1　van der Pol 方程式の周期解の精度保証

この章では、van der Pol 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

の周期解の数値検証及び精度保証を行う。

1.1　作用素 $A^\dagger$, A の定義

1.1.1　$A^\dagger$ の定義

まず、Banach 空間 $X = \mathbb{C}\times\ell^1_\nu$ から $Y = \mathbb{C}\times\ell^1_{\nu'}$ $(\nu' < \nu)$ と設定し、$A^\dagger$ を $A^\dagger \in \mathcal{L}(X,Y)$ として、$b = (b_0, b_1) \in \mathbb{C}\times\ell^1_\nu = X$ に対して、 $A^\dagger b = ((A^\dagger b)_0, (A^\dagger b)_1)$ と作用するように定義する。ここで、$A^\dagger$ を形式的に見ると、

$$A^\dagger = \left[\begin{array}{c|cccccc}
0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \hline
\vdots & & \vdots & & & & \\
\partial_\omega f_k & \cdots & \partial_{a_j} f_k & \cdots & & \mathbf{0} & \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\vdots & & & & \lambda_N & & 0 \\
0 & & \mathbf{0} & & & \lambda_{N+1} & \\
\vdots & & & & 0 & & \ddots
\end{array}\right]
= \left[\begin{array}{c|c} 0 & A^\dagger_{a,0} \\ \hline A^\dagger_{\omega,1} & A^\dagger_{a,1}\end{array}\right].$$

このことから、 $A^\dagger b$ は、

$$\begin{aligned}
A^\dagger b &= \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger_{a,0} \\ A^\dagger_{\omega,1} & A^\dagger_{a,1}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^\dagger_{a,0} b_1 \\ A^\dagger_{\omega,1} b_0 + A^\dagger_{a,1} b_1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} (A^\dagger b)_0 \\ (A^\dagger b)_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と表すことができ、

$$(A^\dagger b)_0 = \sum_{|k|<N} (b_1)_k$$

$$((A^\dagger b)_1)_k := \begin{cases} \partial_\omega f_k b_0 + \sum_{|j|<N} \partial_{a_j} f_k (b_1)_j, & |k| < N \\ \lambda_k (b_1)_k & |k| \geq N \end{cases}$$

$$\lambda_k := -k^2\omega^2 - \mu i k\omega + 1$$

と書ける。またこのとき、$(A^\dagger b)_0$ と $(A^\dagger b)_1$ はそれぞれ

$$(A^\dagger b)_0 = A^\dagger_{a,0} b_1 = \sum_{|k|<N} (b_1)_k \in \mathbb{C}$$

$$(A^\dagger b)_1 = A^\dagger_{\omega,1} b_0 + A^\dagger_{a,1} b_1 \in \ell^1_{\nu'}.$$

注意　上の tail 部分は実際には添字 k に対して正負両方の向きに伸びているが、今回は一方向のみ表記している。

1.1.2　A の定義

次に作用素 A について考える。

$$A^{(N)} = \begin{bmatrix} A^{(N)}_{\omega,0} & A^{(N)}_{a,0} \\ A^{N)}_{\omega,1} & A^{(N)}_{a,1} \end{bmatrix} \approx DF^{(N)}(\bar{\mathrm{x}})^{-1} \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$$

を Jacobi 行列の近似逆行列とする。そして、$A \in \mathcal{L}(Y,X)$ として、$b = (b_0, b_1) \in X$ に対して、 $Ab = ((Ab)_0, (Ab)_1)$ と作用するように定義する。ここで、

$$(Ab)_0 = A^{(N)}_{\omega,0} b_0 + A^{(N)}_{a,0} b^{(N)}_1$$

$$(Ab)_1 = A^{(N)}_{\omega,1} b_0 + A_{a,1} b_1$$

ただし、無限次元の $A_{a,1}b_1$ は以下のようになる。

$$(A_{a,1}b_1)_k = \begin{cases} (A^{(N)}_{a,1} b^{(N)}_1)_k & (|k| < N) \\ (b_1)_k/\lambda_k & (|k| \geq N). \end{cases}$$

