Sistemas de Comunicações Digitais

Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações

Universidade Federal do Ceará

Semestre 2017.2

Parte 2

Caracterização de sinais e sistemas de comunicação

Conteúdo

Introduçao

- Sinais podem ser caracterizados como:
    - Aleatório vs. determinístico, discreto vs. contínuo no tempo, amplitude discreta vs. contínua, passa-baixa vs. passa-faixa, energia finita vs. infinita, potência média finita vs. infinita, etc.
- Neste capítulo:
    - Caracterização de sinais e sistemas comumente encontrados na transmissão de informação digital sobre um canal de comunicação.
    - Representação de várias formas de sinais modulados digitalmente e suas características espectrais.

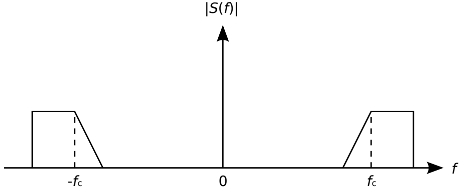
Conteúdo

Representação de sinais e sistemas em banda passante

- Transmissão de sinais digitais $\Rightarrow$ modulação de portadora
- Canal limitado em largura de banda:
  - Double sideband (DSB): intervalo de frequências centradas em torno da portadora
  - Single sideband (SSB): intervalo de frequências adjacentes à portadora
- Sinais e sistemas de banda estreita (narrowband)
  - Largura de banda muito menor que a frequência da portadora
- Transmissão e recepção de sinais em banda passante:
  - Envolve translações de frequência
- Sinais e canais passa-baixa equivalentes:
  - Não há perda de generalidade
  - Conveniência matemática
  - Independentes da frequência de portadora e bandas de canais

Representação de sinais em banda passante

- Sinal $s(t)$ com conteúdo em frequência concentrado em uma banda estreita de frequências em torno de f_c



- Sinal contendo as frequências positivas:

$$S_+(f) = 2u(f)S(f)$$

$$s_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_+(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$= F^{-1}[2u(f)] * F^{-1}[S(f)]$$

Representação de sinais em banda passante

- $s_+(t)$ é o sinal analítico ou pré-envoltória de $s(t)$
- Considerando que $F^{-1}[S(f)] = s(t)$ e $F^{-1}[2u(f)] = \delta(t) + j/\pi t$

$$
\begin{aligned}
s_+(t) &= \left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right] * s(t) \\
&= s(t) + j\,\underbrace{\frac{1}{\pi t} * s(t)}_{\hat{s}(t)}
\end{aligned}
$$

- $\hat{s}(t)$ pode ser visto como a saída do filtro de resposta ao impulso $h(t) = 1/\pi t$ quando excitado por $s(t)$. Transformada de Hilbert:

$$
H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j2\pi f t} dt = \begin{cases} -j & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ j & f < 0 \end{cases}
$$

Representação de sinais em banda passante

- Efeito: deslocamento de fase de 90º para todas as frequências de $s(t)$
- Equivalente passa-baixa de $S_+(f)$: $S_l(f) = S_+(f + f_c)$
- No domínio do tempo temos

$$s_l(t) = s_+(t)e^{-j2\pi f_c t} = [s(t) + j\hat{s}(t)]e^{-j2\pi f_c t}$$

- Considerando que $s_l(t) = x(t) + jy(t)$, podemos isolar $s(t)$ e $\hat{s}(t)$ como função das componentes do equivalente passa-baixa:

$$\begin{aligned} s(t) + j\hat{s}(t) &= s_l(t)e^{j2\pi f_c t} = [x(t) + jy(t)]e^{j2\pi f_c t} \\ s(t) &= x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t \\ \hat{s}(t) &= x(t)\sin 2\pi f_c t + y(t)\cos 2\pi f_c t \end{aligned}$$

Representação de sinais em banda passante

- $x(t)$ e $y(t)$: componentes em quadratura do sinal em banda passante
- $s_l(t)$: envoltória complexa do sinal real $s(t)$
- Outras representações para o sinal em banda passante:

$$s(t) = \mathrm{Re}\{[x(t) + jy(t)]e^{j2\pi f_c t}\} = \mathrm{Re}\{s_l(t)e^{j2\pi f_c t}\}$$
$$s(t) = \mathrm{Re}\{a(t)e^{j[2\pi f_c t + \theta(t)]}\} = a(t)\cos[2\pi f_c t + \theta(t)]$$

