矩阵理论真题

Xingtao Zhao

2026 年 1 月 5 日

2023 期末试题

一、填空题 (2 分 × 15)

1. 设 A 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 相似,则 A 的最小多项式为 ________,不变因子为 ________,初等因子为 ________。

2. 若 3 阶方阵 $A \neq 2I$,且 $A^2 - 4A + 4I = 0$,则 Jordan 型 $J_A =$ ________。

3. 设 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$,则 AB 的特征多项式为________。

4. 若 $V_1 = L(a_1, a_2)$, $V_2 = L(b_1, b_2)$,其中 $a_1 = (1, 0, 0, 1), a_2 = (0, 1, 0, 1), b_1 = (1, 1, 1, 0), b_2 = (0, 0, 0, 1)$,则 $V_1 + V_2$ 的维数为 ________。

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,则 $\|Ax\|_1 =$ ______,$\|Ax\|_2 =$ ______,$\|Ax\|_\infty =$ ______。

6. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,则 A 的从属于向量范数 $\|x\|_1$ 的矩阵范数为 ________,A 的谱半径为 ________,A^5 的谱半径为 ________。

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,则 $(e^A)^H e^A =$ ______。

二、判断题 (1 分 × 10),正确的写"T",错误的写"F"

1. 设 A 为 n 阶方阵,A 为正规矩阵 $\Leftrightarrow$ A 为单纯矩阵。( )

2. 设 A 和 B 均为 n 阶方阵,$A \sim B \Leftrightarrow A$ 和 B 具有相同的特征值。( )

3. 若 B 是满秩矩阵,C 是行满秩矩阵,则 $B^+ = (B^H B)^{-1} B^H$,$C^+ = C^H (CC^H)^{-1}$。( )

4. A 和 B 为 n 阶方阵，X 为 n 维列向量，则 $R(AB) \subseteq R(A)$，$N(B) \subseteq N(AB)$。( )

5. 任一复方阵 A 都酉相似于一个上三角阵，但是其主对角线元素不一定为 A 的特征值。( )

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.2 & a \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$，$a \in \mathbb{R}$，且 $|a| < 0.8$，则 $(I-A)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right) + A = 2A$。( )

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}$，则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k}{2^k} A^k$ 收敛。( )

8. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$x \in \mathbb{C}^n$，若向量范数 $\|x\|_v$ 与矩阵范数 $\|A\|_m$ 满足不等式 $\|Ax\|_v \geq \|A\|_m \|x\|_v$，则称矩阵范数 $\|A\|_m$ 与向量范数 $\|x\|_v$ 是相容的。( )

三、计算题 (8 分 × 5)

1. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，取一组基 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,0,0)^T$，$\boldsymbol{x}_2 = (1,0,1,0)^T$，$\boldsymbol{x}_3 = (-1,0,0,1)^T$，$\boldsymbol{x}_4 = (1,-1,-1,1)^T$，将其化为一组标准正交基，并且求出 $A = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ 的 QR 分解。

2. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

求 A 的值域的正交补 $R^{\perp}(A)$。

3. 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\lambda I - A$ 的初等因子，不变因子。写出 A 的 Jordan 标准型及最小多项式。

4. 已知次数不超过 3 的多项式空间 $P_3[t]$ 的子空间

$$W = \mathrm{span}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}$$

其中 $f_1(t) = t^3 + 1$, $f_2(t) = t^2 + t$, $f_3(t) = t^2 + 1$, $f_4(t) = t^3 + t$。

1. 求子空间 W 的一个基；

2. 对于 W 中的多项式 $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$，定义线性变换

$$T[f(t)] = (a_0 + a_1 - a_2 - a_3) + a_1 t + (a_2 - a_3)t^2 + (a_0 + 2a_1 - 2a_2)t^3,$$

求线性变换 T 在（1）中求出的基下的矩阵。

四、(10 分)

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\dfrac{d}{dt}e^{At}$。

五、(10 分)

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$，令 $V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid (A - I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}\}$，求：$V_1 \cap V_2$ 及 $V_1 + V_2$ 的维数。

2024 期末试题

一、判断题（每题 1 分，共 10 分）

判断下列命题是否正确，并在括号内打“√”或“×”。

1. 设 $V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det(A) = 0\}$，则 V 在 $\mathbb{R}$ 上定义的普通矩阵加法和数乘下构成线性空间。

2. 在有限维线性空间中，同一个向量在不同的基下的坐标可能相同。

3. 设 n 阶复方阵 A、B 具有相同的特征多项式和最小多项式，则 A 和 B 一定相似。

4. 设 A, B 均为 n 阶复方阵，则 $R(AB) \subseteq R(A)$，$N(B) \subseteq N(AB)$。

5. 若 A 是 n 阶可逆复方阵，则 $\sin A$ 一定可逆。

6. 设 T 是 n 维欧氏空间 V 的一个正交变换，则 T 对应的矩阵一定是正交矩阵。

7. 设 A, B 均是正规复矩阵，且 $AB = BA$，则 AB 和 BA 也均是正规矩阵。

8. 设 A 是 n 阶复方阵，则 $\|A\|_2 \le \|A\|_F$。

9. 设
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 不绝对收敛。

10. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}, x \in \mathbb{C}^n$，若向量范数 $\|x\|_v$ 与矩阵范数 $\|A\|_m$ 满足不等式
$$\|Ax\|_v \ge \|A\|_m \|x\|_v,$$
则称矩阵范数 $\|A\|_m$ 与向量范数 $\|x\|_v$ 相容。

二、填空题（每题 3 分，共 27 分）

1. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{bmatrix},$$

V_1, V_2 分别是齐次方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 的解空间，则 $\dim(V_1\cap V_2)=$ ____。

2. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+k\alpha_1$ 也线性无关，则 k 应当满足 ____。

3. 设 $M=I_n-ww^\top$，其中 $w=\frac{1}{\sqrt{n}}[1,1,\cdots,1]\in\mathbb{R}^n$，则 $\det(M)=$ ____。

4. 设

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

则 $\|A\|_1=$ ____，$\|Ax\|_\infty=$ ____，$\|A\|_F=$ ____。

5. 设 $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$，特征值 $\lambda=2$ 是三重特征根且只有一个线性无关的特征向量，则 A 的 Jordan 标准型是 ____________。

6. 设

$$A=\begin{bmatrix}7&0&1\\-1&-5&i\\0&1&6i\end{bmatrix},$$

则 A ______（填“是”或者“不是”）单纯矩阵。

7. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix},$$

则 A 的满秩分解为 ____________________。

8. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&a\end{bmatrix},\quad a\in\mathbb{R},$$

若极限 $\lim_{k\to\infty}A^k$ 存在，则 a 的取值范围是 ________。

9. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

定义集合

$$S_A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i A^i \,\middle|\, \forall a_i \in \mathbb{R},\ \text{至多有限个}a_i \neq 0 \right\},$$

则 S_A ______（填“是”或者“不是”）线性空间，如不是请给出理由：____________。

三、解答题（共 41 分）

1.（13 分）设 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对 $\mathbb{R}^3$ 中任意的向量 $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$（$k_j \in \mathbb{R}$），定义变换 T 为

$$T(x) = k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + k_3T(\alpha_3),$$

其中

$$T(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad T(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad T(\alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

试求解以下问题：

(a) 证明 T 是线性变换；

(b) 求 T 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵。

2.（13 分）设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) 求 A 的谱分解；

(b) 计算 A^{100}（用谱阵表示即可）。

3.（13 分）已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

试求解以下问题：

(a) 求 A 的 Jordan 标准型；

(b) 求矩阵的指数函数 e^{tA}。

4.（5 分）设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\|A\|$ 是某一矩阵范数，若 $\|A\| < 1$，证明 $I - A$ 可逆且

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{1-\|A\|}.$$

2025 期末试题

一、判断题

在每小题前的括号内填“是”或“否”(本题共 21 分, 每小题 3 分).

1. 集合 $\{x=(x_1,x_2,x_3)^T \in C^3 : x_1x_2=0\}$ 是线性空间 C^3 的子空间.
2. 对 R^2 中的向量 $x=(x_1,x_2)^T$ 和 $y=(y_1,y_2)^T$, 函数 $(x,y)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2$ 是 R^2 上的一个内积.
3. 在实值函数空间中, 函数组 $1,\sin^2 x,\cos^2 x$ 线性相关.
4. 对于线性空间 R^2, $V_1=\{(x_1,x_2)^T \in R^2 | x_1=x_2\}$ 是子空间 $V_2=\{(x_1,x_2)^T \in R^2 | x_1+x_2=0\}$ 的正交补空间.
5. 映射 $T: R^3 \to R^3$, $(x_1,x_2,x_3)^T \to (2x_1-x_2, x_2+x_3, x_1)^T$ 是线性变换.
6. 设 A 是正规矩阵, 则 A 的特征值均为实数.
7. 如果 A 是幂等矩阵且 $|A| \neq 0$, 则有 $A=I$. (I 表示单位矩阵)

二、填空题

对每个空格写出正确的答案 (本题 20 分, 每空 4 分)

1. 对于矩阵通常的加法和数乘运算, 实数域 R 上的线性空间 $V(R)=\{A : A \in C^{n\times n}, A^H=-A\}$ 的维数等于 ________.
2. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&2&1&0\\1&1&2&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}$ 的特征值, 则有 $\sum_{i=1}^4 \lambda_i=$ ________.
3. 设矩阵 $A=I-3ww^T$, 其中 I 是单位矩阵, w 是给定的单位实向量. 求 A 阵谱半径 $\rho(A)=$ ________. 另外若 $I,A,A^2,\ldots,A^l$ 线性无关, 而 $I,A,A^2,\ldots,A^{l+1}$ 线性相关, 那么 $l=$ ________.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$ 则 A 的最小多项式 $m(\lambda)=$ ________.

三、(本题 15 分)

已知 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是线性空间 V 的一组基, 线性变换 T 在此基底下的矩阵表示为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&1&2&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}$$

设 $\eta_1=\xi_1-\xi_2+\xi_4$, $\eta_2=3\xi_2-\xi_3-\xi_4$, $\eta_3=\xi_3+\xi_4$, $\eta_4=4\xi_4$.

1. 证明向量组 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 也是 V 的基.

2. 求 T 在基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵表示 B.

3. 求 $N(T)$, $R(T)$ 及其维数.

四、(本题 12 分)

用盖氏圆盘定理证明下面的矩阵 A 有 n 个互异的实特征根, 并且 $|A|>1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)$. 其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1/n&\ldots&1/n\\1/n&4&\ldots&1/n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1/n&1/n&\ldots&2n\end{bmatrix}$$

五、(本题 16 分)

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

求矩阵 e^{At}.

六、(本题 16 分)

设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. 证明矩阵 A 是正规矩阵;
2. 求矩阵 A 的谱分解;
3. 求矩阵 A^3 的谱分解.

2023 试题答案

一、填空题 (2 分 × 15)

1. 设 A 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 相似,则 A 的最小多项式为 $\underline{\lambda^2(\lambda + 2)}$,不变因子为 $\underline{1, 1, \lambda^2(\lambda+2)}$,初等因子为 $\underline{\lambda^2, \lambda + 2}$。

【解答】

设 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$。由于 $A \sim J$,它们具有相同的特征多项式、最小多项式、不变因子和初等因子。

(a) **初等因子**:观察矩阵 J,它已经是 Jordan 标准型。J 是分块对角矩阵 $J = \mathrm{diag}(J_2(0), J_1(-2))$,其中 $J_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是对应特征值 0 的 2 阶 Jordan 块,$J_1(-2) = [-2]$ 是对应特征值 -2 的 1 阶 Jordan 块。**Jordan 块的特征多项式即为对应的初等因子**。对应 $\lambda = 0$ 的块为 2 阶,初等因子为 λ^2;对应 $\lambda = -2$ 的块为 1 阶,初等因子为 $\lambda + 2$。故初等因子为 $\lambda^2, \lambda + 2$。

(b) **最小多项式**:**最小多项式 $m(\lambda)$ 是所有初等因子的最小公倍数**。$m(\lambda) = \mathrm{lcm}(\lambda^2, \lambda + 2) = \lambda^2(\lambda + 2) = \lambda^3 + 2\lambda^2$。

(c) **不变因子**:设 A 为 3 阶矩阵,其不变因子记为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda)$,且满足 $d_1|d_2|d_3$。最高阶不变因子 $d_3(\lambda)$ 等于最小多项式,即 $d_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2)$。特征多项式 $f(\lambda)$ 就是特征矩阵 $\lambda I - A$ 的 n 阶行列式因子 $D_n(\lambda)$,n 阶行列式因子等于所有不变因子的乘积。所以有,**不变因子的乘积等于特征多项式**,即 $d_1 d_2 d_3 = \det(\lambda I - A) = \lambda^2(\lambda + 2)$。由于 d_3 已经包含了所有的因子,且 $d_1|d_2|d_3$,故必有 $d_2(\lambda) = 1, d_1(\lambda) = 1$。所以不变因子为 $1, 1, \lambda^2(\lambda + 2)$。

