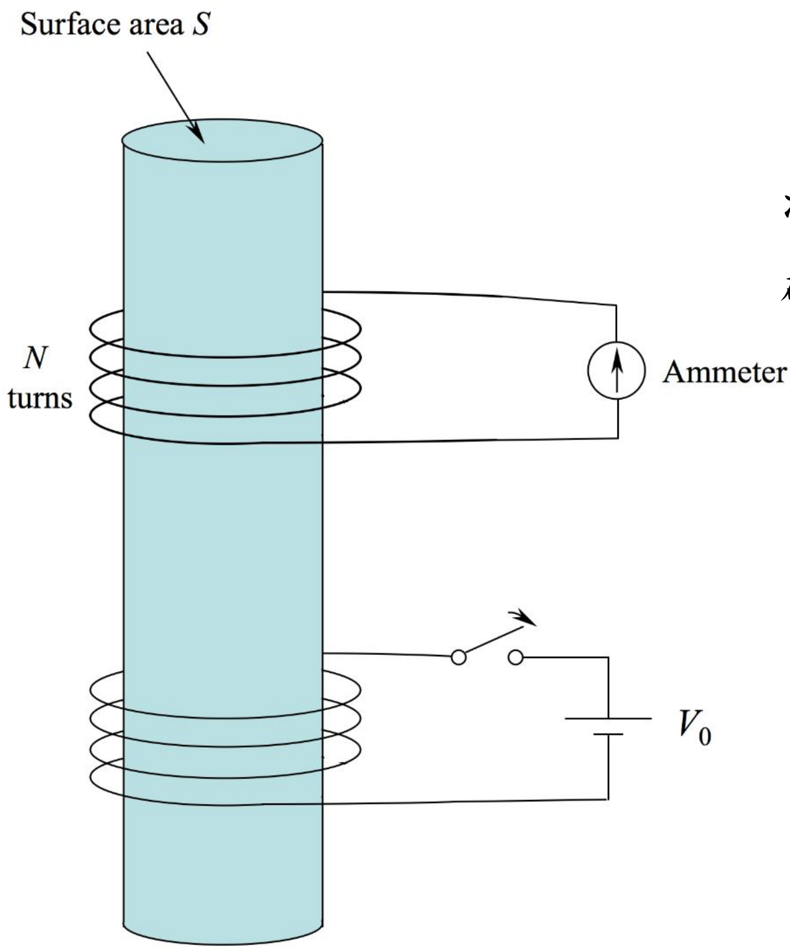
第 9 章

电磁场与电磁波

时变电磁场和麦克斯韦方程

Time-Varying Fields and Maxwell's Equations

9.1 法拉第定律 FARADAY’S LAW

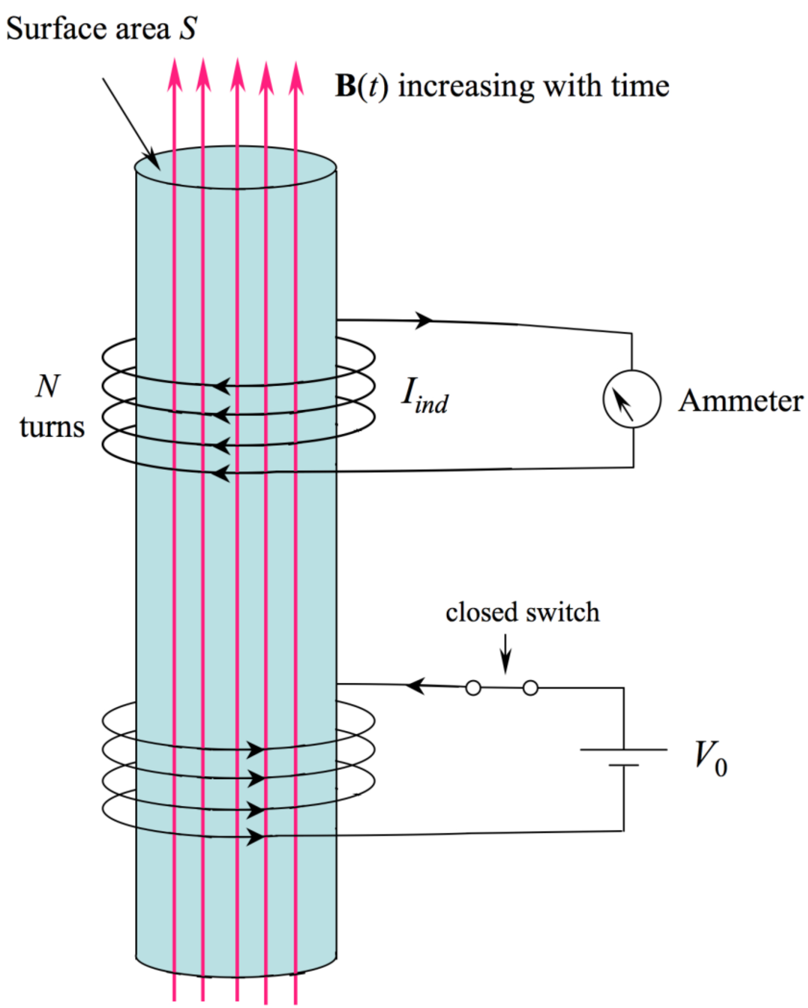


法拉第电磁感应实验

法拉第的问题：如果电流能产生磁场，那么磁场能产生电流吗？

法拉第为回答该问题设计了这样的实验。两组线圈绕在共用铁芯上。 在下方的线圈中，通过闭合开关产生电流。 在上面的线圈中，任何感应电流都由电流表记录。

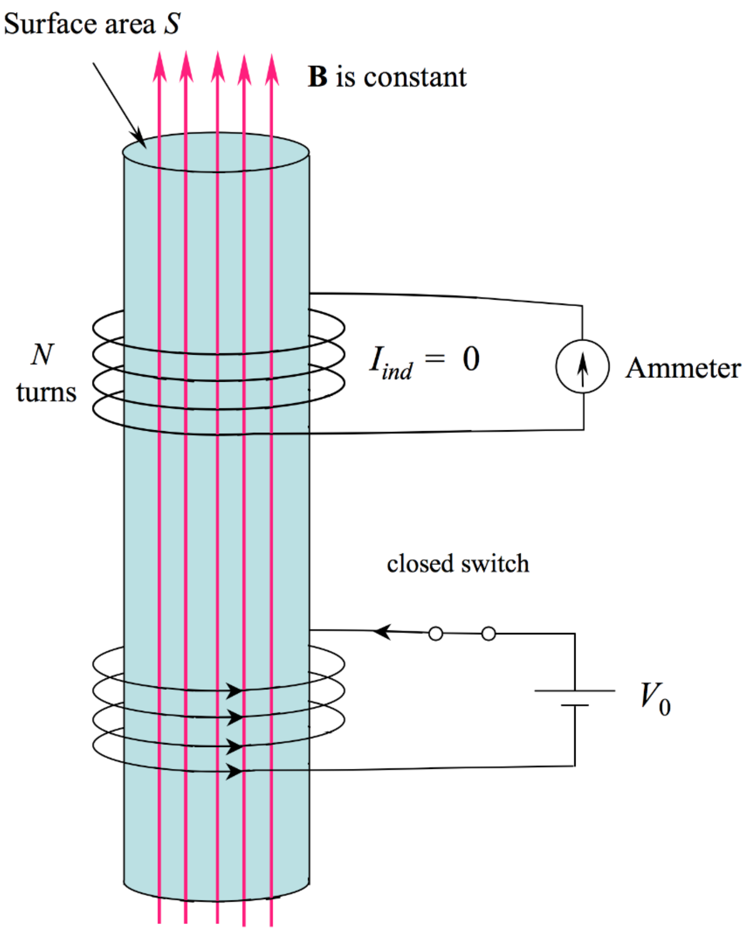
9.1 法拉第定律 - 法拉第电磁感应实验



