Cálculo de Valor Eficaz (R.M.S.) de ondas alternadas

O valor eficaz ou R.M.S. (root mean square) é obtido pela seguinte expressão:

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [y(t)]^2 . dt} \quad \text{= srqt(potência média)} \qquad (1)$$

Para ondas alternadas, temos entre outras, as ondas senoidal, triangular e quadrada, iremos calcular o valor eficaz de cada uma dessas ondas.

1° Caso: Onda Senoidal

Uma onda senoidal tem a seguinte forma:

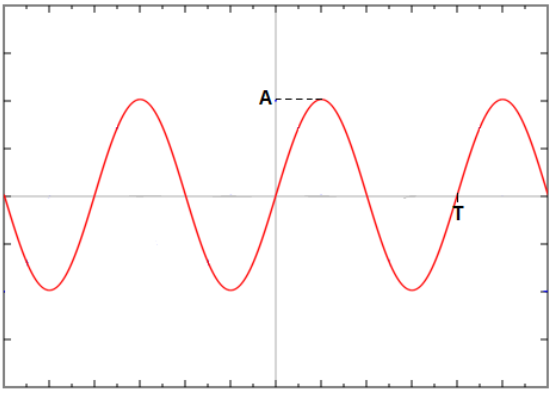

Fig.1 – Onda senoidal.

Onde *A* é a amplitude da onda e *T* é a posição onde a onda completa um período. Uma equação que simboliza uma onda do tipo senoidal é:

$$y(t) = A.\cos(\omega.t + \theta) \tag{2}$$

Onde ω é a frequência angular e θ um ângulo de fase inicial, ambos contantes assim como A.

Para encontrarmos o valor eficaz da senoide, basta substituirmos (2) em (1):

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [A.\cos(\omega.t+\theta)]^2.dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [A^2.\cos^2(\omega.t+\theta)].dt} = \sqrt{\frac{1}{T}.A^2\int_0^T [\cos^2(\omega.t+\theta)].dt}$$

Chamando $u = \omega.t + \theta \Rightarrow du = \omega.dt \Rightarrow dt = \frac{du}{\omega} \Rightarrow Y_{ef} = \sqrt{\frac{A^2}{T}.\int_0^T \frac{1}{\omega}[\cos^2(u)].du}$ =

$$= \sqrt{\frac{A^2}{T.\omega}.\int_0^T [\cos^2(u)].du} = \sqrt{\frac{A^2}{T.\omega}.\left[\left(\frac{1}{4}.sen[2(\omega.t+\theta)] + \frac{(\omega.t+\theta)}{2}\right)\Big|_0^T\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{A^2}{T.\omega}.\left[\left(\frac{1}{4}.sen[2(\omega.T+\theta)] + \frac{(\omega.T+\theta)}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}.sen[2(\omega.0+\theta)] + \frac{(\omega.0+\theta)}{2}\right)\right]}$$

Considerando o ângulo de fase inicial θ =0 e sabendo que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ temos que:

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{A^2.T}{T.2\pi}.\left[\left(\frac{1}{4}.sen\left[2\left(\frac{2\pi}{T}.T\right)\right] + \frac{(2.\pi.T)}{2.T}\right)\right]} = \sqrt{\frac{A^2.T}{T.2\pi}.\left(\frac{(2.\pi.T)}{2.T}\right)} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

2° Caso: Onda Triangular

Uma onda triangular tem a seguinte forma:

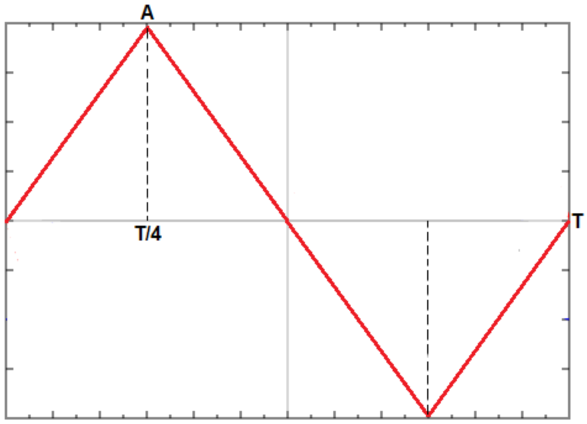

Fig.2 – Onda triangular.

Onde *A* é a amplitude da onda e *T* é a posição onde a onda completa um período. Note que não é possível equacionar uma onda triangular de maneira simples, mas se considerarmos que esta é uma onda simétrica, podemos dividi-la em quatro partes iguais onde podemos obter a equação de cada parte, o R.M.S. de cada parte e depois multiplicarmos por 4. Se adotarmos o trecho de 0 á T/4, teremos uma reta crescente cuja equação será:

$$y(t) = m.t = \frac{A}{T/4}.t = \frac{4A}{T}.t \tag{3}$$

Onde *m* é o coeficiente angular da reta e *t* a variável independente. Para calcularmos o R.M.S. desta onda, substituiremos (3) em (1) atentando ao fato de que estamos calculando de 0 á T/4 e que depois devemos multiplicar por 4 a integral.

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}.4.\int_0^{T/4}\left(\frac{4A}{T}.t\right)^2.dt} = \sqrt{\frac{4}{T}.\frac{16A^2}{T^2}\int_0^{T/4} t^2.dt} = \sqrt{\frac{64A^2}{T^3}\int_0^{T/4} t^2.dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{64A^2}{T^3}\left[\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{T/4}\right]} = \sqrt{\frac{64A^2}{T^3}\left[\frac{\left(T/4\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]} = \sqrt{\frac{64A^2}{T^3}.\frac{T^3}{192}} = \sqrt{\frac{A^2}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

3º Caso: Onda Quadrada

Uma onda quadrada tem a seguinte forma:

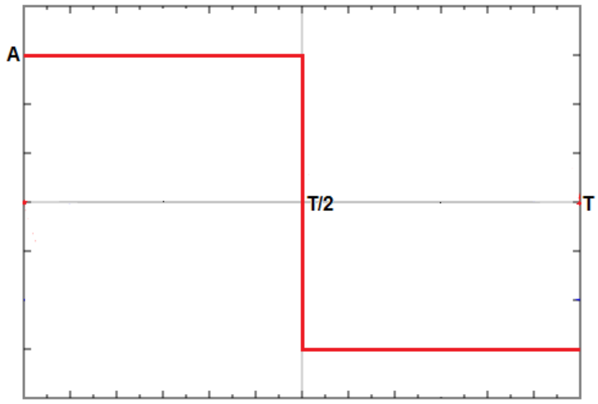

Fig.3 – Onda quadrada.

Onde *A* é a amplitude da onda e *T* é a posição onde a onda completa um período. Note que não é possível equacionar uma onda quadrada de maneira simples, mas se considerarmos que esta é uma onda simétrica, podemos dividi-la em duas partes iguais onde podemos obter a equação de cada parte, o R.M.S. de cada parte e depois multiplicarmos por 2. Se adotarmos o trecho de 0 á T/2, teremos uma função constante cuja equação será:

$$y(t) = A \qquad (4)$$

Para calcularmos o R.M.S. desta onda, substituiremos (4) em (1) atentando ao fato de que estamos calculando de 0 á T/2 e que depois devemos multiplicar por 2 a integral.

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}.2\int_0^{T/2} A^2.dt} = \sqrt{\frac{2}{T}.\left[A^2.t\Big|_0^{T/2} \right]} = \sqrt{\frac{2}{T}.\left[A^2.\frac{T}{2} - A^2.0 \right]} = \sqrt{\frac{2.A^2.T}{T.2}} = \sqrt{A^2} = A$$