Universidade Federal do Ceará

Disciplina: Processamento Estatístico de Sinais
Professor: Charles Casimiro Cavalcante
Estudante: Rubem Vasceconcelos Pacelli Matrícula: 474725

Novembro de 2019

Lista 5

1. (a) Considere o seguinte teste de hipótese binária:

$$H_1 : Y = S + N \tag{1a}$$
$$H_0 : Y = N \tag{1b}$$

Uma aplicação clássica da teoria de detecção é na área de radar. O enunciado dessa questão pode ser interpretado, para fins de contextualização, como um problema de detecção de um alvo em sistemas de sonar/radar. Sendo assim, consideraremos que N é um ruído que corrompe a detecção de um alvo S.

H_0 é denominada de *null hypothesis* e indica a hipótese na qual não há a presença do alvo. H_1, por outro lado, é denominado de *alternative hypotesis*, e indica a hipótese da sua presença.

O estudo do teste de hipótese binários pode ser enunciado da seguinte forma: Dado um par de hipóteses (H_1 e H_0), deseja-se delimitar duas regiões ($\tilde{R}$ e $\tilde{R}^c$) no espaço amostral de Y, onde se aceita uma hipótese e se rejeita a outra. O particionamento das duas regiões é feito comparando um parâmetro θ da variável aleatória Y com uma métrica, que é utilizado como regra de decisão. O método para se calcular a métrica, por sua vez, depende do tipo de teste de hipótese que é adotado (e.g., Neyman-Pearson, MAP, Bayes, MinMax). Além dissso, a forma que é separada as duas regiões (em *one-tailed* ou *two-tailed*) também modifica o valor final da métrica [1]. Sendo assim, o estudo de detecção se resume em quatro passos importantes:

i. Definir o parâmetro θ a ser utilizado na detecção.
ii. Definir o teste de hipótese a ser adotado na questão.
iii. Definir como as regiões de decisão serão particionadas
iv. Calcular a métrica que será utilizada como métrica de decisão.

Primeiro: É necessário descobrir qual parâmetro de Y muda entre as duas hipóteses para que possamos estima-la e, por fim, detectar a presença/ausência do alvo. Dado que H_0 seja verdadeiro, temos que sua média é:

$$\begin{aligned} E\left[y|H_0\right] &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_Y\left(y\right)\ \mathrm{dy} \\ &= \int_{-2}^{2} n\ f_N\left(n\right)\ \mathrm{dn} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

E sua variância é:

$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}\left[Y|H_0\right] &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y^2\ f_Y\left(y\right)\ \mathrm{dy} \\ &= \int_{-2}^{2} n^2\ f_N\left(n\right)\ \mathrm{dn} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{3}$$

Por outro lado, se H_1 for verdadeiro, então:

$$\begin{aligned} E\left[y|H_1\right] &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_Y\left(y\right)\ \mathrm{dy} \\ &= \int_{-1}^{1} s\ f_S\left(n\right)\ \mathrm{ds} + \int_{-2}^{2} n\ f_N\left(n\right)\ \mathrm{dn} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

E

$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}\left[Y|H_1\right] &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y^2\ f_Y\left(y\right)\ \mathrm{dy} \\ &= \int_{-2}^{2} s^2\ f_S\left(s\right)\ \mathrm{ds} + \int_{-2}^{2} n^2\ f_N\left(n\right)\ \mathrm{dn} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned} \tag{5}$$

A segunda igualdade da equação 5 se deve ao fato de que S e N são viráveis aleatórias independentes, portanto $\mathrm{VAR}\left[S+N\right] = \mathrm{VAR}\left[S\right] + \mathrm{VAR}\left[N\right]$. Observe que, enquanto que a média permanece inalterada para as duas hipóteses, a variância de Y muda. Portanto, defini-se o parâmetro para a detecção de presença/ausência de alvo como $\theta = \mathrm{VAR}\left[Y\right] = \sigma_Y^2$. Com isso, montamos o seguinte enunciado:

$$\begin{aligned} &H_0 : Y \text{ e uma V. A com } \mu_Y = 0 \text{ e } \sigma_Y^2 = \theta = 4/3 \\ &H_1 : Y \text{ e uma V. A com } \mu_Y = 0 \text{ e } \sigma_Y^2 = \theta = 5/3 \end{aligned} \tag{6}$$

