Sistemas de Comunicações Digitais

Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações

Universidade Federal do Ceará

Semestre 2017.2

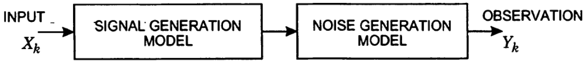
Parte 5

Detecção Probabilística

Conteúdo

Detecção probabilística

- Projeto do receptor baseado em distância mínima:
  - Robusto na presença de ruído.
  - Questões: quando o receptor é ótimo? o que fazer quando não é ótimo?
- Teoria da detecção ótima:
  - Identificação das circunstâncias nas quais o receptor de distância mínima é ótimo.
  - Aplicação para canais discretos e contínuos no tempo.
  - Caracterização probabilística.
- Notação: variáveis aleatórias com letras maiúsculas (como X) e valores determinísticos com letras minúsculas (como x).
- Processamento determinístico (geração de sinal) e processamento estatístico (geração de ruído).



Conteúdo

Detecção de um sinal real

- Caso simplificado:
  - A entrada é uma variável aleatória $X \in \mathcal{A}$.
  - O gerador de sinal repassa esse símbolo diretamente para o gerador de ruído.
  - A saída pode ser uma observação com valores Y discretos ou contínuos.
- Observação de valores discretos:
  - Para projetar o detector, devemos conhecer a distribuição $p_{Y|A}(y|\hat{a})$.
  - **Detector de Máxima Verossimilhança** (ML - *Maximum Likelihood*).
  - Detector ML escolhe o $\hat{a} \in \mathcal{A}$ que maximiza $p_{Y|A}(y|\hat{a})$.
  - Vantagem da detecção ML: a verossimilhança pode ser calculada facilmente para cada $\hat{a}$, conhecendo apenas as estatísticas do gerador de ruído.

Observações discretas

- Exemplo de detector ML:
  - Considere $Y = A + N$, onde A e N são independentes e assumem valores 0 ou 1 (lançamento de moeda não-viciada).
  - Possíveis observações: $y =$ 0, 1 ou 2.
  - Cálculo da verossimilhança:

$$p_{Y|A}(0|\hat{a}) = \begin{cases} 0,5 & \text{para } \hat{a} = 0 \\ 0 & \text{para } \hat{a} = 1 \end{cases}$$

$$p_{Y|A}(1|\hat{a}) = \begin{cases} 0,5 & \text{para } \hat{a} = 0 \\ 0,5 & \text{para } \hat{a} = 1 \end{cases}$$

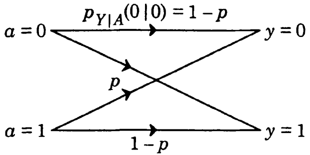
$$p_{Y|A}(2|\hat{a}) = \begin{cases} 0 & \text{para } \hat{a} = 0 \\ 0,5 & \text{para } \hat{a} = 1 \end{cases}$$

Observações discretas

- Detector de máxima probabilidade a posteriori (MAP):
  - Maximiza a probabilidade posterior $p_{A|Y}(\hat{a}|y)$.
  - O receptor MAP minimiza a probabilidade de erro.
  - Também chamada de detecção Bayesiana.
  - Regra de Bayes:

$$p_{A|Y}(\hat{a}|y) = \frac{p_{Y|A}(y|\hat{a})p_A(\hat{a})}{p_Y(y)}$$

  - É necessário o conhecimento das probabilidades a priori $p_A(\hat{a})$.
  - Para o caso em que as probabilidades a priori assumem o mesmo valor, o critério MAP recai no critério ML.
- Canal binário simétrico (BSC):

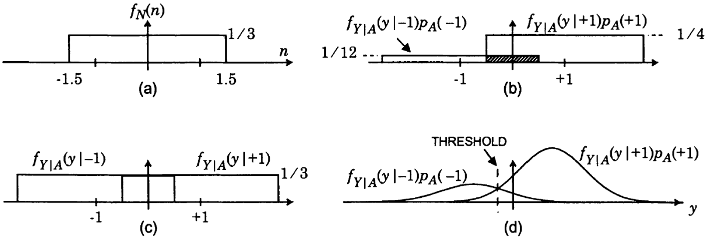


Observações contínuas

- O modelo mais comum de ruído N corrompe os símbolos de entrada com valores contínuos.
- A observação $Y = A + N$ é portanto uma variável aleatória contínua.
- Critério MAP utilizando a forma mista de Bayes:

$$p_{A|Y}(\hat{a}|y) = \frac{f_{Y|A}(y|\hat{a})p_A(\hat{a})}{f_Y(y)}$$

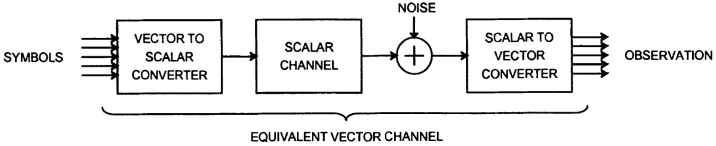
- Exemplos:



Conteúdo

Detecção de um vetor de sinal

- Modelo de comunicação vetorial:



- O gerador de sinal aceita uma entrada X, a qual é mapeada em um vetor de sinal $\mathbf{S}$ com dimensão N.
- A observação é um vetor $\mathbf{Y}$ com mesma dimensão do sinal.
- Distribuição condicional da observação: $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{S}}(\mathbf{y}|\mathbf{s})$.
- O detector decide qual o vetor $\hat{\mathbf{s}}$ que foi de fato transmitido.
- Caso em que as componentes do ruído são independentes:

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{S}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}) = \prod_{k=1}^{N} f_{Y_k|S_k}(y_k|s_k)$$

Detecção ML vetorial

- Considere o canal AWGN: $\mathbf{Y} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$.
- Os elementos de $\mathbf{S}$ são escolhidos dentre M possibilidades.
- E $\mathbf{N}$ é um vetor de ruído complexo Gaussiano circularmente simétrico, com componentes independentes e de variância $2\sigma^2$.
- Expressão para a função densidade de probabilidade:

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{S}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}) = f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \mathbf{s})$$

- Componentes do ruído:

$$f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \prod_{k=1}^{N} f_{N_k}(n_k) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-|n|^2/2\sigma^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} e^{-||\mathbf{n}||^2/2\sigma^2}$$

- Maximizar $f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}})$ é equivalente a minimizar $||\mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}}||^2$.

Detecção ML vetorial

- Para o canal binário simétrico (BSC) temos que:

$$P_{Y_k|S_k}(y|\hat{s}) = \begin{cases} p & y \neq \hat{s} \\ 1-p & y = \hat{s} \end{cases}$$

- Definição da distância de Hamming $d_H(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{y})$: número de componentes distintas entre os vetores binários.
- Distribuição condicional conjunta:

$$P_{\mathbf{Y}|\mathbf{S}}(\mathbf{y}|\hat{\mathbf{s}}) = p^{d_H(\hat{\mathbf{s}},\mathbf{y})}(1-p)^{N-d_H(\hat{\mathbf{s}},\mathbf{y})} = (1-p)^N \left(\frac{p}{1-p}\right)^{d_H(\hat{\mathbf{s}},\mathbf{y})}$$

- Para $p < 1/2$, o detector ML escolhe o $\hat{\mathbf{s}}$ que minimiza a distância de Hamming.

Detecção MAP vetorial

- O detector MAP é mais complicado e requer conhecimento extra sobre a estatística do ruído.
- Assumindo que as probabilidades a priori $p_{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{s}})$ são conhecidas, temos o critério MAP vetorial:

$$p_{\mathbf{S}|\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{s}}|\mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{Y}|\mathbf{S}}(\mathbf{y}|\hat{\mathbf{s}})p_{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{s}})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}$$

- Como o denominador é independente de $\hat{\mathbf{s}}$, o critério MAP equivale a maximizar o numerador.
- Recai no ML para o caso em que as probabilidades a priori são iguais.

