Calculando a Energia de Sinais Senoidais

Leonardo Santos Barbosa
leonardosantos.inf@gmail.com

27 de janeiro de 2015

1 Introdução

A ideia do presente texto é complementar nosso texto anterior [1] cuja intenção principal foi a de mostrar como se calcula a energia de um sinal conhecido e, além disso, de que maneira se pode usar o MATLAB™para realizar esta tarefa. Aqui vamos mostrar de forma sucinta (para alguns nem tanto assim) como podemos proceder para calcular a energia de sinais que envolvem senóides tais como $x(t) = C\cos(\omega t + \theta)$. Mais uma vez, o intuito é mostrar, por meio de exemplos, como proceder nestes casos, se possível antecipando dúvidas e forncendo caminhos para a solução.

2 A Energia de uma Senóide

Consideremos uma senóide dada por $x(t) = C\cos(\omega t + \theta)$, com $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$. Vale lembrar que o período[1] T desta senóide é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$, que θ é sua fase e C sua amplitude. Pela definição de energia apresentada em [2], teremos, para a energia E_x do sinal, a seguinte expressão:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} [C\cos(\omega t + \theta)]^2 dt$$

Como a função só existe em um período teremos:

$$E_x = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} C^2 \cdot \cos^2(\omega t + \theta) dt \Rightarrow E_x = C^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t + \theta) dt$$

Já que C^2 é uma constante real. Lembrando da trigonometria que:

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

E que:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

[1]É claro que esta senónde só possui uma única oscilação. No entanto, mais adiante comentaremos o efeito que um sinal que oscila infinitamente causa no cálculo da energia.

Podemos escrever $\cos^2\theta$ como:

$$\cos^2\theta = \cos(2\theta) + (1 - \cos^2\theta)$$

O que nos dá:

$$\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}$$

Voltando, então, à nossa integral da energia e substituindo o resultado encontrado, temos:

$$E_x = C^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t + \theta)dt \Rightarrow E_x = C^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\cos[2(\omega t + \theta)]}{2} + \frac{1}{2}dt$$

Podemos então escrever:

$$E_x = C^2 \left\{ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\cos(2\omega t + 2\theta)}{2} dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} dt \right\}$$

Usando as propriedades da operação de integração, podemos ainda separá-las:

$$E_x = \frac{C^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(2\omega t + 2\theta)dt + \frac{C^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt$$

Prosseguindo[2]:

$$E_x = \frac{C^2}{2} \cdot \left. \frac{\text{sen}(2\omega t + 2\theta)}{2\omega} \right|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \frac{C^2}{2} \cdot t \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

Então:

$$E_x = \frac{C^2 \,\text{sen}(2\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} + 2\theta)}{4\omega} - \frac{C^2 \,\text{sen}(2\omega \cdot 0 + 2\theta)}{4\omega} + \left(\frac{2\pi C^2}{2\omega} - 0 \right)$$

$$E_x = \frac{C^2 \,\text{sen}(4\pi + 2\theta)}{4\omega} - \frac{C^2 \,\text{sen}\, 2\theta}{4\omega} + \frac{2\pi C^2}{2\omega} - 0$$

Mas $\text{sen}\, 2\theta = \text{sen}(4\pi + 2\theta)$, logo:

$$E_x = \frac{\pi C^2}{\omega} = \mathrm{TC}^2/2$$

Esta é a energia para um sinal em forma de senóide $x(t) = C\cos(\omega t + \theta)$, com $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$. Mas o que ocorreria se $-\infty \leq t \leq +\infty$? Ora, neste caso, a energia seria infinita, pois com exceção dos limites de integração, tudo seria exatamente igual até aqui, veja:

$$E_x = \frac{C^2}{2} \cdot \left. \frac{\text{sen}(2\omega t + 2\theta)}{2\omega} \right|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{C^2}{2} \cdot t \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

[2] Lembre-se que $\int \cos ax dx = \frac{\text{sen}\, ax}{a} + C$.

Sabemos que $-1 \leq \text{sen}(2\omega t + 2\theta) \leq 1$, logo a segunda parcela que tende ao infinito fará com que a energia vá para o infinito. Assim, nestes casos, usamos a energia média, cuja definição aparece em [2] e chamamos de potência:

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [x(t)]^2 dt$$

Em que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ representa o período. Assim, temos então, para o sinal considerado inicialmente:

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \cdot E_x \Rightarrow P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \cdot \frac{\pi C^2}{\omega} \Rightarrow P_x = \frac{C^2}{2}$$

Que é o mesmo resultado encontrado em [2]. Como já sabemos que, para sinais periódicos "infinitos" basta calcular a potência (ou energia média) em apenas um período, a partir de agora calcularemos apenas sinais em um período, isto é, $-\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2}$, sendo T o período da senóide considerada. Na seção seguinte veremos como proceder com uma soma de senóides.