Segundo: É necessário adotarmos um teste de hipótese para calcularmos a métrica a ser utilizada como regra de decisão. É importante constatar que o parâmetro utilizado para a detecção é um valor desconhecido mas não aleatório. Métodos Bayseanos e o método a máxima posteriori (MAP) são utilizados em situações em que o parâmetro selecionado para a métrica é aleatório e, portanto, não é adequado para o presente problema [1] [2]. O enunciado da questão solicita para que seja utilizado a função da razão do teste de verossimilhança (ou do inglês, *likelihood ratio function*). O teste de hipótese *Neyman-Pearson* é o mais apropriado para essa questão, uma vez que ele utiliza a *likelihood ratio function* para obter a métrica.

Terceiro: É necessário definirmos como se pretende dividir a região de rejeição ($\tilde{R}$) e a região de aceitação ($\tilde{R}^c$). É interessante observar que tanto H_0 quanto H_1 são *simple hypothesis*, pois ambas especificam a distribuição de Y completamente, i. e., o parâmetro θ não está definido em termos de desigualdade ou diferença [1] [3]. Nesse tipo de situação, adota-se o particionamento das regiões em *one-tailed*.

Quarto: O enunciado já fixou previamente três possíveis valores de limiar: $\eta = 1/4$, $\eta = 1$ e $\eta = 2$. Pelo teste de hipótese de *Neyman-Pearson*, dado um nível de significância (também chamado de probabilidade de falso alarme)

$$\alpha = P\left[D_1|H_0\right] = \int_{y|\Lambda(y)\geq\eta} f_Y\left(y|H_0\right)\mathrm{dy} \tag{7}$$

Em que $\Lambda\left(y\right)$ é *likelihood ratio function*

$$\Lambda\left(y\right) = \frac{f_Y\left(y|H_1\right)}{f_Y\left(y|H_0\right)} \tag{8}$$

Escolhe-se um valor de η que minimize o valor de a probabilidade de *miss*

$$\beta = P\left[D_0\left|H_1\right.\right] \tag{9}$$

Observe que

$$f_Y\left(y|H_0\right) = f_N\left(n\right) = \frac{1}{4} \qquad \textit{para} \ \ |y| \geq 2 \tag{10}$$

E que

$$f_Y\left(y|H_1\right) = f_Y\left(y\left|H_1\right.\right) = f_N\left(n\right) * f_S\left(s\right) \tag{11}$$

Em que $*$ indica a operação de convolução. A equação 11 segue do fato de que a função densidade de probabilidade (PDF) da soma de duas variáveis aleatórias independentes é igual a integral de convolução da PDF das mesmas

[1]. Resolvendo a integral de convolução em 11, têm-se que:

$$f_Y\left(y\left|H_1\right.\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } |y| > 3 \\ \frac{y+3}{8} & \text{para } -3 < y < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{para } |y| \leq 1 \\ \frac{-y+3}{8} & \text{para } 1 < y < 3 \end{cases} \tag{12}$$

Substituindo as equações 12 e 10 em 8, têm-se

$$\Lambda\left(y\right) = \begin{cases} \frac{y+3}{2} & \text{para } -2 < y < -1 \\ 1 & \text{para } |y| \leq 1 \\ \frac{-y+3}{2} & \text{para } 1 < y < 2 \end{cases} \tag{13}$$

$\Lambda\left(y\right)$ não é definido fora desse intervalo. O critério de decisão do teste de hipótese é *Neyman-Pearson* é dado por:

$$\Lambda\left(y\right) \begin{array}{c} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} \eta \tag{14}$$

A região em que se aceita H_0 é denotada por $\tilde{R}^c$, enquanto que a região em que se aceita H_1 é denotada por $\tilde{R}$. Sendo assim, define-se as regiões como

$$\tilde{R} \;= y \mid \Lambda\left(y\right) > \eta \tag{15a}$$

$$\tilde{R}^c = y \mid \Lambda\left(y\right) < \eta \tag{15b}$$

Para cara um dos valores dados para η , basta substituí-los em 14.

