

Sistemas de Comunicações Digitais

Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações

Universidade Federal do Ceará

Semestre 2017.2

Parte 4

Modulações avançadas

Conteúdo

- 1 **Modulação M -ária**
- 2 Probabilidade de erro
- 3 Modulação ortogonal
- 4 Modulação com memória
- 5 Largura de banda e dimensionalidade do sinal
- 6 Capacidade e modulação

Modulação M -ária

- Sinal modulado com PAM em banda base:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT)$$

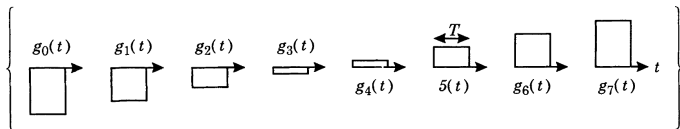
- Um único pulso $g(t)$ é utilizado e sua amplitude é modulada pelo símbolo de dados a_k .
- O PAM pode ser generalizado para o caso de modulação M -ária considerando que o formato do pulso pode ser escolhido dentre $\{g_i(t); 0 \leq i \leq M - 1\}$. O sinal modulado é dado por:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{a_k}(t - kT)$$

- Onde $a_k \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$. O símbolo de dados portanto indexa qual pulso é transmitido no k -ésimo intervalo de símbolo.

Modulação M -ária

- Exemplo para o 8-PAM.
- Definição convencional: $\{ag(t) : a \in \mathcal{A}\}$ com $\mathcal{A} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$.
- Notação alternativa: $g_0(t) = -7g(t), g_1(t) = -5g(t), \dots, g_7(t) = 7g(t)$
- Ilustração para um pulso retangular $g(t)$:



Modelo equivalente em banda base

- Relação entre sinal em banda passante $x(t)$ e sinal em banda base $s(t)$:

$$x(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{e^{j2\pi f_c t} s(t)\}$$

- Similarmente para os pulsos em banda passante $\hat{g}(t)$ e banda base $g(t)$:

$$\hat{g}_i(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{e^{j2\pi f_c t} g_i(t)\}$$

- Resultando no sinal em banda passante:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}_{a_k}(t - kT)$$

Detecção de distância mínima

- Vamos considerar inicialmente a ausência de ISI, ou seja, assumindo que somente um pulso é transmitido.
- Um transmissor M -ário seleciona o sinal de $\{g_0(t), \dots, g_{M-1}(t)\}$.
- Supondo que $g_n(t)$ foi transmitido, o sinal recebido é dado por:

$$r(t) = h_n(t) + n(t)$$

- Onde $h_n(t)$ é o n -ésimo pulso recebido e $n(t)$ é o ruído. Considerando que $b(t)$ é a resposta ao impulso do canal, temos:

$$H_n(f) = G_n(f)B(f + f_c)$$

- Essa abordagem é válida para os casos em banda base e banda passante.

Detecção de distância mínima

- Detector de distância mínima: escolhe o símbolo que melhor se aproxima ao sinal recebido.
- Pode ser generalizado para o caso de modulação M -ária.
- Função custo a ser **minimizada**:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - h_i(t)|^2 dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_r} - 2 \underbrace{\operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h_i^*(t) dt \right\}}_{y_i} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |h_i(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_i}$$

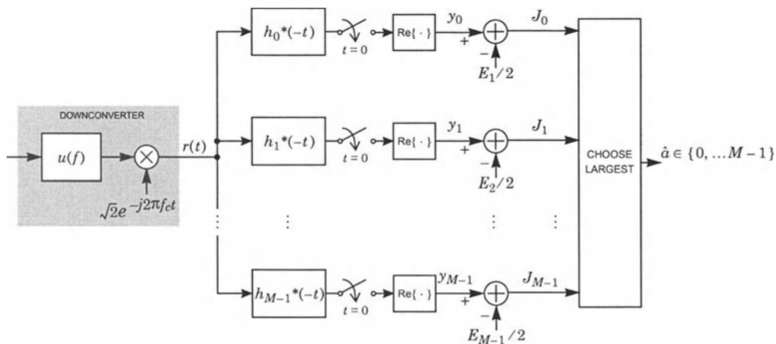
- De forma análoga, o problema é equivalente a **maximizar**:

$$J_i = y_i - \frac{1}{2} \mathcal{E}_i$$

- O que corresponde ao receptor de correlação.

Detecção de distância mínima

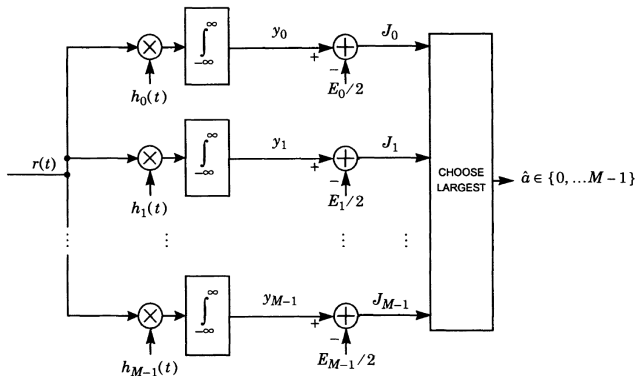
- Ilustração do receptor de correlação:



- O sinal recebido é correlacionado com os M possíveis pulsos utilizando um banco de filtros casados amostrados.

Detecção de distância mínima

- Variação do receptor de correlação utilizando correladores no lugar de filtros casados.



- Adequado para cenário em banda base.