2. 若 3 阶方阵 $A \neq 2I$，且 $A^2 - 4A + 4I = 0$，则 Jordan 型 $J_A = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$。

【解答】

由已知条件 $A^2 - 4A + 4I = 0$，即 $(A - 2I)^2 = 0$。这说明 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 必须整除 $(\lambda - 2)^2$。可能的最小多项式为 $\lambda - 2$ 或 $(\lambda - 2)^2$。

- 若 $m(\lambda) = \lambda - 2$，则 $A - 2I = 0 \implies A = 2I$。但这与题目条件 $A \neq 2I$ 矛盾。
- 因此，最小多项式必须是 $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2$。

这意味着 A 的特征值全为 2，且 Jordan 标准型中对应特征值 2 的最大 Jordan 块的阶数为 2。因为 A 是 3 阶方阵，特征值的代数重数之和为 3。Jordan 块的阶数之和为 3，且最大阶数为 2，唯一的组合是一个 2 阶块和一个 1 阶块。即 $J_A = \mathrm{diag}(J_2(2), J_1(2)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。

3. 设 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$，则 AB 的特征多项式为$\underline{\lambda^{n-1}(\lambda - \sum_{i=1}^n a_i b_i)}$

【解答】

A 是 $n \times 1$ 列向量，B 是 $1 \times n$ 行向量。矩阵 $C = AB$ 是一个 $n \times n$ 矩阵。由于 C 的列向量都是 A 的倍数，即 C 的列空间维数（秩）不超过 1。

- 若 $AB = O$，则特征多项式为 λ^n。
- 若 $AB \neq O$，则 $\mathrm{rank}(AB) = 1$。

对于秩为 1 的矩阵，它有 $n - 1$ 个特征值为 0。根据迹的性质，所有特征值之和等于矩阵的迹。设非零特征值为 μ，则 $\mu + 0 + \cdots + 0 = \mathrm{tr}(AB)$。$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$。因此，$AB$ 的特征值为 $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ (重数 1) 和 0 (重数 $n - 1$)。特征多项式为:

$$|\lambda I - AB| = \lambda^{n-1} \left(\lambda - \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)$$

4. 若 $V_1 = L(a_1, a_2)$，$V_2 = L(b_1, b_2)$，其中 $a_1 = (1, 0, 0, 1), a_2 = (0, 1, 0, 1), b_1 = (1, 1, 1, 0), b_2 = (0, 0, 0, 1)$，则 $V_1 + V_2$ 的维数为 $\underline{4\qquad}$。

【解答】

子空间 V_1+V_2 由向量组 $\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$ 生成。其维数等于这四个向量构成的矩阵的秩。构造矩阵 M 并进行初等行变换：

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

此时矩阵已化为行阶梯形，非零行有 4 行。因此 $\mathrm{rank}(M)=4$。所以 $\dim(V_1+V_2)=4$。

5. 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，则 $\|Ax\|_1=\underline{8}$, $\|Ax\|_2=\underline{\sqrt{22}}$, $\|Ax\|_\infty=\underline{3}$。

【解答】

首先计算向量 $y=Ax$：

$$y=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)+1(1)+1(0)\\1(1)+2(1)+1(0)\\1(1)+1(1)+2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}$$

接下来计算各项范数：

- 1-范数（元素绝对值之和）：$\|y\|_1=|3|+|3|+|2|=8$。
- 2-范数（欧几里得范数）：$\|y\|_2=\sqrt{3^2+3^2+2^2}=\sqrt{9+9+4}=\sqrt{22}$。
- ∞-范数（元素绝对值的最大值）：$\|y\|_\infty=\max(|3|,|3|,|2|)=3$。

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$，则 A 的从属于向量范数 $\|x\|_1$ 的矩阵范数为 $\underline{3\qquad}$，A 的谱半径为 $\underline{3\qquad}$，A^5 的谱半径为 $\underline{243\qquad}$。

【解答】

(a) **从属于向量 1-范数的矩阵范数**（列和范数）：$\|A\|_1=\max_j\sum_i|a_{ij}|$。$A$ 的第一列绝对值之和为 $|2|+|0|=2$。A 的第二列绝对值之和为 $|0|+|3|=3$。故 $\|A\|_1=\max(2,3)=3$。

(b) **谱半径**：谱半径 $\rho(A)$ 是矩阵特征值模的最大值。A 是对角矩阵，特征值为对角线元素：$\lambda_1=2,\lambda_2=3$。$\rho(A)=\max(|2|,|3|)=3$。

(c) **A^5 的谱半径**：若 λ 是 A 的特征值，则 λ^k 是 A^k 的特征值。A^5 的特征值为 $2^5=32$ 和 $3^5=243$。故 $\rho(A^5)=243$。

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $(e^A)^H e^A = \underline{I\qquad\qquad}$。

【解答】

矩阵 A 是实矩阵，且满足 $A^T = -A$（反对称矩阵）。在复数域内，实反对称矩阵也是反 Hermite 矩阵，即 $A^H = -A$。我们需要计算 $(e^A)^H e^A$。根据矩阵指数的性质：1. $(e^A)^H = e^{A^H}$。2. 若 $XY = YX$，则 $e^X e^Y = e^{X+Y}$。因为 $A^H = -A$，所以 A^H 与 A 可交换（$(-A)A = A(-A) = -A^2$）。推导如下：

$$(e^A)^H e^A = e^{A^H} e^A = e^{-A} e^A = e^{-A+A} = e^0 = I$$

其中 I 为 2 阶单位矩阵。

二、判断题 (1 分 × 10)，正确的写 “T”，错误的写 “F”

1. 设 A 为 n 阶方阵，A 为正规矩阵 $\Leftrightarrow$ A 为单纯矩阵。(F)

【解答】

正规矩阵（$A^H A = AA^H$）一定可以酉对角化，因此是单纯矩阵（可对角化）。但是单纯矩阵不一定是正规矩阵。例如，$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 是可对角化的（特征值不同），但它不是正规矩阵。

2. 设 A 和 B 均为 n 阶方阵，$A \sim B \Leftrightarrow A$ 和 B 具有相同的特征值。(F)

【解答】

相似矩阵具有相同的特征值（包括代数重数）。但具有相同特征值的矩阵不一定相似。例如，$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 都只有特征值 0（重数 2），但它们不相似（因为 Jordan 标准型不同）。

3. 若 B 是行满秩矩阵，C 是列满秩矩阵，则 $I = BB^H(BB^H)^{-1}$，$I = (C^H C)^{-1} C^H C$。(T)

4. A 和 B 为 n 阶方阵，则 $R(AB) \subseteq R(A)$，$N(B) \subseteq N(AB)$。(T)

【解答】

对于 $R(AB) \subseteq R(A)$：若 $y \in R(AB)$，则 $y = (AB)x = A(Bx)$。令 $z = Bx$，则 $y = Az$，所以 $y \in R(A)$。对于 $N(B) \subseteq N(AB)$：若 $x \in N(B)$，则 $Bx = \boldsymbol{\theta}$。那么 $(AB)x = A(Bx) = A\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$，所以 $x \in N(AB)$。

5. 任一复方阵 A 都酉相似于一个上三角阵，但是其主对角线元素不一定为 A 的特征值。(F)

【解答】

根据 Schur 定理，任一复方阵 A 都酉相似于一个上三角矩阵 T，即 $A = UTU^H$。相似矩阵具有相同的特征值。上三角矩阵的特征值就是其主对角线元素。因此，T 的主对角线元素就是 A 的特征值。

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.2 & a \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$，$a \in \mathbb{R}$，且 $|a| < 0.8$，则 $(I-A)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right) + A = 2A$。(F)

【解答】

矩阵 A 的特征值为 $0.2, 0.2$。谱半径 $\rho(A) = 0.2 < 1$。因此，矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛，且 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$。将此代入等式左边：$(I-A)^2(I-A)^{-1}+A = (I-A)+A = I$。原等式变为 $I = 2A$。这意味着 $A = \frac{1}{2}I = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$。这与给定的 $A = \begin{bmatrix} 0.2 & a \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$ 矛盾（除非 $0.2 = 0.5$ 且 $a = 0$，这显然不成立）。

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}$，则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} A^k$ 收敛。(T)

【解答】

1. 矩阵级数收敛的判定准则：对于矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$，设其对应的标量幂级数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛半径为 R。若矩阵 A 的谱半径 $\rho(A) < R$，则矩阵级数绝对收敛。若 $\rho(A) > R$，则矩阵级数发散。

2. 计算标量级数的收敛半径 R。本题对应的标量级数为：$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{z}{2}\right)^k$。利用**比值判别法**求收敛半径：$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)z^{k+1}}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{kz^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{|z|}{2} = \frac{|z|}{2}$。令 $\frac{|z|}{2} < 1$，得 $|z| < 2$。因此，该级数的收敛半径 $R = 2$。

3. 计算矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$。矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}$，计算其特征值：特征多项式为：$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 0.5 & -0.2 \\ -0.3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda-0.5)(\lambda-1) - (-0.2)(-0.3)$
$\lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 - 0.06 = 0$

解方程(利用求根公式或观察法)：$\lambda = \frac{1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 4 \times 0.44}}{2} = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25 - 1.76}}{2} = \frac{1.5 \pm \sqrt{0.49}}{2}$，$\lambda_1 = \frac{1.5+0.7}{2} = 1.1$，$\lambda_2 = \frac{1.5-0.7}{2} = 0.4$。所以，谱半径 $\rho(A) = 1.1$。

4. 因为：$\rho(A)=1.1<R=2$，根据判定准则，该矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^k}A^k$ 收敛。

8. $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$x\in\mathbb{C}^n$，若向量范数 $\|x\|_v$ 与矩阵范数 $\|A\|_m$ 满足不等式 $\|Ax\|_v\geq\|A\|_m\|x\|_v$，则称矩阵范数 $\|A\|_m$ 与向量范数 $\|x\|_v$ 是相容的。(F)

【解答】

矩阵范数 $\|A\|_m$ 与向量范数 $\|x\|_v$ 相容的定义是：对于所有 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $x\in\mathbb{C}^n$，满足 $\|Ax\|_v\leq\|A\|_m\|x\|_v$。题目中的不等式方向是相反的。

三、计算题 (8 分 × 5)

1. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，取一组基 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,0,0)^T$，$\boldsymbol{x}_2=(1,0,1,0)^T$，$\boldsymbol{x}_3=(-1,0,0,1)^T$，$\boldsymbol{x}_4=(1,-1,-1,1)^T$，将其化为一组标准正交基，并且求出 $A=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)$ 的满秩分解。

【解答】

1. Gram-Schmidt 正交化过程求标准正交基：

标准正交基为：$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T$, $\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0)^T$, $\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,1,1,3)^T$, $\boldsymbol{q}_4=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$

2、矩阵 A 的满秩分解

矩阵 $A=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 关键：计算 A 的秩，对 A 做初等行变换：

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r2-r1}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&-1&1&-2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r3+r2}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&-1&1&-2\\0&0&1&-3\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r4-r3}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&-1&1&-2\\0&0&1&-3\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

行阶梯形有 4 个非零行，故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{(A)=4}$（满秩）。满秩分解形式满秩分解要求 $A=BC$，其中：B 列满秩（$\operatorname{rank}(B)=4$），C 行满秩（$\operatorname{rank}(C)=4$）。

对于满秩矩阵，最简单的分解是：$\boldsymbol{A=A\cdot I_4}$ 其中：$B=A$（列满秩），$C=I_4$（4 阶单位矩阵，行满秩）。

2. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&-3\\1&1&-1&0&1\end{bmatrix}^T,$$

求 A 的值域的正交补 $(R(A))^{\perp}$。

【解答】

定理：设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $N(A)\oplus R(A^{\mathrm{H}})=\mathbb{C}^n$ 且 $R(A^{\mathrm{H}})=(N(A))^{\perp}$。则 $(R(A))^{\perp}=N(A^H)$

$A^H=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&-3\\1&1&-1&0&1\end{bmatrix}$。我们需要找到 $A^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$ 的所有解 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$。

对 A^H 进行行简化：

$$\begin{bmatrix}2&1&-1&1&-3\\1&1&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1&1&-1&0&1\\2&1&-1&1&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&1&-1&0&1\\0&-1&1&1&-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2}\begin{bmatrix}1&1&-1&0&1\\0&1&-1&-1&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&-4\\0&1&-1&-1&5\end{bmatrix}$$

对应的方程组为：$x_1+x_4-4x_5=0\Rightarrow x_1=-x_4+4x_5$，$x_2-x_3-x_4+5x_5=0\Rightarrow x_2=x_3+x_4-5x_5$

令 $x_3=c_1,x_4=c_2,x_5=c_3$ (自由变量)。则解向量为：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-c_2+4c_3\\c_1+c_2-5c_3\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

