Parte V

Algoritmos Recursivos

Introdução

- Estruturas adaptativas: atualização dos parâmetros para se adequar às características dos sinais de interesse
- Regras de atualização: **algoritmos de recursão temporal**
- Escolha
  1. **Critério:** o que maximizar/minimizar?
  2. **Método de busca:** como minimizar?
  3. **Complexidade:** quanto se pode "pagar" pelo desempenho?
  4. **Velocidade de convergência:** qual o tempo desejado/disponível?

Introdução - cont.

- Estruturas de filtragem: FIR $\times$ IIR
- Escolha afeta complexidade e número de interações para atingir desempenho desejado
- **FIR**
  - Estabilidade garantida
  - Critério unimodal
  - Condições de estabilidade para algoritmo de atualização mais fácil
  - Problemas reais: maior complexidade de modelagem
- **IIR**
  - Requer verificação de estabilidade
  - Critério multimodal
  - Possibilidade de garantir estabilidade do algoritmo de adaptação
  - Menor complexidade para modelar problemas reais

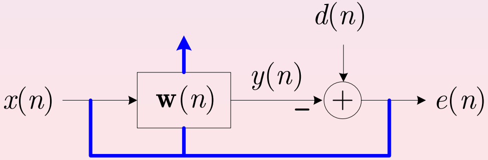
Filtragem ótima (Wiener)

1. Aquisição dos dados: obtenção de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{p}_{xd}$
2. Determinação dos filtro ótimo: $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{p}_{xd}$
3. Complexidade computacional $\sim M^3$

Filtragem adaptativa

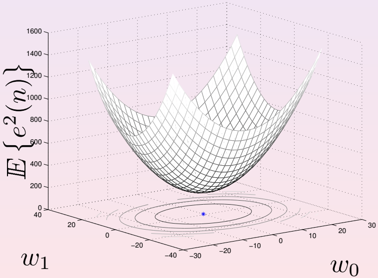
- Adquirir os dados e otimizar o sistema adaptativo ao mesmo tempo (complexidade computacional menor!)

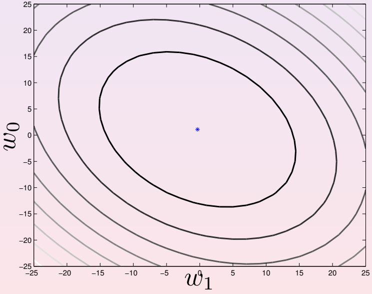
Idéia geral



Critério: atualizar $\mathbf{w}(n)$ de forma a minimizar $\mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\}$.

Para o caso de $\mathbf{w}(n)$ com dois coeficientes $\mathbf{w}(n) = [\ w_0\ w_1\ ]^T$, temos





Métodos de busca - cont.

Otimização interativa: a partir de uma condição inicial $\mathbf{w}(0)$ chegar a $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ para $0 < n \leq N$ iterações

Métodos de busca: baseados nos métodos clássicos de otimização de 1a (gradiente) e 2a (Newton) ordens.

Dada a função $J(\mathbf{w}) = \mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\}$ deseja-se que

$$\mathbf{w}(n) \rightarrow \mathbf{w}(n+1) \Rightarrow J_{n+1} < J_n$$

Métodos de busca - cont.

Considerando a função $J(\mathbf{w})$ expandida em série de Taylor em torno do ponto $\mathbf{w}(n)$ tem-se

$$J(\mathbf{w})|_{\mathbf{w}(n+1)} = J(\mathbf{w})|_{\mathbf{w}(n)} + \left.\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}^T}\right|_{\mathbf{w}(n)} \Delta\mathbf{w}(n+1) + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{w}^T(n+1) \left.\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{w}\partial \mathbf{w}^T}\right|_{\mathbf{w}(n)} \Delta\mathbf{w}(n+1) \tag{107}$$

em que $\Delta\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)$

Métodos de busca - cont.

Dois algoritmos importantes

1. baseado na expansão de 1a ordem
2. baseado na expansão de 2a ordem

Meta: Gerar $\Delta\mathbf{w}(n+1)$ tal que $J(\mathbf{w})|_{\mathbf{w}(n+1)} < J(\mathbf{w})|_{\mathbf{w}(n)}$

Métodos de busca - cont.

