Lista 02 Rubem Vasconcelos Pacelli

①-

$$x[n] = v[n] + 3v[n-1]$$

1) $E[x[n]] = ?$ 2) $R_x[n] = ?$ 3) $x[n]$ é estacionário?

2) $R_x[n] = ?$

$v[n]$ são V.A independentes com média μ e variância σ^2

i) $R_x[i,j] = E\Big[x[n-i]\,x[n-j]\Big] = E\Big[v[n-i]\,v[n-j]\Big] + 3E\Big[v[n-i]\,v[n-j-1]\Big]$

$+ 3E\Big[v[n-i-1]\,v[n-j]\Big] + 9E\Big[v[n-i-1]\,v[n-j-1]\Big]$

ii) $\tau = i - j \longrightarrow i = \tau + j$

iii) $R_x[\tau, j] = E\Big[v[n-j-\tau]\,v[n-j]\Big] + 3E\Big[v[n-j-\tau]\,v[n-j-1]\Big] + 3E\Big[v[n-j-\tau-1]\,v[n-j]\Big]$

$+ 9E\Big[v[n-j-\tau-1]\,v[n-j-1]\Big]$

iv) $k = n - j$

v) $R_x[\tau, k] = E\Big[v[k-\tau]\,v[k]\Big] + 3E\Big[v[k-\tau]\,v[k-1]\Big] + 3E\Big[v[k-\tau-1]\,v[k]\Big]$

$+ 9E\Big[v[k-\tau-1]\,v[k-1]\Big]$

Pela eq. V), podemos observar que a função de autocorrelação do processo aleatório $x[n]$ depende somente da diferença entre as amostras (τ), portanto

vi) $R_x[k,\tau] = R_x[\tau] = \mu^2 + 3\mu^2 + 3\mu^2 + 9\mu^2 \longrightarrow \boxed{R_x = 16\mu^2}$

Uma vez que $E[v[n-a]\,v[n-b]] = E[v[n-a]]\,E[v[n-b]] = \mu . \mu = \mu^2 \;\; \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$, pois $v[n]$ é uma sequência de variáveis aleatória independentes

i)

vii) $E[x[n]] = E[v[n]] + 3\,E[v[n-1]] = 4\mu$

3)

viii) Segundo Leon Garcia, se $R_x[a,b] = R_x[a-b]$ (Como mostrado em vi)) e $E[x[n]] = C$, em que C é uma constante (Como mostrado em vii)), então $x[n]$ é WSS

Lista 2

2.

$$x[n] = v_1[n] + 3v_2[n-1] \quad Y[n] = v_2[n+1] + 3v_1[n-1]$$

$v_1[n]$ e $v_2[n]$ são P.A de ruído branco independentes. $VAR[v_1[n]] = VAR[v_2[n]] = 0,5$

b) $$R_{x,y}(n_1, n_2) = E\left[X[n_1]Y[n_2]\right] = E\Big[v_1[n_1]v_2[n_2+1] + 3v_1[n_1]v_1[n_2-1] + 3v_2[n_1-1]v_2[n_2+1] + 9v_2[n_1-1]v_1[n_2-1]\Big]$$

$$R_{x,y}(n_1,n_2) = E\left[v_1[n_1]v_2[n_2+1]\right] + 3E\left[v_1[n_1]v_1[n_2-1]\right] + E\left[3v_2[n_1-1]v_2[n_2+1]\right] + 9E\left[v_2[n_1-1]v_1[n_2-1]\right]$$

i) Se $\underline{n_1 = n}$ e $\tau = n_2 - n_1 \rightarrow \underline{n_2 = n+\tau}$, então

$$R_{x,y}(n, n+\tau) = E\left[v_1[n]v_2[n+\tau-1]\right] + 3E\left[v_1[n]v_1[n+\tau-1]\right] + 3E\left[v_2[n-1]v_2[n+\tau+1]\right] + 9E\left[v_2[n-1]v_1[n+\tau-1]\right]$$

ii) De acordo com Leon Garcia (Sec 9.6, 3ª ed), um processo é chamado de estacionário se a sua FAC não depender do deslocamento temporal, mas sim da diferença temporal das amostras. Como o deslocamento de n não interfere em $R_{x,y}(n, n+\tau)$, este processo é WSS. Então

$$R_{x,y}(n, n+\tau) = R_{x,y}(\tau) = R_{v_1,v_2}(\tau-1) + 3R_{v_1}(\tau-1) + 3R_{v_2}(\tau+2) + 9R_{v_2,v}(\tau)$$

$$\boxed{R_{x,y}(\tau) = 9\delta[\tau] + 4\delta[\tau-1] + 3\delta[\tau-2]}$$

a) i) $R_Y(n, n+\tau) = E\left[Y[n]\, Y[n+\tau]\right] = E\left[v_2[n+1]\, v_2[n+\tau+1]\right]$

