Sistemas de Comunicações Digitais

Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações

Universidade Federal do Ceará

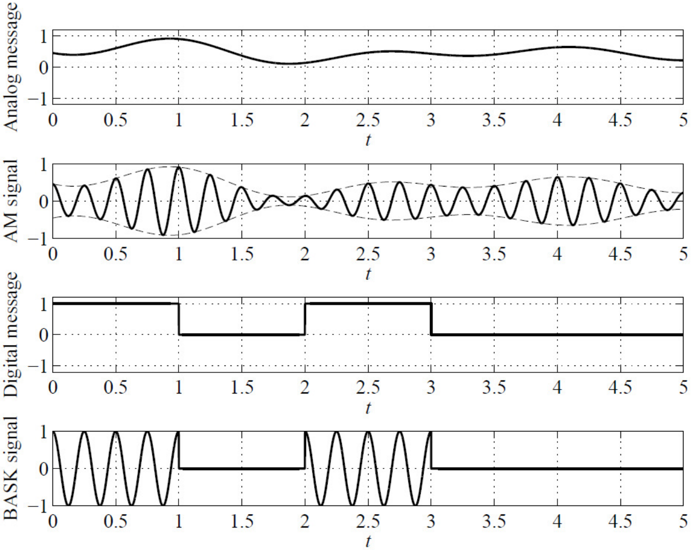
Semestre 2017.2

Parte 1

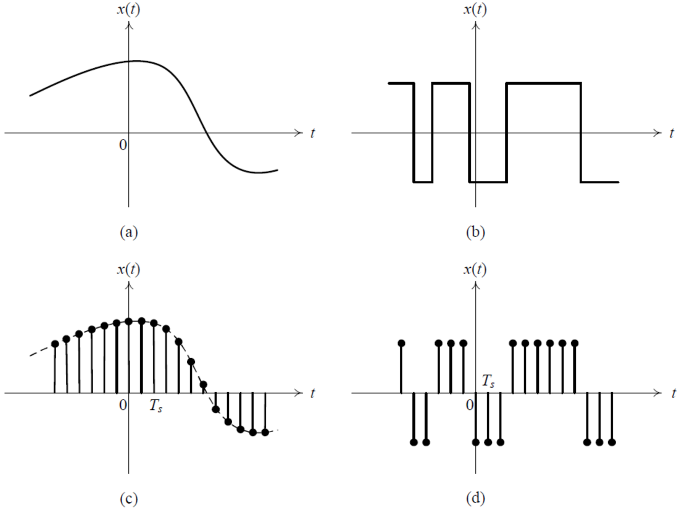
Introdução e revisão de processos estocásticos

Conteúdo

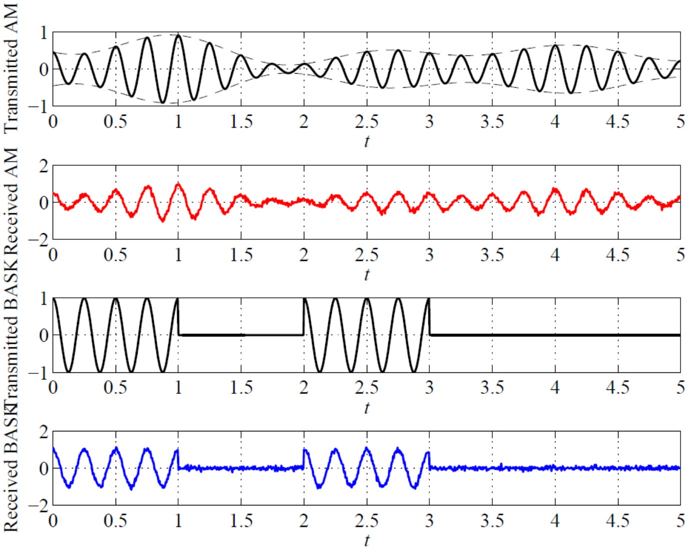
Modulações analógicas e digitais



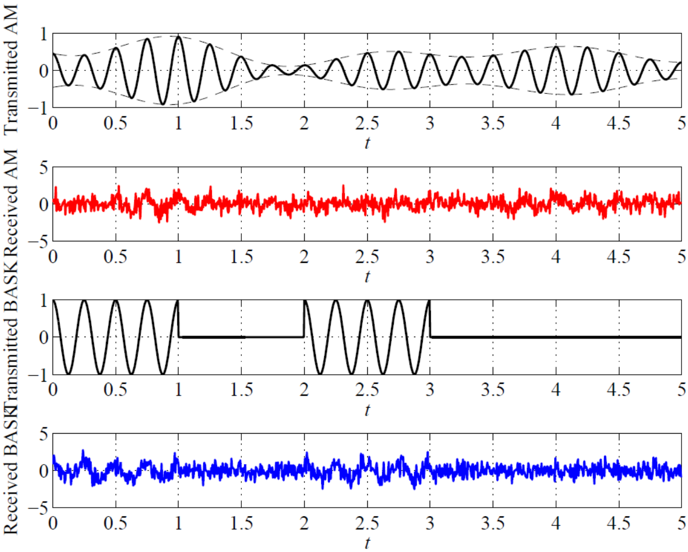
O que é comunicação digital?