$\boxed{\textbf{1a ordem}: \ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}^T}\Big|_{\mathbf{w}(n)} \Delta\mathbf{w}(n+1)}$

Algoritmo *steepest descent* (“descida mais íngreme”)

$$\mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\} = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{w}^T\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\}}{\partial \mathbf{w}} = -2\mathbf{p}_{xd} + 2\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}$$

Algoritmo *steepest descent* (gradiente determinístico)

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - 2\mu\left[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{p}_{xd}\right] \tag{108}$$

Notar que ainda se faz necessário conhecer $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{p}_{xd}$!

2a ordem: Método de Newton

Temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{w}) &= \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{w}^T} \\ &= 2\mathbf{R}_\mathbf{x}\end{aligned} \tag{109}$$

é a matriz Hessiana de $J(\mathbf{w})$.

$\mathbf{H}(\mathbf{w})$ é uma matriz definida positiva (autocorrelação), logo a aproximação quadrática tem um único e bem definido ponto de mínimo

Meta: obter $\Delta\mathbf{w}(n+1)$ tal que $\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = 0$.

Métodos de busca - cont.

Assim, temos na regra de Newton que

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) + \mu\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{w})\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \\ &= \mathbf{w}(n) - 2\mu\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{w})\left[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{p}_{xd}\right] \\ \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) - \mu\left[\mathbf{w}(n) - \underbrace{\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{p}_{xd}}_{\mathbf{w}_{\text{opt}}}\right]\end{aligned} \tag{110}$$

Algoritmo de Newton

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu\left[\mathbf{w}(n) - \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{p}_{xd}\right] \tag{111}$$

Métodos de busca - cont.

Ainda no algoritmo de Newton, suponha

- $\mu = 1$
- $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$

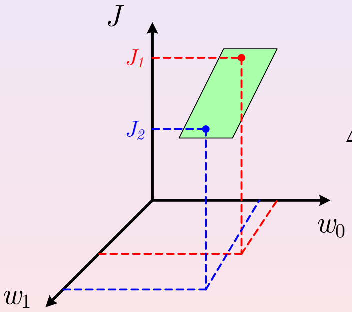
Na primeira iteração temos

$$\mathbf{w}(1) = \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{p}_{xd}$$

⚠ **Solução ótima em uma iteração!**

Características do *Steepest descent*

- O método de 1a ordem aproxima $J(\mathbf{w})$ como uma função linear e "caminha" nessa função com o maior "passo" (maior declividade) possível



$$\Delta \mathbf{w}_{i+1} = -\mu \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w})$$

Características do *Steepest descent* - cont.

Método linear → algoritmo do gradiente determinístico

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w})$$
$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - 2\mu \left[\mathbf{R}_{\mathbf{x}} \mathbf{w}(n) - \mathbf{p}_{xd}\right]$$

Características do algoritmo de Newton

- O método de 2a ordem "aproxima" $J(\mathbf{w})$ como uma função quadrática e procura o mínimo desta função
- Encontrar um $\Delta\mathbf{w}$ que nos leve ao mínimo, ou seja, a uma condição de gradiente nulo, no passo $i+1$.
- Obter $\Delta\mathbf{w}_{i+1}$ tal que $\left.\dfrac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}\right|_{\mathbf{w}_{i+1}} = 0$

$$\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}) + \mathbf{H}(\mathbf{w})\Delta\mathbf{w} = 0$$
$$\Delta\mathbf{w} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w})$$

Como $\mathbf{H}(\mathbf{w}) = 2\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ tem-se

Características do algoritmo de Newton - cont.

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i - \frac{1}{2}\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w})$$

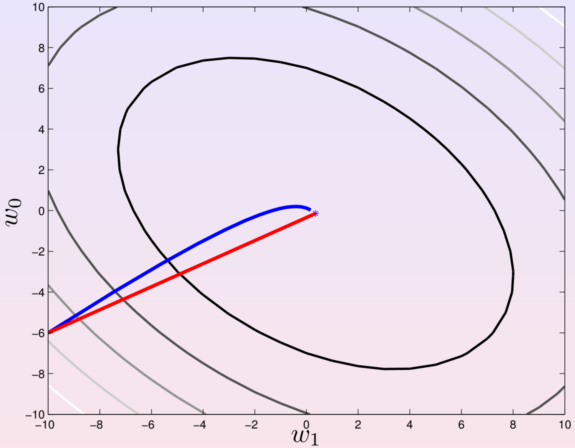
$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{p}_{xd} - \mathbf{w}_i$$

$$\boxed{\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{p}_{xd}}$$

que é a própria solução ótima.

