Dot Product）





a为水平方向的单位矢量

B* • *a 为***B***在水平方向上的**标量分量**

(***B* • *a***) ***a***为***B***在水平方向的**矢量分量**

1.6 点乘（The Dot Product）

三维矢量点乘

给定：
$$\begin{cases} \mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z \\ \mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z \end{cases}$$

利用x, y, z单位矢量点乘积为0或1的特性：

$$\begin{cases} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0 \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \end{cases}$$

得出：
$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

例1.2：矢量场$\boldsymbol{G} = y\boldsymbol{a}_x - 2.5x\boldsymbol{a}_y + 3\boldsymbol{a}_z$和点Q(4, 5, 2)

1. 求$\boldsymbol{G}$在点Q的值:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q) = 5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

2. $\boldsymbol{G}$在点Q沿$\boldsymbol{a}_N = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - 2\boldsymbol{a}_z)$方向上的**标量分量**

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N = (5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \cdot \tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = \tfrac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

例1.2：矢量场$\boldsymbol{G} = y\boldsymbol{a}_x - 2.5x\boldsymbol{a}_y + 3\boldsymbol{a}_z$和点Q(4, 5, 2)

3. $\boldsymbol{G}$在Q点沿$\boldsymbol{a}_N$方向的矢量分量

$$(\mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N = -(2)\tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = -1.333\mathbf{a}_x - 0.667\mathbf{a}_y + 1.333\mathbf{a}_z$$

以及$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_Q)$和$\boldsymbol{a}_N$的夹角$\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{Ga}}$

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_N = |\mathbf{G}|\cos\theta_{Ga}$$

$$-2 = \sqrt{25+100+9}\cos\theta_{Ga}$$

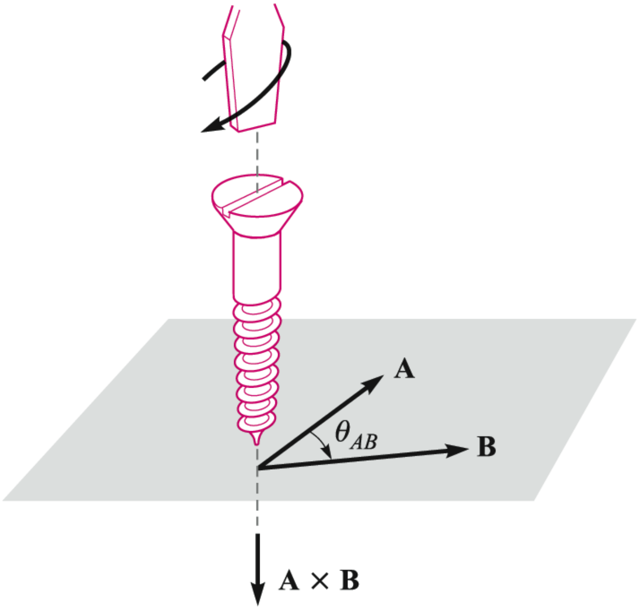
$$\theta_{Ga} = \cos^{-1}\frac{-2}{\sqrt{134}} = 99.9^\circ$$

1.7 叉乘（The Cross Product）

给定矢量***A***与***B***，叉乘定义为：

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta_{AB}}$$

叉乘方向与矢量***A***与***B***所处的平面相垂直，且与由矢量***A***旋向矢量***B***成右手螺旋关系



叉乘代表旋转的力度和方向

1.7 叉乘（The Cross Product）

三维矢量***A***与***B***的叉乘计算

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=A_xB_x\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_x+A_xB_y\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_y+A_xB_z\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_z$$
$$+A_yB_x\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_x+A_yB_y\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_y+A_yB_z\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z$$
$$+A_zB_x\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_x+A_zB_y\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_y+A_zB_z\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_z$$

利用：$\begin{cases}\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_y=\mathbf{a}_z\\ \mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z=\mathbf{a}_x\\ \mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_x=\mathbf{a}_y\end{cases}$

得出：$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{a}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{a}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{a}_z$

