电磁场与电磁波

第 5 章

导体与电介质

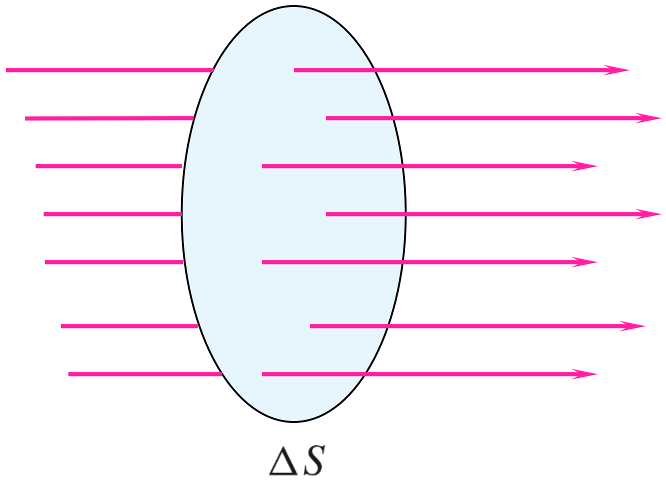
Conductors and Dielectrics

5.1电流与电流密度 CURRENT AND CURRENT DENSITY

电流定义为单位时间通过给定参考点的电荷量：$I = \dfrac{dQ}{dt}$

通常更关注单位面积通过的电流，称为电流密度**J**，单位为安培/平方米（A/m²）。**J**为矢量，在电流方向与选取的面垂直时，若**J**的值为J_N，垂直的面积元为ΔS,则通过的电流为：

$$\Delta I = J_N \Delta S$$



5.1电流与电流密度 - 电流密度为矢量场

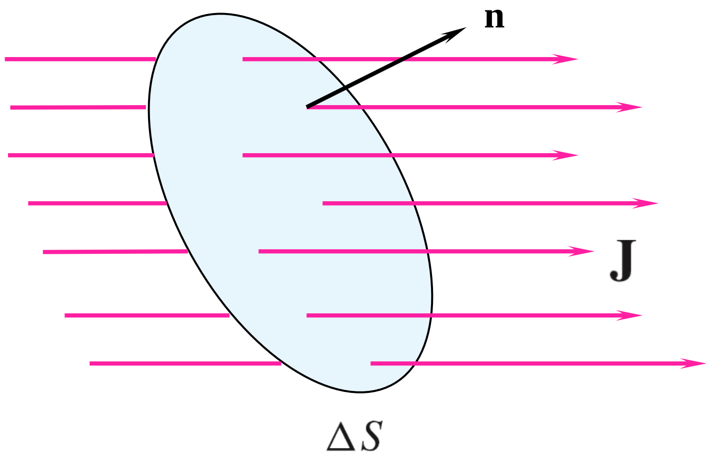
在现实中，电流的方向不一定与选取的面垂直，因此可用电流密度与面积元矢量点乘来计算电流：

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

式中 $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}a$　　$\mathrm{d}a$为这个面上的面积微分元

因此，通过一个较大的表面的电流可由积分得到：

$$\boxed{I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}$$



5.1电流与电流密度 - 电流与电荷运动速度的关系

考虑有体电荷ΔQ, 它所占据的空间为Δv, 从正 x 轴方向以v_x的速度移动

根据体电荷的密度，带电量为：

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v = \rho_v \Delta S \Delta L$$

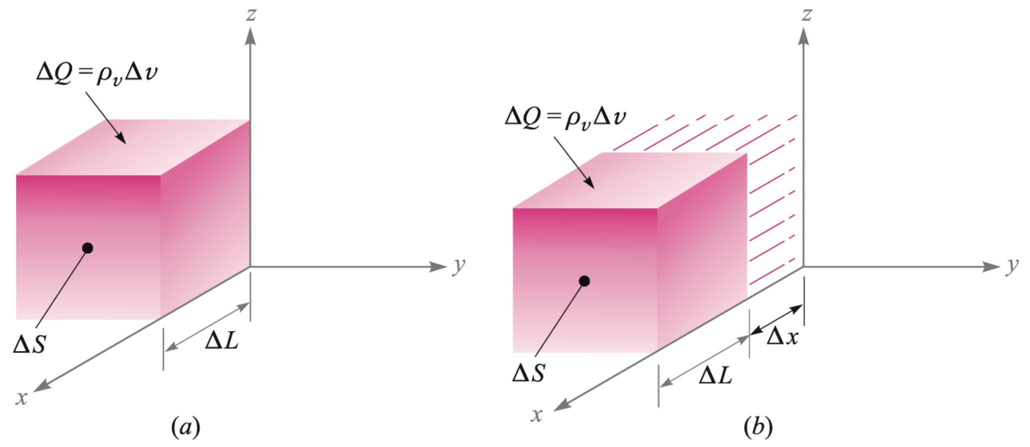
在Δt的时间里，电荷移动了$\Delta x = \Delta L = v_x \Delta t$的距离，可得移动的电荷量为：

