2017－2018 学年 第一学期期末试卷

学号__________　　　　姓名___________　　　　成绩__________

考试日期：2017 年 12 月 26 日

考试科目：《 矩阵论》

一、　填空题 （2 分×10）

1）若 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=0$，则 $\mathbf{A}$ 相似于($\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ 或者 $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$)。

2） $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&1&2\\0&b&1\\0&0&c\end{pmatrix}$, $A\otimes B$ 为

（ $\begin{bmatrix}3B&B\\0B&3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a&3&6&a&1&\\0&3b&3&0&b&\\0&0&c3&0&0c&\\0&0&0a&3&3&\\0&0&0&0&b3&\\0&0&0&0&0&c\end{bmatrix}$ ），

$A\otimes B$ 的特征值为($3a,3b,3c$) 。

3）已知 $X=(1,8,9,3-4j)$**，其中** j **为虚数单位，则** $\|X\|_1$ **=（ 23 ），**

$\|X\|_2$ **=（** $\sqrt{171}$ **），** $\|X\|_\infty$ **=（ 9 ）。**

4）已知 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}$**，则** $\|A\|_1$ **=（ 4 ），** $\|A\|_2$ **=（** $\sqrt{\dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}}$ **），**

$\|A\|_\infty$ **=（ 4 ）。**

5）若 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$ **，** $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$**，其中** $\alpha_1=(1,0,0,1)$**，** $\alpha_2=(0,1,0,1)$**，**

$\beta_1=(1,1,1,0)$**，** $\beta_2=(0,0,0,1)$**，则** V_1+V_2 **的维数为（ 3 ）。**

二、　（10 分）设 A 是 5 阶方阵，且 $\lambda I-A$ 等价于准对角阵：

$$D=diag\left\{\lambda^2-1,\ (\lambda-2),\ (\lambda-2)^2,\ 1,\ 1\right\}$$

写出 $\lambda I-A$ 的初等因子，不变因子，A 的最小多项式，A 的 Jordan 标准形。

解：（1）D 的初等因子为 $\lambda-1,\lambda+1,\lambda-2,(\lambda-2)^2$；

（2）D 的不变因子为 $\mathrm{d}_5=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$， $\mathrm{d}_4=\lambda-2$， $d_3=d_2=d_1=1$；

（3）A 的最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$

（4）A 的 Jordan 标准形为：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

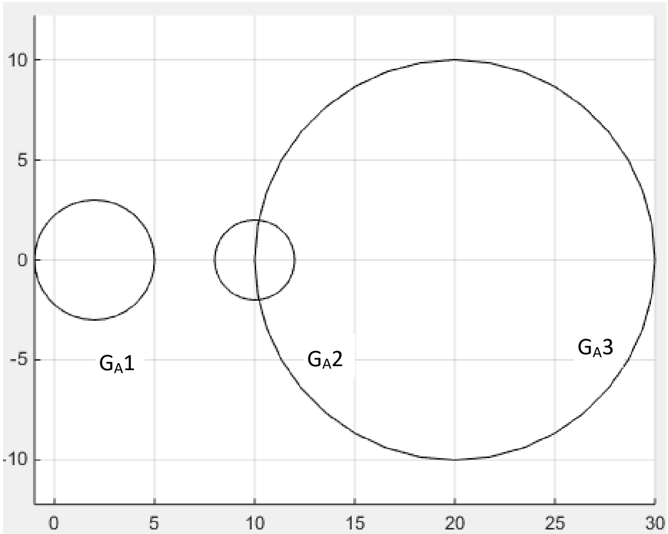
注意：只要这几块有就可以，顺序可以调换

三、　　（10 分）由盖尔定理隔离 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & -1 \\ 8 & 2 & 20 \end{pmatrix}$ 的特征值（要求画图表示）。

解：A 的盖尔圆为

$G_A1: |z-2| \le 3, G_A2: |z-10| \le 2, G_A3: |z-20| \le 10$

A 的盖尔圆如下图所示

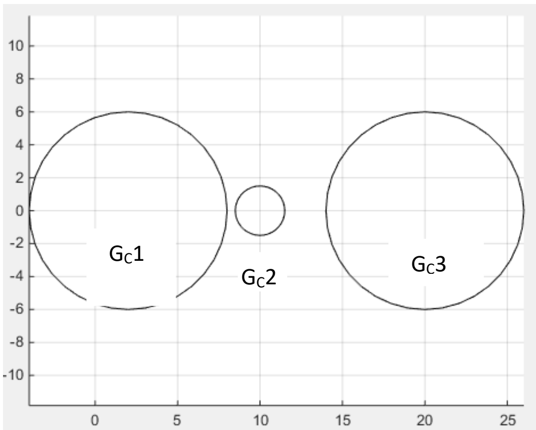


取 $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 令 $C = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1/2 & 10 & -1 \\ 4 & 2 & 20 \end{pmatrix}$

所以 C 的盖尔圆为

$G_C1: |z-2| \le 6, G_C2: |z-10| \le 3/2, G_C3: |z-20| \le 6$

C 的盖尔圆如下图所示



四、 （10 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$，求（1）A 的值域的维数（2）A 的核。

解：

$$A \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A 的值域的维数为 3，A 的核的维数为 2。

核就是求解以 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$为系数矩阵的齐次方程组的解空间，只要能写出这个部分，并且求出核的维数为 2 就不减分了。

五、　　（10 分）求$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的 QR 分解

解：$A=(x_1,x_2,x_3)(rank(A)=3)$，$x_1=(2,0,2)^T$，$x_1=(2,2,1)^T$，$x_1=(1,2,2)^T$，故由 Gram_Schmidt 正交化有

$$y_1=x_1=(2,0,2)^T$$

$$y_2=x_2-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=(2,2,1)^T-\frac{4+0+2}{4+0+4}(2,0,2)^T=(\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T$$

$$y_3=x_3-\frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2-\frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=(1,2,2)^T-\frac{\frac{1}{2}+4-1}{\frac{1}{4}+4+\frac{1}{4}}(\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T-\frac{2+0+4}{4+0+4}(2,0,2)^T$$

$$=(-\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9})^T$$

求其单位向量后有

$$\|y_1\|=2\sqrt{2}，\|y_2\|=\frac{3\sqrt{2}}{2}，\|y_3\|=\frac{4}{3}$$

则单位化后有

$$z_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T，z_2=(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{6})^T，z_1=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$$

令$Q=(z_1,z_2,z_3)$，则

$$R=\begin{bmatrix} \|y_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|y_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|y_3\| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)} & \frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)} \\ 0 & 1 & \frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

故

$$A=QR=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

六、 （15 分）作业

验证下列方程是不相容的，并用 A^+ 表示 $Ax = b$ 的通解。

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（2）解：方程的增广矩阵为

$$[A\vdots b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r4-4r1]{\substack{r2-2r1 \\ r3-2r1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r3-2r2]{r3 \leftrightarrow r4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故 $r(A\vdots b) = 3 \neq r(A) = 2$，故可知方程不相容。

故可得其关于 A^+ 的极小最小二乘解为

$$x = A^+ b$$

故从上式可得 A 的满秩分解为

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

从而

$$A^+ = G^H (GG^H)^{-1} (F^H F)^{-1} F^H \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & -0 & 2 \\ 5 & -2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

带入公式即可。

七、 (15) 设 $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 4 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 8\end{pmatrix}$，$b(t)=\begin{pmatrix}e^{9t}\\ e^{9t}\\ 0\end{pmatrix}$，$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}$，

（1） 计算 e^{At}.

