Sistemas de Comunicações Digitais

Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações

Universidade Federal do Ceará

Semestre 2017.2

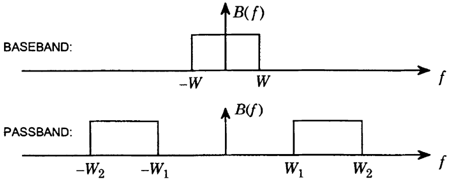
Parte 3

Modulação por amplitude de pulso - PAM

Conteúdo

PAM em banda base

- A escolha da modulação depende das características do meio.
- Os canais podem ser classificados como: banda base (*baseband*) ou banda passante (*bandpass*).

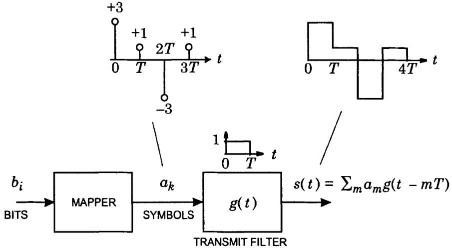


- Sinal PAM em banda base:

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT)$$

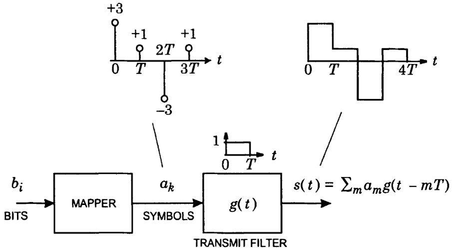
- Taxa de símbolo: $1/T$
- Pulso de transmissão: $g(t)$
- Símbolos: $\{a_k\}$

PAM em banda base



- O sinal PAM pode ser interpretado como uma sequência de pulsos superpostos com a amplitude do k-ésimo pulso determinada pelo k-ésimo símbolo.
- Sequência de bits de entrada é mapeada em uma sequência de símbolos $\{a_k\}$ por um *mapeador*.
- Os símbolos são restritos a um alfabeto finito $\mathcal{A}$, de forma que $a_k \in \mathcal{A}$ e $|\mathcal{A}| = 2^b$, para um inteiro b.

PAM em banda base



- A taxa de símbolos $1/T$ também é chamada de *baud rate*.
- O mapeamento pode ser precedido por uma etapa de codificação de canal, na qual é adicionada redundância à sequência de bits, de forma a reduzir os erros.
- Nesta disciplina vamos assumir que os símbolos que resultam do mapeamento são *iid* (independentes e identicamente distribuídos).

Formatação de pulso

- Vamos considerar nessa seção o caso sem ruído, tendo como objetivo determinar a relação entre a largura de banda e a taxa de símbolos.
- Considere a amostragem de $s(t)$ em múltiplos inteiros do tempo de símbolo:

$$\begin{aligned} s(kT) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(kT - mT) = a_k * g(kT) \\ &= \underbrace{a_k g(0)}_{\text{Termo desejado}} + \underbrace{\sum_{m \neq k} a_m g(kT - mT)}_{\text{Interferência Inter-simbólica (ISI)}} \end{aligned}$$

- Condição para que a ISI seja anulada:

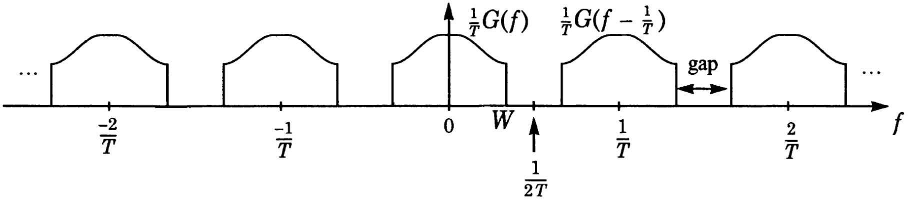
$$g(kT) = \delta_k$$

Formatação de pulso

- Aplicando a transformada de Fourier obtemos:

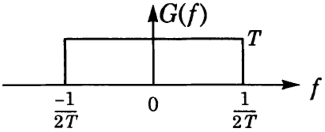
$$g(kT) = \delta_k \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{m}{T}\right) = 1$$

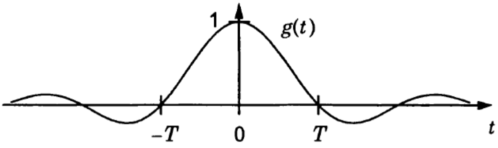
- Obtemos portanto o *critério de Nyquist*.
- Um pulso que satisfaz esse critério é chamado de *pulso de Nyquist*.
- Este critério implica que existe uma banda mínima a ser respeitada para se transmitir a uma certa taxa sem ISI.



Formatação de pulso

- Largura de banda mínima para evitar ISI: $W \geq 1/(2T)$
- Máxima taxa de símbolos correspondente: $1/T \leq 2W$
- Mas não é qualquer pulso que satisfaz o critério de Nyquist: o espectro resultante deve ser uma constante.
- Exemplo de pulso que satisfaz o critério:

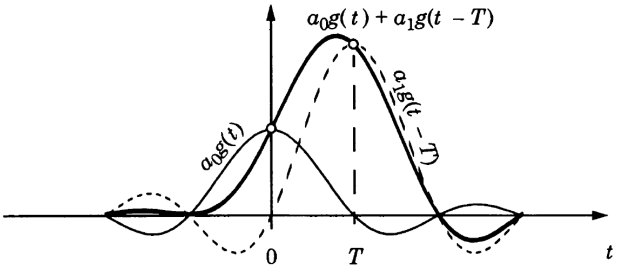




$$G(f) = \begin{cases} T, & -1/(2T) \leq f \leq 1/(2T) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad g(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Formatação de pulso

- Ilustração de uso do pulso de Nyquist.
- Considere símbolos sucessivos com valores $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.
- Contribuição dos símbolos ao sinal:



Formatação de pulso

- O pulso ideal retangular (na frequência) possui a propriedade desejável de mínima banda, mas apresenta problemas de realização prática.
- Um pulso prático deve apresentar um fator de excesso de banda α, de forma que:

$$W = \frac{1+\alpha}{2T}$$

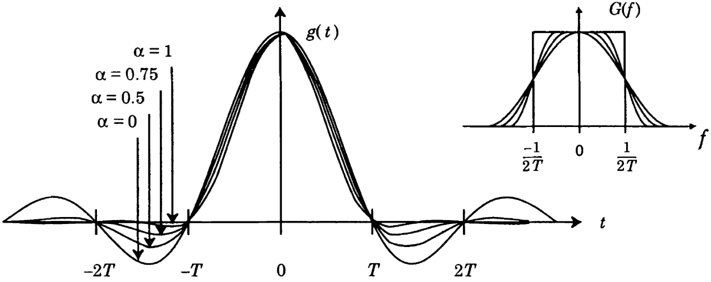
- Pulso ideal ocorre para $\alpha = 0$;
- Valores práticos de excesso de banda: 10% a 100%.
- Custo-benefício entre aumento de banda e simplicidade de implementação.
- α também é chamado de fator de *roll-off*.
- Existem múltiplas soluções de pulsos que satisfazem o critério de Nyquist para $\alpha > 0$.

Formatação de pulso

- Pulso cosseno levantado

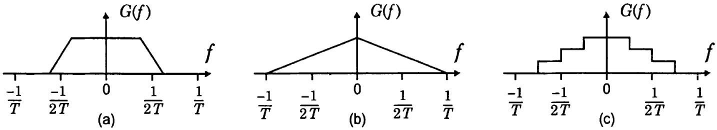
$$g(t) = \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\right)\left(\frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2}\right)$$

$$G(f) = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ T\cos^2\left[\frac{\pi T}{2\alpha}\left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T}\right)\right], & \frac{1-\alpha}{2T} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & \frac{1+\alpha}{2T} < |f| \end{cases}$$



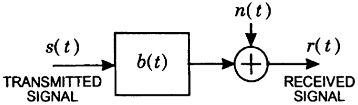
Formatação de pulso

- Existe um número infinito de pulsos que satisfazem o critério de Nyquist.
- Seguem alguns exemplos adicionais:



Impacto da filtragem sobre o PAM

- Consideremos agora o impacto do canal, modelado como um filtro linear invariante no tempo com resposta ao impulso $b(t)$ e ruído aditivo $n(t)$.



