大阪大学 大学院理学研究科 物理学専攻
過去の入試問題と答案

tar2chicken

2023 年 5 月 11 日

目次

2022 年度

問題 1

問題 2

3 次元直交座標系の 3 軸を x, y, z とする．真空中に原点を中心とする半径 a の円 C が xy 平面上にある．C の円周上に固定された線密度 q の電荷が一様に分布している．

I．まず, C が静止している場合について考える．真空中の位置 $\boldsymbol{r'}$ に置かれた点電荷 Q が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャル ϕ_0 は

$$\phi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

と表される．ここで, ε_0 は真空の誘電率である．以下の問いに答えよ．

(1) C の電荷によって位置 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ に生じる静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

答案

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{qa\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{qa}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}.$$

(2) C の電荷によって位置 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ に生じる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．また, 原点に置かれた点電荷 Q' が受ける力を求めよ．

答案　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})$ より,

$$E_x(\boldsymbol{r}) = E_y(\boldsymbol{r}) = 0, \quad E_z(\boldsymbol{r}) = \frac{qaz}{2\varepsilon_0(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

また, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので, 原点に置かれた点電荷が受ける力は $\boldsymbol{0}$ である．

(3) C の電荷分布による位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ での電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は, C の線要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r'}$ の大きさを $\mathrm{d}s' = |\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\,|$ として,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C q\,\mathrm{d}s'\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}$$

と書ける．ここで, z 軸まわりの方位角 φ を用い, C 上の座標を $\boldsymbol{r'} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$ と表すのが便利である．$|\boldsymbol{r}| \ll a$ の条件で, x, y, z の 1 次の項まで展開した式

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{-3} \sim a^{-3}\left[1 + \frac{3}{a}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right]$$

を利用して, 原点近傍における $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．このとき, q と逆符号の点電荷を原点から z 軸方向にわずかにずれた位置に置いたとき, 点電荷が受ける力の向きを答えよ．また, ずれの方向が xy 平面上（ $z = 0$ ）のとき, 点電荷が受ける力の向きを答えよ．

答案 原点近傍において,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C q\,\mathrm{d}s'\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3} \\
&\sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} a\,\mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} x-a\cos\varphi \\ y-a\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}\left(1+\frac{3x}{a}\cos\varphi+\frac{3y}{a}\sin\varphi\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} (x-a\cos\varphi)(a+3x\cos\varphi+3y\sin\varphi) \\ (y-a\sin\varphi)(a+3x\cos\varphi+3y\sin\varphi) \\ az+3ax\cos\varphi+3ay\sin\varphi \end{pmatrix} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} ax-3ax\cos^2\varphi \\ ay-3ay\sin^2\varphi \\ az \end{pmatrix} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 2\pi ax-3\pi ax \\ 2\pi ay-3\pi ay \\ 2\pi az \end{pmatrix} \\
&= \frac{qa}{4\varepsilon_0}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

また, q と逆符号の点電荷が受ける力は, ずれが z 軸方向のときずれを小さくする向きに, ずれが xy 平面上のときずれを大きくする向きに, いずれもずれと並行にはたらく.

II. 次に, C が原点を中心に電荷とともに xy 平面内で一定の角速度で回転する場合を考える. 回転の向きは z 軸の z が正の領域から見て反時計回りとする. これは, 回路 C に定常電流 I が生じている状況に他ならない. この電流 I による位置 $\boldsymbol{r}$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}
$$

で与えられる. ここで, μ_0 は真空の透磁率である. $\boldsymbol{r'}$ は C 上の位置, $\mathrm{d}\boldsymbol{r'}$ は C の線要素ベクトルである. 以下の問いに答えよ.

(4) C の電流 I による原点近傍の位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=(A_x,A_y,A_z)$ を, $|\boldsymbol{r}| \ll a$ の条件で $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{-1}$ を x,y,z の 1 次の項まで展開した式を利用して求めよ.

答案

$$
\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \left[(x-a\cos\varphi)^2+(y-a\sin\varphi)^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}}
$$

より,

$$
\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right|_{r=0} = \frac{1}{|\boldsymbol{r'}|} = \frac{1}{a},
$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\bigg|_{\boldsymbol{r}=0} = -\left.\frac{x-a\cos\varphi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\right|_{\boldsymbol{r}=0} = \frac{\cos\varphi}{a^2},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\bigg|_{\boldsymbol{r}=0} = \frac{\sin\varphi}{a^2},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\bigg|_{\boldsymbol{r}=0} = 0,$$

なので, 原点近傍において,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \sim \frac{1}{a} + \frac{x\cos\varphi}{a^2} + \frac{y\sin\varphi}{a^2} = \frac{1}{a^2}(a + x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$

となる. よって, 原点近傍で,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &\sim \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{a^2}(a + x\cos\varphi + y\sin\varphi)\\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\begin{pmatrix}-y\sin^2\varphi\\ x\cos^2\varphi\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\begin{pmatrix}-\pi y\\ \pi x\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{\mu_0 I}{4a}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる.