解：A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=\lambda(\lambda-9)^2$

取 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$，设 $f(\lambda)=\varphi(\lambda)\mathrm{g}(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$

则

$$f(0)=1=c$$
$$f(9)=e^{9t}=81a+9b+c$$
$$f^{'}(9)=te^{9t}=18a+b$$

解得 $a=\frac{1}{9}te^{9t}-\frac{1}{81}e^{9t}+\frac{1}{81}$

$$b=-te^{9t}+\frac{2}{9}e^{9t}-\frac{2}{9}$$

$$c=1$$

$$e^{At}=\frac{1}{9}(e^{9t}-1)A+I$$

（2）应用矩阵函数方法求微分方程组 $\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)=\left(1,\quad 0,\quad 2\right)^T$ 的解.

解： $\boldsymbol{x}=e^{(t-t_0)\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_0+e^{t\boldsymbol{A}}\int_{t_0}^{t}e^{-s\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(s)ds$

$$x==\begin{bmatrix}(e^{9t})\\ 0\\ 2e^{9t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\ t\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t+e^{9t}\\ t\\ 2e^{9t}\end{bmatrix}$$

八、 (10) 作业

求解方程组$AX+XB=C$,其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

12.设$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -3 & 3\end{pmatrix}$,求解方程$AX-XB=C$.

解：

$$A\otimes I_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B^T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}, I_2\otimes B^T=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix},$$

$$\vec{C}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ -3\\ 3\end{pmatrix}$$

所以

$$A\otimes I_2-I_2\otimes B^T=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

原方程拉直等价于$\left(A\otimes I_2-I_2\otimes B^T\right)\vec{X}=\vec{C}$,即

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\vec{X}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ -3\\ 3\end{pmatrix}$$ 解得 $$\vec{X}=\begin{pmatrix}3/2\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1/2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$ （k 为常数）

所以$X=\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2018—2019 学年 《 矩阵论》期末试卷

学号__________　　　　姓名__________　　　　成绩__________

考试日期：2018 年 12 月 27 日

一、 填空题 （2 分×15）

(1) 若 $\mathbf{A}$ 为 4 阶幂等矩阵，且 $\mathbf{A}$ 的迹等于 2，则 $\mathbf{A}$ 相似于 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}$.

(2) 设 $\mathbf{A}$ 是 7 阶方阵，且 $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ 等价于对角阵：

$$\mathbf{D}=diag\left\{\lambda-2,\ \lambda+1, \lambda^2-1,\ (\lambda-2),\ (\lambda-2)^2,\ 1,\ 1\right\}$$

则 $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ 的初等因子为（$\lambda-2$，$\lambda-2$，$(\lambda-2)^2$，$\lambda+1$，　$\lambda+1$，$\lambda-1$）

$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ 的不变因子为 $d_7=(\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda-1)$，　$d_6=(\lambda-2)(\lambda+1)$，$d_5=(\lambda-2)$，

$d_4=d_3=d_2=d_1=1$

$\mathbf{A}$ 的最小多项式 $d_7=(\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda-1)$，　$\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}。$$

(3) 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，则 $\|\mathbf{Ax}\|_1=$ $\underline{\quad 8 \quad}$，$\|\mathbf{Ax}\|_2=$ $\underline{\sqrt{22}}$，

$\|\mathbf{Ax}\|_\infty=$ $\underline{\quad 3 \quad}$

(4) 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的从属于向量范数 $\|\mathbf{x}\|_1$ 的矩阵范数为 $\underline{\quad 4 \quad}$，

$\mathbf{A}$的谱半径为_____3_____，$\mathbf{A}^5$的谱半径为___15_______。

(5)按顺序写出 Moore-Penrose 方程

$$\begin{aligned} &AXA=A && \text{(i)} \\ &XAX=X && \text{(ii)} \\ &(AX)^H=AX && \text{(iii)} \\ &(XA)^H=XA && \text{(iv)} \end{aligned}$$

。

(6) 已知n阶矩阵$\mathbf{A}$可逆，设$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix}$，则$\mathbf{B}^+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & I\end{pmatrix}$。

(7)已知$\sin(\mathbf{A}t)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\sin 2t & 4\sin 2t-2\sin t & 2\sin 2t-4\sin t\\ 0 & 0 & 6\sin t\\ 0 & 6\sin t & 0\end{pmatrix}$，则$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$。

(8)设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2\\ 0.3 & 1\end{bmatrix}$，则矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^k}\mathbf{A}^k$是____收敛______（或者发散）的矩阵级数。

二、计算下列各题（10 分×4）

（1）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 定义 $T\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}$， $\forall \mathbf{x}\in C^2$ 。在 2−范数下, 计算 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的距离及 $T\mathbf{x}$ 与 $T\mathbf{y}$ 的距离，其中 $\mathbf{x}=(1,1)^T, \mathbf{y}=(2,2)^T$ 。

解： $\|x-y\|_2=\left[(1-2)^2+(1-2)^2\right]^{1/2}=\sqrt{2}$；

$$Tx=T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$Ty=T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

$$\|Tx-Ty\|_2=\left[(1-2)^2+(3-6)^2\right]^{1/2}=\sqrt{10}$$

（2）在欧式空间 R^4 中，对于任意两个向量

$$\alpha=(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4)^T，\beta=(y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4)^T，$$

规定 α 与 β 的内积为：$(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+4x_4y_4$。

已知 $\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 1,\quad 1)^T$，$\alpha_2=(-1,\quad -1,\quad 1,\quad 1)^T$，求 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 在欧式空间 R^4 中的正交补。

解：设 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 的正交补中的向量为 $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4)^T$，则

$(\alpha_1,x)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0$

$(\alpha,\beta)=-x_1-2x_2+3x_3y_3+4x_4y_4=0$

解方程组得：$x=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\-4\\3\end{pmatrix}$，

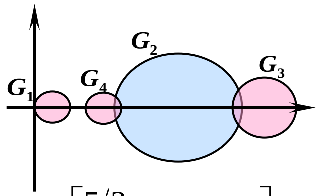
所以 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 为 $L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\\3\end{pmatrix}$

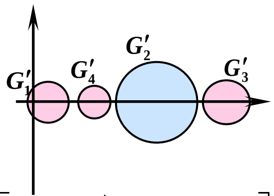
(3) 用盖尔圆定理隔离矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&9&1.3&-2\\1&0&15&1.4\\0&-1&0&4\end{bmatrix}$ 的特征值.（要求画图表示）

① $\boldsymbol{A}$ 的 4 个盖尔圆为

$G_1:|z-1|\le 1$； $G_2:|z-9|\le 4.3$； $G_3:|z-15|\le 2.4$； $G_4:|z-4|\le 1$

易见 G_1 孤立，而 G_2,G_3,G_4 相交.