$$\Delta Q = \rho_v \Delta S \Delta x$$

该电荷的移动形成的电流为：

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

即： $\Delta I = \rho_v \Delta S v_x$



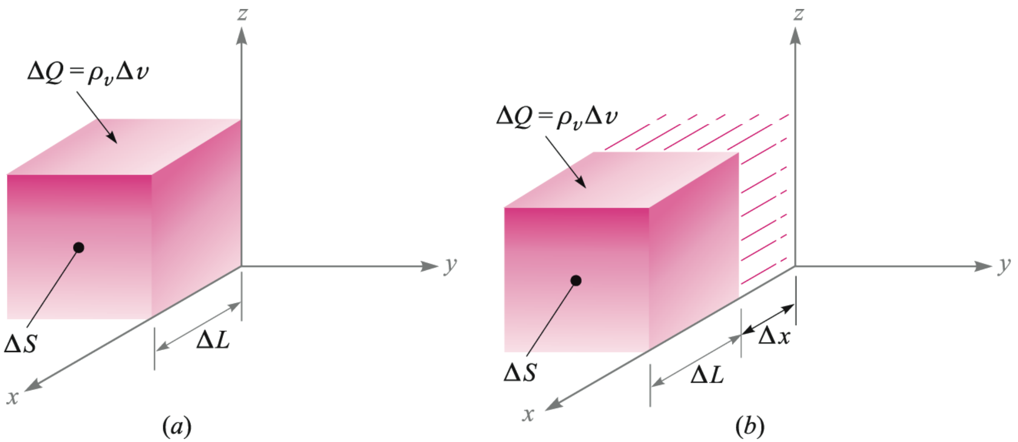
5.1电流与电流密度 - 电流密度与电荷运动速度的关系

（接上页）已求得电流为： $\Delta I = \rho_v \, \Delta S \, v_x$

电流密度为： $J_x = \dfrac{\Delta I}{\Delta S} = \rho_v v_x$

电流密度更一般的形式：

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}}$$

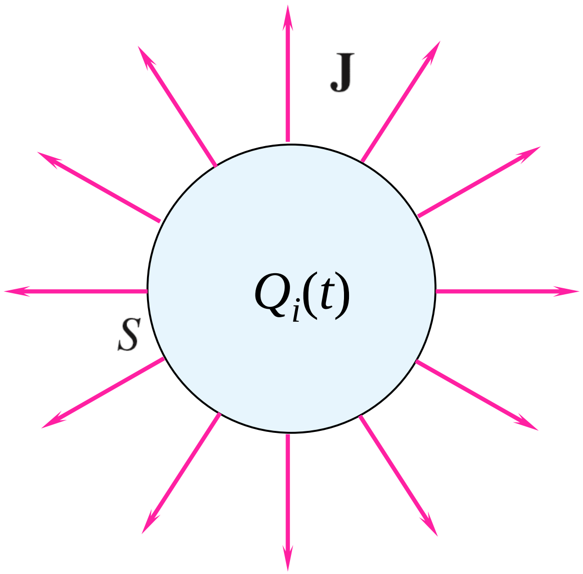


5.2 电流连续性 CONTINUITY OF CURRENT

电流密度与电荷密度的关系

假设电荷Q_i 从闭合面所包围的空间中逃逸出来，形成的电流密度为**J**，那么总的电流为：

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{vol}} \rho_v \, dv$$



从闭合面**S**的角度看，电荷量在减少，故电流为负

对上式应用散度定理将面积分变换为体积分：

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \, dv$$

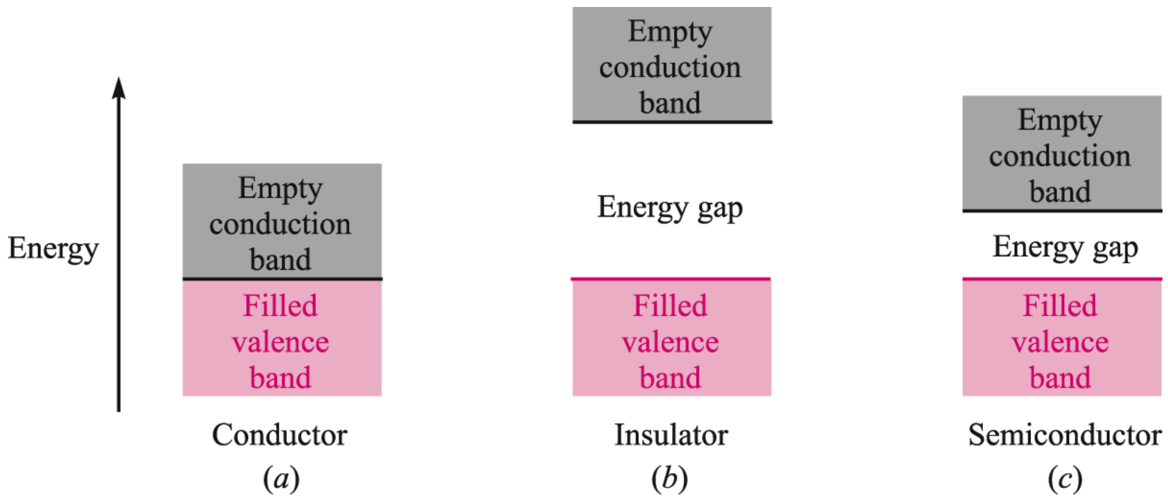
因此：$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \, dv = -\frac{d}{dt}\int_{\text{vol}} \rho_v \, dv$$

或：$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \, dv = \int_{\text{vol}} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dv$$

积分内的式子必定相等，从而得到了电流连续性方程：

$$\boxed{(\nabla \cdot \mathbf{J}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}$$

5.3 金属导体 METALLIC CONDUCTORS



导体、绝缘体与半导体的能带

a) 在导体（Conductor）中，价带（Valence Band）和导带（Conduction Band）之间没有能隙，因此电子可以自由移动

b) 在绝缘体（Insulator）中，价带和导带间有很大的能隙，需要大量的能量才能将电子提升到导带的能级，此时电介质被击穿

c) 半导体（Semiconductor）的价带和导带之间只有一个较小的能隙，因此施加少量的能量（热能、光能、电场等）就能够将价带外层电子提升到导带的能级

5.3 金属导体 – 电子流、电导率、欧姆定律点形式

自由电子在电场的作用下移动，作用在电荷量为Q = -e 的电子上的力为：

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$$

在电场力的作用下，电子获得一个恒定的平均速度，称为漂移速度：

$$\mathbf{v}_d = -\mu_e\mathbf{E}$$

式中μ_e是电子的漂移率，单位为$m^2/V\text{-}s$，漂移率与导体的材质有关。

漂移率与电流密度的关系为：

$$\mathbf{J} = \rho_v\mathbf{v}_d = -\rho_e\mu_e\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$$

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}}$$

上式称为欧姆定律的点形式

ρ_e为自由电子电荷密度。两个常数项乘积称为电导率：$\boxed{\sigma = -\rho_e\mu_e}$ S/m （西门子/米）

在室温下，金属导体的电导率为常数:

铁1.03×10^7，铝3.82×10^7，金4.10×10^7，铜5.80×10^7，银6.17×10^7

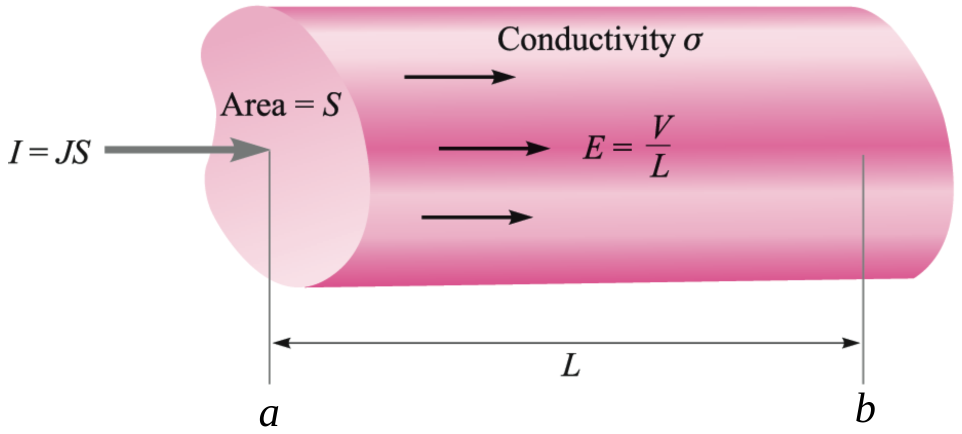
5.3 金属导体 – 电阻

考虑如下图中的圆柱形导体，其两端的电压为 V，电流均匀地流过导体的横截面（面积为 S）

依据电位和电流的定义，可得到如下方程式：

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \int_b^a d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ba} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ab} \Longrightarrow V = EL$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS \Longrightarrow J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L} \Longrightarrow \underline{V = \frac{L}{\sigma S} I}$$