因此，$(R(A))^{\perp}=N(A^H)$ 的基为：$\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$。

$(R(A))^{\perp}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$。

3. 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 $\lambda I-A$ 的初等因子，不变因子。写出 A 的 Jordan 标准型及最小多项式。

答案：

- 初等因子：$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-2)$

- 不变因子：$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=1$，$d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

- Jordan 标准型：$J=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

- 最小多项式：$m(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

【解答】

1. 计算特征多项式与特征值

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

特征多项式为：

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-A)&=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}\\ &=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ 4 & \lambda-3\end{vmatrix}\\ &=(\lambda-2)[(\lambda+1)(\lambda-3)+4]\\ &=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)\\ &=(\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{aligned}$$

特征值及其重数：$\lambda_1=1$，代数重数 $m_1=2$; $\lambda_2=2$，代数重数 $m_2=1$

2. 计算特征向量与几何重数

对于 $\lambda=1$：

$$A-I=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解 $(A-I)x=0$：

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\-4x_1+2x_2=0\\x_1+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=2x_1\\x_3=-x_1\end{cases}$$

有 1 个自由变量，几何重数 $g_1=1$

对于 $\lambda=2$：因为几何重数小于等于代数重数，代数重数为 1，所以几何重数 $g_2=1$

3. 计算 $\lambda I-A$ 的行列式因子与不变因子

行列式因子：- 1 阶行列式因子 $D_1(\lambda)$：所有 1 阶子式的最大公因式

$$D_1(\lambda)=\gcd\{\lambda+1,-1,0,4,\lambda-3,0,-1,0,\lambda-2\}=1$$

- 2 阶行列式因子 $D_2(\lambda)$：所有 2 阶子式的最大公因式

$$D_2(\lambda)=\gcd\{\lambda^2-2\lambda+1,0,0,-1,\lambda^2-\lambda-2,2-\lambda,\lambda-3,4\lambda-8,\lambda^2-5\lambda+6\}=1$$

- 3 阶行列式因子 $D_3(\lambda)$：行列式

$$D_3(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

不变因子：

$$\begin{aligned}d_1(\lambda)&=D_1(\lambda)=1\\d_2(\lambda)&=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1\\d_3(\lambda)&=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{aligned}$$

4. 初等因子

将不变因子 $d_3(\lambda)$ 分解为互素因式的幂：

$$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-2)$$

初等因子：$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-2)$

5. Jordan 标准型

根据每个特征值的几何重数和代数重数：**几何重数代表 Jordan 块个数，代数重数代表 Jordan 块阶数之和**.

- $(\lambda-1)^2$ 对应一个 2 阶 Jordan 块 $J_2(1)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

- $(\lambda-2)$ 对应一个 1 阶 Jordan 块 $J_1(2)=[2]$

Jordan 标准型：

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

6. 最小多项式根据定理：矩阵 A 的最小多项式等于其特征矩阵 $\lambda I - A$ 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$。特征多项式 = 所有初等因子的乘积；最小多项式 = 每个特征值对应的最大幂次初等因子的乘积。所以

$$m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

4. 已知次数不超过 3 的多项式空间 $P_3[t]$ 的子空间

$$W = \mathrm{span}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}$$

其中 $f_1(t) = t^3 + 1$, $f_2(t) = t^2 + t$, $f_3(t) = t^2 + 1$, $f_4(t) = t^3 + t$。

1. 求子空间 W 的一个基；

2. 对于 W 中的多项式 $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$，定义线性变换

$$T[f(t)] = (a_0 + a_1 - a_2 - a_3) + a_1 t + (a_2 - a_3)t^2 + (a_0 + 2a_1 - 2a_2)t^3,$$

求线性变换 T 在（1）中求出的基下的矩阵。

答案：1. W 的一个基为 $\{t^3 + 1,\ t^2 + t,\ t^2 + 1\}$。

2. 线性变换 T 在该基下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

【解答】

1. 求子空间 W 的一个基

将多项式表示为系数向量：对于 $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$，用向量 $[a_0, a_1, a_2, a_3]^T$ 表示。则：

$$\begin{aligned} f_1(t) = t^3 + 1 \quad &\Rightarrow \quad [1, 0, 0, 1]^T \\ f_2(t) = t^2 + t \quad &\Rightarrow \quad [0, 1, 1, 0]^T \\ f_3(t) = t^2 + 1 \quad &\Rightarrow \quad [1, 0, 1, 0]^T \\ f_4(t) = t^3 + t \quad &\Rightarrow \quad [0, 1, 0, 1]^T \end{aligned}$$

构造矩阵 M，以这些向量为列：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算得 $\mathrm{rank}(M) = 3$，且行最简形为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元列为第 1、2、3 列，故 f_1, f_2, f_3 线性无关，且 $f_4 = f_1 + f_2 - f_3$。

因此，W 的一个基为：

$$\mathcal{B} = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$$

2. 求线性变换 T 在基 $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ 下的矩阵 A

根据线性变换矩阵的定义，我们需要分别计算基向量 f_1, f_2, f_3 在变换 T 下的像，并将这些像用基向量 $\mathcal{B}$ 线性表出。已知变换公式为：

$$T[a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3] = (a_0 + a_1 - a_2 - a_3) + a_1 t + (a_2 - a_3)t^2 + (a_0 + 2a_1 - 2a_2)t^3$$

第一步：计算 $T(f_1)$，对于 $f_1(t) = 1 + t^3$，系数为 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$。代入公式：

$$\begin{aligned} T(f_1) &= (1 + 0 - 0 - 1) + 0t + (0 - 1)t^2 + (1 + 0 - 0)t^3 \\ &= -t^2 + t^3 \end{aligned}$$

设 $T(f_1) = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$，即：

$$-t^2 + t^3 = x_1(1 + t^3) + x_2(t + t^2) + x_3(1 + t^2)$$

比较系数：

$$\begin{cases} t^3: & x_1 = 1 \\ t^2: & x_2 + x_3 = -1 \\ t: & x_2 = 0 \\ 1: & x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$。故 $T(f_1) = 1f_1 + 0f_2 - 1f_3$，坐标向量为 $[1, 0, -1]^T$。

第二步：计算 $T(f_2)$，对于 $f_2(t) = t + t^2$，系数为 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0$。代入公式：

$$\begin{aligned} T(f_2) &= (0 + 1 - 1 - 0) + 1t + (1 - 0)t^2 + (0 + 2 - 2)t^3 \\ &= t + t^2 \\ &= f_2 \end{aligned}$$

故 $T(f_2) = 0f_1 + 1f_2 + 0f_3$，坐标向量为 $[0, 1, 0]^T$。

第三步：计算 $T(f_3)$，对于 $f_3(t) = 1 + t^2$，系数为 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0$。代入公式：

$$\begin{aligned} T(f_3) &= (1 + 0 - 1 - 0) + 0t + (1 - 0)t^2 + (1 + 0 - 2)t^3 \\ &= t^2 - t^3 \end{aligned}$$

设 $T(f_3) = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3$，即：

$$t^2 - t^3 = y_1(1+t^3) + y_2(t+t^2) + y_3(1+t^2)$$

比较系数：

$$\begin{cases} t^3: & y_1 = -1 \\ t^2: & y_2 + y_3 = 1 \\ t: & y_2 = 0 \\ 1: & y_1 + y_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $y_1 = -1, y_2 = 0, y_3 = 1$。故 $T(f_3) = -1f_1 + 0f_2 + 1f_3$，坐标向量为 $[-1, 0, 1]^T$。

第四步：写出矩阵，将上述坐标向量作为列向量，得到线性变换 T 在基 $\mathcal{B}$ 下的矩阵 A：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上的详细过程是为了理解线性变换，其实本小问可以总结为求解以下方程：已知 $B = [T(f_1), T(f_2), T(f_3)], C = [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$，B=CA

四、(10 分)

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\dfrac{d}{dt}e^{At}$。

【解答】

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}}.$$

特征多项式为

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1) - (\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)[(\lambda-1)^2 - 1] \\ &= \lambda(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

特征值为 $\lambda_1 = 0$（单根），$\lambda_2 = 2$（二重根）。解 $(A-2I)x = 0$ 可得两个线性无关的特征向量，几何重数等于代数重数。故 A 可对角化。所以，A 的最小多项式无重根，$m(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$

e^{At} 解法：1. 单纯矩阵的谱分解式 2. 谱上一致性方法（重点，通用），需要先求出矩阵 A 的最小多项式

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{At} = e^{2t}A = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & -e^{2t} \\ e^{2t} & 2e^{2t} & e^{2t} \\ -e^{2t} & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.}$$

五、(10 分)

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$，令 $V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid (A-I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}\}$，求：$V_1 \cap V_2$ 及 $V_1 + V_2$ 的维数。

【解答】

要解决这个问题，我们需要利用幂等矩阵 $A^2 = A$ 的性质，结合线性子空间的基本概念（零空间、特征子空间、直和等）进行分析。

步骤 1：求 $V_1 \cap V_2$ 的维数

若 $x \in V_1 \cap V_2$，则：

$$Ax = \theta \quad 且 \quad (A-I)x = \theta$$

由 $(A-I)x = \theta$ 得 $Ax - x = \theta$，代入 $Ax = \theta$：

$$0 - x = \theta \implies x = \theta$$

因此 $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$，$\dim(V_1 \cap V_2) = 0$。

步骤 2：求 $V_1 + V_2$ 的维数

根据子空间维数公式：

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

已知 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$，只需计算 $\dim V_1 + \dim V_2$。由零空间维数 = 空间维数-秩

- $\dim V_1 = n - r(A)$
- $\dim V_2 = n - r(A-I)$

利用幂等矩阵性质：

$$A(A-I) = A^2 - A = O \implies \mathrm{Im}(A-I) \subseteq \ker(A) \implies r(A-I) \le n - r(A)$$

又 $A + (I-A) = I$，由秩不等式 $r(A) + r(I-A) \ge r(A+I-A) = r(I) = n$，而 $r(I-A) = r(A-I)$，故：

$$r(A) + r(A-I) = n$$

因此：

$$\dim V_1 + \dim V_2 = (n - r(A)) + (n - r(A-I)) = 2n - n = n$$

代入维数公式：

$$\dim(V_1 + V_2) = n - 0 = n$$

2024 期末试题

一、判断题（每题 1 分，共 10 分）

判断下列命题是否正确，并在括号内打“√”或“×”。

1. 设 $V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det(A) = 0\}$，则 V 在 $\mathbb{R}$ 上定义的普通矩阵加法和数乘下构成线性空间。

   【解答】

   答案：(×)

   解析：要判断集合 V 是否构成线性空间，必须验证其对加法和数乘是否封闭。

   数乘封闭性：设 $A \in V$，即 $\det(A) = 0$。对于任意 $k \in \mathbb{R}$，$\det(kA) = k^3 \det(A) = 0$，所以 $kA \in V$。数乘是封闭的。

   加法封闭性：我们需要检查任意 $A, B \in V$，是否有 $A + B \in V$。取两个行列式为 0 的矩阵：

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   显然，$\det(A) = 0$，$\det(B) = 0$，即 $A, B \in V$。计算它们的和：

   $$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

   计算和的行列式：

   $$\det(A + B) = \det(I) = 1 \neq 0$$

   因此，$A + B \notin V$。

   由于加法不封闭，故 V 不构成线性空间。

2. 在有限维线性空间中，同一个向量在不同的基下的坐标可能相同。

   【解答】

答案：(√)
解析：设 V 是 n 维线性空间，$\alpha \in V$ 是一个非零向量。设第一组基为 $\mathcal{B}_1 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$。假设 α 在 $\mathcal{B}_1$ 下的坐标为 $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$，即：

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \epsilon_i$$

现在我们要构造第二组基 $\mathcal{B}_2 = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$，使得 α 在 $\mathcal{B}_2$ 下的坐标也是 X。即要求：

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i$$

这种情况是完全可能发生的。最简单的例子是基向量的置换。举例说明：设 $V = \mathbb{R}^2$，向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

取基 $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$。则 $\alpha = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$，坐标为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

取基 $\mathcal{B}_2 = \{e_2, e_1\} = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$。则 $\alpha = 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1$，坐标依然为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

虽然基改变了（顺序变了），但坐标值恰好相同。更一般地，如果过渡矩阵 P 满足 $PX = X$（即 X 是 P 的属于特征值 1 的特征向量），那么坐标就会相同。

3. 设 n 阶复方阵 A、B 具有相同的特征多项式和最小多项式，则 A 和 B 一定相似。

【解答】

答案：(×)
解析：矩阵相似的充要条件是它们具有相同的初等因子/不变因子/Jordan 标准型。仅凭特征多项式和最小多项式相同，不足以确定 Jordan 块的具体结构，特别是当特征值的几何重数不唯一确定时。

