Universidade Federal do Ceará

Disciplina: Processamento Estatístico de Sinais

Professor: Charles Casimiro Cavalcante

Estudante: Rubem Vasceconcelos Pacelli Matrícula: 474725

Novembro de 2019

Lista 4

1. A Função de correlação do sinal de entrada é

$$\begin{aligned}\mathbf{R_x} &= \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(-1) & R_x(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E\left[x^2\left[n\right]\right] & E\left[x\left[n\right]x\left[n-1\right]\right] \\ E\left[x\left[n-1\right]x\left[n\right]\right] & E\left[x^2\left[n-1\right]\right] \end{bmatrix} \\ \mathbf{R_x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

A Funçaõ de correlação cruzada entre o sinal de entrada e o sinal desejado é

$$\begin{aligned}\mathbf{R_{dx}} &= \begin{bmatrix} R_{dx}(0) \\ R_{dx}(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E\left[x\left[n\right]d\left[n\right]\right] \\ E\left[x\left[n-1\right]d\left[n\right]\right] \end{bmatrix} \\ \mathbf{R_{dx}} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{R_x}^{-1} &= \frac{1}{det\left(\mathbf{R_x}\right)} \cdot Adj\left(\mathbf{R_x}\right) \\ \mathbf{R_x}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1.33 & -0.67 \\ .67 & 1.33 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

A equação de Wiener–Hopf fornece os coeficientes do filtro ótimo. Para os matrizes dadas nas equações (2) e (3), os parâmetros do filtro FIR é dado por [1]

$$\begin{aligned}\mathbf{w_o} &= \mathbf{R_x}^{-1}\mathbf{R_{dx}} \\ \mathbf{w_o} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Seja σ_d^2 a variância do sinal desejado, o mínimo erro médio quadrático fornecido pelo filtro de Wiener é [1]

$$
\begin{aligned}
J_{min} &= \sigma_d^2 - {\mathbf{R}_{\mathrm{d}\mathbf{x}}}^H \mathbf{w_o} \\
J_{min} &= \sigma_d^2 - 0.25
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(c) Uma expressão importante obtida a partir do filtro de Wiener é o valor da função de custo em torno do ponto ótimo, que pode ser expressada em termos dos autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{R_x}$. Considere o sinal de erro da saída de um filtro de FIR cujos os coeficiente não minimizam a função custo (i.e., filtro não-ótimo, $\mathbf{w} \neq \mathbf{w_o}$), o erro quadrático é

$$
\begin{aligned}
|e\,[n]\,|^2 &= \left(d\,[n] - \mathbf{w}^H\mathbf{x}\right)\left(d\,[n] - \mathbf{w}^H\mathbf{x}\right)^H \\
&= \left(d\,[n] - \mathbf{w}^H\mathbf{x}\right)\left(d\,[n] - \mathbf{x}^H\mathbf{w}\right) \\
&= |d\,[n]\,|^2 - d\,[n]\,\mathbf{x}^H\mathbf{w} - d\,[n]\,\mathbf{w}^H\mathbf{x} + \mathbf{w}^H\mathbf{x}\mathbf{x}^H\mathbf{w}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Calculando a média na equação (6) e observando que $\mathbf{w}^H\mathbf{x} = \mathbf{x}^H\mathbf{w}$, têm-se:

$$
\begin{aligned}
J\,(\mathbf{w}) &\triangleq E\left[|e\,[n]\,|^2\right] \\
&= E\left[|d\,[n]\,|^2 - d\,[n]\,\mathbf{x}^H\mathbf{w} - d\,[n]\,\mathbf{w}^H\mathbf{x} + \mathbf{w}^H\mathbf{x}\mathbf{x}^H\mathbf{w}\right] \\
&= \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\mathrm{d}\mathbf{x}} + \mathbf{w}^H\mathbf{R_x}\mathbf{w}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Observe que se substituirmos (4) em (7), obteremos a equação (5), ou seja, $J_{min} = J\,(\mathbf{w_o})$. Pode-se analisar como a função custo se comporta em torno do ponto ótimo fazendo com que $\mathbf{w} = \mathbf{w_o} + \Delta\mathbf{w}$, então