根据欧姆定律的常规形式：

$$\boxed{V = IR}$$

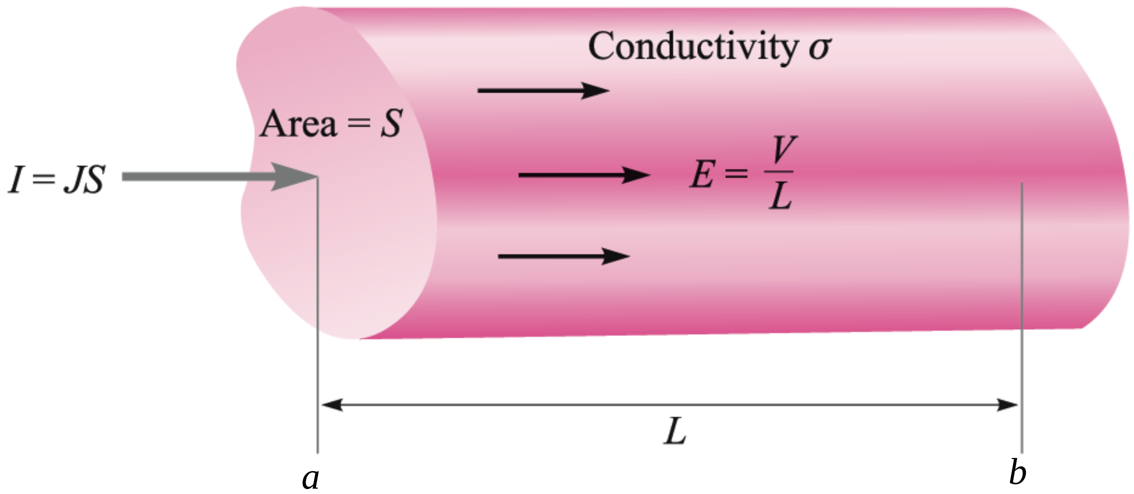
可得到该圆柱形导体的电阻为：

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S}}$$

5.3 金属导体 – 电阻的一般形式

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

对于非均匀电场也成立



例5.1 计算1英里长，直径为0.0508英寸的16 AWG 铜导线的电阻值

解：导线的直径为： $0.0508\times 0.0254 = 1.291\times 10^{-3}\ \text{m}$

导线的横截面面积为： $\pi(1.291\times 10^{-3}/2)^2 = 1.308\times 10^{-6}\ \text{m}^2$

导线长度为： 1英里 = 1609米

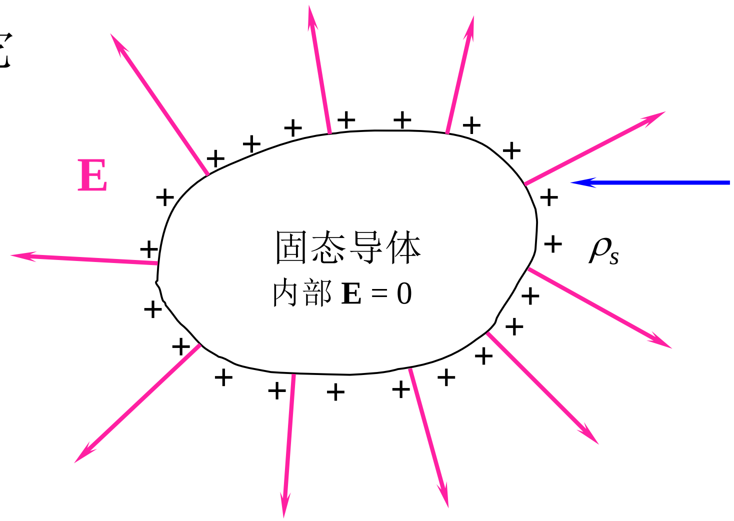
铜的电导率为： $5.80\times 10^{7}\ \text{S/m}$

铜导线的电阻为：

$$R = \frac{1609}{(5.80\times 10^{7})(1.308\times 10^{-6})} = 21.2\ \Omega$$

5.4 导体性质和边界条件 – 导体的静电学特性
CONDUCTOR PROPERTIES AND BOUNDARY CONDITIONS

考虑以下导体，让它带上一定的电荷量



1. 电荷只存在于导体的表面，电荷密度为ρ_s
2. 在导体内部不存在电荷和电场，且电场在表面切向的分量为0
3. 从第2条可推出导体的表面是一个等位面

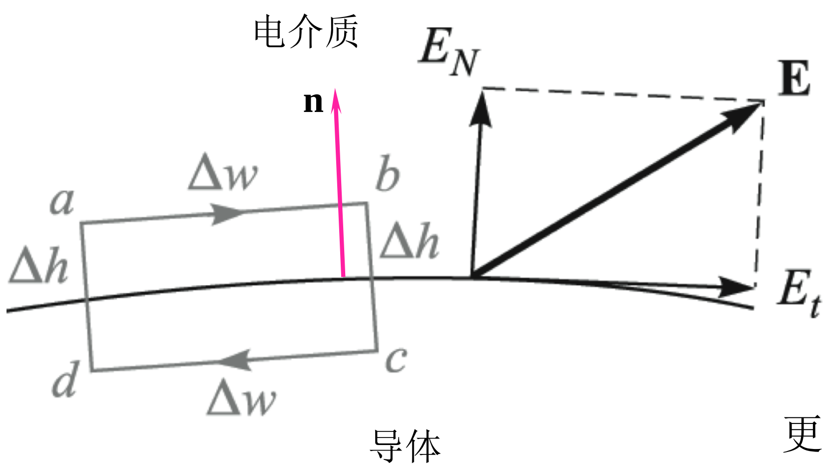
5.4 导体性质和边界条件 – 切向电场

在矩形积分路径中，计算电位：$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=0$ 或 $\int_a^b+\int_b^c+\int_c^d+\int_d^a=0$

由于内部电场为0，得到：

$$E_t\Delta w-\underbrace{E_{N,\text{at}\,b}\frac{1}{2}\Delta h+E_{N,\text{at}\,a}\frac{1}{2}\Delta h}_{}=0$$

让Δh 趋近于0，保持Δw很小但为有限值时，这部分可忽略



从而有：

$$\boxed{E_t=0}$$

更一般的形式为：$\boxed{\mathbf{E}\times\mathbf{n}\big|_S=0}$

表明导体表面的电场方向为法向量方向

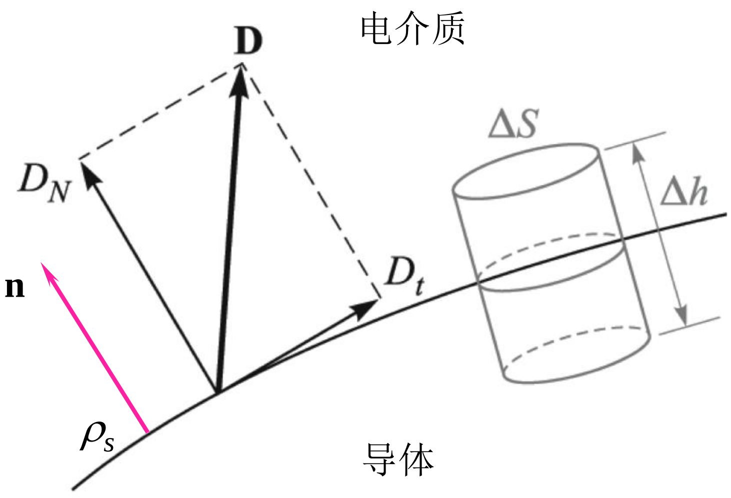
5.4 导体性质和边界条件 – 法向电通量

现选取一个小的圆柱体的表面作为高斯面，依据高斯定律：

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{top}} + \cancel{\int_{\text{bottom}}} + \cancel{\int_{\text{sides}}} = Q$$

内部无电场　Δh 趋向于0

上式可化简为：$D_N \Delta S = Q = \rho_S \Delta S$



从而可得：

$$\boxed{D_N = \rho_S}$$

更一般的形式为：

$$\boxed{\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\big|_s = \rho_s}$$

5.4 导体性质和边界条件

1. 在导体内部，静电场的电场强度为零
2. 导体表面上的电场强度处处都垂直于导体表面
3. 导体表面是一个等位面

用矢量表示：

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}\Big|_S = 0$$

切向的电场 E 为0

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\Big|_S = \rho_S$$

法向的电通量密度D等于表面的电荷密度

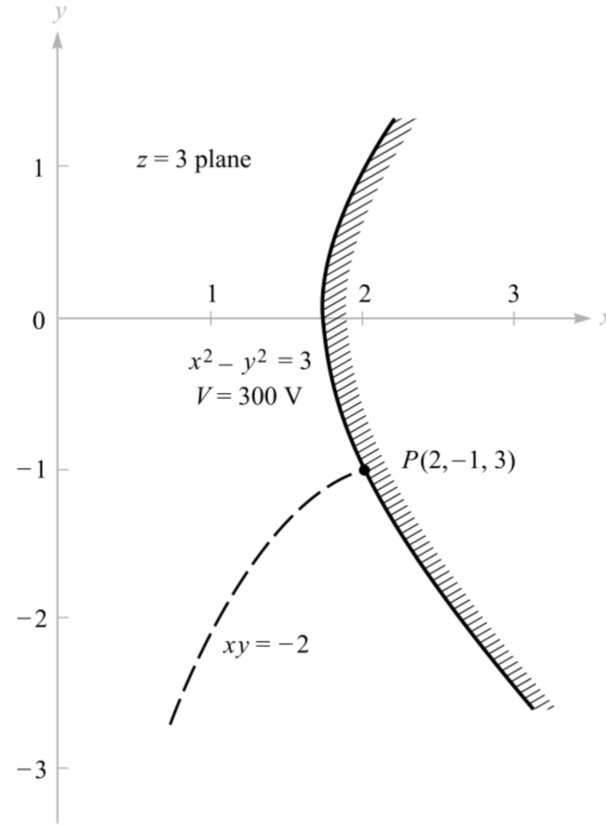
例5.2 给定电位V=100(x^2-y^2)，且假设点P(2,-1,3)位于导体与自由空间的分界面上，求在P点的V、**D**、**E**和ρ_s，以及导体表面的方程

解：P点的电位为： $V_P = 100[2^2 - (-1)^2] = 300\ \text{V}$

由于导体表面为等位面，因此整个表面电位为300V，而导体内部 E = 0

电位为300V的等位面方程为： $300 = 100(x^2 - y^2)$

即： $x^2 - y^2 = 3$



利用梯度计算电场强度**E**：

$$\mathbf{E} = -100\nabla(x^2 - y^2) = -200x\mathbf{a}_x + 200y\mathbf{a}_y$$

P点的电场强度为： $\mathbf{E}_p = -400\mathbf{a}_x - 200\mathbf{a}_y\ \text{V/m}$

由于**D**=ε_0**E**，因此P点的电通量密度为：

$$\mathbf{D}_P = 8.854 \times 10^{-12}\mathbf{E}_P = -3.54\mathbf{a}_x - 1.771\mathbf{a}_y\ \text{nC/m}^2$$

例5.2 给定电位V=100(x^2-y^2)，且假设点P(2,-1,3)位于导体与自由空间的分界面上，求在P点的V、**D**、**E**和ρ_s，以及导体表面的方程

已求得P点电通量密度为：

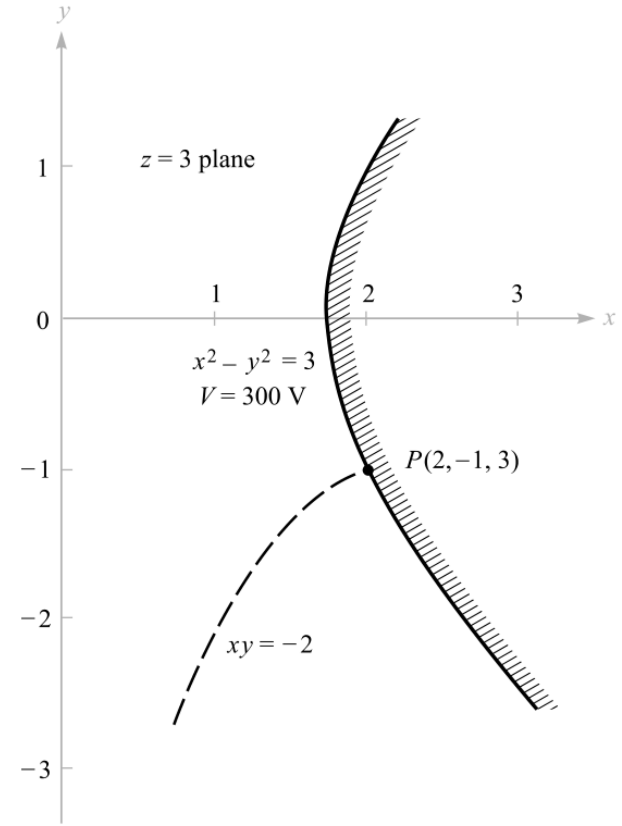
$$\mathbf{D}_P = 8.854 \times 10^{-12}\mathbf{E}_P = -3.54\mathbf{a}_x - 1.771\mathbf{a}_y \ \text{nC/m}^2$$