反例：考虑 $n = 4$ 的情况。设特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^4$，最小多项式为 $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$。这意味着 Jordan 块中最大的阶数是 2。对于 4×4 矩阵，满足上述条件的 Jordan 标准型有两种可能：

情形 1：两个 2 阶 Jordan 块。

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

情形 2：一个 2 阶 Jordan 块，两个 1 阶 Jordan 块。

$$J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

对于 J_1 和 J_2：

特征多项式均为 $(\lambda-\lambda_0)^4$。最小多项式均为 $(\lambda-\lambda_0)^2$。但是 J_1 和 J_2 不相似（Jordan 块结构不同，几何重数不同：J_1 只有 2 个线性无关特征向量，J_2 有 3 个）。

因此命题错误。

4. 设 A, B 均为 n 阶复方阵，则 $R(AB) \subseteq R(A)$，$N(B) \subseteq N(AB)$。

【解答】

答案：(√)

解析：我们需要分别证明两个包含关系。

证明 $R(AB) \subseteq R(A)$：设 $y \in R(AB)$。根据像空间（列空间）的定义，存在向量 $x \in \mathbb{C}^n$，使得 $y = (AB)x$。利用结合律，有 $y = A(Bx)$。令 $z = Bx$，则 $z \in \mathbb{C}^n$，且 $y = Az$。根据像空间的定义，$y \in R(A)$。所以，$R(AB) \subseteq R(A)$ 成立。

证明 $N(B) \subseteq N(AB)$：设 $x \in N(B)$。根据核空间（零空间）的定义，这意味着 $Bx = \boldsymbol{\theta}$（零向量）。我们要考察 x 是否在 AB 的核中，即计算 $(AB)x$。

$$(AB)x = A(Bx) = A\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$$

因此，$x \in N(AB)$。所以，$N(B) \subseteq N(AB)$ 成立。

综上，命题正确。

5. 若 A 是 n 阶可逆复方阵，则 $\sin A$ 一定可逆。

【解答】

答案：(×)

解析：矩阵函数的性质取决于矩阵的特征值。设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。根据谱映射定理，矩阵函数 $f(A) = \sin A$ 的特征值为 $f(\lambda_i) = \sin(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$。矩阵 $\sin A$ 可逆的充要条件是其所有特征值均不为 0，即：

$$\det(\sin A) = \prod_{i=1}^{n} \sin(\lambda_i) \neq 0$$

这要求 $\forall i, \sin(\lambda_i) \neq 0$，即 $\lambda_i \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$。题目已知 A 可逆，这意味着 A 的特征值 $\lambda_i \neq 0$。但是，如果 A 的某个特征值取为 $\pi, 2\pi, -\pi$ 等非零整数倍的 π，虽然 A 可逆（$\lambda \neq 0$），但 $\sin(\lambda) = 0$，导致 $\sin A$ 不可逆。

反例：取 $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。$\det(A) = \pi \neq 0$，所以 A 可逆。

$$\sin A = \begin{bmatrix} \sin(\pi) & 0 \\ 0 & \sin(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin(1) \end{bmatrix}$$

$\det(\sin A) = 0$，所以 $\sin A$ 不可逆。

6. 设 T 是 n 维欧氏空间 V 的一个正交变换，则 T 对应的矩阵一定是正交矩阵。

【解答】

答案：$(\times)$

解析：这是一个非常容易混淆的概念题。

定义：正交变换是指保持内积不变的线性变换，即 $(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$。

定理：正交变换在标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

如果选取的基不是标准正交基，正交变换对应的矩阵通常不是正交矩阵。推导：设 $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ 是 V 的一组基，度量矩阵为 $G = [(\epsilon_i, \epsilon_j)]$。设 T 在 $\mathcal{B}$ 下的矩阵为 A。对于任意坐标向量 X, Y，对应的向量为 α, β。内积 $(\alpha, \beta) = X^T G Y$。变换后 $(T\alpha, T\beta) = (AX)^T G (AY) = X^T (A^T G A) Y$。$T$ 是正交变换 $\iff$ $(\alpha, \beta) = (T\alpha, T\beta) \iff G = A^T G A$。只有当基是标准正交基时，度量矩阵 $G = I$。此时条件变为 $I = A^T I A \implies A^T A = I$，即 A 是正交矩阵。若 $G \neq I$，则 A 未必是正交矩阵。

7. 设 A, B 均是正规复矩阵，且 $AB = BA$，则 AB 和 BA 也均是正规矩阵。

【解答】

答案：(√)

解析：

定义回顾：矩阵 M 是正规矩阵当且仅当 $M^H M = M M^H$。定理引用：若 A, B 都是正规矩阵且 $AB = BA$，则它们可以同时酉对角化。

证明过程：因为 A, B 正规且交换，存在同一个酉矩阵 U，使得：

$$A = U \Lambda_A U^H, \quad B = U \Lambda_B U^H$$

其中 Λ_A, Λ_B 均为对角矩阵。考虑积 AB（注意 $AB = BA$）：

$$AB = (U \Lambda_A U^H)(U \Lambda_B U^H) = U (\Lambda_A \Lambda_B) U^H$$

由于两个对角矩阵的乘积 $\Lambda_A\Lambda_B$ 依然是对角矩阵（记为 D），即 $AB = UDU^H$。任何可以被酉对角化的矩阵都是正规矩阵。验证如下：

$$(AB)^H(AB) = (UDU^H)^H(UDU^H) = UD^HU^HUDU^H = UD^HDU^H$$

$$(AB)(AB)^H = (UDU^H)(UDU^H)^H = UDU^HUD^HU^H = UDD^HU^H$$

因为 D 是对角矩阵，对角元素的复数乘法满足交换律，所以 $D^HD = DD^H$。从而 $(AB)^H(AB) = (AB)(AB)^H$。所以 AB 是正规矩阵。同理 BA 也是（且 $AB = BA$）。

8. 设 A 是 n 阶复方阵，则 $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$。

【解答】

答案：(√)

解析：我们需要比较谱范数（2-范数）和 Frobenius 范数（F-范数）。设 A 的奇异值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$。

谱范数定义：

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_1 \quad \text{(最大的奇异值)}$$

Frobenius 范数定义：

$$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^HA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$$

比较：显然，

$$\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 \geq \sigma_1^2$$

因为 $\sigma_i \geq 0$。开平方得：

$$\|A\|_F \geq \sigma_1 = \|A\|_2$$

9. 设

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 不绝对收敛。

【解答】

答案：(√)

解析：矩阵级数 $\sum C_k A^k$ 绝对收敛的定义是数值级数 $\sum \|C_k A^k\|$ 收敛（对于任意一种矩阵范数）。

首先，应该考虑 Abel 型定理，但是幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}z^k$ 的收敛半径为 1（设 $c_k=\frac{1}{k^2}$，$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2=1.$），矩阵 A 的谱半径也为 1，无法使用，只能使用定义法。

分析矩阵 A 的结构：A 是一个 Jordan 块结构。$A=-I+N$，其中 $N=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。

注意 $N^2=0$。

计算 A^k：利用二项式定理展开（需要 I 与 N 可交换）：

$$A^k=(I+N)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(I)^{k-j}N^j \quad k\geq 0.$$

$$A^k=(-I+N)^k=(-I)^k+\binom{k}{1}(-I)^{k-1}N+\binom{k}{2}(-I)^{k-2}N^2+\dots$$

因为 $N^2=0$，后续项均为 0。

$$A^k=(-1)^kI+k(-1)^{k-1}N=(-1)^k\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+k(-1)^{k-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^k=\begin{bmatrix}(-1)^k&k(-1)^{k-1}&0\\0&(-1)^k&0\\0&0&(-1)^k\end{bmatrix}$$

分析级数通项的范数：考虑级数的一般项 $U_k=\frac{1}{k^2}A^k$。

$$U_k=\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}(-1)^k&-k(-1)^k&0\\0&(-1)^k&0\\0&0&(-1)^k\end{bmatrix}=(-1)^k\begin{bmatrix}\frac{1}{k^2}&-\frac{1}{k}&0\\0&\frac{1}{k^2}&0\\0&0&\frac{1}{k^2}\end{bmatrix}$$

我们要判断 $\sum_{k=1}^{\infty}\|U_k\|$ 是否收敛。选取 ∞-范数（行和范数）计算方便：

$$\|U_k\|_\infty=\max\left(|\frac{1}{k^2}|+|-\frac{1}{k}|,\ |\frac{1}{k^2}|,\ |\frac{1}{k^2}|\right)=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}$$

判断收敛性：我们需要判断级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k})$ 的收敛性。

$\sum\frac{1}{k^2}$ 是收敛的（p-级数，$p=2>1$）。$\sum\frac{1}{k}$ 是发散的（调和级数）。

因此，$\sum\|U_k\|$ 发散。

10. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}, x \in \mathbb{C}^n$，若向量范数 $\|x\|_v$ 与矩阵范数 $\|A\|_m$ 满足不等式

$$\|Ax\|_v \geq \|A\|_m \|x\|_v,$$

则称矩阵范数 $\|A\|_m$ 与向量范数 $\|x\|_v$ 相容。

【解答】

答案：(×)

解析：这是对相容性定义的考察。相容性的正确定义是不等号方向相反。矩阵范数 $\|A\|_m$ 与向量范数 $\|x\|_v$ 相容，是指对于任意 A 和 x，满足：

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$$

二、填空题（每题 3 分，共 27 分）

1. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix},$$

V_1, V_2 分别是齐次方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的解空间，则 $\dim(V_1 \cap V_2) =$ ____。

【解答】

第一步：理解 $V_1 \cap V_2$ 的含义

V_1 是方程组 $Ax = 0$ 的解空间，V_2 是方程组 $Bx = 0$ 的解空间。$V_1 \cap V_2$ 表示既满足 $Ax = 0$ 又满足 $Bx = 0$ 的向量集合。也就是说，$x \in V_1 \cap V_2$ 当且仅当 x 是联立方程组 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$ 的解。

第二步：构造联立方程组的系数矩阵

令 $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$。

我们需要求 C 的秩 $\operatorname{rank}(C)$。根据维数公式，解空间的维数 $\dim(V_1 \cap V_2) = n - \operatorname{rank}(C)$，其中 $n = 4$ 是矩阵的列数。

第三步：对矩阵 C 进行初等行变换求秩

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第四步：计算维数

由行阶梯形矩阵可知，非零行有 3 行，所以 $\text{rank}(C) = 3$。

解空间的维数为：

$$\dim(V_1 \cap V_2) = n - \text{rank}(C) = 4 - 3 = 1$$

结果： $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$。

2. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，若向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + k\alpha_1$ 也线性无关，则 k 应当满足 ____。

【解答】

第一步：建立过渡矩阵关系

设新向量组为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$，则有：

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 = k\alpha_1 + \alpha_3 \end{cases}$$

写成矩阵形式为：

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]P$$

其中过渡矩阵 P 为：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

第二步：利用行列式判断线性相关性

已知 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 线性无关。向量组 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 线性无关的充要条件是过渡矩阵 P 可逆，即 $\det(P) \neq 0$。

第三步：计算 $\det(P)$

按第一行展开：

$$\det(P) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(P) = 1(1-0) + k(1-0) = 1 + k$$

第四步：得出结论

要使向量组线性无关，需满足 $\det(P) \neq 0$，即：

$$1 + k \neq 0 \implies k \neq -1$$

结果： $k \neq -1$。

3. 设 $M = I_n - ww^\top$，其中 $w = \dfrac{1}{\sqrt{n}}[1, 1, \cdots, 1] \in \mathbb{R}^n$，则 $\det(M) =$ ____。

【解答】

第一步：分析向量 w 的性质

计算 w 的模长平方（即内积 $w^\top w$）：

$$w^\top w = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 [1, 1, \cdots, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \cdot (1 + 1 + \cdots + 1) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

所以 w 是单位向量。

第二步：利用矩阵行列式引理

对于形式为 $I + uv^\top$ 的矩阵，其行列式为 $\det(I + uv^\top) = 1 + v^\top u$。

在本题中，$M = I_n - ww^\top = I_n + (-w)w^\top$。令 $u = -w, v = w$。

第三步：计算行列式

$$\det(M) = \det(I_n - ww^\top) = 1 + w^\top(-w) = 1 - w^\top w$$

由第一步可知 $w^\top w = 1$，所以：

$$\det(M) = 1 - 1 = 0$$

4. 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则 $\|A\|_1 =$ ____，$\|Ax\|_\infty =$ ____，$\|A\|_F =$ ____。

【解答】

第一步：计算 $\|A\|_1$ (列和范数)

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$，即矩阵各列元素绝对值之和的最大值。

第一列和：$|2| + |1| + |1| = 4$ 第二列和：$|1| + |2| + |1| = 4$ 第三列和：$|1| + |1| + |2| = 4$

所以 $\|A\|_1 = \max\{4, 4, 4\} = 4$。

第二步：计算 Ax 并求 $\|Ax\|_\infty$ (无穷范数)