② $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5/3&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{DAD}^{-1}=\begin{bmatrix}1&5/3&0&0\\0.6&9&1.3&-2\\0.6&0&15&1.4\\0&-1&0&4\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B}$ 的 4 个孤立盖尔圆为

$G_1':|z-1|\le\dfrac{5}{3}$； $G_2':|z-9|\le 3.9$； $G_3':|z-15|\le 2$； $G_4':|z-4|\le 1$ ，其中各含 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值. 结合①与②可得：G_1,G_2',G_3',G_4' 中各含 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

[注] 可取 $d_1=1.6\sim 1.9$.

(4) 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的谱分解。

（1）解：$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

可得特征向量分别为 $x_1 = (2,1)^T$, $x_2 = (1,1)^T$

故 $x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

所以 $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

则 $A = 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

四、（15 分）已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&2&1\\2&0&2&2\\4&2&4&2\end{pmatrix}$ **，** $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

（1）验证方程 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ **是否相容；**

（2）如果相容求其极小范数解；

（3）如果不相容，写出其最小二乘解所对应的线性方程组，并且求极小范数最小二乘解。

解：（1）方程的增广矩阵为

$$[A\vdots b]=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\2&1&2&1&1\\2&0&2&2&0\\4&2&4&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r4-4r1]{\substack{r2-2r1\\r3-2r1}}\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&2&0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&2&0&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r3-2r2]{r3\leftrightarrow r4}\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故 $r(A\vdots b)=3\neq r(A)=2$，故可知方程不相容。

（2） $Ax=P_{R(A)}b$，其中 $P_{R(\mathrm{A})}=AA^{(1,3)}=AA^{+}$

从上式可得 A 的满秩分解为

$$F=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\2&0\\4&2\end{bmatrix},G=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

从而

$$A^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}\quad=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/5&1/5\\1/5&3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/5&-2/5\\-2/5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2&4\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}0&1&0&2\\-5&3&-10&6\\0&1&-0&2\\5&-2&10&-4\end{bmatrix}$$

$$Ax=P_{R(A)}b=AA^{+}b$$

(3)故可得其关于 A^{+} 的极小最小二乘解为

$$x=A^{+}b$$

五、（15 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}(t)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{2t}\\0\\\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，

1. 求 e^{At}；

2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 的解。

1. 求 e^{At}；

2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 的解.

解 1.（求和法）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}\ \ (k=3,4,\cdots)$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+(\frac{t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\frac{2^2t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\frac{2t}{1!}+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{e}^{2t}\,\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

（待定法）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$. 令 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}=m(\lambda)\cdot g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$\begin{cases}f(0)=1\\f(2)=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\qquad\ =1\\a+2b=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=(\mathrm{e}^{2t}-1)/2\end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{At}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

2. $\mathrm{e}^{-As}\boldsymbol{b}(s)=\left\{\dfrac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\dfrac{\mathrm{e}^{-2s}}{2}\boldsymbol{A}\right\}\mathrm{e}^{2s}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}-t\\1\\t\end{bmatrix}$

2019—2020 学年《 矩阵论》期末试卷

学号__________　　　　姓名__________　　　　成绩__________

考试日期：2019 年 12 月 27 日

一、　填空题　（2 分×15）

(1) 若 **A** 为 3 阶方阵，且 $\lambda=4$ 为 **A** 的 3 重特征根，且 **A** 仅有一个线性无关的特征向量，则 **A** 的 Jordan 标准形为 $\underline{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$。

(2) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{B}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 的最小多项式为 $\underline{(\lambda-1)(\lambda+2)}$，不变因子为（1，$(\lambda-1)$，$(\lambda-1)(\lambda+2)$），初等因子为（$(\lambda-1)$，$(\lambda-1)$，$(\lambda+2)$）。

(3) 设 $A=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$，$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，其中 $|x|<1$，则 **A** 的从属于向量范数 $\|\mathbf{x}\|_1$ 的矩阵范数为 $\underline{\ 0.5\ }$，**f(A)** 为 $\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}}$。

(4) 设 $A(t)=\begin{pmatrix} t\cos t & e^t\sin t \\ t^2+1 & \ln(1+t) \end{pmatrix}$，则 $\dfrac{dA(t)}{dt}$ 为 $\underline{\begin{pmatrix} \cos t-t\sin t & e^t\sin t+e^t\cos t \\ 2t & \dfrac{1}{1+t} \end{pmatrix}}$。

(5) 按顺序写出 Moore-Penrose 方程

（$AXA=A$，$XAX=X$，$(AX)^H=AX$，$(XA)^H=XA$）。

(6) 设 $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n)$，$B=(b_1,\ b_2,\ \cdots\ b_n)$，$AB^T=10$，则

B^TA 的特征多项式为 $\underline{\lambda^{n-1}(\lambda-10)}$，$|B^TA|=$ _0（n>1），10(n=1)_。

(7) $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，则 $\begin{cases}\|x\|_1=2\\ \|Ax\|_\infty=3\\ \|A\|_\infty=4\end{cases}$

（8）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B=A^TA$ 的特征值分别为 3，1，0，则矩阵

A 的奇异值为（ 1，$\sqrt{3}$，0 ）。

（9）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，则 **A** 的谱分解式中的谱值为 __-1 和 5__。

二、计算下列各题（8 分×5）

(1) 设 $A\in C^{8\times 8}$，$\lambda I-A\cong diag\{\lambda^2+1,1,\lambda^2-2,1,\lambda^2,\lambda,\lambda+1,1\}$，其中 I 为单位矩阵，$C$ 为复数域。求：

① $\lambda I-A$ 的初等因子，不变因子，及 Smith 标准型；

②写出 A 的 Jordan 标准型及最小多项式。

解：$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-i,\lambda+i,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2},\lambda^2,\lambda,\lambda+1$ ……………2 分

$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$d_8(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1),$ ……………1 分

$d_7(\lambda)=\lambda,d_6(\lambda)=d_5(\lambda)=d_4(\lambda)=d_3(\lambda)=d_2(\lambda)$
$=d_1(\lambda)=1$ ……………1 分

$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的标准型为 $\mathrm{diag}\{1,1,1,1,1,1,\lambda,(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1)\}$ …………1 分

$$\boldsymbol{A}\text{ 的 Jordan 标准型为 }\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&1&&&&&&\\&0&&&&&&\\&&0&&&&&\\&&&i&&&&\\&&&&-i&&&\\&&&&&\sqrt{2}&&\\&&&&&&-\sqrt{2}&\\&&&&&&&-1\end{pmatrix}$$ ………1 分