在P点处，电场方向指向左下方，且垂直于等位面，因此：

$$D_N = |\mathbf{D}_P| = 3.96 \ \text{nC/m}^2$$

P点的面电荷密度为：

$$\rho_{S,P} = D_N = 3.96 \ \text{nC/m}^2$$



例5.3 计算上一题中经过*P*点的电力线方程

解：根据电力线方程的定义得：

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{200y}{-200x} = -\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

可得解微分方程：

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

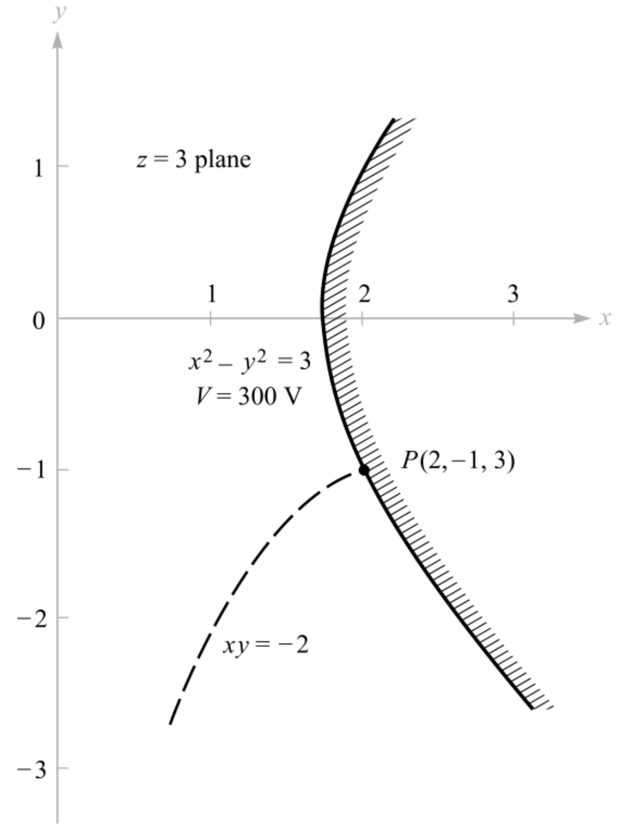
解微分方程得：

$$\ln y + \ln x = C_1$$

$$xy = C_2$$

由于P点坐标(2, -1, 3)，取C_2= 2 ×(-1) = -2。因此通过该点的电力线方程为：

$$xy = -2$$



习题 5.1 - 5.4

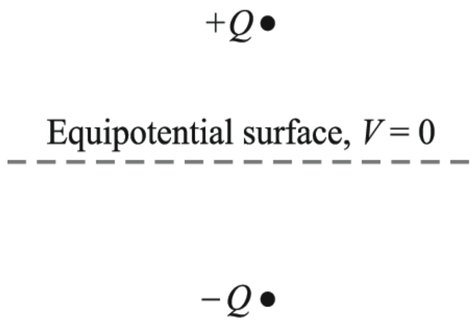
5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 5.10