(5) (4) で求めたベクトルポテンシャルを使って磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ.

答案 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ より,

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

(6) C の z 軸まわりの慣性モーメントと角運動量ベクトルをそれぞれ $\mathcal{I}_C$, $\boldsymbol{L}$ とする. 電流 I を $a, q, \mathcal{I}_C, \boldsymbol{L}$ の大きさ L によって表せ. また, ここで求めた表式と (5) の結果を用いて $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{L}$ の関係を求めよ. さらに, 原点に磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を置くとき, $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{B}$ のポテンシャルエネルギー（相互作用エネルギー） V が $V = -\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B}$ で表されるとして, V を $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{L}$ の内積を含む式で表せ.

答案　C の回転の角速度は $\dfrac{L}{\mathcal{I}_C}$ なので, $I = \dfrac{qaL}{\mathcal{I}_C}$ である．また, $B_z = \dfrac{\mu_0 qL}{2\mathcal{I}_C}$ で, $\boldsymbol{L}$ は z 軸正の向きなので, $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 q}{2\mathcal{I}_C}\boldsymbol{L}$ が成り立つ．よって, 原点に磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を置いたとき, 相互作用のポテンシャルエネルギーは $V = -\dfrac{\mu_0 q}{2\mathcal{I}_C}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L}$ となる．

III．最後に, 定常電流 I が流れている回路 C の半径 a が微小である場合を考える．定常電流 I の向きは前問 II と同じとする．

(7) C の電流 I による位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (A_x, A_y, A_z)$ を, $|\boldsymbol{r}| \gg a$ の条件で $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^{-1}$ を a の 1 次の項まで展開した式を利用して表すと,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}(-y, x, 0)$$

となる．磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．また, $\boldsymbol{m_1} = (0, 0, \pi I a^2)$ と定義すると, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m_1}r^2\right]$$

と一致することを示せ．ただし, $r = |\boldsymbol{r}|$ である．

答案　例えば, $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r^3} = -\dfrac{3x}{r^5}$ なので, $\boldsymbol{\nabla}\dfrac{1}{r^3} = -\dfrac{3\boldsymbol{r}}{r^5}$ が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{4}\left[\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)\times\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{r^3}\boldsymbol{\nabla}\times\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{4}\left[-\frac{3}{r^5}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{4r^5}\left[3\begin{pmatrix}xz\\yz\\z^2-r^2\end{pmatrix} + r^2\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{4r^5}(3z\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{e}_z)
\end{aligned}$$

となる．ただし, $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ である．また, $\boldsymbol{m_1} = \pi I a^2\boldsymbol{e}_z$ なので,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5}\pi I a^2\left[3(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{e}_z r^2\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m_1}r^2\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．

(8) (7) の $\boldsymbol{m_1}$ による磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対して, 原点からの距離 r の z 軸上の位置 $\boldsymbol{r}$ に別の磁気モーメント $\boldsymbol{m_2}$ を置く．$\boldsymbol{m_2} = \pm\boldsymbol{m_1}$ のとき, それぞれ $\boldsymbol{m_2}$ と $\boldsymbol{B}$ のポテンシャルエネルギー（相互作用エネルギー） V

を I, a, r を含む式で表せ．次に，原点からの距離 r の xy 平面上の位置 $\boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{m_2}$ を置き直す．$\boldsymbol{m_2} = \pm\boldsymbol{m_1}$ のとき，それぞれ同様に V を求めよ．

答案　$\boldsymbol{m_2}$ が z 軸上のとき，$\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r} = \pi I a^2 \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{r} = \pi I a^2 r$ なので，

$$
\begin{aligned}
V &= \mp\boldsymbol{m_1}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m_1}r^2\right] \\
&= \mp\frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})^2 - \boldsymbol{m_1}^2 r^2\right] \\
&= \mp\frac{\pi\mu_0 I^2 a^4}{2r^3}
\end{aligned}
$$