- Aplicando o sinal PAM nesse modelo obtemos:

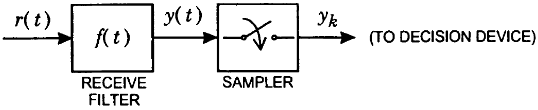
$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(t - mT - \tau) d\tau + n(t)$$

- Para $h(t) = b(t) * g(t)$, chamado de pulso recebido, obtemos

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m h(t - mT) + n(t)$$

Impacto da filtragem sobre o PAM

- Se o sinal transmitido é PAM, o sinal recebido também é PAM, mas com um diferente formato de pulso e com a adição de ruído.
- Filtro de recepção:
  - Compensação da distorção do canal.
  - Diminuição do efeito do ruído aditivo.
  - Condicionamento do sinal recebido antes da amostragem.
  - Pode ser projetado para evitar ISI após amostragem.



Impacto da filtragem sobre o PAM

- Saída do filtro de recepção antes da amostragem:

$$y(t) = \sum_{\infty}^{\infty} a_m p(t - mT) + n'(t)$$

- Onde $p(t)$ é o formato de pulso resultante, dado por:

$$p(t) = g(t) * b(t) * f(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad P(f) = G(f)B(f)F(f)$$

- Para evitar ISI, o pulso resultante deve ser Nyquist, e não somente $g(t)$, portanto:

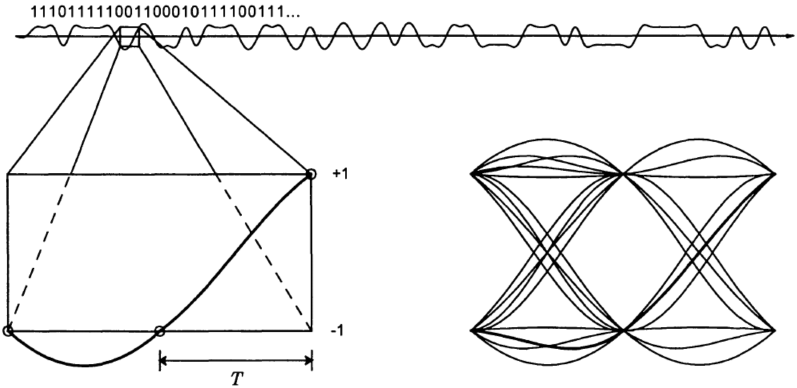
$$p(kt) = \delta_k \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left(f - \frac{m}{T}\right) = T$$

ISI e Diagramas de olho

- Cancelamento perfeito da ISI é difícil de ser alcançado:
  - Imperfeições na estimativa de canal.
  - Limitações práticas de implementação do pulso de transmissão.
- Diagrama de olho:
  - Ilustra a degradação do sinal.
  - Pode ser gerado em osciloscópio.
  - Ferramenta de auxílio na etapa de projeto do sistema.
  - Consiste da superposição de várias pequenas partes de um sinal.
- A presença de ISI tende a fechar o olho verticalmente.
- Instante ideal de amostragem é o ponto de máxima abertura.
- Abertura horizontal é importante para reduzir o impacto de erros de temporização.

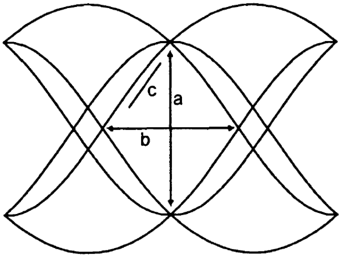
ISI e Diagramas de olho

- PAM binário com 50% de banda excedente.



(a) (b)

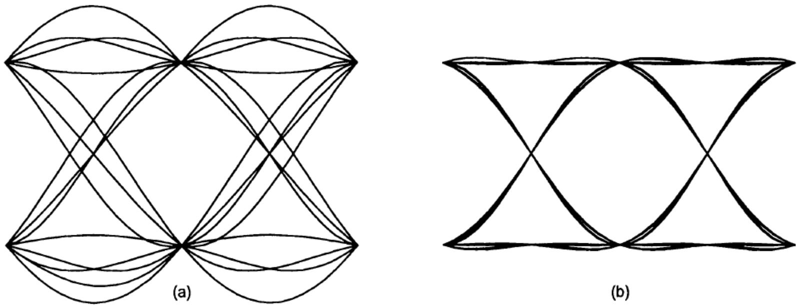
ISI e Diagramas de olho



a) Abertura vertical indica imunidade a ruído
b) Abertura horizontal indica imunidade a erros de temporização.
c) Inclinação da pálpebra interna indica a sensibilidade a *jitter* de temporização.

ISI e Diagramas de olho

- Diagramas de olho para (a) 25% e (b) 100% de banda excedente.



Taxa de bits e eficiência espectral

- Os símbolos são escolhidos, de forma independente e uniforme, do alfabeto $\mathcal{A}$, de tamanho $|\mathcal{A}|$.
- Cada símbolo carrega $\log_2|\mathcal{A}|$ bits de informação.
- Taxa de bits do PAM:

$$R_b = \frac{\log_2|\mathcal{A}|}{T} \quad \text{bit/s}$$

- Formas de aumentar a taxa:
  - Aumentar a ordem da modulação (limitação de potência e impacto do ruído)
  - Aumentar a taxa de símbolos $1/T$ (limitação de banda e impacto da ISI)
- Eficiência espectral:

$$\nu = \frac{\text{taxa de bits}}{\text{banda}} = \frac{R_b}{W} \quad \text{bit/s/Hz}$$

Taxa de bits e eficiência espectral

- Para o PAM temos: $W = (1+\alpha)/(2T)$
- A eficiência espectral pode ser simplificada para:

$$\nu = \frac{R_b}{W} = \frac{\log_2|\mathcal{A}|/T}{(1+\alpha)/(2T)} = \frac{2\log_2|\mathcal{A}|}{1+\alpha}$$

- Também podemos isolar o tamanho do alfabeto:

$$|\mathcal{A}| = 2^{(1+\alpha)\nu/2}$$

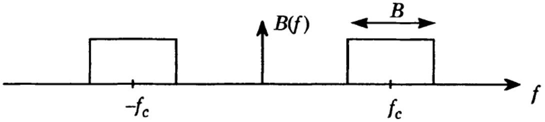
- Para o caso do filtro ideal com $\alpha = 0$, temos:

$$\nu_{\text{max}} = 2\log_2|\mathcal{A}| \quad \text{e} \quad |\mathcal{A}| = 2^{\nu_{\text{max}}/2}$$

Conteúdo

Representação em banda passante do PAM

- Comunicações práticas normalmente ocorrem em banda passante.



- Representações em banda passante do PAM:
  - PAM *double-sideband* (PAM-DSB)
  - PAM *single-sideband* (PAM-SSB)
  - PAM *em banda passante*

PAM-DSB

- PAM-DSB modula diretamente o sinal PAM aplicando oscilador local:

$$s(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi f_c t)\sum_k a_k g(t - kT)$$

- Sinal PAM de banda $B/2$ passa a ocupar B em banda passante.
- Aplicando o critério de Nyquist:

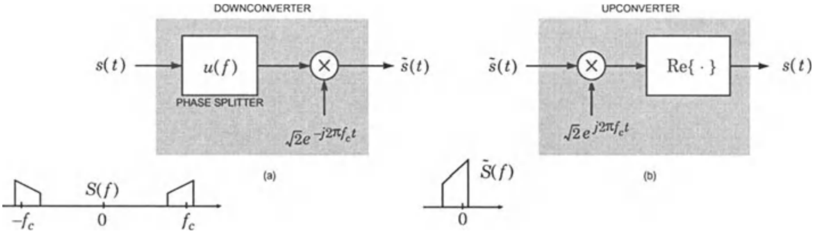
$$\frac{1}{2T} \leq (B/2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{T} \leq B$$

- Desta forma a eficiência espectral cai para a metade da eficiência do PAM em banda base:

$$\nu_{\mathsf{max}}^{\mathsf{DSB}} = \frac{R_b}{B} = \frac{\log_2|\mathcal{A}|/T}{1/T} = \log_2|\mathcal{A}|$$

PAM-SSB

- PAM-SSB evita a redundância das faixas laterais, transmitindo somente uma das faixas.
- Pode ser implementado usando um divisor de fase:



- Mesma eficiência do PAM em banda base.
- Dificuldade prática de implementação.

