問題 2

3 次元直交座標系の 3 軸を x, y, z とする．真空中に原点を中心とする半径 a の円 C が xy 平面上にある．C の円周上に固定された線密度 q の電荷が一様に分布している．

I. まず, C が静止している場合について考える．真空中の位置 $\boldsymbol{r'}$ に置かれた点電荷 Q が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャル ϕ_0 は

$$\phi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

と表される．ここで, ε_0 は真空の誘電率である．以下の問いに答えよ．

(1) C の電荷によって位置 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ に生じる静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

答案

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{qa\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{qa}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}.$$

(2) C の電荷によって位置 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ に生じる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．また, 原点に置かれた点電荷 Q' が受ける力を求めよ．

答案 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})$ より,

$$E_x(\boldsymbol{r}) = E_y(\boldsymbol{r}) = 0, \quad E_z(\boldsymbol{r}) = \frac{qaz}{2\varepsilon_0(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

また, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので, 原点に置かれた点電荷が受ける力は $\boldsymbol{0}$ である．

(3) C の電荷分布による位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ での電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は, C の線要素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r'}$ の大きさを $\mathrm{d}s' = |\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\,|$ として,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C q\,\mathrm{d}s'\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}$$

と書ける．ここで, z 軸まわりの方位角 φ を用い, C 上の座標を $\boldsymbol{r'} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$ と表すのが便利である．$|\boldsymbol{r}| \ll a$ の条件で, x, y, z の 1 次の項まで展開した式

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{-3} \sim a^{-3}\left[1 + \frac{3}{a}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right]$$

を利用して, 原点近傍における $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．このとき, q と逆符号の点電荷を原点から z 軸方向にわずかにずれた位置に置いたとき, 点電荷が受ける力の向きを答えよ．また, ずれの方向が xy 平面上（ $z = 0$ ）のとき, 点電荷が受ける力の向きを答えよ．

答案　原点近傍において,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C q\,\mathrm{d}s'\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3} \\
&\sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} a\,\mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} x-a\cos\varphi \\ y-a\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}\left(1+\frac{3x}{a}\cos\varphi+\frac{3y}{a}\sin\varphi\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} (x-a\cos\varphi)(a+3x\cos\varphi+3y\sin\varphi) \\ (y-a\sin\varphi)(a+3x\cos\varphi+3y\sin\varphi) \\ az+3ax\cos\varphi+3ay\sin\varphi \end{pmatrix} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} ax-3ax\cos^2\varphi \\ ay-3ay\sin^2\varphi \\ az \end{pmatrix} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 2\pi ax-3\pi ax \\ 2\pi ay-3\pi ay \\ 2\pi az \end{pmatrix} \\
&= \frac{qa}{4\varepsilon_0}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

また, q と逆符号の点電荷が受ける力は, ずれが z 軸方向のときずれを小さくする向きに, ずれが xy 平面上のときずれを大きくする向きに, いずれもずれと並行にはたらく.

II. 次に, C が原点を中心に電荷とともに xy 平面内で一定の角速度で回転する場合を考える. 回転の向きは z 軸の z が正の領域から見て反時計回りとする. これは, 回路 C に定常電流 I が生じている状況に他ならない. この電流 I による位置 $\boldsymbol{r}$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}
$$

で与えられる. ここで, μ_0 は真空の透磁率である. $\boldsymbol{r'}$ は C 上の位置, $\mathrm{d}\boldsymbol{r'}$ は C の線要素ベクトルである. 以下の問いに答えよ.

(4) C の電流 I による原点近傍の位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=(A_x,A_y,A_z)$ を, $|\boldsymbol{r}|\ll a$ の条件で $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{-1}$ を x,y,z の 1 次の項まで展開した式を利用して求めよ.

答案

$$
\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \left[(x-a\cos\varphi)^2+(y-a\sin\varphi)^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}}
$$

より,

$$
\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right|_{r=0} = \frac{1}{|\boldsymbol{r'}|} = \frac{1}{a},
$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{r}=0} = -\left.\frac{x-a\cos\varphi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\right|_{\boldsymbol{r}=0} = \frac{\cos\varphi}{a^2},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{r}=0} = \frac{\sin\varphi}{a^2},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{r}=0} = 0,$$

なので, 原点近傍において,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \sim \frac{1}{a} + \frac{x\cos\varphi}{a^2} + \frac{y\sin\varphi}{a^2} = \frac{1}{a^2}(a + x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$

となる. よって, 原点近傍で,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &\sim \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{a^2}(a + x\cos\varphi + y\sin\varphi)\\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\begin{pmatrix}-y\sin^2\varphi\\ x\cos^2\varphi\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\begin{pmatrix}-\pi y\\ \pi x\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{\mu_0 I}{4a}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる.