行列式形式：$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$

课堂习题 1.5节 - 1.7节（超星学习通）

- 习题1.18(b)
- 习题1.6
- 习题1.8

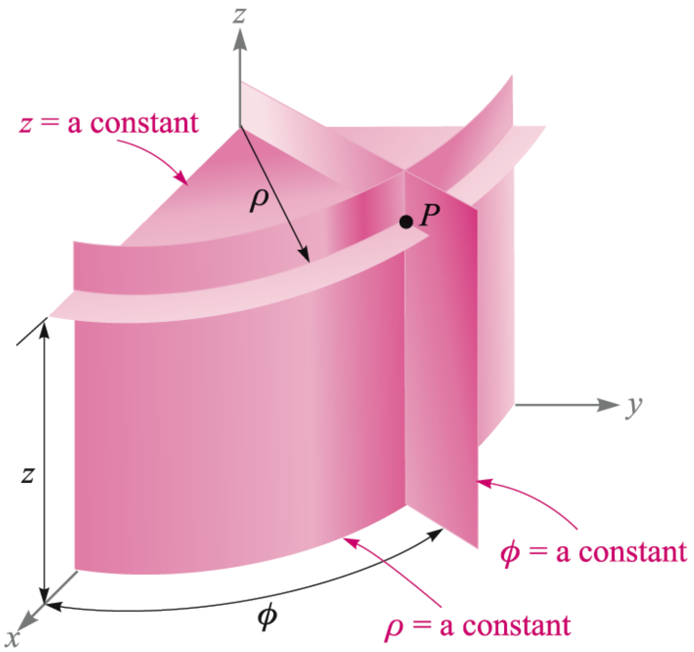
1.8 圆柱坐标系（Circular Cylindrical Coordinates）