PAM em banda passante

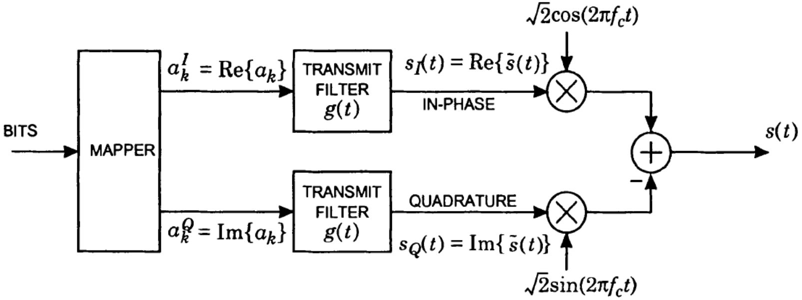
- Modificação do PAM-DSB para aumentar sua eficiência.
- Definição de componentes em fase $\{a_k^I\}$ e quadratura $\{a_k^Q\}$.

$$s(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi f_c t)\sum_k a_k^I g(t-kT) - \sqrt{2}\sin(2\pi f_c t)\sum_k a_k^Q g(t-kT)$$

- O componente em quadratura representa um recurso extra.
- Mesma banda do PAM-DSB, mas com o dobro da eficiência espectral, pois transporta o dobro de informação.
- Classificação com relação à escolha das sequências $\{a_k^I\}$ e $\{a_k^Q\}$:
  - Escolha independente: QAM (modulação em amplitude e quadratura)
  - Escolha conjunta: PAM *em banda passante*.

PAM em banda passante

- Diagrama de um transmissor PAM em banda passante:



PAM em banda passante

- Representação em termos da envoltória complexa:

$$s(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\{\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\}$$

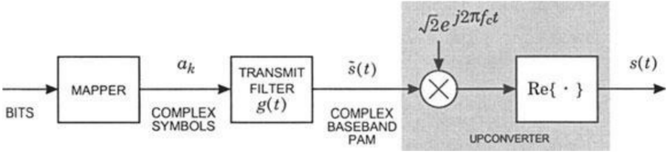
- Onde $\tilde{s}(t)$ corresponde ao equivalente passa-baixa:

$$\tilde{s}(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \text{ , com } \quad a_k = a_k^I + ja_k^Q$$

- Sinal semelhante ao PAM em banda base, mas com símbolos complexos e pulso real.

PAM em banda passante

- Implementação alternativa do transmissor PAM baseada na representação complexa:



- Essa implementação é menos eficiente (parte imaginária é computada e descartada), mas a representação complexa é mais compacta e concisa.
- PAM *em banda passante* e SSB duplicam a eficiência do PAM-DSB.
  - SSB fixa a taxa de bits e corta a banda pela metade.
  - PAM *em banda passante* duplica a taxa de bits e mantém a banda.

PAM em banda passante

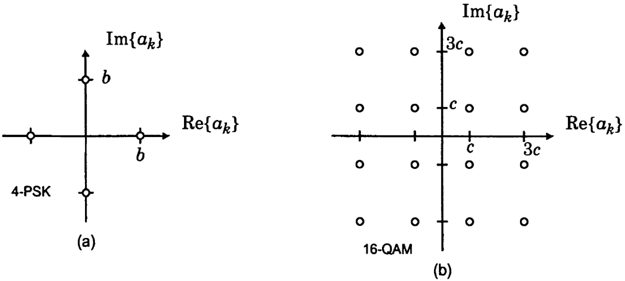
- Representações em: a) fase e quadratura; b) envoltória complexa.
- Terceira representação baseada em coordenadas polares:

$$
\begin{aligned}
a_m &= c_m e^{j\theta_m} \\
s(t) &= \sqrt{2}\mathrm{Re}\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j(2\pi f_c t + \theta_m)} g(t - mT) \right\} \\
&= \sqrt{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \cos(2\pi f_c t + \theta_m) g(t - mT)
\end{aligned}
$$

- Amplitude e fase da portadora são determinadas por a_m.
- Também chamado de AM/PM.
- Indica que o PSK (chaveamento por deslocamento de fase) é um caso particular do PAM em banda passante.

Constelações

- O alfabeto é o conjunto $\mathcal{A}$ de símbolos disponíveis para transmissão.
- Exemplos:
  - Alfabeto real: $\mathcal{A} = \{-3. -1, +1, +3\}$
  - Alfabeto complexo: $\mathcal{A} = \{-1. -j, +1, +j\}$
- Constelação de sinais: conjunto de pontos do alfabeto dispostos em um plano complexo.



Constelações

- Cálculo da energia média de um pulso PAM em banda passante.
- Considerações:
  - Símbolos equiprováveis.
  - Pulso de transmissão $g(t)$ com energia $\mathcal{E}_g$.
  - Pulso transmitido de forma **isolada**, por exemplo considerando pulso ideal de Nyquist com zero ISI. Neste caso pode-se omitir o subíndice k relativo ao k-ésimo tempo de símbolo, ou seja, $\tilde{s}(t) = ag(t)$.
- Sinal e seu equivalente passa-baixa: $s(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\{\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\}$
- Cálculo da energia média $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathrm{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt\right] = \mathrm{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(t)|^2 dt\right] = \mathrm{E}[|a|^2]\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt \\ &= \left(\frac{1}{|\mathcal{A}|}\sum_{a\in\mathcal{A}} |a|^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \mathcal{E}_a\mathcal{E}_g\end{aligned}$$

Constelações

- Considerando a envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ do sinal PAM, podemos calcular sua densidade espectral de potência (DEP) $S_{\tilde{s}}(f)$:

$$S_{\tilde{s}}(f) = \frac{1}{T}|G(f)|^2 S_a(f)$$

- Onde $G(f)$ é a transformada de Fourier do pulso e $S_a(f)$ é a DEP da sequência de informação.
- Para o caso em que a sequência é branca, a sua DEP é constante, dada por $S_a(f) = \mathcal{E}_a$.
- A potência P pode ser calculada ao integrar a DEP na frequência, obtendo portanto:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}|G(f)|^2 S_a(f)df = \frac{\mathcal{E}_a}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|G(f)|^2 df = \frac{\mathcal{E}_a \mathcal{E}_g}{T} = \frac{\mathcal{E}}{T}$$

Projeto da constelação

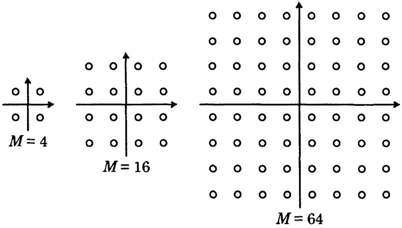
- A distância mínima d_{min} é um parâmetro importante.
- Quanto maior a distância mínima maior a imunidade ao ruído.
- Relação custo-benefício entre potência de transmissão, tamanho da constelação e imunidade ao ruído.
- Projeto da constelação:
  - Objetivo: maximizar a distância entre símbolos evitando exceder a restrição de potência de transmissão.
  - Constelações ótimas podem ser difíceis de derivar e de alto custo.
  - Seu **desempenho** é invariante à translação.
  - Qual translação resulta em mínima potência?

$$\mathrm{E}[|a-m|^2] = \sum_{i=1}^{M} p_a(a_i)|a_i - m|^2$$

  - Melhor escolha para translação: $m = \mathrm{E}[a]$.
  - Constelação com média zero gasta menos energia que outras translações.