(5) (4) で求めたベクトルポテンシャルを使って磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ.

答案 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ より,

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

(6) C の z 軸まわりの慣性モーメントと角運動量ベクトルをそれぞれ $\mathcal{I}_C$, $\boldsymbol{L}$ とする. 電流 I を $a, q, \mathcal{I}_C, \boldsymbol{L}$ の大きさ L によって表せ. また, ここで求めた表式と (5) の結果を用いて $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{L}$ の関係を求めよ. さらに, 原点に磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を置くとき, $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{B}$ のポテンシャルエネルギー（相互作用エネルギー） V が $V = -\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B}$ で表されるとして, V を $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{L}$ の内積を含む式で表せ.

答案 C の回転の角速度は $\dfrac{L}{\mathcal{I}_C}$ なので, $I=\dfrac{qaL}{\mathcal{I}_C}$ である．また, $B_z=\dfrac{\mu_0 qL}{2\mathcal{I}_C}$ で, $\boldsymbol{L}$ は z 軸正の向きなので, $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 q}{2\mathcal{I}_C}\boldsymbol{L}$ が成り立つ．よって, 原点に磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を置いたとき, 相互作用のポテンシャルエネルギーは $V=-\dfrac{\mu_0 q}{2\mathcal{I}_C}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L}$ となる．

III. 最後に, 定常電流 I が流れている回路 C の半径 a が微小である場合を考える．定常電流 I の向きは前問 II と同じとする．

(7) C の電流 I による位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=(A_x,A_y,A_z)$ を, $|\boldsymbol{r}|\gg a$ の条件で $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{-1}$ を a の 1 次の項まで展開した式を利用して表すと,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 Ia^2}{4r^3}(-y,x,0)$$

となる．磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．また, $\boldsymbol{m_1}=(0,0,\pi Ia^2)$ と定義すると, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m_1}r^2\right]$$

と一致することを示せ．ただし, $r=|\boldsymbol{r}|$ である．

答案 例えば, $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r^3}=-\dfrac{3x}{r^5}$ なので, $\boldsymbol{\nabla}\dfrac{1}{r^3}=-\dfrac{3\boldsymbol{r}}{r^5}$ が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\\
&=\frac{\mu_0 Ia^2}{4}\left[\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)\times\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\nabla}\times\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{\mu_0 Ia^2}{4}\left[-\frac{3}{r^5}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{\mu_0 Ia^2}{4r^5}\left[3\begin{pmatrix}xz\\yz\\z^2-r^2\end{pmatrix}+r^2\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{\mu_0 Ia^2}{4r^5}(3z\boldsymbol{r}-r^2\boldsymbol{e}_z)
\end{aligned}$$

となる．ただし, $\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$ である．また, $\boldsymbol{m_1}=\pi Ia^2\boldsymbol{e}_z$ なので,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})&=\frac{\mu_0}{4\pi r^5}\pi Ia^2\left[3(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-\boldsymbol{e}_z r^2\right]\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m_1}r^2\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．

(8) (7) の $\boldsymbol{m_1}$ による磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対して, 原点からの距離 r の z 軸上の位置 $\boldsymbol{r}$ に別の磁気モーメント $\boldsymbol{m_2}$ を置く．$\boldsymbol{m_2}=\pm\boldsymbol{m_1}$ のとき, それぞれ $\boldsymbol{m_2}$ と $\boldsymbol{B}$ のポテンシャルエネルギー（相互作用エネルギー） V

を I, a, r を含む式で表せ．次に，原点からの距離 r の xy 平面上の位置 $\boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{m_2}$ を置き直す．$\boldsymbol{m_2} = \pm\boldsymbol{m_1}$ のとき，それぞれ同様に V を求めよ．

答案　$\boldsymbol{m_2}$ が z 軸上のとき，$\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r} = \pi I a^2 \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{r} = \pi I a^2 r$ なので，

$$
\begin{aligned}
V &= \mp \boldsymbol{m_1} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m_1} r^2\right] \\
&= \mp \frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})^2 - \boldsymbol{m_1}^2 r^2\right] \\
&= \mp \frac{\pi\mu_0 I^2 a^4}{2r^3}
\end{aligned}
$$

となる．また，$\boldsymbol{m_2}$ が xy 平面上のとき，$\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ なので，

$$
\begin{aligned}
V &= \mp \boldsymbol{m_1} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left(-\boldsymbol{m_1} r^2\right) \\
&= \pm \frac{\pi\mu_0 I^2 a^4}{4r^3}
\end{aligned}
$$

となる．