となる．また，$\boldsymbol{m_2}$ が xy 平面上のとき，$\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ なので，

$$
\begin{aligned}
V &= \mp\boldsymbol{m_1}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left(-\boldsymbol{m_1}r^2\right) \\
&= \pm\frac{\pi\mu_0 I^2 a^4}{4r^3}
\end{aligned}
$$

となる．

問題 3

量子力学で 1 次元の散乱問題を考える．x 軸上, 負の無限大から質量 m の粒子が正のエネルギー E で入射してくるものとする．以下の問いに答えよ．ただし, プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする．

I. まず, ポテンシャルが

$$V(x) = -V_0\delta(x)$$

で与えられる場合を考える．ただし, V_0 は正の有限な実数であり, $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である．波動関数 $\phi(x)$ がみたすシュレディンガー方程式は,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

で与えられる．$x < 0$ における波動関数を

$$\phi_1(x) = e^{iqx} + re^{-iqx}$$

とし, $x > 0$ における波動関数を

$$\phi_2(x) = te^{iqx}$$

とする．ただし $q = \sqrt{2mE}/\hbar$ であり, r, t は複素係数である．$\phi_1(x)$ の式の右辺第 1 項は x の正の方向に伝播する入射波を, 右辺第 2 項は反射波を表している．一方, $\phi_2(x)$ の式の右辺は透過波を表している．

(1) $\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ が $x \to 0$ で一致することから, r と t がみたす関係式を求めよ．

答案 $x \to 0$ で $\phi_1(x) \to 1 + r, \quad \phi_2(x) \to t$ なので, r と t は $1 + r = t$ をみたす．

(2) シュレディンガー方程式の両辺を $x = -\epsilon$ から $x = \epsilon$ まで積分し ($\epsilon > 0$), $\epsilon \to 0$ の極限をとることにより, r と t がみたすもう一つの関係式が以下の形で求まる．

$$t + r = \lambda t + 1$$

このとき, λ を無次元量 $\omega \equiv \dfrac{\hbar^2 q}{mV_0}$ を用いて表せ．

答案 シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - V_0\delta(x)\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

の両辺を積分すると,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[\phi_2'(\epsilon) - \phi_1'(-\epsilon)] - V_0\phi(0) = 0$$

となる. $\epsilon \to 0$ で,

$$
\begin{aligned}
0 &= \phi_2'(\epsilon) - \phi_1'(-\epsilon) + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\phi(0) \\
&= iqte^{iq\epsilon} - iqe^{-iq\epsilon} + iqre^{iq\epsilon} + iq\frac{2mV_0}{iq\hbar^2}t \\
&\to iq\left(t - 1 + r + \frac{2t}{i\omega}\right)
\end{aligned}
$$

となるので, $t + r = \dfrac{2i}{\omega}t + 1$ が成り立つ. よって, 求める無次元量は $\dfrac{2i}{\omega}$ である.

(3) 反射率 $|r|^2$ と透過率 $|t|^2$ をそれぞれ ω を用いて表せ.

答案 (1), (2) の結果から連立方程式

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 - \frac{2i}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

を立てて解くと,

$$
\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2(\omega - i)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2i}{\omega} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2(\omega - i)} \begin{pmatrix} \frac{2i}{\omega} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega - i} \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}
$$

となる. よって,

$$
|r|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 1}, \quad |t|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 1}.
$$

(4) V_0 が一定のとき, $E \to 0$ および $E \to \infty$ の極限における $|r|^2$ と $|t|^2$ の値を求めよ. 次に, E が一定の下で $V_0 \to -V_0$ としたとき（引力的ポテンシャルが斥力的ポテンシャルになったとき）, $|r|^2$ と $|t|^2$ がどうなるかを簡潔に答えよ.

答案 $E \to 0$ で $\omega \to 0$ より, $|r|^2 \to 1$, $|t|^2 \to 0$ となる. また, $E \to \infty$ で $\omega \to \infty$ より, $|r|^2 \to 0$, $|t|^2 \to 1$ となる. さらに, $V_0 \to -V_0$ で $\omega \to -\omega$ となるが, $|r|^2, |t|^2$ は ω^2 のみに依存するので, ポテンシャルの符号が変わっても反射率と透過率は変わらない.

II. 次に, ポテンシャルが

$$
V_D(x) = -V_0\delta(x) - V_0\delta(x - a)
$$

で与えられる場合の散乱問題を考える. ただし $a > 0$ とする.