3 Somando Senóides

Para esta seção, vamos calcular a potência de um sinal que é uma soma de duas senóides, ou seja $x(t)$ é dado por:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

Para simplificar, faremos $\alpha_n = \omega_n t + \theta_n$, então:

$$[x(t)]^2 = (C_1 \cos \alpha_1 + C_2 \cos \alpha_2)^2$$

Daí:

$$[x(t)]^2 = C_1^2 \cos^2 \alpha_1 + 2C_1C_2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + C_2^2 \cos^2 \alpha_2$$

Assim a potência fica:

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (C_1^2 \cos^2 \alpha_1 + 2C_1C_2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + C_2^2 \cos^2 \alpha_2) dt$$

Já sabemos que para um um único sinal senoidal a energia fica:

$$E_x = \frac{C^2}{2} \cdot \frac{\text{sen}(2\omega t + \theta)}{2\omega} \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{C^2}{2} \cdot t \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

Então:

$$E_x = \frac{C^2}{4\omega} \cdot [\text{sen}(\omega T + \theta) - \text{sen}(\omega(-T) + \theta)] + \frac{C^2 \cdot T}{2} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{-T}{2} \right)$$

Daí:

$$E_x = \frac{C^2}{4\omega} \cdot [\operatorname{sen}(\omega T + \theta) - \operatorname{sen}(-\omega T + \theta)] + \frac{C^2 \cdot T}{2}$$

A partir desta equação podemos calcular a potência:

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \left(E_{1_x} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2C_1 C_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 dt + E_{2_x} \right)$$

Logo:

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{E_{1_x}}{T} + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2C_1 C_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 dt + \frac{E_{2_x}}{T} \right)$$

Como a senóide é limitada temos que:

$$\frac{1}{T} \cdot \left\{ \frac{C^2}{4\omega} \cdot [\operatorname{sen}(\omega T + \theta) - \operatorname{sen}(-\omega T + \theta)] \right\} \to 0 \quad \text{quando} \quad T \to +\infty$$

Sobrando apenas a parcela $\frac{C^2}{2}$. Logo:

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{C_1^2}{2} + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2C_1 C_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 dt + \frac{C_2^2}{2} \right)$$

Usando trigonometria sabemos que:

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

Logo:

$$2\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

E portanto:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2C_1 C_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 dt = C_1 C_2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) dt$$

Como:

$$\alpha_1 = \omega_1 t + \theta_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \omega_2 t + \theta_2$$

Temos:

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 = (\omega_1 \pm \omega_2)t + (\theta_1 \pm \theta_2)$$

Consequentemente a integral mostrada anteriormente (que chamaremos de I) vale:

$$I = C_1 C_2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)] dt$$

Primeiro vamos analisar o caso em que $\omega_1 \neq \omega_2$. Como resultado teremos:

$$I = C_1C_2 \left\{ \frac{\text{sen}[(\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)]}{\omega_1 + \omega_2} \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{\text{sen}[(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)]}{\omega_1 - \omega_2} \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right\}$$

Se $\omega_1 \neq \omega_2$, as duas senóides mostradas tenderão à zero[3] quando divididas por T com $T \to +\infty$, isto é, $\frac{I}{T} \to 0$ quando $T \to +\infty$. E ficaremos então com:

$$P_x = \frac{C_1^2 + C_2^2}{2}$$

E com $\omega_1 = \omega_2 = \omega$? Bom, neste caso podemos simplificar a integral I para:

$$I = C_1C_2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos[2\omega t + (\theta_1 + \theta_2)] + \cos(\theta_1 - \theta_2) dt$$

E portanto:

$$I = C_1C_2 \left\{ \frac{\text{sen}[2\omega t + (\theta_1 + \theta_2)]}{2\omega} \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \cos(\theta_1 - \theta_2)t \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right\}$$

E como resultado final:

$$P_x = \frac{C_1^2 + C_2^2}{2} + C_1C_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Este é o resultado que aparece em [2]. Na mesma referência mostra-se que para n senóides com frequências distintas, tem-se:

$$P_x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

A seguir, veremos como tratar um sinal dado por um produto de senóides.