$$
\begin{aligned}
J\,(\mathbf{w_o} + \Delta\mathbf{w}) &= \sigma_d^2 - 2(\mathbf{w_o} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{w})^H\mathbf{R}_{\mathrm{d}\mathbf{x}} + (\mathbf{w_o} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{w})^H\mathbf{R_x}(\mathbf{w_o} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{w}) \\
&= J_{min} + \Delta\mathbf{w}^H\mathbf{R_x}\Delta\mathbf{w}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

A matriz $\mathbf{R_x}$ pode ser diagonalizada em termos da matriz modal (i.e., a matriz formada pelos autovetores) e a matriz diagonal dos autovalores [2].

$$
\mathbf{R_x} = \mathbf{Q}^H\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q} \tag{9}
$$

Em que $\mathbf{Q}$ é a matriz modal

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \tag{10}$$

E $\mathbf{\Lambda}$ é matriz diagonal formada pelos autovalores [2]

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$
$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Substituindo (9) em (8), temos:

$$J\left(\mathbf{w_o} + \Delta\mathbf{w}\right) = J_{min} + \Delta\mathbf{w}^H \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H \Delta\mathbf{w} \tag{13}$$
$$= J_{min} + \mathbf{v}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{v} \tag{14}$$

Em que $\mathbf{v} = \mathbf{Q}^H \Delta\mathbf{w}$.

2. Considere a seguinte representação matricial da equação de Wiener–Hopf e da equação da função de custo mínima (mostradas em (4) e (5), respectivamente):

$$\begin{bmatrix} \sigma_d^2 & {\mathbf{R}_{\mathrm{dx}}}^H \\ \mathbf{R}_{\mathrm{dx}} & \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Em que $\mathbf{0}$ é o vetor nulo com dimensão igual a ordem do filtro de Wiener–Hopf. Com base na equação (15), pode-se facilmente concluir que $\mathbf{A}$ é matriz de correlação do vetor aumentado

$$\begin{bmatrix} d[n] \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Nesta análise, estamos supondo que $d[n]$ possui média nula e, portanto, o segundo momento central é igual ao seu segundo momento, i.e., $\sigma_d^2 \triangleq E\left[(d[n] - E\left[d[n]\right])^2\right] = E\left[d^2[n]\right]$.

3. A Figura 1 mostra um diagrama de blocos de uma arquitetura típica de cancelamento de ruído.

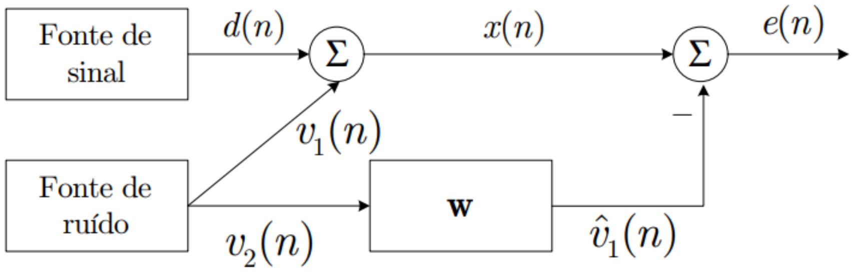

Figura 1: Cancelamento de ruído

Cancelamento de ruído é um assunto clássico em sistemas de comunicações no qual se pode utilzar técnicas de processamento estatístico de sinais para estimar o ruído incidente no sinal transmitido e, por fim, suprimi-lo [3].

Neste tipo de problema, é utilizado dois sensores. Enquanto o primeiro capta o sinal transmitido corrompido pelo ruído (representado na Figura 1 como $x[n]$), o segundo sensor capta apenas o ruído do canal (representado como $v_2[n]$). Portanto, os sinais conhecidos para este problema são $v_2[n]$ e $x[n]$.