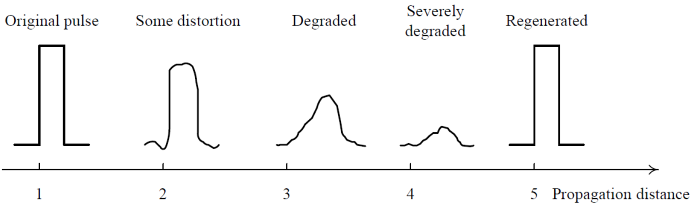
Por quê comunicação digital?



Por quê comunicação digital?

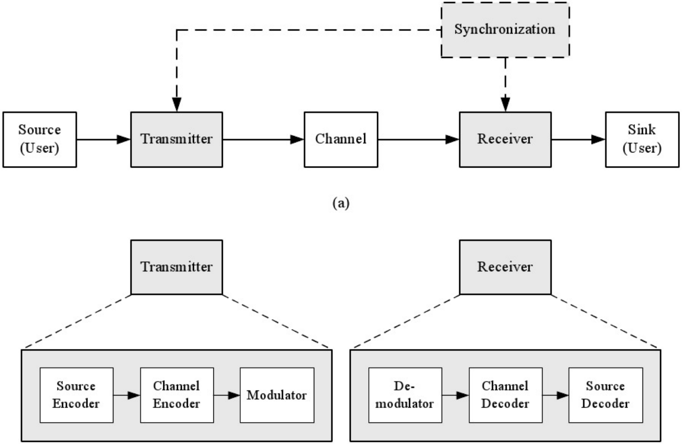


Repetidor regenerativo



- Comunicações digitais: os sinais transmitidos pertencem a um conjunto finito de formas de onda ⇒ O sinal distorcido pode ser recuperado para a sua forma ideal, portanto removendo totalmente o ruído.
- Comunicações analógicas: os sinais transmitidos são formas de onda analógicas, as quais podem assumir uma variedade infinita de formas ⇒ Uma vez distorcido o sinal, a distorção dificilmente pode ser removida.

Diagrama de blocos de um sistema de comunicação



Digital vs. Analógico

- Vantagens:
  - Sinais digitais são mais fáceis de serem regenerados.
  - Circuitos digitais estão menos sujeitos a distorção e interferência.
  - Circuitos digitais são mais confiáveis e podem ser produzidos a um custo menor do que circuitos analógicos.
  - A implementação de hardware digital é mais flexível que a de hardware analógico.
  - Sinais digitais podem se beneficiar de técnicas de processamento digital de sinais.
- Desvantagens:
  - Processamento de sinais mais intenso.
  - A sincronização é uma questão crucial.
  - Requer maior banda de transmissão.
  - Degradação não-suave.

Conteúdo

Espaço amostral e probabilidade

- *Experimento aleatório*: seu resultado, por algum motivo, não pode ser previsto com absoluta certeza.
- Exemplos: arremesso de um dado ou moeda, ou retirada de uma carta de uma pilha.
- *Espaço amostral*: o conjunto de todos os possíveis resultados, denotado por Ω. Os resultados individuais são denotados por ω, onde $\omega \in \Omega$.
- Um espaço amostral pode ser *discreto* ou *contínuo*.
- *Eventos* são subconjuntos do espaço amostral para os quais medidas de suas ocorrências, chamadas de probabilidades, podem ser definidas ou determinadas.

Os três axiomas da probabilidade

- Para um espaço amostral discreto Ω, define-se a medida de probabilidade P em Ω como uma função que assinala valores não-negativos a todos os eventos, denotados por E, em Ω, tal que as seguintes condições são satisfeitas:
  - Axioma 1: $0 \leq P(E) \leq 1$ para todo $E \in \Omega$.
  - Axioma 2: $P(\Omega) = 1$
  - Axioma 3: Para eventos mutuamente exclusivos, i.e., $E_i \cap E_j = \oslash \; \forall i \neq j$, tem-se que $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

Propriedades importantes

1. $P(E^C) = 1 - P(E)$, onde E^C denota o complemento de E. Esta propriedade implica que $P(E^C) + P(E) = 1$, ou seja, algo tem que ocorrer.
2. $P(\oslash) = 0$, novamente, alguma coisa tem que ocorrer.
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$. Note que se dois eventos E_1 e E_2 são mutuamente exclusivos então $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.
4. Se $E_1 \subseteq E_2$ então $P(E_1) \leq P(E_2)$.

