TI 090 – Sistemas Inteligentes em Controle e Automação de Processos

Introdução: Lógica e Sistemas Fuzzy

Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Depto. Engenharia de Teleinformática (*DETI/UFC*)

URL: http://lattes.cnpq.br/8902002461422112

Email: gbarreto@ufc.br

Novembro/2016

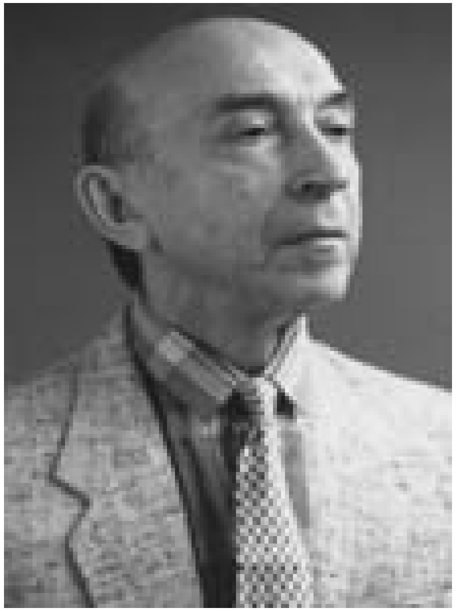
Ementa

1. Breve Histórico.
2. Lógica e Teoria Clássica dos Conjuntos.
3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência.
4. Variáveis Lingüísticas
5. Operadores Fuzzy
6. Regras Fuzzy
7. Inferência Fuzzy (Mamdani)

1. Breve Histórico

- Surgiu com *Lofti A. Zadeh* em 1965, a partir da publicação do seguinte artigo.

Zadeh, L. A. (1965). “Fuzzy Sets”, Information and Control, vol. 8, 338-353.



1. Breve Histórico

- Passou despertar amplo interesse mundial a partir dos anos 80, mais especificamente com sua utilização prática no Japão.

- Mais especificamente a partir da aplicação de seus conceitos no gerenciamento e controle do metrô de Sendai, no Japão.

- Lógica *Fuzzy* é uma generalização da teoria clássica de conjuntos.
  - Um objeto pode **pertencer ou não** a um conjunto (conceito clássico)
  - Um objeto pode **pertencer parcialmente** a um conjunto (conceito fuzzy).

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos

Lógica

Conjunto de leis que regem o raciocínio.

Conjunto

Qualquer coleção de objetos arbitrários, denominados elementos.

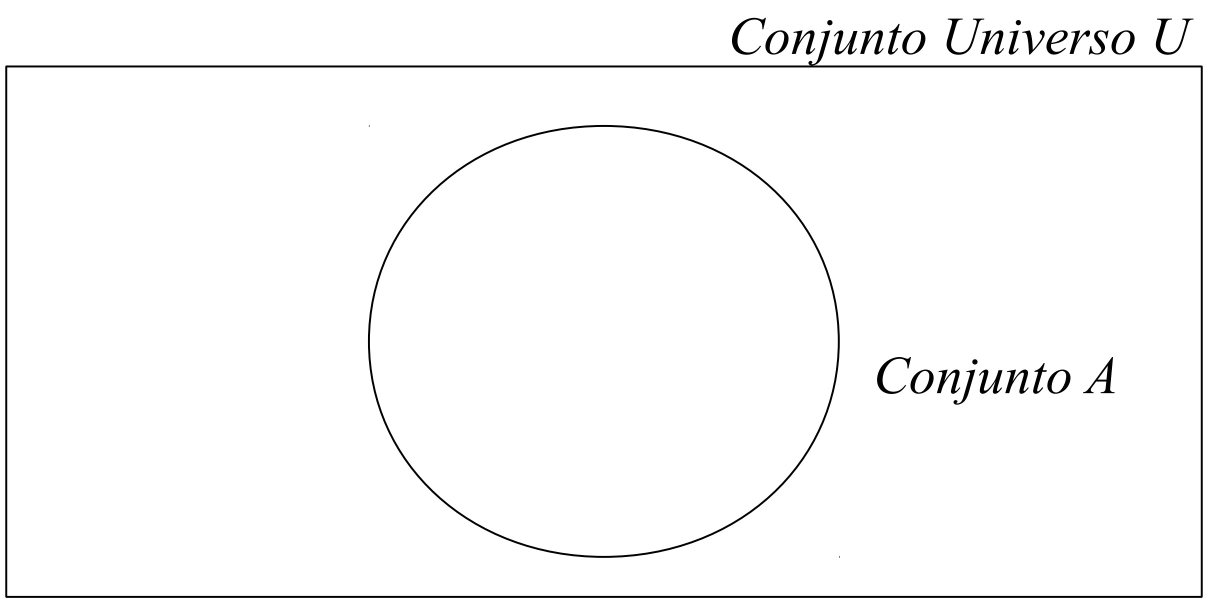
- **Século V a.C.:** Sócrates, Platão e Aristóteles.

Silogismo: Pedro é homem (premissa 1)
Todos os homens são mortais (premissa 2)
Então Pedro é mortal. (conclusão)

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos: Visão Clássica

- **Século XVIII:** Euler representa conjuntos como círculos no plano.
- **Século XIX:** Venn introduz os diagramas que levam o seu nome.

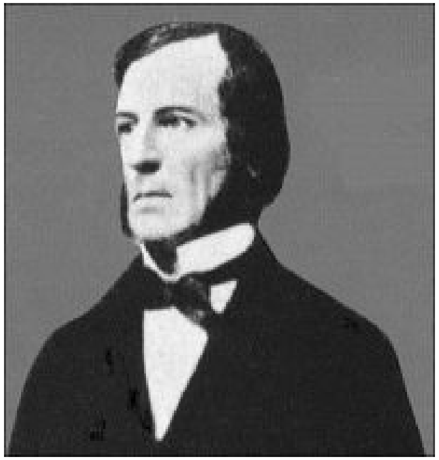
Seja U o conjunto de todos os homens.
Seja A o conjunto dos homens altos.



2. Lógica e Teoria dos Conjuntos: Visão Clássica

- **Século XIX:** Boole unifica a lógica clássica com a matemática.

George Boole (1854). “*An investigation into the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*”.



George Boole (02/11/1815 - 08/12/1864). Matemático e filósofo britânico. É o criador da Álgebra Booleana, base da atual aritmética computacional.

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos

Na Lógica e Teoria dos Conjuntos clássicas

- Um objeto X pode só **<u>pertencer ou não</u>** a um conjunto A.

  Se X é um elemento do conjunto A, então escreve-se: $X \in A$.

  Se X não é um elemento do conjunto A, então escreve-se: $X \notin A$.