闭合开关会导致下方线圈中的电流随时间增加，并产生时变的磁通量密度 **B** 与上方线圈交链。在 **B** 随时间增加的阶段，在上方线圈的电流表中可检测到感应电流 I_{ind}。注意图中感应电流的方向和电流表的位置。

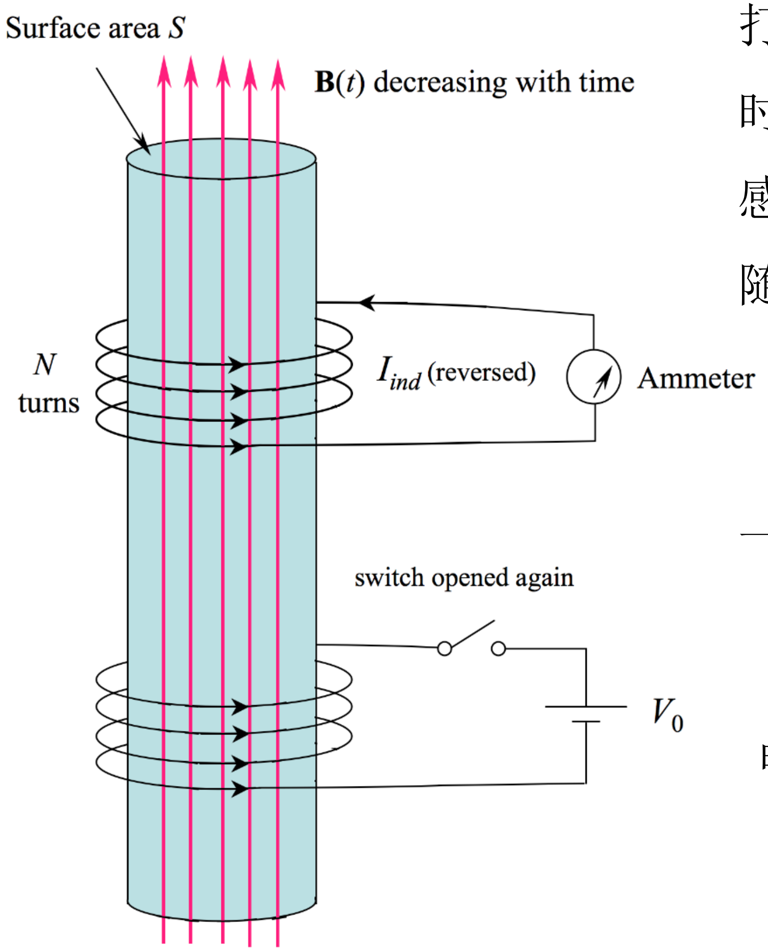
感应电流与磁通量（**B** 对 S 的表面积分）的时间变化率成正比。

9.1 法拉第定律 - 法拉第电磁感应实验



一旦下方电路达到稳态，那么其中的 **B** 将为恒定值，此时则发现感应电流为零。

9.1 法拉第定律 - 法拉第电磁感应实验

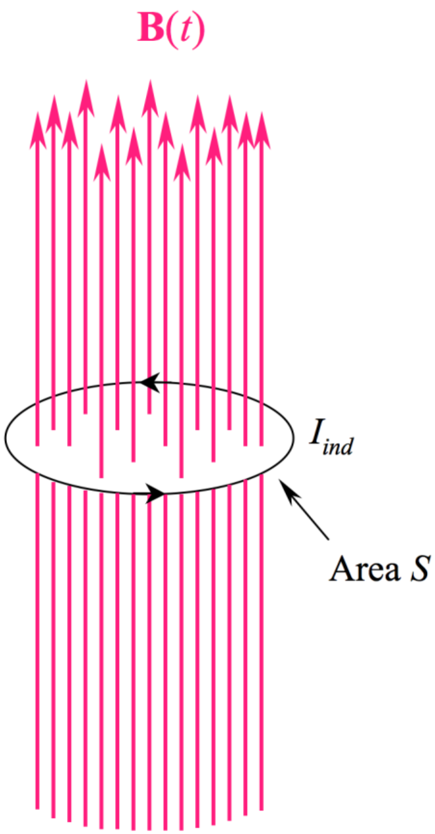


打开开关会导致电流在下方线圈中的电流随时间降低，磁通密度 **B** 减少，而上方线圈的感应电流 I_{ind} 与之前相反。只要磁通量还在随时间减小，该电流就存在。