$+ 3E\left[v_2[n+1]\, v_1[n+\tau-1]\right] + 3E\left[v_1[n-1]\, v_2[n+1+\tau]\right]$

$+ 9E\left[v_1[n-1]\, v_1[n-1+\tau]\right]$

Pelo mesmo explicação em iii) no item b), $Y[n]$ é um P.A WSS. Então

$$R_Y(n, n+\tau) = R_Y(\tau) = \delta[\tau] + 3\delta[\tau-2] + 3\delta[\tau+2] + 9\delta[\tau]$$

$$\boxed{R_Y(\tau) = 10\,\delta[\tau] + 3\,\delta[\tau-2] + 3\,\delta[\tau+2]}$$

ii) $R_X(n, n+\tau) = E\left[v_1[n]\, v_1[n+\tau]\right] + 3E\left[v_1[n]\, v_2[n+\tau-1]\right]$

$+ 3E\left[v_2[n-1]\, v_1[n+\tau]\right] + 9E\left[v_2[n-1]\, v_2[n-1+\tau]\right]$

Pelo mesmo explicação em iii) no item b), $x[n]$ é um PA WSS, Então

$$R_X(n, n+\tau) = R_X(\tau) = R_{v_1}(\tau) + 3C_{v_1 v_2}(\tau-1) + 3C_{v_2 v_1}(\tau+1) + 9R_{v_2}(\tau)$$

$$\boxed{R_X(\tau) = 10\delta[\tau] + 3\,\delta[\tau-1] + 3\,\delta[\tau+1]}$$

③ -

$$R_X = \begin{bmatrix} E[x^2[n]] & E[x[n]x[n-1]] \\ E[x] & E[x[n-1]x[n]] \end{bmatrix}$$

1- R_x deve ser Simétrica (Leon garcia, pg 319)

2- R_x deve ser semi-definida positiva (Silvio Abrante: Processamento Adaptativo de sinais)

3- R_x deve ser simétrica

⑤ a) $R_X = K_X + \vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H$

i) $K_X \triangleq E\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_X)(\vec{X} - \vec{\mu}_X)^H\right] = E\left[\vec{X}\vec{X}^H\right] - E\left[\vec{X}\vec{\mu}_X^H\right] - E\left[\vec{\mu}_X \vec{X}^H\right] + E\left[\vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H\right]$

ii) $R_X \triangleq E\left[\vec{X}\vec{X}^H\right]$ e $E[\vec{X}] \triangleq \vec{\mu}_X$

Subs ii) em i)

iii) $K_X = R_X - \vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H - \cancel{\vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H} + \cancel{\vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H} \longrightarrow \boxed{R_X = K_X + \vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H}$

b) $K_Z = K_X + K_{X,Y} + K_{Y,X} + K_Y$ p/ X e Y decorrelacionados e $Z = X + Y$

$K_Z = E\left[\left((\vec{X}+\vec{Y}) - E[\vec{X}+\vec{Y}]\right)\left((\vec{X}+\vec{Y}) - E[\vec{X}+\vec{Y}]\right)^H\right]$

$= E\left[\vec{X}\vec{X}^H\right] + E\left[\vec{X}\vec{Y}^H\right] - \vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H - \vec{\mu}_X \vec{\mu}_Y^H$

$+ E\left[\vec{Y}\vec{X}^H\right] + E\left[\vec{Y}\vec{Y}^H\right] - \vec{\mu}_Y \vec{\mu}_X - \vec{\mu}_Y \vec{\mu}_Y^H$

$\cancel{-\vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H} - \cancel{\vec{\mu}_X \vec{\mu}_Y^H} + \cancel{\vec{\mu}_X \vec{\mu}_X^H} + \cancel{\vec{\mu}_X \vec{\mu}_Y^H}$

$\cancel{-\vec{\mu}_Y \vec{\mu}_X^H} - \cancel{\vec{\mu}_Y \vec{\mu}_Y^H} + \cancel{\vec{\mu}_Y \vec{\mu}_X^H} + \cancel{\vec{\mu}_Y \vec{\mu}_Y^H}$

$$\boxed{K_Z = K_X + K_{XY} + K_{YX} + K_Y}$$

6 -

$$x[n] = v_1[n] + 2v_1[n+1] + 3v_2[n-1]$$

$\cdot\ R_{v_1}[n_1, n_0] = R_{v_2}[n_1, n_0] = R_v[n_1, n_0] = 0{,}5\,\delta[n_1 - n_0]$