No entanto, a subtração direta do sinal $v_2[n]$ no sinal recebido não fornece o desempenho desejado, pois, apesar de se originarem da mesma fonte, o ruído captado pelo segundo sensor ($v_2[n]$) é um processo estocástico diferente do ruído que é captado pelo primeiro sensor ($v_1[n]$). Apesar de ambos guardarem uma certa correlação, seus valores para o mesmo instante de amostragem se diferem. Afinal, tratam-se de processos estocásticos, e não determinísticos.

O problema então é: Com base no ruído do segundo sensor ($v_2[n]$), estimar, através da implementação de um filtro de Wiener, a estimativa do ruído que distorce o sinal desejado ($\hat{v}_1[n]$) [3], [4].

O objetivo do filtro de Wiener é selecionar os coeficiente do filtro FIR de tal forma de minimize a função custo, ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} E\left\{e[n]e^*[n]\right\} &= 0 \\
E\left\{e[n]\frac{\partial e^*[n]}{\partial \mathbf{w}}\right\} &= 0 \\
E\left\{e[n]\frac{\partial\left(x^*[n] - \hat{v}_1^*[n]\right)}{\partial \mathbf{w}}\right\} &= 0 \\
E\left\{e[n]\frac{\partial\left(x^*[n] - \mathbf{w}^T\mathbf{v_2^*}\right)}{\partial \mathbf{w}}\right\} &= 0 \\
E\left\{e[n]\mathbf{v_2^*}\right\} &= \mathbf{0} \qquad (17)
\end{aligned}$$

Em que $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} v_2[n] & v_2[n-1] & \cdots & v_2[n-M+1] \end{bmatrix}^T$, M é a ordem do filtro de Wiener e $\mathbf{0}$ é vetor nulo de ordem M. Portanto:

$$E\left\{e[n]v_2^*[n-k]\right\} = 0 \text{ para } 0 \leq k \leq M-1 \tag{18}$$

Essa equação fornece que, quando o filtro é ótimo, o erro é ortogonal ao sinal de entrada. Substituindo o sinal de erro, têm-se:

$$\begin{aligned} E\left\{(x[n] - \hat{v}_1[n])\, v_2^*[n-k]\right\} &= 0 \\ E\left\{\left(x[n] - \sum_{i=1}^{M-1} w[i]v_2[n-i]\right) v_2^*[n-k]\right\} &= 0 \\ E\left\{x[n]v_2^*[n-k] - \sum_{i=1}^{M-1} w[i]v_2[n-i]v_2^*[n-k]\right\} &= 0 \\ E\left\{x[n]v_2^*[n-k]\right\} - \sum_{i=1}^{M-1} w[i]E\left\{v_2[n-i]v_2^*[n-k]\right\} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Com base na Figura 1, pode-se ainda deixar o sinal recebido($x[n]$) em termos do ruído e do sinal transmitido:

$$\begin{aligned} E\left\{(d[n] + v_1)v_2^*[n-k]\right\} &= \sum_{i=1}^{M-1} w[i]E\left\{v_2[n-i]v_2^*[n-k]\right\} \\ E\left\{d[n]v_2^*[n-k]\right\} + E\left\{v_1[n]v_2^*[n-k]\right\} &= \sum_{i=1}^{M-1} w[i]E\left\{v_2[n-i]v_2^*[n-k]\right\} \\ R_{d,v_2}[k] + R_{v_1,v_2}[k] &= \sum_{i=1}^{M-1} w[i]R_{v_2,v_2}[k-i] \end{aligned} \tag{20}$$

Observe que o sinal desejado, $d[n]$ e o ruído do segundo sensor, $v_2[n]$, são descorrelacionados, portanto

$$R_{d,v_2}[k] = 0, \forall k \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

