Filtragem Adaptativa

Charles Casimiro Cavalcante

charles@gtel.ufc.br

Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio – GTEL
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática
Universidade Federal do Ceará – UFC
http://www.gtel.ufc.br/∼charles

"Filtros adaptativos, os quais têm como meta transformar os sinais portadores de informação em versões 'limpas' ou 'melhoradas', ajustam suas características de acordo com os sinais encontrados. Eles formam os exemplos mais simples de algoritmos no campo de aprendizado de máquinas."

Philip A. Regalia, 2005

IEEE Control Systems Magazine, Agosto de 2005

Conteúdo do curso

1. Introdução
2. Revisão de Processos Estocásticos
3. Filtragem Linear Ótima
4. Algoritmos Recursivos no Tempo
5. Método dos Mínimos Quadrados
6. Estruturas Alternativas de Filtragem Adaptativa
7. Tópicos Avançados

Parte II

Revisão de Processos Estocásticos

Evento

Definição: Qualquer subconjunto do espaço amostral $\mathcal{S}$ que constitui um campo de Borel $\mathcal{F}$

Eventos mutuamente exclusivos

Quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro

Exemplo: Dado

$$\left.\begin{array}{r} A = \{\text{par}\} \\ B = \{\text{impar}\} \end{array}\right\rangle A \cdot B = \emptyset \quad \textbf{(eventos mutuamente exclusivos)}$$

Probabilidade (Definição Axiomática)

É qualquer função real definida na classe $\mathcal{F}$ tal que

1. $\Pr(A) \geq 0$
2. $\Pr(\mathcal{S}) = 1$
3. Se $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A + B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ (eventos mutuamente exclusivos)

Assim,

$$\Pr(\cdot) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

Probabilidade condicional

Probabilidade de ocorrência de A dado que ocorreu B

$$\Pr(A|B) \triangleq \frac{\Pr(AB)}{\Pr(B)}, \quad \Pr(B) > 0 \tag{1}$$

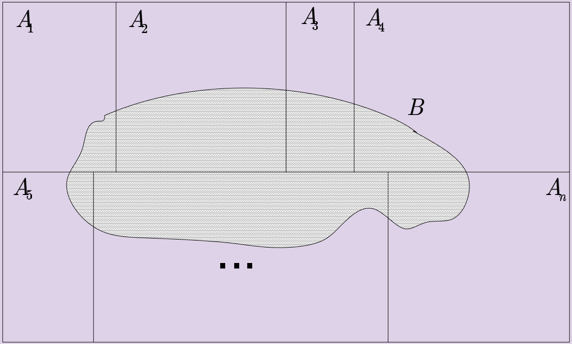
$\Pr(A|B)$ é probabilidade, pois

- $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(AB)}{\Pr(B)} \geq 0$
- $\Pr(\mathcal{S}|B) = 1$
- Para $A \cdot C = \emptyset \Rightarrow \Pr\left[(A + C)|B\right] = \Pr(A|B) + \Pr(C|B)$

Teorema da probabilidade total

Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eventos mutuamente exclusivos

- $\Pr(A_i) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$
- $B \subset \{A_1 + A_2 + \cdots + A_n\}$



Teorema da probabilidade total - cont.

- $\Pr(B) = \Pr(BA_1) + \Pr(BA_2) + \cdots + \Pr(BA_n)$ pois $B = \underbrace{BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n}_{\text{mutuamente exclusivos}}$
- $\Pr(B) = \Pr(B|A_1)\Pr(A_1) + \cdots + \Pr(B|A_n)\Pr(A_n)$

Probabilidade total

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B|A_i)\Pr(A_i) \tag{2}$$

Regra de Bayes

Inverso do conceito da probabilidade total

$$\Pr(A_j|B) = \frac{\Pr(B|A_j) \cdot \Pr(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i)} \tag{3}$$

Também chamada de *probabilidade a posteriori*

Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes se

$$\Pr(A \cdot B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Generalizando (para três eventos): A, B e C

$$\left.\begin{array}{l} \Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B) \\ \Pr(AC) = \Pr(A)\Pr(C) \\ \Pr(BC) = \Pr(B)\Pr(C) \end{array}\right\} \Pr(ABC) = \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)$$

