QFT まとめ 1：自由な物質場の正準量子化

齋藤 駆

2025 年 5 月 26 日

概要

これは, 4 次元 Minkowski 時空における自由な物質場の正準量子化についてのノートである. 内容は, どんな場の理論の教科書にも一番最初に書いてあるような基本的なことだが, それでもわざわざ書くのには主に 2 つの目的があるからである: (1) 人によりがちな Lorentz 群の表現の表記を自分の中で統一すること.(2) 簡略化されがちなフェルミオンの量子化を Dirac 括弧を使って厳密に行うこと.

目次

1　実スカラー場

自由な実スカラー場を考える.

$$L = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}, \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{1.1}$$

ここで, 計量を

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{1.2}$$

とすると, Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{1.3}$$

と書ける. この章の大雑把な流れは次のとおりである.

1. **古典的に運動方程式を解く.**
2. **正準量子化する.**
3. **エネルギー固有状態を構成する.**

他の章でも主にこの流れで進み, 必要に応じて数学的な準備をする.

1.1　古典論

この節では, 正準形式で古典的に運動方程式を解いて, 解がモード展開の形で書けることを見る.

まず, $\phi(x)$ の共役運動量を $\pi(x)$ とすると,

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\delta L[\phi,\dot{\phi}]}{\delta\dot{\phi}(\mathbf{x})} = \dot{\phi}(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

である. 分かりやすさのために時間の引数を敢えて書かなかった. この理論は 3 次元空間の各点に 1 つずつ独立な自由度 $\phi(\mathbf{x})$ を持っていて, Lagrangian はそれらをある時刻において足し合わせたものである. 有限自由度の力学の場合の定義

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}^i}, \qquad q = (q^1,\ldots,q^n)$$

を思い出すと, 式 (1.4) がその自然な一般化であることがすぐ分かるだろう.

1.1.1　汎関数微分の定義

ここで一応, 汎関数微分の定義を与えておく. 読み飛ばしても構わない. 一般に, 関数 $f(x)$ の汎関数 $I[f]$ に対して, その (1 次の) 変分は任意の試験関数 $\delta f(x)$ を使って

$$\delta I[f;\delta f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I[f+t\delta f]\bigg|_{t=0} \tag{1.5}$$

で定義される. これ以降, 試験関数は δ を付けて表し, 変分の引数には書かないことにする. もしこれが

$$\delta I[f] = \int \mathrm{d}x\,g(x)\delta f(x) \tag{1.6}$$

と表せるなら，この $g(x)$ が汎関数微分の定義である．

汎関数 $I[f]$ の変分が

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I[f + t\delta f]\right|_{t=0} = \int \mathrm{d}x\, g(x) \delta f(x) \tag{1.7}$$

と表せるとき，**汎関数微分**とは

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f(x)} = g(x). \tag{1.8}$$

である．

例えば，Lagrangian(1.1) の $\dot{\phi}(\mathbf{x})$ に関する変分は

$$\delta L[\dot{\phi}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}^3x\, \frac{1}{2}\left.\left(\dot{\phi} + t\delta\dot{\phi}\right)^2\right|_{t=0} = \int \mathrm{d}^3x\, \dot{\phi}\delta\dot{\phi}$$

なので，式 (1.4) の 2 番目の等号は正しい．また一般に，関数 $f(x)$ 自体を自身の汎関数だと思ったとき，

$$\begin{aligned} \delta f(y) &= \delta \int \mathrm{d}x\, \delta(x-y) f(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}x\, \delta(x-y) \left.[f(x) + t\delta f(x)]\right|_{t=0} \\ &= \int \mathrm{d}x\, \delta(x-y) \delta f(x) \end{aligned}$$

より，

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta(x-y) \tag{1.9}$$

が成り立つ．他には，微分を含む汎関数についても汎関数微分を考えられる．例えば，

$$I[f] = \int \mathrm{d}x\, \frac{1}{2} f'(x)^2 \tag{1.10}$$

なら

$$\delta I[f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\left.(f' + t\delta f')^2\right|_{t=0} = \int \mathrm{d}x\, f'\delta f'$$

なので，表面項が無視できるなら部分積分して

$$\frac{\delta I}{\delta f(x)} = -f''(x) \tag{1.11}$$

となる．

1.1.2 運動方程式とその解

Hamiltonian は

$$H[\phi, \pi] = \int \mathrm{d}^3x\, \pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - L$$

$$= \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \tag{1.12}$$

となる．Poisson 括弧は, 同時刻の関数 $\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})$ の汎関数 f, g に対して

$$\{f, g\}_\mathrm{P} = \int \mathrm{d}^3z \left[\frac{\delta f}{\delta\phi(\mathbf{z})}\frac{\delta g}{\delta\pi(\mathbf{z})} - (\phi \leftrightarrow \pi)\right] \tag{1.13}$$