Probabilidade condicional

- Observamos o evento E_1, mas na verdade estamos interessados no evento E_2: o conhecimento de que E_1 ocorreu altera a probabilidade de que E_2 ocorra.
- Se antes tinha-se $P(E_2)$, agora tem-se $P(E_2|E_1)$, ou seja, a probabilidade de que E_2 ocorra dado que E_1 ocorreu.
- A probabilidade condicional é dada por

$$P(E_2|E_1) = \begin{cases} \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}, & \text{se} \quad P(E_1) \neq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases} \tag{1}$$

- Se $P(E_2|E_1) = P(E_2)$, ou $P(E_2 \cap E_1) = P(E_1)P(E_2)$, então E_1 e E_2 são ditos *estatísticamente independentes*.
- Regra de Bayes:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1|E_2)P(E_2)}{P(E_1)} \tag{2}$$

Teorema da probabilidade total

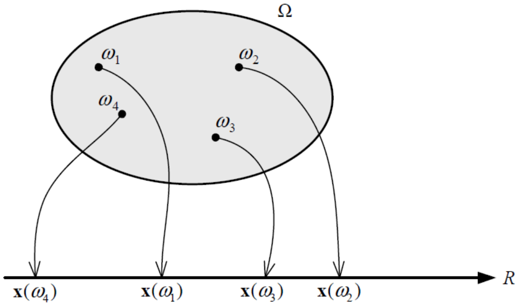
- Os eventos $\{E\}_{i=1}^{n}$ particionam o espaço amostral Ω se:
  - $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$
  - $E_i \cap E_j = \oslash$ para todo $1 \leq i,\ j \leq n$ e $i \neq j$
- Se um evento A tem probabilidades condicionais $\{P(A|E_i)\}_{i=1}^{n}$, $P(A)$ pode ser obtido por

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A|E_i) \tag{3}$$

- Regra de Bayes

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|E_j)P(E_j)} \tag{4}$$

Variáveis aleatórias



- Uma variável aleatória é um *mapeamento* do espaço amostral Ω ao conjunto de números reais.
- Vamos expressar as variáveis aleatórias em negrito, i.e., $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, etc., enquanto valores individuais ou específicos do mapeamento $\mathbf{x}$ são denotados por $\mathbf{x}(\omega)$.

Função Distribuição de Probabilidade (CDF)

- A CDF fornece uma descrição completa da variável aleatória. Ela é definida como:

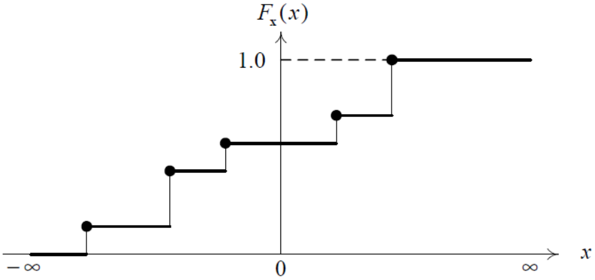
$$F_{\mathbf{x}}(x) = P(\omega \in \Omega \,|\, \mathbf{x}(\omega) \leq x) = P(\mathbf{x} \leq x)\,. \tag{5}$$

- A CDF possui as seguintes propriedades:
  - $0 \leq F_{\mathbf{x}}(x) \leq 1$
  - $F_{\mathbf{x}}(x)$ é não decrescente: $F_{\mathbf{x}}(x_1) \leq F_{\mathbf{x}}(x_2)$ se $x_1 \leq x_2$
  - $F_{\mathbf{x}}(-\infty) = 0$ e $F_{\mathbf{x}}(+\infty) = 1$
  - $P(a < \mathbf{x} \leq b) = F_{\mathbf{x}}(b) - F_{\mathbf{x}}(a)$

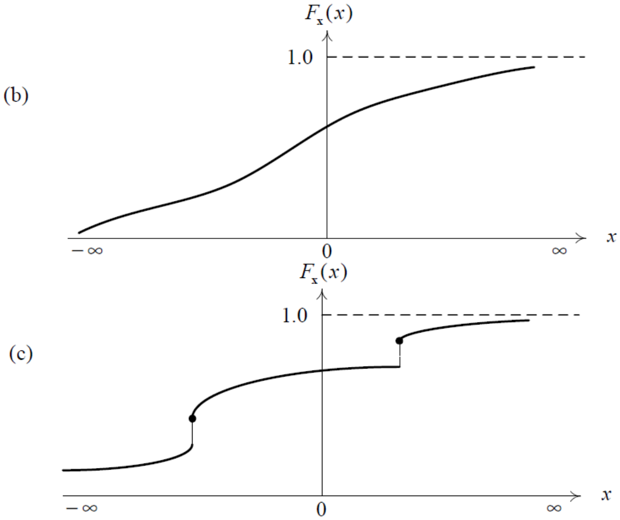
Exemplos de CDFs típicas - I

- Uma variável aleatória pode ser *discreta*, *contínua* ou *mista*.