Detecção de distância mínima

- Complexidade do receptor de correlação é dominada pelas M correlações que devem ser computadas.
- Motivação para se desenvolver um método de menor complexidade.
- Seja $\mathcal{S} = \text{span}\{h_0(t), \dots, h_{M-1}(t)\}$ o **espaço de sinal** e seja $\hat{r}(t)$ a projeção de $r(t)$ em \mathcal{S} .
- Como o erro de projeção $r(t) - \hat{r}(t)$ é ortogonal a \mathcal{S} , temos:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - \hat{r}(t) + \hat{r}(t) - h_i(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - \hat{r}(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{r}(t) - h_i(t)|^2 dt \end{aligned}$$

- O problema de otimização se reduz a minimizar:

$$J' = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{r}(t) - h_i(t)|^2 dt$$

Detecção de distância mínima

- Seja $\{\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)\}$ uma base ortonormal para \mathcal{S} .
- Pode-se utilizar o método de Gram-Schmidt sobre $\{h_0(t), \dots, h_{M-1}(t)\}$.
- Seja $\mathbf{h}_i = [h_{i,1}, h_{i,2}, \dots, h_{i,N}]^T$ o vetor de coeficientes da projeção de $h_i(t)$, onde:

$$h_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) \phi_j^*(t) dt$$

- O custo de distância mínima se reduz a:

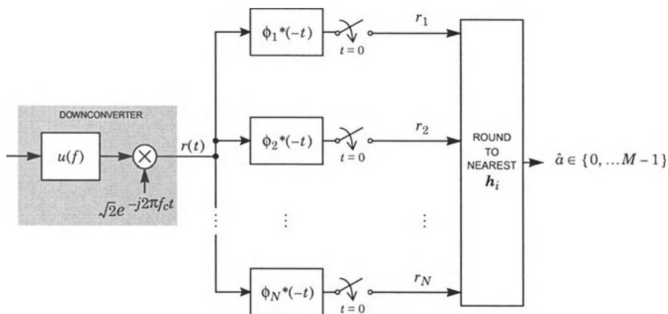
$$J' = \|\mathbf{r} - \mathbf{h}_i\|^2$$

- Onde $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_N]^T$ é o vetor projeção de $r(t)$, com:

$$r_j = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \phi_j^*(t) dt$$

Detecção de distância mínima

- Forma alternativa de implementar o receptor de distância mínima:
Receptor de projeção.



- Complexidade reduzida de M (tamanho da constelação) para N (tamanho do espaço de sinal).

Conteúdo

- 1 Modulação M -ária
- 2 Probabilidade de erro**
- 3 Modulação ortogonal
- 4 Modulação com memória
- 5 Largura de banda e dimensionalidade do sinal
- 6 Capacidade e modulação

Desempenho em cenário AWGN

- A i -ésima componente da projeção do sinal recebido é dada por:

$$r_j = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) \phi_j^*(t) dt}_{h_{i,j}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} n(t) \phi_j^*(t) dt}_{n_j}$$

- Considerando o vetor do ruído projetado $\mathbf{n} = [n_1, \dots, n_N]^T$, temos:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h}_i + \mathbf{n}$$

- $n(t)$ é a envoltória complexa do ruído Gaussiano branco em banda passante $\hat{n}(t)$. A DEP de $\hat{n}(t)$ é $N_0/2$ e a DEP de $n(t)$ é N_0 .
- Os M vetores $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_M\}$ são chamados de **vetores de sinal**.

Desempenho em cenário AWGN

- Podemos mostrar que as componentes do vetor \mathbf{n} são i.i.d. com distribuição $\mathcal{CN}(0, N_0)$.
- As componentes possuem média zero e a autocorrelação é dada por:

$$\mathbb{E}[n_i n_j^*] = \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} n(t) \phi_i^*(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} n^*(\tau) \phi_j(\tau) d\tau \right] = N_0 \delta_{i,j}$$

- Foram usadas as propriedades: linearidade da esperança, autocorrelação de $n(t)$ dada por $N_0 \delta(t - \tau)$, e funções ϕ ortogonais entre si.
- A matriz de autocorrelação de \mathbf{n} é portanto diagonal.

Desempenho em cenário AWGN

- Propriedades do vetor de ruído \mathbf{n} :
 - As $2N$ V.A.s reais $\{\text{Re}\{n_1\}, \dots, \text{Re}\{n_N\}, \text{Im}\{n_1\}, \dots, \text{Im}\{n_N\}\}$ são mutuamente independentes, com média zero e variância $N_0/2$.
 - O vetor \mathbf{n} é circularmente simétrico e Gaussiano, com média zero e $E[\mathbf{n}\mathbf{n}^*] = N_0\mathbf{I}$.
 - Os componentes de \mathbf{n} são descorrelacionados, $E[n_i n_j^*] = 0$ para $i \neq j$.
 - Os componentes de \mathbf{n} são circularmente simétricos, $E[n_i n_j] = 0$ para $1 \leq i, j \leq N$.
 - Seja a variável aleatória $X = \langle \mathbf{n}, \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}^* \mathbf{n}$, ela será $\mathcal{CN}(0, N_0)$ para qualquer vetor \mathbf{e} de norma unitária.

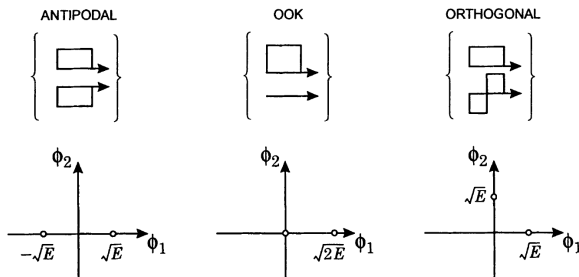
Desempenho em cenário AWGN

- Normalmente não é possível encontrar o valor exato da probabilidade de erro do receptor de distância mínima.
- Limitantes podem ser calculados para a probabilidade de erro.
- Probabilidade de erro em pares ($P_{i \rightarrow j}$):
 - Probabilidade de que o sinal recebido esteja mais próximo de \mathbf{h}_j do que de \mathbf{h}_i , dado que \mathbf{h}_i foi transmitido, para $j \neq i$.