で定義されるので,

$$\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\}_\mathrm{P} = \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\}_\mathrm{P} = 0, \qquad \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\}_\mathrm{P} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{1.14}$$

が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}
\{\phi(\mathbf{x}), H\}_\mathrm{P} &= \int \mathrm{d}^3z\, \delta^3(\mathbf{z}-\mathbf{x})\pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{x}), \\
\{\pi(\mathbf{x}), H\}_\mathrm{P} &= -\int \mathrm{d}^3z\, \delta^3(\mathbf{z}-\mathbf{x})(-\nabla^2\phi + m^2\phi)(\mathbf{z}) = (\nabla^2 - m^2)\phi(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

より, 運動方程式は

$$\dot{\phi}(x) = \pi(x), \qquad \dot{\pi}(x) = (\nabla^2 - m^2)\phi(x), \tag{1.15}$$

つまり, **Klein-Gordon 方程式**

$$(-\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 \tag{1.16}$$

となる．この一般解はすぐに求まる．特に $\phi^*(x) = \phi(x)$ に注意する．

運動方程式 (1.16) の解は, 時間によらない任意の複素数値関数 $a(\mathbf{k})$ を用いて

$$\phi(x) = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\left[a(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a^*(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right], \qquad \widetilde{\mathrm{d}k} := \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}, \qquad k^0 = \omega := \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{1.17}$$

と書ける．

最後に, 各モード $a(\mathbf{k})$ が $\phi(x)$ を使ってどう書けるかを見る．先に微分記号を定義する．

$$f\overleftrightarrow{\partial}g = f\partial g - (\partial f)g. \tag{1.18}$$

$k^0 = \omega$ として, 次を計算してみる．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x) \\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\overleftrightarrow{\partial}_0 \int \widetilde{\mathrm{d}k'}\left[a(\mathbf{k}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} + a^*(\mathbf{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\right] \\
&= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\overleftrightarrow{\partial}_0 \int \widetilde{\mathrm{d}k'}\left[a(\mathbf{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t} + a^*(-\mathbf{k}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}\right]\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} \\
&= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\overleftrightarrow{\partial}_0 \frac{1}{2\omega}\left[a(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + a^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{2\omega}\left[(-\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\omega)a(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + (\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\omega)a^*(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] \\
&= a(\mathbf{k}).
\end{aligned}$$

$\phi(x)$ の Fourier モードは, $\phi(x)$ から

$$a(\mathbf{k}) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x), \qquad k^0 = \omega \tag{1.19}$$

で得られる.

1.2 正準量子化

次のようにして理論を正準量子化する.

場 $\phi(x)$ を演算子として再解釈し, 同時刻交換関係を Poisson 括弧 (1.14) の i 倍で定義する.

$$[\phi(t,\mathbf{x}),\phi(t,\mathbf{x}')] = [\pi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}')] = 0, \qquad [\phi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}')] = \mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{1.20}$$

特に今の場合, $\phi(x)$ は Hermite 演算子であると仮定する.

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x). \tag{1.21}$$

このとき, Fourier モードの表式 (1.19) から, $a^*(\mathbf{k})$ は $a^\dagger(\mathbf{k})$ で置き換えられることが分かる. 次に, $\phi(x),\pi(x)$ の交換関係から $a(\mathbf{k}),a^\dagger(\mathbf{k})$ の交換関係を計算する.

$$\begin{aligned}
[a(\mathbf{k}),a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\Big(\pi(t,\mathbf{x}) - \mathrm{i}\omega\phi(t,\mathbf{x})\Big), -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}\Big(\pi(t,\mathbf{x}') + \mathrm{i}\omega'\phi(t,\mathbf{x}')\Big)\right] \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}\Big(\mathrm{i}\omega'[\pi(t,\mathbf{x}),\phi(t,\mathbf{x}')] - \mathrm{i}\omega[\phi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}')]\Big) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}(\omega'+\omega)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}}(\omega'+\omega) \\
&= (2\pi)^3 2\omega\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\
[a(\mathbf{k}),a(\mathbf{k}')] &= \left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\Big(\pi(t,\mathbf{x}) - \mathrm{i}\omega\phi(t,\mathbf{x})\Big), \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}\Big(\pi(t,\mathbf{x}') - \mathrm{i}\omega'\phi(t,\mathbf{x}')\Big)\right] \\
&= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}\Big(-\mathrm{i}\omega'[\pi(t,\mathbf{x}),\phi(t,\mathbf{x}')] - \mathrm{i}\omega[\phi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}')]\Big) \\
&= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}\int \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{x}'}(-\omega'+\omega)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}(\omega'-\omega) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$a(\mathbf{k}),a^\dagger(\mathbf{k})$ は交換関係

$$[a(\mathbf{k}),a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \qquad [a(\mathbf{k}),a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}),a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \tag{1.22}$$

を満たす.

1.3 スペクトル