首先计算向量 Ax：

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

向量的无穷范数 $\|y\|_\infty = \max_i |y_i|$。

$$\|Ax\|_\infty = \max\{|3|, |2|, |3|\} = 3$$

第三步：计算 $\|A\|_F$ (Frobenius 范数)

$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$，即矩阵所有元素平方和的算术平方根。

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$$
$$= 4 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1 + 4 = 18$$
$$\|A\|_F = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

结果： 4，3，$3\sqrt{2}$。

5. 设 $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$，特征值 $\lambda = 2$ 是三重特征根且只有一个线性无关的特征向量，则 A 的 Jordan 标准型是 ____________。

【解答】

第一步：分析 Jordan 块的数量

线性无关特征向量的个数等于 Jordan 块的个数（几何重数）。题目指出“只有一个线性无关的特征向量”，说明几何重数为 1。这意味着 Jordan 标准型中只有一个 Jordan 块。

第二步：确定 Jordan 块的阶数

特征值 $\lambda = 2$ 是三重特征根，说明代数重数为 3。矩阵 A 是 3×3 矩阵，所有 Jordan 块的阶数之和必须等于 3。

因为只有一个 Jordan 块，所以这个块必须是 3 阶的。

第三步：写出 Jordan 标准型

一个特征值为 2 的 3 阶 Jordan 块的形式为：

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

结果： $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。

6. 设

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & i \\ 0 & 1 & 6i \end{bmatrix},$$

则 A ______（填“是”或者“不是”）单纯矩阵。

【解答】

第一步：利用 Gerschgorin 圆盘定理分析特征值分布

单纯矩阵是指可以对角化的矩阵。如果一个 n 阶矩阵有 n 个互不相同的特征值，则它一定是单纯矩阵。

我们计算矩阵 A 的行盖尔圆半径 $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$。

- 第 1 行：中心 $a_{11} = 7$，半径 $R_1 = |0| + |1| = 1$。圆盘 $D_1 = \{z : |z - 7| \leq 1\}$。
- 第 2 行：中心 $a_{22} = -5$，半径 $R_2 = |-1| + |i| = 1 + 1 = 2$。圆盘 $D_2 = \{z : |z - (-5)| \leq 2\}$。
- 第 3 行：中心 $a_{33} = 6i$，半径 $R_3 = |0| + |1| = 1$。圆盘 $D_3 = \{z : |z - 6i| \leq 1\}$。

第二步：判断圆盘是否相交

- D_1 在复平面的实轴上，范围 $[6, 8]$。
- D_2 在复平面的实轴上，范围 $[-7, -3]$。
- D_3 在复平面的虚轴附近，中心在 $(0, 6)$，半径为 1。

显然：1. D_1 与 D_2 不相交（距离远大于半径和）。2. D_1 与 D_3：D_1 的点实部至少为 6，D_3 的点实部最大为 1，不相交。3. D_2 与 D_3：D_2 的点实部至多为 -3，D_3 的点实部最小为 -1，不相交。

第三步：得出结论

由于三个盖尔圆互不相交（孤立），根据盖尔圆定理，每个圆盘内恰好包含一个特征值。这意味着矩阵 A 有三个互不相同的特征值。

有 n 个互异特征值的 n 阶矩阵一定可以对角化，即为单纯矩阵。

结果： 是。

7. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

则 A 的满秩分解为 ____________________。

【解答】

第一步：求矩阵 A 的秩并进行初等行变换

我们需要将 A 化为行最简形以找出线性无关的列。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第二步：构造矩阵 F（列满秩矩阵）

由行最简形 H 可知，第 1 列和第 2 列是主元列。取原矩阵 A 的第 1 列和第 2 列组成矩阵 F：

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

第三步：构造矩阵 G（行满秩矩阵）

取行最简形 H 的非零行组成矩阵 G：

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

结果： $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$。

8. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

若极限 $\lim_{k\to\infty} A^k$ 存在，则 a 的取值范围是 ________。

【解答】

第一步：分析矩阵幂收敛的充要条件

幂级数 z^K 的收敛半径为 1，矩阵 A^k 收敛的充要条件是其谱半径满足以下条件之一：谱半径 $\rho(A)<1$ 或者 $\rho(A)=1$，根据矩阵收敛定义讨论。写出 A^k 的表达式

$$\boxed{A^k=\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{a^k-1}{a-1}\\ 0 & a^k\end{bmatrix}, & a\neq 1,\\ \begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}, & a=1.\end{cases}}$$

第二步：求 A 的特征值

由于 A 是上三角矩阵，其特征值即为对角线元素：

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=a$$

第三步：分类讨论 a 的取值

我们需要保证 $\lambda_2=a$ 满足收敛条件。

1. 若 $|a|<1$，即 $-1<a<1$：此时 $\lambda_1=1, |\lambda_2|<1$，$\rho(A)=1$。$a^k$ 收敛。

2. 若 $a=1$：此时 $\lambda_1=1, \lambda_2=1$。此时 A 为 Jordan 标准型 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，其 k 次幂为 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，当 $k\to\infty$ 时发散。所以 $a\neq 1$。

3. 若 $a=-1$：此时 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$。$A$ 为 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，

$$A^k=\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, & k \text{ 为偶数},\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, & k \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

发散。

4. 若 $|a|>1$：此时 $\rho(A)>1$，发散。

第四步：综合结论

综上所述，必须满足 $-1<a<1$。

结果： $(-1,1)$。

9. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

定义集合

$$S_A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i A^i \middle| \forall a_i \in \mathbb{R}, \text{ 至多有限个} a_i \neq 0 \right\},$$

则 S_A ______ (填"是"或者"不是")线性空间,如不是请给出理由:____________。

【解答】

第一步:理解集合 S_A 的含义

S_A 是由矩阵 A 的正整数次幂生成的线性组合的集合。由于求和式中至多有限个 a_i 非零,S_A 中的元素实为形如 $\sum_{i=1}^{m} a_i A^i$ 的有限和,即 $S_A = \text{span}\{A, A^2, A^3, \cdots\}$。

第二步:验证线性空间的封闭性

线性空间需要满足加法封闭性和数乘封闭性。

设 $X, Y \in S_A$。$X = \sum_{i=1}^{N} x_i A^i$, $Y = \sum_{j=1}^{M} y_j A^j$。

1. **加法**:$X + Y = \sum (x_k + y_k) A^k$。显然属于 S_A。

2. **数乘**:$kX = \sum (kx_i) A^i$。显然属于 S_A。

满足封闭性要求

第三步:检查零矩阵是否存在于 S_A 中

我们需要判断是否存在系数 a_i(不全为 0,或者全为 0),使得 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i A^i = O$。当然,如果取所有 $a_i = 0$,则结果为 O。定义中说"至多有限个 $a_i \neq 0$",并没有排除"所有 $a_i = 0$"的情况。只要 $O \in S_A$,且满足封闭性,它就是线性空间。

既然加法和数乘都封闭,且包含零元素(取所有系数为 0),它就是线性空间。

结果: 是。

三、解答题(共 41 分)

1. (13 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对 $\mathbb{R}^3$ 中任意的向量 $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$（$k_j \in \mathbb{R}$），定义变换 T 为

$$T(x) = k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + k_3T(\alpha_3),$$

其中

$$T(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

试求解以下问题：

(a) 证明 T 是线性变换；

(b) 求 T 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵。

【解答】

1. 证明 T 是线性变换

要证明 T 是线性变换，我们需要验证 T 满足加法性和齐次性。即对于任意向量 $x, y \in \mathbb{R}^3$ 和任意标量 $c \in \mathbb{R}$，需满足：

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- $T(cx) = cT(x)$

设 $x, y \in \mathbb{R}^3$。由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，我们可以将 x 和 y 唯一地表示为：

$$x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

$$y = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$$

其中 $k_i, m_i \in \mathbb{R}$。

(1) 验证加法性： 计算 $x + y$：

$$x + y = (k_1 + m_1)\alpha_1 + (k_2 + m_2)\alpha_2 + (k_3 + m_3)\alpha_3$$

根据题目中 T 的定义：

$$\begin{aligned} T(x + y) &= (k_1 + m_1)T(\alpha_1) + (k_2 + m_2)T(\alpha_2) + (k_3 + m_3)T(\alpha_3) \\ &= k_1T(\alpha_1) + m_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + m_2T(\alpha_2) + k_3T(\alpha_3) + m_3T(\alpha_3) \\ &= (k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + k_3T(\alpha_3)) + (m_1T(\alpha_1) + m_2T(\alpha_2) + m_3T(\alpha_3)) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

故加法性成立。

(2) 验证齐次性： 设 $c \in \mathbb{R}$，计算 cx：

$$cx = c(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) = (ck_1)\alpha_1 + (ck_2)\alpha_2 + (ck_3)\alpha_3$$

根据题目中 T 的定义：

$$\begin{aligned}T(cx) &= (ck_1)T(\alpha_1) + (ck_2)T(\alpha_2) + (ck_3)T(\alpha_3)\\ &= c\left(k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + k_3T(\alpha_3)\right)\\ &= cT(x)\end{aligned}$$

故齐次性成立。综上所述，变换 T 满足线性变换的定义，即 T 是线性变换。

2. 求 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵

设 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 A。根据线性变换矩阵的定义，我们需要将 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), T(\alpha_3)$ 分别用基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，即寻找系数 a_{ij} 使得：

$$\begin{cases}T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3\\ T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3\\ T(\alpha_3) = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3\end{cases}$$

此时矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$。我们可以将上述关系写成矩阵形式：

$$[T(\alpha_1), T(\alpha_2), T(\alpha_3)] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]A$$

令 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，$C = [T(\alpha_1), T(\alpha_2), T(\alpha_3)]$。则有 $C = BA$，

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

接下来我们需要求解线性方程组 $BA = C$ 来得到 A。我们可以通过对增广矩阵 $[B|C]$ 进行初等行变换，将 B 部分化为**行最简阶梯形** R，得到 $[R|D]$。构造增广矩阵：

$$[B|C] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

检查是否有解：若 R 的零行对应的 D 的行全为零，则有解；若 R 的某行全为零但 D 的对应行非零，则方程组无解。

若有解，从 $[R \mid D]$ 中写出 A 的每一列的解。若 R 的秩 $r < n$，则解中含有 $n - r$ 个自由参数。

最终解得：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & -3 & -2\\ 2 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

综上所述，T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

2.（13 分）设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) 求 A 的谱分解；

(b) 计算 A^{100}（用谱阵表示即可）。

【解答】

1. 求 A 的谱分解

第一步：求矩阵 A 的特征值。计算 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

由于第一列只有第一个元素非零，我们可以按第一列展开：

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -4 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda + 5) \end{aligned}$$

令 $|\lambda I - A| = 0$，解得 A 的特征值为：

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -5$$

由于 A 有三个互不相同的特征值，因此 A 是单纯矩阵，可以进行谱分解。

第二步：计算各特征值对应的谱阵（投影矩阵）G_i。根据谱分解定理，若单纯矩阵 A 有 k 个互异特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，则对应的谱阵 G_i 可以通过拉格朗日插值多项式公式计算：

$$G_i = \frac{\prod_{j \neq i}(A - \lambda_j I)}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)}$$

(1) 计算 $\lambda_1 = 1$ 对应的谱阵 G_1：

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \\ &= -\frac{1}{24}(A - 5I)(A + 5I) \end{aligned}$$

先计算矩阵乘积:

$$A-5I=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 2\\ 0 & -8 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix},\quad A+5I=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(A-5I)(A+5I)&=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 2\\ 0 & -8 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 8\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-24 & 0 & 24\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以:

$$G_1=-\frac{1}{24}\begin{bmatrix}-24 & 0 & 24\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2) 计算 $\lambda_2=5$ 对应的谱阵 G_2:

$$\begin{aligned}G_2&=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\\ &=\frac{1}{40}(A-I)(A+5I)\end{aligned}$$

计算矩阵乘积:

$$A-I=\begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix},\quad A+5I=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(A-I)(A+5I)&=\begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 8\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 16 & 32\\ 0 & 8 & 16\\ 0 & 16 & 32\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以:

$$G_2=\frac{1}{40}\begin{bmatrix}0 & 16 & 32\\ 0 & 8 & 16\\ 0 & 16 & 32\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 0.8\\ 0 & 0.2 & 0.4\\ 0 & 0.4 & 0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

(3) 计算 $\lambda_3=-5$ 对应的谱阵 G_3：

$$\begin{aligned}G_3&=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\\&=\frac{1}{60}(A-I)(A-5I)\end{aligned}$$