(5) $x < 0$ における波動関数を

$$
\psi_1(x) = A_1 e^{iqx} + B_1 e^{-iqx}
$$

とし, $0 < x < a$ における波動関数を

$$\psi_2(x) = C_1 e^{iqx} + D_1 e^{-iqx}$$

とする．これらの波動関数の係数には,

$$\begin{aligned} B_1 &= rA_1 + tD_1 \\ C_1 &= tA_1 + rD_1 \end{aligned}$$

という関係がある．ただし, r, t は前問 I で導入した複素係数である．それらの物理的解釈に留意しつつ, 上記の 2 つの関係式が成り立つ理由を説明せよ．

答案　$x = 0$ にあるポテンシャル $-V_0\delta(x)$ に関する反射と透過を考える．$x < 0$ において x の負の方向に伝播する波は, $x < 0$ から来た波 $A_1 e^{iqx}$ が反射されたものと, $x > 0$ から来た波 $D_1 e^{-iqx}$ が透過されたものの重ね合わせである．また同様に, $0 < x < a$ において x の正の方向に伝播する波は, $x < 0$ から来た波が透過されたものと, $x > 0$ から来た波が反射されたものの重ね合わせである．このポテンシャルに関する反射と透過の係数はそれぞれ r, t なので,

$$\begin{aligned} B_1 &= rA_1 + tD_1 \\ C_1 &= tA_1 + rD_1 \end{aligned}$$

が成り立つ．

(6) (5) で示した 2 つの関係式を用いて以下の表式を作る．

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

ここで Z は 2 行 2 列の行列である．Z の各要素を r, t を用いて表せ．

答案　連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tA_1 \\ -rA_1 + B_1 \end{pmatrix}$$

を解くと,

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t^2 - r^2 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

となる．よって,

$$Z = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t^2 - r^2 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) 次に, $0 < x < a$ における波動関数を

$$\psi_2(x) = A_2 e^{iq(x-a)} + B_2 e^{-iq(x-a)}$$

と表現してみよう．この式と, (5) で導入した $\psi_2(x)$ の表式を比較することにより,

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix}$$

をみたす 2 行 2 列の行列 Y の各要素を求めよ．

答案　$\psi_2(x) = A_2 e^{-iqa} e^{iqx} + B_2 e^{iqa} e^{-iqx}$ より, $A_2 = e^{iqa} C_1,\ B_2 = e^{-iqa} D_1$ である．よって,

$$Y = \begin{pmatrix} e^{iqa} & 0 \\ 0 & e^{-iqa} \end{pmatrix}$$

となる．

(8)　$x > a$ における波動関数を

$$\psi_3(x) = C_2 e^{iq(x-a)} + D_2 e^{-iq(x-a)}$$

とする．この式と, (7) で導入した $\psi_2(x)$ の表式に対して, (5) と同じ考え方を適用すれば, C_2, D_2 は A_2, B_2 を用いて表すことができる．このことと, (5)-(7) の結果を組み合わせることにより,

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

が得られる．X を Z と Y を用いて表せ．

答案　A_2, B_2, C_2, D_2 については (5), (6) と同様に

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つので,

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = ZY \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = ZYZ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

となる．よって, $X = ZYZ$ である．

(9)　(8) で得た表式において $C_2 = t_2,\ D_2 = 0,\ A_1 = 1, B_1 = r_2$ とすれば, $V_D(x)$ による反射率 $|r_2|^2$ と透過率 $|t_2|^2$ を求めることができる．ここでは, $a = 2n\pi/q$ （ n : 自然数）となる場合を考えよう．まず Z を ω を用いて表した上で, $|r_2|^2$ と $|t_2|^2$ を ω を用いて表せ．また, 得られた結果の物理的意味を, (3) の結果と比較して簡潔に論じよ．

答案

$$Z = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t^2 - r^2 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{t^2-r^2}{t} = \frac{1}{\omega - i}\frac{\omega^2+1}{\omega} = \frac{\omega+i}{\omega} = 1 + \frac{i}{\omega},$$
$$\frac{r}{t} = \frac{i}{\omega}, \qquad \frac{1}{t} = 1 - \frac{i}{\omega}$$

より,

$$Z = \begin{pmatrix} 1+\frac{i}{\omega} & \frac{i}{\omega} \\ -\frac{i}{\omega} & 1-\frac{i}{\omega} \end{pmatrix}$$

となる．また, $a = 2n\pi/q$ のとき Y は単位行列になるので, $X = Z^2$ より,

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = Z^2 \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2i}{\omega} & \frac{2i}{\omega} \\ -\frac{2i}{\omega} & 1-\frac{2i}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