(a)



Exemplos de CDFs típicas - II



Função Densidade de Probabilidade (PDF)

- A PDF é definida como a derivada da CDF:

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{\mathrm{d}F_{\mathbf{x}}(x)}{\mathrm{d}x}\,; \quad F_{\mathbf{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathbf{x}}(u)du \tag{6}$$

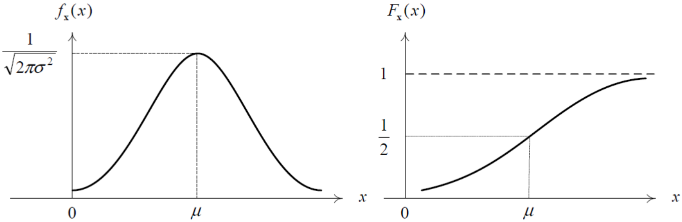
- Segue que:

$$P(x_1 \leq \mathbf{x} \leq x_2) = P(\mathbf{x} \leq x_2) - P(\mathbf{x} \leq x_1) \tag{7}$$

$$= F_{\mathbf{x}}(x_2) - F_{\mathbf{x}}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

- A PDF possui as seguintes propriedades:
  - $f_{\mathbf{x}}(x) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x = 1$
  - Em geral, $P(\mathrm{x} \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x$
- Para variáveis aleatórias discretas é mais comum definir a função de probabilidade de massa (pmf): $p_i = P(\mathbf{x} = x_i)$.
- Note que, para todo i, temos que $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$.

Variável Aleatória Gaussiana



- É uma variável aleatória contínua cuja PDF é dada por:

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{9}$$

onde μ e σ^2 são parâmetros. É usualmente denotada por $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- É a variável aleatória mais importante e mais freqüentemente encontrada na área de comunicações.

Variável Aleatória Gaussiana

- Funções auxiliares:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{10}$$

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \mathrm{erf}(x) \tag{11}$$

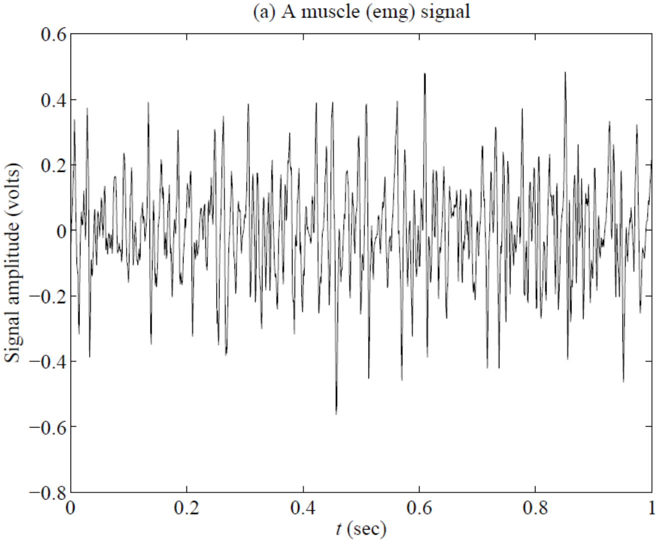
$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{12}$$

- CDF Gaussiana:

$$F_{\mathbf{x}}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt \tag{13}$$

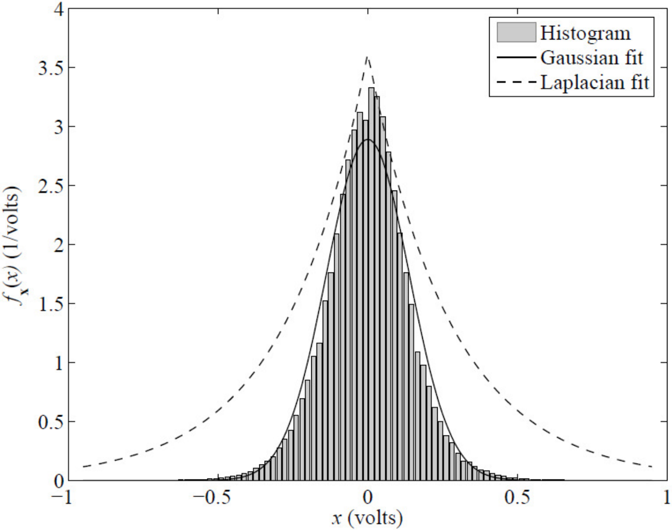
$$F_{\mathbf{x}}(x) = 1 - \frac{1}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{14}$$

Variável Aleatória Gaussiana



Variável Aleatória Gaussiana

(b) Histogram and pdf fits



Funções de uma variável aleatória

- A função $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ é também uma variável aleatória.
- Pela definição, a CDF de $\mathbf{y}$ pode ser escrita como

$$F_{\mathbf{y}}(y) = P(\omega \in \Omega \,|g(\mathbf{x}(\omega)) \leq y)\,, \tag{15}$$

- Assuma que para todo y, a equação $g(x) = y$ possui um número de soluções finito e em cada ponto da solução, a derivada de $g(x)$ existe e é não-nula. A PDF de $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ é dada por:

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \sum_i \frac{f_{\mathbf{x}}(x_i)}{\left| \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_i} \right|}\,, \tag{16}$$

  onde $\{x_i\}$ são as soluções de $g(x) = y$.
- Uma função linear de uma variável aleatória Gaussiana é também uma variável aleatória Gaussiana.