4 Multiplicando Senóides

Vamos agora ver o caso em que temos uma senóide modulada por outra senóide, isto é um sinal do tipo:

$$x(t) = C\cos(\omega_1 t + \theta_1) \cdot \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

Como já vimos este é um sinal de potência, uma vez que a energia é infinita[4]. Portanto, a potencia deste sinal será:

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t)]^2 dt$$

[3] Lembre-se que $-1 \leq \text{sen}\, t \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Já vimos isso no cálculo da potência de uma única senóide.

[4] Conforme [2], dizemos que um sinal é de energia, quando a energia é finita e não nula, por sua vez a potência será nula.

Mas, como também já vimos, podemos reescrever o produto de senóides como:

$$x(t) = \frac{C}{2} \{\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)]\}$$

Fazendo $\alpha = (\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)$ e $\beta = (\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)$ teremos:

$$[x(t)]^2 = \frac{C^2}{4} (\cos\alpha + \cos\beta)^2$$

Ou seja, queremos calcular:

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{C^2}{4} (\cos\alpha + \cos\beta)^2 \, dt$$

Felizmente, já fizemos esta análise na seção 3 anterior, mas agora temos $C_1 = C_2 = \frac{C}{2}$, logo para frequências de oscilação distintas, isto é:

$$\omega_1 + \omega_2 \neq \omega_1 - \omega_2 \Rightarrow \omega_2 \neq 0$$

Teremos a potência sendo:

$$P_x = \frac{C^2}{4}$$

Por outro lado, para frequências de oscilação iguais, ou seja:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_1 - \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 0$$

Lembrando que isto isto vale para qualquer ω_1, teríamos o resultado já previsto na seção 2 e, para a potência, teremos $P_x = \frac{C^2}{2} \cdot \cos^2\theta_2$, pois o sinal seria uma senóide em que a amplitude seria $C\cos\theta_2$. Mas, e se a senóide for modulada por uma exponencial? É o que veremos a seguir.

5 Senóide Modulada por uma Exponencial

Agora nossa missão é calcular a energia e/ou potência – se for o caso, como já vimos – de um sinal com o formato:

$$x(t) = C \cdot e^{kt} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

Como já calculamos, de forma até recorrente:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)]^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} C^2 e^{2kt} \cos^2(\omega t + \theta) dt$$

E mais uma vez:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} C^2 e^{2kt} \left[\frac{\cos(2\omega t + 2\theta)}{2} + \frac{1}{2} \right] dt$$

Podemos já escrever:

$$E_x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} C^2 e^{2kt}\cos(2\omega t + 2\theta)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} C^2 e^{2kt} dt$$

É claro que a segunda parcela faz a energia ser infinita, daí faremos $t \geq 0$ e consideraremos $k < 0$ para que $e^{2kt} \to 0$ quando $t \to +\infty$:

$$E_x = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} C^2 e^{2kt}\cos(2\omega t + 2\theta)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} C^2 e^{2kt} dt$$

A segunda parcela da energia fica:

$$E_x = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} C^2 e^{2kt}\cos(2\omega t + 2\theta)dt + \left.\frac{C^2 e^{2kt}}{4k}\right|_0^{+\infty}$$

$$E_x = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} C^2 e^{2kt}\cos(2\omega t + 2\theta)dt + 0 - \frac{C^2 \cdot 1}{4k}$$

Precisamos agora "cuidar" da primeira parcela, que será calculada usando o método de integração por partes. De acordo com [3], temos para duas funções f e g:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Façamos então as seguintes substituições:

$$f(t) = e^{2kt} \Rightarrow f'(t) = 2ke^{2kt}$$

E

$$g'(t) = \cos(2\omega t + 2\theta) \Rightarrow g(t) = \frac{\operatorname{sen}(2\omega t + 2\theta)}{2\omega}$$

Fazendo $\alpha = 2\omega t + 2\theta$, ficamos então com:

$$\int e^{2kt}\cos\alpha dt = \frac{e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha}{2\omega} - \int 2ke^{2kt}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\omega}dt$$

Desenvolvendo:

$$\int e^{2kt}\cos\alpha dt = \frac{e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha}{2\omega} - \frac{k}{\omega}\int e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha dt$$

A última parcela da expressão anterior também será integrada por partes, aplicamos então as substituições a seguir:

$$f(t) = e^{2kt} \Rightarrow f'(t) = 2ke^{2kt}$$

E

$$g'(t) = \operatorname{sen}(2\omega t + 2\theta) \Rightarrow g(t) = -\frac{\cos(2\omega t + 2\theta)}{2\omega}$$

Logo:

$$\int e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha dt = -\frac{e^{2kt}\cos\alpha}{2\omega} + \int 2ke^{2kt}\frac{\cos\alpha}{2\omega}dt$$

