Universidade Federal do Ceará

Disciplina: Estimação e Detecção

Professor(a): Chales Casimiro Cavalcante

Estudante: Rubem Vasceconcelos Pacelli Matrícula: 474725

Dezembro de 2019

Lista 6

1. (a) O vetor variáveis aleatórias $\mathbf{y}$ é definido por

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[n] \\ y[n-1] \end{bmatrix} \tag{1}$$

Em que $y[n]$ é a saída de um canal do comunicação (definida pela função de sistema $H(z)$) para um sinal de entrada $x[n]$. Seja a função de sistema do canal dada por:

$$H(z) = 1 + 1,6z^{-1} \tag{2}$$

A transformada Z da saída do sistema é:

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)\,H(z) \\ &= X(z) + 1.6z^{-1}X(z) \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicando a transformada Z inversa em 3, temos:

$$y[n] = x[n] + 1,6x[n-1] \tag{4}$$

Com base na equação 4, a matriz de correlação é:

$$\begin{aligned} \mathbf{R_y} &= \begin{bmatrix} E\{y^2[n]\} & E\{y[n]\,y[n-1]\} \\ E\{y[n-1]\,y[n]\} & E\{y^2[n-1]\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3,56 & 1,6 \\ 1,6 & 3,56 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

E a matriz de correlação cruzada entre o sinal desejado e o sinal de entrada é:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x\mathbf{y}} &= E\{\mathbf{y}\,x[n]\} \\ &= \begin{bmatrix} E\{y[n]\,x[n]\} \\ E\{y[n-1]\,x[n]\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

As equações de Wiener busca os coeficientes do filtro FIR (do inglês, *Finite Impulse Response*) que minimiza a função custo:

$$J(\mathbf{w}) = E\left[e^2[n]\right] \tag{7}$$

Em que $\mathbf{w}$ são os seus coeficientes e $e[n]$ é o sinal de erro entre a saída do filtro e o sinal desejado. No contexto dessa questão, deseja-se obter o filtro de de Wiener que desempenhe a função de equalização de canal, isto é, busca-se obter os coeficiente da filtragem ótima que seja capaz de recuperar o máximo possível o sinal transmitido, $x[n]$. Aplicando a equação de Wiener-Hopf, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{w_o} &= \mathbf{R_y}^{-1}\mathbf{R_{xy}} \\ &= \begin{bmatrix} 0,352 \\ -0,1582 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

Para provar a eficácia da filtragem ótima aplicado à equalização de canal, é gerado (em ambiente computacional) um sinal branco, de variância unitária para representar o sinal transmitido $x[n]$. Este processo aleatório passa por um canal cuja função de sistema é igual a equação 2. Com o objetivo de recuperar o sinal transmitido, é utilizado um filtro de Wiener no receptor com os parâmetros iguais aos que foram calculados na equação 8. A Figura 1 mostra o resultado desse processamento.

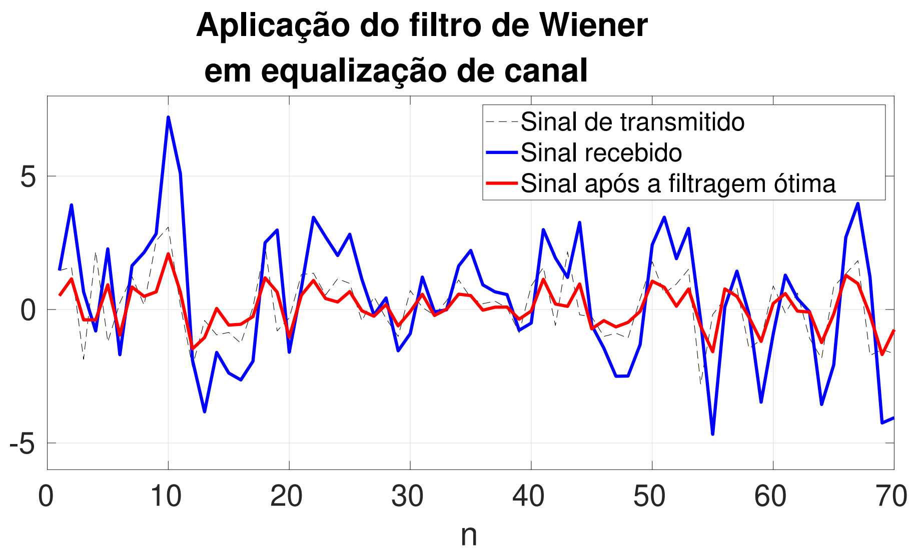

Figura 1: Processamento do sinal recebido utilizando o filtro de Wiener (equalização de canal).

Como é possível perceber, o filtro de Wiener aproxima significativamente $y[n]$ a $x[n]$. Canais com memória são comumente encontrados em sistemas de comunicações reais. A filtragem ótima provê uma ótima ferramenta prática para a equalização canais com mais de 1 *tap* de duração.