$$\begin{aligned}
 P_{i \rightarrow j} &= \Pr [||\mathbf{r} - \mathbf{h}_j||^2 < ||\mathbf{r} - \mathbf{h}_i||^2 \mid \mathbf{h}_i \text{ foi transmitido}] \\
 &= \Pr [||\mathbf{n} - (\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_i)||^2 < ||\mathbf{n}||^2] \\
 &= \Pr \left[||\mathbf{n}||^2 + \underbrace{||\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_i||^2}_{d_{i,j}^2} - 2\text{Re}\{\langle \mathbf{n}, \mathbf{h}_j - \mathbf{h}_i \rangle\} < ||\mathbf{n}||^2 \right] \\
 &= \Pr [\text{Re}\{\langle \mathbf{n}, (\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_i)/d_{i,j} \rangle\} > d_{i,j}/2] = Q \left(\frac{d_{i,j}}{2\sigma} \right)
 \end{aligned}$$

Desempenho em cenário AWGN

- Comparação entre diferentes esquemas de modulação binária com mesma energia média \mathcal{E} .



- Sinalização antipodal: $d = 2\sqrt{\mathcal{E}}$ e $P_e = Q(\sqrt{2\mathcal{E}/N_0})$
- Sinalização OOK e ortogonal: $d = \sqrt{2\mathcal{E}}$ e $P_e = Q(\sqrt{\mathcal{E}/N_0})$
- Vantagem de 3dB para a sinalização antipodal.

Desempenho em cenário AWGN

- **Limitante da união:** limitante superior para a probabilidade de erro.
- De forma geral, para N eventos de erro $\{\mathcal{E}_n, 1 \leq n \leq N\}$ temos

$$\Pr \left[\bigcup_{n=1}^N \mathcal{E}_n \right] \leq \sum_{n=1}^N \Pr[\mathcal{E}_n]$$

- Considerando que \mathbf{h}_0 foi transmitido, podemos definir \mathcal{E}_j como o evento de erro no qual \mathbf{h}_j é escolhido no lugar de \mathbf{h}_0 , ou seja, $P_{0 \rightarrow j} = \Pr[\mathcal{E}_j]$.
- Podemos então calcular o limitante superior:

$$\Pr[\text{erro} \mid \mathbf{h}_0 \text{ foi transmitido}] = \Pr \left[\bigcup_{j=1}^{M-1} \mathcal{E}_j \right] \leq \sum_{j=1}^{M-1} \Pr[\mathcal{E}_j]$$

$$\Pr[\text{erro} \mid \mathbf{h}_0 \text{ foi transmitido}] \leq \sum_{j=1}^{M-1} Q \left(\frac{d_{0,j}}{2\sigma} \right)$$

Desempenho em cenário AWGN

- O limitante inferior pode ser obtido considerando a probabilidade de um único evento \mathcal{E}_m , para $1 \leq m \leq M - 1$.
- Para que o limitante seja mais representativo, podemos considerar um evento de erro que tenha a mínima distância para o sinal transmitido.

$$\Pr \left[\bigcup_{j=1}^{M-1} \mathcal{E}_j \right] \geq \Pr[\mathcal{E}_{\min}] = Q \left(\frac{d_{0,\min}}{2\sigma} \right)$$

- Chegamos portanto aos limitantes:

$$Q \left(\frac{d_{0,\min}}{2\sigma} \right) \leq \Pr[\text{erro} \mid \mathbf{h}_0 \text{ foi transmitido}] \leq \sum_{j=1}^{M-1} Q \left(\frac{d_{0,j}}{2\sigma} \right)$$

Desempenho em cenário AWGN

- O limitante superior pode ser simplificado ao considerar somente os K_0 sinais que estão a uma distância $d_{0,\min}$ de \mathbf{h}_0 .

$$\Pr[\text{erro} \mid \mathbf{h}_0 \text{ foi transmitido}] \approx K_0 Q \left(\frac{d_{0,\min}}{2\sigma} \right)$$

- Neste caso deixa de ser um limitante superior, mas aproxima bem o valor da probabilidade para pequenos valores de σ .
- Considerando p_i como a probabilidade (*a priori*) de um sinal ser transmitido, podemos calcular a probabilidade média de erro:

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_i \cdot \Pr[\mathbf{h}_i \text{ não escolhido} \mid \mathbf{h}_i \text{ transmitido}] \approx \sum_{i=0}^{M-1} p_i K_i Q \left(\frac{d_{i,\min}}{2\sigma} \right)$$

Desempenho em cenário AWGN

- A expressão de P_e pode ser simplificada considerando que o somatório será dominado pelos termos com menor argumento em $Q(\cdot)$.

$$P_e \approx KQ\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$$

- Onde d_{\min} é a distância mínima entre qualquer par de sinais.
- K é chamado de **coeficiente de erro** e representa o número médio de sinais a uma distância mínima.

Conteúdo

- 1 Modulação M -ária
- 2 Probabilidade de erro
- 3 Modulação ortogonal**
- 4 Modulação com memória
- 5 Largura de banda e dimensionalidade do sinal
- 6 Capacidade e modulação

Modulação ortogonal

- A **modulação ortogonal** é um caso especial da modulação M -ária, na qual os sinais são ortogonais e possuem mesma energia.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i(t)g_j^*(t)dt = \mathcal{E}_g\delta_{i-j}$$

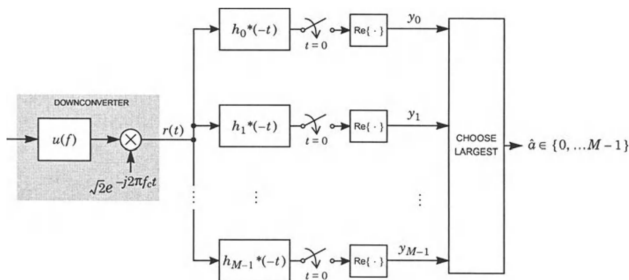
- Vamos assumir o caso sem ISI (e.g., pulsos satisfazendo o critério de Nyquist) e com canal benigno (e.g., resposta em frequência plana), desta forma a ortogonalidade dos pulsos recebidos se mantém.

