Redes Neurais de Uma Camada

Prof. Dr. Ajalmar Rocha

Disciplina: Inteligência Computacional Aplicada (ICA)
Programa de Pós-Graduação em Eng. de Telecomunicações (PPGET)
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Agosto/2013

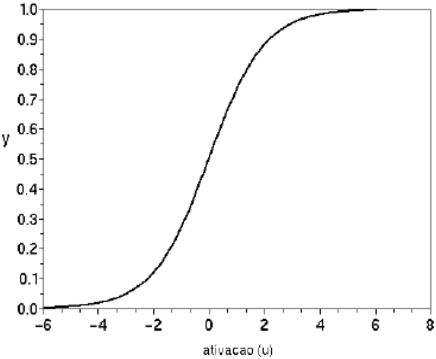
Outras funções para Cálculo da Saída do Neurônio

- Há outras funções relevantes - além da degrau ($y = sinal(u)$) e linear - para cálculo da variável de saída do neurônio .
- Duas das mais importantes são do tipo **Sigmóide**.
  (i) Logística
  $$y = \frac{1}{1 + exp(-u)} \tag{1}$$
  (ii) Tangente Hiperbólica
  $$y = \frac{1 - exp(-u)}{1 + exp(-u)} \tag{2}$$
- Estas funções tem características especias importantes: (i) são diferenciáveis e (ii) possuem trechos centrais praticamente linear.

Função Sigmóide Logística

$$y_i(t) = \frac{1}{1+\exp(-u_i(t))}$$

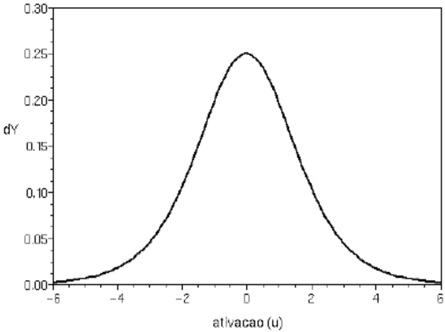
$$y_i(t) \in (0,1)$$



Derivada da Função Sigmóide Logística

$$y_i'(t) = \frac{d\,y_i(t)}{d\,u_i(t)}$$

$$y_i'(t) = y_i(t)[1 - y_i(t)]$$



Derivada da Função Logística

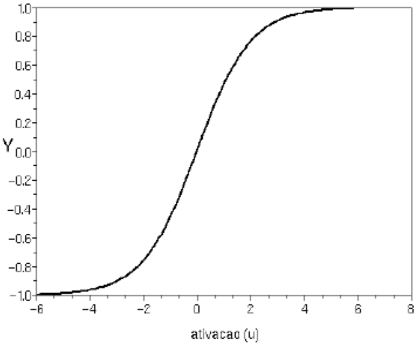
Sabendo que $y(u) = \frac{1}{(1+e^{-u})}$, como obter a derivada $y^{'}(u)$?

$$
\begin{aligned}
\frac{dy(u)}{du} &= \frac{d\left\{\frac{1}{(1+e^{-u})}\right\}}{du} \\
y^{'}(u) &= \frac{d\left\{(1+e^{-u})^{-1}\right\}}{du} \\
y^{'}(u) &= -(1+e^{-u})^{-2}(-e^{-u}) \\
y^{'}(u) &= \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^{2}} \\
y^{'}(u) &= \frac{1}{(1+e^{-u})}.\frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})} \\
y^{'}(u) &= \frac{1}{(1+e^{-u})}.\frac{\left[(1+e^{-u})-1\right]}{(1+e^{-u})} \\
y^{'}(u) &= \frac{1}{(1+e^{-u})}.\left[1-\frac{1}{(1+e^{-u})}\right] \\
y^{'}(u) &= y(u).\left[1-y(u)\right]
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Função Sigmóide Tangente Hiperbólica

