1 van der Pol 方程式の周期解の数値計算

常微分方程式の一つである van der Pol 方程式の周期解の数値計算をまず行い、得た近似解をもとに解の精度保証を行う。

1.1 van der Pol 方程式

van der Pol 方程式とは、以下のような方程式である。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

$x(t)$ が未知関数で、$\mu > 0$ は非線形の減衰の強さを表すパラメータである。van der Pol 方程式を次の連立常微分方程式系にして `DifferentialEquations.jl` の ODE ソルバーで数値計算する。

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1-x^2)y - x \end{cases}$$

初期値 $x(0) = 0,\ y(0) = 2$ とし, $\mu = 1$ のときの数値計算は以下のように実行できる。

```
using DifferentialEquations

function vanderpol(du, u , μ ,t)
    x,y = u
    du[1] = y
    du[2] = μ*(1- x ^2)*y - x
end

u0 = [0.0; 2.0]
tspan = (0.0, 300)
μ = 1.0
prob = ODEProblem(vanderpol, u0, tspan, μ)
sol = solve(prob,Tsit5(),
           reltol=1e-8,abstol=1e-8)
```

1.2 Newton 法の初期値の設定

まず、フーリエ級数の係数を求めるために、van der Pol 方程式の周期解の周期を大まかに求める。

```
a = 30
app_period = 6.55
timestep = 0.1

f_tmp = sol(a+app_period/2:timestep:a+3*app_period/2)
find_period = abs.(f_tmp .- sol(a))
(~,ind) = findmin(find_period[1,:])
b = a+app_period/2 + timestep*(ind-1)
```

1.3 Newton 法を用いた周期解の求め方

van der Pol 方程式は、$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ とおくと、以下のように表すことができる。

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$$

後の計算のために、式を少し整理すると、

$$\ddot{x} - \mu\dot{x} + \frac{\mu}{3}(\dot{x^3}) + x = 0$$

と書ける。また、周期解 $x(t)$ を周期 L の周期関数とし、$\omega = \frac{2\pi}{L}$ とおくと、$x(t)$ とその微分や 2 乗はフーリエ級数を使って、

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{\mathrm{i}k\omega t} \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathrm{i}k\omega) a_k e^{\mathrm{i}k\omega t} \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-k^2\omega^2) a_k e^{\mathrm{i}k\omega t} \\ x(t)^3 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a*a*a)_k e^{\mathrm{i}k\omega t} \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで

$$(a*a*a)_k := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i\in\mathbb{Z}}} a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

は 3 次の離散たたみこみである。

以上の式を用いて、フーリエ係数に関する式を立てる。$a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ に対して、van der Pol 方程式に求めたフーリエ級数を代入すると、

$$f_k(a) := -k^2\omega^2 a_k - \mu\mathrm{i}k\omega a_k + \frac{\mu}{3}(\mathrm{i}k\omega)(a*a*a)_k + a_k$$

となる点列 $(f_k(a))_{k\in\mathbb{Z}}$ が得られる。そして、点列 a が van der Pol 方程式の解のフーリエ係数になっているならば、各 $k\in\mathbb{Z}$ について

$$f_k(a) = 0$$

となる。このときの未知数は周波数 ω と点列 a であり、これらを並べて $\mathrm{x}=(\omega,a)$ と書くことにする。未知数 x に対して、$f_k(a)=0$ という方程式だけでは不定な方程式になるため、解の形を一つに定める事ができない。そこで、位相条件

$$\eta(a):=\sum_{|k|<N}a_k-\eta_0=0,\quad \eta_0\in\mathbb{R}$$

を加える。この条件は $x(t)$ の初期値 $x(0)=\eta_0$ を表している。最終的に van der Pol 方程式の周期解の求解は次の代数方程式を解くことに帰着される。

$$F(\mathrm{x}):=\begin{bmatrix}\eta(a)\\(f_k(a)_{k\in\mathbb{Z}}\end{bmatrix}=0.$$

以下、この零点探索問題 $F(\mathrm{x})=0$ について Newton 法で解を得ることを考える。まず N をフーリエ係数の打ち切り番号（最大波数:$N-1$）とし、周期解の近似を次のように構成する。

$$\bar{x}(t)=\sum_{|k|<N}\bar{a}_k e^{\mathrm{i}k\bar{\omega}t}.$$

このとき、フーリエ係数と（近似）周期を並べた

$$\bar{\mathrm{x}}=(\bar{\omega},\bar{a}_{-N+1},\dots,\bar{a}_{N-1})\in\mathbb{C}^{2N}$$