Steepest descent $\times$ Algoritmo de Newton

- O algoritmo *steepest decent* busca encontrar, à cada iteração, em qual direção a função decresce mais rapidamente (gradiente descendente)
- O método de Newton, calcula para a função, qual a direção, a partir do ponto inicial, que chega mais rapidamente ao ponto ótimo.
- Método de Newton é mais complexo (inversão de matriz) e mais rápido. Para $J(\mathbf{w})$ quadrático, uma iteração é suficiente se $\mu = 1$.
- *Steepest descent* é mais simples, mas tem uma latência maior para convergir ao ponto ótimo.



Convergência dos algoritmos *steepest descent* (azul) e de Newton (vermelho). Passos $\mu_{sd} = 0.1$ e $\mu_n = 1$.

Problemas

- Equações necessitam conhecimento ou estimativa das estatísticas $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{p}_{xd}$
- Processamento caro e não garante uma convergência ao valor desejado
- **Alternativa**: aproximações estocásticas

Origem

H. Robbins and S. Monro, "A Stochastic Approximation Method", *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22, no. 3, pp. 400-407, 1951

Idéia: estimação recursiva de um determinado número de parâmetros θ, de forma:

$$\theta(n) = \theta(n-1) - \mu(n) \cdot f\left[\theta(n-1), x(n)\right] \tag{112}$$

em que
$x(n)$ = dados observados no tempo
$\mu(n)$ = seqüência decrescente
$f(\cdot)$ = função dos dados e parâmetros

Aproximação estocástica - cont.

Exemplo

Sejam

$$\theta(0) = 0$$

$$\mu = \frac{1}{n}$$

$$f[\theta(n-1), x(n)] = \theta(n-1) - x(n)$$

daí decorre que

$$\theta(n) = \frac{x(1) + x(2) + \ldots + x(n)}{n}$$

Aproximação estocástica - cont.

1a observação: O algoritmo de Robbins-Monro converge para $f[\theta(n-1), x(n)] = 0$.

Supondo várias realizações do algoritmo
θ_{opt} é tal que $\mathbb{E}\left\{f[\theta(n-1), x(n)]\right\} = 0$

No nosso caso (filtragem): quem é $\mathbb{E}\left\{f[\theta(n-1), x(n)]\right\}$?

Sabemos que $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbb{E}\left\{f[\theta(n-1), x(n)]\right\} = 0$ para $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{opt}}$ então

$$f[\theta(n-1), x(n)] = \frac{\partial e^2(n)}{\partial \mathbf{w}} \tag{113}$$

Aproximação estocástica - cont.

Partindo da aproximação da Eq. (113), a recursão temporal para aproximar o critério de minimizar o erro quadrático médio seria do tipo:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu(n+1)\mathbf{x}(n)e(n) \tag{114}$$

em que $e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)$.

Se considerarmos $\mu(n+1) = \mu$ teremos então o **algoritmo do gradiente estocástico** dado por

$$\boxed{\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{x}(n)e(n)}$$

Gradiente determinístico: Busca na direção negativa do gradiente

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - 2\mu \left[\mathbf{R_x}\mathbf{w}(n) - \mathbf{p}_{xd}\right]$$

Algoritmo de Newton: Mais rápido e mais complexo

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \left[\mathbf{w}(n) - \mathbf{R_x}^{-1}\mathbf{p}_{xd}\right]$$

Gradiente estocástico: Mais simples, menos requisitos, desempenho pior

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{x}(n)e(n)$$

Algoritmos estocásticos

- Diferentes aproximações podem ser realizadas
- Meta é reduzir a complexidade dos algoritmos provendo uma convergência para o ponto ótimo
- Algumas técnicas são discutidas a seguir