一旦 **B** 完全减少到零，感应电流也为零。

电磁感应的应用：发电机、升降压、无线充电

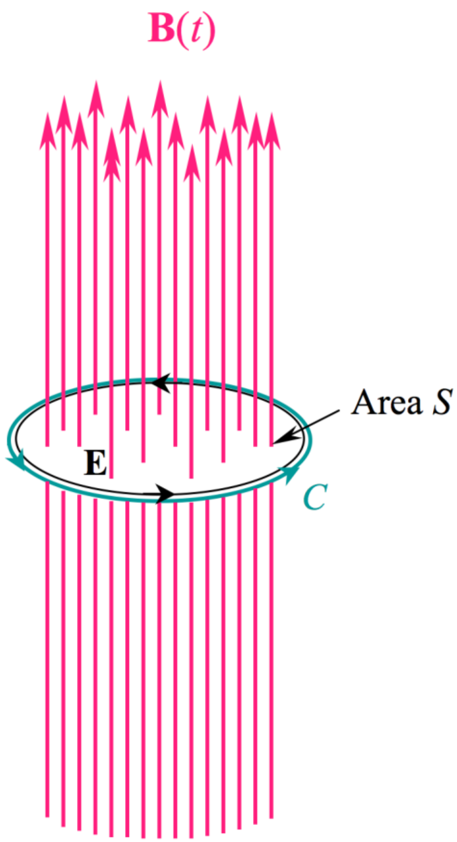
9.1 法拉第定律



考虑一匝导线，其中存在外部施加的磁通量，且磁通量随时间变化。

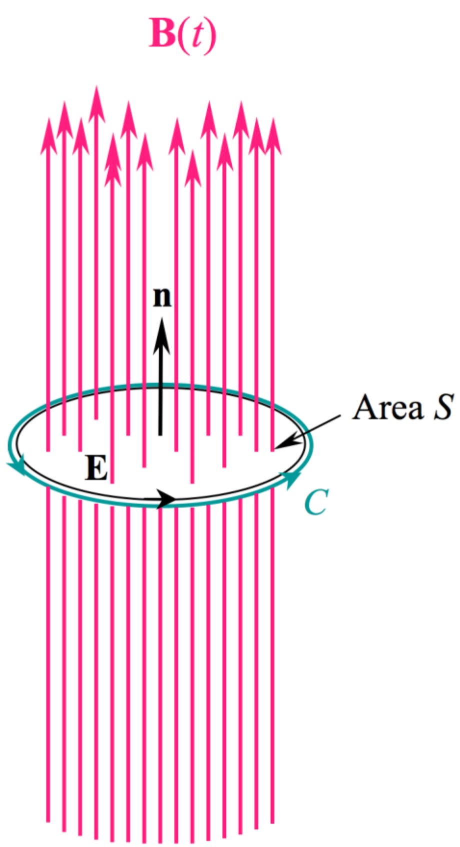
由于磁通量的变化，线圈中会产生电流 I_{ind}。

9.1 法拉第定律



导线中的电流是由电场 **E** 产生，它推动导线内的电荷运动形成电流。 将图中的导线移除，而电场仍然存在，图中的积分路径 C 与 **E** 重合。

9.1 法拉第定律

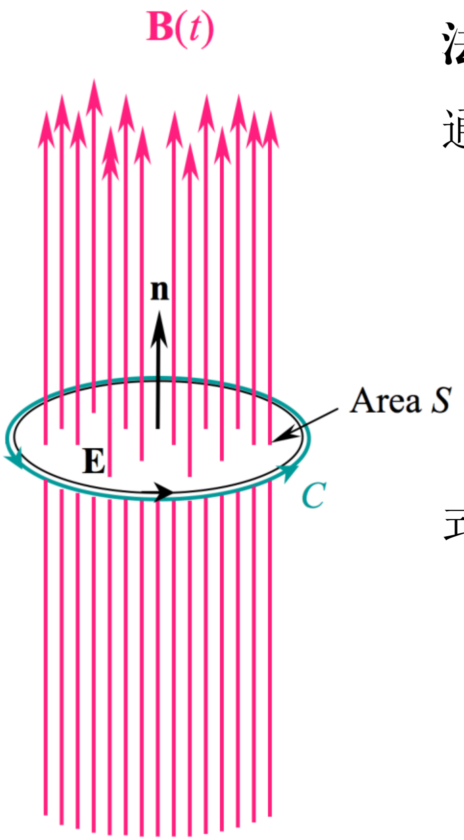


表面 S 的单位法向量为 $\mathbf{n}$。 $\mathbf{n}$ 的方向由积分路径 C 按右手规则定义：四个手指绕着 C 的方向弯曲，右手拇指指向 $\mathbf{n}$ 的方向

电动势 *emf* 定义为 $\mathbf{E}$ 沿着路径 C 的闭合曲线积分：

$$\text{emf} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

9.1 法拉第定律



法拉第感应定律指出，闭合路径周围的感应电动势 *emf* 等于通过该路径所包围区域的磁通量的时间变化率：

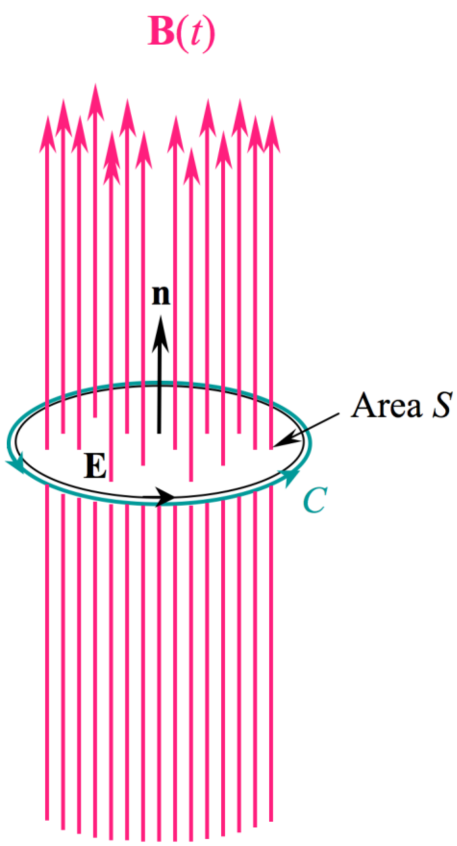
$$\boxed{\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