この定義を形式的に見ると

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc}
A^{(N)}_{\omega,0} & A^{(N)}_{a,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
A^{(N)}_{\omega,1} & A^{(N)}_{a,1} & & \mathbf{0} & \\
0 & & \frac{1}{\lambda_N} & & \\
\vdots & & & \frac{1}{\lambda_{N+1}} & \\
0 & & \mathbf{0} & & \ddots
\end{array}\right]
= \left[\begin{array}{c|c} 0 & A_{a,0} \\ \hline A_{\omega,1} & A_{a,1}\end{array}\right].$$

と表記できる。

1.2　Y_0, Z_0, Z_1, Z_2 の評価

1.2.1　Y_0 の評価

$$F(\bar{x}) = (\delta_0, \delta_1) \in \mathbb{C}\times\ell^1_{\nu'}$$

とすると、A の定義より、

$$\|AF(\bar{x})\|_X \leq \max\Big\{|A_{\omega,0}^{(N)}\delta_0 + A_{a,0}^{(N)}\delta_1^{(N)}|, \\ \|A_{\omega,1}^{(N)}\delta_0 + A_{a,1}\delta_1^{(N)}\|_w \\ + \sum_{|k|>N}\left|\frac{(\delta_1^{\infty})_k}{\lambda_k}\right|\nu^{|k|}\Big\} =: Y_0.$$

ここで、$\delta_1 = (\delta_1^{(N)}, \delta_1^{(\infty)}) \in \mathbb{C}^{2*3(N-1)+1}$ であり、

$$(\delta_1)_k = \begin{cases} \delta_1^{(N)} & (k < |N|) \\ \delta_1^{(\infty)} & (k \geq |N|) \end{cases}$$

と表す。

1.2.2 Z_0 の評価

$$B := I - AA^{\dagger} = \begin{bmatrix} B_{\omega,0} & B_{a,0} \\ B_{\omega,1} & B_{a,1} \end{bmatrix}$$

この B を $c \in \overline{B(0,1)}, \|c\|_X \leq 1$ である $c = (c_0, c_1)$ に作用させると、

$$(Bc)_0 = B_{\omega,0}c_0 + B_{a,0}c_1$$
$$(Bc)_1 = B_{\omega,1}c_0 + B_{a,1}c_1$$

$(Bc)_0$ はスカラ値なので、

$$\begin{aligned} |B_{a,0}c_1| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(B_{a,0})_k||(c_1)_k| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|(B_{a,0})_k|}{w_k}|(c_1)_k|w_k \\ &\leq \max_{k<|N|}\frac{|(B_{a,0})_k|}{w_k}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|(c_1)_k|w_k \\ &\leq \max_{k<|N|}\frac{|(B_{a,0})_k|}{w_k}, \\ &(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|(c_1)_k|w_k = \|c_1\|_w \leq 1). \end{aligned}$$

上より、

$$|(Bc)_0| \leq |B_{\omega,0}| + \max_{|k|<N}\frac{|(B_{a,0})_k|}{\omega_k} = Z_0^{(0)}$$

またここで、作用素 $M : \ell_\nu^1 \to \ell_\nu^1$ の作用素ノルムについて以下の補題を準備する。

補題 1.1 行列 $M^{(N)}$ を $M^{(N)} \in \mathbb{C}^{(2N-1)\times(2N-1)}$ 、双方向の複素無限点列 *(a bi-infinite sequence of complex numbers)* を $\{\delta_k\}_{|k|\geq N}$ と定義する。ここで、 $\delta_N > 0$ であり、

$$|\delta_k| \leq \delta_N \ \textit{for all}\ |k| \geq N.$$

を満たすとする。そして、$a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_\nu^1$ に対して $a^{(N)} = (a_{-N+1}, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^{2N-1}$ と表し、作用素 $M : \ell_\nu^1 \to \ell_\nu^1$ を以下のように定義する。

$$[Ma]_k := \begin{cases} [M^{(N)}a^{(N)}]_k, & |k| < N \\ \delta_k a_k, & |k| \geq N \end{cases}$$