O algoritmo LMS (*Least Mean Square*) é um algoritmo de busca que utiliza uma simplificação do vetor gradiente por meio de uma modificação na função custo (objetivo)

Propriedades

- Simplicidade computacional
- Prova de convergência em ambiente estacionário
- Convergência não-polarizada, em média, para a solução ótima (Wiener)

Se tomarmos o gradiente estocástico temos então

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - 2\mu \left[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{p}_{xd}\right]$$

mas, deseja-se trabalhar com estimativas das estatísticas no instante n, uma vez que as mesmas podem não estar disponíveis completamente, então teremos algo como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - 2\mu \left[\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(n)\mathbf{w}(n) - \widehat{\mathbf{p}}_{xd}(n)\right] \tag{115}$$

Então, uma solução possível é fazer uma aproximação das estatísticas por seus valores instantâneos, ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right\} \quad &\approx \quad \widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n) \\ \mathbf{p}_{xd} = \mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)d(n)\right\} \quad &\approx \quad \widehat{\mathbf{p}}_{xd}(n) = \mathbf{x}(n)d(n) \end{aligned} \tag{116}$$

Desta forma, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) - 2\mu\left[\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(n)\mathbf{w}(n) - \widehat{\mathbf{p}}_{xd}(n)\right] \\ &= \mathbf{w}(n) - 2\mu\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{x}(n)d(n)\right] \\ &= \mathbf{w}(n) - 2\mu\mathbf{x}(n)\left[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - d(n)\right] \\ &= \mathbf{w}(n) - 2\mu\mathbf{x}(n)\left[y(n) - d(n)\right] \end{aligned} \tag{117}$$

Então, a equação de recursão do LMS é dada por:

Algoritmo LMS

$$\boxed{\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{x}(n)e(n)} \tag{118}$$

Note que o algoritmo LMS possui a mesma regra de recursão que a aproximação do gradiente estocástico, por isto é comum usar a mesma notação para ambos.

Uma questão importante reside na garantia da convergência do algoritmo para os parâmetros ótimos. Bem como observar se esta convergência é não-polarizada.

Gradiente: o gradiente do algoritmo converge para algum valor?

Tomando as expressões do gradiente para o algoritmo determinístico e do LMS

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{det}} &= 2\left[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{p}_{xd}\right] \\ \nabla_{\text{LMS}} &= 2\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{x}(n)d(n)\right] \end{aligned} \tag{119}$$

podemos ver que as direções determinadas por ambos os algoritmos são diferentes (como esperado). Entretanto, se tomarmos o valor médio no caso do LMS temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\nabla_{\text{LMS}}\right\} &= \mathbb{E}\left\{2\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{x}(n)d(n)\right]\right\} \\ &= 2\left[\mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right\}\mathbf{w}(n) - \mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)d(n)\right\}\right] \\ &= 2\left[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{p}_{xd}\right] = \nabla_{\text{det}} \end{aligned} \tag{120}$$

Estabilidade: quais os valores de μ para os quais o algoritmo converge?

Vamos considerar uma perturbação do vetor de coeficientes em torno do filtro ótimo, assim temos

$$\Delta\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}} \tag{121}$$

Utilizando esta definição, podemos escrever o LMS como

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{w}(n+1) &= \Delta\mathbf{w}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n) \\
&= \Delta\mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{x}(n)\left[\mathbf{x}(n)^T\mathbf{w}_{\text{opt}} + b(n) - \mathbf{x}(n)^T\mathbf{w}(n)\right] \\
&= \Delta\mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{x}(n)\left[e_{\text{opt}}(n) - \mathbf{x}(n)^T\Delta\mathbf{w}(n)\right] \\
&= \left[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n)^T\right]\Delta\mathbf{w}(n) + 2\mu e_{\text{opt}}(n)\mathbf{x}(n)
\end{aligned} \tag{122}$$

Sabendo que $e_{\text{opt}}(n) = d(n) - \mathbf{x}(n)^T \mathbf{w}_{\text{opt}} = b(n)$ temos então, o valor esperado de

$$\mathbb{E}\left\{\Delta\mathbf{w}(n+1)\right\} = \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n)^T\right]\Delta\mathbf{w}(n)\right\} + 2\mu\mathbb{E}\left\{e_{\text{opt}}(n)\mathbf{x}(n)\right\} \quad (123)$$