- $a(t)$ e $\theta(t)$ são a envoltória e fase do sinal em banda passante
- Temos que $s_l(t) = a(t)e^{j\theta(t)}$, $a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ e $\theta(t) = \tan^{-1}[y(t)/x(t)]$

Representação de sinais em banda passante

- Calculando a transformada de Fourier de $s(t)$:

$$
\begin{aligned}
S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathrm{Re}[s_l(t)e^{j2\pi f_c t}]\}e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [s_l(t)e^{j2\pi f_c t} + s_l^*(t)e^{-j2\pi f_c t}]e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{2}[S_l(f-f_c) + S_l^*(-f-f_c)]
\end{aligned}
$$

- Relação básica entre o espectro do sinal equivalente passa-baixa e o espectro do sinal em banda passante

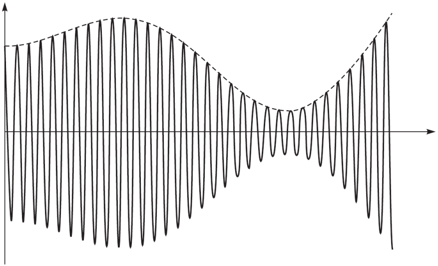
Representação de sinais em banda passante

- Energia do sinal:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathrm{Re}[s_l(t)e^{j2\pi f_c t}]\}^2 dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 \cos[4\pi f_c t + 2\theta(t)]dt$$

- Assumindo que $s(t)$ possui banda estreita, tem-se que a segunda integral possui um valor muito menor que a primeira, podendo ser desconsiderada
- Pode-se afirmar que a energia do sinal equivalente passa-baixa corresponde, na prática, à energia do sinal em banda passante

Representação de sinais em banda passante



- Para fins práticos pode-ser afirmar que, a energia do sinal em banda passante $s(t)$, expressa em termos do sinal equivalente passa-baixa $s_l(t)$, é dada por:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt$$

Representação de um sistema linear em banda passante

- Um filtro ou um sistema linear pode ser descrito por $h(t)$ ou $H(f)$.
- Assumindo que $h(t)$ é real:

$$H^*(-f) = H(f)$$

- Considere que:

$$H_l(f - f_c) = \begin{cases} H(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

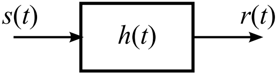
$$H_l^*(-f - f_c) = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ H^*(-f), & f < 0 \end{cases}$$

- Então:

$$H(f) = H_l(f - f_c) + H_l^*(-f - f_c)$$

Resposta de um sistema em banda passante a um sinal em banda passante

- A resposta de um sistema em banda passante a um sinal de entrada em banda passante pode ser obtida a partir dos equivalentes passa-baixa do sinal de entrada e da resposta ao impulso do sistema.



- A saída do sistema também é um sinal em banda passante e pode ser representada por: $r(t) = \mathrm{Re}[r_l(t)e^{j2\pi f_c t}]$

$$
\begin{aligned}
R(f) &= S(f)H(f) \\
&= \frac{1}{2}[S_l(f-f_c) + S_l^*(-f-f_c)][H_l(f-f_c) + H_l^*(-f-f_c)] \\
&= \frac{1}{2}[S_l(f-f_c)H_l(f-f_c) + S_l^*(-f-f_c)H_l^*(-f-f_c)] \\
&= \frac{1}{2}[R_l(f-f_c) + R_l^*(-f-f_c)]
\end{aligned}
$$

Representação de processos estocásticos estacionários em banda passante

- Representação é extendida para funções amostra de um processo estocástico estacionário em banda passante.
- Derivação das relações entre as funções de correlação e o espectro de potência dos sinais em banda passante e do equivalente passa-baixa.
- Processo estocástico do ruído
  - $n(t)$: função amostra de um processo WSS com média zero e DEP $\Phi_{nn}(f)$
  - DEP limitada a um intervalo de frequências em torno de f_c
  - Processo em banda passante de banda estreita: largura da DEP $\gg f_c$
  - Representação do ruído:

$$\begin{aligned} n(t) &= a(t)\cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \\ &= x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t \\ &= \mathrm{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}] \end{aligned}$$

Representação de processos estocásticos estacionários em banda passante

- Se $n(t)$ possui média zero, então $x(t)$ e $y(t)$ também têm média zero.
- A estacionariedade de $n(t)$ implica nas seguintes propriedades:

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau)$$
$$\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(\tau)$$