$$y_i(t) = \frac{1 - \exp(-u_i(t))}{1 + \exp(-u_i(t))}$$

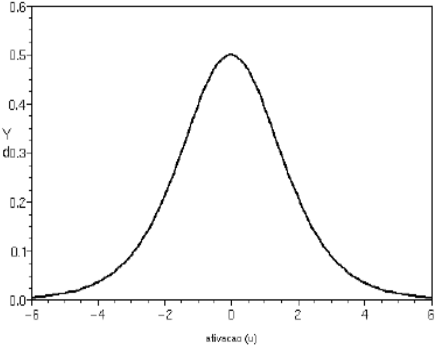
$$y_i(t) \in (-1, 1)$$



Derivada da Função Sigmóide Tangente Hiperbólica

$$y_i'(t) = \frac{d\,y_i(t)}{d\,u_i(t)}$$

$$y_i'(t) = 0{,}5\left[1 - y_i^2(t)\right]$$



Derivada da Função Tangente Hiperbólica

Sabendo que $y(u) = \frac{(1-e^{-u})}{(1+e^{-u})} = \frac{k}{v}$, em que $k = 1 - e^{-u}$, $v = 1 - e^{-u}$, $k^{'} = e^{-u}$, $v^{'} = -e^{-u}$. Como se obtem a derivada $y^{'}(u)$?

$$
\begin{aligned}
\frac{dy(u)}{du} &= \frac{k^{'}v - kv^{'}}{v^2} && \\
y^{'}(u) &= \frac{e^{-u}(1+e^{-u}) - (1+e^{-u})(-e^{-u})}{(1+e^{-u})^2} && \\
y^{'}(u) &= \frac{e^{-u} + e^{-2u} + (e^{-u} - e^{-2u})}{(1+e^{-u})^2} && \\
y^{'}(u) &= \frac{2e^{-u}}{(1+e^{-u})^2}.\frac{2}{2} &&= \frac{4e^{-u}}{2(1+e^{-u})^2} \\
y^{'}(u) &= \frac{(1+e^{-u})^2 - (1-e^{-u})^2}{2(1+e^{-u})^2} && \\
y^{'}(u) &= \frac{1}{2}\frac{(1+e^{-u})^2}{(1+e^{-u})^2} - \frac{1}{2}\frac{(1-e^{-u})^2}{(1+e^{-u})^2} &&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(1-e^{-u})^2}{(1+e^{-u})^2} \\
y^{'}(u) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y(u)^2 &&= \frac{1}{2}(1 - y(u)^2)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Revisitando o problema de otimização

Minimização da Função Custo

- Considerando o erro quadrático como critério de desempenho, a partir de um valor inicial para o vetor de pesos, objetiva-se que o vetor de pesos se aproxime gradativamente do mínimo global.
- No entanto, busca-se atingir o mínimo da superfície J resultante, a saber:

$$J = \frac{1}{2}e^2$$

$$J = \frac{1}{2}(d_i - y(u))^2 \tag{5}$$

Minimização da Função Custo

- Com o intuito de minimizar a função custo

$$J = \frac{1}{2}(d_i - y(u))^2$$

é necessário que seja obtido a direção do ajuste a ser aplicado no vetor de pesos para aproximar a solução do mínimo de J.

- Para tal, usa-se o gradiente da função custo J no ponto $\mathbf{w}(t)$.
- Sabe-se que o gradiente possui a mesma direção da maior variação do erro (aponta na direção de crescimento da função), portanto o ajuste deve ocorrer na direção contrária ao gradiente. Logo, a varação dos pesos pode ser descrita por:

$$\Delta \mathbf{w}(t) \propto -\nabla J. \tag{6}$$

Gradiente da Função Custo

Consideração

Sabe-se que a função custo J depende de e, bem como sabe-se que e depende de y, e ainda sabe-se que y depende de $\mathbf{w}$.

- Cada componente do gradiente da função custo ∇J pode ser obtida com base na regra da cadeia, a saber:

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = \frac{\partial J}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w_i} \tag{7}$$

- Sabendo ainda que

$$\tfrac{\partial J}{\partial e} = e, \qquad \tfrac{\partial e}{\partial y} = -1, \qquad \tfrac{\partial y}{\partial u} = y' \quad \text{e} \quad \tfrac{\partial u}{\partial w_i} = x_i,$$

Gradiente da Função Custo

- A i-ésima componente do gradiente da função custo $\frac{\partial J}{\partial w_i}$ considerando que $\frac{\partial J}{\partial e} = e$, $\frac{\partial e}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial y}{\partial u} = y'$ e $\frac{\partial u}{\partial w_i} = x_i$ é igual a

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = -x_i y' e \tag{8}$$

em que

$$y' = y(1-y), \qquad \textbf{para a função logística}$$
$$y' = \frac{1}{2}(1-y^2), \qquad \textbf{para a função tangente hiperbólica}$$