式中的磁通量为：

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B}\cdot \mathbf{n}\, da$$

注意这里使用了单位法向量，它决定了磁通量的符号，最终决定了电动势

9.1 法拉第定律



在这种情况下，根据电动势和磁通量的定义：

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

得到：

$$\boxed{\mathrm{emf} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da}$$

9.1 法拉第定律 - 点形式

首先，将对时间的微分移入最右边积分内：

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

其次，用斯托克斯定理将 **E** 的线积分改写为其旋度的表面积分：

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

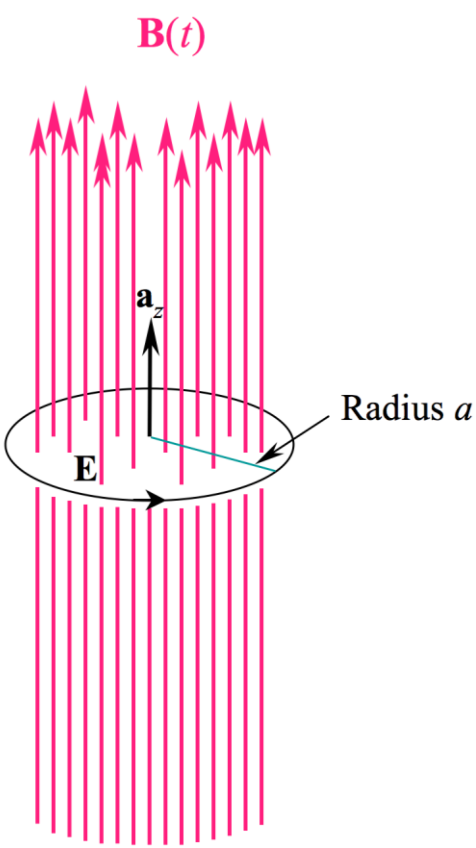
注意到两个积分都针对同一表面，从而进行简化：

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

最后，得到法拉第感应定律的点形式：

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

9.1 法拉第定律 – 计算时变磁场产生的电场



对于一个均匀分布但随时间变化的的磁场：

$$\mathbf{B} = B_0 e^{kt}\mathbf{a}_z$$

根据法拉第感应定律：

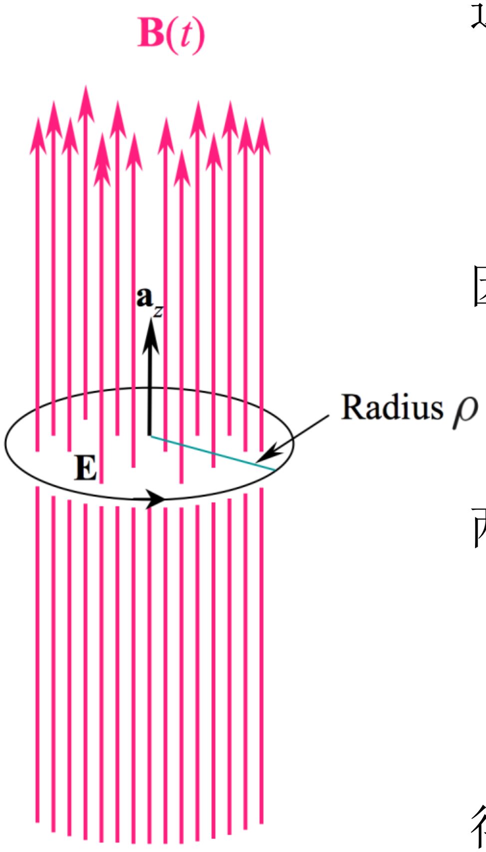
$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = 2\pi a E_\phi$$

$$= -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = -kB_0 e^{kt}\pi a^2$$

这个计算过程适用于任何半径的环路，那么可以用可变半径 ρ 替换固定半径 a 得：

$$\mathbf{E} = -\tfrac{1}{2}kB_0 e^{kt}\rho\mathbf{a}_\phi$$

9.1 法拉第定律 - 计算时变磁场产生的电场另一种解法



这次换用法拉第感应定律的点形式来计算 **E**：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{式中：} \quad \mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z$$

因而有：

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -kB_0 e^{kt} = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho}}_{\text{仅存径向变化的 } z \text{ 轴方向旋度分量}}$$

书上公式（7.25）

两边乘以 ρ 并对 ρ 积分得：

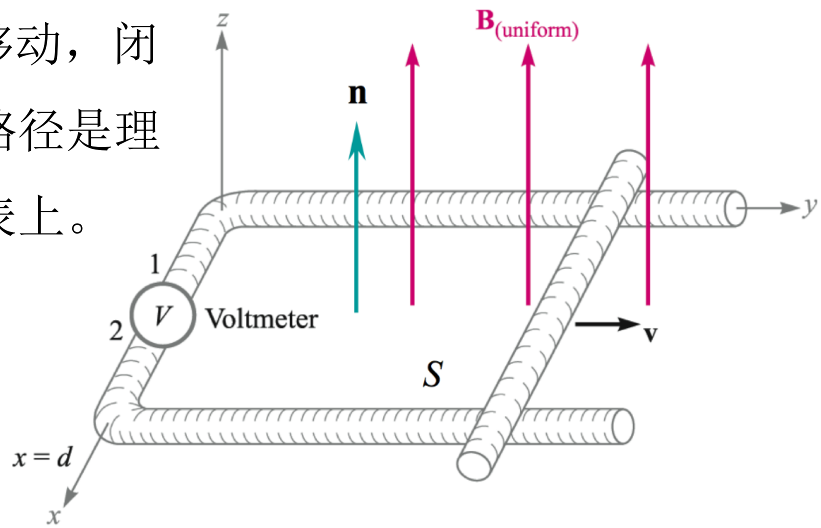
$$-\tfrac{1}{2}kB_0 e^{kt}\rho^2 = \rho E_\phi$$