Por outro lado, os processos estocásticos $v_1[n]$ e $v_2[n]$ guardam algum tipo de correlação, pois ambos se originam da mesma fonte. A expressão analítica da função de correlação cruzada que estes dois sinais possuem varia para cada aplicação. A função de autocorrelação de $v_2[n]$ seria, no caso mais descorrelacionado possível, AWGN (do inglês, *Additive white Gaussian noise*), i.e., suas amostras teriam correlação nula em diferenças de instantes diferentes de zero. É importante ressaltar que estamos a considerar que os processos aleatórios envolvidos neste problema são WSS (*Wide Sense Stationary*) e, portanto, considerar-se apenas a diferença entre as amostras uma vez que o deslocamento temporal das mesmas não afeta a função de autocorrelação.

No entanto, o não é possível calcular $R_{v_1,v_2}[k]$ uma vez que o sinal $v_1[n]$ não é conhecido. Felizmente, é fácil mostrar que

$$\begin{aligned} R_{v_1,v_2}[k] &= E\left\{v_1[n-i]v_2^*[n-k]\right\} \\ R_{v_1,v_2}[k] &= E\left\{(x[n]-d[n])v_2^*[n-k]\right\} \\ R_{v_1,v_2}[k] &= E\left\{x[n]v_2^*[n-k]\right\} - E\left\{d[n]v_2^*[n-k]\right\} \\ R_{v_1,v_2}[k] &= R_{x,v_2}[k] - R_{d,v_2}[k] \\ R_{v_1,v_2}[k] &= R_{x,v_2}[k] \end{aligned} \tag{22}$$

Substituindo (21) e (22) em (20), têm-se:

$$\sum_{i=1}^{M-1} w[i]R_{v_2,v_2}[k-i] = R_{x,v_2}[k] \tag{23}$$

Ou, em notação matricial:

$$\begin{aligned} \mathbf{R_{v_2,v_2}w} &= \mathbf{R_{x,v_2}} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{R^{-1}_{v_2,v_2}R_{x,v_2}} \end{aligned} \tag{24}$$

Considera-se que $\mathbf{R_{v_2,v_2}}$ possua inversa. O resultado obtido em (24) é exatamente a equação de Wiener–Hopf (ver equação (4)), mas derivado do estudo sobre cancelamento de ruído.

4. A Figura 2 mostra a estutura típica de uma *Forward Linear Prediction* (FLP) *one-step* [1] [4].

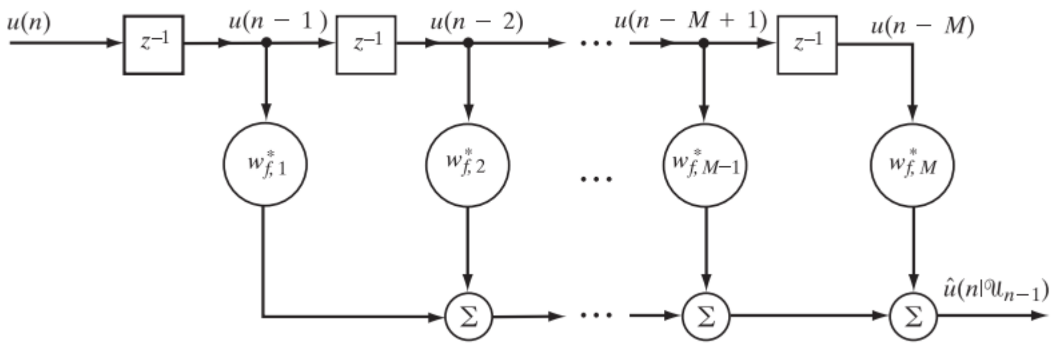

Figura 2: *Forward Linear Prediction* (FLP) *one-step*.

A otimização do erro quadrático médio também é obtido por meio da implementação do filtro de Wiener. Portanto, todas as equações provenientes do seu estudo são utilizadas na predição linear.