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_i(t)h_j^*(t)dt = \mathcal{E}\delta_{i-j}$$

- Os sinais ortogonais possuem **baixa eficiência espectral**, pois o aumento da ordem da modulação requer recursos adicionais para garantir a ortogonalidade.

Receptor de distância mínima para modulação ortogonal

- Os receptores mencionados anteriormente podem ser adaptados para a modulação ortogonal.
- Como os pulsos são ortogonais, o processo de Gram-Schmidt resulta em um espaço de sinal com $N = M$.
- O receptor de projeção possui, portanto, a mesma complexidade que o receptor de correlação.

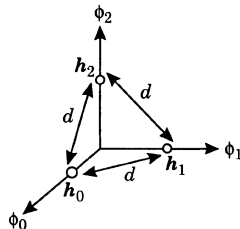


- $$\mathbf{h}_i = [0, 0, \dots, 0, \sqrt{\mathcal{E}}, 0, \dots, 0]^T$$

- Termo não-nulo está na i -ésima posição e $d = d_{\min} = \sqrt{2E}$.

- Probabilidade de erro aproximada:

$$P_e \approx (M-1)Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) \\ \approx (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}}\right)$$



- Aumento de M impacta a banda, mas não o argumento de $Q(\cdot)$

Exemplo para $M=3$:

Probabilidade de erro para modulação ortogonal

- Probabilidade de erro não depende do sinal transmitido.
- Cálculo da probabilidade exata de erro da modulação ortogonal:

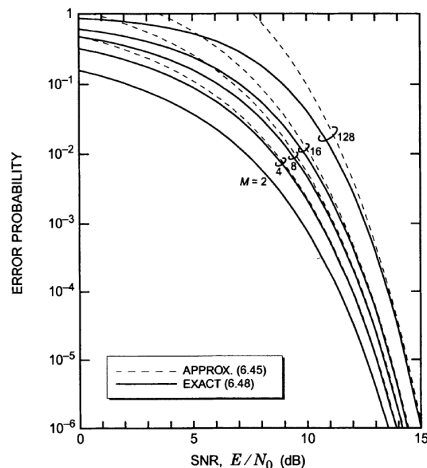
$$\Pr[\text{acerto} \mid \mathbf{h}_0 \text{ transmitido}, y_0 = y] = \left(1 - Q\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right)^{M-1}$$

$$\begin{aligned} \Pr[\text{erro}] &= \Pr[\text{erro} \mid \mathbf{h}_0 \text{ transmitido}] = 1 - \Pr[\text{acerto} \mid \mathbf{h}_0 \text{ transmitido}] \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_{y_0}(y) \left(1 - Q\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right)^{M-1} dy \end{aligned}$$

- Onde $f_{y_0}(y)$ é a PDF Gaussiana, com média $\sqrt{\mathcal{E}}$ e variância σ^2

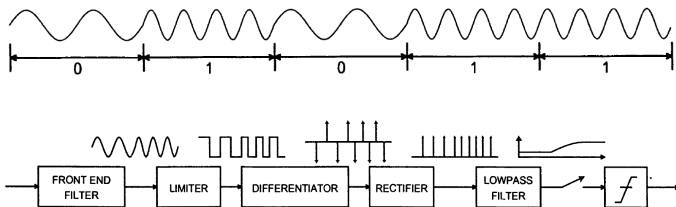
Probabilidade de erro para modulação ortogonal

- Curvas de probabilidade de erro:



Exemplos de modulação ortogonal

- Formas canônicas:
 - Chaveamento de frequência: Frequency Shift Keying (FSK)
 - Modulação por posição de pulso: Pulse Position Modulation (PPM)
- Exemplo de um sinal FSK binário e esquema de detecção:



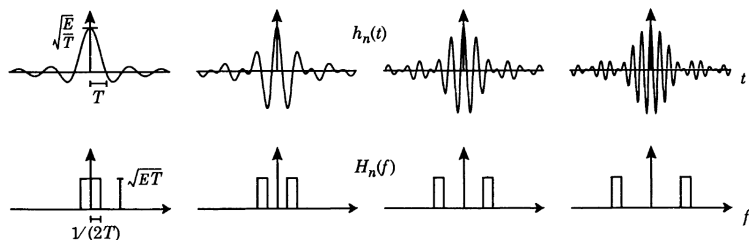
- Vantagens do FSK: incoerência (não é necessária detecção de fase), facilidade de implementação, imunidade a certas não-linearidades.
- Desvantagens do FSK: baixa eficiência espectral, penalidade de 3 dB em relação ao PAM antipodal, dificuldade em compensar distorções.

Exemplos de modulação ortogonal

- Exemplo de modulação FSK usando pulso em formato sinc:

$$h_n(t) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{T}} \left(\frac{\sin(\pi t/(2T))}{\pi t/(2T)} \right) \cos \left(\left(n + 1/2 \right) \frac{\pi t}{T} \right)$$

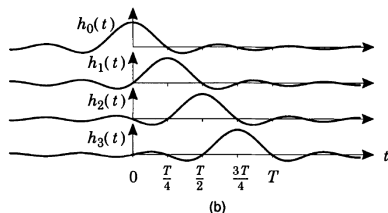
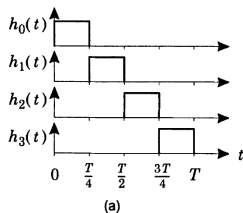
- Pulsos no tempo e frequência, para $n = 1, \dots, 4$



- Pulso ortogonal com energia \mathcal{E} e banda $1/(2T)$.