最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1)$。 …………2 分

（2）设线性空间V的一组基为$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$，$V$中的线性变换$T$满足

$$T(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_4) = \boldsymbol{x}_2$$

求：①T的值域$R(T)$的一组基；

②求T的核$N(T)$的一组基。

解：T在基$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ …………3 分

$R(A) = L(\alpha_1, \alpha_2)$ 其中$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T$，$\alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ ………1 分

$R(T)$的基为：$\beta_1 = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)\alpha_1 = \mathrm{x}_1$，

$\beta_2 = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)\alpha_2 = \mathrm{x}_2$ ………1 分

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$基础解系为$\gamma_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\gamma_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ …………2 分

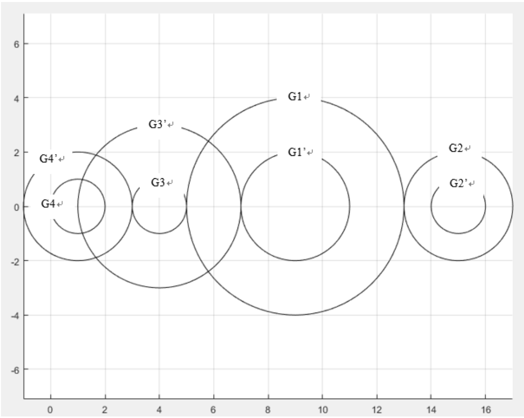
$N(T)$的一个基为$\mathrm{y}_1 = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)\gamma_1 = \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1$，$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$ …1 分

(3) **由盖尔定理隔离** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 15 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **的特征值（画图表示），并由实矩阵特征值的性质改进结果。**

解：第一种方法

对 $\boldsymbol{B}$，$G_1:|z-9|\le 4, G_2:|z-15|\le 2, G_3:|z-4|\le 1, G_4:|z-1|\le 1$ ……2 分

对 $\boldsymbol{B}^T$，$G_1':|z-9|\le 2, G_2':|z-15|\le 1, G_3':|z-4|\le 3, G_4':|z-1|\le 2$ ……2 分



……2 分

综合考虑可知，在 G_1',G_2',G_3,G_4 中各有一个特征值。 ……1 分

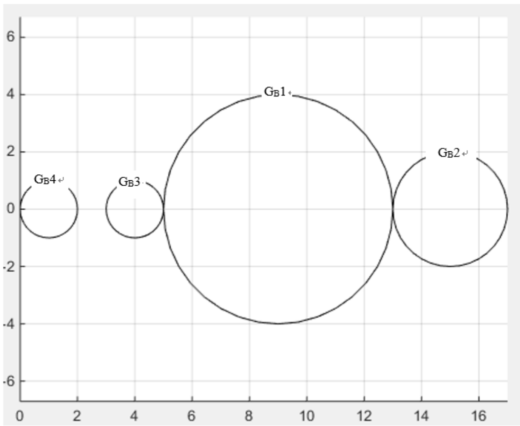
由于 $\boldsymbol{F}$ 的盖尔圆两两不相交，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 4 个不相等的实数。…1 分

第二种做法

$\boldsymbol{B}$ 的盖尔圆为

$G_{B1}:|z-9|\le 4, G_{B2}:|z-15|\le 2, G_{B3}:|z-4|\le 1, G_{B4}:|z-1|\le 1$ ……2 分

$\boldsymbol{B}$ 的盖尔圆如下图所示



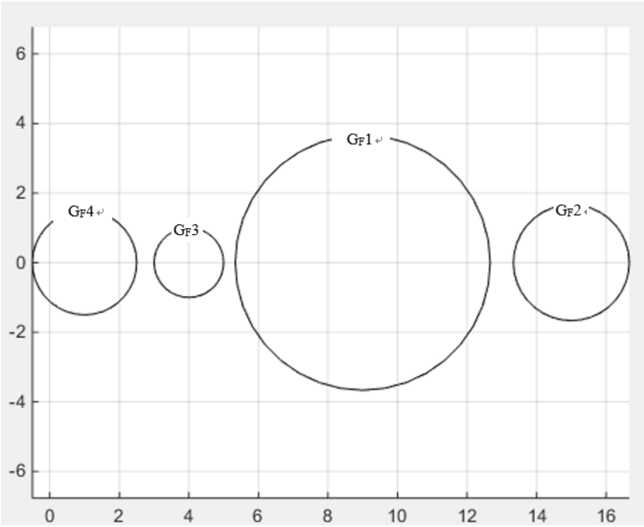
……2 分

取 $\boldsymbol{D}'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ 令 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{DBD}'^{-1}$

则 $\boldsymbol{F}$ 的盖尔圆为

$G_{F1}:|z-9|\le\frac{7}{2},G_{F2}:|z-15|\le\frac{3}{2},G_{F3}:|z-4|\le 1,G_{F4}:|z-1|\le 2$ ……2 分

$\boldsymbol{F}$ 的盖尔圆如下图所示



……1 分

由于 $\boldsymbol{F}$ 的盖尔圆两两不相交，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 4 个不相等的实数。 …1 分

(4)已知A的广义逆$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求矩阵A。

解：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

第一种方法：判断出A可逆，直接求A的逆。

判断出A可逆给 ……4分

求对A ……4分

第二种方法：利用满秩分解，分解出A=AI或A=IA

分解出A=AI或A=IA ……4分

求对A ……4分

(5)求如下线性常系数微分方程组的通解：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=3x_1(t)+x_2(t)-3x_3(t),\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-6x_1(t)-2x_2(t)+9x_3(t),\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=-2x_1(t)-x_2(t)+4x_3(t).\end{cases}$$

解：第一种方法：

将上式化为 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的形式，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ -6 & -2 & 9\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$ ……2 分

$\phi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$，

从而可得其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$。 ……2 分

设 $f(\lambda)=e^{t\lambda}$，满足 $f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$，则有

$$\begin{cases}f(1)=e^t=a+b+c\\ f^{'}(1)=e^t=2a+b\\ f(3)=e^{3t}=3a+b\end{cases} \text{得}\begin{cases}a=\\ b=\\ c=\end{cases}$$

则有 $r(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t\right)\lambda+\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}$ ……2 分

所以 $e^{\boldsymbol{A}t}=r(\boldsymbol{A})=\left(\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t\right)\boldsymbol{A}+\left(\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}\right)\boldsymbol{I}$

$$=\begin{pmatrix}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t & -\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{3}{2}e^t\\ -3e^{3t}+3e^t & -\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{5}{2}e^t & \frac{9}{2}e^{3t}-\frac{9}{2}e^t\\ -e^{3t}+e^t & -\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^t & \frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t\end{pmatrix}$$ ……1 分