Propriedades de eventos independentes

1. $\Pr(A|B) = \Pr(A)$
2. $\Pr(\overline{A}B) = \Pr(\overline{A}) \cdot \Pr(B)$
3. $\Pr(A\overline{B}) = \Pr(A) \cdot \Pr(\overline{B})$ e $\Pr(\overline{AB}) = \Pr(\overline{A}) \cdot \Pr(\overline{B})$

Ou seja Se A e B são independentes, A e $\overline{B}$ são independentes e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também o são

Eventos conjuntos

Dado $\mathcal{S}$ (espaço amostral), podemos atribuir diferentes atributos aos eventos pertencentes a diferentes classes de Borel

$$\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$\begin{cases} A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}_1 \\ B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{F}_2 \end{cases}$$

Exemplo:

$\mathcal{S} = \{$João, José, Maria $\}$

(idade,altura)

Rescrevendo:

$$\mathcal{S} = \{(10, 1.50), (30, 1.80), (32, 1.65)\}$$

Probabilidade marginal

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \mathcal{S}_1$$

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n = \mathcal{S}_2$$

$$\left.\begin{aligned} \Pr(A_i) &= \sum_{j=1}^{n} \Pr(A_i, B_j) \\ \Pr(B_j) &= \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i, B_j) \end{aligned}\right\} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Pr(A_i, B_j) = 1 \tag{4}$$

Variáveis aleatórias

Definição

Variável aleatória (v.a.) é qualquer função definida no espaço amostral $\mathcal{S}$ tal que:

$$\{X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, X(w) \in (-\infty, x], w \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{F} \tag{5}$$

Exemplo

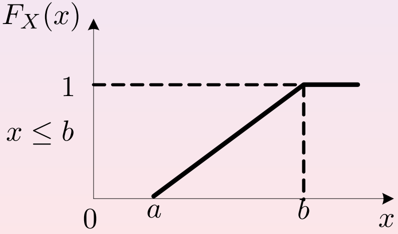
- Moeda:
  $\mathcal{S} = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$
  $X(\text{cara}) = 0$
  $X(\text{coroa}) = 1$

Definição

$$\boxed{F_X(x) \triangleq \Pr\{X \leq x\}} \tag{6}$$

Exemplo: *Distribuição uniforme*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ x - a, & \text{se } a < x \leq b \\ 1, & \text{se } x > b \end{cases}$$



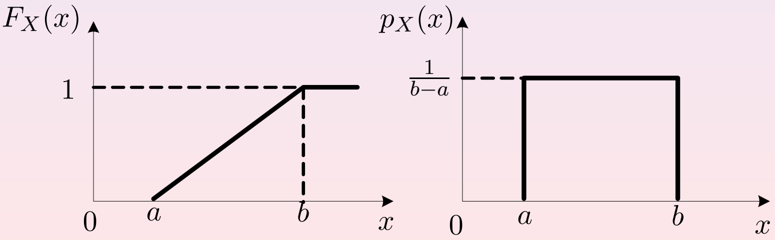
Propriedades da fdc

1. $F_X(-\infty) = 0$
2. $F_X(\infty) = 1$
3. $\Pr\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
4. Se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$, ou seja, $F_X(x)$ é *monotônico não-decrescente*

Definição

$$\boxed{p_X(x) \triangleq \frac{d}{dx}F_X(x)} \tag{7}$$

Exemplo: *Distribuição uniforme*

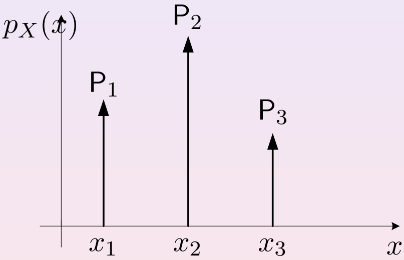


Propriedades

1. $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(\xi)\, d\xi$
2. $F_X(x)$ é monotônico não-decrescente $\Rightarrow p_X(x) \geq 0$
3. $\Pr\{X > x\} = 1 - F_X(x) = 1 - \Pr\{X \leq x\}$
4. $\Pr\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} p_X(\xi)\, d\xi$

Dificuldade

Neste caso, as variáveis admitem valores somente em determinados instantes de tempo. O que ocorre com as probabilidades?