Assumindo independência entre $\mathbf{x}(n)$, $\Delta\mathbf{w}(n)$ e $e_{\text{opt}}(n)$, temos então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\Delta\mathbf{w}(n+1)\right\} &= \left[\mathbf{I} - 2\mu\mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n)^T\right\}\right]\mathbb{E}\left\{\Delta\mathbf{w}(n)\right\} \\ &= (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}_{\mathbf{x}})\mathbb{E}\left\{\Delta\mathbf{w}(n)\right\}\end{aligned} \quad (124)$$

Um fator que nos ajuda é saber que podemos decompor a matriz $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ como

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \quad (125)$$

em que $\mathbf{Q}$ é a matriz (ortogonal) dos autovetores de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$

Pré-multiplicando então a Eq. (124) por $\mathbf{Q}^T$ temos

$$\mathbb{E}\left\{\mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{w}(n+1)\right\} = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{Q}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q})\mathbb{E}\left\{\mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{w}(n)\right\} \tag{126}$$

Mas sabe-se ainda que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q}^T\mathbf{R}_{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \end{aligned}$$

E podemos então definir

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbb{E}\left\{\mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{w}(n+1)\right\} \tag{127}$$

que são versões rotacionadas dos erros dos coeficientes.

Daí, temos então

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{v}(n) - 2\mu\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{v}(n) \\ &= (\mathbf{I} - 2\mu\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{v}(n)\end{aligned} \tag{128}$$

Ou seja, para cada elemento $v_k(n+1)$ do vetor $\mathbf{v}(n+1)$ temos

$$v_k(n+1) = (1 - 2\mu\lambda_k)v_k(n) \tag{129}$$

Condição de estabilidade:

$$\begin{aligned}|1 - 2\mu\lambda_k| < 1 \quad &\rightarrow \quad -1 < 1 - 2\mu\lambda_k < 1 \\ 0 < 2\mu\lambda_k < 2 \quad &\rightarrow \quad 0 < \mu < \frac{1}{\lambda_k}\end{aligned} \tag{130}$$

$$\boxed{\text{Estabilidade: } 0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\text{max}}}}$$

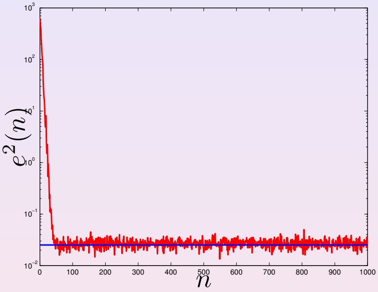
Misadjustment (desajuste): quanto a solução do LMS difere da solução ótima?

Tomando $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}_{\text{opt}}$, teremos

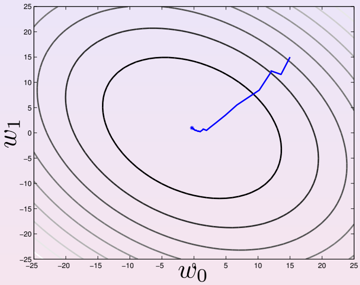
$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}_{\text{opt}} + 2\mu\mathbf{x}(n)e(n) \\ &= \mathbf{w}_{\text{opt}} + 2\mu\mathbf{x}(n)[d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}_{\text{opt}}] \\ &= \mathbf{w}_{\text{opt}} + 2\mu\mathbf{x}(n)[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}_{\text{opt}} + b(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}_{\text{opt}}] \\ \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}_{\text{opt}} &= 2\mu\mathbf{x}(n)b(n) \end{aligned} \tag{131}$$

Desta forma, podemos ver que $\mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}_{\text{opt}}\right\} = 0$ mas que a variância não é zero devido ao termo $b(n)$.