点P的坐标由$P(\rho,\phi,z)$唯一地确定

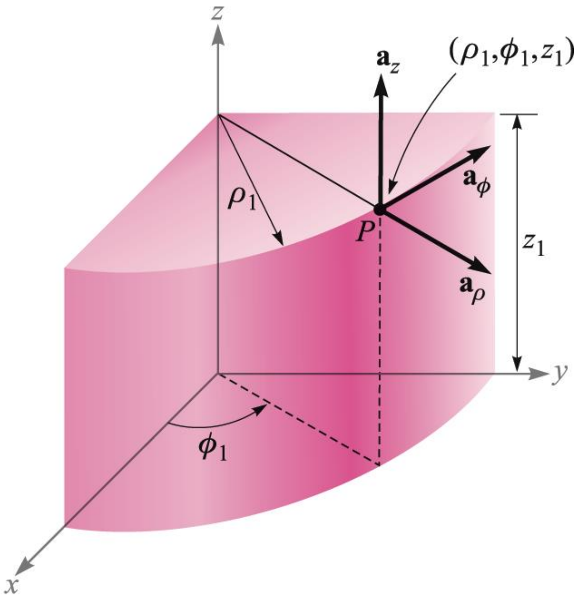
ρ: 点P到z轴的垂直距离

ϕ: 点P与z轴的平面和x, z轴平面的角度

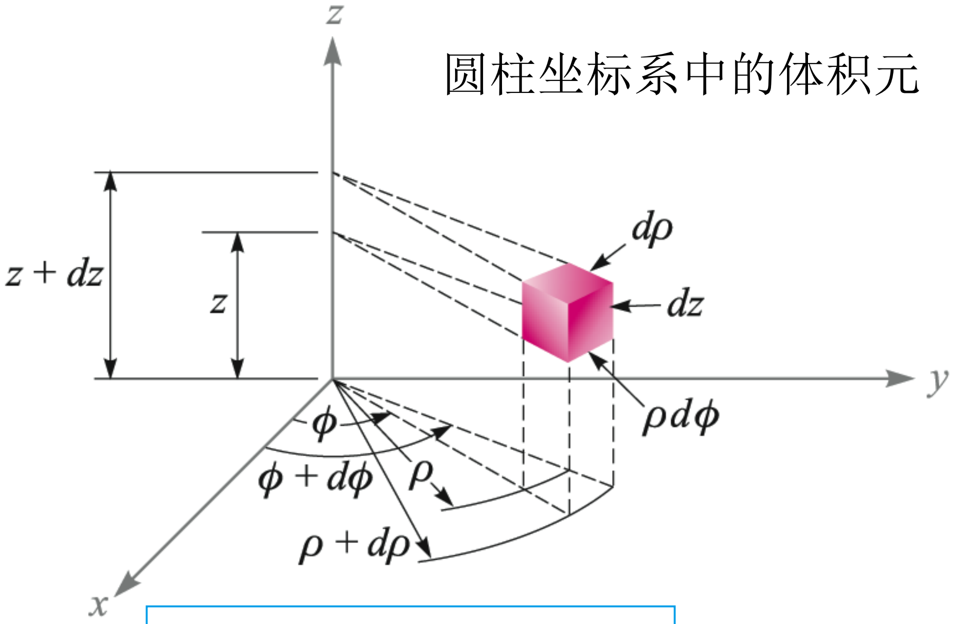
z : 点P在z轴上的分量



1.8 圆柱坐标系（Circular Cylindrical Coordinates）



圆柱坐标系中的三个单位矢量



圆柱坐标系中的体积元

$$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

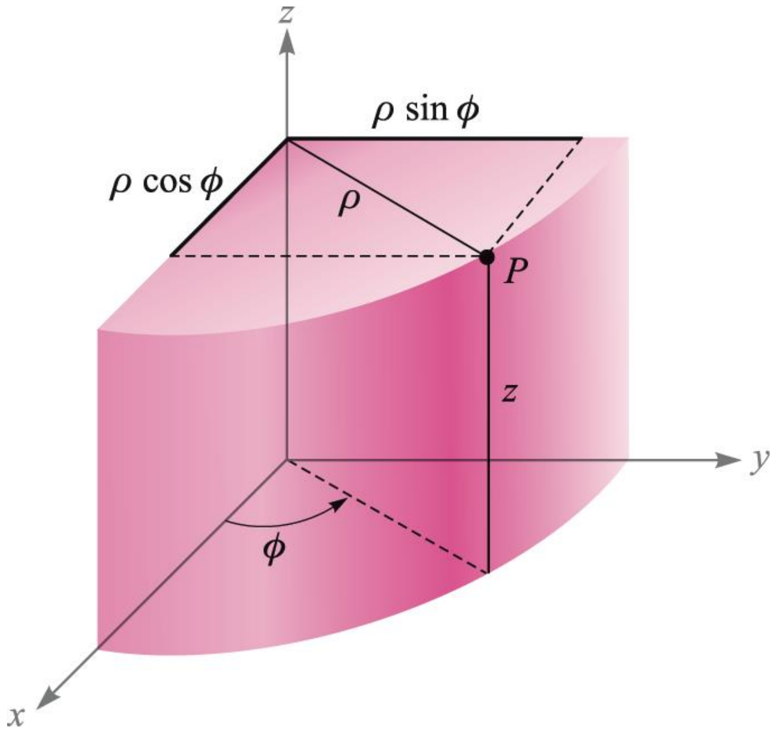
1.8 圆柱坐标系（Circular Cylindrical Coordinates）

直角坐标系转换为圆柱坐标系：

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0)$$
$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$
$$z = z$$

圆柱坐标系转换为直角坐标系：

$$x = \rho \cos \phi$$
$$y = \rho \sin \phi$$
$$z = z$$



1.8 圆柱坐标系（Circular Cylindrical Coordinates）

圆柱坐标系与直角坐标系中单位矢量的点乘：

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\mathbf{a}_z \cdot$	0	0	1

例1.3：将以下矢量 $\boldsymbol{B}$ 变换到圆柱坐标系中

$$\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

$$x = \rho\cos\phi \qquad y = \rho\sin\phi \qquad z = z$$

解：
$$B_\rho = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho)$$
$$= y\cos\phi - x\sin\phi = \rho\sin\phi\cos\phi - \rho\cos\phi\sin\phi = 0$$

$$B_\phi = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi)$$
$$= -y\sin\phi - x\cos\phi = -\rho\sin^2\phi - \rho\cos^2\phi = -\rho$$

$$\boxed{\mathbf{B} = -\rho\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z}$$

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x\cdot$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\mathbf{a}_y\cdot$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\mathbf{a}_z\cdot$	0	0	1