Projeto da constelação

- Exemplos de constelações QAM quadradas ($M = L^2$):

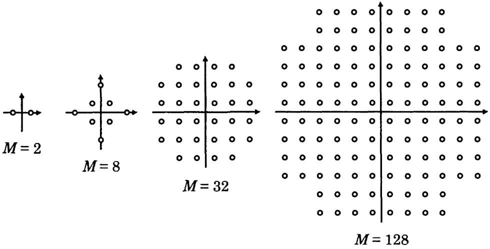


- Componentes a_I e a_Q são escolhidas de um alfabeto PAM L-ário $\{\pm c, \pm 3c, \ldots, \pm(L-1)c\}$, com m-ésimo elemento $c(-L+1+2m)$.
- Energia média de uma constelação M-QAM:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_a &= \mathrm{E}[|a|^2] = \mathrm{E}[a_I^2] + \mathrm{E}[a_I^2] = 2\mathrm{E}[a_I^2] \\ &= \frac{2}{L}\sum_{m=0}^{L-1} c^2(-L+1+2m)^2 = \frac{2}{3}c^2(L^2-1) = \frac{2}{3}c^2(M-1)\end{aligned}$$

Projeto da constelação

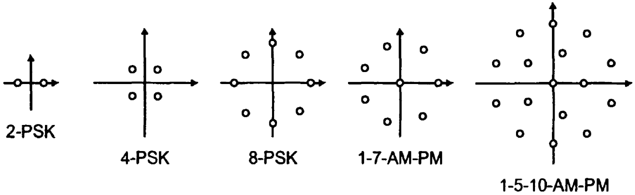
- Exemplos de constelações QAM retangulares ($M \neq L^2$):



- Mapeamento ligeiramente mais complicado.
- Aplicações em combinação com códigos em treliça.

Projeto da constelação

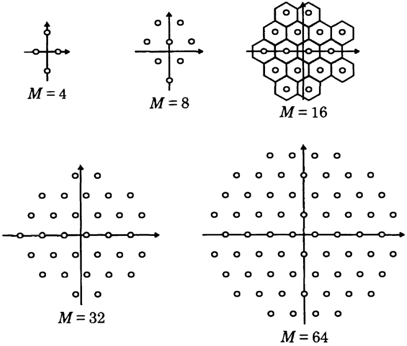
- Exemplos de constelações PSK e AM-PM:



- Elementos do alfabeto PSK: $a = \sqrt{\mathcal{E}} e^{j2\pi m/M}$
- Envoltória constante e pontos com mesma energia.
- Implementação de receptor de baixo custo.

Projeto da constelação

- Exemplos de constelações hexagonais:



- Símbolos localizados nos vértices de triângulos equiláteros.
- Regiões de decisão hexagonais.
- Desempenho ligeiramente superior a constelações retangulares, mas com complexidade elevada.

Conteúdo

Critério de distância mínima

- Mudamos agora o foco para o projeto do receptor.
- Vamos considerar inicialmente a ausência de ISI, ou seja, assumindo que somente um pulso é transmitido.
- Projeto baseado em distância mínima e estrutura do filtro casado.
- Expressão do sinal recebido considerando a transmissão de um único símbolo $a \in \mathcal{A}$:
$$r(t) = ah(t) + n(t)$$
- Onde $h(t)$ é o pulso recebido e $n(t)$ é o ruído.
- Modelo aplicável ao PAM em banda base ou em banda passante (foco no último caso, que é mais geral).
- Problema: determinar a partir de $r(t)$ qual símbolo foi transmitido.

Critério de distância mínima

- Exemplo considerando sinalização binária antipodal, $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$.
- Sinal recebido sem ruído: $h(t)$ ou $-h(t)$

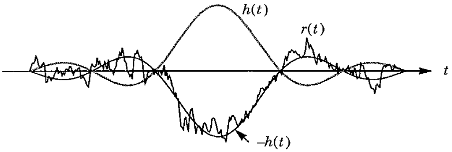


Figura: Sinais antipodais e sinal recebido, dado que -1 foi transmitido.

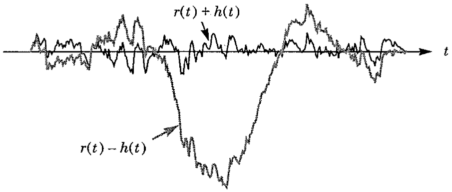


Figura: Diferença entre o sinal recebido e cada um dos sinais da constelação.

Critério de distância mínima

- Quanto menor a diferença entre o sinal recebido e uma dada forma de onda, mais provável que esta tenha sido transmitida.
- Essa métrica pode ser expressa como a energia do sinal da diferença:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - h(t)|^2 dt \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) + h(t)|^2 dt$$

- O resultado é comparado e decide por $\hat{a} = 1$ se a primeira energia for menor, ou por $\hat{a} = -1$ se a segunda for menor.
- De forma geral o **receptor de mínima distância** resolve o problema:

$$\hat{a} = \arg\min_{a \in \mathcal{A}} \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - ah(t)|^2 dt$$

Critério de distância mínima

- Análise da função custo J:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - ah(t)|^2 dt$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_r} - 2\mathrm{Re}\left\{ a^* \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} r(t)h^*(t)dt}_{y\,\text{(correlação)}} \right\} + |a|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_h}$$

- Minimizar a distância equivale portanto a maximizar a correlação:

$$\hat{a} = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} 2\mathrm{Re}\left\{ a^* \int_{-\infty}^{\infty} r(t)h^*(t)dt \right\} - |a|^2 \mathcal{E}_h$$

- Implementação é simplificada, pois basta calcular uma vez a integral.

Critério de distância mínima

- Possíveis implementações da integral de correlação:

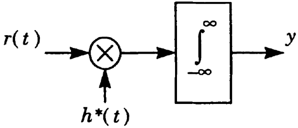


Figura: Correlator.

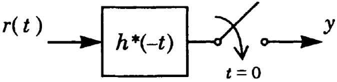


Figura: Filtro casado (MF).

- O MF é preferível ao correlator, pois permite compensar erros de sincronismo ao ajustar o instante de amostragem.

Critério de distância mínima

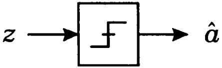
- A função custo também pode ser reescrita como:

$$J = \mathcal{E}_h \left(\frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_h} - 2\mathrm{Re}\left\{ a^* \frac{y}{\mathcal{E}_h} \right\} + |a|^2 \right) = \mathcal{E}_h \left| \frac{y}{\mathcal{E}_h} - a \right|^2 - \frac{|y|^2}{\mathcal{E}_h} + \mathcal{E}_r$$

- O que leva ao problema equivalente de distância mínima:

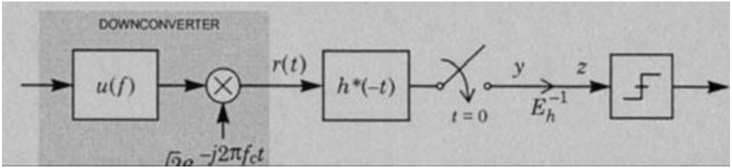
$$\hat{a} = \arg\min_{a \in \mathcal{A}} \left| \frac{y}{\mathcal{E}_h} - a \right|^2$$

- Correlação normalizada $z = y/\mathcal{E}_h$
- Decisão: quantização de z para o símbolo mais próximo do alfabeto, também chamado de *slicer*.



Critério de distância mínima

- Resumo do esquema de recepção do PAM em banda passante:



- Elementos: translação de frequência, filtro casado, amostragem, quantização (*slicer*).
- Para o PAM em banda base não é necessária a translação de frequência.

