1　実スカラー場

自由な実スカラー場を考える.

$$L = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{1.1}$$

ここで, 計量を

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{1.2}$$

とすると, Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{1.3}$$

と書ける. この章の大雑把な流れは次のとおりである.

1. **古典的に運動方程式を解く.**
2. **正準量子化する.**
3. **エネルギー固有状態を構成する.**

他の章でも主にこの流れで進み, 必要に応じて数学的な準備をする.

1.1　古典論

この節では, 正準形式で古典的に運動方程式を解いて, 解がモード展開の形で書けることを見る.

まず, $\phi(x)$ の共役運動量を $\pi(x)$ とすると,

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta\dot{\phi}(\mathbf{x})} = \dot{\phi}(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

である. 分かりやすさのために時間の引数を敢えて書かなかった. この理論は 3 次元空間の各点に 1 つずつ独立な自由度 $\phi(\mathbf{x})$ を持っていて, Lagrangian はそれらをある時刻において足し合わせたものである. 有限自由度の力学の場合の定義

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial\dot{q}^i}, \qquad q = (q^1, \ldots, q^n)$$

を思い出すと, 式 (1.4) がその自然な一般化であることがすぐ分かるだろう.

1.1.1　汎関数微分の定義

ここで一応, 汎関数微分の定義を与えておく. 読み飛ばしても構わない. 一般に, 関数 $f(x)$ の汎関数 $I[f]$ に対して, その (1 次の) 変分は任意の試験関数 $\delta f(x)$ を使って

$$\delta I[f; \delta f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I[f + t\delta f]\bigg|_{t=0} \tag{1.5}$$

で定義される. これ以降, 試験関数は δ を付けて表し, 変分の引数には書かないことにする. もしこれが

$$\delta I[f] = \int \mathrm{d}x\, g(x)\delta f(x) \tag{1.6}$$

と表せるなら, この $g(x)$ が汎関数微分の定義である.

汎関数 $I[f]$ の変分が

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I[f+t\delta f]\Big|_{t=0} = \int \mathrm{d}x\, g(x)\delta f(x) \tag{1.7}$$

と表せるとき, **汎関数微分**とは

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f(x)} = g(x). \tag{1.8}$$

である.

例えば, Lagrangian(1.1) の $\dot{\phi}(\mathbf{x})$ に関する変分は

$$\delta L[\dot{\phi}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}^3x \, \frac{1}{2}\left(\dot{\phi} + t\delta\dot{\phi}\right)^2 \Big|_{t=0} = \int \mathrm{d}^3x \, \dot{\phi}\delta\dot{\phi}$$

なので, 式 (1.4) の 2 番目の等号は正しい. また一般に, 関数 $f(x)$ 自体を自身の汎関数だと思ったとき,

$$\begin{aligned}
\delta f(y) &= \delta \int \mathrm{d}x\, \delta(x-y) f(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}x\, \delta(x-y)[f(x) + t\delta f(x)]\Big|_{t=0} \\
&= \int \mathrm{d}x\, \delta(x-y)\delta f(x)
\end{aligned}$$

より,

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta(x-y) \tag{1.9}$$

が成り立つ. 他には, 微分を含む汎関数についても汎関数微分を考えられる. 例えば,

$$I[f] = \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{2} f'(x)^2 \tag{1.10}$$

なら

$$\delta I[f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{2}(f' + t\delta f')^2 \Big|_{t=0} = \int \mathrm{d}x\, f'\delta f'$$

なので, 表面項が無視できるなら部分積分して

$$\frac{\delta I}{\delta f(x)} = -f''(x) \tag{1.11}$$

となる.

1.1.2 運動方程式とその解

Hamiltonian は

$$H[\phi, \pi] = \int \mathrm{d}^3x \, \pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - L$$

$$= \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \tag{1.12}$$

となる．Poisson 括弧は, 同時刻の関数 $\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})$ の汎関数 f, g に対して

$$\{f, g\}_\mathrm{P} = \int \mathrm{d}^3z \left[\frac{\delta f}{\delta\phi(\mathbf{z})}\frac{\delta g}{\delta\pi(\mathbf{z})} - (\phi \leftrightarrow \pi)\right] \tag{1.13}$$

で定義されるので,

$$\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\}_\mathrm{P} = \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\}_\mathrm{P} = 0, \qquad \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\}_\mathrm{P} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{1.14}$$