(b) O enunciado do teste de hipótese de *Neyman-Pearson* espera que o problema forneça α e, com isso, calcula-se η. No entanto, ao invés fornecer o valor de α, o enunciado deu os valores de η. Portanto, faremos o caminho oposto calculando α para cada η. Da equação 7 Temos que, para $\eta = 1/4$

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{y|\Lambda(y)\geq 1/4} f_Y\left(y|H_0\right) \mathrm{dy} \\ &= 1/4 \int_{-2}^{2} dy \\ &= 1 \end{aligned} \tag{16}$$

O valores de η escolhidos nessa questão fogem do intervalo de limiar esperado pela *likelihood ratio function*. Com $\eta = 1/4$, todos os valores levarão à hipótese

H_1 (ver equação 13 e 14). Para $\eta = 1$ ou 2, temos:

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_{y|\Lambda(y)\geq\eta} f_Y\left(y|H_0\right) \mathrm{dy} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Esse resultado já é esperado, uma vez que valores superiores a 1 estão fora do conjunto imagem da *likelihood ratio function.* Neste caso, todos os valores de Y definidos no domínio dessa função serão menores do que 1 e 2. Logo, o decisor sempre irá optar por H_0. Como $\alpha \triangleq P\left[D_1|H_0\right]$, é coerente que $\alpha = 0$ pois nunca optaríamos por D_1.

2. Considere o seguinte enunciado:

$$\begin{aligned} H_0 &: Y \text{ e uma V. A Gaussiana com } m_0 = 0 \text{ e } \sigma_Y^2 = 1 \\ H_1 &: Y \text{ e uma V. A Gaussiana com } m_1 = 1 \text{ e } \sigma_Y^2 = 1 \end{aligned} \tag{18}$$

Observe que o valor da média muda nas duas hipóteses. Portanto, $\theta = m_j$, para $j = 0, 1$. A função densidade de probabilidade variável aleatória Gaussiana é dado por

$$f_Y\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(y-m_j\right)^2}{2}} \tag{19}$$

Da equação 8, temos que a *likelihood ratio function* é:

$$\begin{aligned}\Lambda\left(y\right) &= \frac{f_Y\left(y|H_1\right)}{f_Y\left(y|H_0\right)} \\ &= \exp\left(\frac{\left(y-m_0\right)^2}{2} - \frac{\left(y-m_1\right)^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2y-1}{2}\right)\end{aligned} \tag{20}$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da equação 14, temos:

$$\ln \Lambda(y) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta$$

$$\frac{2y-1}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta$$

$$y \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{2\ln \eta + 1}{2} = \gamma \tag{21}$$

O nível de significância é

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{y|\ln \Lambda(y) \geq \ln \eta} f_Y(y|H_0)\,\mathrm{dy} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= Q(\gamma) \end{aligned} \tag{22}$$

Para $\alpha = 0,005$, $\gamma = 1,645$. Sendo assim, para realizar a decisão da variável aleatória Y baseado na hipótese de teste de *Neyman-Pearson*, basta comparar seu valor com 1,645 . Se for maior, deve-se decidir por H_1, caso contrário, decidi-se por H_0.