このとき、 M は有界線形作用素であり、

$$\|M\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} \leq \max(K, \delta_N), \\ K := \max_{|n|<N}\frac{1}{\nu^{|n|}}\sum_{|k|<N}|M_{k,n}|\nu^{|k|}$$

と評価される。

上の補題を利用すると、

$$\|(Bc)_1\|_w \leq \|B_{\omega,1}\|_w + \|B_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} = Z_0^{(1)}$$

が評価可能となり、結論としては、求めたい Z_0 は $Z_0 := \{Z_0^{(0)}, Z_0^{(1)}\}$ となる。

1.2.3 Z_1 の評価

$$\|A(DF(\bar{x}) - A^{\dagger})c\|_X \leq Z_1, \\ c = (c_0, c_1) \in \overline{B(0,1)} \Leftrightarrow \|c\|_X \leq 1.$$

点列 z を下記のように定義する。

$$z := (DF(\bar{x}) - A^{\dagger})c = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

ここで、$DF(\bar{x})$ と $A^{\dagger}$ は

$$DF(\bar{x}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ \partial_\omega f_k & \dots & \partial_{a_j} f_k & \dots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}\right],$$

$$
A^\dagger = \left[\begin{array}{c|ccccc}
0 & \cdots & \partial_a \eta & \cdots & 0 & \cdots \quad 0 \\ \hline
\vdots & & \vdots & & & \\
\partial_\omega f_k^{(N)} & \cdots & \partial_{a_j} f_k^{(N)} & \cdots & & \\
\vdots & & \vdots & & 0 & \\
0 & & & \lambda_N & & \\
\vdots & & & & \lambda_{N+1} & \\
0 & & 0 & & & \ddots
\end{array}\right],
$$

$$
\lambda_k := -k^2\omega^2 - \mu \mathrm{i} k\omega + 1
$$

と表される。すると z_0 は、

$$
z_0 = \sum_{|k|\geq N} (c_1)_k, |z_0| \leq \frac{1}{w_N} \sum_{|k|\geq N} |(c_1)_k| w_k \leq \frac{1}{w_N}.
$$

次に、 z_1 について考える。 $DF(\bar{\mathrm{x}})c$ 部分は

$$
\begin{aligned}
((DF(\bar{\mathrm{x}})c)_1)_k &= \partial_\omega f_k c_0 + \partial_a f_k c_1 \\
&= \frac{\partial \lambda_k}{\partial \omega} c_0 \bar{a}_k + \frac{\mu \mathrm{i} k}{3} (\bar{a} * \bar{a} * \bar{a})_k c_0 \\
&\quad + \lambda_k (c_1)_k + \mu \mathrm{i} k\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

と書け、$|k| \geq N$ で　$\bar{a}_k = 0$ より、$c_1 = c_1^{(N)} + c_1^{(\infty)}$ として、

$$
(z_1)_k = \begin{cases}
\mu \mathrm{i} k\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1^{(\infty)})_k, \ |k| < N \\
\frac{\mu \mathrm{i} k}{3} (\bar{a} * \bar{a} * \bar{a})_k c_0 + \mu \mathrm{i} k\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k, \ |k| \geq N
\end{cases}
$$

と表せる。

ここから、 z_1 の絶対値をとると、 $|k| < N$ で

$$
\begin{aligned}
|(z_1)_k| \leq |\mu \mathrm{i} k\omega| \max &\left\{ \max_{k-N+1 \leq j \leq -N} \frac{|(\bar{a} * \bar{a})_{k-j}|}{w_j}, \right. \\
&\left. \max_{N \leq j \leq k+N-1} \frac{|(\bar{a} * \bar{a})_{k-j}|}{w_j} \right\} \\
&=: \zeta, \quad \zeta = (\zeta_k)_{|k|<N} \in \mathbb{R}^{2N-1}.
\end{aligned}
$$

最後に、 Z_1 を評価していく。 $Z_1^{(0)}$ の評価は

$$
\begin{aligned}
|(A(DF(\bar{\mathrm{x}}) - A^\dagger)c)_0| &= |(Az)_0| \\
&\leq |A_{\omega,0}^{(N)}||z_0| + |A_{a,0}^{(N)}||z_1^{(N)}| \\
&\leq \frac{|A_{\omega,0}^{(N)}|}{w_N} + |A_{a,0}^{(N)}|\zeta \\
&=: Z_1^{(0)}
\end{aligned}
$$