となる．よって, 連立方程式

$$\begin{pmatrix} -\frac{2i}{\omega} & 1 \\ 1-\frac{2i}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2i}{\omega} \\ \frac{2i}{\omega} \end{pmatrix}$$

を解くと,

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{2i}{\omega}-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2i}{\omega}-1 & -\frac{2i}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\frac{2i}{\omega} \\ \frac{2i}{\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{2i}{\omega}-1} \begin{pmatrix} -\frac{2i}{\omega} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega - 2i} \begin{pmatrix} 2i \\ \omega \end{pmatrix}$$

となるので,

$$|r_2|^2 = \frac{4}{\omega^2+4}, \quad |t_2|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2+4}$$

となる．この結果を (3) と比較すると, ポテンシャル障壁の数が増えたことで反射率が上がり透過率が下がったことが分かる.

2021 年度

問題 1

問題 3

調和振動子ポテンシャルの下で運動する電子に関する以下の問いに答えよ．電子の質量を m , 調和振動子ポテンシャルの角振動数を ω , プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする．

I. まず, x 軸上を動く電子の 1 次元調和振動子ポテンシャルの下での運動を考える．電子のハミルトニアンは以下のように与えられる．

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

ただし $p = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ である．昇降演算子を

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right), \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$$

と定義することで, $H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \dfrac{1}{2}\right)$ と書ける．

(1) 基底状態 $\phi_0(x)$ は $a\phi_0(x) = 0$ より求まる．$\phi_0(x) = \exp\left(-\lambda x^2\right)$ とおいて, 定数 λ を求めよ．また, エネルギー固有値 ϵ_0 を求めよ．

答案 $a\phi_0(x) = 0$ より,

$$\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)\phi_0(x) = \left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(-\lambda x^2\right) = \left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\cdot(-2\lambda x)\right)\exp\left(-\lambda x^2\right) = 0.$$

よって, $\lambda = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$ である．また,

$$H\phi_0(x) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\phi_0(x) = \frac{1}{2}\hbar\omega\phi_0(x)$$

より, 基底状態のエネルギーは $\epsilon_0 = \dfrac{1}{2}\hbar\omega$ である．

(2) 第 1 励起状態は $\phi_1(x) = a^\dagger\phi_0(x)$ により求まる．$\phi_1(x)$ とそのエネルギー固有値 ϵ_1 を求めよ．波動関数の規格化はしなくて良い．

答案

$$\begin{aligned}
\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)\phi_0(x) &= \left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \\
&= \left[x - \frac{\hbar}{m\omega}\cdot\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x\right)\right]\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \\
&= 2x\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).
\end{aligned}$$

よって, 第 1 励起状態は

$$\phi_1(x) = a^\dagger\phi_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)\phi_0(x) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

また, $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ より,

$$a^\dagger a\phi_1(x) = a^\dagger aa^\dagger\phi_0(x) = a^\dagger(a^\dagger a + 1)\phi_0(x) = a^\dagger\phi_0(x) = \phi_1(x).$$

よって,

$$H\phi_1(x) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\phi_1(x) = \hbar\omega\left(1 + \frac{1}{2}\right)\phi_1(x)$$

より, 第 1 励起状態のエネルギーは $\epsilon_1 = \dfrac{3}{2}\hbar\omega$ である.

II. xy 面上を動く電子の 2 次元調和振動子ポテンシャルの下での運動を考える. 電子のハミルトニアンは以下のように与えられる.

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

ただし, $p_x = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $p_y = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}$ である. H の固有関数は $f(x)g(y)$ の形で書くことができる.

(3) H のエネルギー固有値を値の小さい方から $E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$ と書くとき, E_0, E_1 の値と, それぞれの縮重度を求めよ. また, 対応する固有状態を ϕ_0, ϕ_1 を用いて表せ. 波動関数の規格化はしなくて良い.

答案　x に関する昇降演算子を $a_x^\dagger, a_x$ として, y に関する昇降演算子を $a_y^\dagger, a_y$ とすると, ハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega\left(a_x^\dagger a_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(a_y^\dagger a_y + \frac{1}{2}\right)$$

と書けるので, x, y に関するハミルトニアンをそれぞれ

$$H_x = \hbar\omega\left(a_x^\dagger a_x + \frac{1}{2}\right), \quad H_y = \hbar\omega\left(a_y^\dagger a_y + \frac{1}{2}\right)$$

とすると, ハミルトニアンは $H = H_x + H_y$ と書ける.