得到同样的电场：

$$\mathbf{E} = -\tfrac{1}{2}kB_0 e^{kt}\rho \mathbf{a}_\phi$$

9.1 法拉第定律 – 移动路径的电动势

如图，由于长度为 d 的滑杆以恒定速度 v 移动，闭合路径内的磁通量随时间增加。假定导电路径是理想的，因此感应电动势完整的出现在电压表上。



导电路径所包围的磁通量为：

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da$$

$$\Phi = Byd$$ 式中 y 随时间变化

因此： $$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt}d = -Bvd$$

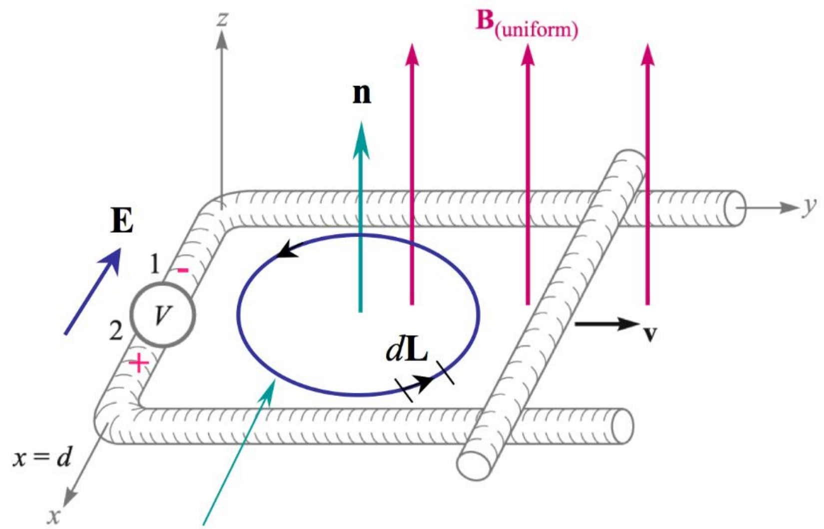
9.1 法拉第定律

已求得：

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -Bvd$$

E 的积分路径方向由右手法则确定（四个手指绕向闭合路径方向，右手拇指指向 **n** 的方向），而$d\mathbf{L}$的方向如图所示。

从等式中可见 $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$ 为负，这意味着 **E** 将从电压表2端指向1端。 传电路径是理想的，因此 **E** 将仅存在于电压表上。



右手法则确定 **E** 通过导体积分路径的方向

9.1 法拉第定律

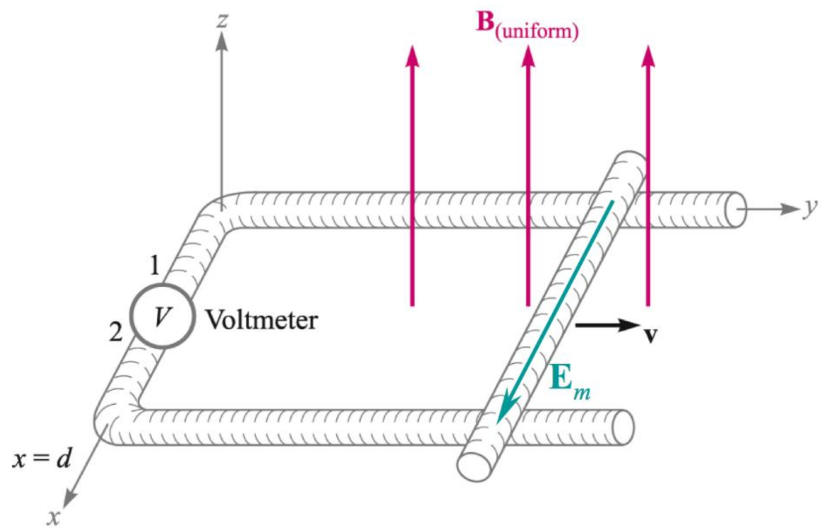
滑杆包含自由电荷（电子），它们在穿过 **B** 场时会受到洛伦兹力：

回顾: $\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

有: $\dfrac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

这个结果称为动生电场强度：

$$\boxed{\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}}$$



因此动生电动势是 $\mathbf{E}_m$ 在与以前相同的路径上的闭合路径积分：

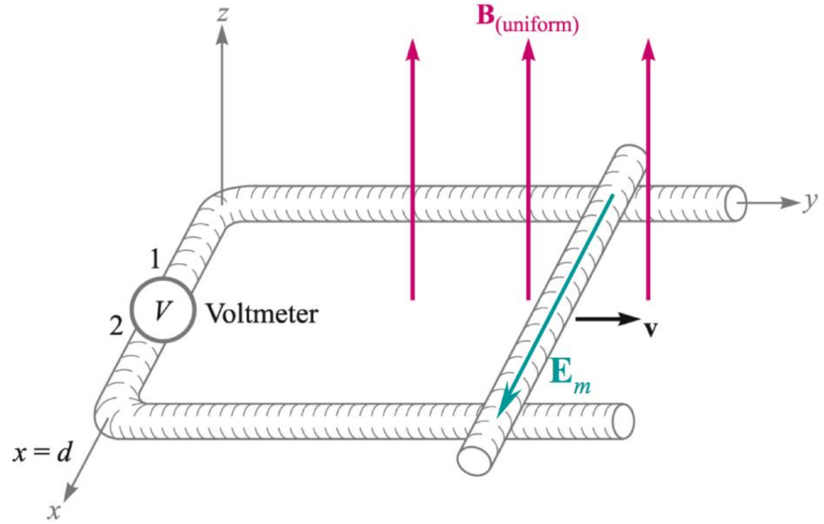
$$\boxed{\text{emf} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}}$$

注意，动生场强仅存在于运动中的电路部分

9.1 法拉第定律

已知动生电动势为：

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$



当前的问题中变成：

$$\underbrace{\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}} = \int_d^0 vB\,dx = \underline{-Bvd}$$ 得到和前面相同的结果

路径积分是根据右手规则确定，
决定了这里的积分上下限顺序

9.1 法拉第定律

对于均匀恒定磁场中运动的导电路径，电动势完全由动生电动势组成：

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

当 **B** 也随时间变化时，则需要考虑这两种作用对总电动势的共同影响：

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \underbrace{\underbrace{-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{变压器电动势}} + \underbrace{\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}}_{\text{动生电动势}}}$$