Esperança de variáveis aleatórias - I

- *Médias estatísticas*, ou *momentos*, possuem um papel importante na caracterização de uma variável aleatória.
- O *valor esperado* (também chamado de valor médio ou primeiro momento) de uma variável aleatória $\mathbf{x}$ é definido como:

$$m_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{x}}(x) \mathrm{d}x \,, \tag{17}$$

onde E denota o *operador estatístico esperança*.

- Em geral, o n-ésimo momento de $\mathbf{x}$ é definido como:

$$E\{\mathbf{x}^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_{\mathbf{x}}(x) \mathrm{d}x \,. \tag{18}$$

- Para $n = 2$, $E\{\mathbf{x}^2\}$ é conhecido como o valor médio quadrático da variável aleatória.

Esperança de variáveis aleatórias - II

- O n-ésimo *momento central* da variável aleatória $\mathbf{x}$ é:

$$E\{\mathbf{y}\} = E\{(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\mathbf{x}})^n f_{\mathbf{x}}(x) \mathrm{d}x \tag{19}$$

- Quando $n = 2$, o momento central é chamado de *variância*, comumente denotado por $\sigma_{\mathbf{x}}^2$:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathrm{var}(\mathbf{x}) = E\{(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\mathbf{x}})^2 f_{\mathbf{x}}(x) \mathrm{d}x \tag{20}$$

- A variância provê uma medida da "aleatoriedade" da variável.
- A média e variância de uma variável aleatória fornecem uma *descrição parcial* de sua PDF.
- Relação entre a variância, o primeiro e o segundo momentos é dada por:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = E\{\mathbf{x}^2\} - [E\{\mathbf{x}\}]^2 = E\{\mathbf{x}^2\} - m_{\mathbf{x}}^2 \, . \tag{21}$$

Variáveis aleatórias múltiplas - I

- Normalmente encontradas quando tratando-se experimentos combinados ou tentativas repetidas de um único experimento.
- São basicamente funções multidimensionais definidas em um espaço amostral de um experimento combinado.
- Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ duas variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço amostral Ω. A função distribuição de probabilidade conjunta é definida como:

$$F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) = P(\mathbf{x} \leq x, \mathbf{y} \leq y) \tag{22}$$

- De forma análoga, a função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{23}$$

Variáveis aleatórias múltiplas - II

- Quando a PDF conjunta é integrada sobre uma das variáveis, uma obtém a PDF da outra variável, chamada de PDF marginal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)\mathrm{d}x = f_{\mathbf{y}}(y) \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)\mathrm{d}y = f_{\mathbf{x}}(x) \tag{25}$$

- Note que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1 \tag{26}$$

$$F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(-\infty,-\infty) = F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(-\infty,y) = F_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,-\infty) = 0 \tag{27}$$

Variáveis aleatórias múltiplas - III

- A PDF condicional da variável aleatória $\mathbf{y}$, dado que o valor da variável aleatória $\mathbf{x}$ é igual a x, é definida como:

$$f_{\mathbf{y}}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)}{f_{\mathbf{x}}(x)}, & f_{\mathbf{x}}(x) \neq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{28}$$

- Duas variáveis aleatórias $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são estatísticamente independentes se e somente se:

$$f_{\mathbf{y}}(y|x) = f_{\mathbf{y}}(y) \qquad \text{ou de forma equivalente} \tag{29}$$

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) = f_{\mathbf{x}}(x) f_{\mathbf{y}}(y) \tag{30}$$

- O *momento conjunto* é definido como:

$$E\{\mathbf{x}^j \mathbf{y}^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \,. \tag{31}$$

Variáveis aleatórias múltiplas - IV

- O *momento central conjunto* é:

$$E\{(\mathbf{x}-m_{\mathbf{x}})^j(\mathbf{y}-m_{\mathbf{y}})^k\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{\mathbf{x}})^j(y-m_{\mathbf{y}})^k f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \tag{32}$$

  onde $m_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\}$ e $m_{\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y}\}$.
- Os momentos mais importantes são:
  - Correlação:

$$E\{\mathbf{xy}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{33}$$

  - Covariância:

$$\mathrm{cov}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} = E\{(\mathbf{x}-m_{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-m_{\mathbf{y}})\} = E\{\mathbf{xy}\} - m_{\mathbf{x}}m_{\mathbf{y}} \tag{34}$$