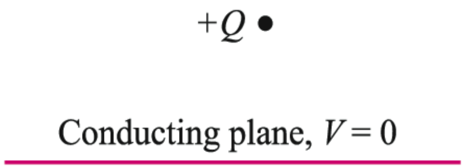
5.5 镜像法 THE METHOD OF IMAGES

若给定电荷和相关的边界条件，那么它们只能产生一种固定的电场

在电偶极子产生的电场中，处于两个点电荷中间的平面电位$V = 0$

若用在相同位置放置一个接地的导电平面代替，那么两者在上半平面内的电场是完全相同的（但下半个平面是不同的）

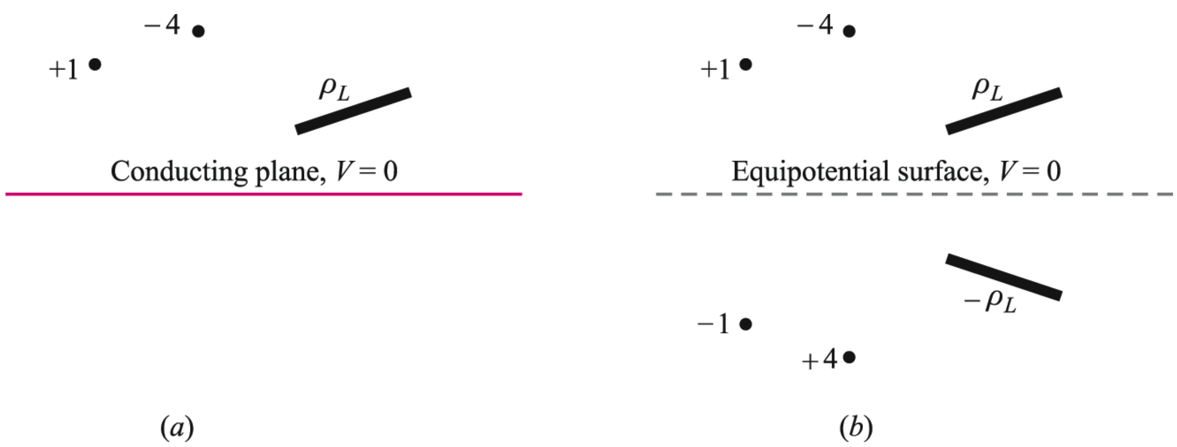




反之，若将导电平面移走，并同时在平面下方对称位置放置一个负点电荷，那么平面上方仍可以维持相同的电场。这个负电荷称为原电荷的镜像，它与原电荷大小相等而符号相反。

5.5 镜像法 - 原理

给定边界条件的每个电荷都可以找出它的镜像



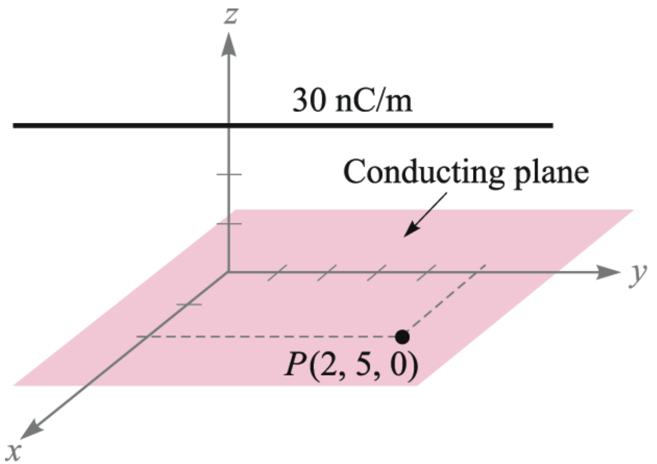
(a) 无限大导电平面上方的给定电荷结构

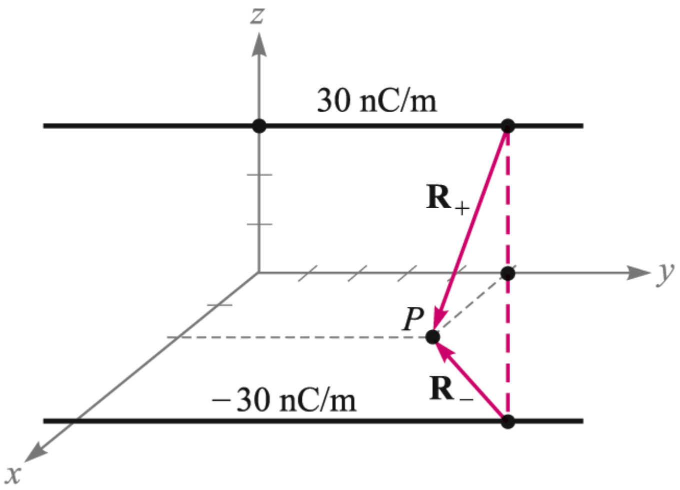
(b) 给定电荷结构加上镜像结构，无导电平面

5.5 镜像法 – 应用：计算面电荷密度

已知在x = 0，z = 3的直线上分布有30nC/m的线电荷，求导电平面z = 0上点P (2,5,0) 的面电荷密度。

利用镜像法，首先将导电平面替换为x = 0，z = -3处一条分布有-30nC/m的镜像线电荷：





5.5 镜像法 – 应用：计算面电荷密度

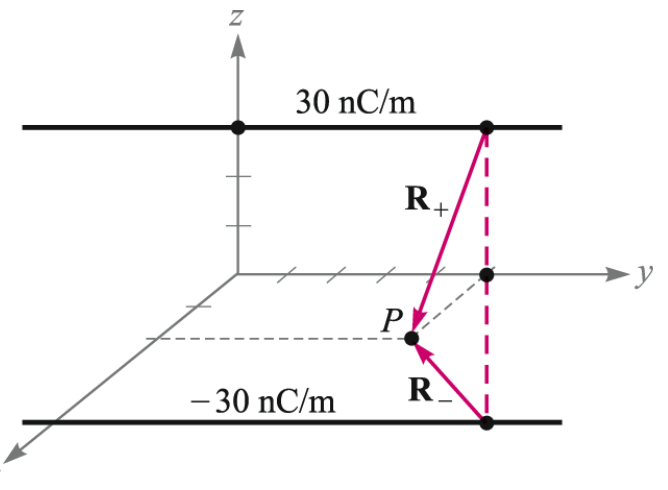
从正、负线电荷到P点的径向矢量分别为：

$$\mathbf{R}_+ = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z \qquad \mathbf{R}_- = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$$

因此，这两条线电荷的电场强度分别是：

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R_+}\mathbf{a}_{R+} = \frac{30\times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0\sqrt{13}}\,\frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{30\times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0\sqrt{13}}\,\frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$



将两个电场强度相加得到：

$$\mathbf{E} = \frac{-180\times 10^{-9}\mathbf{a}_z}{2\pi\epsilon_0(13)} = -249\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

5.5 镜像法

已求得P点的电场强度为： $\mathbf{E} = \dfrac{-180 \times 10^{-9}\mathbf{a}_z}{2\pi\epsilon_0(13)} = -249\mathbf{a}_z \text{ V/m}$

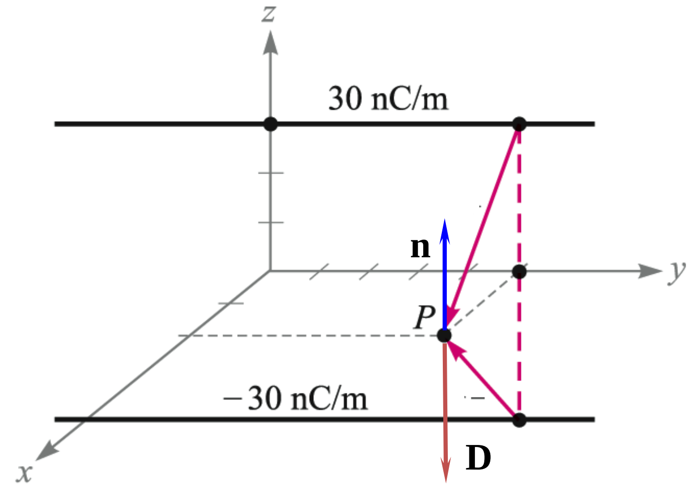
由电场和电通量密度的关系可得： $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} = -2.20\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$

由于电通量密度和面电荷密度的关系为： $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\Big|_s = \rho_s$

式中：$\mathbf{n} = \mathbf{a}_z$

可得：

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -2.20\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = \underline{-2.20 \text{ nC/m}^2}$$



5.6 半导体 SEMICONDUCTORS

本征半导体（如纯净的锗或硅）的载流子是电子和空穴。空穴为电子迁移留下的空位，带正电荷，也可以由一个原子迁移到邻近的另一个原子。

半导体的电导率是电子密度、空穴密度和漂移率的函数：

$$\boxed{\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h}$$

本征半导体的电导率随温度升高而增加，而金属导体的电导率随温度升高而减小

通过掺杂可使电导率急剧增加（掺杂浓度10^{-7}，电导率增加10^5倍）：

- N型半导体：施主材料提供额外的电子
- P型半导体：受主材料提额外的空穴
- PN结，PNP三极管，NPN三极管

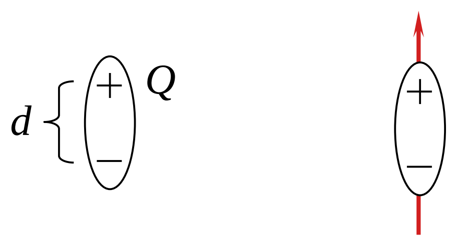
绝缘体：10^{-17}S/m；半导体：1 S/m；导体：10^8S/m

5.7 电介质材料的性质 THE NATURE OF DIELECTRIC MATERIALS

电偶极子与偶极矩

在电介质中，电荷被束缚在很小的空间中，在理想的状况下不会产生自由电荷的移动，因而不会产生电流。然而，原子与分子可能具有极性（可分为带正电荷的部分和带负电荷的部分），或是在电场的作用下出现极性。