Propriedades do filtro casado

- O filtro casado representa uma forma de implementar o receptor de distância mínima.
- Também pode ser demonstrado que o MF maximiza a SNR de recepção.
- Considere um filtro de recepção com resposta ao impulso $f(t)$. Segue a saída do filtro e sua posterior amostragem.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) f(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\text{amost. em } t=0} y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) f(-\tau) d\tau$$

- Substituindo $r(t)$ obtemos:

$$y = \underbrace{a \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f(-t) dt}_{S} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} n(t) f(-t) dt}_{N}$$

Propriedades do filtro casado

- Definição da relação sinal-ruído (SNR) no receptor:

$$SNR = \frac{\mathrm{E}[|S|^2]}{\mathrm{E}[|N|^2]} = \frac{\mathrm{E}[|a|^2]\left|\int h(t)f(-t)dt\right|^2}{N_0\int |f(-t)|^2 dt} = \frac{\mathcal{E}_a\left|\int h(t)f(-t)dt\right|^2}{N_0\mathcal{E}_f}$$

- Considere a desigualdade de Schwarz:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t)dt\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt$$

- O valor máximo é obtido para $v(t) = Ku(t)$, onde K é uma constante.
- Aplicando a desigualdade para o numerador da SNR, obtemos o valor máximo para $f(t) = h^*(-t)$, resultando em

$$SNR_{\mathsf{max}} = \frac{\mathcal{E}_a \int |h(t)|^2 dt \int |f(t)|^2 dt}{N_0\mathcal{E}_f} = \frac{\mathcal{E}_a\mathcal{E}_h}{N_0}$$

Filtro casado e ISI

- A otimização anterior desconsiderou o efeito da ISI.
- A transmissão de uma sequência de pulsos geralmente introduz ISI.
- Exceção para o caso em que o formato do pulso resultante obedece o critério de Nyquist.
- A saída do filtro casado $h^*(-t)$ possui resposta em frequência $|H(f)|^2$.
- O critério de Nyquist pode portanto ser expresso como:

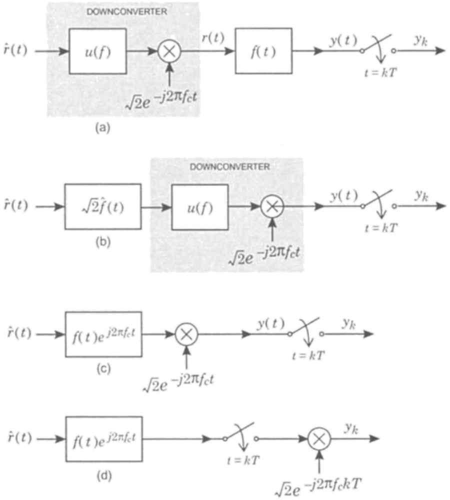
$$S_h(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{m}{T}\right)\right|^2 = 1$$

- O termo $S_h(f)$ é chamado de espectro dobrado (*folded spectrum*) do pulso recebido.
- Para cancelar a ISI pode ser aplicado um filtro de recepção raiz do cosseno levantado:

$$H(f) = F(f) = P(f)^{1/2}$$

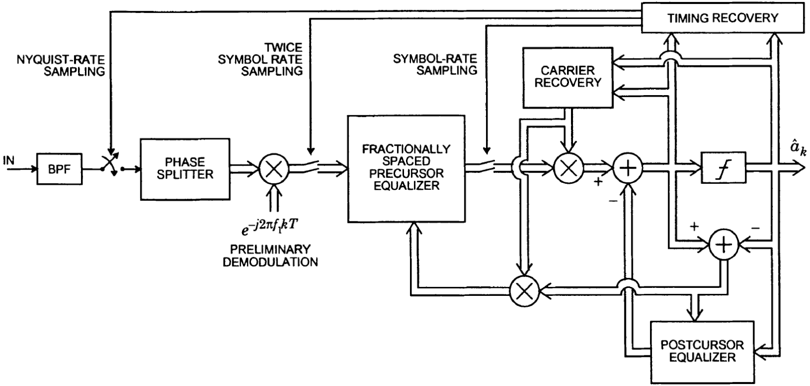
Receptores PAM em banda passante

- Formas alternativas de implementação do PAM em banda passante:



Receptores PAM em banda passante

- Receptores PAM mais elaborados:



Conteúdo

Detecção de sequência de distância mínima

- Extensão do conceito de distância mínima para o caso ISI.
- Sequência de L símbolos: $\mathcal{S} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{L-1}\}$, com $a_i \in \mathcal{A}$ e $M = |\mathcal{A}|$.
- Expressão do sinal recebido:

$$r(t) = \sum_{k=0}^{L-1} a_k h(t - kT) + n(t)$$

- Projeto do detector de sequência de distância mínima:

$$\hat{\mathcal{S}}_k = \arg \min_{\mathcal{S} \in \mathcal{A}^L} \int_{-\infty}^{\infty} \left| r(t) - \sum_{k=0}^{L-1} a_k h(t - kT) \right|^2 dt$$

- Dentre as M^L possíveis sequências, o receptor escolhe aquela que mais se aproxima do sinal observado $r(t)$.

Detecção de sequência de distância mínima

- A decisão é feita sobre toda a sequência, e não símbolo a símbolo.
- Decisor deve esperar a chegada de todos os símbolos da sequência para tomar a decisão.
- Atraso na decodificação é proporcional ao tamanho L da sequência.
- Conceito simples, mas complexidade exponencial em L.
- Como tornar a implementação prática?

Detecção de sequência de distância mínima

- Reescrevendo a função custo:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left| r(t) - \sum_{k=0}^{L-1} a_k h(t-kT) \right|^2 dt$$

$$= \mathcal{E}_r - 2\mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{L-1} a_k^* \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} r(t) h^*(t-kT) dt}_{y(k)} \right\} + \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} a_k a_j^* \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-kT) h^*(t-jT) dt}_{\rho_h(j-k)}$$

$$= \mathcal{E}_r - 2\mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{L-1} a_k^* y(k) \right\} + \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} a_k a_j^* \rho_h(j-k)$$

- Problema equivalente a maximizar a correlação:

$$\hat{\mathcal{S}}_k = \arg \max_{\mathcal{S} \in \mathcal{A}^L} \; 2\mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{L-1} a_k^* y(k) \right\} - \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} a_k a_j^* \rho_h(j-k)$$

Detecção de sequência de distância mínima

- Substituindo a expressão do sinal recebido

$$r(t) = \sum_{k=0}^{L-1} a_k h(t - kT) + n(t)$$

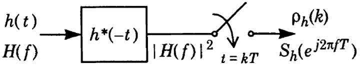
na expressão do sinal $y(k)$ (saída amostrada do filtro casado), temos:

$$\begin{aligned} y(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h^*(t - kT) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{L-1} a_j h(t - jT) h^*(t - kT) + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} n(k) h(t - kT) dt}_{n'(k)} \\ &= \sum_{j=0}^{L-1} a_j \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - jT) h^*(t - kT) \right]}_{\rho_h(k-j)} + n'(k) = \sum_{j=0}^{L-1} a_j \rho_h(k - j) + n'(k) \end{aligned}$$

- Sendo assim, a saída do filtro casado corresponde à convolução entre os símbolos transmitidos e as amostras da autocorrelação temporal do pulso recebido.

Detecção de sequência de distância mínima

- Autocorrelação amostrada do pulso recebido: $\rho_h(k) = \langle h(t), h(t-kT)\rangle$
- Propriedades de $\rho_h(k)$:
  - Valor em $k=0$ dado por $\rho_h(0) = \mathcal{E}_h$
  - Simetria Hermitiana: $\rho_h(-k) = \rho_h^*(k)$
  - Valor máximo em $\rho_h(0)$, ou seja, $|\rho_h(k)| \leq \rho_h(0)\,,\ \forall k$
  - Autocorrelação amostrada pode ser vista como a saída de um filtro casado amostrado quando o pulso recebido é a entrada:

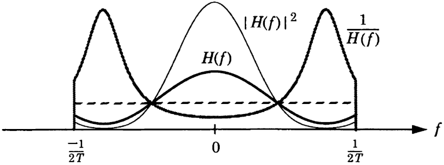


- Transformada discreta de Fourier da auto-correlação amostrada:

$$S_h(e^{j2\pi fT}) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} |H(f-m/T)|^2$$

Detecção de sequência de distância mínima

- Na presença de ISI o filtro casado acentua as distorções de canal.
- Impacto do filtro casado e de equalizador sobre um pulso de recepção que não satisfaz o critério de Nyquist:

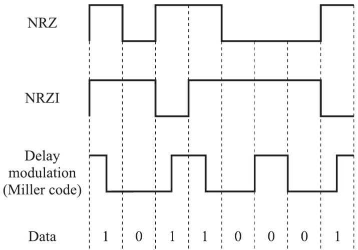


- Critério da distância mínima maximiza a SNR, mas não evita a ISI, uma vez que a saída do filtro casado (que satisfaz co tritério de distância mínima) gera o sinal $y(k) = \sum_{j=0}^{L-1} a_j \rho_h(k-j) + n'(k)$, que contém a ISI.