上式也可以简化为：

$$-\frac{d\Phi}{dt}$$

9.2 位移电流 DISPLACEMENT CURRENT

已得到电场和磁场与旋度相关的两个方程：

$$\underbrace{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}_{\text{法拉第感应定律}} \quad \text{与} \quad \underbrace{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}}_{\text{安培环路定律}}$$

取第二个方程的散度，得到一个恒为零的结果：

$$\underline{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}}$$

然而，这与电流连续性方程不一致： $\underline{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}$ 问题出在什么地方？

9.2 位移电流

假如在安培定律的右侧添加一个未知项 **G**： $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\mathbf{G}$

其含义待明确

再次对上式求散度： $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{H}\equiv 0=\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{J}}_{-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}}+\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{G}}_{\frac{\partial\rho_v}{\partial t}}$

电流连续性方程

必须为这个值

用 **D** 表示：$\nabla\cdot\mathbf{G}=\dfrac{\partial\rho_v}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{D})=\nabla\cdot\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

可得： $\boxed{\mathbf{G}=\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}}$

G 称为位移电流密度

安培环路定律修正为： $\boxed{\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}}$

9.2 位移电流

新的结果表明总电流由传导电流和位移电流组成： $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$

其中位移电流密度为： $\mathbf{J}_d = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

传导电流密度为： $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 欧姆定律

若没有传导电流且电场随时间变化时： $\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{if } \mathbf{J} = 0)$

注意上式与法拉第定律的对称性： $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

9.2 位移电流 - 安培环路定律中的位移电流

通过选取适当的表面进行积分，可以通过位移电流密度计算得位移电流：

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

对安培环路定律的旋度方程进行积分得：

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

将斯托克斯定理应用于左侧，可得到熟悉的安培环路定律，但增加了位移电流项：

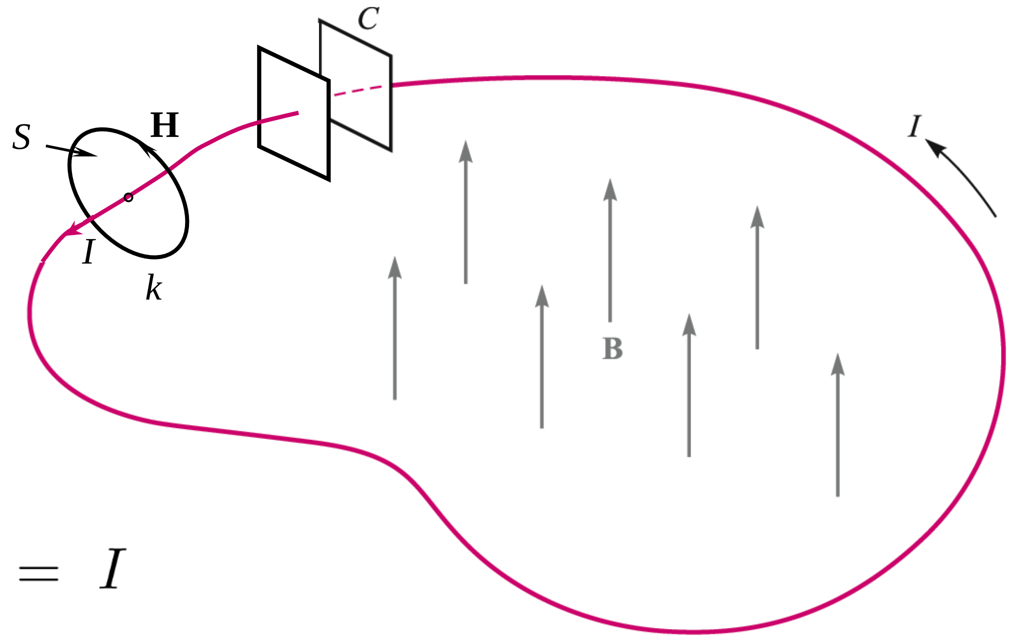
$$\boxed{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}}$$

9.2 位移电流 - 位流电流的物理意义

图中的电流回路包含一根细导线和平行板电容器，回路内部有一个时变的磁场

假定磁场随时间变化，因此它产生电动势，电动势又产生电流

暂时假设导线中存在传导电流 I，那么安培定律适用于图中的圆形路径由于，选取的环路半径与此处的导线长度相比非常小。 因此，可以认为此处的导线很长且直，从而可得：

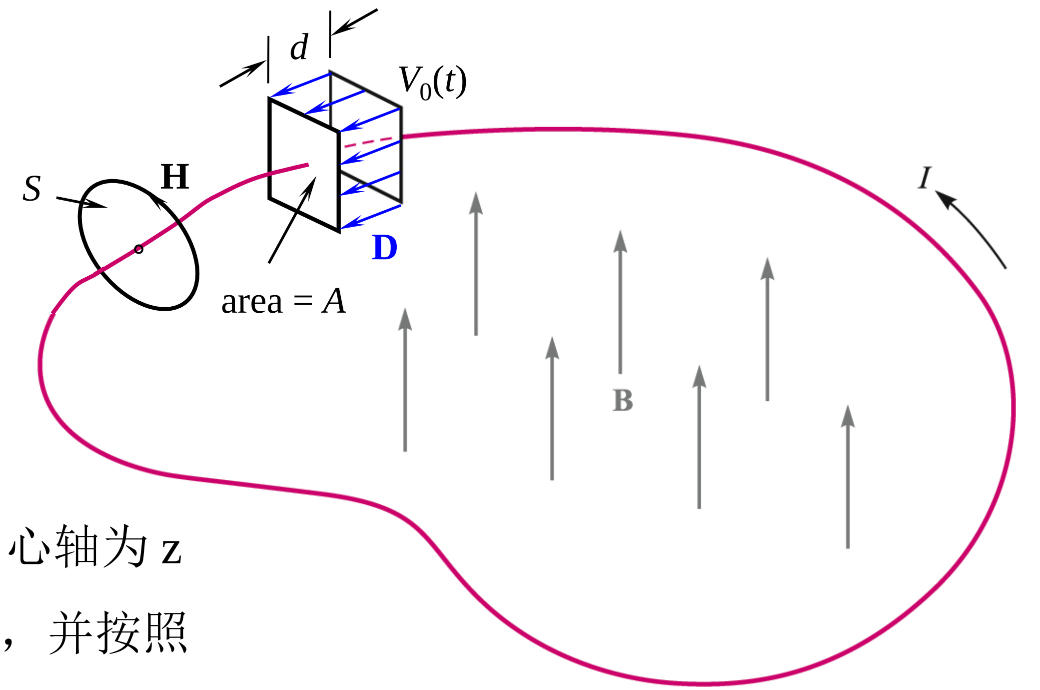


$$\oint_k \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = I$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