考虑一种带极性的原子或分子，具有电偶极矩**p**：

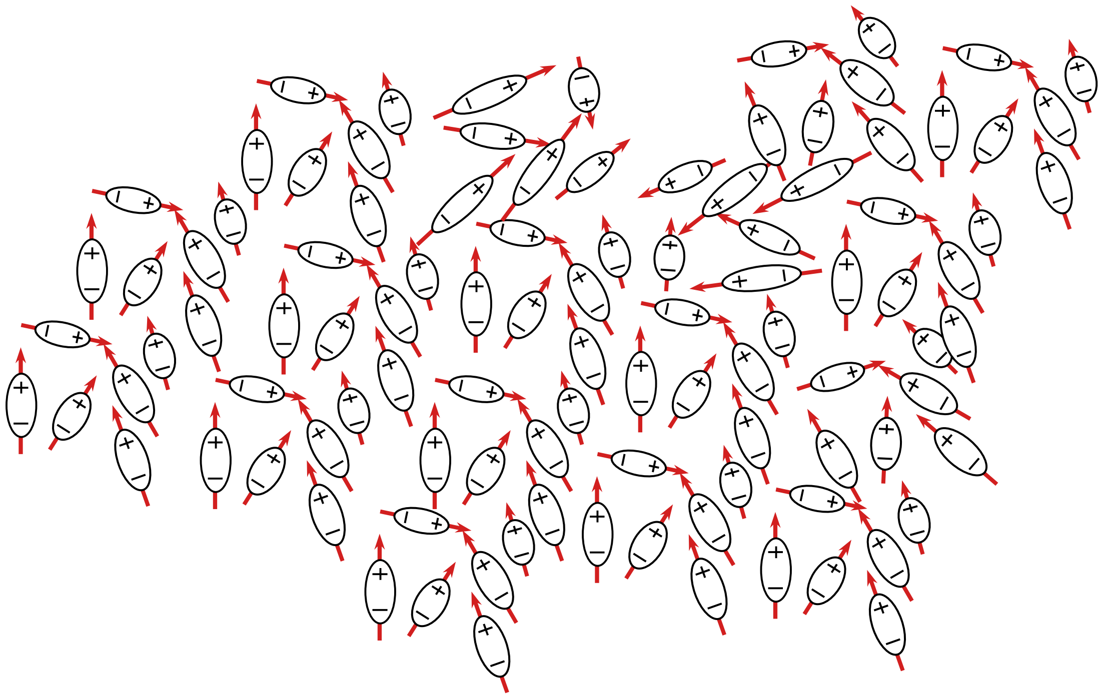


$$\mathbf{p} = Qd\,\mathbf{a}_x$$

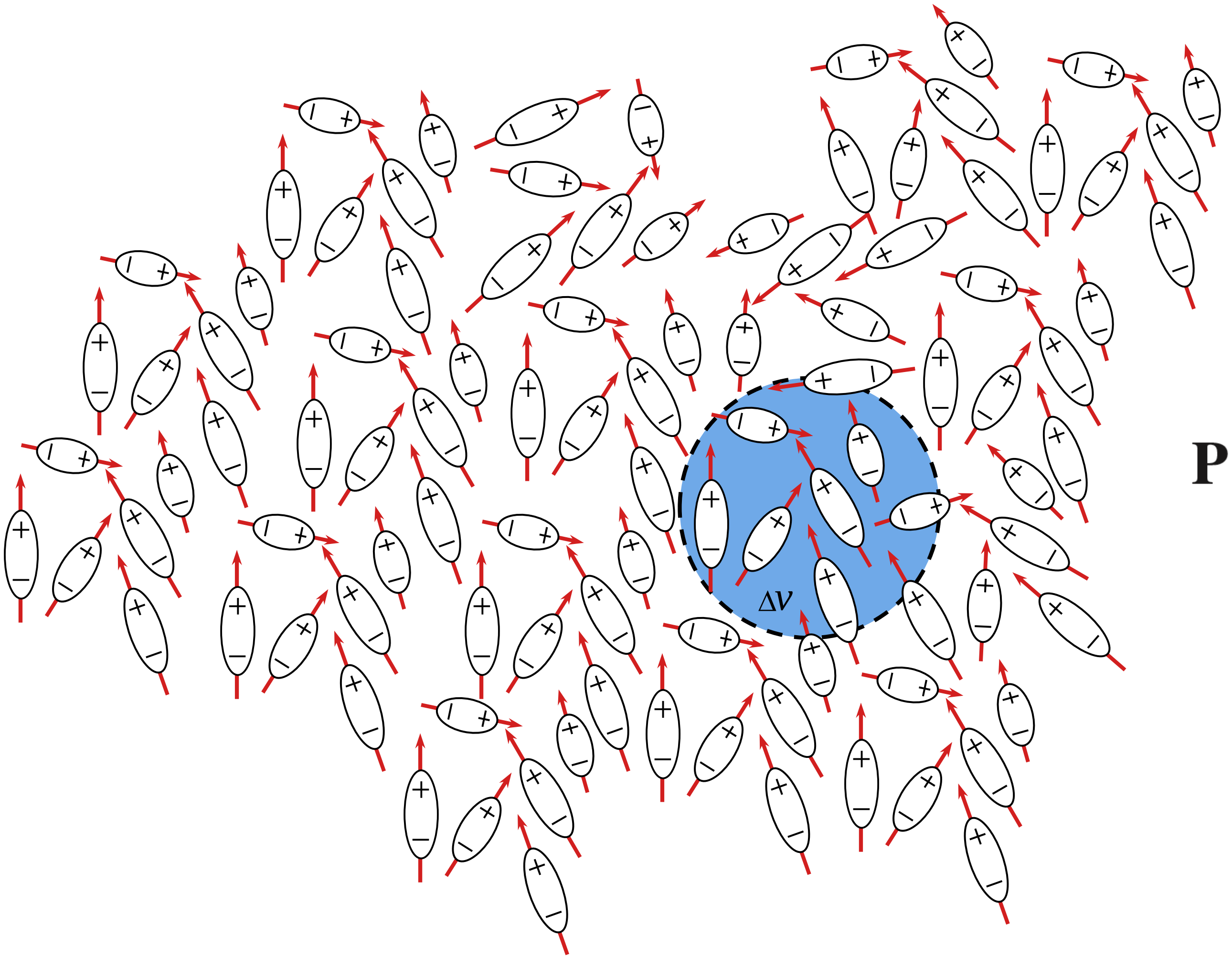
式中Q是构成电偶极子的两个束缚电荷中的正电荷电量，$\boldsymbol{d}$为从负电荷指向正电荷的矢量。

5.7 电介质材料的性质 – 电介质模型

电介质可以认为是在自由空间中存在的大量束缚电荷，这些电荷所在的原子和分子组成了电介质材料。某些分子其正负电荷作用重心之间有一个永久的位移，这些分子称为极性分子。而相对的，无极性分子在施加外部电场后才会出现电偶极子。在一些电介质材料中，偶极矩的方向是随机的。



5.7 电介质材料的性质 - 电极化强度（无外电场）



若单位体积中的电偶极子的数量为n

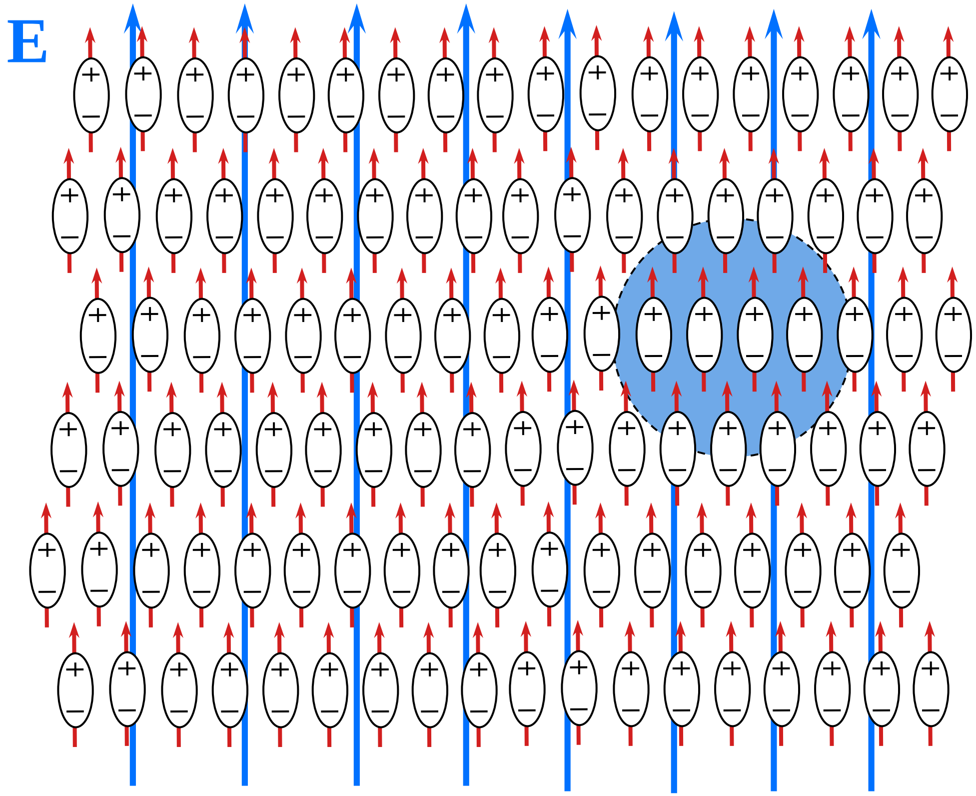
那么，该介质电极化强度P为：

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\nu \to 0} \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{i=1}^{n\,\Delta\nu} \mathbf{p}_i$$

单位：[C/m²]

5.7 电介质材料的性质 - 电极化强度（有外电场）

引入电场可能会增加每个偶极的电荷分离，并可能使偶极子重新定向，从而出现一些聚合排列。 这种影响很小，而下图中所示是被夸大了的效果。



引入电场使得**P**增大：

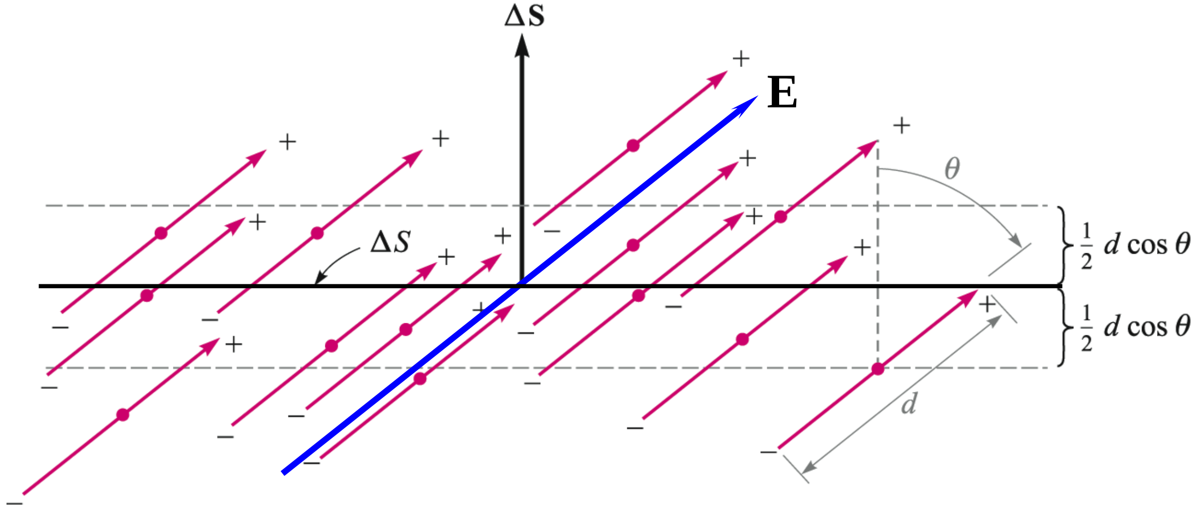
$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\,\Delta v} \mathbf{p}_i$$