计算矩阵乘积：

$$A-I=\begin{bmatrix}0&4&2\\0&-4&4\\0&4&2\end{bmatrix},\quad A-5I=\begin{bmatrix}-4&4&2\\0&-8&4\\0&4&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(A-I)(A-5I)&=\begin{bmatrix}0&4&2\\0&-4&4\\0&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&4&2\\0&-8&4\\0&4&-2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&-24&12\\0&48&-24\\0&-24&12\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以：

$$G_3=\frac{1}{60}\begin{bmatrix}0&-24&12\\0&48&-24\\0&-24&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-0.4&0.2\\0&0.8&-0.4\\0&-0.4&0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

第三步：写出谱分解式。综上所述，矩阵 A 的谱分解为：

$$A=\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2+\lambda_3 G_3$$

即：

$$A=1\cdot G_1+5\cdot G_2+(-5)\cdot G_3$$

其中：

$$G_1=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad G_2=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix},\quad G_3=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

2. 计算 A^{100}

根据谱分解的性质，正交性（$\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j=\boldsymbol{O}, i\neq j$）和正交投影性（$\boldsymbol{E}_j=(\boldsymbol{E}_j)^2$），若 $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i$，有 $f(A)=\sum_{i=1}^{k}f(\lambda_i)G_i$，则有 $A^m=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^m G_i$。因此：

$$A^{100}=\lambda_1^{100}G_1+\lambda_2^{100}G_2+\lambda_3^{100}G_3$$

代入特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5$：

$$\begin{aligned} A^{100} &= (1)^{100} G_1 + (5)^{100} G_2 + (-5)^{100} G_3 \\ &= 1 \cdot G_1 + 5^{100} G_2 + 5^{100} G_3 \\ &= G_1 + 5^{100}(G_2 + G_3) \end{aligned}$$

3.（13 分）已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

试求解以下问题：

(a) 求 A 的 Jordan 标准型；

(b) 求矩阵的指数函数 e^{tA}。

【解答】

1. 求 A 的 Jordan 标准型

首先，我们需要求出矩阵 A 的特征多项式，以确定其特征值。矩阵 A 的特征多项式为：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 4 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

令 $|\lambda I - A| = 0$，解得特征值为 $\lambda_1 = 2$（单重根），$\lambda_2 = 1$（二重根）。

接下来，我们需要确定特征值 $\lambda_2 = 1$ 对应的 Jordan 块的结构。我们需要计算 $\lambda_2 = 1$ 的几何重数，即 $A - I$ 的零空间维数（也就是 $3 - \mathrm{rank}(A - I)$）。

计算 $A - I$：

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

对 $A - I$ 进行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然，$\mathrm{rank}(A - I) = 2$。因此，特征值 $\lambda_2 = 1$ 的几何重数为 $n - \mathrm{rank}(A - I) = 3 - 2 = 1$。

这意味着对应于特征值 $\lambda = 1$ 只有一个线性无关的特征向量，也就是只有一个 Jordan 块。由于 $\lambda = 1$ 的代数重数为 2，所以该 Jordan 块的阶数为 2。对于特征值 $\lambda = 2$，代数重数为 1，必然对应一个 1 阶 Jordan 块。

综上所述，矩阵 A 的 Jordan 标准型 J 为：

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 求矩阵的指数函数 e^{tA}

第一步：确定矩阵 A 的最小多项式

特征多项式为 $f_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$。最小多项式 $m_A(\lambda)$ 必须包含所有不同的特征值因子，且其次数不超过特征多项式。可能的最小多项式为 $(\lambda - 2)(\lambda - 1)$ 或 $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$。

我们需要验证 $(A - 2I)(A - I)$ 是否为零矩阵：

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算乘积：

$$(A - 2I)(A - I) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

由于 $(A - 2I)(A - I) \neq \mathbf{0}$，故最小多项式不是二次的。因此，最小多项式即为特征多项式：

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

这意味着：- 对于特征值 $\lambda_1 = 2$，指数 $n_1 = 1$。- 对于特征值 $\lambda_2 = 1$，指数 $n_2 = 2$。

第二步：构建谱上一致性方程组

我们要计算的目标函数是 $f(\lambda) = e^{t\lambda}$。我们需要寻找一个多项式 $p(\lambda)$，使其与 $f(\lambda)$ 在谱上一致。由于 $m_A(\lambda)$ 的次数为 3，我们可以设 $p(\lambda)$ 为一个二次多项式：

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

其中 a, b, c 是待定系数。

根据谱上一致的定义：1. 在 $\lambda_1 = 2$ 处 $(n_1 = 1)$，需满足 $p(2) = f(2)$。

2. 在 $\lambda_2 = 1$ 处 $(n_2 = 2)$，需满足 $p(1) = f(1)$ 且 $p'(1) = f'(1)$。

计算 $f(\lambda)$ 的导数 (注意，把 t 视为常数，λ 是变量)：$f(\lambda) = e^{t\lambda} \implies f'(\lambda) = te^{t\lambda}$。

计算 $p(\lambda)$ 的导数：$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \implies p'(\lambda) = 2a\lambda + b$。

列出方程组：

$$\begin{cases} p(2) = f(2) & \Longrightarrow 4a + 2b + c = e^{2t} \quad (1) \\ p(1) = f(1) & \Longrightarrow a + b + c = e^{t} \quad (2) \\ p'(1) = f'(1) & \Longrightarrow 2a + b = te^{t} \quad (3) \end{cases}$$

第三步：求解待定系数

我们来解这个线性方程组。解得插值多项式的系数为：

$$\begin{cases} a = e^{2t} - (1+t)e^t \\ b = -2e^{2t} + (2+3t)e^t \\ c = e^{2t} - 2te^t \end{cases}$$

第四步：计算 $e^{tA} = p(A)$

根据谱上一致性原理，$e^{tA} = p(A) = aA^2 + bA + cI$。

首先计算 A^2：

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 & 0 & -1+3 \\ -1+2 & 4 & 1 \\ 4-12 & 0 & -4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -8 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

现在代入公式 $e^{tA} = aA^2 + bA + cI$。为了计算简便，我们可以将 e^{2t} 和 e^t 的项分开整理。

$$\begin{aligned} e^{tA} &= [e^{2t} - (1+t)e^t]A^2 + [-2e^{2t} + (2+3t)e^t]A + [e^{2t} - 2te^t]I \\ &= e^{2t}(A^2 - 2A + I) + e^t[-(1+t)A^2 + (2+3t)A - 2tI] \end{aligned}$$

让我们分别计算这两个矩阵部分。

部分 1：e^{2t} 的系数矩阵

$$M_1 = A^2 - 2A + I = (A-I)^2$$

我们之前计算过 $A - I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。

$$M_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-4 & 0 & -2+2 \\ -2+1 & 1 & 1 \\ 8-8 & 0 & -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

部分 2：e^t 的系数矩阵这一项可以写成：

$$M_2 = -A^2 + 2A + t(-A^2 + 3A - 2I)$$

先算常数部分 $C_1 = -A^2 + 2A$：

$$C_1 = -\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -8 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 0 & -2+2 \\ -1+2 & -4+4 & -1 \\ 8-8 & 0 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

再算 t 的系数部分 $C_2 = -A^2 + 3A - 2I$：

$$\begin{aligned} C_2 &= -(A^2) + 3A - 2I \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以 $M_2 = C_1 + tC_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t & 0 & t \\ 1+2t & 0 & -1-t \\ -4t & 0 & 1+2t \end{bmatrix}$。

第五步：合并结果

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{2t}M_1 + e^t M_2 \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1-2t & 0 & t \\ 1+2t & 0 & -1-t \\ -4t & 0 & 1+2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t(1-2t) & 0 & te^t \\ -e^{2t} + e^t(1+2t) & e^{2t} & e^{2t} - e^t(1+t) \\ -4te^t & 0 & e^t(1+2t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.（5 分）设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\|A\|$ 是某一矩阵范数，若 $\|A\| < 1$，证明 $I - A$ 可逆且

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{\|I\|}{1 - \|A\|}.$$

【解答】

第一部分：证明 $I - A$ 可逆

我们考察矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$。

证明级数的收敛性。根据范数的三角不等式及相容性，对于任意正整数 m，有：

$$\sum_{k=0}^{m} \|A^k\| \le \sum_{k=0}^{m} \|A\|^k$$

已知 $\|A\| < 1$，右端的级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ 是公比小于 1 的几何级数，因此收敛。矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 绝对收敛。记该级数的和为 S，即 $S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$。

验证 S 为 $I - A$ 的逆矩阵。考察部分和 $S_m = I + A + \cdots + A^m$。计算 $(I - A)S_m$：

$$(I-A)S_m = (I-A)(I+A+\cdots+A^m) = (I+A+\cdots+A^m) - (A+A^2+\cdots+A^{m+1})$$

中间项相互抵消，得：

$$(I - A)S_m = I - A^{m+1}$$

因为 $\|A\| < 1$，当 $m \to \infty$ 时，

$$\|A^{m+1}\| \le \|A\|^{m+1} \to 0$$

即 $\lim_{m\to\infty} A^{m+1} = \boldsymbol{\theta}$（零矩阵）。对上式两边取极限：

$$(I - A)S = (I - A) \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} (I - A^{m+1}) = I - \boldsymbol{\theta} = I$$

同理可证 $S(I - A) = I$。根据逆矩阵的定义，$I - A$ 可逆，且其逆矩阵为：

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

第二部分：证明范数不等式

利用恒等式 $(I - A)^{-1}(I - A) = I$ 进行推导。

恒等式变形将上述恒等式展开：

$$(I - A)^{-1} - (I - A)^{-1}A = I$$

移项得：

$$(I - A)^{-1} = I + (I - A)^{-1}A$$

利用范数性质放缩对等式两边取范数，利用范数的三角不等式（$\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$）和次乘性（$\|XY\| \le \|X\|\|Y\|$）：

$$\begin{aligned}
\|(I - A)^{-1}\| &= \|I + (I - A)^{-1}A\| \\
&\le \|I\| + \|(I - A)^{-1}A\| \\
&\le \|I\| + \|(I - A)^{-1}\|\|A\|
\end{aligned}$$

解不等式将含有 $\|(I - A)^{-1}\|$ 的项移至左边：

$$\|(I - A)^{-1}\| - \|(I - A)^{-1}\|\|A\| \le \|I\|$$

提取公因式：

$$\|(I - A)^{-1}\|(1 - \|A\|) \le \|I\|$$

由于已知条件 $\|A\| < 1$，故 $1 - \|A\| > 0$。在不等式两边同时除以正数 $(1 - \|A\|)$，得：

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{1 - \|A\|}$$

证毕。

2025 期末试题

一、判断题

在每小题前的括号内填“是”或“否”(本题共 21 分, 每小题 3 分).

1. 集合 $\{x=(x_1,x_2,x_3)^T\in C^3 : x_1x_2=0\}$ 是线性空间 C^3 的子空间.

   【解答】

   结论：错误。

   解析： 要判断一个集合 W 是否为线性空间 V 的子空间，必须验证它是否满足以下两个封闭性条件：1. **加法封闭性**：若 $\alpha,\beta\in W$，则 $\alpha+\beta\in W$。2. **数乘封闭性**：若 $\alpha\in W, k\in C$，则 $k\alpha\in W$。

   设 $W=\{x=(x_1,x_2,x_3)^T\in C^3 : x_1x_2=0\}$。取两个向量 $\alpha,\beta\in W$：

   $$\alpha=(1,0,0)^T,\quad \beta=(0,1,0)^T$$

   验证 α 是否属于 W：因为 $x_1=1,x_2=0$，满足 $x_1x_2=1\cdot 0=0$，所以 $\alpha\in W$。
   验证 β 是否属于 W：因为 $x_1=0,x_2=1$，满足 $x_1x_2=0\cdot 1=0$，所以 $\beta\in W$。

   现在考察它们的和 $\alpha+\beta$：

   $$\alpha+\beta=(1,0,0)^T+(0,1,0)^T=(1,1,0)^T$$

   对于向量 $(1,1,0)^T$，其分量为 $x_1=1,x_2=1$。计算乘积：

   $$x_1x_2=1\cdot 1=1\neq 0$$

   因此，$\alpha+\beta\notin W$。

   由于集合 W 对加法运算不封闭，故 W 不是 C^3 的子空间。

2. 对 R^2 中的向量 $x=(x_1,x_2)^T$ 和 $y=(y_1,y_2)^T$, 函数 $(x,y)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2$ 是 R^2 上的一个内积.