Funções $\delta(\cdot)$ de Dirac (impulsos)

$$\delta(t) \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\ dt = f(t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \text{função impulsiva de Dirac} \\ &= \frac{d}{dt}u(t), \text{em que } u(t) \text{é a função degrau unitário} \end{aligned}$$

Logo, teremos

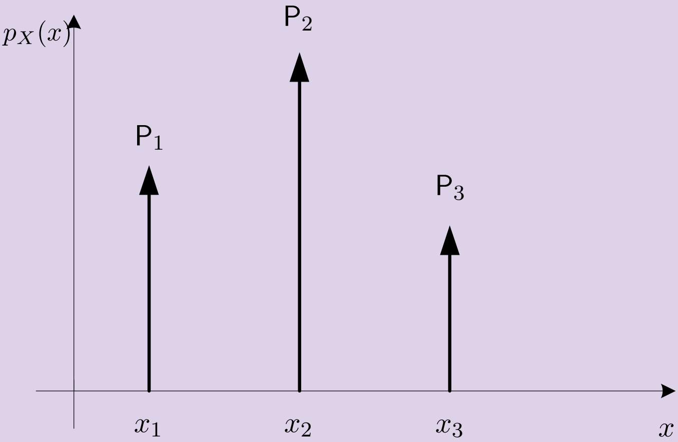
$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{N} \Pr\{X = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(\xi)\; d\xi = \sum_{i=1}^{N} \Pr\{X = x_i\} \cdot \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi - x_i)\; d\xi$$

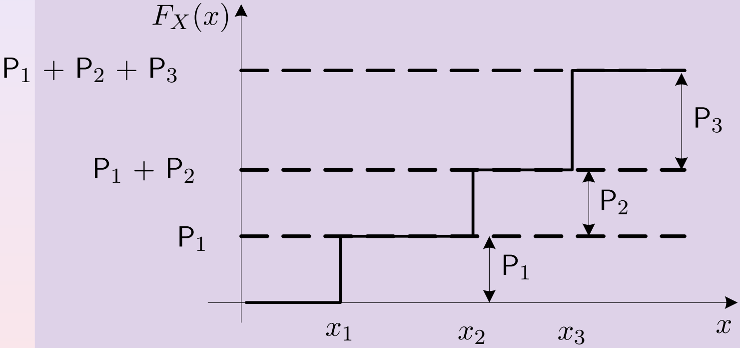
Mas sabe-se que

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi - x_i)\; d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_i \\ 1, & \text{se } x \geq x_i \end{cases}$$

pdf



fdc



$F_X(x)$
$\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 + \mathsf{P}_3$
$\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2$
P_1
P_3
P_2
P_1
x_1
x_2
x_3
x

Definição

Seja X uma v.a., X é dito ter distribuição de probabilidade gaussiana, ou *normal*, se sua densidade de probabilidade pode ser escrita da seguinte forma

$$\boxed{p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \tag{8}$$

Notação usual:

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$$

Parâmetros $\begin{cases} \mu \longrightarrow & \text{média} \\ \sigma^2 \longrightarrow & \text{variância} \end{cases}$

Normalização

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\boxed{p_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)}$$

Função erro

Função de distribuição cumulativa da função gaussiana

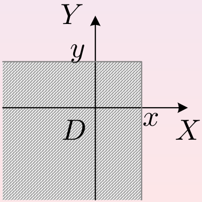
$$\begin{aligned} \mathsf{erf}(x) &= F_Z(x) = \Pr\{Z \leq x\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \, dz \end{aligned} \tag{9}$$

Função distribuição de probabilidade

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr \underbrace{\{X \leq x, \quad Y \leq y\}}_{\text{intersecção}} \tag{10}$$

$$\underbrace{\{X \leq x, \quad Y \leq y\}}_{\text{evento}} = \{\ w \in \mathcal{S} | [X(w), Y(w)] \in D\ \}$$

em que $D = \{\ (X,Y) | X \in (-\infty, x], \quad Y \in (-\infty, y]\ \}$



$$\boxed{p_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y} F_{X,Y}(x,y)} \tag{11}$$