Exemplos de modulação ortogonal

- Modulação por posição de pulso (PPM) divide o intervalo de sinalização em M slots de largura T/M .
- Envia o pulso em um dos slots, carregando $\log_2 M$ bits de informação.
- Conjunto PPM M -ário: $\{g(t), g(t - T/M), \dots, g(t - (M - 1)T/M)\}$.
- Exemplos do 4-PPM com pulso: (a) retangular e (b) de banda mínima.



- Pulso de banda mínima: $g(t) = \sqrt{\mathcal{E}M/T} \sin(M\pi t)/(M\pi t/T)$
- Pulso ortogonal com energia \mathcal{E} e banda $1/(2T)$.

Critério de Nyquist generalizado

- Para o PAM com tempo de símbolo T , a banda mínima é $1/(2T)$.
- O critério de Nyquist pode ser generalizado para modulações ortogonais.
- Dado um conjunto de M sinais ortogonais, o critério de banda mínima é dado por $M/(2T)$ Hz para o conjunto de sinais.
- O requisito de banda aumenta com o tamanho da constelação.
- Considerando um receptor com filtro casado amostrado, dado um sinal de entrada $h_i(t)$, as amostras na saída do filtro devem satisfazer o critério de Nyquist para evitar ISI:

$$h_i(t) * h_i^*(-t) \big|_{t=kT} = \delta_k, \quad 0 \leq i \leq M - 1$$

- Critério adicional para evitar interferência entre os diferentes pulsos:

$$h_i(t) * h_j^*(-t) \big|_{t=kT} = 0, \quad j \neq i \quad -\infty \leq k \leq \infty$$

Critério de Nyquist generalizado

- Combinação das duas condições:

$$h_i(t) * h_j^*(-t) \big|_{t=kT} = \delta_k \delta_{j-i}$$

- Seja $H_i(f)$ a transformada de Fourier de $h_i(t)$, podemos expressar o **critério generalizado de Nyquist**:

$$\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_i \left(f - \frac{m}{T} \right) H_j^* \left(f - \frac{m}{T} \right) = \delta_{j-i}$$

- Uma banda de $M/(2T)$ é condição necessária e suficiente para satisfazer o critério, como ilustrado nos casos do FSK e PPM.

Crítério de Nyquist generalizado

- O pulso ideal possui problemas de realizabilidade: necessário projeto de pulsos práticos que possuam banda próxima da mínima.
- Seja $w(t)$ um pulso tal que $w(t) * w(-t)$ (saída do filtro casado) satisfaz o critério de Nyquist para uma taxa $1/(2T)$.

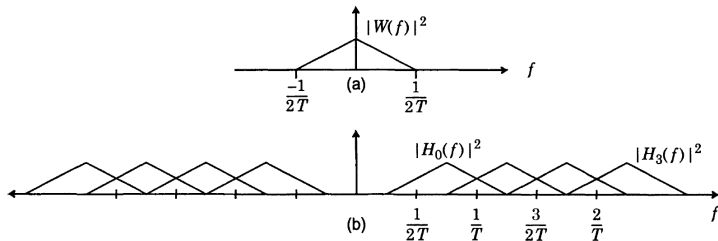
$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)w(t - 2kT)dt = \delta_k \quad (\text{C1})$$

- A banda mínima de $w(t)$ é $1/(4T)$, mas para permitir um decaimento suave vamos assumir o dobro da banda mínima, $1/(2T)$.
- Obtenção de um conjunto de M pulsos ortogonais a partir de $w(t)$, para $n \in \{0, \dots, M - 1\}$:

$$h_n(t) = w(t) \cos \left((n + 3/2) \frac{\pi t}{T} \right)$$

Crítério de Nyquist generalizado

- Exemplo de pulso cuja magnitude $|W(f)|^2$ satisfaz o critério de Nyquist:



- O conjunto $h_n(t)$ satisfaz o critério de Nyquist generalizado se:

$$\operatorname{Re}\{W(f)W(1/(2T) - f)\} = 0, \quad 0 \leq f \leq 1/(4T) \quad (\text{C2})$$

- Essa condição pode ser satisfeita se a fase de $W(f)$ apresentar uma simetria específica em torno de $1/(4T)$.

Critério de Nyquist generalizado

- O projeto de $W(f)$ pode ser feito satisfazendo as condições (C1) para a magnitude e (C2) para a fase.

- Considerando $W(f) = A(f)e^{j\theta(f)}$, temos que:

$$\operatorname{Re}\{W(f)W(1/(2T) - f)\} = A(f)A(1/(2T) - f) \cos(\theta(f) + \theta(1/(2T) - f))$$

- Essa função se anula para todo $0 \leq f \leq 1/(4T)$ se

$$\theta(f) + \theta(1/(2T) - f) = \pm\pi/2$$

- Exemplo de função que satisfaz essa restrição:

$$\theta(f) = -\pi fT + \gamma(f)$$

- Onde $\gamma(f)$ possui simetria ímpar em torno de $1/(4T)$.

Crítério de Nyquist generalizado

- Foi definido um conjunto de pulsos que satisfaz o critério generalizado de Nyquist.
- Magnitude de $W(f)$: escolhida de forma que $w(t) * w(-t)$ satisfaça o critério convencional de Nyquist a uma taxa $1/(2T)$.
- Fase de $W(f)$: escolhida de forma a forçar a ortogonalidade dos pulsos.
- Os pulsos $\{h_0(t), \dots, h_{M-1}(t)\}$ cobrem o intervalo de frequências $[1/(4T), (2M+3)/(4T)]$
- Banda total de $(M+1)/(2T)$, ligeiramente superior ao mínimo $M/(2T)$.