   【解答】

结论：正确。

解析： 要判断一个二元函数 (x, y) 是否为实线性空间上的内积，需验证其是否满足内积的三个公理：1. **对称性**：$(x, y) = (y, x)$。2. **线性**：$(kx+z, y) = k(x, y) + (z, y)$（对第一个变元线性）。3. **正定性**：$(x, x) \geq 0$，且 $(x, x) = 0 \iff x = \boldsymbol{\theta}$。

我们可以将该函数写成矩阵形式 $(x, y) = x^T Ay$。由题意：

$$(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

即度量矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$。

第一步：验证对称性：因为矩阵 A 是实对称矩阵，所以 $(x, y) = x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x = y^T Ax = (y, x)$。对称性满足。

第二步：验证线性：这是由矩阵乘法的性质保证的，即 $(kx+z)^T Ay = k(x^T Ay) + z^T Ay$。线性满足。

第三步：验证正定性：我们需要判断二次型 $(x, x) = x^T Ax$ 是否正定。**这等价于判断矩阵 A 是否为正定矩阵**。检查 A 的各阶顺序主子式：一阶顺序主子式：$D_1 = 1 > 0$。二阶顺序主子式：$D_2 = \det(A) = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot (-1) = 4 - 1 = 3 > 0$。

因为所有顺序主子式均大于 0，所以 A 是正定矩阵。这意味着对于任意 $x \neq \boldsymbol{\theta}$，都有 $(x, x) > 0$，且 $(x, x) = 0$ 当且仅当 $x = \boldsymbol{\theta}$。正定性满足。

综上所述，该函数满足内积的所有定义，是 R^2 上的一个内积。

3. 在实值函数空间中，函数组 $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ 线性相关.

【解答】

结论：正确。

解析： 函数组 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 线性相关的定义是：存在不全为零的常数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使得对于任意 x，都有

$$k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + \cdots + k_nf_n(x) = 0$$

在本题中，函数组为 $f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin^2 x, f_3(x) = \cos^2 x$。根据三角恒等式，我们知道对于任意实数 x，都有：

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

移项可得：

$$-1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

取系数 $k_1=-1, k_2=1, k_3=1$。显然，系数 k_1, k_2, k_3 不全为零（事实上全都不为零）。这满足了线性相关的定义。

因此，函数组 $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ 是线性相关的。

4. 对于线性空间 R^2, $V_1=\{(x_1,x_2)^T \in R^2 | x_1=x_2\}$ 是子空间 $V_2=\{(x_1,x_2)^T \in R^2 | x_1+x_2=0\}$ 的正交补空间.

【解答】

结论：正确。

解析： 在标准欧几里得空间 R^2 中，若 V_1 是 V_2 的正交补空间，需满足两个条件：1. $V_1 \perp V_2$，即对于任意 $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$，都有 $(\alpha,\beta)=0$。2. $\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(R^2)=2$（或者 $V_1 \oplus V_2 = R^2$）。

第一步：确定 V_1 和 V_2 的基

对于 V_1：条件是 $x_1=x_2$。令 $x_1=1$，则 $x_2=1$。所以 V_1 的基向量为 $\xi_1=(1,1)^T$。$\dim(V_1)=1$。

对于 V_2：条件是 $x_1+x_2=0$，即 $x_1=-x_2$。令 $x_2=-1$，则 $x_1=1$。所以 V_2 的基向量为 $\xi_2=(1,-1)^T$。$\dim(V_2)=1$。

第二步：验证正交性

取任意 $\alpha \in V_1$，可设 $\alpha=k_1\xi_1=(k_1,k_1)^T$。取任意 $\beta \in V_2$，可设 $\beta=k_2\xi_2=(k_2,-k_2)^T$。计算内积：

$$(\alpha,\beta)=k_1k_2+k_1(-k_2)=k_1k_2-k_1k_2=0$$

因此，$V_1 \perp V_2$。

第三步：验证维数

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=1+1=2=\dim(R^2)$$

综上所述，V_1 确实是 V_2 的正交补空间。

5. 映射 $T: R^3 \to R^3$, $(x_1,x_2,x_3)^T \to (2x_1-x_2, x_2+x_3, x_1)^T$ 是线性变换.

【解答】

结论：正确。

解析： 判断映射 $T: V \to W$ 是否为线性变换，需验证：1. $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$ 2. $T(k\alpha)=kT(\alpha)$ 或者直接验证 $T(k\alpha+l\beta)=kT(\alpha)+lT(\beta)$。**对于有限维向量空间，若映射可以用矩阵乘法 $T(x)=Ax$ 表示，则它一定是线性变换。**

观察题目给出的映射关系：

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\x_1\end{pmatrix}$$

我们可以将其改写为矩阵与向量相乘的形式：

$$\begin{pmatrix}2x_1-1x_2+0x_3\\0x_1+1x_2+1x_3\\1x_1+0x_2+0x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

令 $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 $T(x)=Ax$。

由矩阵乘法的性质可知：

$$T(kx+ly)=A(kx+ly)=k(Ax)+l(Ay)=kT(x)+lT(y)$$

因此，该映射满足线性变换的定义。

6. 设 A 是正规矩阵, 则 A 的特征值均为实数.

【解答】

结论：错误。

解析：首先回顾正规矩阵的定义：若复矩阵 A 满足 $A^HA=AA^H$，则称 A 为正规矩阵。常见的正规矩阵包括：Hermite 矩阵 ($A^H=A$)、反 Hermite 矩阵 ($A^H=-A$)、酉矩阵（$A^HA=I$）以及实对称矩阵、实反对称矩阵、正交矩阵等。

关于特征值的性质：1. **Hermite 矩阵**（及实对称矩阵）的特征值确实全为实数。2. 但是，**反 Hermite 矩阵**（及实反对称矩阵）的特征值全为纯虚数或零。3. **酉矩阵及正交矩阵**的特征值模长为 1，通常是复数。

因此，正规矩阵的特征值不一定均为实数。只有 Hermite 矩阵这一类特殊的正规矩阵，其特征值才保证全为实数。

7. 如果 A 是幂等矩阵且 $|A|\neq 0$, 则有 $A=I$. (I 表示单位矩阵)

【解答】

结论：正确。

解析： **定义：**幂等矩阵是指满足 $A^2=A$ 的矩阵。**条件：** $|A|\neq 0$，即矩阵 A 是**可逆矩阵**。

推导过程： 由幂等矩阵定义出发：

$$A^2 = A$$

即：

$$A \cdot A = A$$

因为已知 $|A| \neq 0$，所以 A 存在逆矩阵 A^{-1}。在等式两边同时左乘（或右乘）A^{-1}：

$$A^{-1}(A \cdot A) = A^{-1} \cdot A$$

利用结合律：

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot A = I$$

$$I \cdot A = I$$

$$A = I$$

补充解释： 从特征值的角度来看，幂等矩阵的特征值只能是 0 或 1（因为 $\lambda^2 = \lambda \implies \lambda(\lambda-1)=0$）。行列式 $|A|$ 等于所有特征值的乘积。如果 $|A| \neq 0$，说明 A 没有零特征值。因此，A 的所有特征值都必须是 1。又因为幂等矩阵必可对角化（它的极小多项式是 $\lambda(\lambda-1)$ 或 λ 或 $\lambda-1$，均无重根），所以 A 相似于对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1) = I$。即 $P^{-1}AP = I \implies A = PIP^{-1} = I$。

综上所述，结论成立。

二、填空题

对每个空格写出正确的答案 (本题 20 分, 每空 4 分)

1. 对于矩阵通常的加法和数乘运算，实数域 R 上的线性空间 $V(R) = \{A : A \in C^{n\times n}, A^H = -A\}$ 的维数等于 ________.

   【解答】

   答案： n^2

   我们考察复矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上的分解。设 $A = X + iY$，其中 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实矩阵。根据定义，$A^H = (\bar{A})^T = (X - iY)^T = X^T - iY^T$。题目条件要求 $A^H = -A$，即：$X^T - iY^T = -(X+iY) = -X - iY$ 比较等式两边的实部和虚部，我们得到两个独立的条件：

   (a) 实部：$X^T = -X$。这意味着 X 是实反对称矩阵。

   (b) 虚部：$-Y^T = -Y \implies Y^T = Y$。这意味着 Y 是实对称矩阵。

因此，空间 V 中的任意矩阵 A 都可以唯一地由一个实反对称矩阵 X 和一个实对称矩阵 Y 确定。线性空间 V 的维数等于 X 的自由度加上 Y 的自由度：

- 实反对称矩阵 X 的维数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$（对角线为 0，确定上三角即可）。
- 实对称矩阵 Y 的维数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$（确定上三角和对角线即可）。

所以，V 的总维数为：$\dim(V) = \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2-n+n^2+n}{2} = n^2$

2. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值, 则有 $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i =$ ________.

【解答】

答案： 6

根据矩阵理论中的迹（Trace）与特征值的关系定理：n 阶矩阵 A 的所有特征值之和等于该矩阵的主对角线元素之和（即矩阵的迹）。公式表示为：$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 对于给定的矩阵 A：$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{2} & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ 其主对角线元素分别为 $1, 2, 2, 1$。

因此，特征值之和为：$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1 + 2 + 2 + 1 = 6$

3. 设矩阵 $A = I - 3ww^T$, 其中 I 是单位矩阵, w 是给定的单位实向量. 求 A 阵谱半径 $\rho(A) =$ ________. 另外若 $I, A, A^2, \ldots, A^l$ 线性无关, 而 $I, A, A^2, \ldots, A^{l+1}$ 线性相关, 那么 $l =$ ________.

【解答】

答案： 2 ； 1

第一步：求谱半径 $\rho(A)$

谱半径 $\rho(A)$ 定义为矩阵 A 特征值模的最大值。我们需要求 A 的特征值。已知 w 是单位向量，即 $w^T w = 1$。考察 A 作用在向量 w 上：$Aw = (I - 3ww^T)w = w - 3w(w^T w) = w - 3w(1) = -2w$，说明 -2 是 A 的一个特征值，对应的特征向量是 w。

考察 A 作用在与 w 正交的非零向量 v 上（即 $w^T v = 0$）：$Av = (I - 3ww^T)v = v - 3w(w^T v) = v - 0 = 1v$。由于 w 是 n 维空间中的一个非零向量，与其正交的子空间维数为 $n-1$。因此，1 是 A 的特征值，且其几何重数为 $n-1$。综上，A

的特征值为 $\lambda_1=-2$（重数 1）和 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$（重数 $n-1$）。谱半径为：$\rho(A)=\max\{|-2|,|1|\}=2$

第二步：求 l

题目中描述的性质与矩阵的**最小多项式**有关。若 $I,A,\ldots,A^l$ 线性无关，而 $I,A,\ldots,A^{l+1}$ 线性相关，这意味着 A^{l+1} 可以表示为低次幂的线性组合，即最小多项式的次数为 $l+1$。

推导过程：$A=I-3ww^T$ 是对称矩阵的线性组合，因此 A 也是对称矩阵。矩阵 A 有两个不同的特征值 $\lambda_1=-2$ 和 $\lambda_2=1$。因为 A 可对角化，其最小多项式 $m(\lambda)$ 的根是所有互异特征值的一次式之积（无重根）：$m(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)=\lambda^2+\lambda-2$。所以 A 满足二次方程 $A^2+A-2I=0$，即：

$$A^2=-A+2I$$

这意味着 A^2 可以表示为 I 和 A 的线性组合。进一步地：

$$A^3=A\cdot A^2=A(-A+2I)=-A^2+2A=-(-A+2I)+2A=A-2I+2A=3A-2I$$

$$A^4=A\cdot A^3=A(3A-2I)=3A^2-2A=3(-A+2I)-2A=-3A+6I-2A=-5A+6I$$

可以看出，所有 A^k（$k\geq 2$）都可以表示为 I 和 A 的线性组合。

或者，我们有更一般的结论，对于 $n\times n$ 矩阵 A，如果 A 的最小多项式次数为 d，那么：$I,A,A^2,\ldots,A^{d-1}$ 线性无关，$I,A,A^2,\ldots,A^d$ 线性相关。

因为最小多项式的次数为 2，所以 I,A 线性无关，但 I,A,A^2 线性相关。对应题目条件，解得 $l=1$。

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$ 则 A 的最小多项式 $m(\lambda)=$ ________.

【解答】

答案： $(\lambda-1)^3$

第一步：求特征多项式

矩阵 A 是下三角矩阵，其特征值即为主对角线上的元素。所以特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$。特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-1)^3$。

第二步：确定最小多项式

最小多项式 $m(\lambda)$ 必须整除特征多项式，且包含所有不同的特征值。因此 $m(\lambda)$ 的形式只能是 $(\lambda-1)^k$，其中 $k\in\{1,2,3\}$。我们需要找到使 $(A-I)^k=O$ 成立的最

小正整数 k。计算 $A-I$：$B=A-I=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&2&0\end{bmatrix}$ 显然 $B\neq O$，所以 $k\neq 1$。计算 $(A-I)^2$：$B^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\4&0&0\end{bmatrix}\neq O$，所以 $k\neq 2$。

因此，使 $(A-I)^k=O$ 的最小 k 为 3。所以最小多项式为：$m(\lambda)=(\lambda-1)^3$

三、(本题 15 分)

已知 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是线性空间 V 的一组基, 线性变换 T 在此基底下的矩阵表示为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&1&2&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}$$

设 $\eta_1=\xi_1-\xi_2+\xi_4$, $\eta_2=3\xi_2-\xi_3-\xi_4$, $\eta_3=\xi_3+\xi_4$, $\eta_4=4\xi_4$.