- μ impacta na variância do erro de ajuste
- $\mathbf{w}(n+1)$ ao final da convergência fica "em torno" de $\mathbf{w}_{\text{opt}}$



Convergência do LMS (vermelho) para J_{min} (azul) usando $\mu = 0.1$



Trajetória do LMS (azul) para o ponto ótimo (solução de Wiener) usando $\mu = 0.1$

Resumo:

- Algoritmo com baixa complexidade
- Converge, em média, para o filtro ótimo
- Fator de passo influencia na velocidade de convergência
- Compromisso com o erro de desajuste

Motivação

- O algoritmo LMS apresenta o fator de passo dependente das características da correlação
- Para aumentar a velocidade de convergência, aumenta-se o fator de passo, mas o mesmo fornece um erro residual maior
- Idéia: colocar os dados para servirem de regulação ao desajuste

Sabendo que

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n) = \mathbf{w}(n) + \Delta\widetilde{\mathbf{w}}(n) \quad (132)$$

temos então que

$$e^2(n) = d^2(n) + \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - 2d(n)\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (133)$$

Se usarmos uma troca de $\widetilde{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{w}(n) + \Delta\widetilde{\mathbf{w}}(n)$, teremos então:

$$\begin{aligned}\widetilde{e}^2(n) = e^2(n) &+ 2\Delta\widetilde{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) \\ &+ \Delta\widetilde{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\Delta\widetilde{\mathbf{w}}(n) - 2d(n)\Delta\widetilde{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{x}(n)\end{aligned} \quad (134)$$

Então, definindo

$$\begin{aligned}\Delta e^2(n) &= \tilde{e}^2(n) - e^2(n) \\ &= -2\Delta\tilde{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{x}(n)e(n) + \Delta\tilde{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\Delta\tilde{\mathbf{w}}(n)\end{aligned} \tag{135}$$

Meta: tornar $\Delta e^2(n)$ negativo e mínimo pela escolha apropriada de μ

Substituindo $\Delta\tilde{\mathbf{w}}(n) = 2\mu e(n)\mathbf{x}(n)$ na Eq. (135) tem-se

$$\Delta e^2(n) = -4\mu e^2(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) + 4\mu^2 e^2(n)[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2 \tag{136}$$

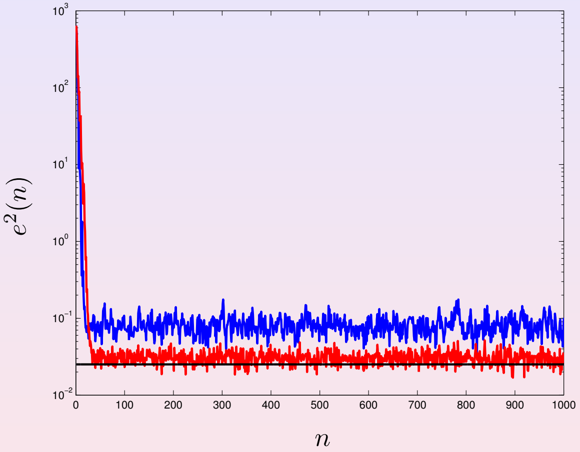
Valor de μ é dado por $\frac{\partial \Delta e^2(n)}{\partial \mu} = 0$, de onde tem-se

$$\mu = \frac{1}{2\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \tag{137}$$

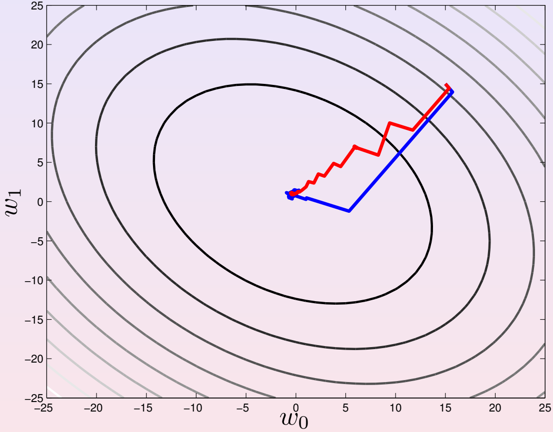
Com isso, o algoritmo do LMS normalizado é então dado por

Algoritmo LMS Normalizado

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{\gamma + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}\mathbf{x}(n)e(n) \tag{138}$$



Algoritmos LMS (azul) e LMS-Normalizado (vermelho) com mesmo fator de passo $\mu_{\text{LMS}} = \mu_{\text{LMS-Norm}} = 0.5$, comparados com $J_{\min}$ (preto)