- Função de autocorrelação do processo $n(t)$:

$$\phi_{nn}(\tau) = \phi_{xx}(\tau)\cos 2\pi f_c\tau - \phi_{yx}(\tau)\sin 2\pi f_c\tau$$

- Função de autocorrelação do processo equivalente passa-baixa $z(t) = x(t) + jy(t)$:

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{E}[z^*(t)z(t+\tau)] = \phi_{xx}(\tau) + j\phi_{yx}(\tau)$$
$$\phi_{nn}(\tau) = \mathrm{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c\tau}]$$

Representação de processos estocásticos estacionários em banda passante

- Densidade espectral de potência do processo $n(t)$:

$$\Phi_{nn}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathrm{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}]\}e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{1}{2}[\Phi_{zz}(f-f_c)+\Phi_{zz}(-f-f_c)]$$

- Uma vez que $\phi_{zz}(\tau) = \phi^*_{zz}(-\tau)$, então $\Phi_{zz}(f)$ é real.
- A partir das relações:

$$\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(\tau)$$
$$\phi_{yx}(\tau) = \phi_{xy}(-\tau)$$

- Temos que $\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{xy}(-\tau)$, ou seja, $\phi_{xy}(\tau)$ é uma função ímpar.
- Consequentemente, $\phi_{xy}(0) = 0$, o que significa que $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados para $\tau = 0$.
- Caso $\phi_{xy}(\tau) = 0$ para todo τ, então $\phi_{zz}(\tau)$ é real e $\Phi_{zz}(f) = \Phi_{zz}(-f)$.

Representação de processos estocásticos estacionários em banda passante

- Caso em que $n(t)$ é um processo Gaussiano:
  - Componentes em quadratura $x(t)$ e $y(t+\tau)$ são conjuntamente Gaussianas.
  - Para $\tau = 0$ são independentes e possuem densidade conjunta:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

  - Onde $\sigma^2 = \phi_{xx}(0) = \phi_{yy}(0) = \phi_{nn}(0)$.

Representação de processos estocásticos estacionários em banda passante

- Representação do ruído branco:
  - DEP constante sobre todo o espectro de frequência.
  - Ruído branco de banda estreita: assume-se que o ruído passou por um filtro e está limitado à banda do sinal.
  - DEP e autocorrelação do equivalente passa-baixa $z(t)$:

$$\Phi_{zz}(f) = \begin{cases} N_0 & (|f| \leq B/2) \\ 0 & (|f| > B/2) \end{cases}$$

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \frac{\sin \pi B \tau}{\pi \tau} \; ; \qquad \lim_{B \to \infty} \phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$$

  - Como a DEP é simétrica em torno de $f = 0$, então $\phi_{yx} = 0$ para todo τ e $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau)$.
  - Ou seja, $x(t)$ e $y(t)$ são sempre descorrelacionados e as autocorrelações de $z(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ são iguais.

Conteúdo

Conceitos de espaço vetorial

- Um vetor $\mathbf{v}$ em um espaço n-dimensional é caracterizado por suas n componentes $[v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_n]$
- Também pode ser representado como uma combinação linear de vetores unitários: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{e}_i$, para $1 \leq i \leq n$
- Onde v_i é a projeção de $\mathbf{v}$ em $\mathbf{e}_i$
- O produto interno de dois vetores n-dimensionais é dado por: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^{n} v_{1i} \, v_{2i}$
- Condição de ortogonalidade entre dois vetores: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$
- Um conjunto de m vetores $\mathbf{v}_k$, $1 \leq k \leq m$, é ortogonal se: $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ para todo $(i, j) \in \{1, \ldots, m\}$ e $i \neq j$

Conceitos de espaço vetorial

- Norma de um vetor: $||\mathbf{v}|| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$
- Conjunto de vetores ortonormais: conjunto de vetores ortogonais onde cada vetor possui norma unitária
- Conjunto de vetores LI: nenhum vetor do conjunto pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores
- Desigualdade triangular: $||\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|| \leq ||\mathbf{v}_1|| + ||\mathbf{v}_2||$. Igualdade somente para $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ colineares, ou seja, $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2$
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2| \leq ||\mathbf{v}_1||\ ||\mathbf{v}_2||$. Igualdade somente para $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2$
- Norma ao quadrado da soma de vetores: $||\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2||^2 = ||\mathbf{v}_1||^2 + ||\mathbf{v}_2||^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$
- Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são ortogonais, então $||\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2||^2 = ||\mathbf{v}_1||^2 + ||\mathbf{v}_2||^2$