Propriedades

1. $F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$
2. $F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$
3. $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$
4. $\left.\begin{array}{l} F_{X,Y}(x, \infty) = F_X(x) \\ F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y) \end{array}\right\}$ distribuições marginais
5. $F_{X,Y}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$
6. $$p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)\, dy$$ $$p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)\, dx$$

Definição

Sejam X e Y v.a.'s. Elas são independentes se:

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \Pr\{\ X \leq x, \quad Y \leq y\ \} \\ &= \Pr\{X \leq x\} \cdot \Pr\{Y \leq y\} \end{aligned}$$

Logo:

$$\boxed{p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)} \quad \text{pois}$$

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y} \left(F_X(x) \cdot F_Y(y)\right) \overbrace{=}^{?} p_X(x) \cdot\ p_Y(y)$$

Momentos

São *estatísticas* de uma variável aleatória capazes de representar seu comportamento probabilístico. Os infinitos momentos estatísticos definem a função de densidade de probabilidade.

Média

Também chamada de esperança matemática, valor esperado, momento de 1^a ordem, é definido como

$$\boxed{\mu = \mathbb{E}\{X\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\ dx} \qquad (13)$$

para $X \sim$ v.a. contínua

Média

Para X discreta

$$\boxed{\mu = \mathbb{E}\{X\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \cdot \Pr\{X = x_i\}} \tag{14}$$

OBS: Se $p_X(x)$ for simétrico em relação a um valor $x = a \Rightarrow \mathbb{E}\{X\} = a$

Pergunta: Num jogo de moeda, qual a média? E no caso de uma distribuição uniforme entre $[0, 1]$?

Propriedades da média

1. Linearidade - $\mathbb{E}\{X+Y\} = \mathbb{E}\{X\} + \mathbb{E}\{Y\}$ ou ainda,
$$\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i X_i\right\} = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{E}\left\{X_i\right\}$$
2. $\mathbb{E}\{X \cdot Y\} = \mathbb{E}\{X\} \cdot \mathbb{E}\{Y\}$ se X e Y são v.a.'s independentes
3. Transformação linear - $\mathbb{E}\left\{\mathbf{A}\mathbf{x}\right\} = \mathbf{A}\mathbb{E}\left\{\mathbf{x}\right\}$
4. $\mathbb{E}\{f(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) p_{X,Y}(x,y)\ dxdy$

Propriedades da média - cont.

5. Invariância à transformação - Seja $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y} p_Y(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) p_X(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

6. Se X e Y são independentes
   $\mathbb{E}\{f(X) \cdot g(Y)\} = \mathbb{E}\{f(X)\} \cdot \mathbb{E}\{g(Y)\}$

Momentos de ordem k

$$\boxed{\mu_k = \mathbb{E}\left\{X^k\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot p_X(x)\ dx} \tag{15}$$

- Os momentos de uma variável aleatória são uma representação da pdf da variável
- A coletânea dos *infinitos* momentos da v.a. definem sua pdf
- Algumas distribuições possuem alguns momentos nulos
- A estimativa de momentos cresce em complexidade e decresce em precisão com o aumento direto de k

Momentos centrados

Uma importante medida estatística é avaliar o comportamento da v.a. *em torno* da média. Assim, define-se o *momento centrado de ordem k* como sendo

$$c_k = \mathbb{E}\left\{(X-\mu)^k\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k \cdot p_X(x)\, dx \tag{16}$$

De particular interesse: variância $\left(\sigma^2 = \mathbb{E}\left\{(X-\mu)^2\right\} \geq 0\right)$

OBS: Se $p_X(x)$ é simétrica em relação a média $c_k = 0$ para $\forall k$ ímpar!

Meta

Caracterização da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória condicionada a ocorrência de outra variável aleatória ou evento

Definição distribuição cumulativa condicionada

$$\begin{aligned} F_X(x|A) &\triangleq \Pr\left\{X \leq x|A\right\} \\ &= \frac{\Pr\{X \leq x, A\}}{\Pr\{A\}} \end{aligned} \tag{17}$$

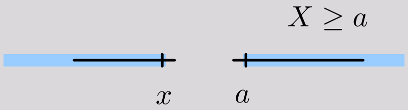
- $p_X(x|A) \triangleq \dfrac{d}{dx} F_X(x|A)$

Analisando...