- Pode-se definir uma função indicadora $\mu_A(X)$ que define o grau de pertinência de X ao conjunto A.

$$\mu_A(X) = \begin{cases} 1, & Se \quad X \in A \\ 0, & Se \quad X \notin A \end{cases}$$

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos

- De acordo com a teoria clássica de conjuntos, os diferentes graus de intensidade que uma certa variável *X* pode assumir é definido através de **<u>fronteiras rígidas</u>** (limiares).

- Por exemplo, um termostato está regulado para dois níveis dintintos de temporatura: $T < 20^o$ (baixa) e $T > 20^o$ (alta).

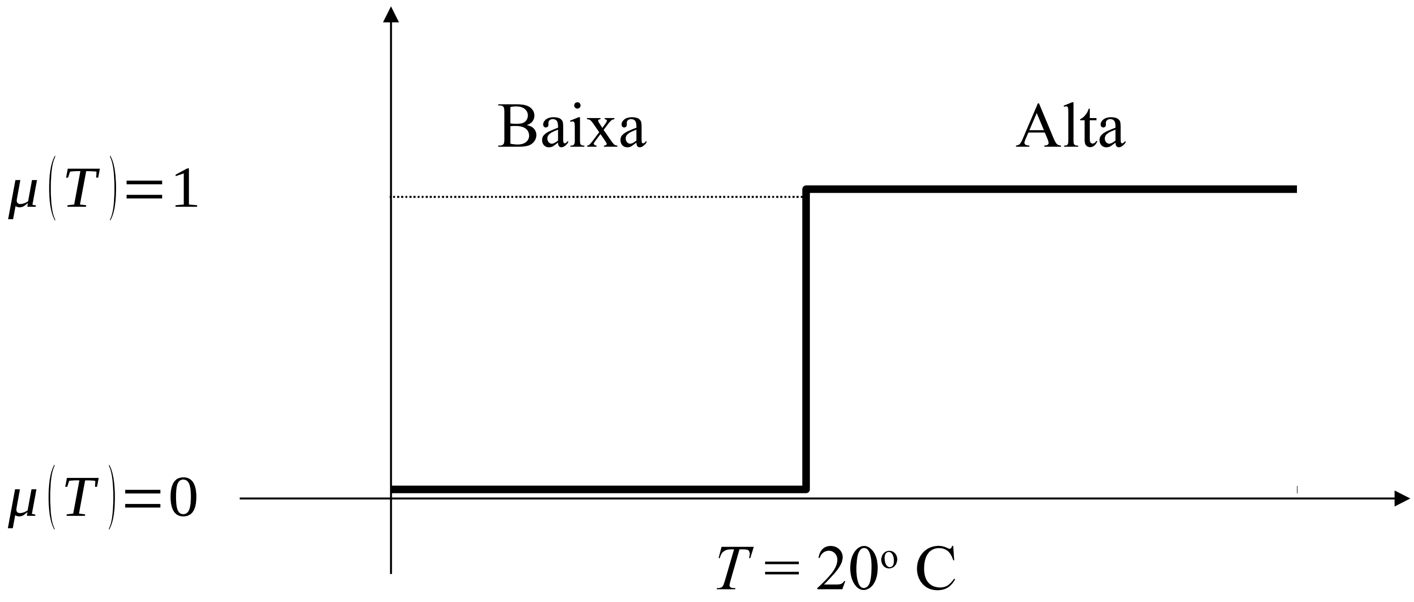
- Logo o limiar de decisão é $T = 20^o$.

- Assim, pode-se definir a operação deste termostato por meio da seguinte expressão:

$$\mu(T) = \begin{cases} Baixa, & Se \quad T < 20^o \\ Alta, & Se \quad T > 20^o \end{cases}$$

2. Lógica e Teoria dos Conjuntos: Visão Clássica

- A operação do termostato também pode ser descrita graficamente.



2. Lógica e Teoria dos Conjuntos: Visão Clássica

- Porém, o conhecimento humano é <u>incerto</u>, <u>incompleto</u> ou <u>impreciso</u>.

- Ex.: Você vai para o jogo Fortaleza vs. Ceará?
  - talvez sim.
  - se não chover eu vou.
  - se o ingresso não for caro vou.
  - vou logo cedo.

- Muitas das frases e estimativas humanas não são facilmente definidas através de formalismos matemáticos.

3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

- **Complexidade versus Compreensão/Precisão.**

- *Zadeh* percebeu que a complexidade do sistema vem de como as variáveis são representadas e manipuladas.
- *Zadeh* representa o raciocínio humano em termos de conjuntos *fuzzy*.

Princípio da Incompatibilidade (Zadeh, 1965)

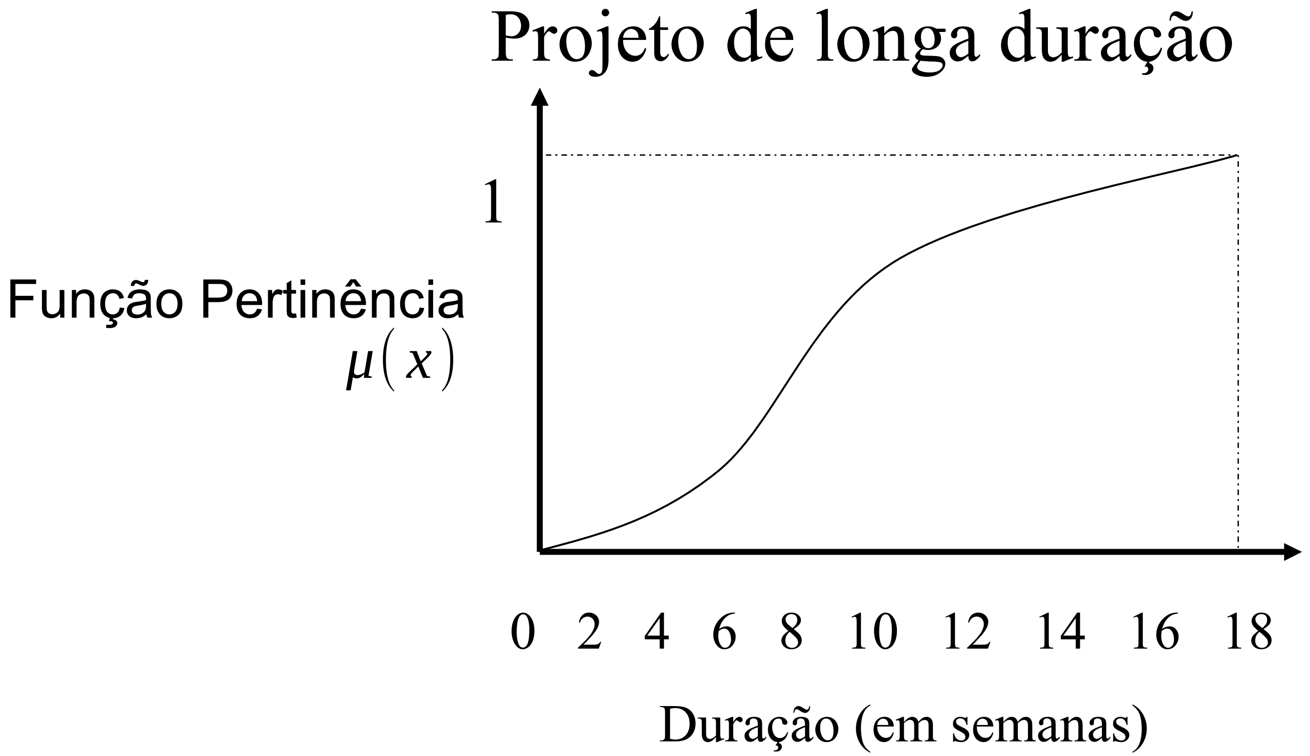
"À medida que a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade para fazer afirmações precisas e que sejam significativas acerca deste sistema diminui até um limiar, abaixo do qual, precisão e relevância se tornem características quase mutuamente excludentes."