$Z_1^{(1)}$ の評価は

$$
\begin{aligned}
\|(A(DF(\bar{\mathrm{x}}) - A^\dagger)c)_1\|_w &= \|(Az)_1\|_w \\
&= \|A_{\omega,1}^{(N)} z_0 + A_{a,1} z_1\|_w \\
&\leq \frac{\|A_{\omega,1}^{(N)}\|_w}{w_N} + \sum_{|k|<N} (|A_{a,1}^{(N)}|\zeta)_k w_k \\
&\quad + \sum_{|k|\geq N} \frac{|\mu \mathrm{i} k (\bar{a} * \bar{a} * \bar{a})_k|}{3|\lambda_k|} w_k \\
&\quad + \sum_{|k|\geq N} \frac{|\mu \mathrm{i} k\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k|}{|\lambda_k|} w_k \\
&\leq \frac{\|A_{\omega,1}^{(N)}\|_w}{w_N} + \sum_{|k|<N} (|A_{a,1}^{(N)}|\zeta)_k w_k \\
&\quad + \sum_{N \leq |k| \leq 3(N-1)} \frac{|\mu \mathrm{i} k (\bar{a} * \bar{a} * \bar{a})_k|}{3|\lambda_k|} w_k \\
&\quad + \sum_{|k|\geq N} \frac{|\mu \mathrm{i} k\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k|}{|\lambda_k|} w_k \\
&\leq \frac{\|A_{\omega,1}^{(N)}\|_w}{w_N} + \||A_{a,1}^{(N)}|\zeta\|_w \\
&\quad + \sum_{N \leq |k| \leq 3(N-1)} \frac{|\mu \mathrm{i} k (\bar{a} * \bar{a} * \bar{a})_k|}{3|\lambda_k|} w_k \\
&\quad + \frac{1}{N} \frac{\mu\omega \|\bar{a}\|_w^2}{\omega^2 - \frac{1}{N^2}} \\
&=: Z_1^{(1)}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
Z_1 := \max\{z_1^{(0)}, z_1^{(1)}\}
$$

$Z_1^{(1)}$ の評価の補足

$$
\sum_{|k|\geq N} \frac{|\mu \mathrm{i} k\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k|}{|\lambda_k|} w_k
$$

は、$\lambda_k := -k^2\omega^2 - \mu \mathrm{i} k\omega + 1$ より、

$$
\begin{aligned}
\sum_{|k|\geq N} \frac{|\mu \mathrm{i} k\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k|}{|\lambda_k|} w_k &= \sum_{|k|\geq N} \frac{|\mu \mathrm{i} k\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k|}{|-k^2\omega^2 - \mu \mathrm{i} k\omega + 1|} w_k \\
&\leq \sum_{|k|\geq N} \frac{1}{|k|} \frac{|\mu \mathrm{i}\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k|}{|\omega^2 + \frac{\mu \mathrm{i}\omega}{k} - \frac{1}{k^2}|} w_k \\
&\leq \sum_{|k|\geq N} \frac{1}{|k|} \frac{|\mu \mathrm{i}\omega (\bar{a} * \bar{a} * c_1)_k|}{|\omega^2 - \frac{1}{k^2}|} w_k \\
&\leq \frac{1}{N} \frac{\mu \mathrm{i}\omega \|\bar{a}\|_w^2}{\omega^2 - \frac{1}{N^2}}
\end{aligned}
$$

1.2.4 Z_2 の評価

$b \in \overline{B(\bar{\mathrm{x}}, r)}, c = (c_0, c_1) \in \overline{B(0,1)}$ について

$$\|A(DF(b) - DF(\bar{\mathrm{x}}))c\|_X \le Z_2(r)r$$

を考える。まず z を、

$$z := (DF(b) - DF(\bar{\mathrm{x}}))c = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

と定義する。$z_0 = 0$ となるので、z_1 だけを考えればよく、

$$(z_1)_k := (\partial_\omega f_k(b) - \partial_\omega f_k(\bar{\mathrm{x}}))c_0 + [(\partial_a f(b) - \partial_a f(\bar{\mathrm{x}}))c_1]_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