Desenvolvendo:

$$\int e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha dt = -\frac{e^{2kt}\cos\alpha}{2\omega} + \frac{k}{\omega}\int e^{2kt}\cos\alpha dt$$

Temos então o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \int e^{2kt}\cos\alpha dt = \frac{e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha}{2\omega} - \frac{k}{\omega}\int e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha dt \\ \int e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha dt = -\frac{e^{2kt}\cos\alpha}{2\omega} + \frac{k}{\omega}\int e^{2kt}\cos\alpha dt \end{cases}$$

E ainda, multiplicando a segunda equação por $-\frac{k}{\omega}$:

$$\begin{cases} \int e^{2kt}\cos\alpha dt = \frac{e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha}{2\omega} - \frac{k}{\omega}\int e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha dt \\ -\frac{k}{\omega}\int e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha dt = \frac{k}{\omega}\cdot\frac{e^{2kt}\cos\alpha}{2\omega} - \frac{k^2}{\omega^2}\int e^{2kt}\cos\alpha dt \end{cases}$$

Somando as duas equações, ficamos com:

$$\left(1+\frac{k^2}{\omega^2}\right)\int e^{2kt}\cos\alpha dt = \frac{e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha}{2\omega} + \frac{k}{\omega}\cdot\frac{e^{2kt}\cos\alpha}{2\omega}$$

Desenvolvendo:

$$\left(\frac{\omega^2+k^2}{\omega^2}\right)\int e^{2kt}\cos\alpha dt = \frac{e^{2kt}\operatorname{sen}\alpha}{2\omega} + \frac{ke^{2kt}\cos\alpha}{2\omega^2}$$

E finalmente[5]:

$$\int e^{2kt}\cos\alpha dt = \frac{e^{2kt}\omega\operatorname{sen}\alpha}{2(\omega^2+k^2)} + \frac{ke^{2kt}\cos\alpha}{2(\omega^2+k^2)}$$

Voltando então a expressão de E_x:

$$E_x = \frac{C^2}{2}\int_0^{+\infty} e^{2kt}\cos(2\omega t+2\theta)dt - \frac{C^2}{4k}$$

Temos:

$$E_x = \frac{C^2}{2}\left[\frac{e^{2kt}\omega\operatorname{sen}(2\omega t+2\theta)}{2(\omega^2+k^2)} + \frac{ke^{2kt}\cos(2\omega t+2\theta)}{2(\omega^2+k^2)}\right]\Bigg|_0^{+\infty} - \frac{C^2}{4k}$$

Lembrando que $e^{2kt}\to 0$, quando $t\to+\infty$, teremos:

$$E_x = \frac{C^2}{2}\left[-\frac{\omega\operatorname{sen}(2\theta)}{2(\omega^2+k^2)} - \frac{k\cos(2\theta)}{2(\omega^2+k^2)}\right] - \frac{C^2}{4k}$$

[5]Omitimos propositalmente os limites de integração. Rigorosamente o resultado da integral teria uma constante C_0 somada.

Que pode ser escrito como:

$$E_x = -\frac{C^2\omega\,\text{sen}(2\theta) + C^2 k\cos(2\theta)}{4(\omega^2+k^2)} - \frac{C^2}{4k}$$

Ou ainda:

$$E_x = -\frac{C^2}{4}\left[\frac{\omega\,\text{sen}(2\theta) + k\cos(2\theta)}{\omega^2+k^2} + \frac{1}{k}\right]$$

6 Conclusão

Neste texto procuramos mostrar como podemos calcular a energia ou a potência, em alguns casos, de sinais com formatos envolvendo senóides. Aqui demos um tratamos mais "manual" ao assunto, mas em textos posteriores trataremos deste tipo de sinal envolvendo sistemas como o MATLAB$^{\text{TM}}$para que se possa ter uma visão mais prática do assunto, em detrimento de uma visão mais teórica como a utilizada aqui.

Referências

[1] BARBOSA L. S. *Cálculo da Energia de um Sinal e um Exemplo Utlizando o MATLAB*. `www.cursomentor.com`, 10 de janeiro de 2015.

[2] LATHI B. P. Sinais e Sistemas. In: LATHI. **Sinais e Sistemas Lineares**. 2ª ed. Porto Alegre: BOOKMAN, 2007. Capítulo 1

[3] STEWART J. Técnicas de Integração. In: STEWART. **Cálculo Volume 1**. 5ª ed. São Paulo: PIONEIRA THOMSON LEARNING, 2006. Capítulo 7