3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

- Conjuntos fuzzy são definidos por funções que mapeam o valor de um elemento X do conjunto para um número entre 0 e 1.
- Um grau de pertinência 0 indica que X não pertence ao conjunto de modo algum.
- Um grau com valor intermediário entre 0 e 1 indica que o elemento pertence parcialmente a dois ou mais conjuntos.
- Um grau 1 indica significa que X é um elemento que pertence totalmente ao conjunto, ou seja, com intensidade máxima..

3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

- Assim, as fronteiras entre conjuntos fuzzy não são mais definidas por um limiar, mas sim por uma região de transição.



3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Na Lógica e Teoria dos Conjuntos Fuzzy

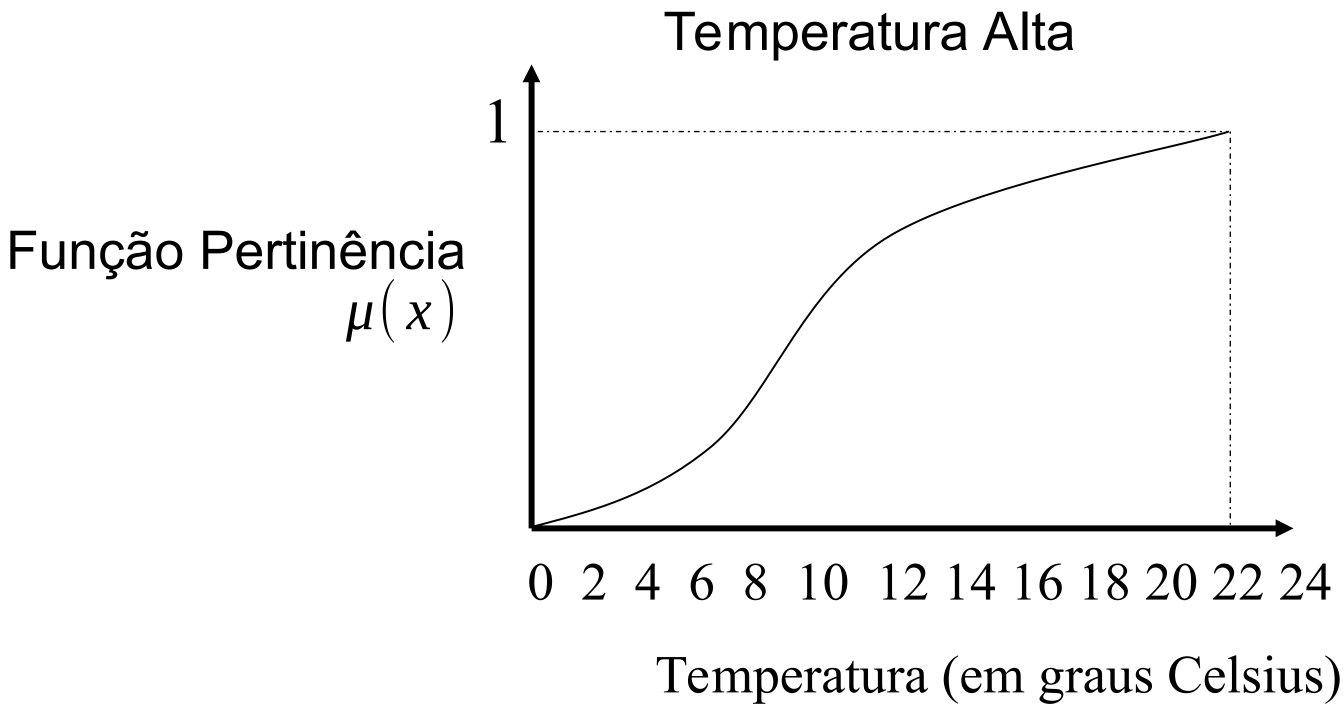
- Um objeto X pode **<u>pertencer parcialmente</u> a** um conjunto A.
- Assim, um elemento X pode a mais de um conjunto ao mesmo tempo, porém com graus de intensidade (pertinência) distintos.
- Pode-se definir uma função indicadora $\mu_A(X)$ que define o grau de pertinência de X ao conjunto A. Por exemplo,

$$\mu_A(T) = \frac{1}{1+\exp\left(-\left(T-T_L\right)\right)}$$

onde T_L é o limiar de temperatura em que $\mu_A(T) = 0,5$.

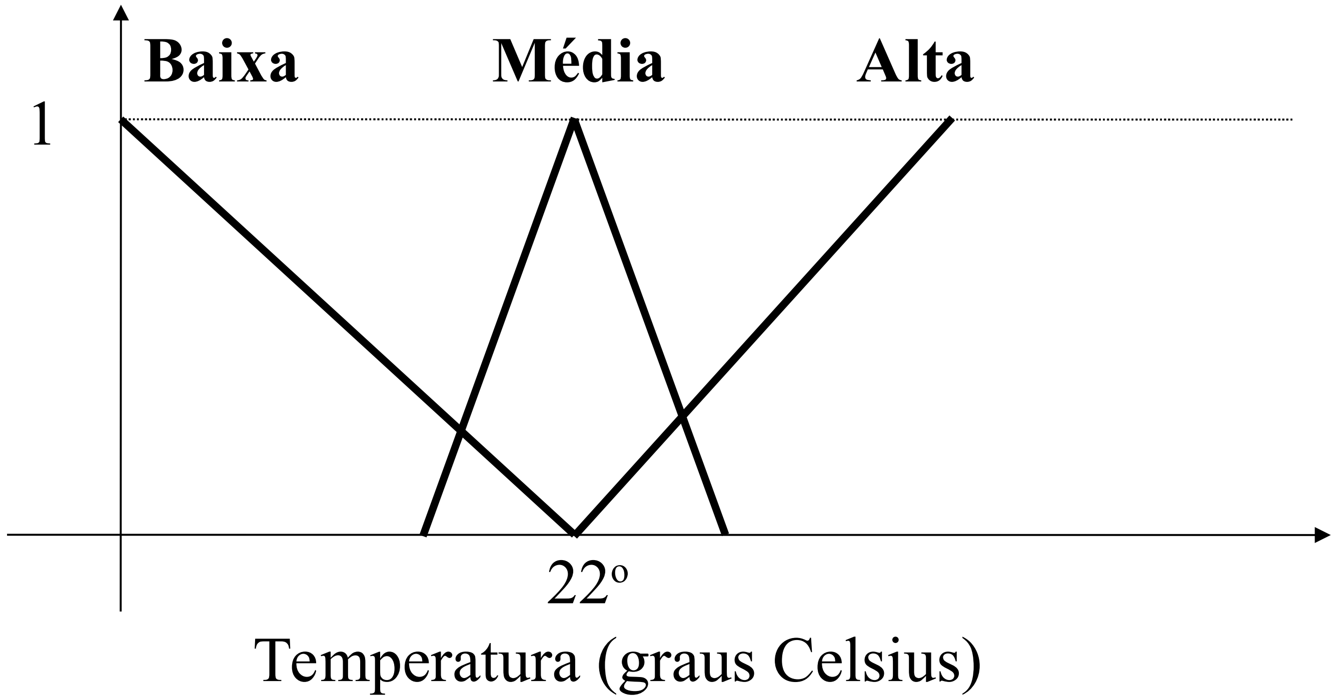
3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Função de Pertinência Sigmoidal



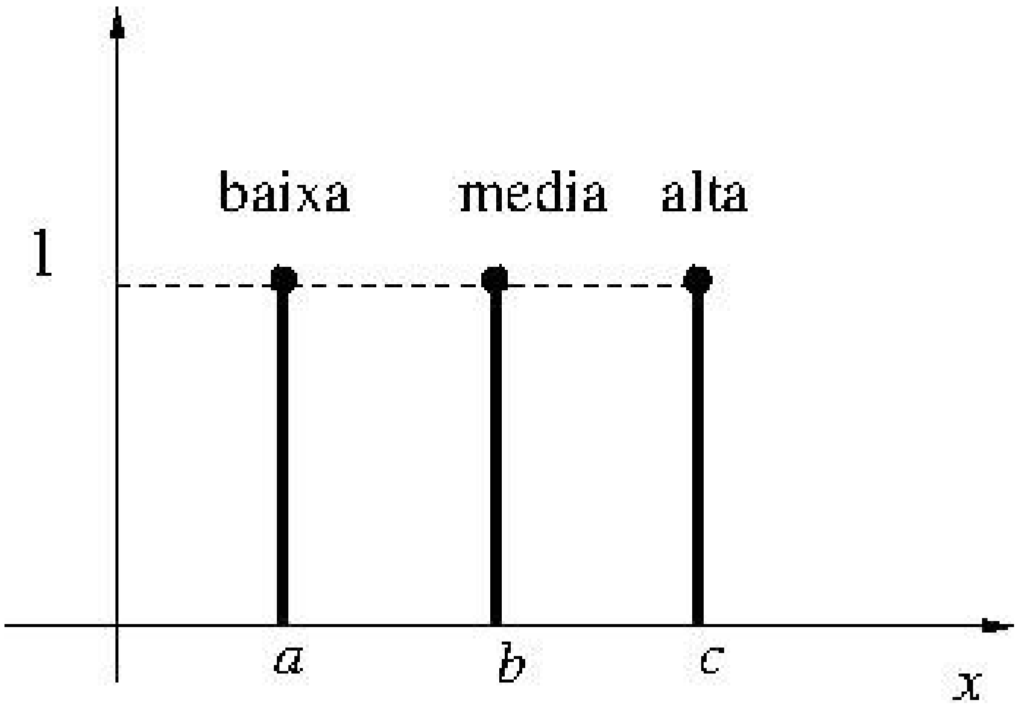
3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Funções de Pertinência Triangulares



3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Equação para Funções de Pertinência Singletons



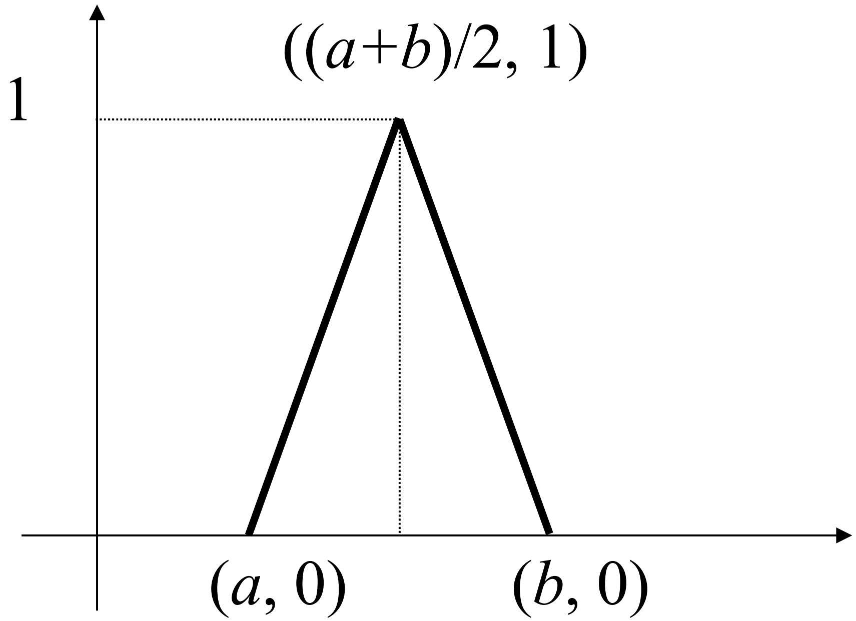
$$\mu_{baixa}(x=a)=1$$

$$\mu_{media}(x=b)=1$$

$$\mu_{alta}(x=c)=1$$

3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Equação para Funções de Pertinência Triangulares



Note que $b > a$!

Trecho crescente:

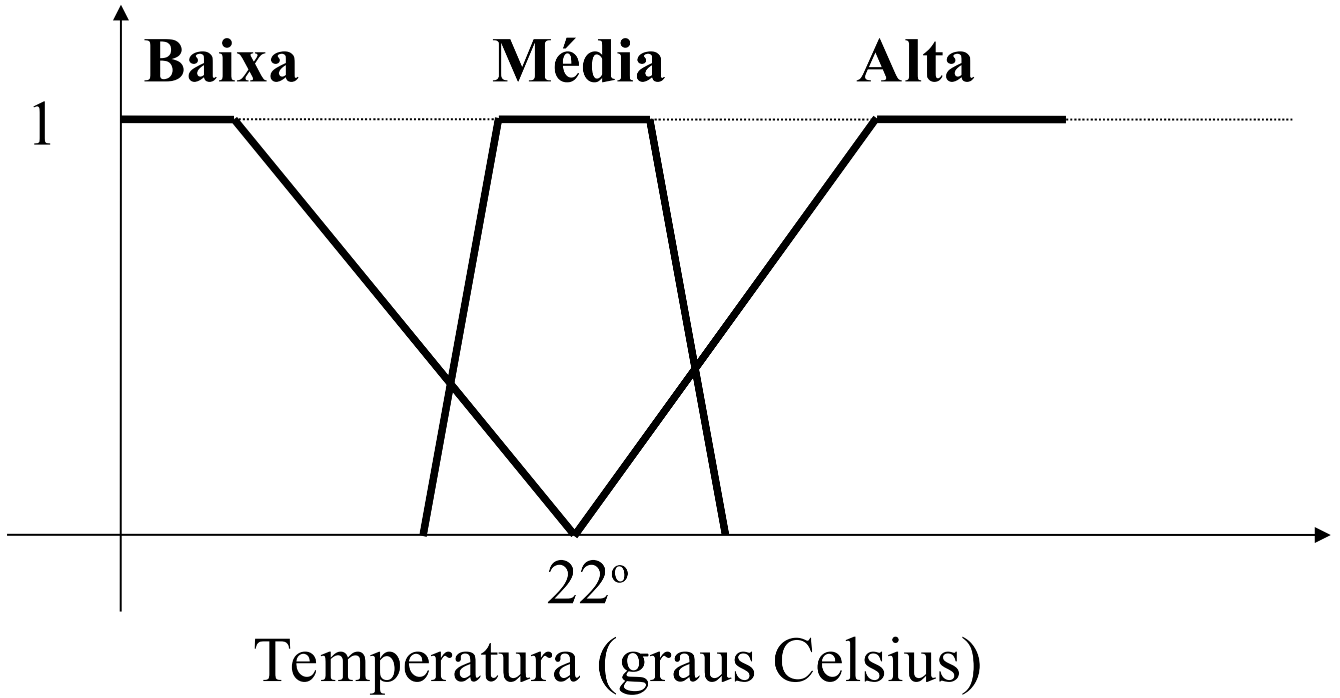
$$\mu(x) = \frac{2}{b-a}(x-a)$$

Trecho decrescente:

$$\mu(x) = \frac{2}{a-b}(x-b)$$

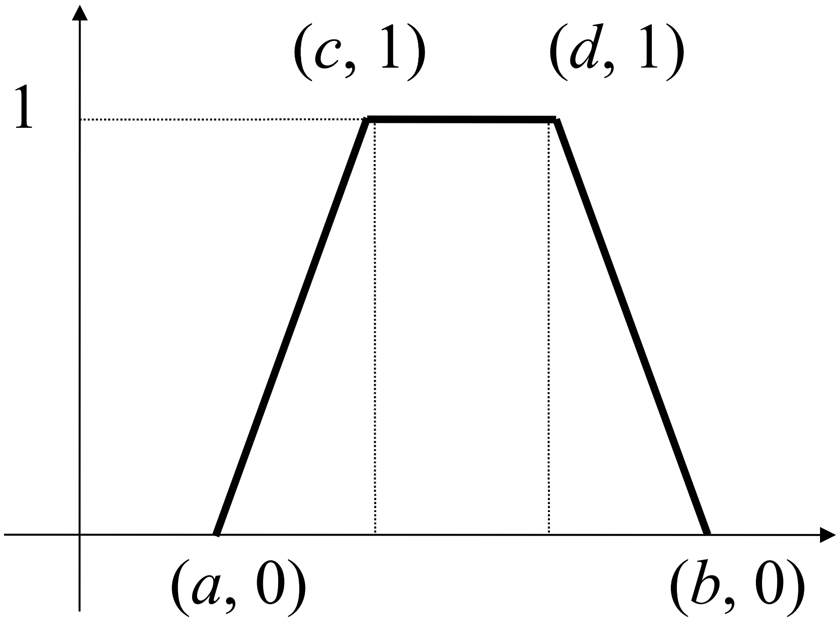
3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Funções de Pertinência Trapezoidais



3. Conjuntos Fuzzy e Funções de Pertinência

Equação para Funções de Pertinência Trapezoidais



Note que $b > a$!

Trecho crescente:

$$\mu(x) = \frac{1}{c-a}(x-a)$$

Trecho constante:

$$\mu(x) = 1, \quad c \le x \le d$$

Trecho decrescente:

$$\mu(x) = \frac{1}{d-b}(x-b)$$

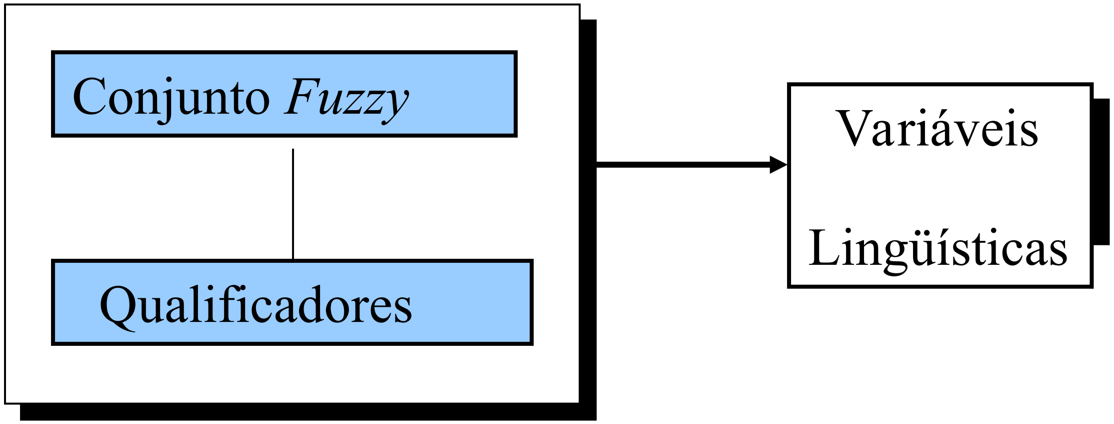
4. Variáveis Lingüísticas

- Uma variável lingüística é a variável (quantidade observada) cujo "comportamento" é alvo da representação via conjuntos *fuzzy*.
- Variáveis lingüísticas são normalmente usadas em sistemas de inferência *fuzzy* para fins de tomada de decisão.
- Exemplo: *SE* (duração *É* LONGO), (premissa)

  ENTÃO (risco *É* ALTO). (conclusão)
- Normalmente usada junto com qualificadores (*hedges*).
- Qualificadores mudam a forma do conjunto *fuzzy* associado a certa variável lingüística.