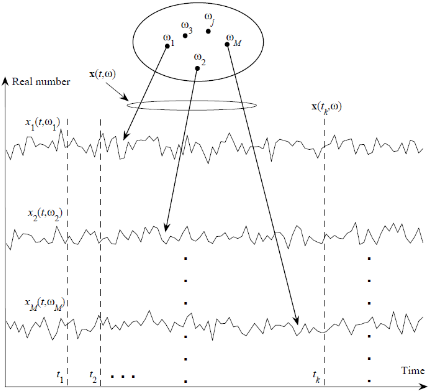
Variáveis aleatórias múltiplas - V

- Sejam $\sigma_{\mathbf{x}}^2$ e $\sigma_{\mathbf{y}}^2$ as variâncias de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente. A covariância normalizada com relação a $\sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}}$ é chamada de *coeficiente de correlação*:

$$\rho_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \frac{\mathrm{cov}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}}{\sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}}}\,. \tag{35}$$

- $\rho_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ indica o grau de *dependência linear* entre duas variáveis aleatórias.
- Pode-se mostrar que $|\rho_{\mathbf{x},\mathbf{y}}| \leq 1$.
- Se $\rho_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = 0$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditas *descorrelacionadas*.
- Pode-se verificar que se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são independentes, então $\rho_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = 0$: *independência implica em ausência de correlação*.
- No entanto, ausência de correlação não necessariamente implica em independência estatística.

Processos aleatórios - I



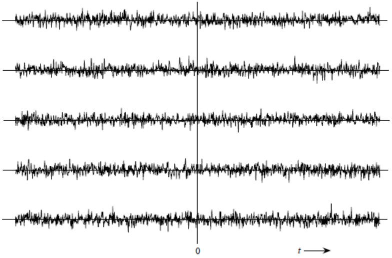
Mapeamento de um espaço amostral em um *conjunto de funções temporais*.

Processos aleatórios - II

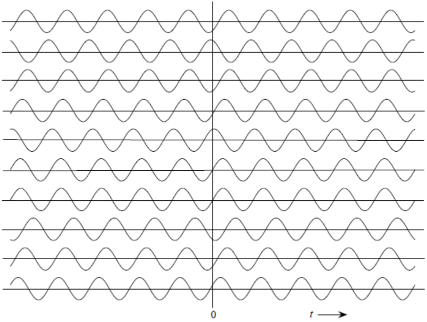
- *Ensemble*: conjunto de possíveis funções temporais denotado por $\mathbf{x}(t)$, onde as funções temporais $x_1(t,\omega_1), x_2(t,\omega_2), x_3(t,\omega_3), \ldots$, são membros específicos do ensemble.
- Em um dado instante $t = t_k$, temos a variável aleatória $\mathbf{x}(t_k)$.
- Em quaisquer dois instantes de tempo t_1 e t_2, temos duas diferentes variáveis aleatórias $\mathbf{x}(t_1)$ e $\mathbf{x}(t_2)$. Qualquer relação entre elas é descrita pela PDF conjunta $f_{\mathbf{x}(t_1),\mathbf{x}(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2)$.
- Descrição completa do processo aleatório é determinada pela PDF conjunta $f_{\mathbf{x}(t_1),\mathbf{x}(t_2),\ldots,\mathbf{x}(t_N)}(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N)$.
- PDFs conjuntas mais importantes:
  - Primeira ordem: $f_{\mathbf{x}(t)}(x; t)$
  - Segunda ordem: $f_{\mathbf{x}(t_1),\mathbf{x}(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2)$

Exemplos de processos aleatórios - I

(a) Thermal noise

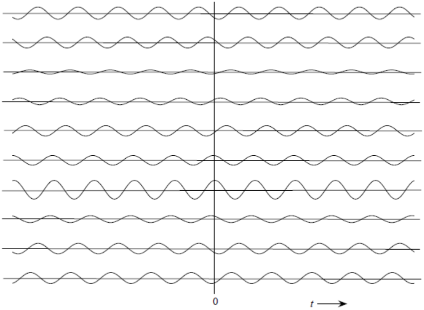


(b) Uniform phase

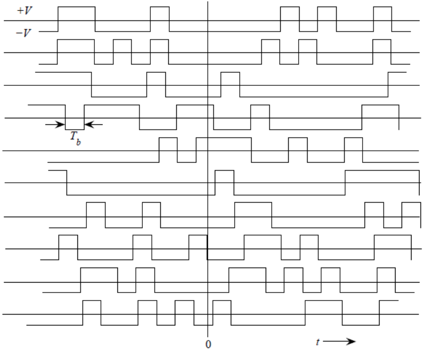


Exemplos de processos aleatórios - II

(c) Rayleigh fading process



(d) Binary random data



Classificação de processos aleatórios

- Baseada na mudança das estatísticas com o tempo o processo pode ser: *não-estacionário* ou *estacionário*.
- Diferentes níveis de estacionariedade:
  - Estritamente estacionário: a PDF conjunta de qualquer ordem é independente de um deslocamento temporal.
  - Estacionariedade de ordem N: a PDF conjunta não depende do deslocamento temporal, mas depende de espaçamentos no tempo:

$$f_{\mathbf{x}(t_1),\mathbf{x}(t_2),\ldots,\mathbf{x}(t_N)}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_N) =$$
$$f_{\mathbf{x}(t_1+t),\mathbf{x}(t_2+t),\ldots,\mathbf{x}(t_N+t)}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1+t, t_2+t, \ldots, t_N+t)$$

  - Estacionariedade de primeira ordem:

$$f_{\mathbf{x}(t_1)}(x; t_1) = f_{\mathbf{x}(t_1+t)}(x; t_1+t) = f_{\mathbf{x}(t)}(x) \tag{36}$$

  - Estacionariedade de segunda ordem:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}(t_1),\mathbf{x}(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_{\mathbf{x}(t_1+t),\mathbf{x}(t_2+t)}(x_1, x_2; t_1+t, t_2+t) \\ &= f_{\mathbf{x}(t_1),\mathbf{x}(t_2)}(x_1, x_2; \tau), \qquad \tau = t_2 - t_1 \,. \end{aligned}$$

Médias estatísticas ou momentos conjuntos

- Considere N variáveis aleatórias $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \ldots, \mathbf{x}(t_N)$. Os momentos conjuntos destas variáveis aleatórias são dados por:

$$E\{\mathbf{x}^{k_1}(t_1),\mathbf{x}^{k_2}(t_2), \ldots, \mathbf{x}^{k_N}(t_N)\} = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{x_N=-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_N^{k_N} f_{\mathbf{x}(t_1),\mathbf{x}(t_2),\ldots,\mathbf{x}(t_N)}(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N) \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N \,,$$

  para todos os inteiros $k_j \geq 1$ e $N \geq 1$.
- Vamos considerar somente os momentos de primeira e segunda ordem, i.e., $E\{\mathbf{x}(t)\}$ (média), $E\{\mathbf{x}^2(t)\}$ (valor quadrático médio) e $E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\}$ (autocorrelação).

Valor médio ou primeiro momento

- O valor médio do processo em um tempo t é:

$$m_{\mathbf{x}}(t) = E\{\mathbf{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{x}(t)}(x;t)\mathrm{d}x\,. \tag{37}$$

- A média se dá ao longo do ensemble, e se a PDF varia com o tempo então o valor médio é uma função determinística do tempo.
- Se um processo é estacionário então a média é independente de t ou uma constante.

$$m_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x\,. \tag{38}$$

Valor quadrático médio ou segundo momento

- O valor quadrático médio (MSV) é definido como:

$$\mathrm{MSV}_{\mathbf{x}}(t) = E\{\mathbf{x}^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathbf{x}(t)}(x;t)\mathrm{d}x \qquad \text{(não-estac.)}$$

$$\mathrm{MSV}_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(estac.)}$$

- O segundo momento central (ou variância) é:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2(t) = E\{[\mathbf{x}(t) - m_{\mathbf{x}}(t)]^2\} = \mathrm{MSV}_{\mathbf{x}}(t) - m_{\mathbf{x}}^2(t) \qquad \text{(não-estac.)}$$

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = E\{[\mathbf{x}(t) - m_{\mathbf{x}}]^2\} = \mathrm{MSV}_{\mathbf{x}} - m_{\mathbf{x}}^2 \qquad \text{(estac.)}$$

Correlação

- A função de autocorrelação descreve completamente a densidade espectral de potência do processo aleatório.
- Pode ser definida como a correlação entre duas variáveis aleatórias $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$:

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

- Para um processo estacionário:

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)\} = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2}(x_1, x_2; \tau) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

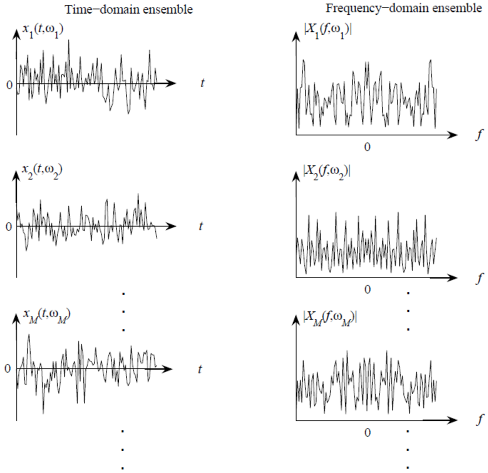
- Processo com *estacionariedade no sentido amplo* (WSS):
  - $E\{\mathbf{x}(t)\} = m_{\mathbf{x}}$ para qualquer t, e $R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{x}}(\tau)$ para $\tau = t_2 - t_1$.