积分面是周长为 k 的圆形路径，z 轴方向为电流的方向

9.2 位移电流 - 位流电流的物理意义



当电流流动时，电容器中的电场将随时间变化，与电流沉积的平板电荷水平同步

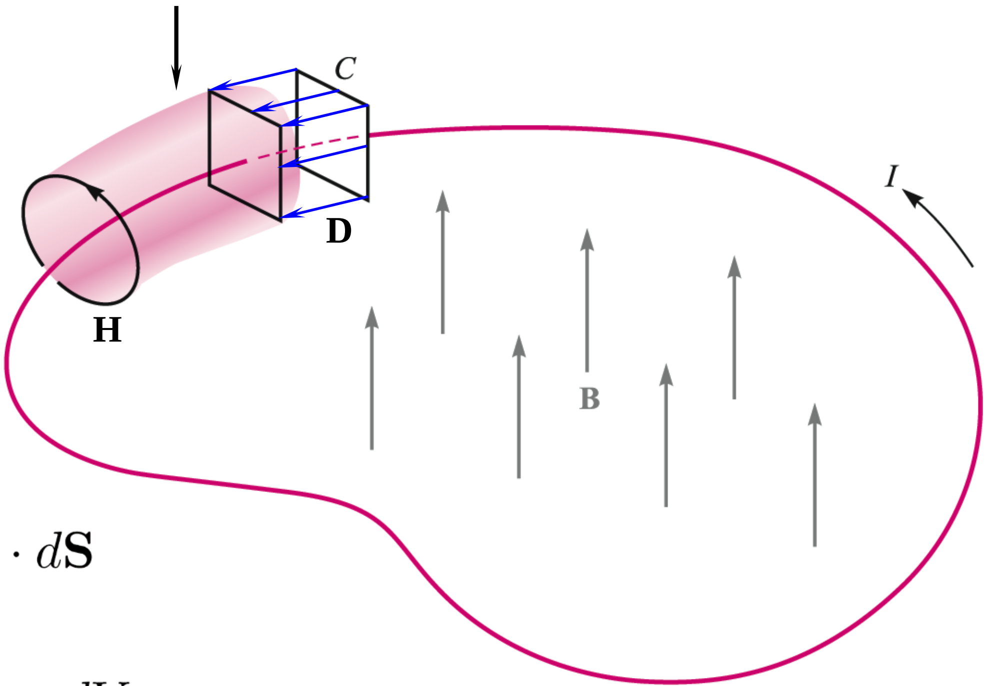
电容器电压为 $V_0(t)$，以电容器中心轴为 z 轴，且使用自由空间的介电常数，并按照图示的电容尺寸，可计算得其中随时间变化的电通量为：

$$\Phi_e = \int\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\epsilon_0 A V_0(t)}{d}$$

9.2 位移电流 - 时变电场等效电流即位移电流

拉伸的表面现在能够拦截电场线，并且没有传导电流

现在假设被原来的轮廓 k 所包围的表面 S 拉伸，使其能够截获电容器板之间的电场：



再次应用安培环路定律，但这次需要使用电容器中的位移电流：

$$\oint_k \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = I_d = \int\int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \frac{d\Phi_e}{dt} = \left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)\frac{dV_0}{dt} = C\frac{dV_0}{dt}$$

结果必定与选择的表面无关，从而得出传导电流和位移电流必须相等的结论：

$$\boxed{I = C\frac{dV_0}{dt}}$$

熟悉的式子！

9.3 微分形式的麦克斯韦方程组
MAXWELL'S EQUATIONS IN POINT FORM

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$ 安培环路定律

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ 法拉第感应定律

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$ 电场中的高斯定律

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$ 磁场中的高斯定律

9.3 微分形式的麦克斯韦方程组 - 口诀
MAXWELL'S EQUATIONS IN POINT FORM

电磁学

英·麦克斯韦

法拉感应磁生电

安培环路电生磁

高斯定律皆散度

电通为 ρ 磁通零

9.4 积分形式的麦克斯韦方程组 -安培环路定律
MAXWELL'S EQUATIONS IN INTEGRAL FORM

取点形式方程的曲面积分：

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}_{I} + \underbrace{\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}}_{I_d}$$

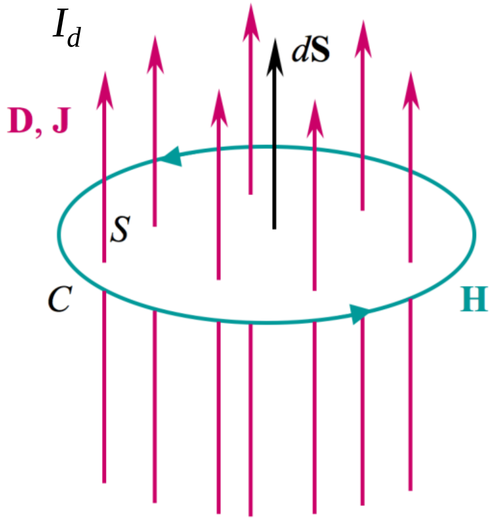
将斯托克斯定理应用于左侧：

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}_{mmf} = I + I_d$$

安培环路定律

式中：

$$I_d = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$



使用右手规则确定路径方向和法向量的关系

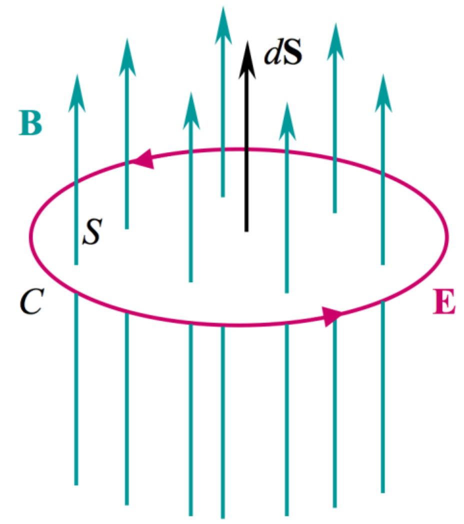
9.4 积分形式的麦克斯韦方程组 – 法拉第感应定律

取点形式方程的曲面积分：

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

将斯托克斯定理应用于左侧：

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}_{\text{emf}} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$