Imunidade ao ruído e eficiência espectral

- O mapeamento Gray não se aplica à modulação ortogonal, pois todos os símbolos estão à mesma distância uns dos outros.
- Qualquer mapeamento resultará na mesma probabilidade de erro de bit.
- Suponha que um dado sinal é transmitido e considere os $M - 1$ vizinhos, cada um com uma combinação de bits de tamanho $b = \log_2 M$ bits.
- Os símbolos adjacentes não diferem somente em um bit.
- Diferenças de k bits: $\binom{b}{k}$
- Assumindo sinais equiprováveis, a probabilidade de um erro específico de símbolo é $P_e/(M - 1)$.
- Calculando a média em $k \in \{1, \dots, b\}$ obtemos a probabilidade média de erro de bit:

$$P_b = \frac{\sum_{k=1}^b \binom{b}{k} \frac{P_e}{M-1}}{b} = \frac{M/2}{M-1} P_e$$

Imunidade ao ruído e eficiência espectral

- Energia por bit: $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}/(\log_2 M)$.
- Aproximação da probabilidade de erro de bit:

$$P_b \approx \frac{M}{2} Q \left(\sqrt{\log_2 M \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \right)$$

- Requisito de SNR por bit:

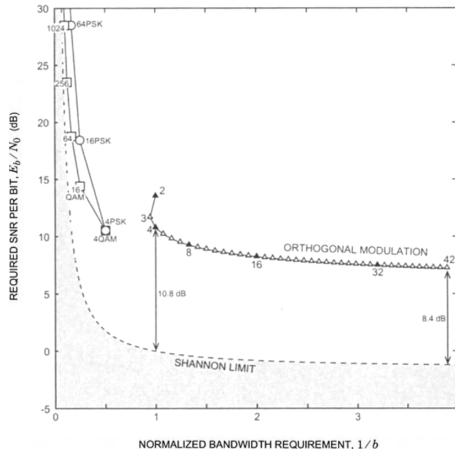
$$\mathcal{E}_b/N_0 = \frac{\left(Q^{-1} \left(\frac{P_b}{M/2} \right) \right)^2}{\log_2 M}$$

- Como a banda mínima é dada por $M/(2T)$, a melhor eficiência espectral é dada por:

$$\nu = \frac{\log_2 M}{T(M/2T)} = \frac{2 \log_2 M}{M}$$

Imunidade ao ruído e eficiência espectral

- Diferenciando ν com relação a M , encontramos que o máximo é alcançado para $M = e$.
- Desempenho da modulação ortogonal.



Questões práticas do FSK

- O FSK pode ter fase contínua ou descontínua:



- Fase contínua é desejável, pois reduz os componentes de alta frequência.
- Condição de fase contínua: cada pulso deve percorrer um número inteiro M_i de ciclos.

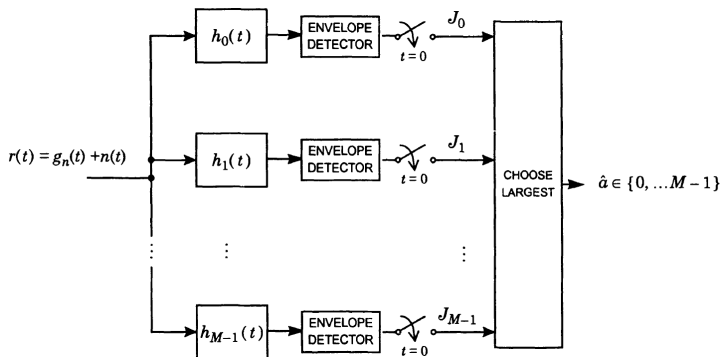
$$f_i T = M_i$$

- Separação mínima entre as frequências também é desejável.
- Para que seja mantida a continuidade de fase e a ortogonalidade, a separação mínima é dada por:

$$f_i - f_{i-1} = 1/T, \quad 1 \leq i \leq M - 1$$

Questões práticas do FSK

- O filtro casado e receptor de correlação exigem conhecimento exato da frequência e fase (receptores coerentes).
- FSK permite usar de forma prática um receptor não-coerente.



Conteúdo

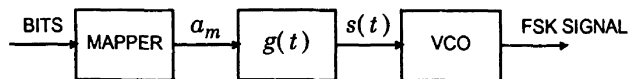
- 1 Modulação M -ária
- 2 Probabilidade de erro
- 3 Modulação ortogonal
- 4 Modulação com memória**
- 5 Largura de banda e dimensionalidade do sinal
- 6 Capacidade e modulação

Modulação com memória

- Até agora consideramos esquemas sem memória, ou seja, o sinal transmitido durante o k -ésimo intervalo de sinalização não depende de símbolos anteriores.
- Vamos generalizar o modulador para também levar em conta símbolos anteriores na determinação do sinal transmitido.
- Tipos comuns de modulação com memória:
 - Modulação de fase contínua (CPM)
 - Chaveamento de mínimo deslocamento (MSK)
 - Modulação diferencial

Modulação de fase contínua

- Um modulador FSK de fase contínua pode ser implementado utilizando um oscilador de fase controlado por tensão (VCO):



- A frequência do VCO varia em torno de f_c , mantendo automaticamente a continuidade da fase.
- Sinal modulado de fase contínua (CPM), antes e após o VCO:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT)$$

$$x(t) = K \cos \left[2\pi \left(f_c t + f_d \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) \right]$$

Modulação de fase contínua

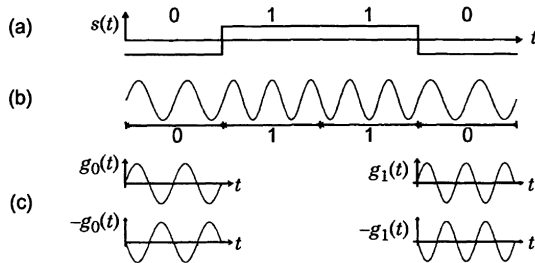
- Quando o sinal $s(t)$ é normalizado para $|s(t)| \leq 1$, o fator f_d corresponde ao valor de pico do desvio de frequência.
- Para $g(t)$ retangular, o CPM se torna: FSK de fase contínua (CPFSK).
- A largura de banda do FSK normalmente é maior que a do PAM para uma mesma taxa de símbolo.
- O chaveamento de mínimo deslocamento (MSK) permite reduzir o requisito de banda.
- O MSK obtém um desvio de frequência f_d de metade do valor do FSK convencional.