が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}
\{\phi(\mathbf{x}), H\}_\mathrm{P} &= \int \mathrm{d}^3z\, \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x})\pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{x}), \\
\{\pi(\mathbf{x}), H\}_\mathrm{P} &= -\int \mathrm{d}^3z\, \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{x})(-\nabla^2\phi + m^2\phi)(\mathbf{z}) = (\nabla^2 - m^2)\phi(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

より, 運動方程式は

$$\dot{\phi}(x) = \pi(x), \qquad \dot{\pi}(x) = (\nabla^2 - m^2)\phi(x), \tag{1.15}$$

つまり, **Klein-Gordon 方程式**

$$(-\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 \tag{1.16}$$

となる．この一般解はすぐに求まる．特に $\phi^*(x) = \phi(x)$ に注意する．

運動方程式 (1.16) の解は, 時間によらない任意の複素数値関数 $a(\mathbf{k})$ を用いて

$$\phi(x) = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\left[a(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right], \qquad \widetilde{\mathrm{d}k} := \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}, \qquad k^0 = \omega := \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{1.17}$$

と書ける．

最後に, 各モード $a(\mathbf{k})$ が $\phi(x)$ を使ってどう書けるかを見る．先に微分記号を定義する．

$$f \overleftrightarrow{\partial} g = f\partial g - (\partial f)g. \tag{1.18}$$

$k^0 = \omega$ として, 次を計算してみる．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x) \\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\overleftrightarrow{\partial}_0 \int \widetilde{\mathrm{d}k'}\left[a(\mathbf{k}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} + a^*(\mathbf{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\right] \\
&= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\overleftrightarrow{\partial}_0 \int \widetilde{\mathrm{d}k'}\left[a(\mathbf{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t} + a^*(-\mathbf{k}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}\right] \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} \\
&= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\overleftrightarrow{\partial}_0 \frac{1}{2\omega}\left[a(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + a^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{2\omega}\left[(-\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\omega)a(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + (\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\omega)a^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] \\
&= a(\mathbf{k}).
\end{aligned}$$

$\phi(x)$ の Fourier モードは, $\phi(x)$ から

$$a(\mathbf{k}) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x), \qquad k^0 = \omega \tag{1.19}$$

で得られる.

1.2 正準量子化

次のようにして理論を正準量子化する.

場 $\phi(x)$ を演算子として再解釈し, 同時刻交換関係を Poisson 括弧 (1.14) の i 倍で定義する.

$$[\phi(t,\mathbf{x}), \phi(t,\mathbf{x}')] = [\pi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')] = 0, \qquad [\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')] = \mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{1.20}$$

特に今の場合, $\phi(x)$ は Hermite 演算子であると仮定する.

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x). \tag{1.21}$$

このとき, Fourier モードの表式 (1.19) から, $a^*(\mathbf{k})$ は $a^\dagger(\mathbf{k})$ で置き換えられることが分かる. 次に, $\phi(x), \pi(x)$ の交換関係から $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ の交換関係を計算する.

$$\begin{aligned}
[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\Big(\pi(t,\mathbf{x}) - \mathrm{i}\omega\phi(t,\mathbf{x})\Big), -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}\Big(\pi(t,\mathbf{x}') + \mathrm{i}\omega'\phi(t,\mathbf{x}')\Big)\right] \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}\Big(\mathrm{i}\omega'[\pi(t,\mathbf{x}), \phi(t,\mathbf{x}')] - \mathrm{i}\omega[\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')]\Big) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}(\omega'+\omega)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}}(\omega'+\omega) \\
&= (2\pi)^3 2\omega\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\
[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= \left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\Big(\pi(t,\mathbf{x}) - \mathrm{i}\omega\phi(t,\mathbf{x})\Big), \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}\Big(\pi(t,\mathbf{x}') - \mathrm{i}\omega'\phi(t,\mathbf{x}')\Big)\right] \\
&= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}\Big(-\mathrm{i}\omega'[\pi(t,\mathbf{x}), \phi(t,\mathbf{x}')] - \mathrm{i}\omega[\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')]\Big) \\
&= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}(-\omega'+\omega)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}(\omega'-\omega) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ は交換関係

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \qquad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \tag{1.22}$$

を満たす.

1.3 スペクトル