ここで, H の固有状態を $f(x)g(y) \neq 0$, 固有値を E とする. このとき, $Hf(x)g(y) = g(y)H_xf(x) + f(x)H_yg(y) = Ef(x)g(y)$ となるので,

$$f(x)\big[H_yg(y) - Eg(y)\big] + \big[H_xf(x)\big]g(y) = 0$$

となる. もし, $f(x)$ が H_x の固有状態でなければ, $f(x)$ と $H_xf(x)$ は線形独立なので $g(y) = 0$ となるが, これは $f(x)g(y) \neq 0$ と矛盾する. よって, $f(x)$ は H_x の固有状態でなければならず, 同様に $g(y)$ も H_y の固有状態でなければならない. また, H_x の $f(x)$ についての固有値を E_x として, H_y

の $g(y)$ についての固有値を E_y とすると,

$$Hf(x)g(y) = (E_x + E_y)f(x)g(y)$$

となる.

H の固有値は H_x, H_y の固有値の和なので, 基底状態と第 1 励起状態のエネルギーは

$$\begin{aligned} E_0 &= \epsilon_0 + \epsilon_0 = \hbar\omega \\ E_1 &= \epsilon_0 + \epsilon_1 = 2\hbar\omega \end{aligned}$$

となる. 基底状態は $\phi_0(x)\phi_0(y)$ だけなので縮重度は 1 で, 第 1 励起状態は $\phi_0(x)\phi_1(y)$, $\phi_1(x)\phi_0(y)$ の 2 つの状態があるので縮重度は 2 である.

(4) xy 面に垂直な角運動量の成分は $L_z = xp_y - yp_x$ で与えられる. $[L_z, H]$ はいくらか. 簡単な理由とともに答えよ（計算せずに答えて良い）.

答案　調和振動子ポテンシャルは中心力ポテンシャルなので, トルクはなく角運動量は保存する. よって, $[L_z, H] = 0$ である.

補足　x, p とハミルトニアンとの交換関係は

$$\left[x, \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\right] = \frac{1}{2m}[x, p^2] = \frac{1}{2m}\big([x,p]p + p[x,p]\big) = \frac{i\hbar}{m}p,$$

$$\left[p, \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\right] = \frac{1}{2}m\omega^2[p, x^2] = \frac{1}{2}m\omega^2\big([p,x]x + x[p,x]\big) = -i\hbar m\omega^2 x$$

となるから,

$$\begin{aligned} [L_z, H] &= [(xp_y - yp_x), H] \\ &= [xp_y, H] - [yp_x, H] \\ &= x[p_y, H] + [x, H]p_y - y[p_x, H] - [y, H]p_x \\ &= x[p_y, H_y] + [x, H_x]p_y - y[p_x, H_x] - [y, H_y]p_x \\ &= x(-i\hbar m\omega^2 y) + \frac{i\hbar}{m}p_x p_y - y(-i\hbar m\omega^2 x) - \frac{i\hbar}{m}p_y p_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

と示せる. あるいは, 昇降演算子とハミルトニアンとの交換関係

$$\left[a^\dagger, \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\right] = \hbar\omega[a^\dagger, a^\dagger a] = \hbar\omega\big([a^\dagger, a^\dagger]a + a^\dagger[a^\dagger, a]\big) = -\hbar\omega a^\dagger,$$

$$\left[a, \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\right] = \hbar\omega[a, a^\dagger a] = \hbar\omega\big([a, a^\dagger]a + a^\dagger[a, a]\big) = \hbar\omega a$$

と, のちに示す関係式

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\left(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger\right)$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
[L_z, H] &= \frac{\hbar}{i}\big[\big(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger\big), (H_x + H_y)\big] \\
&= \frac{\hbar}{i}\big(a_y[a_x^\dagger, H_x] + a_x^\dagger[a_y, H_y] - a_y^\dagger[a_x, H_x] - a_x[a_y^\dagger, H_y]\big) \\
&= \frac{\hbar}{i}\big[a_y(-\hbar\omega a_x^\dagger) + a_x^\dagger(\hbar\omega a_y) - a_y^\dagger(\hbar\omega a_x) - a_x(-\hbar\omega a_y^\dagger)\big] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

と示せる.

(5) E_0 に対応する状態が L_z の固有状態であることを示し, その固有値を求めよ.

