ある関数 $f(x)$ ($x \in [0, 2\pi]$) を周期 2π の周期関数 (任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$f(x) = f(x+L)$ となる関数を周期 L の周期関数という) とする。このとき

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

となる無限級数を**フーリエ級数**という。ここで a_n, b_n はフーリエ係数といい

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

で定められる。また、$\cos(nx) = \frac{e^{\mathrm{i}nx} + e^{-\mathrm{i}nx}}{2}$, $\sin(nx) = \frac{e^{\mathrm{i}nx} - e^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}}$ ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ は虚数単位) という関係を用いて

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}kx} dx$$

と複素数を用いた形式も考えられる。これを複素フーリエ級数、c_k を複素フーリエ係数という。これらには関係式

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0/2, \quad k = 0 \\ c_k &= \begin{cases} (a_k - ib_k)/2, & k > 0 \\ (a_{-k} + ib_{-k})/2, & k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

があり、変換可能である。

0.1 Fourier 級数の性質

0.1.1 対称性

周期関数 $f(x)$ が、偶関数の性質

$$f(x) = f(-x)$$

を満たすとすると、サインの係数 b_n が

$$b_n = 0$$

になるので、この関数のフーリエ級数は、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

と表すことができる。このようにコサイン関数のみで表されるフーリエ級数のことを**フーリエ・コサイン級数**と言う。このとき $c_{-k} = c_k$ も成り立つ。

一方で、$f(x)$ が、奇関数の性質

$$f(x) = -f(-x)$$

を満たすとすると、コサインの係数 a_n が

$$a_n = 0$$

になるので、この関数のフーリエ級数は、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

と表すことができる。このようにサイン関数のみで表されるフーリエ級数のことを**フーリエ・サイン級数**と言う。このとき $c_{-k} = -c_k$ も成り立つ。

0.1.2 実数値関数

$f(x)$ が実数値関数 $f(x) \in \mathbb{R}$ であるとき、フーリエ係数 a_n, b_n は

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

となる。更に、複素フーリエ係数 c_k は、

$$c_{-k} = \overline{c_k}$$

を満たす。これは、$f(x) = \overline{f(x)}$ という条件を使うことで確認できる。

0.1.3 係数の収束

ある周期関数のフーリエ係数を a_n とおく。このとき、$n \to \infty$ での収束のオーダーは

$$a_n = \begin{cases} \mathcal{O}(n^{-k}) & k \text{ 次オーダーの収束} \\ \mathcal{O}(e^{-qn^r}) & q: \text{定数}, r > 0, \text{指数オーダーの収束} \\ \mathcal{O}(e^{-qb\log(n)}) & \text{超幾何収束} \end{cases}$$

などのパターンがあり、それぞれ周期関数 $f(x)$ の滑らかさによって決まる。例えば、$f(x)$ が k 次オーダーの収束をする場合は、関数 f は C^k-級（k 階連続微分可能）の関数である。指数オーダーの収束をする場合は実解析関数（極や分岐点を持つ一般的な有限区間／無限区間上の関数）である。超幾何収束は、複素平面上で ∞ 以外で特異点を持たない関数 (整関数, entire function) の場合におこる。

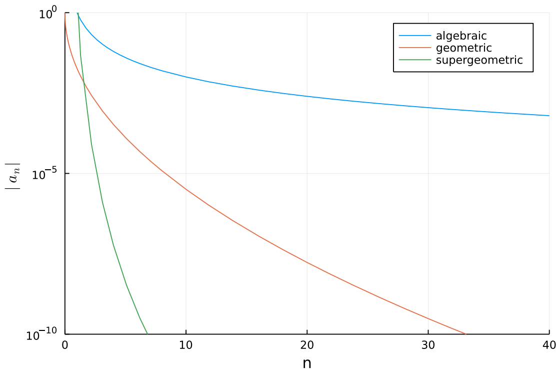

図 1: Types of order

0.1.4 その他の便利な性質

- 微分

$$\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}k)c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