1. 证明向量组 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 也是 V 的基.

【解答】

设旧基为 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$，新向量组为 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$。根据题目给出的线性关系，可以写出从旧基到新向量组的**过渡矩阵** C。由

$$\begin{cases}\eta_1=1\cdot\xi_1-1\cdot\xi_2+0\cdot\xi_3+1\cdot\xi_4\\ \eta_2=0\cdot\xi_1+3\cdot\xi_2-1\cdot\xi_3-1\cdot\xi_4\\ \eta_3=0\cdot\xi_1+0\cdot\xi_2+1\cdot\xi_3+1\cdot\xi_4\\ \eta_4=0\cdot\xi_1+0\cdot\xi_2+0\cdot\xi_3+4\cdot\xi_4\end{cases}$$

可得过渡矩阵 C 为:

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&4\end{bmatrix}$$

使得 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)C$。

计算矩阵 C 的行列式。由于 C 是**下三角矩阵，其行列式等于主对角线元素的乘积:**

$$\det(C)=1\times 3\times 1\times 4=12$$

因为 $\det(C) \neq 0$，所以矩阵 C 可逆，。**根据基变换定理，由基经过可逆线性变换得到的向量组仍为基**，故 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 也是 V 的一组基。

2. 求 T 在基底 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵表示 B.

定理 1 (同一线性映射在不同基下的矩阵之间的关系). 设 V 和 W 是数域 F 上的 n 维和 m 维线性空间, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 和 $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n'$ 是 V 的两组基, 由 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 到 $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n'$ 的过渡矩阵为 Q; $\eta_1, \cdots, \eta_m$ 和 $\eta_1', \cdots, \eta_m'$ 是 W 的两组基, 由 $\eta_1, \cdots, \eta_m$ 到 $\eta_1', \cdots, \eta_m'$ 的过渡矩阵为 P; 设线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 和 W 的基 $\eta_1, \cdots, \eta_m$ 下的矩阵为 A, T 在 V 的基 $\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n'$ 和 W 的基 $\eta_1', \cdots, \eta_m'$ 下的矩阵为 B, 则

$$B = P^{-1}AQ$$

【解答】

设 T 在基底 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵表示为 B。根据**相似矩阵**的定义，有公式：

$$B = C^{-1}AC$$

其中 A 是 T 在旧基下的矩阵，C 是过渡矩阵。

第一步：求 C^{-1}。对矩阵 $[C|I]$ 进行初等行变换：

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

所以

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

第二步：计算 AC。

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 5 & -4 & 7 & 20 \\ 2 & -5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

第三步：计算 $B = C^{-1}(AC)$。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 5 & -4 & 7 & 20 \\ 2 & -5 & -1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 2/3 & -1/3 & 7/3 & 16/3 \\ 17/3 & -13/3 & 28/3 & 76/3 \\ -5/4 & 1/2 & -11/4 & -8 \end{bmatrix}$$

3. 求 $N(T)$, $R(T)$ 及其维数.

【解答】

1. 求 $N(T)$ (核)

$N(T) = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = \boldsymbol{\theta}\}$. 设 $\alpha = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4$，其坐标向量为 $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$。则 $T(\alpha) = \boldsymbol{\theta}$ 等价于齐次线性方程组 $AX = 0$。

对矩阵 A 进行初等行变换：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元列为 1、2、3 列，矩阵 A 的秩为 3，维数 $\dim N(T) = n - rank(A) = 4 - 3 = 1$。
化为行最简形：由第 3 行得 $3x_3 - 4x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{3}x_4$。

由第 2 行得 $x_2 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -4x_4$。

由第 1 行得 $x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + 2(\frac{4}{3}x_4) + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{11}{3}x_4$。

取自由未知量 $x_4 = 3k$ $(k \in \mathbb{R})$，则

$$\begin{cases} x_1 = -11k \\ x_2 = -12k \\ x_3 = 4k \\ x_4 = 3k \end{cases}$$

基础解系为 $X = [-11, -12, 4, 3]^T$。对应的向量为 $\alpha_0 = -11\xi_1 - 12\xi_2 + 4\xi_3 + 3\xi_4$。

所以，

$$N(T) = \text{span}(-11\xi_1 - 12\xi_2 + 4\xi_3 + 3\xi_4)$$

2. 求 $R(T)$ (像)

$R(T) = \text{span}(T(\xi_1), T(\xi_2), T(\xi_3), T(\xi_4))$，$T(\xi_i)$ 的坐标即为矩阵 A 的第 i 列。由秩-零度定理，$\dim R(T) = \dim V - \dim N(T) = 4 - 1 = 3$。

由行最简阶梯形矩阵的主元列对应原矩阵的列可知，原矩阵第 1、2、3 列线性无关。因此，$R(T)$ 由 $T(\xi_1), T(\xi_2), T(\xi_3)$ 生成。

$$R(T) = \operatorname{span}(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + 2\xi_4, \quad 2\xi_2 + \xi_3 - 2\xi_4, \quad 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4)$$

四、(本题 12 分)

用盖氏圆盘定理证明下面的矩阵 A 有 n 个互异的实特征根，并且 $|A| > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 4 & 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n & 2n-2 & 1/n \\ 1/n & \cdots & \cdots & 1/n & 2n \end{bmatrix}.$$

【解答】

1. 确定盖尔圆盘的半径与圆心

对于第 1 行 ($i = 1$)：对角元为 2。非对角元为 $a_{12} = \dfrac{2}{n}$，其余 $n-2$ 个元素均为 $\dfrac{1}{n}$。

$$R_1 = \left|\frac{2}{n}\right| + (n-2)\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{2+n-2}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

圆盘 D_1 为：$|z-2| \le 1$，即实轴上的区间 $[1, 3]$。

对于第 i 行 ($i = 2, \ldots, n$)：对角元为 $2i$。非对角元共有 $n-1$ 个，均为 $\dfrac{1}{n}$。

$$R_i = (n-1)\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{n-1}{n} < 1$$

圆盘 D_i 为：$|z - 2i| \le \dfrac{n-1}{n}$，即实轴上的区间 $[2i - \dfrac{n-1}{n}, 2i + \dfrac{n-1}{n}]$。

2. 证明特征值互异且为实数

实方阵 A 的任意两个盖尔圆的圆心距最小为 2，而任意两个盖尔圆的半径和小于 2，所以 n 个盖尔圆两两互不相交，故 A 有 n 个互异的实特征值。

3. 证明行列式不等式

矩阵的行列式等于其所有特征值的乘积：

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

我们已知 $\lambda_i \in D_i$，即 λ_i 位于区间 $[2i - R_i, 2i + R_i]$ 内。

对于 $i = 1$：

$$\lambda_1 \ge 1$$

对于 $i = 2, \ldots, n$：

$$\lambda_i \geq 2i - R_i = 2i - \frac{n-1}{n} = 2i - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = (2i-1) + \frac{1}{n}$$

因为 $\frac{1}{n} > 0$，所以：

$$\lambda_i > 2i - 1$$

现在计算行列式的下界：

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \geq 1 \cdot \prod_{i=2}^{n} \lambda_i$$

代入 λ_i 的下界：

$$|A| > 1 \cdot (2(2)-1) \cdot (2(3)-1) \cdots (2n-1)$$

$$|A| > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

证毕。

五、(本题 16 分)

设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵 e^{At}.

【解答】

1. 最小多项式与谱点

矩阵 A 是一个 Jordan 块，特征值 $\lambda_1 = 2$，代数重数 3，几何重数 1。最小多项式为

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3,$$

即谱点 $\lambda_1 = 2$，重数 $n_1 = 3$。

2. 构造与 $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ 谱上一致的多项式 $p(\lambda)$

因为 $\deg m_A = 3$，可取多项式

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 \quad (\deg p < 3),$$

使得在谱点 $\lambda_1 = 2$ 处满足

$$p^{(j)}(2) = f^{(j)}(2), \quad j = 0, 1, 2.$$

计算 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$ 在 $\lambda=2$ 处的导数：

$$f(2)=e^{2t},\quad f'(2)=te^{2t},\quad f''(2)=t^2e^{2t}.$$

代入条件：

$$\begin{cases} p(2)=a_0+2a_1+4a_2=e^{2t}, \\ p'(2)=a_1+4a_2=te^{2t}, \\ p''(2)=2a_2=t^2e^{2t}. \end{cases}$$

解方程组：

1. 由 $2a_2=t^2e^{2t}$ 得

$$a_2=\frac{t^2}{2}e^{2t}.$$

2. 代入 $a_1+4a_2=te^{2t}$：

$$a_1+4\cdot\frac{t^2}{2}e^{2t}=te^{2t} \implies a_1=te^{2t}-2t^2e^{2t}=e^{2t}(t-2t^2).$$

3. 代入 $a_0+2a_1+4a_2=e^{2t}$：

$$a_0+2e^{2t}(t-2t^2)+4\cdot\frac{t^2}{2}e^{2t}=e^{2t} \implies a_0=e^{2t}(1-2t+2t^2).$$

于是

$$\boxed{p(\lambda)=e^{2t}\Big[(1-2t+2t^2)+(t-2t^2)\lambda+\frac{t^2}{2}\lambda^2\Big].}$$

由谱上一致的定义，有

$$\boxed{e^{At}=p(A)}.$$

3. 计算 $p(A)$

将 A 分解为

$$A=2I+N,\quad N=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

满足 $N^3=0$，且

$$N^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

代入 $p(A)$：

$$\begin{aligned} e^{At}&=e^{2t}\Big[(1-2t+2t^2)I+(t-2t^2)A+\frac{t^2}{2}A^2\Big] \\ &=e^{2t}\Big[(1-2t+2t^2)I+(t-2t^2)(2I+N)+\frac{t^2}{2}(4I+4N+N^2)\Big] \\ &=e^{At}=e^{2t}\Big(I+tN+\frac{t^2}{2}N^2\Big). \end{aligned}$$

代入 N, N^2 的矩阵:

$$I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

最终得到

$$\boxed{e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

六、(本题 16 分)

设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. 证明矩阵 A 是正规矩阵;

   【解答】

   计算 A^HA 和 AA^H:

   $$A^HA = A^TA = AA = A^2$$

   $$AA^H = AA^T = AA = A^2$$

   因为 $A^HA = AA^H$，所以矩阵 A 是正规矩阵。

   注：实对称矩阵是正规矩阵的特例，直接指出 A 为实对称矩阵从而为正规矩阵亦可。

2. 求矩阵 A 的谱分解;

   【解答】

   正规矩阵 A 的谱分解形式为 $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i$，其中 λ_i 为互异特征值，G_i 为对应的谱投影矩阵。

   第一步：求特征值

   计算 A 的特征多项式:

   $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

按第二行展开：

$$= \lambda \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda[(\lambda - 1)(\lambda - 4) - 4]$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4) = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda) = \lambda^2(\lambda - 5)$$

令 $|\lambda I - A| = 0$，解得特征值为：

$$\lambda_1 = 0 \quad (\text{二重}), \quad \lambda_2 = 5 \quad (\text{单重})$$

故 A 的互异特征值为 $\mu_1 = 0, \mu_2 = 5$。

第二步：求谱投影矩阵 G_i

正规矩阵是单纯矩阵。可利用单纯矩阵谱投影公式计算谱投影矩阵。

对于 $\mu_2 = 5$，对应的谱投影矩阵 G_2 为：

$$G_2 = \frac{A - \mu_1 I}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{A - 0I}{5 - 0} = \frac{1}{5}A$$

代入 A 的值：

$$G_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

对于 $\mu_1 = 0$，对应的谱投影矩阵 G_1。利用性质 $\sum G_i = I$，即 $G_1 + G_2 = I$，可得：

$$G_1 = I - G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

第三步：写出谱分解

矩阵 A 的谱分解为：

$$A = 0 \cdot G_1 + 5 \cdot G_2 = 5G_2$$

即：

$$A = 5 \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

3. 求矩阵 A^3 的谱分解.

【解答】

根据矩阵函数的性质，若 A 的谱分解为 $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i$，则 $f(A)$ 的谱分解为 $f(A)=\sum_{i=1}^{k}f(\lambda_i)G_i$。此处 $f(A)=A^3$，特征值变为 λ_i^3，谱投影矩阵 G_i 不变。

第一步：计算新特征值

原互异特征值为 $\mu_1=0,\mu_2=5$。A^3 的互异特征值为:

$$\nu_1=\mu_1^3=0^3=0$$

$$\nu_2=\mu_2^3=5^3=125$$

第二步：写出谱分解

利用第 2 问求得的 G_1,G_2:

$$A^3=0\cdot G_1+125\cdot G_2=125G_2$$

代入 G_2 的具体数值:

$$A^3=125\begin{bmatrix}0.2&0&-0.4\\0&0&0\\-0.4&0&0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0&-50\\0&0&0\\-50&0&100\end{bmatrix}$$