4. Variáveis Lingüísticas

- Variáveis lingüísticas com qualificadores (*hedges*):
  - muito BAIXA (equivale à raiz quadrada do conjunto BAIXO)
  - pouco ALTA (equivale a elevar ao quadrado o conjunto ALTO)
  - ligeiramente LONGO
  - positivamente não muito LONGO



4. Variáveis Lingüísticas

- Qualificadores permitem que expressar diferentes níveis de intensidade associados a uma certa variável lingüística.

- Exemplo:

  SE (duração *É* muito LONGO)
  ENTÃO (risco É muito ALTO)

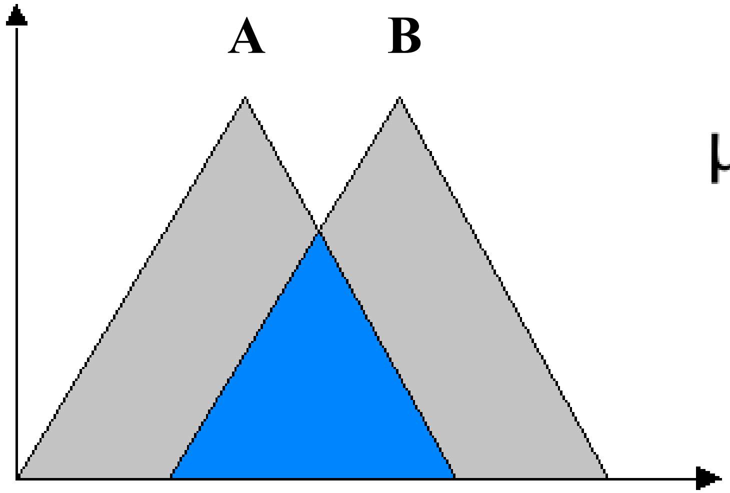
- Encapsula conceitos imprecisos numa forma computacionalmente eficiente.

5. Operadores Fuzzy

Sejam *A* e *B* conjuntos fuzzy associados à variável *X*.

- Intersecção de *A* e *B*

$$\mu_{(A\cap B)}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



$$\mu_{(A\cap B)}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

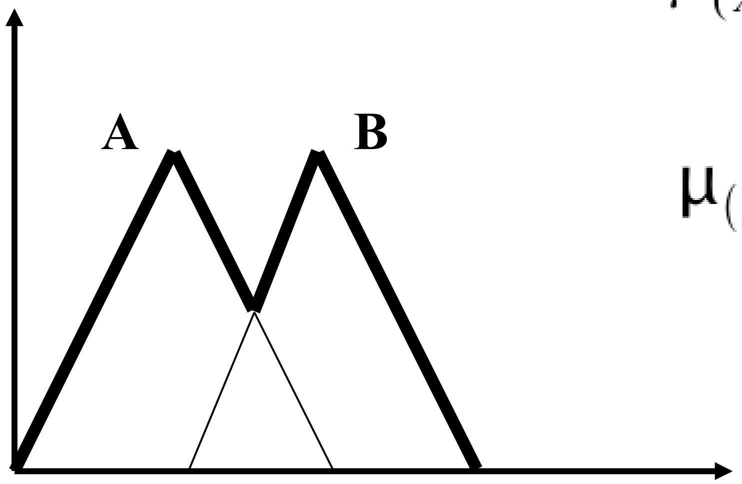
5. Operadores Fuzzy

Sejam *A* e *B* conjuntos fuzzy associados à variável *X*.

- União de *A* e *B*

$$\mu_{(A\cup B)}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

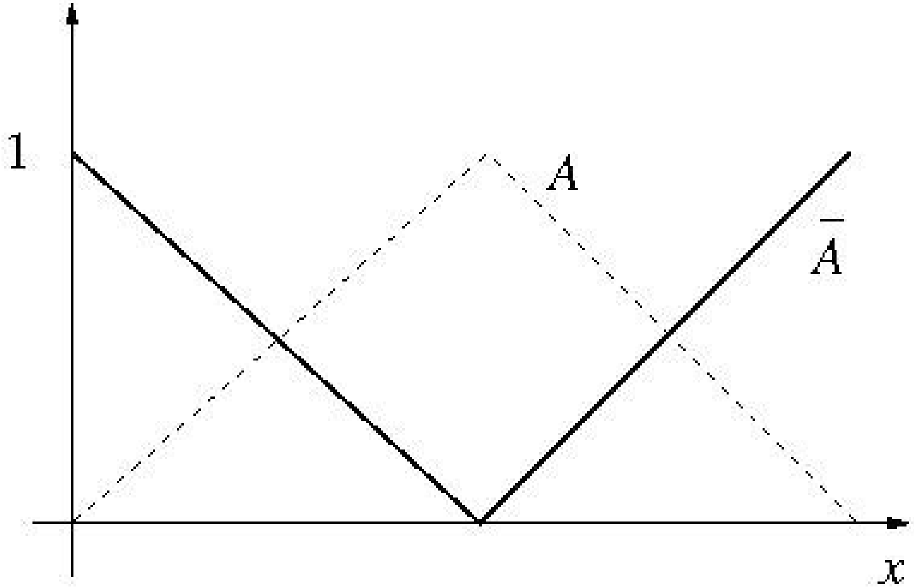
$$\mu_{(A\cap B)}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$



5. Operadores Fuzzy

Sejam A um conjunto fuzzy associado à variável X (tracejado).

Então, o complemento fuzzy de A é mostrado em linha contínua.



$$\neg\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

5. Operadores Fuzzy

No início a lógica e a teoria de conjuntos Fuzzy causou um certo mal-estar no meio acadêmico.

Em grande parte, o mal-estar foi causado porque a teoria de conjuntos fuzzy contradizia certos AXIOMAS da teoria clássica de conjuntos.

Por exemplo, qual é o conjunto resultante da soma de um conjunto qualquer A com o seu complemento $\bar{A}$?

Segundo a teoria clássica: $A \cup \bar{A} = A + \bar{A} = U$

Por exemplo, qual é o conjunto resultante da interseção de um conjunto qualquer A com o seu complemento $\bar{A}$?