Seja $A = \{x \geq a\}$ (evento)

$$\begin{aligned} F_X(x|A) &= F_X(x|X \geq a) \\ &= \Pr\{X \leq x | X \geq a\} \end{aligned}$$

(a) $x < a$

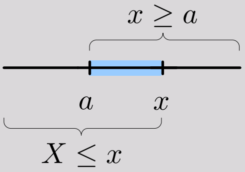


$$\Rightarrow F_X(x|x \geq a) = 0$$

Variáveis aleatórias

Distribuições e densidades condicionais - cont.

(a) $x \geq a$



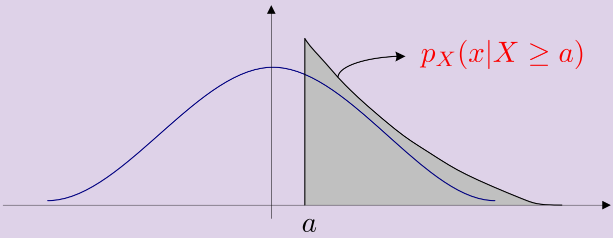
$$F_X(x|x \geq a) = \frac{\Pr\{X \leq x, X \geq a\}}{\Pr\{X \geq a\}} = \frac{\int_a^x p_X(\alpha)\ d\alpha}{\int_a^\infty p_X(\beta)\ d\beta}$$

$$= \frac{F_X(x) - F_X(a)}{1 - F_X(a)}$$

$$p_X(x|X \geq a) = \frac{d}{dx} F_X(x|X \geq a) = \frac{\frac{d}{dx} F_X(x)}{1 - F_X(a)} = \frac{p_X(x)}{1 - F_X(a)}$$

Resumindo

$$p_X(x|X \geq a) = \frac{p_X(x)}{\int\limits_0^{\infty} p_X(\beta)\ d\beta} U(x-a)$$



Observações

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x|X \geq a)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_X(x)}{\int_a^{\infty} p_X(\beta)\ d\beta} \right] \cdot U(x-a)\ dx$$
$$= \frac{\int_a^{\infty} p_X(x)\ dx}{\int_a^{\infty} p_X(\beta)\ d\beta} = 1$$

Observações - cont.

2. $\mathbb{E}\{X|A\} = ?$

$$A = \{X \geq a\}$$

$$\mathbb{E}\{X|X \geq a\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x|X \geq a)\ dx$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} \frac{x p_X(x)}{\int_a^{\infty} p_X(\beta)\ d\beta} \cdot U(x-a)\ dx$$

$$\boxed{\mathbb{E}\{X|X \geq a\} = \frac{\int_a^{\infty} x \cdot p_X(x)\ dx}{\int_a^{\infty} p_X(\beta)\ d\beta}}$$

Observações - cont.

3. Caso em que $A = \{X = a\}$

$$F_X(x|X=a) = \frac{\Pr\{X \leq x, X = a\}}{\underbrace{\Pr\{X = a\}}_{\text{v.a. contínua}\Rightarrow \Pr\{X=a\}=0}}$$

Relaxando "um pouco" $X = a$ para

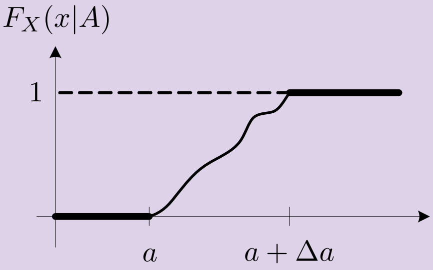
$$a \leq X \leq a + \Delta a, \quad \Delta a \to 0 \qquad \text{(depois)}$$

$$F_X(x|A) = F_X(x|a \leq X \leq a + \Delta a) = \frac{\Pr\{X \leq x, a \leq X \leq a + \Delta a\}}{\Pr\{a \leq X \leq a + \Delta a\}}$$

Observações - cont.