Estudo de caso: sinal NRZI

- Sinal com memória NRZI: *non-return-to-zero, inverted*
- Codificação diferencial, transições ocorrem quando 1 é transmistido.
- Sequência codificada de saída $\{b_k\}$, sequência de entrada $\{a_k\}$.
- Operação de codificação baseada em adição binária módulo 2.

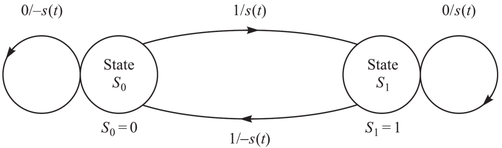
$$b_k = a_k \oplus b_{k-1}$$



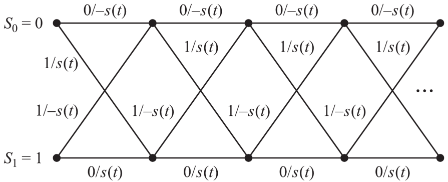
Estudo de caso: sinal NRZI

- Modelagem como cadeia de Markov de dois estados.
- De forma geral, para o caso binário: $P[a_k = 1] = 1 - P[a_k = 0] = p$.
- Matriz de transição de estados e diagrama correspondente:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

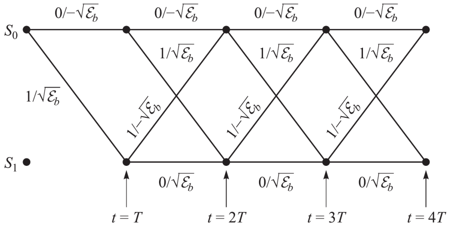


- Diagrama de treliça (evolução temporal):

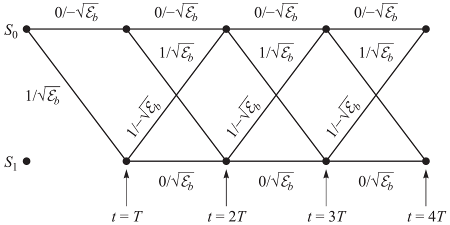


Algoritmo de Viterbi

- Considere um sinal PAM binário NRZI, com $s_1 = -s_2 = \sqrt{\mathcal{E}_b}$.
- Número total de possíveis sequências 2^L.
- Algoritmo de Viterbi reduz a complexidade eliminando sequências de forma iterativa: algoritmo de busca em treliça.
- Diagrama em treliça supondo estado inicial S_0.



Algoritmo de Viterbi

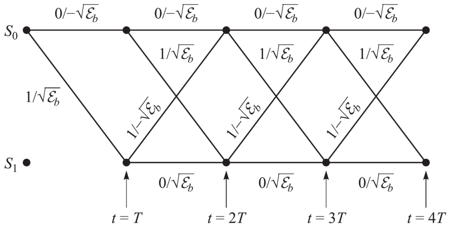


- Memória de 1 bit, treliça atinge estado permanente após 2 transições.
- Em $t = 2T$ há dois caminhos entrando em cada nó.
- Métricas de decisão para o nó S_0 baseadas em distância Euclidiana:

$$D_0(0,0) = (r_1 + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 + (r_2 + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2$$
$$D_0(1,1) = (r_1 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 + (r_2 + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2$$

- Caminho de menor métrica é escolhido e o outro é descartado.

Algoritmo de Viterbi

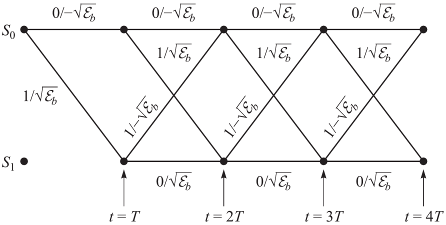


- Mesmo procedimento para o nó S_1 ainda em $t = 2T$

$$D_1(0,1) = (r_1 + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 + (r_2 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2$$
$$D_1(1,0) = (r_1 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 + (r_2 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2$$

- Em $t = 2T$ ficamos portanto com um caminho sobrevivente chegando em cada nó.

Algoritmo de Viterbi

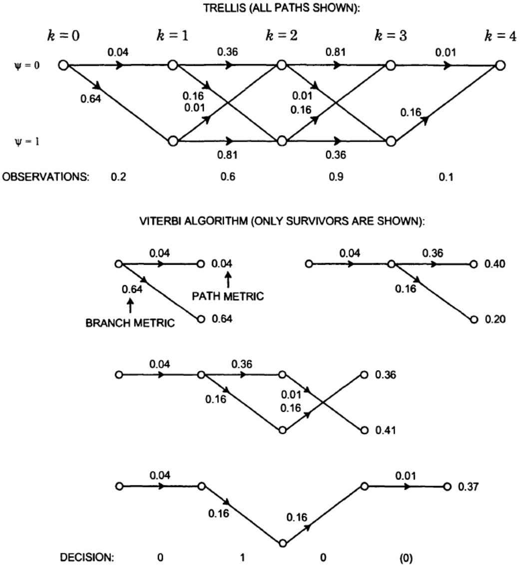


- Supondo que os caminhos sobreviventes em $t = 2T$ sejam $(0, 0)$ em S_0 e $(0, 1)$ em S_1.
- As métricas em $t = 3T$ são calculadas como:

$$D_0(0,0,0) = D_0(0,0) + (r_3 + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 \qquad D_1(0,0,1) = D_0(0,0) + (r_3 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2$$
$$D_0(0,1,1) = D_1(0,1) + (r_3 + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 \qquad D_1(0,1,0) = D_1(0,1) + (r_3 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2$$

- Novamente é escolhido o caminho de menor métrica em cada nó.

Algoritmo de Viterbi

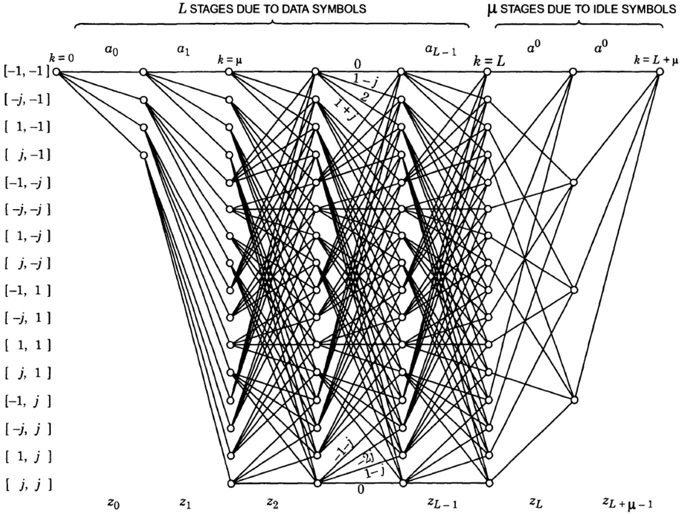


Algoritmo de Viterbi

- O processo continua a cada tempo de símbolo.
- O número de caminhos na treliça é reduzido pela metade a cada estágio.
- Pode ser generalizado para modulação M-ária.
- A escolha do tamanho da sequência para realizar a decisão depende da memória (e.g., número de multi-percursos em canal rádio móvel).
- Supondo que a memória tem comprimento L_m, uma implementação prática do algoritmo geralmente considera sequências de tamanho $L = 5L_m$.
- Desta forma é possível compensar o efeito da memória e evitar um atraso muito grande na entrega dos símbolos no receptor.