Trajetórias dos algoritmos LMS (azul) e LMS-Normalizado (vermelho) para o ponto ótimo

- Em situações práticas, o ambiente no qual o filtro está atuando pode ser não-estacionário
- Nestes casos, a matrix de autocorrelação do sinal de entrada e/ou o vetor de correlação cruzada, são/é variantes no tempo
- Consequentemente, a solução ótima é também um vetor variante no tempo $\mathbf{w}_{\text{opt}}(n)$
- Necessário avaliar se o algoritmo LMS será capaz de rastrear as variações de $\mathbf{w}_{\text{opt}}(n)$

Pode-se escrever a seguinte expressão de adaptação do LMS, considerando a não-estacionaridade

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{x}(n)e(n) \\ &= \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{x}(n)\left[d(n) - \mathbf{x}^T\mathbf{w}(n)\right].\end{aligned} \quad (139)$$

Considerando

$$d(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}_{\text{opt}}(n), \quad (140)$$

podemos escrever a equação de adaptação como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{x}(n)\left[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}_{\text{opt}}(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\right]. \quad (141)$$

Assumem-se as seguintes hipóteses:

1. O sinal de entrada, em cada realização, é tomado do mesmo processo estocástico, logo é um processo estacionário
2. Assim, $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ é uma matriz fixa
3. Não estacionaridade é causada pelo sinal desejado que é gerado por meio de um sinal estacionário aplicado a um ambiente variante no tempo
4. $\mathbf{w}(n)$ e $\mathbf{x}(n)$ são independentes

Com as hipóteses anteriores, e aplicando o operador esperança, temos então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(n+1)\right\} &= \mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(n)\right\} + 2\mu\mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{T}(n)\right\}\mathbf{w}_{\text{opt}}(n) \\ &\quad - 2\mu\mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{T}(n)\right\}\mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(n)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(n)\right\} + 2\mu\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\left[\mathbf{w}_{\text{opt}}(n) - \mathbb{E}\left\{\mathbf{w}(n)\right\}\right]\end{aligned} \tag{142}$$

Definindo-se o *lag* do vetor de coeficientes do filtro como

$$\mathbf{l}_{\mathbf{w}}(n) = \mathbb{E}\{\mathbf{w}(n)\} - \mathbf{w}_{\text{opt}}(n) \tag{143}$$

pode-se reescrever a Equação (142) como

$$\mathbf{l}_{\mathbf{w}}(n+1) = \left(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{l}_{\mathbf{w}}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}(n+1) + \mathbf{w}_{\text{opt}}(n) \tag{144}$$

Para tornar a análise mais simples, podemos pré-multiplicar a Equação (144) pela matriz $\mathbf{Q}^T$ resultando em

$$\mathbf{l}'_{\mathbf{w}}(n+1) = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda})\,\mathbf{l}'_{\mathbf{w}}(n) - \mathbf{w}'_{\text{opt}}(n+1) + \mathbf{w}'_{\text{opt}}(n) \tag{145}$$

em que o sobrescrito indica os vetores projetados no espaço transformado. Assim, podemos escrever a seguinte equação para cada i-ésimo elemento do vetor de *lag* como

$$l'_i(n+1) = (1 - 2\mu\lambda_i)\,l_i(n) - w'_{\text{opt},i}(n+1) + w'_{\text{opt},i}(n) \tag{146}$$

Analisando a Equação (146) pode-se verificar que o *lag* é gerado pela aplicação dos coeficientes ótimos transformados por um filtro discreto de primeira ordem denotado por $L_i''(z)$, ou seja,

$$L_i'(z) = -\frac{z-1}{z-1+2\mu\lambda_i} W'_{\text{opt},i}(z) = L_i''(z) W'_{\text{opt},i}(z) \tag{147}$$

Com isso, a resposta transiente do filtro discreto converge com uma constante de tempo na envoltória exponencial dada por

$$\tau_i = \frac{1}{2\mu\lambda_i} \tag{148}$$

a qual é diferente para cada coeficiente individual. Assim, a habilidade de rastreio do algoritmo LMS é dependente dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada.