

## Filtragem Adaptativa - TIP 7188

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante  
Prof. Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Período: 2022.2

### *Lista de Exercícios No. 2: Filtragem Linear Ótima*

- 1. (Filtragem ótima)** Considere um problema de filtragem de Wiener conforme caracterizado a seguir. A matriz de correlação  $\mathbf{R}_x$  de um vetor de entrada  $\mathbf{x}(n)$  é dada por

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor de correlação cruzada  $\mathbf{p}_{xd}$  entre o vetor de entrada  $\mathbf{x}$  e a resposta desejada  $d(n)$  é

$$\mathbf{p}_{xd} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre o vetor de coeficientes do filtro de Wiener.
- (b) Qual é o mínimo erro médio quadrático fornecido por este filtro?
- (c) Formule uma representação do filtro de Wiener em termos dos autovalores da matriz  $\mathbf{R}_x$  e de seus autovetores associados.

- 2. (Erro médio quadrático mínimo)** Mostre que a equação do erro mínimo pode se escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

em que  $J_{\min}$  é o mínimo erro médio quadrático,  $\mathbf{w}$  é o filtro de Wiener, e  $\mathbf{A}$  é a matriz de correlação do vetor aumentado

$$\begin{bmatrix} d(n) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix}$$

em que  $d(n)$  é o sinal desejado e  $\mathbf{x}(n)$  é o sinal de entrada do filtro de Wiener.

- 3. (Cancelamento de ruído)** Em várias aplicações práticas há uma necessidade de cancelar ruído que foi adicionado a um sinal. Por exemplo, se estamos usando o telefone celular dentro de um ruído e o ruído do carro ou rádio é adicionado à mensagem que estamos tentando transmitir. A Figura 1 ilustra as situações de contaminação de ruído. Calcule o filtro de Wiener (filtro ótimo) de tal configuração em relação às estatísticas dos sinais envolvidos que você dispõe (conhece).

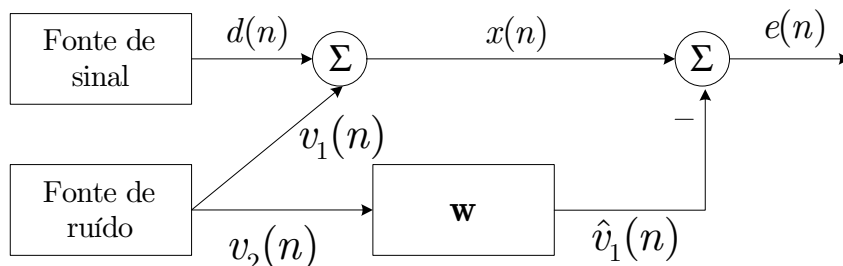


Figure 1: Esquema de cancelamento de ruído.

**4. (Predição ótima)** Seja um processo estocástico dado por

$$x(n) = s(n + a) + s(n - 4a),$$

em que  $S(n)$  é um processo estocástico WSS dado e  $a$  é uma constante.

Deseja-se filtrar o processo de tal forma obter-se um processo  $D(s) = s(n - a)$ , o qual também sabe-se que é um processo WSS. Suponha que o sinal  $d(n)$  possua média nula e variância unitária.

- (a) Calcule o filtro, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.
- (b) Calcule o preditor direto ótimo de passo unitário, com dois coeficientes, que fornece a solução ótima em relação ao erro médio quadrático.
- (c) Compare as soluções dos dois.

**5. (Superfície de erro)** Suponha que foram encontrados os seguintes coeficientes de autocorrelação:  $r_x(0) = 1$  e  $r_x(1) = 0$ . Tais coeficientes foram obtidos de amostras corrompidas com ruído. Além disso, a variância do sinal desejado é  $\sigma_d^2 = 24.40$  e o vetor de correlação cruzada é  $\mathbf{p}_{xd} = [2 \ 4.5]^T$ . Encontre:

- (a) O valor dos coeficientes do filtro de Wiener.
- (b) A superfície definida por  $J(\mathbf{w})$ . Faça um gráfico da mesma.