(b) i. Para o cálculo do algoritmo do gradiente, pretende-se calcular o seguinte:

A. Decomposição de $\mathbf{R_y}$

B. Modos naturais

C. Equações do aprendizado do filtro

A matriz modal (i.e., a matriz formada pelos autovetores ortogonais) é dada por [1]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,7071 & 0,7071 \\ 0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \tag{9}$$

A matriz diagonal dos autovalores é:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1,96 & 0 \\ 0 & 5,16 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Os coeficientes do filtro adaptativo aproximam-se dos coeficientes ótimos, $\mathbf{w_o}$, de acordo com os modos naturais. Para que o algoritmo convirja, é necessário que os modos naturais tendam a 0 a medida que o laço do algoritmo é incrementado. O vetor dos modos naturais é dado por [2]:

$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} v_0[n] \\ v_1[n] \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T \mathbf{w_e} \tag{11}$$

Em que $\mathbf{w_e} = \mathbf{w}[n] - \mathbf{w_o}$. Como $\mathbf{w}[0] = \mathbf{0}$ (em que $\mathbf{0}$ é o vetor nulo), temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[0] &= -\mathbf{Q}^T \mathbf{w}_o \\ &= \begin{bmatrix} 0,36 \\ -0,137 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

Com base nos valores iniciais dos modos naturais, podemos calcular $\mathbf{v}[n]$ como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n] &= (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^n \mathbf{v}[0] \\ &= \begin{bmatrix} 1,96 \times 0,804^n \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Em que $\mu = 0,05$ é o passo de adaptação. Por fim, o algoritmo recursivo do filtro é:

$$\mathbf{w}\left[n\right] = \mathbf{w_o} + \sum_{j=0}^{1} \mathbf{q_j} v_j\left[n\right]\left(1 - 2\mu\lambda_j\right)^n$$
$$= \begin{bmatrix} 0,352 - 0,2551 \times 0,804^n - 0,0969 \times 0,484^n \\ -0,1582 + 0,2551 \times 0,804^n - 0,0969 \times 0,484^n \end{bmatrix} \tag{14}$$

A Figura 2 mostra a curva de nível para o algoritmo gradiente. Como referência, também é colocado o poto de Wiener.

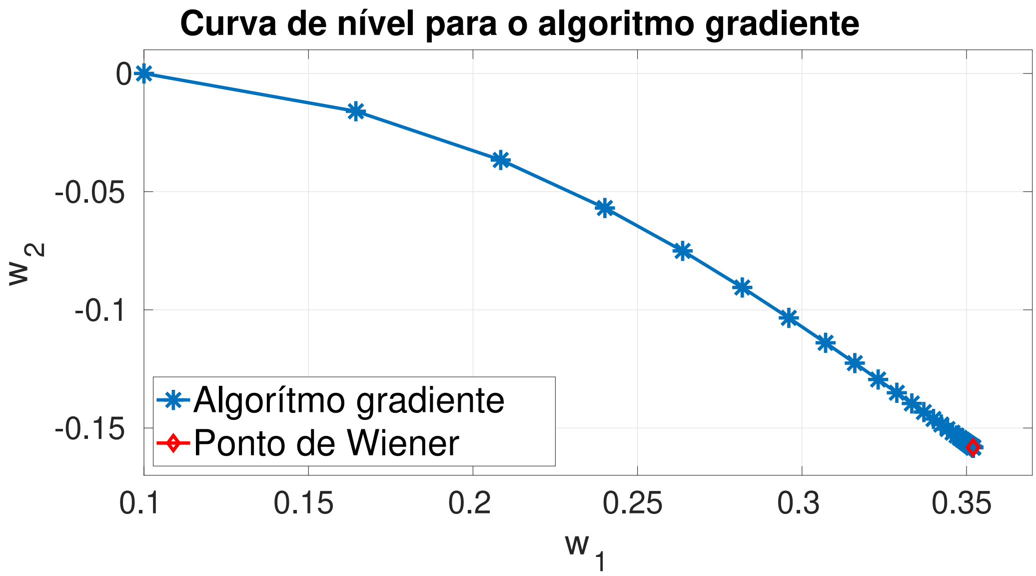

Figura 2: Curva de nível para o algoritmo gradiente.

ii. Para o algoritmo de Newton, temos que:

$$\mathbf{w}\left[n+1\right] = \mathbf{w}\left[n\right] - \mu\left[\mathbf{w}\left[n\right] - \mathbf{R_y}^{-1}\mathbf{R}_{\mathrm{xy}}\right] \tag{15}$$

A Figura 3 mostra a curva de nível para este algoritmo.
Observe que, diferentemente da Figura 2, a curva de superfície do algoritmo de Newton forma uma única reta até o ponte de Wiener. Isso se dá porque este algoritmo, por ser de segunda ordem, busca o caminho de minimiza a função custo em uma concavidade, enquanto que o gradiente busca em um plano. Como a função custo é quadrática, a curva de nível que vemos no algoritmo de Newton é um único segmento que nos leva até o ponto ótimo (após algumas iterações).

