Universidade Federal do Ceará (UFC)
Departamento de Engenharia de Teleinformática
TI0048 - Modelos Probabilísticos em Engenharia de Teleinformática

Prof. Responsável: Dr. Guilherme de Alencar Barreto

Tutorial: Simulação e Estimação de Parâmetros de um Processo AR(1)
Data: 13/11/2014

OBJETIVO: O objetivo deste tutorial é apresentar ao aluno alguns comandos básicos para geração (simulação) e estimação dos parâmetros de um processo autorregressivo de ordem 1 - AR(1)no Matlab/Octave. Para isso, iremos apresentar as seqüências de comandos e etapas necessárias para simular e estimar os parâmetros associados ao modelo de um processo AR(1).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Vimos em sala de aula e documentamos no material de apoio (slides) que um processo AR(1) possui as seguintes características:

(*i*) Modelo Matemático:

$$x(t)=a_0+a_1 x(t-1)+\varepsilon(t) \tag{1}$$

em que $a_0 \in \mathbb{R}$ e $|a_1| < 1$. Além disso, a variável aleatória $\varepsilon(t)$ é gaussiana, de média nula e variância σ_ε^2 e não possui correlação serial. Resumidamente, temos que

$$\varepsilon(t) \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2) \quad \text{e} \quad R_\varepsilon(\tau)=\begin{cases}\sigma_\varepsilon^2, & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases} \tag{2}$$

(*ii*) Média Teórica:

$$\mu_x=\frac{a_0}{1-a_1} \tag{3}$$

(*iii*) Variância Teórica:

$$\sigma_x^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-a_1^2} \tag{4}$$

(iv) FAC teórica

$$R_x(\tau)=\sigma_x^2 a_1^{|\tau|}=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-a_1^2}a_1^{|\tau|}, \quad \tau=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \tag{5}$$

SIMULAÇÃO DE UM PROCESSO AR(1)

Passo 1: Definir valores adequados para a_0 e a_1. Definir também a variância do ruído $\varepsilon(t)$.

```
>> a0=2; a1=0.8;
>> s2e=0.1;
```

Passo 2: Definir o número de amostras a serem simuladas e a condição inicial.

```
>> N=5500;        % No. De pontos a amostras a serem geradas
>> x=randn;        % Condição inicial
```

Passo 3: Simular o processo AR(1) por N iterações.

```
>> for t=2:N, …
x(t)=a0+a1*x(t-1)+sqrt(s2e)*randn; …
end
```

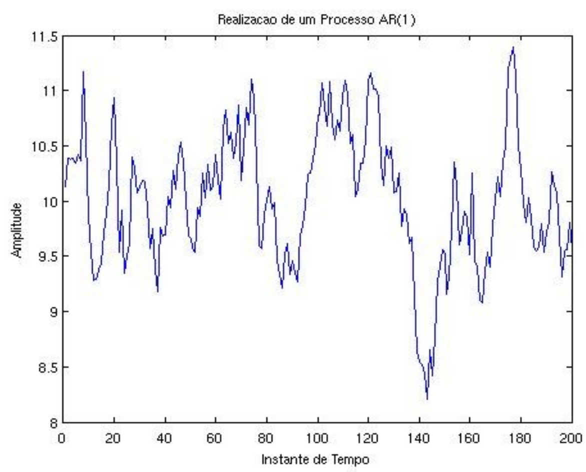
Observação 1: Os três pontinhos ao final da linha de comando permite a digitação de subrotinas em várias linhas de comandos.

Passo 4: Desprezar as primeiras amostras geradas devido à influência da condição inicial.

```
>> x=x(501:end);
```

Passo 5: Visualizar as primeiras amostras do sinal gerado.

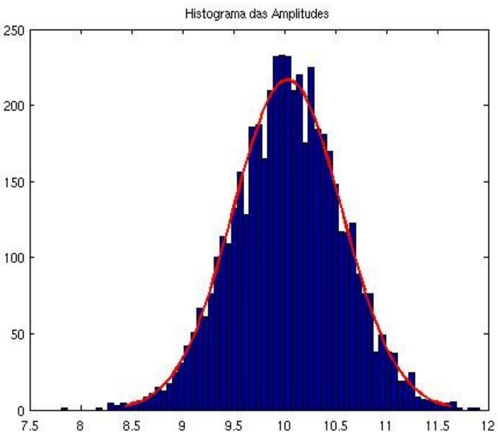
```
>> figure; plot(x(1:200));
>> xlabel('Instante de Tempo')
>> ylabel('Amplitude');
>> title('Realizacao de um Processo AR(1)')
```



Observação 1: Note que o gráfico gerado anteriormente “imita” um sinal analógico, ou seja, de tempo contínuo, porque o comando `PLOT` conecta as amplitudes sequencialmente. Para visualizar o sinal de tempo discreto corretamente, devemos usar o comando `STEM`.