使用右手规则确定路径方向和法向量的关系

9.4 积分形式的麦克斯韦方程组 – 电场高斯定律

由： $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ 两边对体积 v 进行积分：

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv = \int_v \rho_v\, dv = Q_{encl}$$

将散度定理应用于左侧：

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{encl}}$$

9.4 积分形式的麦克斯韦方程组－磁场高斯定律

由： $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 两边对体积 v 进行积分：

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{B}\, dv = 0$$

将散度定理应用于左侧：

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0}$$

9.5 推迟位 THE RETARDED POTENTIALS

回顾电位和磁矢位

前面已定义了无时间变化条件下的标量电位和矢量磁位

标量电位（满足泊松方程）为：

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \quad \text{(static)} \qquad \nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

矢量磁位为：

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}\, dv}{4\pi R} \quad \text{(dc)} \qquad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

已知 V, 可计算 **E**: $\mathbf{E} = -\nabla V \quad \text{(static)}$

已知 **A**, 可计算 **B**: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{(dc)}$

9.5 推迟位 - 与时变场麦克斯韦方程不一致

两边取旋度： $\mathbf{E} = -\nabla V$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \underbrace{\nabla \times (-\nabla V)}_{\text{该式恒为0!}} = \underbrace{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}_{\text{该式不为0}}$$

对原方程进行修正，添加一项 $\mathbf{N}$ 场：

$$\mathbf{E} = -\nabla V + \mathbf{N}$$

再来计算旋度：

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 + \nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

9.5 推迟位 - 与时变场麦克斯韦方程不一致

已有： $\nabla \times \mathbf{E} = 0 + \nabla \times \mathbf{N} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

式中： $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

因此： $\nabla \times \mathbf{N} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$

或： $\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{N} = -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

修正后的适用于时变 $\mathbf{E}$ 的表达式：

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$

9.5 推迟位 - 验证是否满足其它麦克斯韦方程

现在必须验证： $\mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 满足其他麦克斯韦方程

为此，首先将方程代入另一个麦克斯韦旋度方程（安培环路定律）：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

使用：$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \end{cases}$

得到：

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} + \epsilon\left(-\nabla\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

9.5 推迟位 - 满足安培环路定律

已有：

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{J}+\epsilon\left(-\nabla\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

使用矢量恒等式：

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

得到：

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\mu\mathbf{J}-\mu\epsilon\left(\nabla\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

9.5 推迟位 - 满足高斯定律

接着： $\mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

必须满足： $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ 式中： $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

代入后得到：

$$\epsilon\left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A}\right) = \rho_v$$

最终得到： $\nabla^2 V + \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\dfrac{\rho_v}{\epsilon}$

9.5 推迟位 - 整合结果

$\mathbf{A}$ 与 V 之间的关系，根据安培环路定律有：

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \mu\epsilon\left(\nabla\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

根据高斯定律有：

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho_\nu}{\epsilon}$$

9.5 推迟位 - 洛伦茨规范条件

若要完全确定一个矢量场，必须同时给定其散度、旋度以及它在某个点（可能位于无穷远）的值。已指定矢量位 **A** 的旋度为 **B**，所以现在可以自由地指定散度，以使方程在实际情况下合理且可解。因此，可以任意地规定A的散度。为了便于简化上页中的两个式子。

鉴于上述原因，将 **A** 的散度指定如下：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}$$

该式称为洛伦茨规范条件，这种规范具有洛伦兹不变性

丹麦物理学家路德维希·洛伦茨（Ludvig Lorenz）

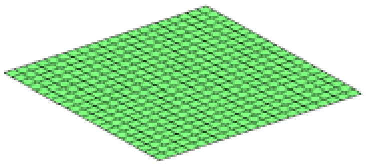
荷兰物理学家亨德里克·洛伦兹（Hendrik Lorentz）

9.5 推迟位 - 波动方程

根据洛伦茨规范条件： $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \dfrac{\partial V}{\partial t}$

这两个方程通过以下方式简化：

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu\epsilon\left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$



变为： $\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}}$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

变为： $\boxed{\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\epsilon} + \mu\epsilon \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}}$

达朗贝尔方程

这些都是波动方程，它们的解为传播函数，此主题将在后续章节中详细讨论

9.5 推迟位 - 对电位和磁矢位的修正

时变场的最终效果是，它的影响（电位、力或它们的存在）将在一段时间延迟后被感觉到。该延迟与场源和观察点之间的距离成正比，代表着“扰动”在这两点之间传播所需的时间。因此，需要对以前标量位和矢量位的积分式进行修正，以便用更简单的方式表示这种延迟。

静态位　　　　推迟位

$$V = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \quad \longrightarrow \quad V = \int_{vol} \frac{\rho_v (t - R/v_p)}{4\pi\epsilon R} dv$$

$$\mathbf{A} = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}\, dv}{4\pi R} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A} = \int_{vol} \frac{\mu \mathbf{J} (t - R/v_p)}{4\pi R} dv$$

v_p 是“传播速度”（不要与体积混淆）

V 和 $\mathbf{A}$ 现在是传播函数。

式中的括号项：$(t - R/v_p)$ 表示距离 R 越远，感受到电位的延迟时间 t 越长。

习题

课堂：9.4, 9.12
课后：9.1, 9.3, 9.5

在黑板上
写下正确的
麦克斯韦方程组