因此齐次方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}$， $\boldsymbol{c}$ 为常向量。 ……1 分

解：第二种方法：

将上式化为 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的形式，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ -6 & -2 & 9\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$ ……2 分

$\phi(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$，

从而可得其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$。 ……2 分

因为$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$，所以$\boldsymbol{A}$的最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)$。

设$f(\lambda)=e^{t\lambda}$，满足$f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+a\lambda+b$，则有

$$\begin{cases} f(1)=e^t=a+b \\ f(3)=e^{3t}=3a+b \end{cases} \text{得} \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}\left(e^t-e^{3t}\right) \\ b=\dfrac{1}{2}\left(3e^t-e^{3t}\right) \end{cases}$$ ……2 分

则有$r(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t\right)\lambda+\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}$

所以$e^{\boldsymbol{A}t}=r(\boldsymbol{A})=\left(\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t\right)\boldsymbol{A}+\left(\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}\right)\boldsymbol{I}$

$$=\begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t & -\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{3}{2}e^t \\ -3e^{3t}+3e^t & -\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{5}{2}e^t & \frac{9}{2}e^{3t}-\frac{9}{2}e^t \\ -e^{3t}+e^t & -\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^t & \frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}$$ ……1 分

因此齐次方程组的通解为$\boldsymbol{x}=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$为常向量。 ……1 分

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，

（1）验证方程组是否相容；

（2）如果不相容写出求解最小二乘解时所对应的线性方程组，并求出其极小范数最小二乘解。

解：

$\mathrm{r(A)}=2, \mathrm{r(A,b)}=3,$ 故不相容．因A为列满秩，所以

$$A^{+}=(A^{H}A)^{-1}A^{H}=\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4 & 7 & 1\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix},$$

判断出不相容 2 分

A^{+} 求对　3 分

最小二乘解时所对应的线性方程组为 $Ax = AA^{+}b$　　3 分

求解　最小二乘解　$x = A^{+}b = \frac{1}{11}\binom{-4}{7}$　　　2 分

四、（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，定义 $T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$， $\forall \boldsymbol{x}\in C^2$, 其中 C 表示复数域。

(1)写出向量范数的定义，并在2-范数下计算 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离及 $T\boldsymbol{x}$ 与 $T\boldsymbol{y}$ 的距离，

其中 $\boldsymbol{x}=(1,1)^T, \boldsymbol{y}=(2,2)^T$；

(2)写出矩阵范数的定义，并计算 $\|A\|_2$。

（1）设 V 是数域 F（实数或复数域）上线性空间，若 $\forall x\in V$，均对应一个实值函数，记为 $\|x\|$，满足以下三条性质：

1)正定性：$\|x\|\ge 0$，且 $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$.　　　　……1 分

2)齐次性：$\forall k\in F$， $x\in V$，$\|kx\|=|k|\|x\|$.　　　　……1 分

3)三角不等式：$\forall x, y\in V$，有 $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$　　　　……1 分

则称 V 为赋范线性空间，$\|x\|$ 为 x 的**范数**.

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2=\left[(1-2)^2+(1-2)^2\right]^{1/2}=\sqrt{2}$$ ……1 分

$$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\quad, \quad T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

$$\|T\boldsymbol{x}-T\boldsymbol{y}\|_2=\left[(1-2)^2+(3-6)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$ ……1 分

（2）$\mathbb{C}^{n\times n}$ 中定义矩阵 A 的一个实函数，记为 $\|A\|$，满足，

1)非负性：$\|A\|\ge 0$，且 $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$.　　　　……1 分

2)齐次性：$\forall\lambda\in\mathbb{C}$，$\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$.　　　　……1 分

3)三角不等式：$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$，　　　　……1 分

4) 相容性*：$\forall A, B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|AB\|\le\|A\|\|B\|$，　　　　……1 分

$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，解 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $3\pm 2\sqrt{2}$，$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$；　　　　……1 分

五、（10 分）设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(1)求齐次线性方程组的解空间 W 以及 W 的一组标准正交基；

(2)求 W 的正交补 $W^{\perp}$。

解：将齐次方程组写为

$$\boldsymbol{AX} = 0$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & - \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

化简上式后有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & - \\ 0 & -1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix}$$

原方程为

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 + 4x_5 \\ x_2 = x_3 + x_4 - 5x_5 \end{cases}$$

由于 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，故方程组有 3 个基础解系。将 x_1, x_2, x_3 分别取值为 $[1,0,0]^T, [0,1,0]^T, [0,0,1]^T$,故可得解空间的一组解为

$$\xi_1 = [0,1,1,0,0]^T, \xi_2 = [-1,1,0,1,0]^T, \xi_3 = [4,-5,0,0,1]^T \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

对上式解用施密特正交化，有

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = [0,1,1,0,0]^T \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\xi_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)} \boldsymbol{\eta}_1 = [-1,1,0,1,0]^T - \frac{1}{2}[0,1,1,0,0]^T = [-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0]^T \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_3 - \frac{(\xi_3, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)} \boldsymbol{\eta}_1 - \frac{(\xi_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)} \boldsymbol{\eta}_2 = [\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 1]^T \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

将上式归一化后的标准正交基为

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1)}} = \frac{\sqrt{2}[0,1,1,0,0]^T}{2}$$

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_2)}} = \frac{\sqrt{10}[-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0]^T}{5}$$

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_3)}} = \frac{\sqrt{35}[\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 1]^T}{21} \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

$$W = L(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

（2）$W^{\perp} = L(\alpha_1, \alpha_2)$，**其中** $\alpha_1 = (2, 1, -1, 1, -3)$， $\alpha_2 = (1, 1, -1, 0, 1)$ $\cdots$3 分

2020—2021 学年 《 矩阵论》期末试卷

学号__________　　　　姓名__________　　　　成绩__________

考试日期：2021 年 1 月 14 日

(注: **I** 表示单位矩阵)

一. 填空(2 分×15)

(1)设 $\boldsymbol{B}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

不变因子为　1，　1，　$(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

初等因子为　$(\lambda-1)^2$，$(\lambda+2)$。

(2)若 3 阶阵 $\mathbf{A}\neq 2\mathbf{I}$，且 $\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+4\mathbf{I}=0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J_A}=$ $\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$

(3) 设 A 的各列互相正交且模长为 1，则 $\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{H}=$ $\underline{\quad 0 \quad}$；设 A, B 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵，

则 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{+}=\underline{\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{H} \end{pmatrix}}$

(4)若 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_1=(1,0,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,0,1)$，$\beta_1=(1,1,1,0)$，

$\beta_2=(0,0,0,1)$，则 $V_1\cap V_2$ 的维数为 $\underline{\mathbf{0}}$。

(5) 设 A $=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，定义 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ =A .，$\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{C}^2$，则 $\|A\|_2=(1+\sqrt{2})$ （或者

$(3\pm 2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$）；设 $x=(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})^T$，$y=(\boldsymbol{2},\boldsymbol{2})^T$ 在 2−范数下，$\boldsymbol{T}$x 与 $\boldsymbol{T}$y 的距离为 $\underline{\sqrt{10}}$。

（1） $A^HA=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，解 A^HA 的特征值为 $3\pm 2\sqrt{2}$，

$\|A\|_2=(1+\sqrt{2})$；

（2） $Tx = T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$$Ty = T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\|Tx - Ty\|_2 = \left[(1-2)^2 + (3-6)^2\right]^{1/2} = \sqrt{10}$$

(6) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$， 则 $(e^A)^H e^A =$ ___**I**_________

$$(e^A)^H e^A = (e^{A^H})e^A = (e^{-A})e^A = e^{-A+A} = I$$

(7)设 $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的奇异值为 $\sqrt{3}$,　　1,　　0

（8）设 B 是 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶零矩阵， $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^+$，

则 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为 $\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix}0 & 0\\B^{-1} & 0\end{pmatrix}$

（9）线性方程组 $Ax=b$ 相容⇔$AA^{(1)}b=b$（答矩阵 A 的秩与增广矩阵的秩相等也可以），且其通解为 $x = A^{(1)}b + \left(I - A^{(1)}A\right)y$，其中 $y \in C^n$ 任意（答 $x = A^+b + \left(I - A^+A\right)y$ 也可以）

二.(8 分×5 分)计算下列各题

（1）设 $R^3[x]$ 为次数小于 3 的实系数多项式集合，$R^3[x]$ 中定义内积为 $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$，求 $R^3[x]$ 的一组标准正交基。

解：先取一组基为 $1, x, x^2$，再根据题中内积定义进行 Schmidt 正交化。

$y_1 = 1$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} y_1 = x - 0 = x$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 x dx}{\int_{-1}^{1} x x dx} x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} 1 = x^2 - 0 - \frac{1}{3} = x^2 - \frac{1}{3}$$

对$1, x, x^2 - \frac{1}{3}$单位化：$z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = 1$, $z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x \cdot x dx}} = \frac{\sqrt{6}x}{2}$,

$$z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx}} = \frac{(3x^2 - 1)\sqrt{10}}{4}$$

最后得到该组标准正交基为$1, \frac{\sqrt{6}x}{2}, \frac{(3x^2 - 1)\sqrt{10}}{4}$

（2）设A是 4 阶方阵，且$\lambda I - A$ 等价于准对角阵：

$$D = diag\{\lambda - 1,\ (\lambda - 2)^2,\ \lambda(- 2\}$$

写出$\lambda I - A$ 的初等因子，不变因子，A 的最小多项式，A 的 Jordan 标准形。

解：（1）D 的初等因子为$\lambda - 1, \lambda - 2, (\lambda - 2)^2$；

（2）D 的不变因子为$d_4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$，$d_3 = \lambda - 2$，$d_2 = d_1 = 1$；

（3）A 的最小多项式为$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$

（4）A 的 Jordan 标准形为：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

注意：只要这几块有就可以，顺序可以调换

（3）在欧式空间 R^4 中，对于任意两个向量

$$\alpha=(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4)^T，\quad \beta=(y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4)^T，$$

规定 α 与 β 的内积为：$(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+4x_4y_4$。

已知 $\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 1,\quad 1)^T$，$\alpha_2=(-1,\quad -1,\quad 1,\quad 1)^T$，求 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 在欧式空间 R^4 中的正交补。

解：设 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 的正交补中的向量为 $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4)^T$，则

$(\alpha_1,x)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0$

$(\alpha,\beta)=-x_1-2x_2+3x_3y_3+4x_4y_4=0$

解方程组得：$x=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\-4\\3\end{pmatrix}$，

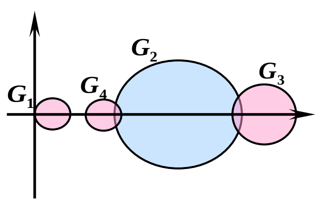
所以 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 为 $L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\\3\end{pmatrix}$

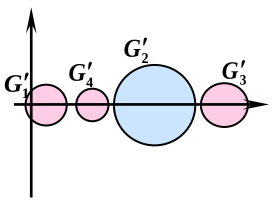
(4) 用盖尔圆定理隔离矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&9&1.3&-2\\1&0&15&1.4\\0&-1&0&4\end{bmatrix}$ 的特征值.（要求画图表示）

① $\boldsymbol{A}$ 的 4 个盖尔圆为

$G_1:|z-1|\le 1$；　$G_2:|z-9|\le 4.3$；　$G_3:|z-15|\le 2.4$；　$G_4:|z-4|\le 1$

易见 G_1 孤立，而 G_2,G_3,G_4 相交.





② $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5/3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{DAD}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 5/3 & 0 & 0\\ 0.6 & 9 & 1.3 & -2\\ 0.6 & 0 & 15 & 1.4\\ 0 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B}$ 的 4 个孤立盖尔圆为

$G_1':|z-1|\le\dfrac{5}{3}$； $G_2':|z-9|\le 3.9$； $G_3':|z-15|\le 2$； $G_4':|z-4|\le 1$ ，其中各含 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值. 结合①与②可得：G_1,G_2',G_3',G_4' 中各含 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

[注] 可取 $d_1=1.6\sim 1.9$.

（5）设线性空间 V 的一组基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$， V 中的线性变换 T 满足

$$T(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_4)=\boldsymbol{x}_2$$

求：①T 的值域 $R(T)$ 的一组基；

②求 T 的核 $N(T)$ 的一组基。

解：T 在基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$R(A)=L(\alpha_1,\alpha_2)$ 其中 $\alpha_1=(1,0,0,0)^T$ ， $\alpha_2=(0,1,0,0)^T$

$R(T)$的基为：$\beta_1=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\alpha_1=\mathrm{x}_1$，

$$\beta_2=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\alpha_2=\mathrm{x}_2$$

$\boldsymbol{Ax}=0$ 基础解系为$\gamma_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$， $\gamma_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

$N(T)$ 的一个基为$\mathrm{y}_1=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\gamma_1=\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1$， $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1$

四、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，求 e^A 的谱分解与谱半径

解法一：A 的特征多项式是 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)$

直接根据特征值的性质，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^5$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$ 的特征向量为 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ 的特征向量，即存在可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 使得

$P^{-1}e^AP=\begin{pmatrix}e^2 & \\ & e^5\end{pmatrix}$，即 $e^A=P\begin{pmatrix}e^2 & \\ & e^5\end{pmatrix}P^{-1}$

因为 $P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，所以 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

所以 $E_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

谱半径为 $\boldsymbol{e}^5$

解法二　A 的特征多项式是 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)$

取 $\boldsymbol{f}(\lambda)=\boldsymbol{e}^{\lambda}$ ，设 $\boldsymbol{f}(\lambda)=\varphi(\lambda)\boldsymbol{g}(\lambda)+\boldsymbol{a}\lambda+\boldsymbol{b}$

则 $\boldsymbol{f}(2)=\boldsymbol{e}^2=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{f}(5)=\boldsymbol{e}^5=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

所以 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}^5-\boldsymbol{e}^2)$ ，$\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(5\boldsymbol{e}^2-2\boldsymbol{e}^5)$

因此 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$ 的特征值为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，及 $5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，也就是 $\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^5$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$的特征向量为$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$的特征向量，即存在可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$使得

$P^{-1}e^{A}P=\begin{pmatrix}e^2&\\&e^5\end{pmatrix}$，即$e^A=P\begin{pmatrix}e^2&\\&e^5\end{pmatrix}P^{-1}$

因为$P=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$，所以$P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

所以$E_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

谱半径为$\boldsymbol{e}^5$

解法三：

取 $\boldsymbol{f}(\lambda) = \boldsymbol{e}^{\lambda}$ ，设 $\boldsymbol{f}(\lambda) = \varphi(\lambda)\boldsymbol{g}(\lambda) + \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{b}$

则 $\boldsymbol{f}(2) = \boldsymbol{e}^2 = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{f}(5) = \boldsymbol{e}^5 = 5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

所以$\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{e}^5 - \boldsymbol{e}^2)$ ，$\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{3}(5\boldsymbol{e}^2 - 2\boldsymbol{e}^5)$

因此 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}$

所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^5+2\boldsymbol{e}^2 & 2\boldsymbol{e}^5-2\boldsymbol{e}^2\\ \boldsymbol{e}^5-\boldsymbol{e}^2 & 2\boldsymbol{e}^5+\boldsymbol{e}^2\end{bmatrix}$，然后求 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$的特征值$\boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^5$

计算特征向量，得矩阵$P=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，

所以$E_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$E_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

谱半径为$\boldsymbol{e}^5$

五、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -4 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -3 & 6 & 0\end{bmatrix}$**，** $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-3\end{bmatrix}$**.**

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解；

2. 求 $\boldsymbol{A}^+$；

3. 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解；

4. 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数解，或者极小范数最小二乘解 $\boldsymbol{x}_0$.

（要求指出所求的是哪种解）

解 1. $\boldsymbol{A}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{FG}$

2. $\boldsymbol{F}^+=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right)^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{65}\begin{bmatrix}13 & 0 & 26 & 0\\ 0 & 10 & 0 & -15\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{G}^+=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & -4\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{G}^+\boldsymbol{F}^+=\frac{1}{650}\begin{bmatrix}13 & 0 & 26 & 0\\ 0 & 20 & 0 & -30\\ 0 & -40 & 0 & 60\\ 39 & 0 & 78 & 0\end{bmatrix}$

3-4. $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\2\\-4\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解.

$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数解.

六、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}(t)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{2t}\\0\\\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

1. 求 e^{At}；

2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 的解.

解 1.（求和法）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}\ \ (k=3,4,\cdots)$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+(\frac{t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\frac{2^2t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\frac{2t}{1!}+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{e}^{2t}\ \boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

（待定法）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$. 令 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}=m(\lambda)\cdot g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$\begin{cases}f(0)=1\\f(2)=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\qquad=1\\a+2b=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=(\mathrm{e}^{2t}-1)/2\end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

2. $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{b}(s)=\left\{\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{2}\boldsymbol{A}\right\}\mathrm{e}^{2s}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}-t\\1\\t\end{bmatrix}$

2021—2022 学年 《 矩阵论》期末试卷

学号__________ 姓名__________ 成绩__________

考试日期：2021 年 1 月 13 日

(注：**I** 表示单位矩阵)

一. 填空(2 分×15)

(1) 设 A 与对角阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$相似，则 A 的最小多项式为$\underline{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}$，

不变因子为 1，1，$(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，初等因子为$(\lambda-1)^2$，$(\lambda+2)$。

(2)若 3 阶方阵 $\mathbf{A}\neq 3\mathbf{I}$，且 $\mathbf{A}^2-6\mathbf{A}+9\mathbf{I}=0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J_A}=\underline{\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}}$。

(3) 设 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$。则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征多项式为 $\underline{\phi_{AB}(\lambda)=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)}$。

(4) 设 A 的各列向量互相正交且模长为 1，则 $\mathbf{A}^+-\mathbf{A}^H=\underline{\quad 0\quad}$；设 A, B 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵，则 $\begin{pmatrix}\mathbf{A}&0\\0&\mathbf{B}\end{pmatrix}^+=\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{A}^H&0\\0&\mathbf{B}^H\end{pmatrix}}$。

(5) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，定义 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\mathrm{A}\boldsymbol{x}$，$\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{C}^2$，则 $\|A\|_2=(1+\sqrt{2})$（或者 $(3\pm 2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$）；设 $x=(1,1)^T, y=(2,2)^T$，则在 2-范数下，$\boldsymbol{T}x$ 与 $\boldsymbol{T}y$ 的距离为 $\underline{\sqrt{10}}$；$\mathbf{A}^5$ 的谱半径为$\underline{\quad 1\quad}$。

(6) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，则 $(e^{\mathrm{A}})^H e^{\mathrm{A}}=\mathbf{I}$。

(7)按顺序写出 Moore-Penrose 方程 $\begin{matrix} AXA = A & \text{(i)} \\ XAX = X & \text{(ii)} \\ (AX)^H = AX & \text{(iii)} \\ (XA)^H = XA & \text{(iv)} \end{matrix}$ 。

(8) 若 A 是 3 阶方阵，特征值为 0，1，-1，则行列式 $\det(e^A) = \underline{1}$.

（9）线性方程组 Ax = b 相容⇔$AA^{(1)}b=b$（答矩阵 A 的秩与增广矩阵的秩相等也可以），且其通解为 $x = A^{(1)}b + \left(I - A^{(1)}A\right)y$，其中 $y \in C^n$ 任意（答 $x = A^{+}b + \left(I - A^{+}A\right)y$ 也可以）。

二. (8 分×5)计算下列各题

1．设 $W_1 = span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ $W_2 = span\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\}$ ，求（W_1+W_2）及 $(W_1 \cap W_2)$，

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$=（1, 2, 1, 0），$\boldsymbol{\alpha}_2$=（-1, 1, 1, 1），$\boldsymbol{\beta}_1$=（2, -1, 0, 1），$\boldsymbol{\beta}_2$=（1，-1, 3, 7）。

解：$W_1+W_2 = span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\}$， 1 分

$$[\boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

对它作初等行变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其秩为 3，故 $\dim(W_1 + W_2) = 3$。 3 分

现在计算 $\dim(W_1 \cap W_2)$。

法一：设 $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$，则存在 k_1, k_2, l_1, l_2 有 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2$ 1 分

则 $\begin{cases} k_1 - k_2 - 2l_1 - l_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = 0 \\ k_1 + k_2 - 3l_2 = 0 \\ k_2 - l_1 - 7l_2 = 0 \end{cases}$ ，解方程组可得 $\begin{cases} k_1 = -l_2 \\ k_2 = 4l_2 \\ l_1 = -3l_2 \end{cases}$

即 $\boldsymbol{x}=l_2(-5,2,3,4)$ ， 2

分

所以 $(W_1\bigcap W_2)$=L{x} 1 分

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，求 A 的值域的正交补

解：将齐次方程组写为

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}=0$$ 3 分

方程为

$$\begin{cases} x_1=-x_4+4x_5\\ x_2=x_3+x_4-5x_5\end{cases}$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=2$，故方程组有 3 个基础解系。将 x_1,x_2,x_3 分别取值为 $[1,0,0]^T,[0,1,0]^T,[0,0,1]^T$，故可得解空间的一组解为

（不唯一，只要求出三个就给分）

$\xi_1=[0,1,1,0,0]^T,\xi_2=[-1,1,0,1,0]^T,\xi_3=[4,-5,0,0,1]^T$ 3 分

（2） $R(A)^{\perp}$ ＝ $L(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 2 分

3. 设 $\boldsymbol{A}\in C^{8\times 8}$， $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\cong diag\{\lambda^2+1,1,\lambda^2-2,1,\lambda^2,\lambda,\lambda+1,1\}$。求 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子，不变因子，及 Smith 标准型。写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型及最小多项式。

解： $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-i,\lambda+i,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2},\lambda^2,\lambda,\lambda+1$ 2 分

又因为此矩阵的秩等于 8，所以 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$$d_8(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1),d_7(\lambda)=\lambda,d_6(\lambda)=d_5(\lambda)=d_4(\lambda)=d_3(\lambda)=d_2(\lambda)$$
$$=d_1(\lambda)=1$$

2 分

$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的标准型为 diag$\{1,1,1,1,1,1,\lambda,(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1)\}$ 1 分

Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & & & -\sqrt{2} & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$ 1 分

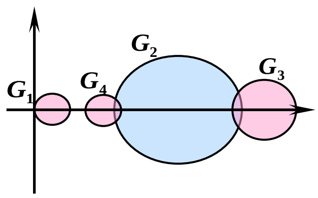
最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1)$。 2 分

(4) 用盖尔圆隔离矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1.3 & -2 \\ 1 & 0 & 15 & 1.4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 的特征值.（要求画图表示）

① $\boldsymbol{A}$ 的 4 个盖尔圆为

$G_1:|z-1|\le 1$； $G_2:|z-9|\le 4.3$； $G_3:|z-15|\le 2.4$； $G_4:|z-4|\le 1$

易见 G_1 孤立，而 G_2,G_3,G_4 相交. 3 分

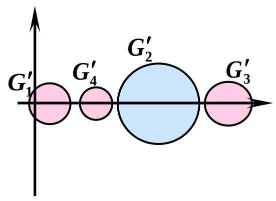


1 分

② $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 5/3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{DAD}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 0 & 0 \\ 0.6 & 9 & 1.3 & -2 \\ 0.6 & 0 & 15 & 1.4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 2 分

$\boldsymbol{B}$ 的 4 个孤立盖尔圆为

$G_1':|z-1|\le \frac{5}{3}$； $G_2':|z-9|\le 3.9$； $G_3':|z-15|\le 2$； $G_4':|z-4|\le 1$ ，



1 分

其中各含 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值. 结合①与②可得：G_1，G_2',G_3',G_4' 中各含 $\boldsymbol{A}$ 的一个特

征值.　　1 分

［注］ 可取 $d_1=1.6\sim1.9$.

（5）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}$，

解：

（1）

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r4-5*r1]{r2-3*r1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6\\0&1&2&2&6\\0&-1&-2&-2&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r4-r2\\-1*r2}]{r3+r2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r1-r2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故取

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\\0&1\\5&4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5\\0&1&2&2&6\end{pmatrix},\text{所以 }\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}$$

四、（10 分）已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&2&1\\2&0&2&2\\4&2&4&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

求解方程组 Ax=b 极小范数最小二乘解。

解：从上式可得 A 的满秩分解为

$$F=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\2&0\\4&2\end{bmatrix},G=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$　　3 分

从而

$$A^{+}=G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/5&1/5\\1/5&3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/5&-2/5\\-2/5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2&4\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & -0 & 2 \\ 5 & -2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$ 5 分

$Ax = P_{R(A)}b = AA^{+}b$

故可得其关于 A^{+} 的极小最小二乘解为

$$x = A^{+}b$$ 2 分

五、（10 分） 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$**，** $\boldsymbol{b}(t)=\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$**，** $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$**.**

1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}\mathrm{x}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{A}\,\mathrm{x}(\boldsymbol{t})$ **的基础解系；**

2. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$ **满足初始条件** $\boldsymbol{x}(0)$ **的解.**

解 1.（**求和法**）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}\quad (k=3,4,\cdots)$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+(\frac{t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\frac{2^2t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\frac{2t}{1!}+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{e}^{2t}\,\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 5 分

（**待定法**）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$. 令 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}=m(\lambda)\cdot g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+2b=\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=(\mathrm{e}^{2t}-1)/2 \end{cases}$$

$$e^{At}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{e^{2t}}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{e^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

2．$e^{-As}\boldsymbol{b}(s)=\left\{\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{e^{-2s}}{2}\boldsymbol{A}\right\}e^{2s}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(t)=e^{2t}\begin{bmatrix}-t\\1\\t\end{bmatrix}$ 5 分

六、（10 分）已知多项式空间 $P_3[t]$ 的子空间 $W=\mathrm{span}\{f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)\}$，

其中 $f_1(t)=1+t^3$，$f_2(t)=t+t^2$，$f_3(t)=1+t^2$，$f_4(t)=t+t^3$．

1．求子空间 W 的一个基；

2．对于 W 中的多项式 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，定义线性变换

$$T[f(t)]=(a_0+a_1-a_2-a_3)+a_1t+(a_2-a_3)t^2+(a_0+2a_1-2a_2)t^3$$

求线性变换 T 在（1）中求出的基下的矩阵．

解 1．子空间 W 的一个基为 $f_1(t)=1+t^3$，$f_2(t)=t+t^2$，$f_3(t)=1+t^2$． 5 分

2．计算基象组：

$T(f_1)=-t^2+t^3=f_1-f_3$，$T(f_2)=t+t^2=f_2$，$T(f_3)=t^2-t^3=-f_1+f_3$

设 $T(f_1,f_2,f_3)=(f_1,f_2,f_3)\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$． 5 分

注 1： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_1(t),f_2(t),f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix}$

注 2： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&-1&2\end{bmatrix}$

注 3： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_1(t),f_3(t),f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$