Segundo a teoria clássica: $A \cap \bar{A} = A \, . \, \bar{A} = \phi$

5. Operadores Fuzzy

Segundo a lógica Fuzzy:

$$\mu(\neg A \cup A) \neq \mu(TRUE) \text{ e } \mu(\neg A \cap A) \neq \mu(FALSE),$$

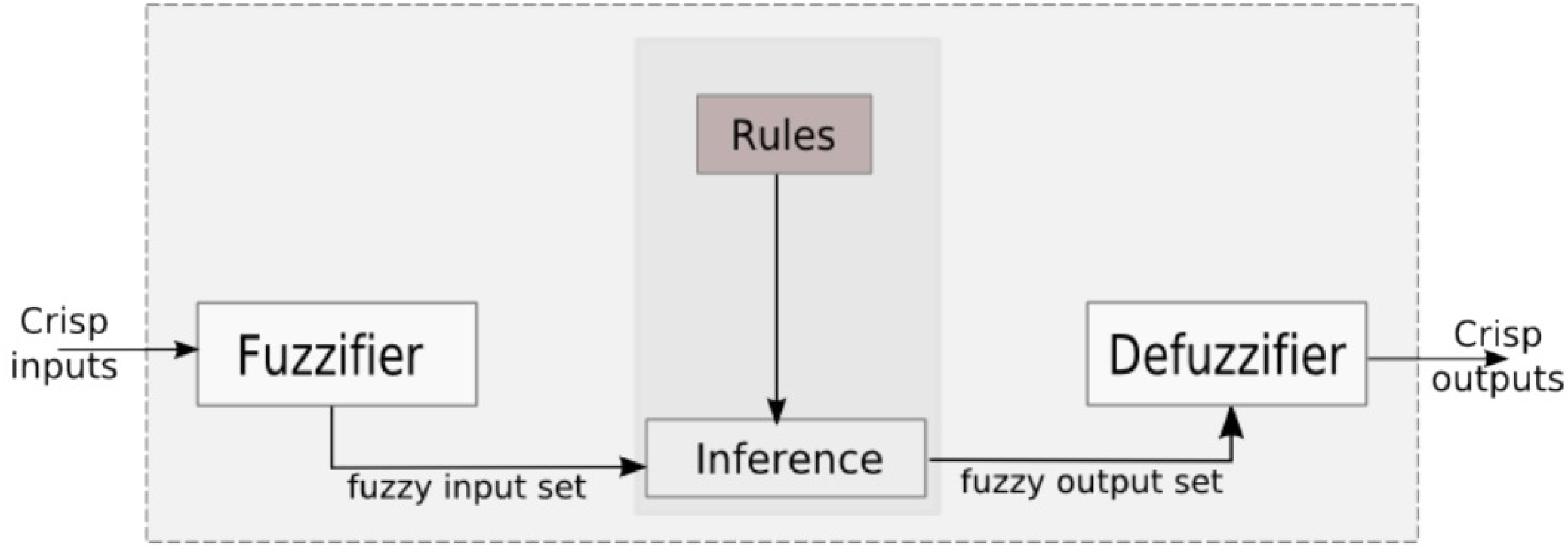
Considere $\mu(A) = 1/2$,

$$\begin{aligned}
\mu(\neg A \cup A) &= \max(\neg \mu(A), \mu(A)) \\
&= \max(1 - 1/2, 1/2) \\
&= 1/2 \neq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\neg A \cap A) &= \min(\neg \mu(A), \mu(A)) \\
&= \min(1 - 1/2, 1/2) \\
&= 1/2 \neq 0
\end{aligned}$$

6. Sistema de inferência Fuzzy

Sistema de Inferência Fuzzy



7. Regras Fuzzy

- Regras do tipo SE-ENTÃO cujas premissas (antecedentes) e conclusão (conseqüente) utilizam conceitos oriundos da lógica *fuzzy*.
- Exemplos de regras *fuzzy*:

R1: SE (velocidade é muito grande) E (raio de curvatura é pequeno), ENTÃO (força_sobre_pedal_freio é grande).

R2: SE (velocidade é mediana) E (raio de curvatura é grande), ENTÃO (força_sobre_pedal_freio é pequena).

7. Regras Fuzzy (cont.-1)

- Uma base de regras ou base de conhecimento *fuzzy* é formada por um número finito de regras *fuzzy*.
- Regras fuzzy são normalmente obtidas a partir de conhecimento especialista vago, sem precisão numérica.
- Existem vários métodos para extração do conhecimento:

  (*i*) Obtenção manual (entrevistas);

  (*ii*) Modelagem do especialista por observação direta;

  (*iii*) Modelagem do processo a ser tratado.

  (*iv*) Extração automática do conhecimento.

7. Inferência Fuzzy

- Para um conjunto de p variáveis de entrada $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ e uma variável de saída y, uma regra *fuzzy* pode ser genericamente escrita como:

$$R_i: \text{ SE } (x_1 \text{ é } A_{1i}) \text{ e } (x_2 \text{ é } A_{2i}) \text{ e } \ldots \text{ e } (x_p \text{ é } A_{pi}),$$
$$\text{ENTÃO } (y \text{ é } B_i).$$

- Sistema *fuzzy* descritos por regras tal como a mostrada acima são chamados de sistemas do tipo *Mamdani*.

- Mamdani, E. H. (1975). "Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis, *IEEE Transactions on Computers*, vol. 126, pp. 1182-1191.

7. Inferência Fuzzy (cont.-1)

- Subconjuntos fuzzy de entrada: A_{1i}, A_{2i} ,..., A_{pi}
- Subconjunto fuzzy de saída: B_i
- Avaliação <u>individual</u> das premissas da i-ésima regra:

$$\begin{array}{ll}
\text{Premissa 1: } x_1 \text{ é } A_{1i} & \text{equivale a } \mu_{A_1}^{(i)}(x_1) \\
\text{Premissa 2: } x_2 \text{ é } A_{2i} & \text{equivale a } \mu_{A_2}^{(i)}(x_2) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \\
\text{Premissa } p\text{: } x_p \text{ é } A_{pi} & \text{equivale a } \mu_{A_p}^{(i)}(x_p)
\end{array}$$

7. Inferência Fuzzy (cont.-2)

- Exemplo (premissas de regras *fuzzy*):

(*i*) Variáveis lingüísticas de entrada e saída:

x_1 = velocidade [Km/h]

x_2 = raio de curvatura [m]

y = força sobre pedal de freio [N]

(*ii*) Subconjuntos associados à *i*-ésima regra fuzzy:

A_{1i} = grande

A_{2i} = pequeno

B_i = alta

7. Inferência Fuzzy (cont.-3)

- Exemplo (premissas de regras *fuzzy*):