Conceitos de espaço vetorial

- Transformação linear em um espaço n-dimensional: $\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v}$
- Caso particular em que $\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{v}$ temos que: $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
- $\mathbf{v}$ é chamado de autovetor da transformação e λ é o autovalor correspondente
- Procedimento de Gram-Schmidt: construção de um conjunto de vetores ortonormais a partir de um conjunto de vetores n-dimensionais $\mathbf{v}_i$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1/||\mathbf{v}_1|| \\
&\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 \quad , \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}'_2/||\mathbf{u}'_2|| \\
&\mathbf{u}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \quad , \qquad \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}'_3/||\mathbf{u}'_3|| \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

- Obtém-se um conjunto de n_1 vetores onde, em geral, $n_1 \leq n$

Conceitos de espaço de sinais

- Analogia entre vetores e conjunto de sinais definidos em intervalo $[a, b]$
- Sejam os sinais complexos $x_1(t)$ e $x_2(t)$, o seu produto interno é: $< x_1(t), x_2(t) >= \int_a^b x_1(t)x_2^*(t)dt$
- A norma de um sinal é definida como: $||x(t)|| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$
- Definições de conjunto ortonormal e independência linear análogas ao caso vetorial
- Desigualdade triangular: $||x_1(t) + x_2(t)|| \leq ||x_1(t)|| + ||x_2(t)||$
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\int_a^b x_1(t)x_2^*(t)dt\right| \leq \left|\int_a^b |x_1(t)|^2 dt\right|^{1/2} \left|\int_a^b |x_2(t)|^2 dt\right|^{1/2}$$

Expansão ortogonal de sinais

- Sinal $s(t)$ determinístico, real e de energia finita: $\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt$
- Conjunto de funções ortonormais $\{f_n(t), n = 1, 2, \ldots, N\}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) f_m(t) dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$$

- O sinal $s(t)$ pode ser aproximado por uma combinação linear destas funções:

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t)$$

- Onde $\{s_k, 1 \leq k \leq K\}$ são os coeficientes na aproximação de $s(t)$, sendo o erro de aproximação dado por:

$$e(t) = s(t) - \hat{s}(t)$$

Expansão ortogonal de sinais

- Energia do erro de aproximação:

$$\mathcal{E}_e = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - \hat{s}(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t) \right]^2 dt$$

- Coeficientes ótimos que minimizam a energia do erro podem ser obtidos ao resolver o problema de otimização.
- Forma alternativa de encontrar a solução: resultado da teoria da estimação baseado no critério do erro médio quadrático.
- O mínimo de $\mathcal{E}_e$ com respeito a $\{s_k\}$ é obtido quando o erro é ortogonal a cada uma das funções da expansão em série, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t) \right] f_n(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, K$$

- Como as funções $\{f_n(t)\}$ são ortonormais então temos que:

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) f_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \ldots, K$$

Expansão ortogonal de sinais

- Os coeficientes são obtidos ao se projetar $s(t)$ em cada função $\{f_n(t)\}$.
- $\hat{s}(t)$ é a projeção de $s(t)$ sobre o espaço de sinal K-dimensional definido pelas funções $\{f_n(t)\}$.
- O erro quadrático médio de aproximação é dado por:

$$\mathcal{E}_{\text{min}} = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)s(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t) s(t) dt = \mathcal{E}_s - \sum_{k=1}^{K} s_k^2$$

- No caso em que $\mathcal{E}_{\text{min}} = 0$:

$$\mathcal{E}_s = \sum_{k=1}^{K} s_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt \Longrightarrow s(t) = \sum_{k=1}^{K} s_k f_k(t)$$

- O conjunto $\{f_n(t)\}$ é dito *completo* quando todo sinal de energia finito puder ser representado por uma expansão em série para a qual $\mathcal{E}_{\text{min}} = 0$.

Expansão ortogonal de sinais

- Procedimento de Gram-Schmidt
  - Construção de um conjunto de ondas ortonormais a partir de um conjunto finito de sinais de energia $\{s_i(t), i = 1, \ldots, M\}$.

$$f_1(t) = \frac{s_1(t)}{||s_1(t)||}$$

$$c_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2 f_1(t) dt \,, \qquad f_2(t) = \frac{s_2(t) - c_{12} f_1(t)}{||s_2(t) - c_{12} f_1(t)||}$$

$$\vdots$$

$$c_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k f_i(t) dt \,, \qquad f_k(t) = \frac{s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik} f_i(t)}{||s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik} f_i(t)||}$$

- O processo continua até que as M formas de onda tenham sido processadas e $N \leq M$ ondas ortonormais tenham sido construídas.
- Para o caso em que os sinais $s_i(t)$ são LI, temos que $N = M$.