3. Nessa questão, estamos interessados em saber a existência de um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{Y} = [Y_1 Y_2 \cdots Y_K]$, para $1 \leq k \leq K$ em que

$$\begin{aligned} &H_0 : Y_k \text{ e uma V. A Gaussiana com } m_0 = 0 \text{ e } \sigma_Y^2 \text{ conhecido} \\ &H_1 : Y_k \text{ e uma V. A Gaussiana com } m_1 = m \text{ e } \sigma_Y^2 \text{ conhecido} \end{aligned} \tag{23}$$

Para H_0 verdadeiro, temos:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|H_0) &= \prod_{i=1}^{K} f_{Y_i}(y_i|H_0) \\ &= \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^K} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{K} {y_i}^2\right) \end{aligned} \tag{24}$$

Por outro lado, se H_1 for verdadeiro:

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{Y}}\left(\mathbf{y}|H_1\right) &= \prod_{i=1}^{K} f_{Y_i}\left(y_i|H_1\right) \\
&= \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^K} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{K}\left(y_i-m\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{25}
$$

A *likelihood ratio function* é dado por:

$$
\begin{aligned}
\Lambda\left(\mathbf{y}\right) &= \frac{f_{\mathbf{Y}}\left(\mathbf{y}|H_1\right)}{f_{\mathbf{Y}}\left(\mathbf{y}|H_0\right)} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{K}\left(y_i-m\right)-{y_i}^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{K}m^2-2my\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Km^2-2m\sum_{i=1}^{K}y\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Km^2-2\mathrm{mK}\overline{Y_K}\right)\right)
\end{aligned} \tag{26}
$$

Em que $\overline{Y_K}$ é o estimador da média, dado por

$$
\overline{Y_K} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\mathrm{y} \tag{27}
$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da equação 14, temos:

$$
\begin{aligned}
\ln\Lambda\left(y\right) &\begin{array}{c} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} \ln\eta \\
-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Km^2-2\mathrm{mK}\overline{Y_K}\right) &\begin{array}{c} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} \ln\eta \\
\overline{Y_K} &\begin{array}{c} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} \frac{\sigma^2\ln\eta}{Km}+\frac{m}{2}
\end{aligned} \tag{28}
$$

A equação 28 mostra que o critério de decisão baseado no teste de hipótese binário de *Neyman-Pearson* utiliza a média estatística do vetor de variáveis aleatórias como métrica. Este resultado é plenamente coerente, uma vez que estamos utilizando a média dessa variável como parâmetro para a detecção.

4. Em todas as questões anteriores, estávamos realizando um teste de hipótese binário de um parâmetro θ desconhecido mas constante. A definição dos valores de θ feitas em H_0 e H_1 dizem respeito à suposições na qual essa constante poderia ser. Se o problema consistia em decidir se θ é igual a um de dois valores possíveis, era definido um par de *simple hypothesis*. Caso fosse de interesse saber se a constante θ é diferente de um valor ou de um conjunto de valores, era definido uma *composite hypothesis* em termos de diferença ou de inequação.

   Nesta questão, abordamos a teoria de detecção aplicada a telecomunicações com um novo enunciado do problema: Dado uma variável aleatória gaussiana Y, de média Θ e variância unitária, deseja-se determinar um limiar para a decisão do sinal recebido. No entanto, diferente das outras questões, Θ é uma variável aleatória discreta.

   Essa (não tão) sutil diferença implica diretamente no tipo de teste de hipótese que devemos usar. Como dito na 1, o métodos Bayseanos e de MAP são utilizados quando o parâmetro a ser detectado é aleatório. O critério de Bayes utiliza o conceito de custo para a determinação do limiar de decisão enquanto o de MAP não. No entanto, os dois necessitam do conhecimento a priori ($p_\Theta(\theta)$). Como não foi fornecido o custo para esse problema, utilizaremos o teste de hipótese MAP.

