一、判断题（每小题 2 分共 20 分）

1、实矩阵的特征值是一定是实数。（×）

2、任意方阵 $\mathbf{A}$ 都存在唯一的一组谱阵。（×）

3、设n阶复方阵A,B有相同的初等因子组，则A与B一定相似。（√）

4、设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为非零n阶矩阵，且$\mathbf{AB}=0$，则$rank(\mathbf{A}),rank(\mathbf{B})$都小于$n$。（√）

5、对于任意n阶复方阵$\mathbf{A}$，$e^{\mathbf{A}}$必可逆。（√）

6、若$\mathbf{A}$是正规阵，则存在酉矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{P}^H\mathbf{AP}=\mathbf{D}$，其中$\mathbf{D}$为对角阵。（√）

7、设T是$\mathbb{R}^3$上的线性变换，它在$\mathbb{R}^3$中 2 个基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$下的矩阵分别是$\mathbf{A},\mathbf{B}$；而且$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathbf{P}$，则$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$。（ × ）

8、$\|\cdot\|$是矩阵范数，$\mathbf{I}$是单位阵，则可能有$\|\mathbf{I}\|<1$。（ × ）

9、$|\mathbf{A}^T\mathbf{A}|\neq 0$ 的充分必要条件是$R(\mathbf{A})$的维数等于n，其中矩阵$\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$。（√）

10、设$\|\mathbf{A}\|_m$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的一个矩阵范数，对于任意$x\in\mathbb{C}^n$，$\|x\|_v=\|\mathbf{xa}^T\|_m$，则$\|x\|_v$是与$\|\mathbf{A}\|_m$相容的向量范数。（ × ）

二、填空题（每空 3 分，共 36 分）

1、设$\mathbb{R}^4$的两个子空间为$V_1=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\mid\xi_1=\xi_2,\xi_3=\xi_4,\xi_i\in\mathbb{R},i=1,2,3,4\}$

$V_2=L(x_1,x_2),x_1=(1,1,1,0),x_2=(0,0,0,1)$，则 $\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2$ 维数=__3____，$\mathrm{V}_1\bigcap\mathrm{V}_2$ 维数=__1____。

2、计算矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.1 & 0.7\\0.3 & 0.6\end{pmatrix}^k=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}4 & 7\\3 & 9\end{pmatrix}$

3、**设** $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,...,b_n)$ **。则** $\boldsymbol{AB}$ **的特征多项式为** $\phi_{\boldsymbol{AB}}(\lambda)=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)$。

4、**已知** $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 2+i\end{bmatrix}$ **，则 A 的从属于向量范数** $\|\mathbf{x}\|_1$ **的矩阵范数为**__9___， $\mathbf{A}^2$**+I 的谱半径为**__17______。

5、**设** A **与对角阵** $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ **相似，则** A **的最小多项式为：** $(\lambda-2)^2$，

不变因子为： 1，$(\lambda-2)$，$(\lambda-2)^2$，**初等因子组为：** $(\lambda-2)$，$(\lambda-2)^2$。

6、设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&-3\end{pmatrix}$，则$R^{\perp}(\mathbf{A})=$ $\underline{L(\xi),\xi=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}}$ 不唯一，但是与此向量平行

7、A 和 B 都是 n 阶酉矩阵，则$\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{A}&\mathbf{B}\end{pmatrix}$的满秩分解为$\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{I}\\\mathbf{I}\end{pmatrix}(\mathbf{A}\quad\mathbf{B})}$.

8、在欧氏空间R^4中，对于任意两个向量$\alpha=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T$，$\beta=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)^T$，规定$\alpha$与$\beta$的内积为：$(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+4x_4y_4$。已知$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(-1,\ -1,\ 1,\ 1)^T$，则$\|\alpha_2-\alpha_1\|=\underline{2\sqrt{3}}$.

三、（8 分）设$R^3[x]$为次数小于 3 的实系数多项式集合，$R^3[x]$中定义内积为$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$，求$R^3[x]$的标准正交基。

解：先取一组基为$1,x,x^2$，　(2 分，不唯一)　　再根据题中内积定义进行 Schmidt 正交化。

$$y_1=1$$

$$y_2=x_2-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=x-\frac{\int_{-1}^{1}xdx}{\int_{-1}^{1}1dx}y_1=x-0=x$$

$$y_3=x_3-\frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2-\frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1$$

$$=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}x^2xdx}{\int_{-1}^{1}xxdx}x-\frac{\int_{-1}^{1}x^2dx}{\int_{-1}^{1}1dx}1=x^2-0-\frac{1}{3}=x^2-\frac{1}{3}$$ (3 分，每个 1 分)