(*iii*) Avaliação individual das premissas:

$$x_1 = 100\,Km/h \rightarrow \mu_{A_1}^{(i)}(x_1) = 0{,}7$$

$$x_2 = 10\text{m} \rightarrow \mu_{A_2}^{(i)}(x_2) = 0{,}8$$

7. Inferência Fuzzy (cont.-4)

- Avaliação <u>conjunta</u> (interseção) das premissas da *i*-ésima regra *fuzzy*:

$$\mu_A^{(i)}(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_p) = min\{\mu_{A_1}^{(i)}(x_1), \mu_{A_2}^{(i)}(x_2), \ldots, \mu_{A_p}^{(i)}(x_p)\}$$

- Continuação do exemplo anterior:

$$\mu_A^{(i)}(x_{1,} x_2) = min\{\mu_{A_1}^{(i)}(x_1), \mu_{A_2}^{(i)}(x_2)\} = min\{0{,}7\,;0{,}8\} = 0{,}7$$

7. Inferência Fuzzy (cont.-5)

- A saída de uma regra fuzzy é uma versão modificada do conjunto *fuzzy* de saída B_i.
- Inferência ou raciocínio *fuzzy* consiste no processo de avaliar o efeito que o resultado da avaliação <u>conjunta</u> das premissas de uma regra *fuzzy* produzem sobre o conjunto conjunto *fuzzy* de saída dessa regra.
- Aqui nos restringiremos ao método conhecido como *Regra de Inferência Modus Pones Generalizado*.

7. Inferência Fuzzy (cont.-6)

- Inferência ou raciocínio *fuzzy* consiste no processo de avaliar o efeito que o resultado da avaliação conjunta das premissas de uma regra *fuzzy* produzem sobre o conjunto conjunto *fuzzy* de saída dessa regra.
- Aqui nos restringiremos ao método de inferência conhecido como *Modus Ponens Generalizado:*

$$\mu_{A \rightarrow B}^{(i)}(x_1, x_2; y) = min\{\mu_A^{(i)}(x_1, x_2), \mu_B^{(i)}(y)\}$$

Mais sobre modus ponens: https://pt.wikipedia.org/wiki/Modus_ponens

7. Inferência Fuzzy (cont.-7)

- *Modus Ponens Generalizado*:

$$\mu^{(i)}_{A \to B}(x_{1,} x_2 ; y) = min\{\mu^{(i)}_{A}(x_{1,} x_2), \mu^{(i)}_{B}(y)\}$$

- Note que:

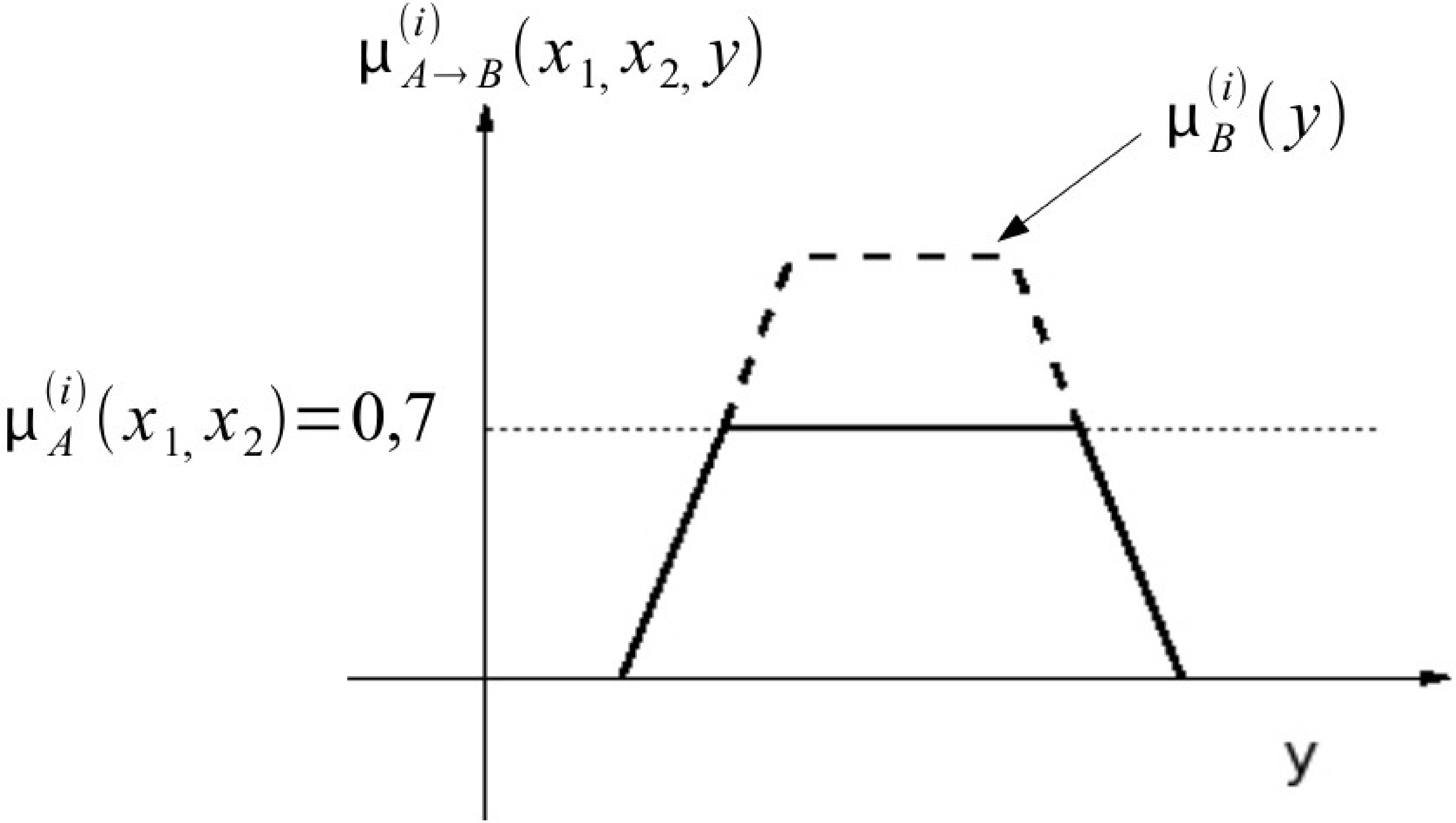
(*i*) $\mu^{(i)}_{A}(x_{1,} x_2)$ é uma constante (linha horizontal).

(*ii*) $\mu^{(i)}_{B}(y)$ é o conjunto fuzzy de saída da *i*-eśima regra.

  - Logo, a saída da *i*-ésima regra fuzzy é uma versão modificada do conjunto *fuzzy* de saída B_i.

7. Inferência Fuzzy (cont.-8)

- Exemplo *Modus Ponens Generalizado*:



7. Inferência Fuzzy (cont.-9)

- Sistema de Inferência Fuzzy Mamdani