Chaveamento de mínimo deslocamento (MSK)

- Para o FSK a separação em frequência deve ser igual à taxa de símbolo $1/T$, para o MSK a separação cai para a metade:

$$f_i - f_{i-1} = 1/(2T), \quad 1 \leq i \leq M - 1$$

- Exemplo de modulação MSK binária com $f_d = 1/(4T)$:

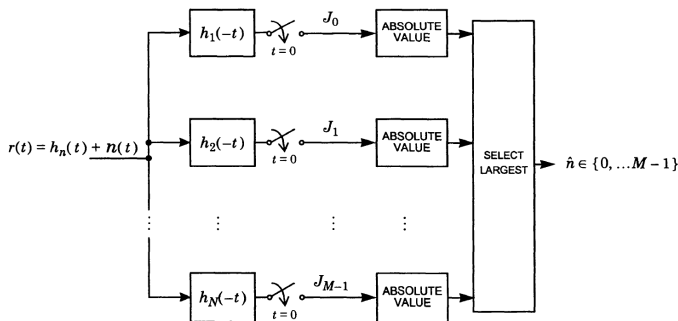


Chaveamento de mínimo deslocamento (MSK)

- Cada símbolo possui dois possíveis valores de pulso, sendo um o negativo do outro.

$$g_i(t) = \pm \sin(2\pi f_i t)w(t)$$

- Exemplo de receptor subótimo para sinal MSK:



Chaveamento de mínimo deslocamento (MSK)

- Como os sinais de polaridade reversa carregam a mesma informação, o filtro casado no receptor deve comparar o valor absoluto das amostras.
- Esse receptor descarta informações relevantes: baseado no histórico de recepção é possível inferir qual das polaridades seria esperada.
- O uso dessa informação (memória) pode reduzir a probabilidade de erro.
- Os pulsos podem ser reescritos como:

$$g_i(t) = \sin[2\pi f_c t + \pi b t / (2T) + \phi] w(t)$$

- Onde $b \in \{\pm 1\}$ determina a frequência e $\phi \in \{0, \pi\}$ depende da fase.
- Representação do sinal MSK transmitido:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin[2\pi f_c t + \pi b_k t / (2T) + \phi_k] w(t - kT)$$

Chaveamento de mínimo deslocamento (MSK)

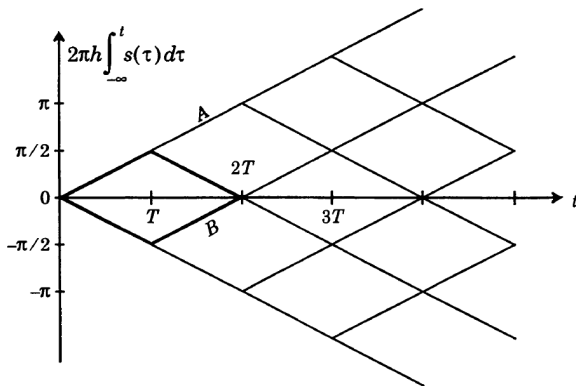
- Para manter a continuidade da fase é necessário que:

$$\phi_k = \phi_{k-1} + (b_{k-1} - b_k)\pi k/2 \mod 2\pi$$

- Esta expressão mostra a dependência explícita da fase sobre os dados.
- O desempenho do filtro casado para o MSK binário é semelhante ao do FSK binário.
- É possível reduzir o erro e a banda ao se utilizar informação sobre a memória, levando o desempenho do MSK a ficar equivalente ao do PSK.
- O MSK também pode ser interpretado como sinais PAM de banda passante cuja componente em quadratura é atrasada de meio símbolo com relação à componente em fase.
- Tais sinais são chamados de *offset keyed*: OQAM (OK-QAM) ou OPSK (OK-PSK).

Detecção do CPM

- Exemplo de diagrama de fase para o MSK:



- Algoritmo de Viterbi pode ser empregado na detecção.

Codificação diferencial

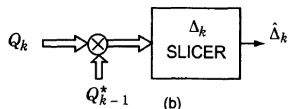
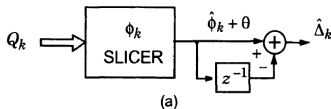
- Várias constelações possuem invariância rotacional para alguns ângulos de rotação.
- Se a constelação for rotacionada de tal ângulo, não há como distingui-la de uma constelação válida.
- Codificação diferencial evita esses problemas: a informação é codificada pela mudança na posição da constelação, e não pela posição absoluta.
- Aplicação em cenários com desvanecimento rápido.
- Considerando símbolos $a_k = e^{j\phi_k}$, modulação PSK diferencial (DPSK):

$$\phi_k = \phi_{k-1} + \Delta_k$$

- Informação contida na diferença de fase Δ_k e não na fase absoluta ϕ_k .

Codificação diferencial

- Técnicas de detecção do DPSK: coerente ou diferencial.
- Detecção coerente:
 - Procura aprender e rastrear a fase absoluta dos sinais recebidos.
 - Adequada quanto a codificação diferencial é utilizada somente para mitigar o efeito da invariância rotacional.
- Detecção diferencial:
 - Se baseia somente na diferença de fase entre um símbolo e outro.
 - Evita ter que rastrear a fase em ambiente com desvanecimento rápido
 - Penalidade de aumento do ruído de aproximadamente 3 dB.