Propriedades da autocorrelação de um processo WSS

- $R_{\mathbf{x}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(-\tau)$. É uma função par de τ, uma vez que o mesmo conjunto de valores é mediado ao longo do ensemble, independente da direção de translação.
- $|R_{\mathbf{x}}(\tau)| \leq R_{\mathbf{x}}(0)$. O valor máximo sempre ocorre em $\tau = 0$. Além disso, $R_{\mathbf{x}}(0)$ é o valor médio quadrático do processo aleatório.
- Se para um certo τ_0 temos que $R_{\mathbf{x}}(\tau_0) = R_{\mathbf{x}}(0)$, então para qualquer inteiro k, $R_{\mathbf{x}}(k\tau_0) = R_{\mathbf{x}}(0)$.
- Se $m_{\mathbf{x}} \neq 0$ então $R_{\mathbf{x}}(\tau)$ possuirá uma componente constante igual a $m_{\mathbf{x}}^2$.
- Funções de autocorrelação não podem ter uma forma arbitrária. A restrição da forma surge do fato de que a transformada de Fourier de uma função de autocorrelação deve ser maior ou igual a zero, i.e., $\mathcal{F}\{R_{\mathbf{x}}(\tau)\} \geq 0$.

Densidade espectral de potência de um processo aleatório - I

- Um processo aleatório é um sinal de energia infinita, portanto não se pode tirar diretamente sua transformada de Fourier.



Densidade espectral de potência de um processo aleatório - II

- É necessário determinar como a potência média do processo se distribui na freqüência.
- Defina um processo truncado:

$$\mathbf{x}_T(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{39}$$

- Considere a transformada de Fourier do processo truncado:

$$\mathbf{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_T(t) \mathrm{e}^{-j2\pi f t} \mathrm{d}t \,. \tag{40}$$

- Medie a energia sobre o tempo total, $2T$:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbf{x}_T^2(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_T(f)|^2 \mathrm{d}f \quad \text{(Watts)} \tag{41}$$

Densidade espectral de potência de um processo aleatório - III

- Encontre o valor médio de $\mathbf{P}$:

$$E\{\mathbf{P}\} = E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathbf{x}_T^2(t)\mathrm{d}t\right\} = E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{X}_T(f)|^2\mathrm{d}f\right\} \quad (42)$$

- Toma-se o limite quando o período tende a infinito:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\{\mathbf{x}_T^2(t)\}\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}E\left\{|\mathbf{X}_T(f)|^2\right\}\mathrm{d}f\,. \quad (43)$$

- Segue que:

$$\mathrm{MSV}_{\mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{E\left\{|\mathbf{X}_T(f)|^2\right\}}{2T}\mathrm{d}f \quad (\mathrm{Watts}) \quad (44)$$

Densidade espectral de potência de um processo aleatório - IV

- Finalmente a *densidade espectral de potência* é dada por:

$$S_{\mathbf{x}}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left\{|\mathbf{X}_T(f)|^2\right\}}{2T} \quad \text{(Watts/Hz)} \tag{45}$$

- Pode-se mostrar que a densidade espectral de potência e a função de autocorrelação formam um *par da transformada de Fourier*:

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) \longleftrightarrow S_{\mathbf{x}}(f) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{x}}(\tau)\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\,. \tag{46}$$

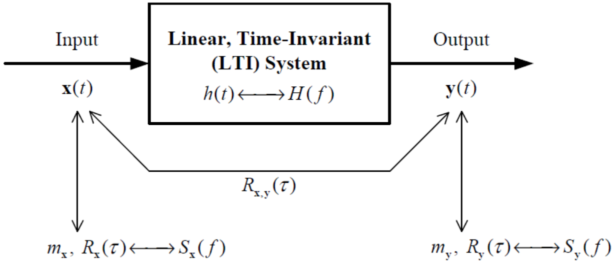
Média temporal e ergodicidade

- Um processo é *ergódico* quando qualquer membro do ensemble exibe o mesmo comportamento estatístico que todo o ensemble.
- Todas as médias temporais em um dado membro do ensemble são iguais à correspondente média do ensemble:

$$E\{\mathbf{x}^n(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x \tag{47}$$

- Em um processo ergódico: para medir diversas médias estatísticas, basta olhar para uma única realização do processo e encontrar a média temporal correspondente.
- Para um processo ser ergódico ele tem que ser estacionário. O reverso não é verdadeiro.

Processos aleatórios e sistemas LTI



$$m_{\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y}(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\mathbf{x}(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\right\} = m_{\mathbf{x}}H(0) \tag{48}$$

$$S_{\mathbf{y}}(f) = |H(f)|^2 S_{\mathbf{x}}(f) \tag{49}$$

$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_{\mathbf{x}}(\tau) \tag{50}$$