Expansão ortogonal de sinais

- Os M sinais $\{s_n(t)\}$ podem ser expressos como combinações lineares das funções ortonormais $\{f_n(t)\}$:

$$s_k(t) = \sum_{n=1}^{N} s_{kn} f_n(t), \qquad k = 1, \ldots, M$$

- E com relação à energia temos que:

$$\mathcal{E}_k = \int_{-\infty}^{\infty} s_k^2(t)dt = \sum_{n=1}^{N} s_{kn}^2 = ||\mathbf{s}_k||^2$$

- Um sinal temporal pode ser representado como um vetor N-dimensional:

$$\mathbf{s}_k = \left[s_{k1}\ s_{k2}\ \ldots\ s_{kN}\right]$$

- Qualquer sinal pode ser representado geometricamente como um ponto no espaço de sinais definido pelas funções ortonormais $\{f_n(t)\}$

Expansão ortogonal de sinais

- Caso em que os sinais são definidos em banda passante:

$$s_m(t) = \mathrm{Re}[s_{lm} e^{j2\pi f_c t}], \quad m = 1, \ldots, M$$
$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |s_{lm}(t)|^2 dt$$

- Correlação cruzada normalizada:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_k(t)dt = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}(t)s_{lk}^*(t)dt}_{\rho_{km}} \right\}$$

- O coeficiente de correlação cruzada real pode ser definido como:

$$\mathrm{Re}(\rho_{km}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_k(t)dt = \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{||\mathbf{s}_m||||\mathbf{s}_k||} = \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{\sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}}$$

Expansão ortogonal de sinais

- Distância Euclidiana entre um par de sinais:

$$d_{km}^{(e)} = ||\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_k|| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [s_m(t) - s_k(t)]^2 dt \right\}^{1/2} =$$
$$= \{\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_k - 2\sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k} \mathrm{Re}(\rho_{km})\}^{1/2}$$

- Para o caso em que $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$ para todo m e k, temos que:

$$d_{km}^{(e)} = \{2\mathcal{E}[1 - \mathrm{Re}(\rho_{km})]\}^{1/2}$$

- A distância Euclidiana é uma forma alternativa de medir a similaridade dos sinais ou dos vetores correspondentes.
- Exemplo de funções ortonormais em sistemas modulados digitalmente:

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t \qquad f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t$$

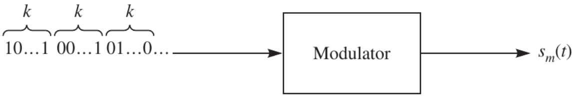
Conteúdo

Representação de sinais modulados digitalmente

- Modulador em comunicações digitais:
  - Mapeia a informação digital em formas de onda analógicas
  - Blocos de $k = \log_2 M$ bits são tirados da sequência de informação $\{a_n\}$
  - E são mapeados em uma das $M = 2^k$ formas de onda disponíveis $\{s_m(t),\ m = 1, 2, \dots, M\}$
- Tipos de mapeamento:
  - Com memória ou sem memória (dependência de mapeamentos anteriores)
  - Linear ou não-linear (princípio da superposição)
- Formas de onda podem diferir em termos da amplitude, fase, frequência, ou combinação de um ou mais parâmetros.
- Consideração: taxa de dados na entrada do modulador de R bit/s.

Representação de sinais modulados digitalmente

- Diagrama de bloco de um esquema de modulação digital sem memória.



Modulação por amplitude de pulso (PAM)

- Amplitude diferencia as formas de onda.
- Formas de onda podem ser representadas como:

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \mathrm{Re}[A_m g(t) e^{j2\pi f_c t}] \\ &= A_m g(t) \cos 2\pi f_c t, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

- Onde $\{A_m, 1 \leq m \leq M\}$ denota o conjunto de $M = 2^k$ possíveis amplitudes, associadas aos blocos de k bits ou *símbolos*.
- Possíveis valores de A_m:

$$A_m = (2m - 1 - M)d, \quad m = 1, 2, \ldots, M$$

- Onde $2d$ é a distância entre amplitudes de sinais adjacentes.
- O pulso de sinal $g(t)$ é real e sua forma afeta o espectro do sinal transmitido

Modulação por amplitude de pulso (PAM)