$$= n\mathbf{p}$$ 若所有偶极子同方向

5.7 电介质材料的性质 – 束缚电荷的迁移

引入一个与表面法线成角度θ的电场， 从而产生束缚电荷的分离（或重定向），使得正束缚电荷向上穿过面积为ΔS的表面，而负束缚电荷向下穿过该表面。

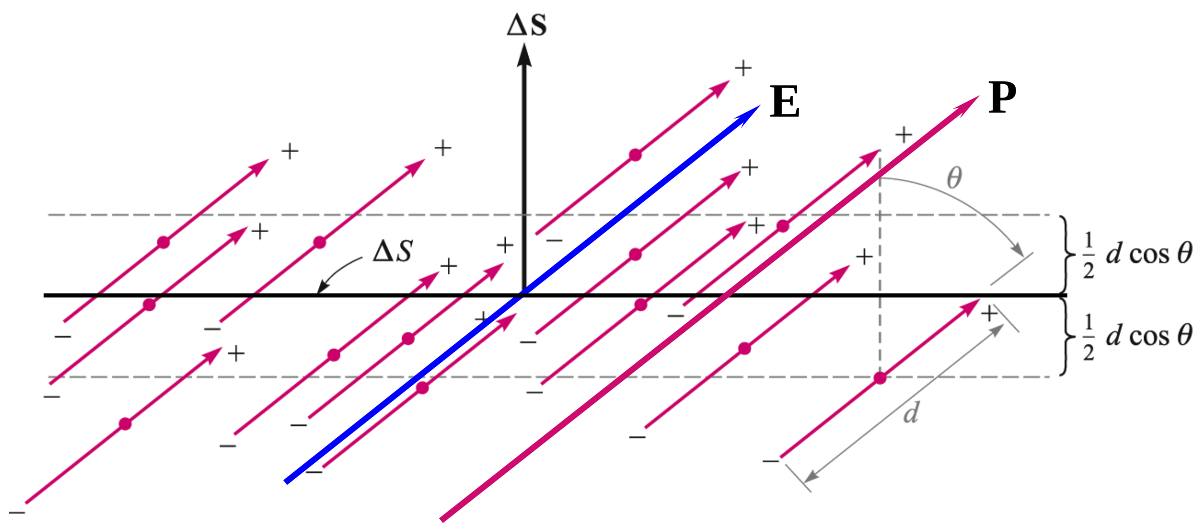
位于表面上方或下方(1/2) $d\cos\theta$ 范围内的偶极子中心（红点）将跨越表面迁移电荷。



5.7 电介质材料的性质 – 束缚电荷的运动产生的电极化通量

穿过 ΔS 表面的总束缚电荷由以下公式给出：

$$\Delta Q_b = nQ\underbrace{d\cos\theta\Delta S}_{\text{体积}} = nQ\mathbf{d}\cdot\Delta\mathbf{S} = \mathbf{P}\cdot\Delta\mathbf{S}$$

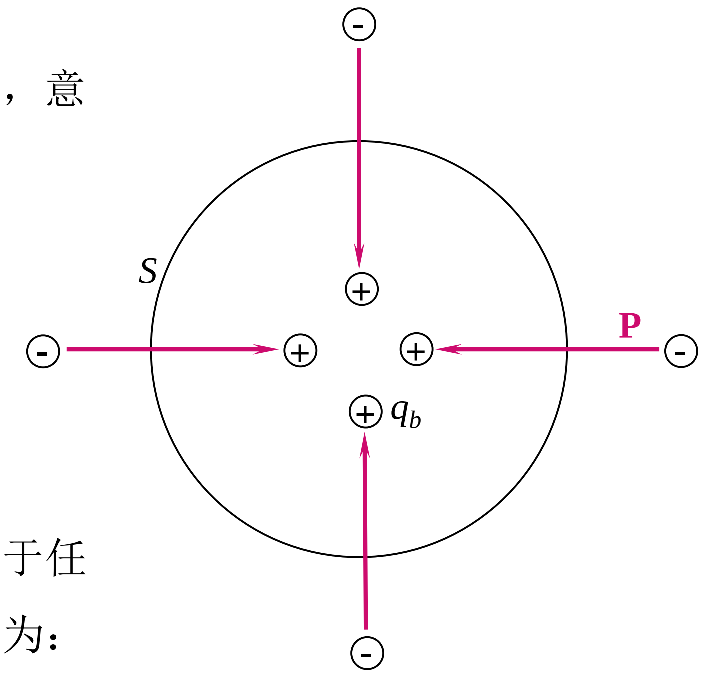


5.7 电介质材料的性质 –穿过闭合面的电极化通量

若在一个封闭的表面内积累正的束缚电荷，意味着极化矢量必须指向内侧。 因此：

$$Q_b = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

注：Q_b中的b表示bound，束缚电荷



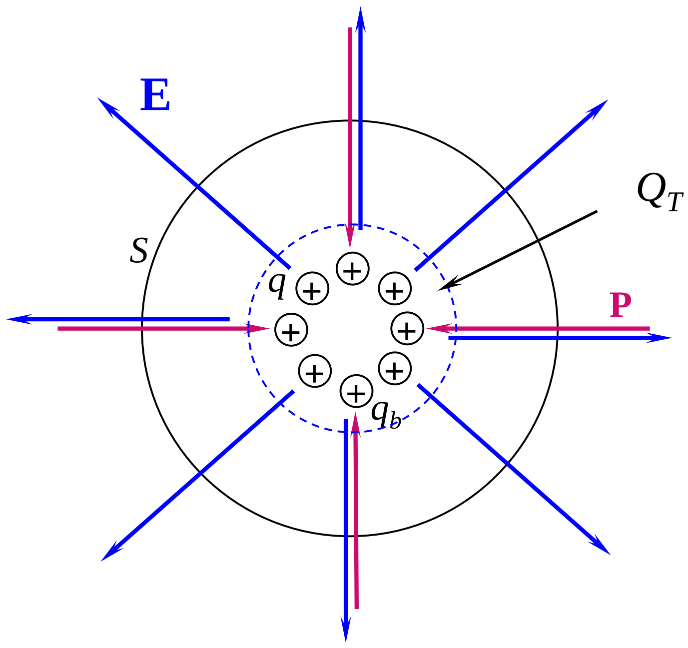
将电通量密度的定义作推广，使其也适用于任意介质。依据高斯定律，闭合面内总电荷为：

$$Q_T = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

注：Q_T中的T表示Total，总电荷

5.7 电介质材料的性质 – 自由电荷与束缚电荷

现在考虑封闭面内的电荷，包括束缚电荷q_b和自由电荷q，总电荷量是所有束缚电荷和自由电荷的总和。 我们用总电荷Q_T来写高斯定律，即：



$$Q_T = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

式中

$$Q_T = \underbrace{Q_b}_{\text{束缚电荷}} + \overbrace{Q}^{\text{自由电荷}}$$

5.7 电介质材料的性质 – 自由电荷的高斯定律

现已有：

$$Q_b = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad 与 \quad Q_T = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

式中：$Q_T = Q_b + Q$

两式结合可得：

$$\boxed{Q = Q_T - Q_b = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S}}$$

从而得到具有更普遍意义的电通量密度：

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$$

新的电通量密度**D**可用高斯定律计算自由电荷量：

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

5.7 电介质材料的性质 – 电荷密度

利用前面的结果和散度定理，可以列出点形式的表达式：

束缚电荷：$Q_b = \int_v \rho_b \, dv = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \longrightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b}$

总电荷：$Q_T = \int_v \rho_T \, dv = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \longrightarrow \boxed{\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho_T}$

自由电荷：$Q = \int_v \rho_v \, dv = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \longrightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v}$

5.7 电介质材料的性质 – 电极化率与介电常数

较强的电场会导致介质中的极化增大。 在一个线性介质中，**P** 和 **E** 之间的关系是线性的，由以下公式给出：

$$\boxed{\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}}$$

式中χ_e为材料的电极化率

用χ_e重新定义**D**:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\chi_e + 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$$

上式括号内的表达式定义为相对介电常数：

$$\boxed{\epsilon_r = \chi_e + 1}$$

因此，电介质的整体介电常数为： $\boxed{\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0}$ 从而有： $\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}}$

5.7 电介质材料的性质 – 各向同性、各向异性材料

在各向同性的介质中，介电常数是不随着外加电场的方向而变化的。

在各向异性介质（通常是晶体）中则不是这样。在这种介质中，介电常数会随着电场在某些方向的旋转而变化。 在这种情况下，电通量密度矢量分量必须通过介电张量（矩阵）来单独评估。 这种关系可以用以下形式表示。

$$
\begin{aligned}
D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\
D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \\
D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z
\end{aligned}
$$

例5.4 一块聚四氟乙烯平板的厚度为 $0 \le x \le a$，假定 $x<0$ 和 $x>a$ 两个区域均为自由空间。在聚四氟乙烯平板的外部空间中，有一均匀电场$\mathbf{E}_{out}=E_0\,\boldsymbol{a}_x$ V/m。计算任意点的**D**、**E**和**P**。

解：聚四氟乙烯介电常数为2.1，所以它的电极化率为1.1

在板外空间有$\mathbf{D}_{out}=\varepsilon_0 E_0 \boldsymbol{a}_x$。由于板外空间没有电介质，因此$\mathbf{P}_{out}=0$