Algoritmo de Viterbi

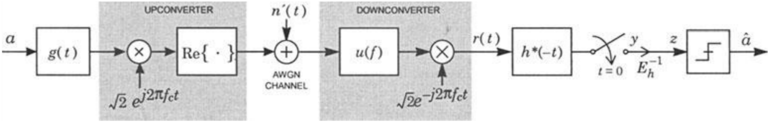
- Exemplo para 4-PSK, canal com memória de tamanho 2.



Conteúdo

Probabilidade de erro de símbolo

- Análise de desempenho do PAM em banda passante na presença de ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN).
- Considere um pulso PAM isolado (ou uma sequência de pulsos que satisfazem o critério de Nyquist).
- Cadeia de transmissão e recepção:



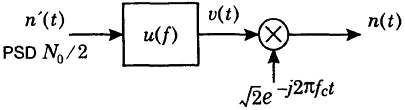
- Sinal recebido:

$$r(t) = ah(t) + n(t)$$

- Onde $a \in \mathcal{A}$, $h(t)$ é o pulso recebido e $n(t)$ o ruído recebido.

Probabilidade de erro de símbolo

- Caracterização estatística do ruído.
- Considere que $n'(t)$ é o ruído antes da translação de frequência: real, Gaussiano, branco e com DEP $N_0/2$.



- Cálculo da DEP do ruído filtrado em $v(t)$ e $n(t)$:

$$S_v(f) = (N_0/2)u(f) \qquad \text{e} \qquad S_n(f) = N_0 u(f + f_c)$$

- Considerando um receptor com filtro casado a saída terá DEP igual a $N_0|H(f)|^2$.

Probabilidade de erro de símbolo

- Considerando o filtro casado, o sinal recebido normalizado é dado por:

$$
\begin{aligned}
z &= \mathcal{E}_h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} r(t)h^*(t)dt = \mathcal{E}_h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (ah(t) + n(t))h^*(t)dt \\
&= a\underbrace{\mathcal{E}_h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h^*(t)dt}_{\mathcal{E}_h} + \underbrace{\mathcal{E}_h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} n(t)h^*(t)dt}_{n} = a + n
\end{aligned}
$$

- A variável complexa n possui distribuição $\mathcal{CN}(0, N_0/\mathcal{E}_h)$
- Processo similar pode ser aplicado para o PAM em banda base.

Probabilidade de erro de símbolo

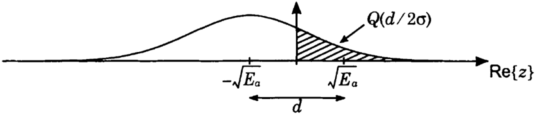
- Relação sinal-ruído:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mathrm{E}[|a|^2]}{\mathrm{E}[|n|^2]} = \frac{\mathcal{E}_a}{N_0/\mathcal{E}_h} = \frac{\mathcal{E}_a \mathcal{E}_h}{N_0}$$

- Detecção: z é aplicado a um *slicer*, o qual escolher o símbolo $a \in \mathcal{A}$ que minimiza $|z - a|^2$.
- Um **erro de símbolo** ocorre quando o *slicer* escolhe um símbolo diferente daquele que foi de fato transmitido.
- Vamos determinar a probabilidade de que o receptor de distância mínima cometa um erro de decisão em cenário AWGN.

Probabilidade de erro de símbolo

- Exemplo de detecção do BPSK, para $\mathcal{A} = \{\pm\sqrt{\mathcal{E}_a}\}$
- Supondo que o símbolo negativo foi transmitido, obtemos a PDF de z:



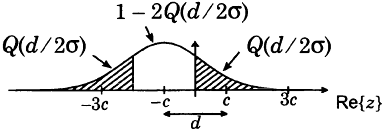
- Distribuição de z: $\mathcal{N}(-\sqrt{\mathcal{E}_a}, \sigma^2)$
- Variância do ruído por dimensão: $\sigma^2 = N_0/(2\mathcal{E}_h)$
- Distância entre símbolos: $d = 2\sqrt{\mathcal{E}_a}$
- Probabilidade de erro de símbolo:

$$\Pr[\text{erro}] = Q(d/2\sigma) = Q(\sqrt{2\mathcal{E}/N_0})$$

- Neste caso a probabilidade de erro de símbolo é igual à de erro de bit.

Probabilidade de erro de símbolo

- Exemplo de detecção do 4-PAM, para $\mathcal{A} = \{\pm c, \pm 3c\}$ e $c = \sqrt{\mathcal{E}_a/5}$
- Supondo que o símbolo $-c$ foi transmitido, obtemos a PDF de z:



- Cálculo da probabilidade de erro de símbolo:

$$\Pr[\text{erro}|a = \pm c] = 2Q(d/2\sigma)$$
$$\Pr[\text{erro}|a = \pm 3c] = Q(d/2\sigma)$$

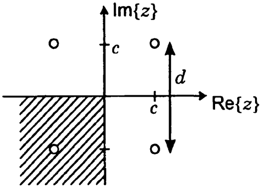
$$\Pr[\text{erro}] = \frac{3}{2}Q(d/2\sigma) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\mathcal{E}/N_0}\right)$$

- De forma geral, para o M-PAM temos:

$$\Pr[\text{erro}] = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6}{(M^2-1)}\mathcal{E}/N_0}\right)$$

Probabilidade de erro de símbolo

- Exemplo de detecção do 4-QAM, para $\mathcal{A} = \{\pm c \pm jc\}$ e $c = \sqrt{\mathcal{E}_a/2}$
- Supondo que o símbolo $-c - jc$ foi transmitido:



- Cálculo da probabilidade de erro de símbolo:

  Pr[acerto$|a = -c - jc] = \Pr[\mathrm{Re}\{z\} < 0, \mathrm{Im}\{z\} < 0] = (1 - Q(d/2\sigma))^2$

  Pr[erro] $= 1 -$ Pr[acerto] $= 2Q(d/2\sigma) - Q^2(d/2\sigma) = 2Q(\sqrt{\mathcal{E}/N_0}) - Q^2(\sqrt{\mathcal{E}/N_0})$

  Aproximação para altos valores de SNR: Pr[erro] $\approx 2Q(\sqrt{\mathcal{E}/N_0})$

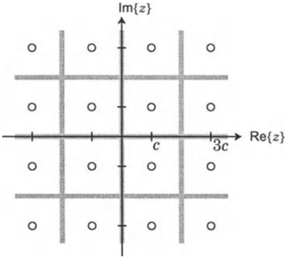
- O 4-PSK, para $\mathcal{A} = \{\pm b, \pm jb\}$ e $b = \sqrt{\mathcal{E}_a}$, corresponde a uma rotação de 45^o do 4-QAM, possuindo o mesmo desempenho.

Probabilidade de erro de símbolo

- Exemplo de detecção do 16-QAM, para:

$$\mathcal{A} = \{\pm c \pm jc, \pm c \pm j3c, \pm 3c \pm jc, \pm 3c \pm j3c\}$$
$$c = \sqrt{\mathcal{E}_a/10}$$

- Definição de regiões: interna, canto, borda.