答案　$\lambda = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
L_z \phi_0(x)\phi_0(y) &= \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\big[-\lambda(x^2+y^2)\big] \\
&= \frac{\hbar}{i}\big[x\cdot(-2\lambda y) - y\cdot(-2\lambda x)\big]\exp\big[-\lambda(x^2+y^2)\big] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より, 基底状態は L_z の固有値 0 に属する固有状態である.

(6) E_1 に対応する状態は, 適切な線形結合を取ることにより, L_z の固有状態にすることができる. そのようにして得られた状態に対して, L_z の固有値を求めよ.

答案　昇降演算子は

$$
a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right), \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)
$$

なので,

$$
x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger)
$$

が成り立つ. また, x と y との昇降演算子は可換なので,

$$
\begin{aligned}
L_z &= xp_y - yp_x \\
&= \frac{\hbar}{2i}\big[\big(a_x + a_x^\dagger\big)\big(a_y - a_y^\dagger\big) - \big(a_y + a_y^\dagger\big)\big(a_x - a_x^\dagger\big)\big] \\
&= \frac{\hbar}{2i}\big(2a_x^\dagger a_y - 2a_x a_y^\dagger\big) \\
&= \frac{\hbar}{i}\big(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger\big)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さらに, $a\phi_1(x) = aa^\dagger\phi_0(x) = \left(a^\dagger a + 1\right)\phi_0(x) = \phi_0(x)$ より,

$$L_z\phi_0(x)\phi_1(y) = \frac{\hbar}{i}\phi_1(x)\phi_0(y), \quad L_z\phi_1(x)\phi_0(y) = -\frac{\hbar}{i}\phi_0(x)\phi_1(y)$$

なので,

$$L_z\begin{pmatrix}\phi_0(x)\phi_1(y)\\ \phi_1(x)\phi_0(y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -i\hbar\\ i\hbar & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0(x)\phi_1(y)\\ \phi_1(x)\phi_0(y)\end{pmatrix}$$

となる．L_z の表現行列を対角化すると

$$\begin{pmatrix}0 & -i\hbar\\ i\hbar & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hbar & 0\\ 0 & -\hbar\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}$$

となるので, それと L_z の線形性から,

$$\begin{aligned}
&L_z\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0(x)\phi_1(y)\\ \phi_1(x)\phi_0(y)\end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}L_z\begin{pmatrix}\phi_0(x)\phi_1(y)\\ \phi_1(x)\phi_0(y)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\hbar\\ i\hbar & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0(x)\phi_1(y)\\ \phi_1(x)\phi_0(y)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hbar & 0\\ 0 & -\hbar\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0(x)\phi_1(y)\\ \phi_1(x)\phi_0(y)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\hbar & 0\\ 0 & -\hbar\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0(x)\phi_1(y)\\ \phi_1(x)\phi_0(y)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり,

$$\begin{aligned}
L_z\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)\phi_1(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_1(x)\phi_0(y)\right] &= \hbar\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)\phi_1(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_1(x)\phi_0(y)\right]\\
L_z\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)\phi_1(y) + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_1(x)\phi_0(y)\right] &= -\hbar\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)\phi_1(y) + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_1(x)\phi_0(y)\right]
\end{aligned}$$

となるので, L_z の固有値は $\pm\hbar$ である．

III. 前問 II の系の磁場に対する応答を考えよう．

(7) 一様な磁束密度 B を xy 面と垂直に印加すると, ハミルトニアンは以下のように与えられる．

$$H(B) = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x + eA_x\right)^2 + \left(p_y + eA_y\right)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

但し $(A_x, A_y) = \dfrac{B}{2}(-y, x)$ とする．e は電子の電荷の絶対値である．ハミルトニアンを, B に関して $H(B) = H(0) + W_1B + W_2B^2$ と展開するとき, W_1 を求めよ．

答案

$$
\begin{aligned}
H(B) &= \frac{1}{2m}\left[(p_x + eA_x)^2 + (p_y + eA_y)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) \\
&= \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{ey}{2}B\right)^2 + \left(p_y + \frac{ex}{2}B\right)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) \\
&= \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{e}{2m}(xp_y - yp_x)B + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2
\end{aligned}
$$

より, $W_1 = \dfrac{e}{2m}(xp_y - yp_x)$ である.

補足　一様磁場の関係する問題では, よく使われるゲージが 2 つある.

- 対称ゲージ： $\boldsymbol{A} = (-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0)$
- ランダウゲージ： $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$

これらはともに $\boldsymbol{B} = (0,0,B)$ に対応する.