A abordagem clássica fornecida na literatura sobre *Forward Linear Prediction* (FLP) *one-step* é [1]: Dado um vetor de variáveis aleatórias

$$\mathbf{u}[n-1] = \begin{bmatrix} u[n-1] & u[n-2] & \cdots & u[n-M+1] \end{bmatrix}^T,$$

predizer o valor da próxima amostra, $u[n]$ (por este motivo que é chamado de *one-step*).

No entanto, neste problema, o sinal de entada é $x[n] = s[n+a] + s[n-4a]$. Além disso, não se deseja a próxima amostra, mas sim de $d[n] = s[n-a]$. Da equação de Wiener em (4), temos:

$$\mathbf{w_f} = \mathbf{R_x}^{-1}\mathbf{r}_{\mathbf{x},s} \tag{25}$$

Em que $\mathbf{R_x}$ é a matriz correlação do sinal de entrada, dado por

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(-1) & R_x(0) \end{bmatrix} \tag{26}$$

e $\mathbf{r}_{\mathbf{x},s}$ é a matriz de correlação cruzada entre o sinal de entrada e o sinal desejado, ou seja:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{x},s} = \begin{bmatrix} R_{x,s}(0) \\ R_{x,s}(1) \end{bmatrix} \tag{27}$$

A função de auto correlação do sinal $x[n]$ é:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E\left[x[n]x[n-\tau]\right] \\ &= E\left[\left(s[n+a] + s[n-4a]\right)\left(s[n+a-\tau] + s[n-4a-\tau]\right)\right] \\ &= 2R_s(\tau) + R_s(\tau+5a) + R_s(\tau-5a) \end{aligned} \tag{28}$$

E a função de correlação cruzada é:

$$\begin{aligned} R_{x,s}(\tau) &= E\left[x[n]s[n-a-\tau]\right] \\ R_{x,s}(\tau) &= E\left[\left(s[n+a] + s[n-4a]\right)s[n-\tau-a]\right] \\ R_{x,s}(\tau) &= R_s(\tau+2a) + R_s(\tau-3a) \end{aligned} \tag{29}$$

Substituindo (26) e (27) em (25), têm-se

$$\begin{aligned}\mathbf{w_f} &= \frac{1}{|\mathbf{R_x}|}\begin{bmatrix} R_x(0)R_{x,s}(0) - R_x(1)R_{x,s}(1) \\ -R_x(-1)R_{x,s}(0) + R_x(0)R_{x,s}(1)\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{R_x}|}\begin{bmatrix}\mathbf{w_{f1}} \\ \mathbf{w_{f2}}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{30}$$

Em que

$$\begin{aligned}\mathbf{w_{f1}} = &\left(R_s\left(2\,a\right) + R_s\left(-3\,a\right)\right)\,\left(2R_s\left(5\,a\right) + 2\right) \\ &- \left(R_s\left(2\,a+1\right) + R_s\left(1-3\,a\right)\right)\,\left(2\,R_s\left(1\right) + R_s\left(1-5\,a\right) + R_s\left(5\,a+1\right)\right)\end{aligned} \tag{31}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{w_{f2}} = &\left(R_s\left(2\,a+1\right) + R_s\left(1-3\,a\right)\right)\,\left(2R_s\left(5\,a\right) + 2\right) \\ &- \left(R_s\left(2\,a\right) + R_s\left(-3\,a\right)\right)\,\left(2\,R_s\left(-1\right) + R_s\left(-5\,a-1\right) + R_s\left(5\,a-1\right)\right)\end{aligned} \tag{32}$$

Para essas simplificações, utilizamos as seguintes propriedades de processos aleatórios WSS [5]:

- $R_s(\tau)$ é uma função par, i.e., $R_s(\tau) = R_s(-\tau)$
- $R_s(0) = E\left[s^2[n]\right] = VAR\left[s[n]\right] = 1$. Lembre-se que $E\left[s[n]\right] = 0$.