Passo 6: Visualizar o histograma das amplitudes do sinal gerado.

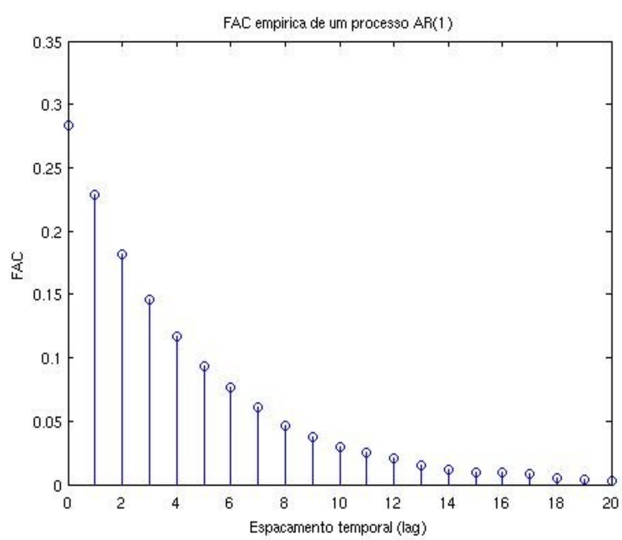
```
>> figure; histfit(x);
>> title('Histograma das Amplitudes')
```



Observação 2: Percebe-se que as amplitudes de $x(t)$ parecem seguir uma distribuição normal. Isso era esperado? Por quê?

Passo 7: Visualizar a função de autocorrelação do sinal gerado.

```
>> LAGmax=20;   % Valor maximo para os atrasos (lag)
>> fac=xcov(x,LAGmax,'unbiased');
>> figure; stem(0:LAGmax,fac(LAGmax+1:end))
>> xlabel('Espacamento temporal (lag)')
>> ylabel('FAC'); title('FAC empirica de um processo AR(1)')
```



Observação 3: Note o decaimento exponencial da FAC do processo AR(1). Este comportamento é típico de processos estocásticos estacionários.

Passo 9: Estimar os parâmetros a_0 e a_1, bem como a variância do ruído σ_ε^2 a partir do sinal gerado. Este método é chamado de “estimação pelo método dos momentos”.

Primeiramente, sabemos a partir da Eq. (5) que $R_x(1)=\sigma_x^2 a_1$. Logo, o parâmetro a_1 pode ser estimado por meio da seguinte expressão:

$$\hat{a}_1=\frac{\hat{R}_x(1)}{\hat{\sigma}_x^2} \tag{6}$$

Observação 4: O símbolo (^) indica um valor empírico, ou seja, calculado a partir dos dados.

Assim, utilizamos os seguintes comandos:

```
>> s2xh=var(x); % Calculo da variancia de x(t)
>> a1h=fac(LAGmax+2)/s2x  % Note que fac(LAGmax+1)=Rx(0)

a1h = 0.8065
```

Para determinar uma estimativa do parâmetro a_0 iremos usar a Eq. (3). Daí, deduzimos a seguinte expressão:

$$\hat{a}_0=\bar{x}(1-\hat{a}_1) \tag{6}$$

em que $\bar{x}$ é a média das amplitudes de $x(t)$. Para o cálculo, utilizamos os seguintes comandos:

```
>> xmed=mean(x); % Calculo da media de x(t)
>> a0h=xmed*(1-a1h)

a0h = 1.9411
```

Finalmente, para ter uma estmiativa da variância do ruído usamos a Eq. (4), de onde tiramos a seguinte expressão:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=\hat{\sigma}_x^2(1-\hat{a}_1^2) \tag{7}$$

o que leva ao seguinte comando:

```
>> s2eh=s2x*(1-a1h*a1h)

s2eh = 0.0990
```

Observação 5: Compare os valores empíricos de a_0, a_1 e σ_ε^2 com os valores teóricos definidos no Passo 1. Podemos notar que são bem próximos.