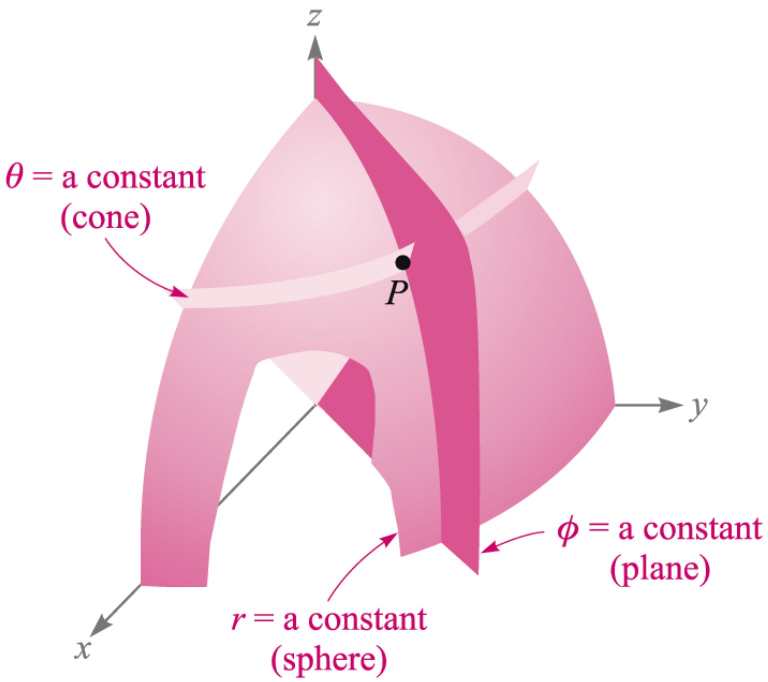
1.9 球坐标系（ Spherical Coordinate System）

球坐标系中三个相互垂直的面，交点为*P*点

θ: 圆椎体面

ϕ: 平面

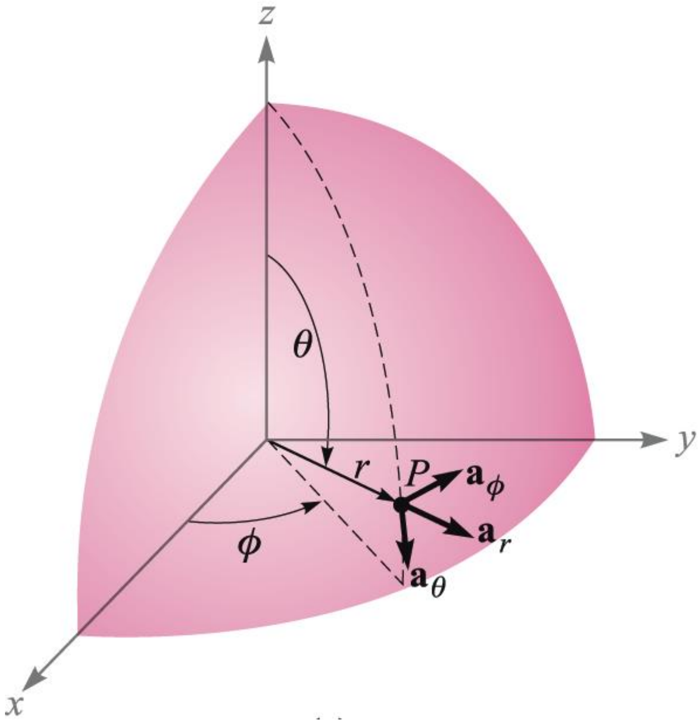
r: 球面



1.9 球坐标系（ Spherical Coordinate System）

球坐标系中三个单位矢量：

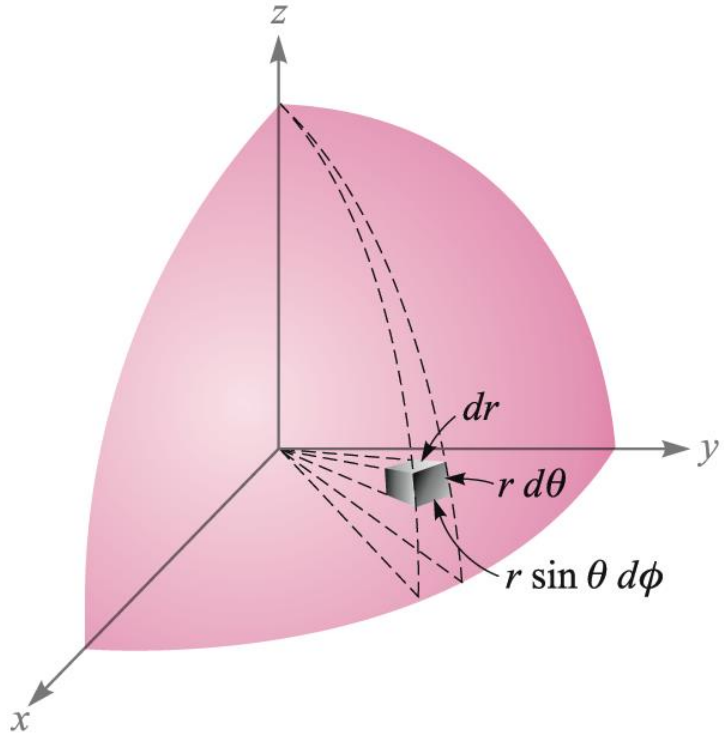
$$\boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi$$



1.9 球坐标系（ Spherical Coordinate System）

球坐标系中的微分体积元

$$dV = r^2 \sin\theta \; dr \, d\theta \, d\phi$$



1.9 球坐标系（ Spherical Coordinate System）

直角坐标系转换为球坐标系：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (r \geq 0)$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

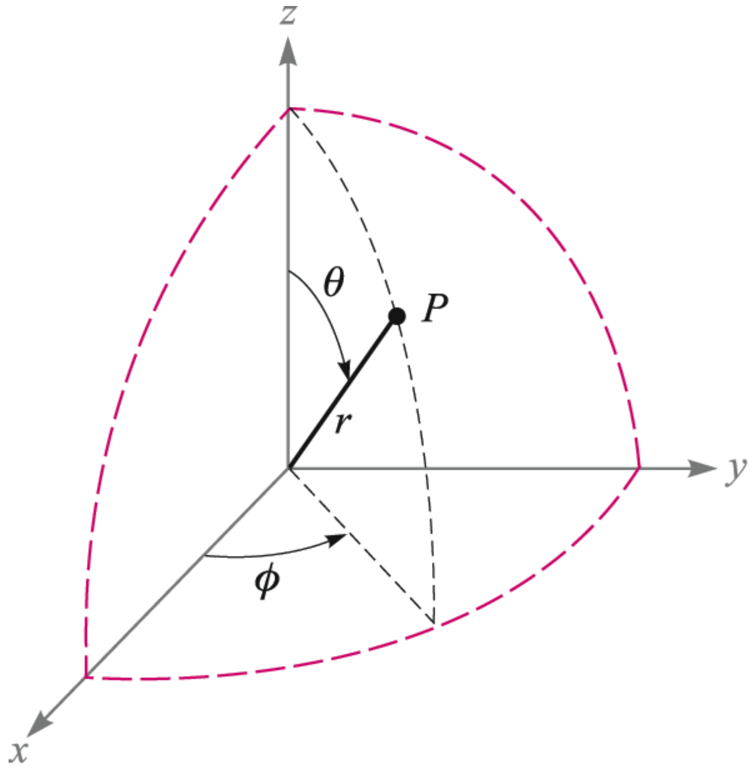
$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

球坐标系转换为直角坐标系：

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$



1.9 球坐标系（ Spherical Coordinate System）

- 球坐标系和直角坐标系中的单位矢量的点乘

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

书上$a_x \cdot a_r$有误，应为$sin\theta cos\emptyset$

例1.4：求矢量场$\boldsymbol{G} = (xz/y)\boldsymbol{a}_x$在球坐标系中的分量和变量

解：

$$G_r = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\sin\theta\cos\phi$$

$$= r\sin\theta\cos\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G_\theta = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\cos\theta\cos\phi$$

$$= r\cos^2\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G\phi = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}(-\sin\phi)$$

$$= -r\cos\theta\cos\phi$$

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x\cdot$	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\mathbf{a}_y\cdot$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\mathbf{a}_z\cdot$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

$$\mathbf{G} = r\cos\theta\cos\phi\,(\sin\theta\cot\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\cot\phi\,\mathbf{a}_\theta - \mathbf{a}_\phi)$$

课堂习题 1.8节 - 1.9节（超星学习通）

- 习题1.24(a)
- 习题1.26(a)
- 习题1.26(b)