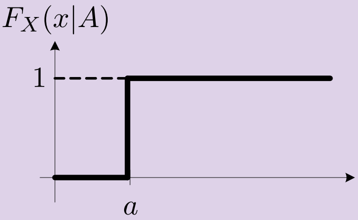
Temos 3 situações

- $X < a \Rightarrow F_X(x|A) = 0$
- $a \leq X \leq a + \Delta a \Rightarrow F_X(x|A) = \frac{\Pr\{a \leq X \leq x\}}{\Pr\{a \leq X \leq a + \Delta a\}}$
- $X > a + \Delta a \Rightarrow F_X(x|A) = 1$



Observações - cont.

Fazendo $\Delta \to 0$:



$$F_X(x|A) = \underbrace{U(x-a)}_{\text{função degrau unitário}}$$

$$\Rightarrow F_X(x|X=a) = U(x-a)$$

$$\boxed{p_X(x|X=a) = \frac{d}{dx}F_X(x|X=a) = \delta(x-a)}$$

Função densidade condicional de duas variáveis aleatórias

$$p_Y(y|x) = ?$$

$$F_Y(y|x \leq X \leq x + \Delta x) = \frac{\Pr\{Y \leq y, x \leq X \leq x + \Delta x\}}{\Pr\{x \leq X \leq x + \Delta x\}}$$

Ainda

$$\begin{aligned}
\Pr\{Y \leq y, x \leq X \leq x + \Delta x\} &= \int_{-\infty}^{y} \int_{x}^{x+\Delta x} p_{X,Y}(\alpha, \beta)\ d\alpha d\beta \\
&\cong p_{X,Y}(x, \beta)\Delta x \quad \text{método de Euler} \\
&= \int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x, \beta)\ d\beta \cdot \Delta x
\end{aligned}$$

Função densidade condicional de duas variáveis aleatórias - cont.

$$\Pr\{x \leq X \leq x + \Delta x\} = \int_{x}^{x+\Delta x} p_X(\gamma)\ d\gamma \cong p_X(x) \cdot \Delta x$$

$$F_Y(y|x) \cong \frac{\int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x,\beta)\ d\beta \cdot \Delta x}{p_X(x) \cdot \Delta x} = \frac{\int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x,\beta\ d\beta}{p_X(x)}$$

$$p_Y(y|x) = \frac{dF_Y(y|x)}{dy} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$$

Se X e Y forem independentes

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= p_X(x) \cdot p_Y(y) \\ \Rightarrow p_Y(y|x) &= p_Y(y) \end{aligned} \tag{18}$$

- $p_{X|Y}(x|y) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $p_{Y|X}(y|x) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$
- $p_{Y|X}(y|x) = \dfrac{p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)}{p_X(x)}$

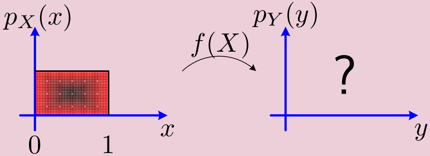
Função de uma variável aleatória

Dada $X \sim$ v.a. e uma função

$$Y = f(X)$$

a questão é como determinar $p_Y(y)$ conhecendo-se $p_X(x)$.
Por exemplo, seja X uma v.a. uniforme em $[0, 1]$

$$Y = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{X}\right)$$



Vamos analisar dois casos

1o. caso

$$X \sim \text{v.a.} \quad p_X(x) \text{conhecido}$$

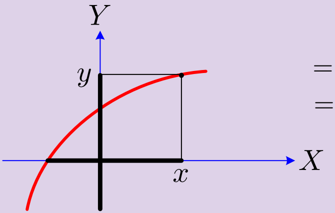
$$\begin{cases} y = f(x) \\ \frac{df(x)}{dx} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ é monotônico crescente} \end{cases}$$

$$\rightarrow f \text{ é biunívoca} [p_Y(y), F_Y(y)]$$

$$f_y(Y) = \Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{f(X) \leq Y\}$$

Como

$$\frac{df(x)}{dx} > 0 \Rightarrow$$



$$= \Pr\{X \leq f^{-1}(y)\}$$
$$= F_X\left[f^{-1}(y)\right]$$

1o. caso - cont.