- Cálculo da probabilidade de erro de símbolo:

$$\text{Pr[acerto}|a \text{ interno]} = [1 - 2Q(d/2\sigma)]^2 \quad \Rightarrow \text{Pr[erro}|a \text{ interno]} \approx 4Q(d/2\sigma)$$
$$\text{Pr[acerto}|a \text{ canto]} = [1 - Q(d/2\sigma)]^2 \quad \Rightarrow \text{Pr[erro}|a \text{ canto]} \approx 2Q(d/2\sigma)$$
$$\text{Pr[acerto}|a \text{ borda]} = [1 - 2Q(d/2\sigma)][1 - Q(d/2\sigma)] \quad \Rightarrow \text{Pr[erro}|a \text{ borda]} \approx 3Q(d/2\sigma)$$

$$\text{Pr[erro]} \approx \frac{4}{16}4Q(d/2\sigma) + \frac{8}{16}3Q(d/2\sigma) + \frac{4}{16}2Q(d/2\sigma) = 3Q(d/2\sigma) = 3Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{5N_0}}\right)$$

Probabilidade de erro de símbolo

- É possível derivar a expressão **exata** da probabilidade de erro de símbolo para constelações M-QAM quadradas, nas quais $M = 2^b$ para b par.
- Probabilidade de erro de símbolo do $\sqrt{M}$-PAM, com metade da potência alocada em cada dimensão:

$$\Pr[\text{erro}]_{\sqrt{M}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\mathcal{E}/N_0}{M-1}}\right)$$

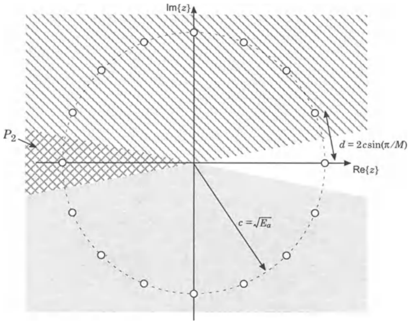
- Probabilidade de erro de símbolo do M-QAM:

$$\begin{aligned}\Pr[\text{erro}]_{M} &= 1 - (1 - \Pr[\text{erro}]_{\sqrt{M}})^2 \\ &= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\mathcal{E}/N_0}{M-1}}\right) - 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 Q^2\left(\sqrt{\frac{3\mathcal{E}/N_0}{M-1}}\right) \\ &\approx 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\mathcal{E}/N_0}{M-1}}\right) \qquad \text{(para altos valores de SNR)}\end{aligned}$$

Probabilidade de erro de símbolo

- Exemplo de detecção do M-PSK, para $\mathcal{A} = \{c, ce^{j2\pi/M}, ce^{j4\pi/M}, \ldots, ce^{j2\pi(M-1)/M}\}$ e $c = \sqrt{\mathcal{E}_a}$

- Região de decisão do símbolo c entre $-\pi/M$ e π/M.
- Expressão fechada não pode ser encontrada.
- Cálculo da probabilidade de erro de símbolo:



$$P_1 = \Pr[\mathrm{Im}\{n'\} > d/2] = Q(d/2\sigma)$$

$$n' = ne^{-j\pi/M}$$

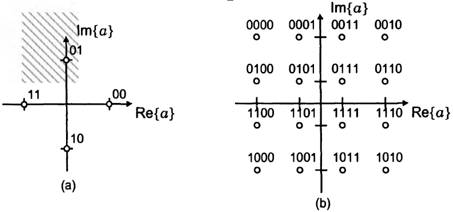
$$\Pr[\text{erro}] = 2P_1 - P_2 \approx 2Q(d/2\sigma) \approx 2Q\left(\sqrt{2\mathcal{E}/N_0}\sin\frac{\pi}{M}\right)$$

Requisitos de banda e SNR do PAM em banda passante

- Probabilidade de erro de símbolo foi calculada como função da SNR $= \mathcal{E}/N_0$ para diferentes esquemas de modulação.
- Para permitir a comparação entre esquemas de diferente ordens, é necessário normalizar a energia por bit:

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{E}/\log_2|\mathcal{A}| = \mathcal{E}/b$$

- Razão entre a energia por bit e o ruído: $\mathcal{E}_b/N_0$
- Mapeamento *Gray* reduz a diferença entre símbolos adjacentes.



- Aproximação:

$$\Pr[\text{erro de bit}] \approx \frac{1}{b}\Pr[\text{erro de símbolo}]$$

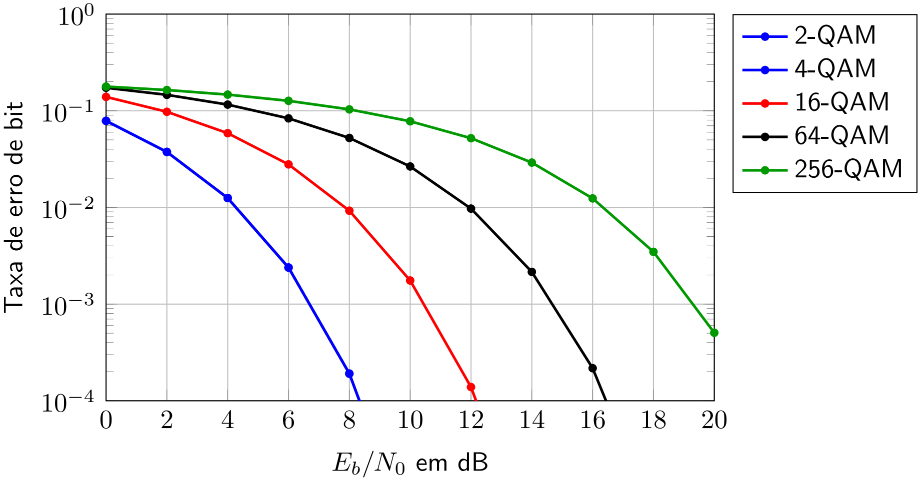
Requisitos de banda e SNR do PAM em banda passante

- Expressões de probabilidade de erro de bit:

$$
\begin{aligned}
P_b^{\mathsf{BPSK}} &= Q(\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}) \\
P_b^{M-\mathsf{QAM}} &\approx \frac{4}{b}(1-2^{-b/2})Q\left(\sqrt{\frac{3b\mathcal{E}_b/N_0}{2^b-1}}\right) \\
P_b^{M-\mathsf{PSK}} &\approx \frac{2}{b}Q\left(\sqrt{2b\mathcal{E}_b/N_0}\sin\frac{\pi}{M}\right)
\end{aligned}
$$

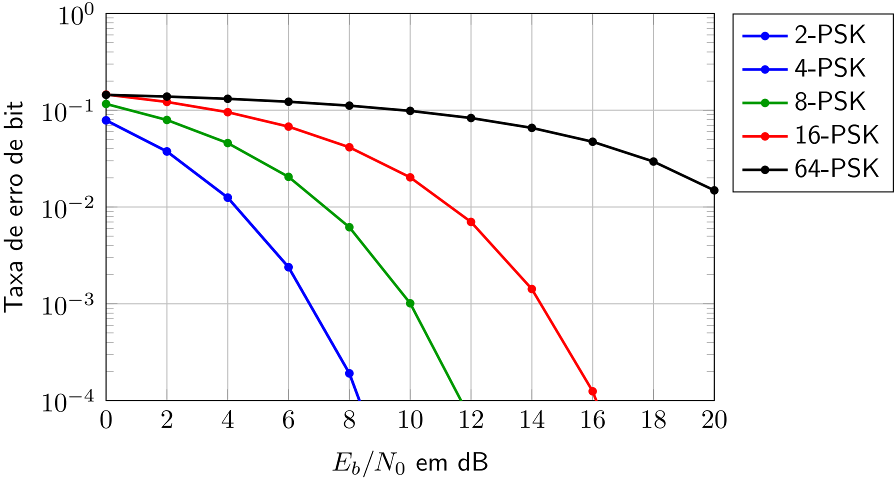
Probabilidade de erro de símbolo

- Desempenho dos esquemas de modulação (QAM):



Probabilidade de erro de símbolo

- Desempenho dos esquemas de modulação (PSK):



Requisitos de banda e SNR do PAM em banda passante

- A SNR por bit necessária para alcançar um determinado valor de probabilidade de erro de bit pode ser encontrada ao rearranjar as equações anteriores:

$$\text{(QAM)} : \mathcal{E}_b/N_0 = \underbrace{\frac{1}{3}\left(Q^{-1}\left(\frac{bP_b}{4(1-2^{-b/2})}\right)\right)^2}_{\Gamma\ \text{(SNR gap)}} \underbrace{\left(\frac{2^b-1}{b}\right)}_{\text{Lim. de Shannon}}$$

$$\text{(PSK)} : \mathcal{E}_b/N_0 = \frac{(Q^{-1}(bP_b/2))^2}{2b\sin^2\frac{\pi}{M}}$$

- Essas expressões quantificam os requisitos de potência, mas não de banda.

Requisitos de banda e SNR do PAM em banda passante

- Para o PAM em banda passante, considerando zero de banda de excesso, o requisito de banda é igual à taxa de símbolo.
- Requisito de banda normalizada: $1/b$
- Comparação entre os esquemas de modulação ($P_b = 10^{-6}$):