(8) 固有状態のエネルギーを $E(B)$ とすると, その状態の $B=0$ における磁気モーメントは

$$
\mu = -\left.\frac{\partial E(B)}{\partial B}\right|_{B=0}
$$

で与えられる. 前問 II でエネルギーが E_0, E_1 となる全ての状態に対して μ を求めよ.

答案　H, L_z のそれぞれ固有値 $(n+1)\hbar\omega$, $l\hbar$ に属する同時固有状態 $\psi_{n,l}(x,y)$ を次のように定める.

$$
\begin{aligned}
\psi_{0,0}(x,y) &\equiv \phi_0(x)\phi_0(y), \\
\psi_{1,1}(x,y) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)\phi_1(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_1(x)\phi_0(y), \\
\psi_{1,-1}(x,y) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)\phi_1(y) + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_1(x)\phi_0(y).
\end{aligned}
$$

これらは $H(B) = H + \dfrac{eB}{2m}L_z + W_2B^2$ の固有状態ではないので, B^2 の項を無視して考える. このとき, $H(B)\psi_{n,l}(x,y) = \left[(n+1)\hbar\omega + \dfrac{eB}{2m}l\hbar\right]\psi_{n,l}(x,y)$ なので, 状態 $\psi_{n,l}(x,y)$ の $B=0$ における磁気モーメントは $-\dfrac{le\hbar}{2m}$ となる. よって, 状態 $\psi_{0,0}(x,y)$, $\psi_{1,1}(x,y)$, $\psi_{1,-1}(x,y)$ の $B=0$ における磁気モーメントはそれぞれ 0, $-\dfrac{e\hbar}{2m}$, $\dfrac{e\hbar}{2m}$ である.

(9) B^2 の項を無視せずに, $H(B)$ の厳密な固有エネルギーを考えよう. $B=0$ でエネルギーが E_0, E_1 となる全ての状態に関して, 任意の B における固有エネルギーを求めよ. また, それらの $\omega \to 0$ の極限を求めよ（ヒント：B^2 の項は調和振動子ポテンシャルとまとめることができる）.

答案　角振動数 ω_c, Ω を $\omega_c \equiv \dfrac{eB}{m}$, $\Omega \equiv \sqrt{\omega^2 + \dfrac{\omega_c^2}{4}}$ とすると, ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\Omega^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}\omega_c L_z$$

となるので, $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ を新たに

$$\phi_0(x) \equiv \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar}x^2\right), \quad \phi_1(x) \equiv x\exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar}x^2\right)$$

として, $\psi_{0,0}(x,y)$, $\psi_{1,1}(x,y)$, $\psi_{1,-1}(x,y)$ を新たに

$$\begin{aligned}
\psi_{0,0}(x,y) &\equiv \phi_0(x)\phi_0(y), \\
\psi_{1,1}(x,y) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)\phi_1(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_1(x)\phi_0(y), \\
\psi_{1,-1}(x,y) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x)\phi_1(y) + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_1(x)\phi_0(y)
\end{aligned}$$

とすると, これらは $H(B)$ の固有状態である. 状態 $\psi_{n,l}(x,y)$ のエネルギーは $(n+1)\hbar\Omega + \dfrac{l}{2}\hbar\omega_c$ なので, $B=0$ ではエネルギーが E_n になる. また, $\omega \to 0$ ではエネルギーは $\dfrac{1}{2}(n+l+1)\hbar\omega_c$ となる.

- $\psi_{0,0}(x,y)$: $E(B) = \hbar\sqrt{\omega^2 + \dfrac{e^2B^2}{4m^2}} \to \dfrac{\hbar eB}{2m}$
- $\psi_{1,1}(x,y)$: $E(B) = 2\hbar\sqrt{\omega^2 + \dfrac{e^2B^2}{4m^2}} + \dfrac{\hbar eB}{2m} \to \dfrac{3\hbar eB}{2m}$
- $\psi_{1,-1}(x,y)$: $E(B) = 2\hbar\sqrt{\omega^2 + \dfrac{e^2B^2}{4m^2}} - \dfrac{\hbar eB}{2m} \to \dfrac{\hbar eB}{2m}$

補足　$\omega \to 0$ の極限をとって考えるということは, 調和振動子ポテンシャルのない系について考えるということと同じである. しかし, 外場が磁場のみである状況でも, 粒子の電荷を q , サイクロトロン振動数を $\omega_c = \dfrac{qB}{m}$ とすると, ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}\omega_c L_z$$

となり, 問題は調和振動子の問題に帰着する. 右辺第 3 項は回転のエネルギーである.