と書ける。

$b = (\omega, (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}), \bar{\mathrm{x}} = (\bar{\omega}, (\bar{a}_k)_{|k|<N})$ として、第 1 項は、

$$\begin{aligned}
&(\partial_\omega f_k(b) - \partial_\omega f_k(\bar{\mathrm{x}}))c_0 \\
&= \Bigg[((-2k^2\omega - \mu\mathrm{i}k)a_k + \frac{\mu\mathrm{i}k}{3}(a*a*a)_k) \\
&\quad -((-2k^2\bar{\omega} - \mu\mathrm{i}k)\bar{a}_k + \frac{\mu\mathrm{i}k}{3}(\bar{a}*\bar{a}*\bar{a})_k)\Bigg] c_0 \\
&= \Bigg[-2k^2\omega(a_k - \bar{a}_k) - 2k^2(\omega - \bar{\omega})\bar{a}_k - \mu\mathrm{i}k(a_k - \bar{a_k}) \\
&\quad + \frac{\mu\mathrm{i}k}{3}((a*a*a)_k - (\bar{a}*\bar{a}*\bar{a})_k)\Bigg] c_0
\end{aligned}$$

と書ける。そして、第 2 項は、

$$\begin{aligned}
&[(\partial_a f(b) - \partial_a f(\bar{\mathrm{x}}))c_1]_k \\
&= (-k^2\omega^2 - \mu\mathrm{i}k\omega + 1)(c_1)_k + \mu\mathrm{i}k\omega(a*a*c_1)_k - \\
&\quad [(-k^2\bar{\omega}^2 - \mu\mathrm{i}k\bar{\omega} + 1)(c_1)_k + \mu\mathrm{i}k\bar{\omega}(\bar{a}*\bar{a}*c_1)_k] \\
&= [-k^2(\omega + \bar{\omega})(\omega - \bar{\omega}) - \mu\mathrm{i}k(\omega - \bar{\omega})](c_1)_k \\
&\quad + \mu\mathrm{i}k\omega((a+\bar{a})*(a-\bar{a})*c_1)_k \\
&\quad + \mu\mathrm{i}k(\omega - \bar{\omega})(\bar{a}*\bar{a}*c_1)_k
\end{aligned}$$

と書ける。$(Az)_0, (Az)_1$ は、

$$\begin{aligned}
(Az)_0 &= A_{a,0}^{(N)} z_1^{(N)} \\
(Az)_1 &= A_{a,1} z_1
\end{aligned}$$

より、

$$\|Az\|_X = \max\left\{|A_{a,0}^{(N)} z_1^{(N)}|, \|A_{a,1}z_1\|_w\right\}$$

となる。

$|A_{a,0}^{(N)} z_1^{(N)}|$ を上から評価する。はじめに、$\tilde{A}_{a,0}, \tilde{B}_{a,0}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{a,0} &:= (|k|(A_{a,0}^{(N)})_k)_{|k|<N} \\
\tilde{B}_{a,0} &:= (k^2(A_{a,0}^{(N)})_k)_{|k|<N}
\end{aligned}$$

すると、

$$\begin{aligned}
|A_{a,0}^{(N)} z_1^{(N)}| &\le 2(\bar{\omega} + r)\|\tilde{B}_{a,0}\|_w r + 2\|\tilde{B}_{a,0}\|_w \|\bar{a}\|_w r \\
&\quad + \mu\|\tilde{A}_{a,0}\|_w r \\
&\quad + \frac{\mu}{3}\|\tilde{A}_{a,0}\|_w (r^2 + 3\|\bar{a}\|_w r + 3\|\bar{a}\|_w^2) r \\
&\quad + \|\tilde{B}_{a,0}\|_w (2\bar{\omega} + r) r + \mu\|\tilde{A}_{a,0}\|_w r \\
&\quad + \mu(\bar{\omega} + r)\|\tilde{A}_{a,0}\|_w (2\|\bar{a}\|_w + r) r \\
&\quad + \mu\|\tilde{A}_{a,0}\|_w \|\bar{a}\|_w^2 r \\
&= Z_2^{(4,0)} r^3 + Z_2^{(3,0)} r^2 + Z_2^{(2,0)} r
\end{aligned}$$