   Seja a *likelihood ratio function* dada pela a equação 8, o teste de hipótese MAP fornece que:

$$\Lambda\left(y\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p_0}{p_1} \tag{29}$$

   Em que $p_0 = p_\Theta(-1)$ e $p_1 = p_\Theta(1)$. Portanto, seja a PDF do sinal recebido dado por:

$$f_Y\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\left(y_i - \Theta\right)^2\right) \tag{30}$$

   Podemos construir a seguinte par de hipóteses:

$$\begin{aligned} &H_0 : Y \text{ e uma V. A Gaussiana com } \theta_0 = -1 \text{ e } \sigma_Y^2 = 1 \\ &H_1 : Y \text{ e uma V. A Gaussiana com } \theta_1 = 1 \text{ e } \sigma_Y^2 = 1 \end{aligned} \tag{31}$$

   Note que apenas o par de hipótese não fornece se Θ é uma variável aleatória, devemos conhecer o problema para saber se, de fato, é uma VA ou uma constante. O enunciado não fornece a probabilidade a priori do problema. Para contornar este problema, considera-se uma transmissão equiprovável ($p_0 = p_1 = 0,5$). Se H_0 for verdadeira, temos:

$$f_Y\left(y|H_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y_i+1\right)^2}{2}\right) \tag{32}$$

Por outro lado, se H_1 for verdadeira:

$$f_Y\left(y|H_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y_i-1\right)^2}{2}\right) \tag{33}$$

Substituindo as equações 32 e 33 em 29, temos:

$$\exp\left(\frac{\left(y_i+1\right)^2}{2} - \frac{\left(y_i-1\right)^2}{2}\right) \begin{array}{c} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} 1$$

$$\exp\left(2y\right) \begin{array}{c} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} 1 \tag{34}$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da inequação, temos:

$$y \begin{array}{c} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{array} 0 \tag{35}$$

O resultado chegado em 35 é intuitivo: Em uma comunicação binária, antipodal e equiprováveis, é intuitivo acreditar que o limiar de decisão seja 0. A Figura 1 mostra a taxa de erro de bits para diferentes valores de limiar η. Como é possível perceber, 0 é o valor de limiar que minimiza a taxa de erro de bits.

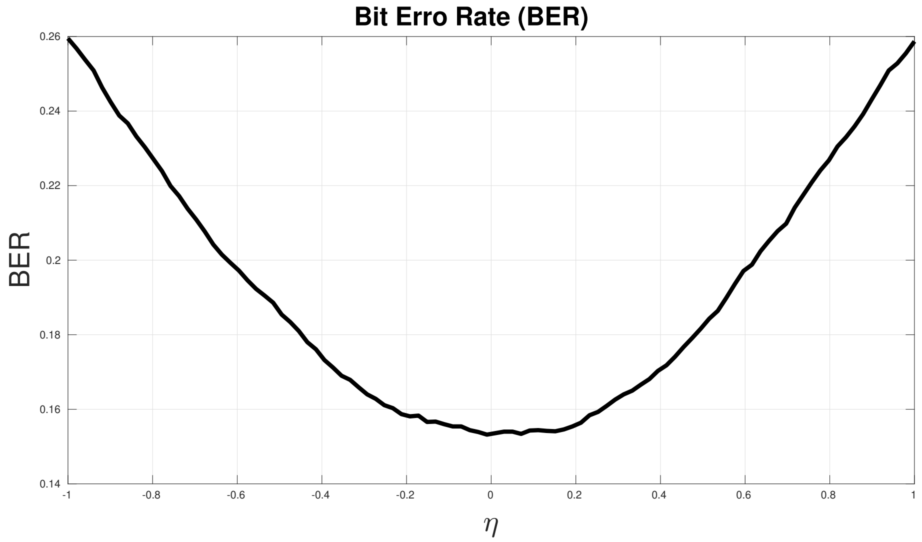

Figura 1: Taxa de erro de bits para diferentes valores de limiar η.

Referências

[1] A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes For Electrical Engineering, 3rd Edition*. Prentice Hall, the 3rd edition ed., 2008.

[2] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume II: Detection Theory*. Prentice Hall, 1st ed., 1998.

[3] M. Barkat, *Signal Detection And Estimation (Artech House Radar Library)*. Artech House Publishers, 2nd ed., 2005.