Infelizmente, não é possível simplificar mais as equações (31) e (32) pois $s[n]$ não é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, portanto $E\left[s[n]s[n-\tau]\right] \neq E\left[s[n]\right]E\left[s[n-\tau]\right]$

5. (a) A matriz de correlação do sinal de entrada é dada por

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(-1) & R_x(0)\end{bmatrix} \tag{33}$$

Em que $R_x(0) = 1$ e $R_x(1) = R_x(-1) = 0$. Portanto, temos

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{34}$$

Note que esta matriz de correlação é uma matriz identidade. Logo $\mathbf{R_x}^{-1} = \mathbf{R_x}$. A matriz de correlação cruzada é

$$\mathbf{R_{dx}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5\end{bmatrix} \tag{35}$$

Substituindo as equações (34) (35) em (4), temos

$$\mathbf{w_o} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} \tag{36}$$

(b) A equação (7) fornece uma expressão para a superfície da função custo em termos dos parâmetros do filtro ótimo (ou filtro de Wiener). Substituindo os valores dessa questão na equação referenciada, têm-se

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) &= \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{\mathbf{dx}} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \mathbf{w} \\ &= w_1\, w_1^* - 9\, w_2^* - 4\, w_1^* + w_2\, w_2^* + \frac{122}{5} \\ &= w_1^2 - 9\, w_2 - 4\, w_1 + w_2^2 + \frac{122}{5} \end{aligned} \tag{37}$$

Em que x^* indica o conjugado de x. Considera-se que os coeficientes do filtro sejam reais. A Figura 3 mostra a função de custo em termos dos coeficientes w_1 e w_2. O ponto em vermelho destacado refere-se ao ponto de Wiener, $\mathbf{w_o}$.

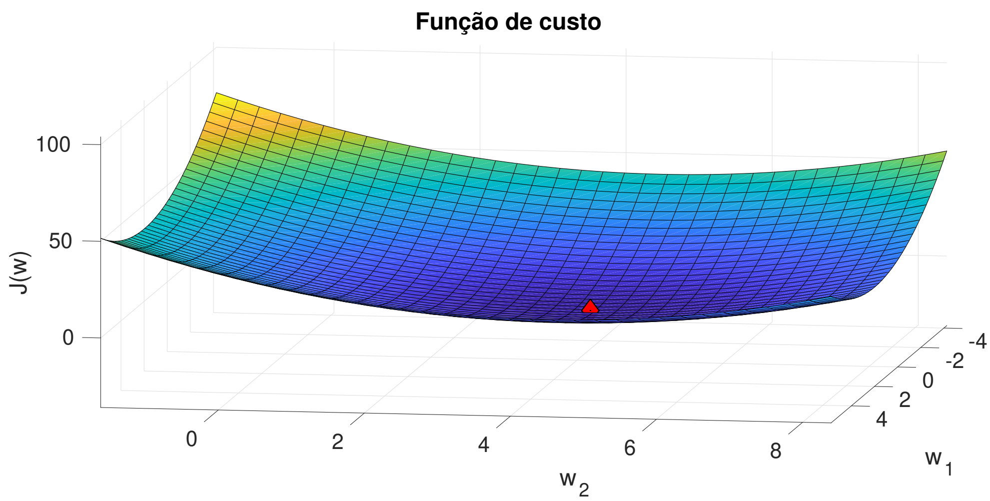

Figura 3: Função custo.

Pode-se observar que os coeficientes de filtro ótimo, de fato, minimizam o erro quadrático médio da função ($J(\mathbf{w_o}) = 0.15$).

Referências

[1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Pearson, 5nd ed., 2014.

[2] M. Barkat, *Signal Detection And Estimation (Artech House Radar Library)*. Artech House Publishers, 2nd ed., 2005.

[3] J. G. P. M. Salehi, *Digital communications*. McGraw-Hill higher education, McGraw-Hill, 5th ed ed., 2008.

[4] S. abrantes, *Processamento Adaptativo de Sinais*. Fundação Calouste Gulbekian, 2000.

[5] A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes For Electrical Engineering, 3rd Edition*. Prentice Hall, the 3rd edition ed., 2008.