となる。同様に $\|A_{a,1}z_1\|_w$ を上から評価する。$\tilde{A}_{a,1}, \tilde{B}_{a,1}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{a,1} &:= (|j|(A_{a,1})_{k,j})_{k,j\in\mathbb{Z}} \\
\tilde{B}_{a,1} &:= (j^2(A_{a,1})_{k,j})_{k,j\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

すると、

$$\begin{aligned}
\|A_{a,1}z_1\|_w &\le 2(\bar{\omega} + r)\|\tilde{B}_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} r + 2\|\tilde{B}_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} \|\bar{a}\|_w r \\
&\quad + \mu\|\tilde{A}_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} r \\
&\quad + \frac{\mu}{3}\|\tilde{A}_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} (r^2 + 3\|\bar{a}\|_w r + 3\|\bar{a}\|_w^2) r \\
&\quad + \|\tilde{B}_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} (2\bar{\omega} + r) r + \mu\|\tilde{A}_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} r \\
&\quad + \mu(\bar{\omega} + r)\|\tilde{A}_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} (2\|\bar{a}\|_w + r) r \\
&\quad + \mu\|\tilde{A}_{a,1}\|_{\mathcal{L}(\ell_\nu^1)} \|\bar{a}\|_w^2 r \\
&= Z_2^{(4,1)} r^3 + Z_2^{(3,1)} r^2 + Z_2^{(2,1)} r
\end{aligned}$$

と書ける。$Z_2^{(4,1)}, Z_2^{(3,1)}, Z_2^{(2,1)}$ は、先ほどの $\tilde{A}_{a,0}, \tilde{B}_{a,0}$ を $\tilde{A}_{a,1}, \tilde{B}_{a,1}$ に置き換えたものになる。

$j = 2, 3, 4$ で

$$Z_2^{(j)} := \max\{Z_2^{(j,0)}, Z_2^{(j,1)}\}$$

とすれば、

$$Z_2(r) = Z_2^{(4)} r^2 + Z_2^{(3)} r + Z_2^{(2)}$$

となる。

1.3 radii polynomial の精度保証

上で求めた各評価を、radii polynomial

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0.$$

に代入して、$p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ を求める。各評価の計算は、Julia の `IntervalArithmetic.jl` を用いて区間演算を行っており、それぞれの評価の上界 (sup) を用いて r_0 の区間を求める。手法としては、まず、各評価の上界を代入した $p(r)$ を Newton 法を反復して、$p(r_0) = 0$ となる r_0 の近似解を求め、これを r_0 Krawczyk 法で検証する。

1.3.1 各評価の上界の値と区間 r_0

各評価の上界の値と区間 $r0$ は以下の値になった。

$$\begin{aligned}
Y_0 &= 2.1648276355041128e - 7 \\
Z_1 &= 0.19932204092542252 \\
Z_2^{(2)} &= 69.97604726405831 \\
Z_2^{(3)} &= 26.652787246376946 \\
Z_2^{(4)} &= 2.390949473898198 \\
r_0 &= [2.7038e - 07, 2.70381e - 07]
\end{aligned}$$

そして、 $p(r)$ のグラフは以下のようになった。

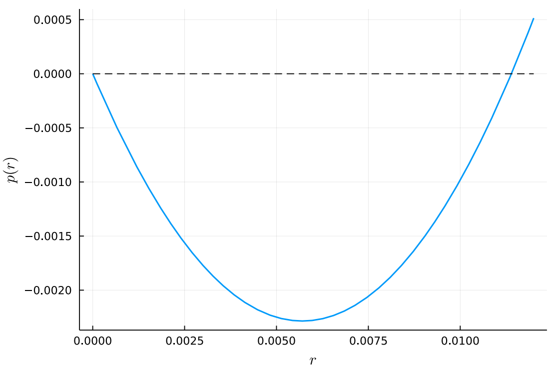

図 1: radii polynomial