Conteúdo

- 1 Modulação M -ária
- 2 Probabilidade de erro
- 3 Modulação ortogonal
- 4 Modulação com memória
- 5 Largura de banda e dimensionalidade do sinal**
- 6 Capacidade e modulação

Teorema de Landau-Pollak

- Nenhum sinal pode ser limitado simultaneamente no tempo e na banda.
- No entanto, é possível que sinais limitados em banda sejam *aproximadamente* limitados no tempo.
- De forma análoga, sinais limitados no tempo podem ser *aproximadamente* limitados na frequência.
- Seja $f(t)$ causal, limitada a uma banda W Hz e com energia finita \mathcal{E}_f .
- Essa função não chegará precisamente a zero em um tempo t_0 , mas devido à energia finita decairá gradualmente a zero.
- Seja $\epsilon(t_0)$ a fração da energia de $f(t)$ fora do intervalo $[0, t_0]$, então:

$$\int_0^{t_0} |f(t)|^2 dt = \mathcal{E}_f (1 - \epsilon(t_0))$$

- É possível portanto definir um intervalo de tempo dentro do qual somente uma fração da energia do sinal está fora do intervalo.

Teorema de Landau-Pollak

Teorema

Existe um conjunto ortonormal de $2Wt_0 + 1$ formas de onda $\phi_i(t)$, tal que para qualquer forma de onda de energia finita $f(t)$ com energia \mathcal{E}_f , limitada em banda a $|f| \leq W$, para qualquer constante $0 < \epsilon < 1$ e para qualquer t_0 suficientemente grande e que satisfaça $\int_0^{t_0} |f(t)|^2 dt > \mathcal{E}_f(1 - \epsilon(t_0))$, existe também um conjunto de $2Wt_0 + 1$ coeficientes f_i que satisfaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \sum_{i=0}^{2Wt_0} f_i \phi_i(t) \right|^2 dt < 12\mathcal{E}_f \epsilon$$

Teorema de Landau-Pollak

- O espaço de sinal de sinais de energia finita possui infinitas dimensões.
- No entanto, sinais de banda limitada a W Hz e aproximadamente limitados no tempo em $[0, t_0]$, possuem aproximadamente um número finito de dimensões: $2Wt_0 + 1$ (Teorema de Landau-Poloak).
- Neste caso somente uma pequena fração da energia do sinal está fora do subespaço de dimensão $2Wt_0 + 1$.
- À medida em que t_0 aumenta, essa fração de energia se reduz.

Relação com o critério generalizado de Nyquist

- No critério generalizado de Nyquist não foi feita nenhuma tentativa de limitar os pulsos no tempo.
- No entanto, pode-se demonstrar que o teorema de Landau-Pollak e o critério generalizado de Nyquist são consistentes entre si.
- Considere um sinal ortogonal consistindo de L intervalos de sinalização.
- Em geral, tal sinal é aproximadamente limitado ao intervalo $[0, LT]$.
- A partir do teorema de Landau-Pollak temos que:

$$2WLT + 1 \geq NL \implies W \geq \frac{NL - 1}{2LT} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} W \geq N/(2T)$$

- Resultado consistente com o critério generalizado de Nyquist.

Conteúdo

- 1 Modulação M -ária
- 2 Probabilidade de erro
- 3 Modulação ortogonal
- 4 Modulação com memória
- 5 Largura de banda e dimensionalidade do sinal
- 6 Capacidade e modulação**

Capacidade e modulação

- Métricas para comparação entre esquemas de modulação:
 - Potência média de transmissão, potência de pico e imunidade ao ruído.
 - Probabilidade de erro de símbolo (SER), bit (BER) e bloco (BLER).
 - Eficiência espectral.
 - Ganho de codificação: redução no nível de potência para atingir uma certa probabilidade de erro (através de técnicas de codificação de canal).
 - Custo de implementação.
- Considerações para as comparações:
 - Canal ideal com banda W e ruído aditivo Gaussiano branco com DEP $N_0/2$.
 - Restrição de potência média de transmissão P , sem restrição de pico.
 - SER reflete adequadamente o desempenho do sistema. Limitante da união pode ser usado para obter a BER.

Probabilidade de erro do PAM

- Expressão da SER como função dos parâmetros relevantes:

$$P_e \approx K \cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) \approx K \cdot Q\left(\sqrt{2WT \cdot \eta_A \cdot \text{SNR}}\right)$$

- Considerando K como o número médio de vizinhos com distância mínima d_{\min} , $\sigma^2 = N_0/2$, banda W , energia média do sinal \mathcal{E} , intervalo de símbolos T , $P = E/T$, $\text{SNR} = P/(N_0W)$ e $\eta_A = d_{\min}^2/(4\mathcal{E}_a)$
- O valor de η_A pode ser calculado para diferentes esquemas de modulação.
- Expressão da eficiência espectral:

$$\nu = \frac{\log_2 M}{WT}$$

Probabilidade de erro do PAM

- Cálculo da probabilidade de erro considerando a máxima taxa possível pelo critério de Nyquist.
- Para banda base temos $1/T = 2W$ e para banda passante temos $1/T = W$.
- Expressão geral para PAM em banda base, banda passante e constelações QAM quadradas:

$$P_e \approx K \cdot Q \left(\sqrt{3 \cdot \frac{\text{SNR}}{2^\nu - 1}} \right)$$

- SNR normalizada pela taxa:

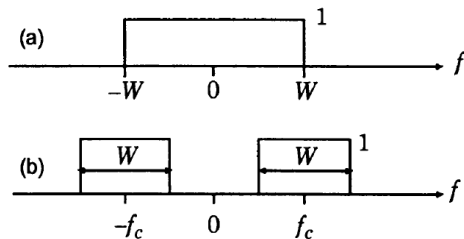
$$\text{SNR}_{\text{norm}} = \frac{\text{SNR}}{2^\nu - 1}$$

Capacidade do canal Gaussiano ideal

- Capacidade:

$$C_T = WT \cdot \log_2(1 + \text{SNR})$$

$$C = C_T/T = W \cdot \log_2(1 + \text{SNR})$$



Capacidade do canal Gaussiano ideal

- Diferença entre SNR e seu valor normalizado:

$$\Delta\text{SNR}_{\text{dB}} = \text{SNR}_{\text{dB}} - \text{SNR}_{\text{norm,dB}}$$