- Taxa de símbolos: R/k
- Intervalo de bit: $T_b = 1/R$
- Intervalo de símbolo: $T = k/R = kT_b$
- Energia de sinal PAM:

$$\mathcal{E}_m = \int_0^T s_m^2(t)dt = \frac{1}{2}A_m^2 \int_0^T g^2(t)dt = \frac{1}{2}A_m^2\mathcal{E}_g$$

- Sinais PAM são unidimensionais ($N = 1$) e possuem forma geral:

$$s_m(t) = s_m f(t)$$

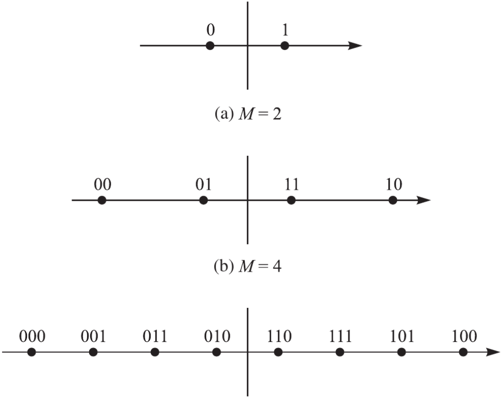
- Onde

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t$$

$$s_m = A_m\sqrt{\mathcal{E}_g/2}$$

Modulação por amplitude de pulso (PAM)

- Diagrama de espaço de sinais para sinais digitais PAM.



(a) $M = 2$

(b) $M = 4$

(c) $M = 8$

Modulação por amplitude de pulso (PAM)

- PAM também é conhecido como Chaveamento por deslocamento de amplitude (ASK - Amplitude Shift Keying).
- Mapeamento dos grupos de bits (símbolos) em amplitudes de sinal:
  - Pode ser feito de diversas maneiras.
  - Mapeamento mais comum: codificação Gray, na qual sinais de amplitudes adjacentes diferem de 1 dígito binário.
  - Motivação: erros mais prováveis causados por ruído ocorrem quando amplitudes adjacentes são incorretamente selecionadas.
  - Na codificação Gray esse tipo de erro leva a somente 1 erro de bit na sequência de k bits.
- Caso particular em que $M = 2$:
  - Propriedade: $s_1(t) = s_2(t)$.
  - Possuem mesma energia e coeficiente de correlação cruzada igual a -1.
  - Sinais antipodais.

Modulação por amplitude de pulso (PAM)

- Distância Euclidiana entre qualquer par de pontos de sinal:

$$d_{mn}^{(e)} = \sqrt{(s_m - s_n)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_g/2}\left|A_m - A_n\right| = d\sqrt{2\mathcal{E}_g}\left|m - n\right|$$

- A distância entre um par de pontos adjacentes (distância mínima) é:

$$d_{\mathrm{min}}^{(e)} = d\sqrt{2\mathcal{E}_g}$$

- Sinal PAM $s_m(t)$, para $m = 1, \ldots, M$, pode ser implementado de forma Double Side Band (DSB) ou Single Side Band (SSB):

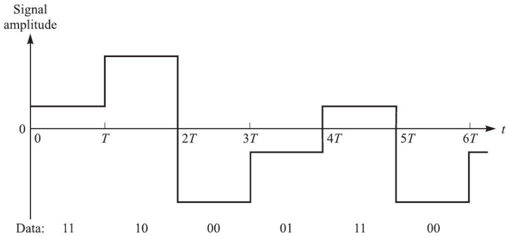
$$s_{m,\mathrm{DSB}}(t) = \mathrm{Re}\{A_m g(t) e^{j2\pi f_c t}\}$$
$$s_{m,\mathrm{SSB}}(t) = \mathrm{Re}\{A_m [g(t) \pm j\hat{g}(t)] e^{j2\pi f_c t}\}$$

- Onde $\hat{g}(t)$ é a transformada de Hilbert de $g(t)$.
- PAM também pode ser implementado em canal sem modulação de portadora, ou seja, em banda base:

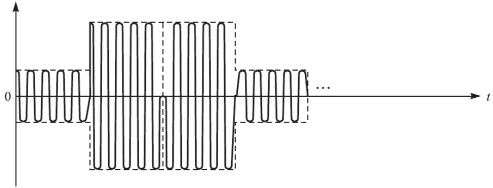
$$s_m(t) = A_m g(t)$$

Modulação por amplitude de pulso (PAM)

- Sinais PAM em banda base e em banda passante:



(a) Baseband PAM signal



(b) Bandpass PAM signal