を近似解とよぶ。近似解 $\bar{\mathrm{x}}$ の未知数は $2N$ 個。そして $f_k(a)=0$ を $|k|<N$ の範囲で打ち切る方程式

$$F^{(N)}(\mathrm{x}^{(N)})=\begin{bmatrix}\eta(a^{(N)})\\(f_k(a^{(N)}))_{k<|N|}\end{bmatrix}=0$$

を考える。ここで $a^{(N)}=(a_k)_{|k|<N}$, $\mathrm{x}^{(N)}=(\omega,a^{(N)})$ をそれぞれ表し、$F^{(N)}:\mathbb{C}^{2N}\to\mathbb{C}^{2N}$ である。したがって $F^{(N)}(\mathrm{x}^{(N)})=0$ という有限次元の非線形方程式を解くことで、近似解 $\bar{\mathrm{x}}$ が得られる。

1.4 Newton 法による周期解の数値計算

これから、実際に Newton 法を用いて、周期解の数値計算を行っていく。

Newton 法の式は、ある適当な初期値 x_0 を最初に定め、以下の反復計算によって計算できる。

$$\mathrm{x}_{n+1}=\mathrm{x}_n-DF^{(N)}(\mathrm{x}_n)^{-1}F^{(N)}(\mathrm{x}_n),\quad n=0,1,\dots$$

このことから、$DF^{(N)}(\mathrm{x}_n)^{-1}$ と $F^{(N)}(\mathrm{x}_n)$ を計算することができれば、近似解を得ることができる。そして、$F^{(N)}(\mathrm{x}^{(N)})$ のヤコビ行列は、

$$DF^{(N)}(x^{(N)})=\left[\begin{array}{c|ccc}0&1&\dots&1\\\hline\vdots&&\vdots&\\\partial_\omega f_k&\dots&\partial_{a_j}f_k&\dots\\\vdots&&\vdots&\end{array}\right]$$
$$\in\mathbb{C}^{2N\times2N}\quad(|k|,|j|<N).$$

ここで、

$$\begin{cases}\partial_\omega f_k=(-2k^2\omega-\mu\mathrm{i}k)a_k+\frac{\mu\mathrm{i}k}{3}(a*a*a)_k\\\partial_{a_j}f_k=(-k^2\omega^2-\mu\mathrm{i}k\omega+1)\delta_{kj}+\mu\mathrm{i}k\omega(a*a)_{k-j}\end{cases}$$

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1&(k=j)\\0&(k\neq j)\end{cases}$$

である。ヤコビ行列の各要素との対応は

$$\left(DF^{(N)}(x^{(N)})\right)_{\ell,m}=\begin{cases}0&(\ell=m=1)\\1&(\ell=1,m=2\cdots2N)\\\partial_\omega f_k&(\ell=2\cdots2N,m=1,\\&\ \text{i.e., }\ \ell=k+N+1\\&\ \text{for }|k|<N)\\\partial_{a_j}f_k&(\ell,m=2\cdots2N,\\&\ \text{i.e., }\ \ell=k+N+1\\&\ \text{for }|k|<N,\ m=j+N+1\\&\ \text{for }|j|<N)\end{cases}$$

である。

1.5 Newton 法の反復

$$x_{n+1}=x_n-DF^{(N)}(x_n)^{-1}F^{(N)}(x_n)$$

x_0 を初期値とし、$F(\bar{x})\approx0$ となる $\bar{x}\in\mathbb{C}^{2N}$ を求める。Julia で実装した結果、位相図が下の図となる。

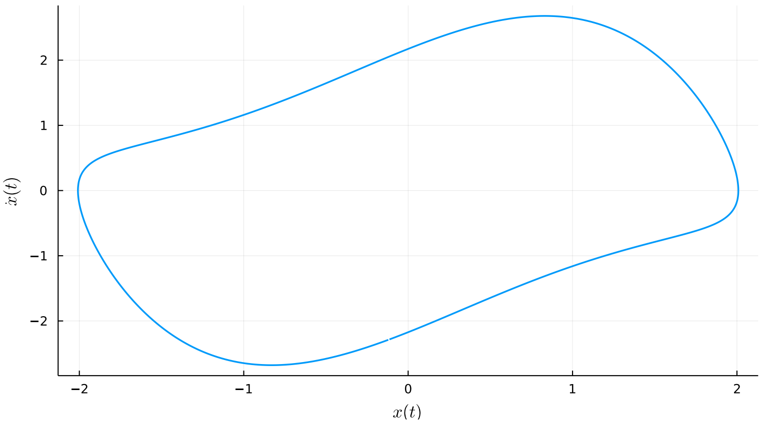

図 1: Phase plot of a numerical solution