Regra de Aprendizagem

- A regra de aprendizagem pode então ser obtida como segue.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{w} &= \mathbf{w}(t+1) - \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{w}(t+1) &= \mathbf{w}(t) + \Delta \mathbf{w} \end{aligned} \tag{9}$$

- Considerando que $\Delta \mathbf{w}(t) \propto -\nabla J$, pode se escrever

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{w} &= \mathbf{w}(t+1) - \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{w}(t+1) &= \mathbf{w}(t) + \Delta \mathbf{w} \\ \mathbf{w}(t+1) &= \mathbf{w}(t) - \eta \nabla J \end{aligned} \tag{10}$$

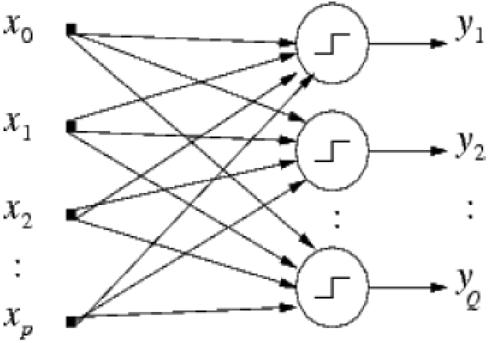
- Além disto, sabendo que $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}} = -\mathbf{x}e$ temos que

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \eta e(t) y'(t) \mathbf{x}(t) \tag{11}$$

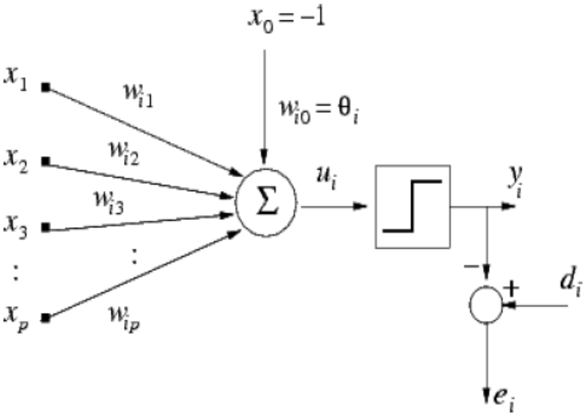
Rede Perceptron

- Com apenas um neurônio podemos classificar apenas $C = 2$ classes, $c_1 = 0, c_2 = 1\}$.
- Como visto, o Perceptron é bastante adequado para um problema binário linearmente separável.
- Problemas multiclasses com $C > 2$ exige a utilização de mais de um neurônio em paralelo.
- A utilização deste neurônios em paralelo recebendo simultaneamente os mesmos valores de entrada caracterizam uma camada de uma rede.

Rede Perceptron



Perceptron para o *i*-ésimo Neurônio



Codificação 1-out-of-C

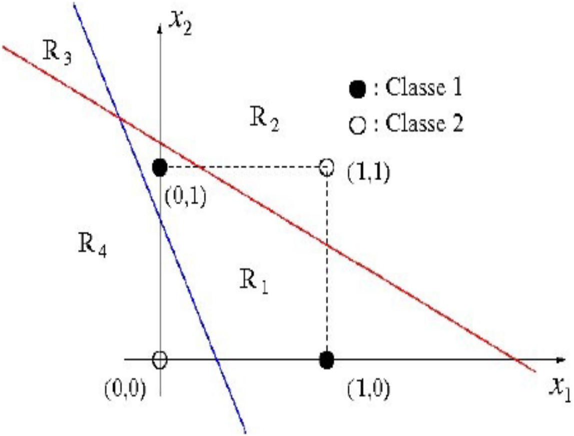
- Nesse método o número de neurônios é igual ao número de classes C.
- Exemplo: problema com duas classes 2 neurônios, com 3 classes 3 neurônios, etc.

Classe 1: $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Classe 2: $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Classe 3: $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Variável de Ativação e Saída para Rede Perceptron

- A i-ésima variável de ativação pode, portanto, ser calculada por
$$u_i = x_0 w_{i0} + x_1 w_{i1} + x_2 w_{i2}. \quad (12)$$
- Enquanto a i-ésima variável de saída pode ser calculada por
$$y_i = \phi(u_i) \quad (13)$$
- Assim, a saída para a camada é
$$[y_1 \ldots y_2 \ldots y_C] \quad (14)$$

Perceptron para o *i*-ésimo Neurônio



Obrigado