Conteúdo

Sinal recebido discreto no tempo

- Modelo do sinal recebido:

$$Y_k = s_k^{(m)} + N_k\,, \qquad 0 \leq k \leq \infty$$

- Função custo otimizada pelo detector ML:

$$J_m = \sum_{k=0}^{\infty} \left| Y_k - s_k^{(m)} \right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |Y_k|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left| s_k^{(m)} \right|^2 - 2\mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} Y_k s_k^{(m)*} \right\}$$

- Escolha do m que minimiza a expressão. O critério ML é equivalente a maximizar:

$$R_m = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} Y_k s_k^{(m)*} \right\} - \frac{1}{2}\mathcal{E}_m$$

Recepção contínua no tempo

- Modelo do sinal recebido:

$$Y(t) = s_m(t) + N(t)\,, \qquad 0 \leq t < T$$

- $N(t)$ é um processo Gaussiano estacionário circularmente simétrico, de média zero, com DEP $S_N(f)$ e autocorrelação $R_N(\tau)$.
- Para realizar a detecção, o problema tem que ser tornado equivalente ao caso discreto. Abordagem de expansão do espaço de sinais em termos de funções ortonormais:

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i \phi_i(t)\,, \qquad \text{para } \int_0^T \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \delta_{i-j}$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \phi_i(t)$$

- Assumindo que os coeficientes são descorrelacionados: $\mathrm{E}[N_i N_j^*] = \sigma_i^2 \delta_{i-j}$, é possível encontrar um conjunto de funções ortonormais que satisfazem essa condição.

Recepção contínua no tempo

- Expansão de Karhunen-Loeve:

$$N_j = \int_0^T N(t)\phi_j^*(t)dt\,, \qquad s_i^{(m)} = \int_0^T s_m(t)\phi_i^*(t)dt$$

- O sinal contínuo pode ser expresso em uma forma equivalente discreta:

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \frac{s_i^{(m)}}{\sigma_i} + \frac{N_i}{\sigma_i}\,, \qquad 1 \leq i < \infty$$

- A normalização é necessária, pois as componentes de ruído não possuem necessariamente a mesma variância $\mathrm{E}[|N_i|^2] = \sigma_i^2$.

Recepção contínua no tempo

- O detector ML para essa representação equivalente minimiza:

$$J_m = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{Y_i}{\sigma_i} - \frac{s_i^{(m)}}{\sigma_i} \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left| Y_i - s_i^{(m)} \right|^2}{\sigma_i^2}$$

- De forma análoga, o detector ML maximiza a correlação:

$$R_m = \mathrm{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Y_i s_i^{(m)*}}{\sigma_i^2} \right\} - \frac{1}{2} \mathcal{E}_m$$

- Foi demonstrado que o sinal recebido contínuo de infinitas dimensões pode ser reduzido a um conjunto de M variáveis de decisão R_m.

Conteúdo

Detecção de máxima verossimilhança com algoritmo de Viterbi

- Demonstramos anteriormente que o algoritmo de Viterbi pode resolver o problema de detecção em sequência de mínima distância.
- Ele também pode ser generalizado para a detecção em sequência de máximo verossimilhança (ML), para qualquer gerador de sinal de Markov e qualquer gerador de ruído com componentes independentes.
- Definições:

Q estados, $\{0, \dots, Q-1\}$

L símbolos de entrada, $\{a_0, \dots, a_{L-1}\}$, com $a \in \mathcal{A}$

μ símbolos inativos

$\Psi = [\Psi_0, \dots, \Psi_{L+\mu}] \in \{0, \dots, Q-1\}^{L+\mu+1}$: sequência de estados

$\mathbf{Y} = [Y_0, \dots, Y_{L+\mu-1}]$: vetor de observações ruidosas

- O número de observações é menor que o tamanho da sequência de estados, pois corresponde às *transições* entre estados.

Detecção de máxima verossimilhança com algoritmo de Viterbi

- Dada uma observação $\mathbf{y}$, o detector em sequência MAP seleciona o vetor $\boldsymbol{\psi}$ que maximiza $p_{\Psi|\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y}) = p(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})$.
- O critério MAP pode de forma equivalente maximizar o produto $p(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})f(y)$ ou $f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\psi})p(\boldsymbol{\psi})$.
- Podemos demonstrar que:

$$f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\psi})p(\boldsymbol{\psi}) = \prod_{k=0}^{L+\mu-1} [f(y_k|\psi_k, \psi_{k+1})p(\psi_{k+1}|\psi_k)]$$

- Essa é uma *métrica de caminho*, igual ao produto das *métricas de ramo*, relativas à transição de ψ_k para ψ_{k+1}.
- Semelhante ao algoritmo visto anteriormente, com uma ligeira diferença para tratar uma métrica de ramo multiplicativa.