iii. Para o algoritmo LMS, o algoritmo de recursão é dado por:

$$\mathbf{w}\left[n+1\right] = w\left[n\right] + 2\mu\mathbf{x}\left[n\right]e\left[n\right] \tag{16}$$

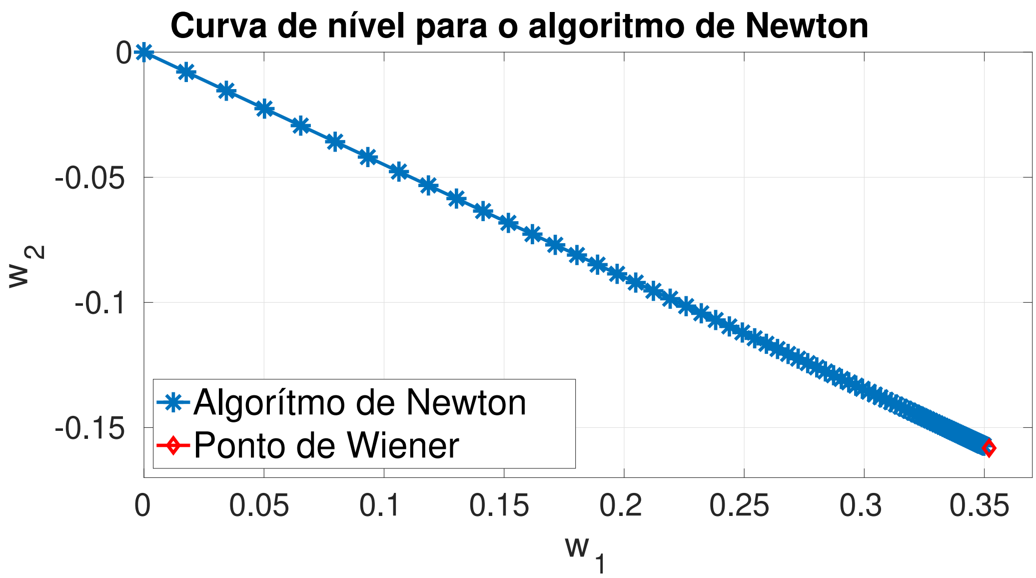

Figura 3: Curva de nível para o algoritmo de Newton.

A Figura 4 mostra a curva de superfície para este algoritmo. Observe que, diferente dos outros algoritmos, o método LMS não obtém os coeficientes de Wiener perfeitamente. Ao invés, os coeficientes do filtro ótimo variam em torno do valor ótimo. Esse resultado está de acordo com o que é reportado na literatura.

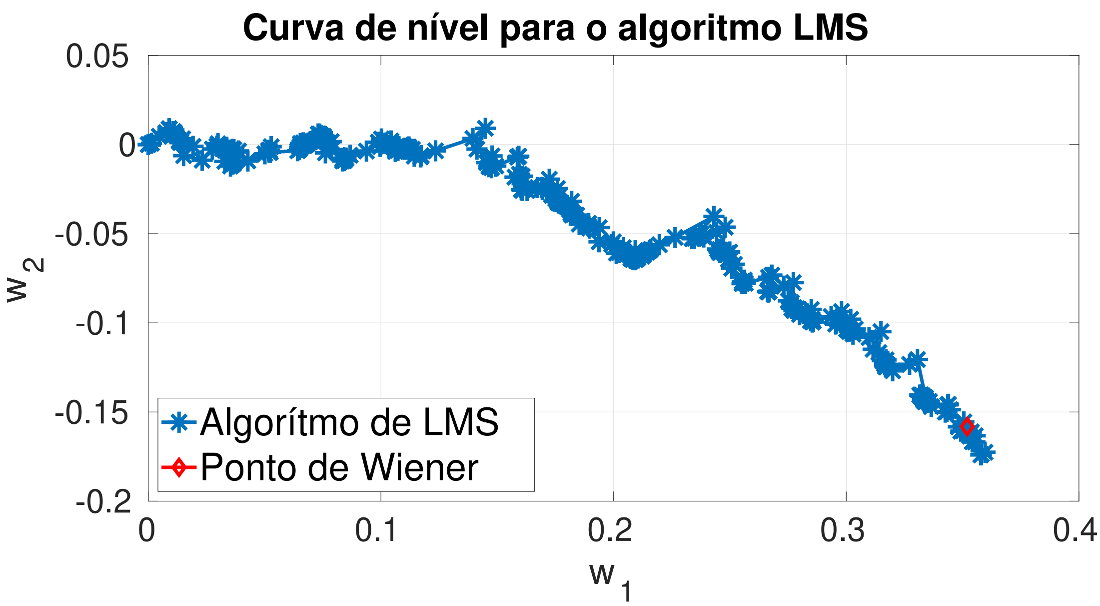

Figura 4: Curva de superfície para o algoritmo LMS.

Referências

[1] M. Barkat, *Signal Detection And Estimation (Artech House Radar Library).* Artech House Publishers, 2nd ed., 2005.

[2] S. abrantes, *Processamento Adaptativo de Sinais.* Fundação Calouste Gulbekian, 2000.