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X\left[f^{-1}(y)\right]}{dy}$$

$$= \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p_X(x)\ dx$$

$$= p_X\left[f^{-1}(y)\right] \cdot \frac{df^{-1}(y)}{dy}$$

Mas: $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$ Logo,

$$\boxed{p_Y(y) = p_X(x) \cdot \left.\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}\right|_{x=f^{-1}(y)} \qquad \text{para } \frac{df(x)}{dx} > 0}$$

2o. caso

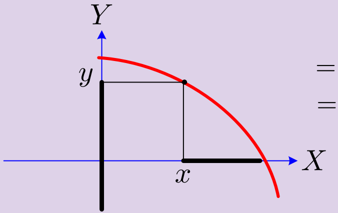
$$X \sim \text{v.a.} \quad p_X(x)\text{conhecido}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ \frac{df(x)}{dx} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ é monotônico decrescente} \end{cases}$$

$$\rightarrow f \text{ é biunívoca}[p_Y(y), F_Y(y)]$$

$$F_Y(y) = \Pr\{Y \leq y\}$$

$$F_Y(y) = \Pr\{f(X) \leq y\}$$



$$= \Pr\{X > f^{-1}(y)\}$$
$$= 1 - F_X\left[f^{-1}(y)\right]$$

2o. caso - cont.

$$p_Y(y) = \frac{F_Y(y)}{dy} = \left.\frac{-p_X(x)}{\frac{df(x)}{dx}}\right|_{x=f^{-1}(y)} \quad \text{com} \frac{df(x)}{dx} < 0$$

$$= \frac{p_X(x)}{\frac{df(x)}{dx}}$$

O sinal desaparece pois $\frac{df(x)}{dx}$ também é negativo.

Resumindo, para funções de uma variável aleatória temos:

Para encontrar $p_Y(y)$

$$\boxed{p_Y(y) = \left.\frac{p_X(x)}{\left|\frac{df(x)}{dx}\right|}\right|_{x=f^{-1}(y)}} \tag{19}$$

Problema

$$X \sim \text{v.a.} \qquad Y \sim \text{v.a.}$$

$$\begin{cases} U = f(X,Y) \\ V = g(X,Y) \end{cases}$$

Conhecido $p_{X,Y}(x,y)$, como achar $p_{U,V}(u,v)$?

$p_{U,V}(u,v)$

Em regiões biunívocas:

$$\boxed{p_{U,V}(u,v) = \left.\frac{p_{X,Y}(x,y)}{\left|J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right|}\right|_{\substack{x=\mathfrak{f}(u,v)\\ y=\mathfrak{g}(u,v)}}} \tag{20}$$

em que $\mathfrak{f}(\cdot)$ e $\mathfrak{g}(\cdot)$ são funções inversas. E

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \det\begin{bmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} \frac{d\mathfrak{f}}{du} & \frac{d\mathfrak{f}}{dv} \\ \frac{d\mathfrak{g}}{du} & \frac{d\mathfrak{g}}{dv} \end{bmatrix}}$$

é chamado *Jacobiano de* u, v *em relação a* x, y

Caso particular

$$Z = X + Y, \qquad X \sim \text{v.a.}, Y \sim \text{v.a.}$$

$$p_{X,Y}(x,y) \text{ conhecido}$$

$$p_X(z) = ?$$

Definir então

$$\begin{cases} z = x + y \\ w = x \end{cases} \Rightarrow p_{Z,W}(z,w)$$

$$J\left(\frac{z,w}{x,y}\right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Logo,

$$p_{Z,W}(z,w) = \left.\frac{p_{X,Y}(x,y)}{|-1|}\right|_{\substack{x = \mathfrak{f}(z,w) \\ y = \mathfrak{g}(z,w)}}$$

Caso particular - cont.

$$x = w, \qquad y = z - w$$

$$p_{Z,W}(z, w) = p_{X,Y}(w, z - w)$$

Então, para achar a densidade marginal $p_Z(z)$, temos

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(w, z - w)\ dw$$

Caso particular - cont.

Se supormos que X e Y são independentes

$$p_{X,Y}(w, z-w) = p_X(w) \cdot p_Y(z-w)$$
$$\Rightarrow p_{Z,W}(z,w) = p_X(w) \cdot p_Y(z-w)$$

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Z,W}(z,w)\ dw = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(w) \cdot p_Y(z-w)\ dw}_{\text{convolução}}$$

Assim:

$$\boxed{p_Z(z) = p_x(x) \star p_Y(y)} \tag{21}$$