对于板内空间有：

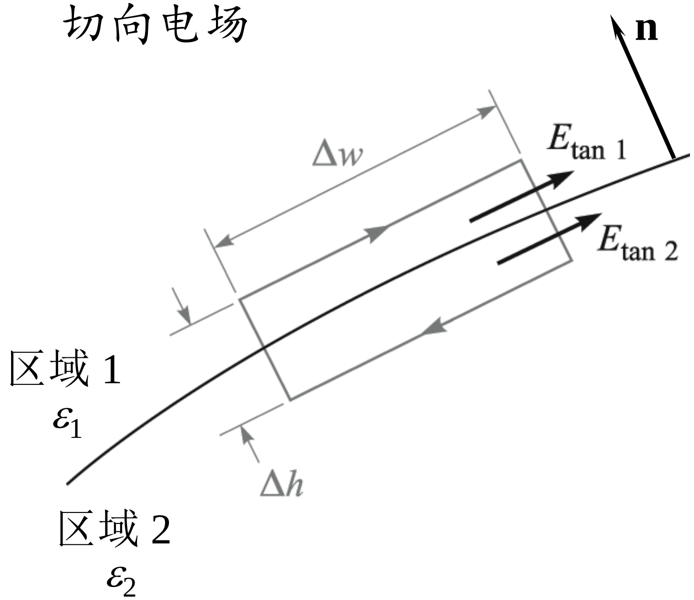
$$\mathbf{D}_{in} = 2.1\epsilon_0 \mathbf{E}_{in} \qquad (0 \le x \le a)$$
$$\mathbf{P}_{in} = 1.1\epsilon_0 \mathbf{E}_{in} \qquad (0 \le x \le a)$$

板内空间的电场$\mathbf{E}_{in}$在一下节例题5.5中计算

5.8 理想电介质的边界条件

BOUNDARY CONDITIONS FOR PERFECT DIELECTRIC MATERIALS

切向电场



$$\frac{D_{\tan 1}}{\epsilon_1} = E_{\tan 1} = E_{\tan 2} = \frac{D_{\tan 2}}{\epsilon_2}$$

$$\boxed{\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$

根据电场**E**的保守性有：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

因此：

$$E_{\tan 1}\,\Delta w - E_{\tan 2}\,\Delta w = 0$$

可得到：

$$\boxed{E_{\tan 1} = E_{\tan 2}}$$

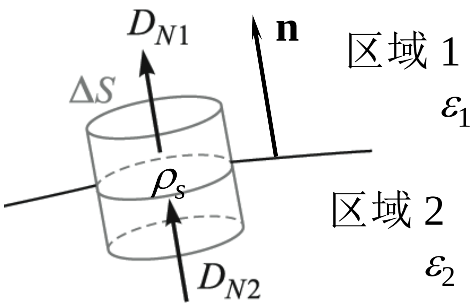
更一般地可表示为：

$$\boxed{(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0}$$

5.8 理想电介质的边界条件 – 法向电通量

将高斯定律应用于此处所示的圆柱体，其中圆柱体的高度被允许接近零，并且表面上有电荷密度ρ_s。

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$



电通量分别只通过底面和顶面进入和流出：

$$D_{N1}\Delta S - D_{N2}\Delta S = \Delta Q = \rho_S \Delta S$$

得到：

$$\boxed{D_{N1} - D_{N2} = \rho_S}$$

若电荷密度为0，则：

$$\boxed{D_{N1} = D_{N2}}$$

更一般的形式为：

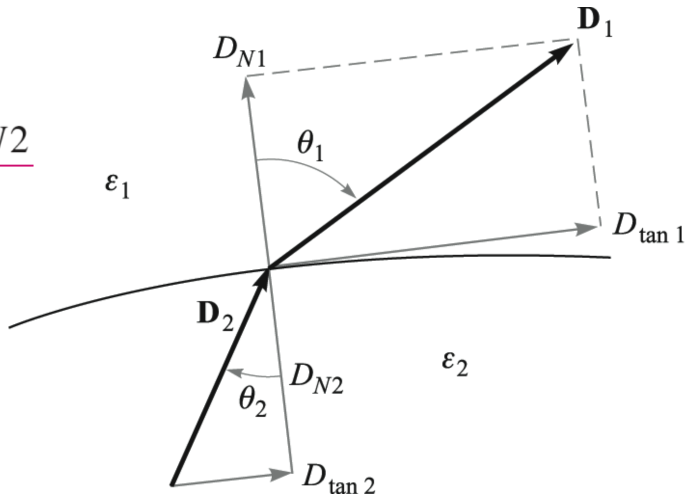
$$\boxed{(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_S}$$

5.8 理想电介质的边界条件

我们希望找到角度θ_1和 θ_2之间的关系，假设表面上没有电荷密度。

D 的法线分量在边界上将是连续的，因此：

$$D_{N1} = D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2 = D_{N2}$$



由于**E**切线方向分量在边界上是连续的，因此：

$$\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{D_1 \sin\theta_1}{D_2 \sin\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

得到： $$\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1 = \epsilon_1 D_2 \sin\theta_2$$

取两个划线方程的比率，最终得到。

$$\boxed{\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$

例5.5 继续上节中**例5.4**的计算，已知自由空间中均匀电场$\mathbf{E}_{out} = E_0\boldsymbol{a}_x$，求聚四氟乙烯（$\varepsilon_r = 2.1$）平板中的电场**E**。

解：在聚四氟乙烯板内部，由分界面的D_N的连续性，可得：

$$\mathbf{D}_{in} = \mathbf{D}_{out} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$$

因此：$\mathbf{E}_{in} = \mathbf{D}_{in}/\epsilon = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x/(\epsilon_r \epsilon_0) = 0.476 E_0 \mathbf{a}_x$

利用：$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 可得到板内极化场：

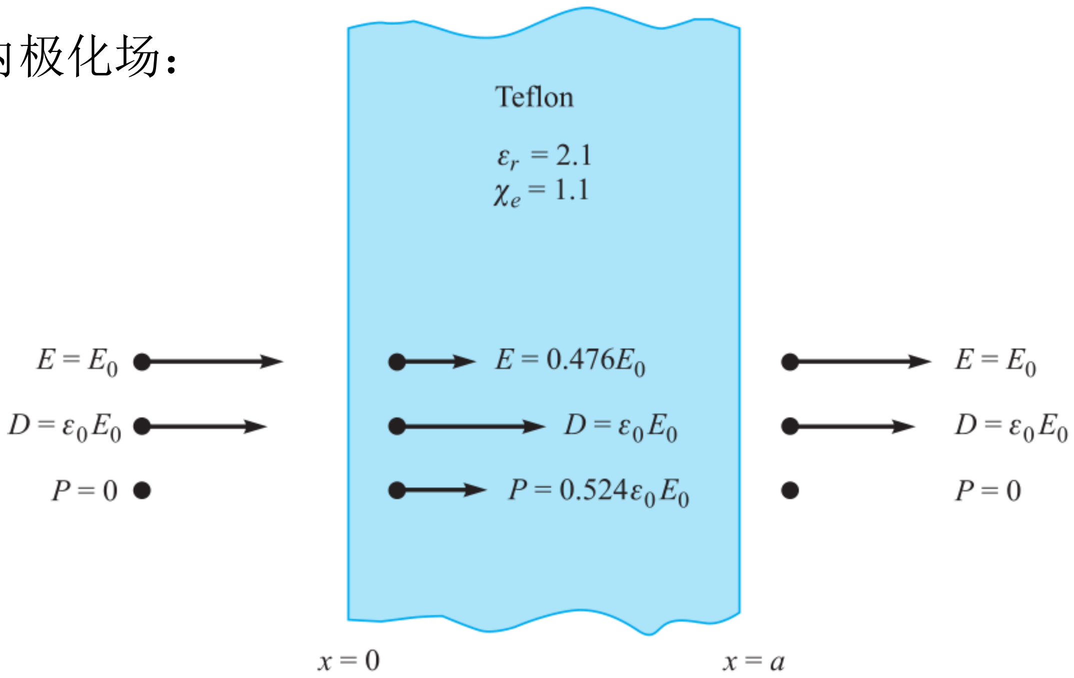
$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{in} &= \mathbf{D}_{in} - \epsilon_0 \mathbf{E}_{in} \\ &= \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x - 0.476 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x \\ &= 0.524 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x\end{aligned}$$

汇总得：

$$\mathbf{D}_{in} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$

$$\mathbf{E}_{in} = 0.476 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$

$$\mathbf{P}_{in} = 0.524 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$



习题 5.5 - 5.8

5.20, 5.24, 5.28, 5.34

课后习题：5.3, 5.12, 5.16, 5.28, 5.32