对$1,x,x^2-\frac{1}{3}$单位化：$z_1=\frac{y_1}{\|y_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}},z_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}=\frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x\cdot xdx}}==\frac{\sqrt{6}x}{2}$,

$$z_3=\frac{y_3}{\|y_3\|}\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx}}=\frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}$$ (3 分，每个 1 分)

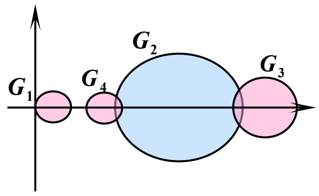
最后得到该组标准正交基为$\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{6}x}{2},\frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}$

四、（8 分）用盖尔圆隔离矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&9&1.3&-2\\1&0&15&1.4\\0&-1&0&4\end{bmatrix}$ 的特征值．（要求画图表示）

① A 的 4 个行盖尔圆为

$G_1:|z-1|\le 1$；　$G_2:|z-9|\le 4.3$；　$G_3:|z-15|\le 2.4$；　$G_4:|z-4|\le 1$

易见 G_1 孤立，而 G_2,G_3,G_4 相交．　　3 分

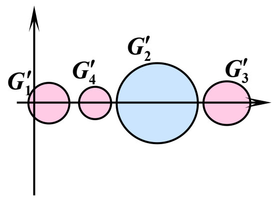


1 分

② $D=\begin{bmatrix}5/3&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$，$B=DAD^{-1}=\begin{bmatrix}1&5/3&0&0\\0.6&9&1.3&-2\\0.6&0&15&1.4\\0&-1&0&4\end{bmatrix}$　　2 分

B 的 4 个孤立盖尔圆为

$G_1':|z-1|\le\frac{5}{3}$；　$G_2':|z-9|\le 3.9$；　$G_3':|z-15|\le 2$；　$G_4':|z-4|\le 1$　，



1 分

其中各含 B 的一个特征值．结合①与②可得：G_1，G_2',G_3',G_4' 中各含 A 的一个特征值．　　1 分

[注] 可取 $d_1=1.6\sim1.9$．

五、（10 分），定义变换T为：$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\text{-}2x_2\\ \text{-}2x_1+x_2\text{-}2x_3\\ \text{-}2x_2\end{pmatrix}$，$\forall\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$，求$\mathbb{R}^3$的一组基使得$T$在该基下的矩阵为对角阵

解：取自然基：$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　　2 分　不唯一

线性变换 T 在自然基下对应的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 2 分 不唯一

特征值为：4，1，-2 2 分 唯一

将实对称矩阵相似对角化的相似变换矩阵为： 3 分 不唯一

$$由\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，特征向量\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$由\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，特征向量\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$由\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，$$

$$特征向量\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

所以求得的一组基为： 1 分 不唯一

$$\beta_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}，\beta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}，\beta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

六、 （10 分）**已知** $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$**，**

(1) 求 e^{At}

(2) 求 $\det(e^{A})$

解 1.（求和法）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}，\ \boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}\ \ (k=3,4,\cdots)$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+(\frac{t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\frac{2^2t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\frac{2t}{1!}+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{e}^{2t}\ \boldsymbol{A}$$ 4 分

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{e^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ 4 分

$\det(e^{\mathbf{A}})=e^{tr(A)}=e^{4}$ 2 分

（待定系数法）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$．因为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$．令 $f(\lambda)=e^{\lambda t}=m(\lambda)\cdot g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有 3 分（给出最小多项式和设出 a+bx 就给 3 分），

$$\begin{cases}f(0)=1\\ f(2)=e^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ a+2b=e^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=(e^{2t}-1)/2\end{cases}$$ 2 分

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{e^{2t}}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{e^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ 2 分

$\det(e^{\mathbf{A}})=e^{tr(A)}=e^{4}$ 3 分

七、（8分）证明题

设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^H$，证明：

（1）$R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{A})$

（2）$R^{\perp}(\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{A})$是正交直和分解。

证明：

（1）$\forall\boldsymbol{x}\in R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$，则$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$，所以$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{A})$ 2分

$\forall\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{A})$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\text{-}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}\Rightarrow(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，即$\boldsymbol{x}\in R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 2分

（2）$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n:\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Ax}$，所以$\mathbb{C}^n=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$， 2分

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n:\left(\boldsymbol{Ax},(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}\right)=\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}^H(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=0$$

即$R(\boldsymbol{A})\perp R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 2分

由（1），得$R^{\perp}(\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{A})$。