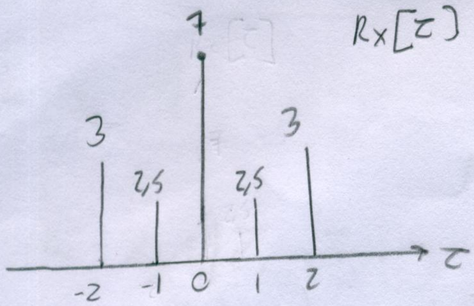
a) i) $R_X[n_1, n_0] = E\left[x[n_1]\,x[n_0]\right]$

p/ $n_1 = n$ e $\tau = n_1 - n_0 \rightarrow n_0 = n - \tau$

ii) $R_X[n, n-\tau] = E\left[v_1[n]v_1[n-\tau]\right] + 2E\left[v_1[n]v_1[n+1-\tau]\right]$
$+ 3E\left[v_1[n]v_2[n-1-\tau]\right] + 2E\left[v_1[n+1]v_1[n-\tau]\right] + 4E\left[v_1[n+1]v_1[n+1-\tau]\right]$
$+ 6E\left[v_1[n+1]v_2[n-1-\tau]\right] + 3E\left[v_2[n-1]v_1[n-\tau]\right] + 6E\left[v_2[n-1]v_1[n+1-\tau]\right]$
$+ 9E\left[v_2[n-1]v_2[n-1-\tau]\right]$

$$R_X[n, n-\tau] = 0{,}5\,\delta[\tau] + \delta[\tau-1] + 1{,}5\,\delta[\tau+1] + \delta[\tau+1] + 2\,\delta[\tau]$$
$$+ 3\,\delta[\tau+2] + 1{,}5\,\delta[\tau-1] + 3\,\delta[\tau-2] + 4{,}5\,\delta[\tau]$$

$$R_X[n, n-\tau] = R_X[\tau] = 3\,\delta[\tau+2] + 2{,}5\,\delta[\tau+1] + 7\,\delta[\tau] + 2{,}5\,\delta[\tau-1] + 3\,\delta[\tau-2]$$



iii) O P.A $x[n]$ é WSS pois $R_x[n, n-\tau] = R_x[\tau]$

b)

$$R_x = \begin{bmatrix} E[x^2[n]] & E[x[n]x[n-1]] & \cdots & \\ E[x[n]x[n-1]] & E[x^2[n-1]] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & E[x^2[n-7]] \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] & \cdots & \\ R_x[-1] & R_x[0] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & R_x[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2,5 & 3 & 0 & 0 & \cdots \\ 2,5 & 7 & 2,5 & 3 & 0 & \cdots \\ 3 & 2,5 & 7 & 2,5 & 3 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ matriz de Toeplitz

⑦ -

i) $\vec{X} = P\vec{Y} = \begin{bmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & \vec{e_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{4} y_k \vec{e_k}$ (Expansão de Karhunen-Loève)

Seja uma V.A X cuja função de correlação é:

ii) $K_x = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Deseja-se obter uma tranformação linear ($Y = AX$) cuja $K_Y = \Lambda$, em que Λ é uma matriz diagonal. A expansão de Karhunen-Loève (eq. i) fornece que

iii) $\underline{A = P^T}$

iv) $K_x \vec{e_i} = \lambda_i \vec{e_i}$ $\vec{e_i}$ - autovetores λ_i - autovalores

v) $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda)$

vi) $P = \begin{bmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & \vec{e_4} \end{bmatrix}$ vii) $P\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{e_1} & \lambda_2 \vec{e_2} & \cdots & \lambda_4 \vec{e_4} \end{bmatrix}$

Da eq. iV)

$(K_x - \lambda_i I)$ - matriz dos coeficientes

vii) $(K_x - \lambda_i I)\vec{e_i} = \vec{0}$

$\vec{e_i}$ - matriz das incógnitas

$\vec{0}$ - matriz dos termos independentes

P/ que o sist. linear tenha relação diferente de $\vec{e_i} = \vec{0}$, a matriz do coeficientes deve ser uma matriz singular, i.e.:

ix) $|K_x - \lambda I| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Resolvendo a eq. acima, temos:

x) $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 3 \quad \lambda_4 = 5$

Os autovetores podem ser calculado resolvendos as eqs:

$\cdot\ K_x \vec{e_1} = \lambda_1 \vec{e_1} \quad \cdot\ K_x \vec{e_2} = \lambda_2 \vec{e_2} \quad \cdot\ K_x \vec{e_3} = \lambda_3 \vec{e_3} \quad \cdot\ K_x \vec{e_4} = \lambda_4 \vec{e_4}$

p/ $\vec{e_1}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,1} \\ e_{1,2} \\ e_{1,3} \\ e_{1,4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{1,1} \\ e_{1,2} \\ e_{1,3} \\ e_{1,4} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \vec{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix}$$

Repete-se o mesmo p/ $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ e $\vec{e_4}$

Com isso, tem-se os vetores de base a expansão de Karhunen-Loeve (i.e. $\vec{e_i}$):

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}7071 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}7071 \\ 0{,}7071 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}7071 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_4 = \begin{bmatrix} 0{,}7071 \\ 0{,}7071 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$