- シフト

$$f(x-d)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{\mathrm{i}k(x-d)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(e^{-\mathrm{i}kd})c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

元の係数 c_k に ik や $e^{\mathrm{i}kd}$ を掛けるだけで演算ができる。

0.2 フーリエ係数の計算方法

周期関数 $f(x)$ のフーリエ係数 c_k を数値計算で求めることを考える。フーリエ係数の添字のサイズ N を $|k|<N$ となるように定める（$N-1$ を最大波数ともいう)。

このとき、$0=x_0\le x_1\le\cdots\le x_{2N-1}=2\pi$ と区間 $[0,2\pi]$ を等間隔に分割した点 $x_j=jh$ ($j=0,\dots,2N-1$, $h=2\pi/(2N-1)$) を標本点といい、標本点上での関数値を用いて次のようなフーリエ係数の近似を得る。

$$\begin{aligned}c_k&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-\mathrm{i}kx}dx\\&\approx\frac{1}{2N-1}\sum_{j=0}^{2N-2}f(x_j)e^{-2\pi\mathrm{i}\frac{kj}{2N-1}}=\bar{c}_k,\quad(|k|<N).\end{aligned}$$

この $\bar{c}_k$ の式は、離散フーリエ変換の式 ($a_k=\mathcal{F}_k(b)=\sum_{j=0}^{2M-2}b_j e^{-2\pi\mathrm{i}\frac{jk}{2M-1}}$) を用いて、FFT で実装することができる。そして、近似されたフーリエ係数 $\bar{c}_k$ を使って、元の関数 $f(x)$ の近似が

$$f^{(N)}(x)=\sum_{|k|<N}\bar{c}_k e^{\mathrm{i}kx}.$$

と得られる。

0.3 フーリエ係数から元の関数の概形を求める

関数 $f^{(N)}(x)$ の係数 $\bar{c}_k$ から元の関数をプロットしたい。いま標本点上での関数値は

$$f^{(N)}(x_j)=\sum_{|k|<N}\bar{c}_k e^{\mathrm{i}kx_j}=\sum_{|k|<N}\bar{c}_k e^{2\pi\mathrm{i}\frac{kj}{2N-1}}.$$

これは逆離散フーリエ変換に相当する。そこで逆高速フーリエ変換 (IFFT) を用いて元の関数を求める。しかし、このまま IFFT を用いると、標本点と同じ数の関数値しか得られず、グラフに描画するといびつになってしまう。これを解消するために、フーリエ係数 $\bar{c}_k$ に 0 を余分に貼り合わせて (padding という)、滑らかなグラフを得る。

0.4 周期が 2π 以外の場合の取り扱い方

$f(t)$ を周期 L の周期関数とする。このとき変数 $t:a\to b$ ($L=b-a$) に対して、変数 x を $x=\omega(t-a)$ ($\omega=2\pi/L$) と定めると、$x:0\to 2\pi$ となり、関数 $g(x)\equiv f(a+\omega^{-1}x)$ は周期 2π の周期関数である。

いま $g(x)$ がフーリエ級数

$$g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

で表されているとすると、

$$f(t)=g(\omega(t-a))=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{\mathrm{i}k\omega(t-a)},$$

が成り立つ。フーリエ係数 $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ は

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)e^{-\mathrm{i}kx}dx=\frac{1}{L}\int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}k\omega(t-a)}dt$$

となり、$(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ は次のように近似される。

$$c_k\approx\frac{1}{2N-1}\sum_{j=0}^{2N-2}f(t_j)e^{-2\pi\mathrm{i}\frac{kj}{2N-1}}.$$

ここで、$t_j = a + \frac{jL}{2N-1}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2N-2)$
このことから、周期が 2π の周期関数とフーリエ係数の近似が同じ式になるため、フーリエ係数の計算方法は、先程と変わらない。